Université de Montréal

UNE APPROCHE DE FORMATION DIDACTIQUE À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU PRIMAIRE

Par

Elena Ekimova-Boublil

Département de didactique des mathématiques

Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
En vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.) en sciences de l'éducation,
option didactique

octobre, 2005

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

UNE APPROCHE DE FORMATION DIDACTIQUE À L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE AU PRIMAIRE

Présentée par
Elena Ekimova-Boublil

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

[redacted]
président-rapporteur, représentant du doyen de la FES

[redacted]
directeur de recherche

[redacted]
codirecteur de recherche

[redacted]
membre du jury

[redacted]
examinateur externe

SOMMAIRE

Cette recherche vise l'un des objectifs principaux de la formation didactique, celui du développement des connaissances permettant l'élaboration, la réalisation et l'analyse du processus d'enseignement. En nous centrant sur l'appropriation des savoirs géométriques et didactiques dans le cadre de formation didactique à l'enseignement de la géométrie du programme du baccalauréat en enseignement primaire, nous voulons savoir comment coordonner la formation didactique et la formation géométrique de telle sorte qu'il y ait chez les futurs enseignants une progression de niveaux de la pensée géométrique et une appropriation et mise en œuvre des concepts didactiques.

L'analyse de recherches menées dans le domaine de la formation des maîtres portant sur la préparation mathématique des enseignants du primaire (Mayberry, 1983; Graeber, Tirosh, Glover, 1986; Ginther, Pigge et Gibney, 1987; Porter, 1989; Brown, Cooney et Jones, 1990; Fennema et Franke, 1992; Bauersfeld, 1994), nous a permis de faire ressortir leurs difficultés et les raisons principales de leurs lacunes mathématiques. Les difficultés se situent sur les plans de la visualisation, du langage, du raisonnement (Clements et Battista, 1992; Bishop, 1989; Hershkowitz, 1989) et sont influencées par le contenu étudié, par le nombre de cours suivis et surtout par la façon dont ce contenu a été enseigné et appris. Notre propre analyse des difficultés et des besoins des futurs maîtres pour l'enseignement de la géométrie effectuée dans le cadre de cette recherche ainsi que notre expérience d'enseignement à cette clientèle corroborent les résultats de recherches étudiées.

Cette analyse nous a conduite à rechercher les moyens didactiques permettant la résolution des difficultés des étudiants en apprentissage de la géométrie et à faire le choix des savoirs didactiques qui permettront d'associer le plus étroitement possible le contenu notionnel de la géométrie à son apprentissage et à une réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. Les différents enjeux de la formation didactique sont analysés au chapitre 1.

Au chapitre 2, nous étudions les différents concepts qui nous ont servi de *Cadre théorique* pour l'élaboration et la mise en œuvre d'un dispositif de recherche. Il s'agit essentiellement de la *Théorie de situations didactiques* de Brousseau (1986a, 1998), de niveaux de développement de la pensée de van Hiele (1959/1985) et de la notion de registre de représentation de Duval (1995).

Nous avons utilisé la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) en tant que moyen d'organisation d'« *ingénierie didactique de formation* » qui a guidé le fonctionnement des différentes « *ingénieries des notions géométriques* » à l'intérieur du projet de la formation. Le chapitre 3 présente la démarche méthodologique pour atteindre les objectifs de la recherche et les outils méthodologiques permettant le recueil et l'analyse des informations.

En tenant compte des analyses préalables décrites au chapitre 4, nous expliquons au chapitre 5 comment s'est organisée la conception de la formation. Le dispositif de la formation didactique à l'enseignement de la géométrie présente une structure qui réunit les objectifs de la formation (géométriques et didactiques), la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique et différents types d'activités qui tiennent compte de la multiplicité et de la coordination des registres de représentation et qui cherchent à atteindre les objectifs visés.

À partir des données recueillies dans notre recherche et du cadre théorique développé, nous analysons au chapitre 6 le rôle des activités de formation sur l'évolution géométrique et didactique de 116 étudiants, futurs enseignants. Nous évaluons le fonctionnement de notions géométriques et les procédures mises en œuvre par les étudiants et nous relions leurs décisions dans les travaux pratiques de formation, dans les questions d'analyse posées aux examens et dans les travaux de session (analyse et conception des activités d'enseignement) aux savoirs didactiques et géométriques étudiés dans le cadre du dispositif de formation.

Notre étude apporte un éclairage sur le comportement du futur enseignant face aux situations de formation. Elle montre comment et dans quelle mesure se développe le niveau conceptuel des étudiants et quel rôle joue dans cette progression la formation géométrique et didactique. La démarche proposée cherche à favoriser la consolidation des connaissances géométriques, à développer les connaissances didactiques et à enrichir le répertoire des moyens permettant d'intervenir dans le contexte d'enseignement de la géométrie. La recherche veut donc contribuer à l'amélioration de la formation des futurs maîtres sur le plan pratique et aussi à la didactique de formation des maîtres sur un plan plus théorique et méthodologique.

Mots clés : didactique des mathématiques, futurs enseignants, formation des maîtres, niveaux de la pensée géométrique, activités géométriques, registres de représentation

ABSTRACT

This research is centered on the appropriation of geometrical and didactical knowledge within the initial preparation of primary teachers. It seeks to coordinate the didactic-training formation and the geometry-knowledge formation in such a way that it will enhance the teaching capabilities and skills of future teachers.

This training formation research has a structure which brings together the objectives of geometrical formation (the development of visualization, language and reasoning) and of the didactic formation (the development of didactic knowledge allowing to intervene in the context of teaching of geometry). It also analyses the progress of training formation according to "levels of geometrical thinking" (van Hiele, 1959/1985) embedded in the various types of geometric activities (observation, manipulation, construction, representation, problem solving…). These activities encompass the multiplicity and coordination of the "registers of representation" (Duval, 1995) which seeks to achieve the pursued research objectives.

The methodology of didactic engineering (Artigue, 1988) was employed as a means of organizing the "didactic engineering of teaching formation" which guides the functions of different "engineering of geometrical concepts" within the realm of the training-formation. According to the theoretical framework developed, we have analyzed the role of "training situations" in the geometrical and didactical evolution of 116 students, future teachers. We evaluated the functions of geometrical concepts in various situations as well as student's participation and decision making processes in practical works of teacher training formation (didactical questions exams and essay on design and planning of teaching situations). We connect the decision making processes to the didactic and geometrical knowledge studied within the framework of the course objectives.

Key words: didactic of mathematics, future teachers, didactic of teacher's formation, levels of geometrical thinking, geometrical activities, "register" of representation

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma gratitude à tous qui ont contribué à la réalisation de cette recherche.

Je remercie d'abord mes codirecteurs de recherche, les professeurs France Caron et Jacques Bélair qui ont accepté de diriger ce travail en dépit de leurs multiples occupations. Ma profonde gratitude s'adresse à France Caron pour son soutien et l'intérêt qu'elle a porté à mon travail qui se sont manifestés par le temps qu'elle a consacré avec patience et persévérance à la discussion et à la lecture des différentes versions de cette recherche. Ses apports ont amélioré la qualité, la cohérence et la profondeur de mon travail. Je remercie aussi M. Bélair pour son suivi dans l'aboutissement de la recherche.

Je suis reconnaissante à Madame Lemoyne, professeure au département de didactique des mathématiques pour ses commentaires précis et opportuns.

Je veux remercier toutes les étudiantes impliquées dans la phase pré-expérimentale qui ont généreusement donné de leur temps pour les entrevues et qui ont accepté que j'observe leur travail.

Je suis très reconnaissante aux institutions qui m'ont permis de réaliser ce travail. Mes remerciements s'adressent au Fond FCAR et au Département de didactique des mathématiques de l'Université de Montréal pour leur soutien financier au cours de cette recherche doctorale.

Finalement, je remercie ma famille pour la compréhension, l'encouragement et le soutien constant.

INTRODUCTION

Les transformations planifiées par la réforme actuelle (MEQ, 2002) imposent de nombreux changements relatifs à l'organisation des apprentissages qui constitue un facteur crucial de la réussite du nouveau programme. De quelle préparation a besoin l'enseignant débutant pour orchestrer de façon cohérente cette nouvelle organisation des apprentissages? Comment organiser la formation du futur maître pour que les connaissances développées dans le cadre de la formation initiale soient utiles et efficaces au sein de l'école et de la classe? Cette question préoccupe toutes les facultés d'éducation responsables de la formation de nouveaux enseignants. En tant qu'étudiante au doctorat, nous avons eu le privilège de préparer, réaliser et évaluer les apprentissages des futurs maîtres, car nous avons assumé en même temps la fonction de chargée de cours. Il était donc tout à fait naturel que nous nous soyons intéressée à cette problématique et à l'impact de notre formation sur le travail pratique des futurs enseignants.

Plusieurs recherches rapportent des difficultés chez les enseignants du primaire avec certains contenus mathématiques enseignés (Mayberry, 1983; Graeber, Tirosh, Glover, 1986; Ginther, Pigge et Gibney, 1987; Porter, 1989; Brown, Cooney et Jones, 1990; Fennema et Franke, 1992; Bauersfeld, 1994). En géométrie, ces difficultés se situent autant sur les plans de la visualisation et du raisonnement que dans l'organisation des concepts géométriques (Clements et Battista, 1992; Bishop, 1989; Hershkowitz, 1989). Notre propre analyse des cas d'échec à l'examen de classement en mathématiques pour la formation à l'enseignement primaire ainsi que notre expérience d'enseignement à cette clientèle corroborent ces résultats.

Ces résultats expliquent d'ailleurs pourquoi nous avons choisi de nous intéresser aux futurs maîtres du primaire, eux dont le rôle est si important dans cette étape fondamentale de la formation des élèves. Préoccupée par ce problème, nous nous sommes fixé comme objectif d'élaborer un dispositif pour l'enseignement de la didactique de la géométrie permettant au futur enseignant d'approfondir ses propres connaissances, d'établir des liens entre le savoir géométrique et le savoir didactique, de développer une attitude critique constructive face aux différentes sources didactiques et d'établir un lien cohérent entre ses connaissances et leur utilité pour la pratique enseignante.

En paraphrasant des didacticiens, nous souhaitions élaborer un dispositif qui permettrait l'implication personnelle du futur enseignant dans le jeu didactique pour le comprendre (Artigue, 1984) et pour mieux connaître son propre fonctionnement et son mode de faire des mathématiques (Conne, 1999).

Le rôle du maître est un sujet actuel pour la didactique et « *la modélisation didactique de sa position* [...] *constitue aujourd'hui encore une tâche à peine ébauchée* » (Chevallard, 1997, p. 24). Chevallard explique ce manque d'attention au sujet «professeur» dans les recherches didactiques par le fait que: « *On conçoit, on rédige, on diffuse, plutôt, « des activités » : on se préoccupe toujours de l'enseignant, mais moins pour ce qu'il doit faire lui-même (le cours) que pour ce qu'il pourra proposer de faire aux élèves (les activités)* » (Chevallard, 1981, pp.21-22, cité dans Schubauer-Leoni, 1999, p.39). Bien que dans ses travaux, Brousseau (1988a et b, 1995) ait montré la complexité du rôle du professeur, il reste encore un vaste champ de questions qui exigent l'intervention des chercheurs en didactique des mathématiques. Notre recherche qui s'intéresse au futur enseignant, au développement de ses compétences professionnelles à l'intérieur de formation initiale s'insère dans le domaine d'étude de la didactique consacrée à l'analyse du rôle du maître.

L'enseignement de la géométrie au primaire vise à enrichir et à structurer l'expérience spatiale des élèves, à développer leur vocabulaire de l'espace, à leur donner les moyens d'exploiter leurs capacités de visualisation et leur environnement spatial. Pour pouvoir atteindre ces objectifs, l'enseignant lui-même doit posséder ces aptitudes et avoir connaissance de cet environnement. De plus, pour constituer une progression des apprentissages, car les notions introduites au primaire seront reprises par l'enseignement secondaire, il est indispensable de créer, dès l'école primaire, la base « correcte » des connaissances et des démarches géométriques. Donc, en nous intéressant à la qualité de la formation géométrique et didactique des futurs maîtres au primaire, nous voulons contribuer à la qualité de l'enseignement de la géométrie et des apprentissages des élèves.

Dans ce but, nous avons conçu un dispositif de formation des futurs maîtres qui tient compte des phénomènes d'apprentissage de la géométrie, des objectifs ministériels, de demandes et de besoins pour l'enseignement de la géométrie au primaire exprimés par de futurs maîtres, de contraintes de situation de formation, du contenu des manuels autorisés à l'enseignement et, bien sûr, des travaux et théories en lien avec la formation didactique des futurs maîtres du primaire. Ces différents enjeux de la formation didactique sont analysés au chapitre 1.

Pour les analyses de la structure du dispositif de formation, des activités proposées aux étudiants et des enjeux de ces activités, nous nous appuyons sur un certain nombre de concepts de la didactique des mathématiques et essentiellement sur ceux de la *Théorie de situations didactiques* de Brousseau (1986a, 1998). Pour les analyses des contenus géométriques et des difficultés dans l'apprentissage de la géométrie, notre cadre de référence intègre ceux de Duval (1995) et de van Hiele (1957; 1986). Les concepts développés par ces auteurs nous ont servi de *Cadre théorique* pour l'élaboration et la mise en œuvre d'un dispositif de recherche. Ils sont décrits au chapitre 2. À partir du cadre théorique étudié, nous précisons les objectifs de la recherche.

Le chapitre 3 présente la démarche méthodologique pour atteindre les objectifs de la recherche et les outils méthodologiques permettant le recueil et l'analyse des informations. Il s'agit de l'organisation d'une « *ingénierie didactique de formation* » au moyen de la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988).

Au chapitre 4, nous présentons les résultats des analyses préalables des difficultés des étudiants, des contenus de formation, des manuels et des programmes ministériels en référant au cadre théorique exposé au chapitre 2.

Au chapitre 5, en tenant compte des analyses préalables, nous décrivons l'étape de la conception de la formation et les stratégies de formation employées.

À partir du cadre théorique développé, nous analysons, au chapitre 6, les données recueillies et le rôle des activités de formation sur l'évolution géométrique et didactique du futur maître. L'analyse de déroulement du cours, de différentes activités en leur continuité et des évaluations des apprentissages de 116 étudiants nous permet de vérifier l'impact du dispositif sur le développement conceptuel des étudiants, futurs maîtres.

1. PROBLÉMATIQUE

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux principaux enjeux de la formation didactique à l'enseignement des mathématiques dans le contexte actuel de changement de programmes. Dans la section 1.1, nous étudions la description du nouveau programme ministériel et l'enjeu que ce changement représente pour la formation didactique des futurs maîtres. Dans les sections qui suivent, nous analysons les recherches menées dans le domaine de la formation des maîtres portant sur la formation initiale des futurs enseignants, sur ses dimensions disciplinaire (en mathématiques et en géométrie plus particulièrement) et didactique. Nous faisons cette analyse dans le but de déterminer les savoirs géométriques et didactiques de la formation et de penser les conditions de leur acquisition. Cette analyse nous permet de décrire les problèmes qui marquent la formation initiale des maîtres et qui ont été relevés dans ces études afin de préciser les orientations principales de notre recherche.

1.1. CONTEXTE DE CHANGEMENT DE PROGRAMMES

La nouvelle réforme (2000) du système d'enseignement est basée sur l'approche par compétences définies par le Ministère de l'Éducation du Québec comme « *un savoir-agir fondé sur la mobilisation et l'utilisation efficaces d'un ensemble de ressources* » (Généralités, Programme de formation, MEQ 2000, p.5). Cette définition indique que c'est la forme opérationnelle de la connaissance qui est en jeu dans cette approche et qui permet d'« agir » dans les divers contextes. (Vergnaud, 2001) L'«*ensemble de ressources* » réfère aux contenus notionnels, aux démarches, aux procédures, etc. acquis au cours de l'expérience. L'«*utilisation efficace* » de ces ressources dans les différents contextes va notamment se manifester par le choix de celles qui sont nécessaires pour accomplir une tâche, pour résoudre un problème, etc.

Le concept de compétence fait appel à l'analyse de l'activité et des processus cognitifs. Il peut se présenter, selon Vergnaud (2001), en un critère d'analyse des résultats de l'activité (l'élève est plus compétent qu'avant), de la forme de l'activité (il utilise une meilleure stratégie : rapide, fiable, économique, etc. que les autres), d'un répertoire de ressources alternatives ou de comportement dans une situation nouvelle. Une compétence ne constitue pas une forme d'algorithme mémorisé, mais un savoir-agir dont la flexibilité et l'adaptation à divers contextes justifient l'importance de la mobilisation et de l'utilisation efficaces. Il s'agit d'une mobilisation sélective de ressources compte tenu des caractéristiques du contexte (Tardif, 2001).

Les nouveaux programmes visent à favoriser l'apprentissage à long terme, ce qui impose une continuité de ce processus. Legendre (2000) affirme que le développement des compétences incite l'école à une centration sur la formation de la pensée, les démarches d'apprentissage de l'élève et le sens des savoirs en lien avec leurs contextes et conditions d'utilisation. Cette description met l'accent sur un aspect plus ouvert de l'enseignement, qui vise à travailler des problèmes qui ne se réduisent pas à des solutions stéréotypées et dans lequel l'activité constructive de l'élève occupe une place importante. Tardif souligne le rôle important des interventions pédagogiques visant la décontextualisation, la structuration, la recontextualisation, la réflexion et l'autorégulation en précisant qu'« *en l'absence de telles interventions, l'axe des compétences pourrait offrir aux élèves des rencontres agréables et satisfaisantes avec des informations et des savoirs sans qu'il en résulte la moindre connaissance nouvelle* » (2001, p.48).

Cependant, les programmes laissent à la charge des enseignants la recherche de solutions et la gestion des interactions entre les variables principales du système didactique maître-élève-savoir. C'est à l'enseignant de prendre le contrôle des choix didactiques pour organiser son enseignement. La question que posent les futurs enseignants est « Comment? » Ils n'ont pas d'idées claires sur les visés de l'enseignement, sur la démarche à suivre afin de mettre les contenus en jeu dans des situations-problèmes, etc. La description des compétences visées, de leurs composantes (et le sens que le ministère leur attribue), des attentes de fin de cycle et des critères d'évaluation semble très générale aux futurs maîtres, n'apporte pas la précision sur les changements visés et ne facilite pas la tâche d'enseignement. En tant que formateur des maîtres, nous nous interrogions sur les moyens didactiques permettant d'outiller les futurs enseignants pour effectuer les changements planifiés par la réforme.

À l'année d'apparition de la version provisoire du nouveau programme (2000), nous avons pu mesurer le défi que représente son application par les futurs enseignants. Comme travail de session, nous avions proposé l'analyse des activités géométriques des manuels du point de vue de développement des compétences visées par ces programmes. Nous voulions savoir comment les futurs enseignants se familiarisaient avec le contenu de ce programme, comment ils en tenaient compte dans l'analyse des séquences d'enseignement et comment leurs connaissances les outillaient pour modifier les activités afin de donner plus d'ampleur au développement des compétences visées. L'analyse de travaux de session de l'année 2000, nous a permis d'observer et de décrire certains phénomènes qui portent sur un ensemble de travaux d'environ 200 étudiants provoqués par les facteurs suivants : généralisation abusive du concept de compétence dans l'analyse d'une activité mathématique, difficultés à déterminer la compétence essentielle visée par l'activité d'apprentissage, repérage systématique de la compétence « Résoudre une situation-problème » dans la majorité des activités analysées[1] et grande confiance dans les manuels scolaires (Ekimova et Portugais, 2001). La prégnance de manuels invite ainsi à une réflexion plus approfondie sur leur rôle dans les interactions didactiques entre les élèves, les enseignants et les objets de transposition didactique immédiate que l'on appelle les « nouveaux programmes ». Les réponses des étudiants à un questionnaire proposé à la fin de la formation 2001 (annexe 1, question 9), indiquent que le manuel scolaire est l'outil principal que les futurs enseignants utilisent pendant les stages et prévoient utiliser dans leur futur travail. Nos observations des stages (hiver 2001) démontrent que les stagiaires le suivent souvent point par point[2]. Dans certains cas, nous pouvons même noter le rôle décisif des manuels scolaires dans les pratiques

---

[1] Les futurs enseignants font de nombreuses généralisations d'une certaine lecture du concept de la compétence. La compétence « Résoudre une situation-problème » se repère par eux dans la majorité des activités analysées. Ils ne vont pas plus loin pour analyser et voir effectivement l'ensemble de composantes et leur concordance dans une activité. Selon Vergnaud (2001), il faut analyser l'activité en termes de buts, de règles, d'invariants et d'inférences et que même si le but n'est pas pleinement conscient ou s'il y a plusieurs dans la même activité, on peut toujours identifier une intentionnalité dans l'organisation de l'activité, avec son cortège de sous-buts et d'anticipations. Le même phénomène est visible à l'intérieur-même des manuels scolaires et des guides du maître. Chacune des tâches à accomplir est appelée « le problème ». Par conséquent, chacune des situations d'enseignement représente pour les futurs enseignants une situation-problème comme si chacune possédait les caractéristiques d'une situation-problème.

[2] Parmi sept leçons observées, dans cinq séquences le manuel faisait l'objet de préparation et dans deux leçons les stagiaires se basaient sur les préparations écrites fournies par les maîtres-associés.

enseignantes[3]. Une telle utilisation des activités, même si elles constituent de « bonnes » situations didactiques, ne garantit pas la réussite des apprentissages. Ces résultats nous obligent à penser les moyens appropriés qui permettront aux futurs maîtres de clarifier les visés de la nouvelle approche en général et pour l'organisation des apprentissages des contenus géométriques en particulier.

Puisque les innovations et les visées de l'enseignement sont véhiculées principalement par les programmes, ces derniers doivent aussi apporter les moyens de mise en oeuvre de ces visées pour permettre à l'enseignant de repérer les apports et les limites des activités d'apprentissage qui lui sont proposées dans les manuels. Une première analyse de la description des compétences visées par le nouveau programme de mathématiques soulève plusieurs questions qui doivent être abordées dans la formation didactique : Quelles sont les caractéristiques principales d'une situation-problème[4] qui est au cœur de la nouvelle approche et de la première compétence du programme de mathématique? Comment peut-on amener les élèves au raisonnement, qui constitue la deuxième compétence de ce programme? Comment doit-on aborder les concepts et processus mathématiques au primaire, pour que la nécessité de raisonnement s'impose naturellement dans le problème, dans la tâche ou dans la situation et participe à l'acquisition des connaissances?

L'analyse du contenu géométrique des programmes pour l'enseignement primaire[5] fait ressortir que cette description ne présente pas toujours une structure cohérente qui tient compte de relations entre concepts et processus et de la progression des apprentissages. Sans indications précises sur ces relations et sur leur incidence dans la progression des apprentissages, le programme actuel exige des interventions didactiques dans le cadre de formation à l'enseignement pour outiller le futur enseignant en conséquence. Dans le cas

[3] Voir par exemple, un exemple décrit dans Ekimova et Portugais (2001). La stagiaire décide de présenter <u>telle quelle</u> une activité tirée du manuel scolaire critiquée dans son travail de session et qui n'avait pas fonctionné dans un stage précédent.

[4] Le Programme de formation de l'école québécoise est axé sur le développement de trois compétences (qui sont les mêmes pour tous les cycles du primaire). La première compétence réfère à l'aptitude à « <u>Résoudre une situation-problème</u> », la deuxième vise le raisonnement mathématique « <u>Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques</u> et la troisième est axée sur la communication « <u>Communiquer à l'aide du langage mathématique</u> ».

[5] Le contenu de ce programme sera examiné beaucoup plus attentivement dans le chapitre 4.3.

contraire, cela risque de ne pas changer la pratique de façon significative, ni même d'« *offrir aux élèves des rencontres agréables et satisfaisantes avec des informations et des savoirs* ».

Legendre (2000, p.12) nous explique que le programme n'impose pas aux enseignants des manières de faire, car « *l'enseignant en tant que professionnel, doit bien sûr posséder certains savoirs, notamment des savoirs disciplinaires, pédagogiques et didactiques* ». Cette auteure souligne que c'est la conception de l'apprentissage qui doit permettre à l'enseignant de clarifier le sens que le programme attribue à l'approche par compétences et qu'« *une réflexion sur sa propre compétence professionnelle [...] peut aider à mieux comprendre les implications majeures d'un programme* » (p.1). La réussite de la mise en œuvre du programme axé sur le développement des compétences chez l'élève renvoie donc aux compétences professionnelles des enseignants.

La question, posée au début de la recherche : *Comment organiser la formation du futur enseignant pour que les connaissances développées dans le cadre de la formation initiale soient utiles et efficaces au sein de l'école et de la classe?*, prévoit la détermination des savoirs géométriques et didactiques à développer et la recherche de moyens de transposition de ces savoirs et de leur application efficace dans la pratique enseignante. Dans les deux sections suivantes, nous étudions donc la préparation mathématique et géométrique des futurs enseignants et la formation didactique propice à un transfert effectif en situation d'enseignement.

1.2 PRÉPARATION MATHÉMATIQUE DES ENSEIGNANTS

Cette section cherche à tracer un portrait des connaissances mathématiques, et plus particulièrement en géométrie, des futurs enseignants et des enseignants du primaire. Le but de l'analyse présentée dans la première partie est d'obtenir une vue d'ensemble de recherches menées dans ce domaine et de faire ressortir les raisons principales des lacunes en mathématiques des enseignants du primaire. Dans la deuxième partie, nous décrivons les difficultés conceptuelles des futurs maîtres en apprentissage de la géométrie, que nous avons pu observer dans les années précédant l'expérimentation. Nous essayons de les expliquer en nous référant aux différentes recherches portant sur les obstacles et les difficultés des élèves dans les apprentissages de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques. Cette analyse nous permettra de préciser l'enjeu de la formation mathématique et d'envisager les pistes possibles de transfert efficace des connaissances géométriques.

1.2.1 LACUNES DANS LA FORMATION MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DES MAÎTRES ET FUTURS MAÎTRES DU PRIMAIRE

Si les recherches analysées proviennent de différents pays (ayant des programmes différents de formation et différents critères d'évaluation), plusieurs de ces études notent une préparation faible en mathématique des enseignants du primaire.

Brown, Cooney et Jones (1990), en faisant le bilan d'un ensemble d'études en formation initiale des maîtres, rapportent qu'en général les professeurs du primaire aux États-Unis ne possèdent pas un niveau suffisant de compréhension des mathématiques pour enseigner cette discipline. Graeber, Tirosh, Glover (1986) notent que les professeurs de l'enseignement primaire aux États-Unis ont des difficultés dans le choix des opérations appropriées pour résoudre les problèmes mathématiques et dans leur étude de 1989, ils comparent les difficultés des enseignants aux erreurs que les élèves du primaire font. L'étude de Fennema et Franke (1992), par la description des erreurs des enseignants en résolution de tâches mathématiques, conclut à leur responsabilité dans les difficultés observées chez leurs élèves dans l'apprentissage des mathématiques.

Bauersfeld (1994) souligne que le « bagage mathématique et pédagogique » des futurs maîtres accumulé dans les années d'études pré-universitaires, peut engendrer des conséquences importantes sur leur formation universitaire. Notre propre analyse de 184 cas d'échec à l'examen de classement en mathématiques pour la formation à l'enseignement primaire (en 1999) montrait que le tiers de ces étudiants en échec n'avaient pas suivi de cours de mathématiques en dernière année de l'enseignement secondaire et que 150 étudiants n'avaient pas eu de formation mathématique au collégial (voir l'annexe 2). Cependant, d'autres chercheurs (Ginther, Pigge et Gibney, 1987) ont montré que le nombre de cours suivis en mathématiques n'explique pas à lui seul le niveau insuffisant de la connaissance de la discipline d'une grande partie des professeurs du primaire.

Quelles autres raisons pourraient alors expliquer la faible préparation mathématique (et géométrique en particulier) des enseignants du primaire? L'étude de Porter (1989) démontre que la géométrie est le sujet le plus fréquemment identifié par les étudiants comme étant appris simplement pour « l'exposition », c'est-à-dire, le contenu géométrique a été couvert de façon brève et superficielle (Porter, 1989, p.11). Mayberry (1983) signale qu'apparemment, beaucoup de concepts géométriques ont été étudiés par coeur. De plus, souligne Porter (1989), les enseignants n'enseignent pas souvent certains contenus décrits par le programme d'études de la géométrie.

Dans l'étude portant sur le premier degré de l'enseignement secondaire, les chercheurs belges Burton, Detheux-Jehin et Fagnant (1997) dégagent le contenu géométrique évalué par les enseignants et relient ce choix à la connaissance que les enseignants possèdent. La géométrie évaluée est surtout la géométrie plane (seulement six pour cent de questions font référence à la géométrie de l'espace). Les questions sont posées (dans la majorité des cas) sur un aspect précis de la matière. Parmi les questions portant sur les constructions, 84 % des exercices se résument à une simple construction aux instruments, 3 % demandent de rédiger les étapes et seulement 13 % imposent de donner des justifications de la construction. Aucun exercice de la démonstration n'est proposé aux élèves. Quant à la technique d'apprentissage de démonstration, les auteurs mentionnent qu'elle se réalise en trois étapes « *étudier par cœur, compléter des démonstrations lacunaires, rédiger et résoudre des démonstrations innovantes* ». Les questions portant sur une démarche explicative et justificative sont peu représentées dans les tests d'évaluation. Les résultats montrent d'importantes variations dans les évaluations des élèves et cette diversité, concluent les auteurs, a des conséquences sur la réussite ou l'échec de l'élève, sur le bagage géométrique acquis et sur les méthodes employées par l'élève dans ses préparations aux tests et examens.

De façon implicite ou explicite, ces études font ressortir le fait que les connaissances mathématiques des enseignants influencent considérablement l'enseignement de cette discipline. Cela s'observe dans le choix du contenu, dans les évaluations des apprentissages et surtout dans leur manière d'enseigner. Quant aux raisons principales de leurs lacunes mathématiques, nous pensons que le nombre de cours suivis, le contenu étudié et surtout la façon dont ce contenu a été enseigné et appris jouent un rôle décisif.

La préparation géométrique (et surtout la formation d'une culture géométrique) nous apparaît donc un enjeu important sur lequel nous devons agir dans le cadre de notre formation. Nous admettons qu'une bonne connaissance mathématique n'est pas une condition suffisante à un bon enseignement; l'enseignant doit comprendre comment enseigner pour que les élèves apprennent, connaître les difficultés qui se rattachent à l'enseignement du contenu notionnel et à son apprentissage et essayer d'organiser ces processus avec l'efficacité requise. Cependant, nous admettons aussi que sans connaissance mathématique suffisante, d'une part, il est très difficile pour le formateur en didactique des mathématiques de parler de didactique pour l'acquisition de ces connaissances et, d'autre part, les connaissances didactiques que le formateur transmettra aux étudiants lors de son cours seront interprétées selon leurs théories personnelles et probablement ne seront pas réclamées dans la pratique, c'est-à-dire qu'elles ne deviendront pas utiles pour l'enseignement. Peut-être, ici, se trouve l'une des raisons qui expliquerait l'écart qui existe entre le contenu didactique de la formation et son utilisation dans la réalité scolaire.

Dans le cadre de notre enseignement à la formation des maîtres et lors des observations des futurs maîtres en stages, nous avons pu confirmer à maintes reprises la nécessité d'approfondissement des connaissances disciplinaires. Souvent, le manque de connaissances spécifiques ne permettait pas aux stagiaires de se servir des occasions d'explorer l'inconnu, de profiter d'une situation pour aller plus profondément dans la recherche du sens de la notion, de répondre de façon adéquate aux questions des élèves, d'utiliser les réponses non complètes pour continuer dans la même direction en modifiant la question ou en utilisant le contre-exemple, etc. Dans certains cas provoqués par les imprévus qui demandent une prise de décision dans le feu de l'action, les étudiantes font des erreurs géométriques (Ekimova et Portugais, 2001). Alors, la focalisation à l'intérieur de la formation sur des contenus géométriques particuliers posant problème aux élèves s'avère insuffisante, car pour être à l'aise dans leur enseignement, les futurs enseignants ont besoin d'un système cohérent de connaissances géométriques (et non d'une collection de savoirs géométriques particuliers).

Puisque la tâche du futur enseignant en enseignement de la géométrie consiste en une mise en œuvre d'une multitude de connaissances pour développer les connaissances spatiales des élèves et puisque le niveau de sa préparation géométrique n'est pas élevé, alors la formation à l'enseignement de la géométrie doit présenter une organisation scientifique dans laquelle à partir d'éléments de base simples et en utilisant le raisonnement mathématique, il deviendrait possible de produire progressivement des énoncés et de construire des concepts qui seront utilisés pour la construction des autres concepts ou dans la résolution des problèmes géométriques. Sinon, l'apprentissage des concepts géométriques se fera par la mémorisation au lieu de la compréhension.

1.2.2. DIFFICULTÉS EN APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE

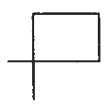
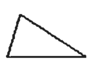
Afin de préciser les difficultés conceptuelles des futurs maîtres en apprentissage de la géométrie et en résolution de tâches et de problèmes géométriques, nous décrivons ici les conceptions et les comportements des étudiants que nous avons pu observer et identifier lors de cours, tests ou examens dans les années précédant l'expérimentation (1999-2001). En particulier, nous étions intéressée par les difficultés éprouvées par un nombre considérable des étudiants ou par celles considérées en tant que difficultés « typiques » que nous pouvons associer aux phénomènes d'apprentissage. Pour les expliquer, nous avons choisi de tirer parti des recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans les apprentissages de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques (Vladimirskii, 1949; Zhuravlev, 1950; Landa, 1955; Zykova, 1955,1969; Yakimanskaya, 1959, 1971; Kabanova-Meller, 1970; Fennema et Sherman 1977; 1978; Guay et McDaniel, 1977; Vinner et Hershkowitz, 1980; Gardner, 1983; Burger et Shaughnessy, 1986; Fischbein, 1987; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Hershkowitz, 1989; Capponi et Laborde, 1995; Duval, 1995). En effet, puisque la majeure partie de nos étudiants, futurs maîtres, n'a pas eu de contact avec le contenu géométrique depuis le secondaire, nous pouvons considérer que leur niveau de connaissances géométriques correspond à peu près à celui des élèves du secondaire.

Nous avons distingué, de façon très générale, quatre groupes de difficultés associées à la reconnaissance des figures selon leurs représentations graphiques ou selon la description de leurs propriétés, à l'emploi des termes géométriques, à la classification et aux opérations mentales requises et à la résolution de problèmes géométriques.

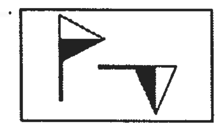
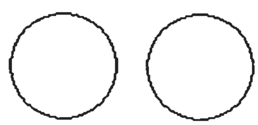
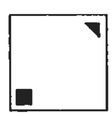
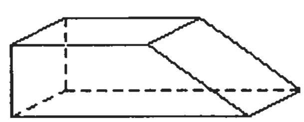
I. <u>Reconnaissance des figures selon leurs représentations graphiques ou selon la description de leurs propriétés</u>

Les étudiants témoignent d'une incapacité à coordonner des données visuelles avec les propriétés du concept ou avec le contenu de la consigne. La reconnaissance des formes des figures et de propriétés géométriques soulève une difficulté lorsqu'il s'agit d'une représentation inhabituelle d'une figure ou d'une orientation inhabituelle de la représentation les représentations graphiques des figures peuvent avoir des positions différentes dans le plan)[6] (voir le Tableau I).

Tableau I. <u>Difficultés de la reconnaissance des figures</u>

Difficultés observées	Exemples
1. L'emploi d'une seule caractéristique (en général, la plus marquante) dans l'identification des figures	Les étudiants déterminent « *Ligne brisée* » dans le dessin suivant :  Nous nous attendons à la reconnaissance de plusieurs caractéristiques de lignes (par exemple : Ligne brisée, ouverte, non simple)
2. La visualisation d'un ensemble de triangles et la représentation graphique de triangles particuliers : isocèle rectangle, isocèle obtusangle, scalène-rectangle disposé sur l'hypoténuse	Par exemple, ils ne voient pas la classe de triangles isocèles comme ensemble de différents triangles : acutangles, rectangles et obtusangles. Le représentant de la classe « isocèles » pour eux est le triangle isocèle acutangle. 
3. La reconnaissance des figures dans leurs positions inhabituelles	 - Personne n'a reconnu le triangle isocèle dans la représentation de gauche :  - À la tâche de donner les noms les plus précis pour certaines figures planes, les étudiants déterminent « parallélogramme »  pour la seconde représentation et « quadrilatère » pour la dernière (alors, les réponses attendues sont : « losange » et « trapèze rectangulaire »).

[6] Nos manuels et par conséquent nos étudiants (et nos élèves), traitent le plus souvent les figures planes dans les positions verticales.

Difficultés observées	**Exemples**
4. La reconnaissance de la forme du quadrilatère ne fait pas appel à la définition et à la recherche des propriétés communes de classes, même si la consigne le demande	L'analyse des résultats du test de l'année 2000 nous a permis de constater que la notion d'inclusion de classes des quadrilatères est développée seulement chez 10 étudiants parmi 110. Parmi 16 étudiants qui ont donné des réponses complètes pour quatre premières classes (carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes), 6 étudiants ont identifié le trapèze seulement dans sa représentation habituelle.
5. La reconnaissance des transformations géométriques dans la représentation de deux figures (initiale et image) ne fait pas appel aux propriétés des transformations considérées	Par exemple, à la question : « *Dans cet encadré, on a dessiné un objet qui a ensuite été déplacé. Quelle transformation a été effectuée? Indiquer les propriétés de cette transformation* », les étudiants reconnaissent facilement  la rotation (ou la rotation et la translation), mais ils ont des difficultés à indiquer (et à trouver) les propriétés de la rotation (centre et angle de rotation).
6. La reconnaissance (ou l'évocation) de toutes les transformations géométriques possibles (à l'enseignement primaire) dans la représentation de deux figures (initiale et image)	Par exemple, à la question « *De quelle(s) transformation(s) géométriques s'agit-il? Indiquer les propriétés de chacune* », les étudiants anticipent seulement un type de transformation. 
7. La visualisation des axes de symétrie obliques des figures ou dans des figures disposées inhabituellement	80 % d'étudiant soulignent que la position oblique d'une figure ou d'un axe peut poser la difficulté dans la reconnaissance des figures symétriques. Cependant, 75 % d'eux ne reconnaissent pas l'axe de symétrie oblique dans la figure ci-dessous en décrivant que même si le carré est une figure symétrique, le petit triangle et le petit carré disposés dans les coins ne permettent pas à cette figure d'être symétrique. 
8. La visualisation des figures obtenues par la projection des solides et la reconnaissance (ou l'évocation) des solides selon la projection donnée (ou selon la vue de droite, de gauche, de haut, du bas)	Par exemple, à la question de l'examen final (2000) : « *Tracer le dessin de ce que vous voyez de gauche* », certains tracent le parallélogramme. La projection effectuée de haut est représentée seulement par la face de dessus et la projection effectuée de droite - par le dessin de la face droite. 

Difficultés observées	**Exemples**
9. La visualisation (et la détermination) des figures selon la description de leurs propriétés visuelles (et l'évocation de plusieurs figures correspondant à la description)	- À la question du test d'entrée (2001) « *Qui suis-je? Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont congrus et ayant un angle droit* », nous avons obtenu seulement 25 réponses complètes (parmi 110 participants) : *triangle isocèle rectangle.* La répartition des autres réponses obtenues était suivante : 73 étudiants reconnaissent le triangle rectangle, 6 étudiants répondent « *triangle isocèle* » et 6 étudiants reconnaissent seulement le triangle. Ces résultats suggèrent ainsi que, dans la détermination du nom d'un triangle, la caractéristique d'« avoir un angle droit » domine par rapport à celle d'« avoir » deux côtés de mesure (73 contre 6). - À la question du test d'entrée (2000) « *De quels solides s'agit-il? J'ai au moins une surface courbe.* (7 réponses complètes : *cône, cylindre, sphère, demi-sphère*; 93 étudiants présentent seulement un solide et 10 réponses sont erronées.) Quant à la description « *On peut me générer par une translation d'un triangle », seulement* 48 étudiants parmi 110 sont en mesure de donner une réponse.
10. La compréhension de la consigne ou des mots particuliers de la consigne (comme « est », « s'appelle », « au moins », « certainement », etc.), qui participent à la réponse attendue	À la question du test d'entrée (2001) *Comment appelle-t-on?* *c). Quadrilatère dont les côtés sont congrus s'appelle* ________ » il y avait seulement 7 réponses correctes. Encore 7 étudiants ont répondu « carré, losange»; les autres (95) ont donné la réponse « carré».
11. La visualisation (et la détermination) des figures selon la description de leurs propriétés (descriptions inhabituelles). (Les étudiants confondent ainsi l'appartenance d'une propriété à une classe de quadrilatères et la détermination d'une classe selon la propriété décrite)	À l'examen de mi-session (2000), en demandant de déterminer le quadrilatère <u>défini</u> par des énoncés du genre suivant « *Mes diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu* », etc., nous avons observé les difficultés chez presque la moitié des étudiants.
12. La visualisation et la représentation (dessin) du développement du cône	Pour une partie considérable des étudiants, le développement du cône est représenté par le triangle

La reconnaissance des figures disposées inhabituellement exige un saut qualitatif chez les étudiants qui s'exprime par l'opération de rotation mentale d'un objet géométrique (Duval, 1995). Cette opération n'est pas spontanée, il faut préparer des activités où l'étudiant aura la possibilité de rencontrer de telles figures ou de rechercher de telles propriétés. Le phénomène de la non-reconnaissance d'une figure dans une de ses représentations graphiques appelé « dessin/figure », « figural concept », etc. (cité dans Capponi et Laborde, 1995, p.265) est dû au traitement théorique du dessin et dépend du niveau conceptuel de l'étudiant.

Dans sa théorie des intelligences multiples, Gardner (1983, p. 8) souligne que la capacité spatiale est une des « *compétences intellectuelles humaines relativement autonomes* ». Des relations entre la capacité spatiale et l'accomplissement des tâches mathématiques chez des élèves de différents âges, ont été rapportées par les chercheurs américains Fennema et Sherman (1977; 1978) et Guay et McDaniel (1977). Ils montrent ce rapport dans la résolution de différentes tâches géométriques où la reconnaissance des figures géométriques dépend des opérations mentales de rotation et de translation des figures, de leur conjonction ou de leur séparation, etc. De même, Yakimanskaya (1971) insiste sur l'importance de la visualisation dans la résolution de problèmes géométriques. Par exemple, la compréhension du concept de rectangle et de ses propriétés, écrit cette chercheure, exige que les étudiants analysent le rapport spatial de ses côtés (opposés et adjacents).

La faible capacité à visualiser les figures géométriques selon la description de leurs propriétés peut être attribuée à une expérience géométrique insuffisante et à une difficulté à anticiper toutes les figures possibles ayant les propriétés décrites. C'est l'appréhension opératoire des figures qui peut servir de support intuitif à la reconnaissance spontanée d'une figure (ou d'une propriété) (Duval, 1995).

II. Emploi des termes géométriques

Les difficultés langagières des étudiants s'observent dans l'identification des figures, dans la description des propriétés ou de la démarche de construction d'une figure (voir le Tableau II).

Tableau II. Difficultés langagières des étudiants

Difficultés observées	**Exemples**
13. La non-connaissance de certains termes géométriques étudiés à l'enseignement primaire	- Parmi les droites remarquables, les étudiants connaissent seulement la « hauteur ». Les droites telles que la bissectrice, la médiane et la médiatrice sont peu connues des étudiants. - La liste des polygones se termine chez eux par « hexagone ». - Les termes « solide tronqué », « parallélépipède », « polyèdre », « corps rond » ne sont pas dans leur vocabulaire. - Ils ne sont pas en mesure de nommer les surfaces du cylindre et du cône.

Difficultés observées	Exemples
14. L'emploi de termes imprécis dans l'identification des figures, dans la description ou dans la définition des figures	- Dans les définitions du polygone et du cercle (et dans l'analyse de définitions) ils oublient le terme « fermé ». - Le terme « régulier » n'accompagne pas le terme pentagone, hexagone, etc. dans la détermination du nom du polygone régulier. - Dans la description des étapes de construction de figures planes, les corrections langagières principales portaient sur les termes « ligne » (au lieu de « segment », de « corde » ou de « diamètre »), « cercle » au lieu de « disque », « circonférence » au lieu de « cercle », sur la précision des procédures (par exemple, « relier les segments » était remplacé par « relier les extrémités des segments ») et sur le manque d'étapes (par exemple, il faut trouver le milieu avant de tracer la hauteur du triangle isocèle), etc. Par exemple, à la question de l'examen de mi-session demandant de trouver le centre du cercle, parmi 82 % d'étudiants ayant réussi, le tiers des étudiants utilisent dans la description des procédures l'expression suivante : *Tracer les **perpendiculaires** aux milieux des **segments***. (Alors que l'expression « médiatrices de cordes » était attendue.)

III. Classification et opérations mentales requises

Au début de la formation, la tâche de classification des figures géométriques présente une grande difficulté pour les étudiants. Même si les activités de classification sont très présentes dans les manuels scolaires, la grande majorité des étudiants ne les ont jamais effectuées en tant qu'élèves de l'école primaire ou secondaire (voir le Tableau III).

Tableau III. Difficultés de l'emploi du raisonnement

Difficultés observées	Exemples
15. La justification des énoncés. (Les étudiants ne sont pas exigeants au niveau du raisonnement. Ils connaissent les relations, mais ont des difficultés dans la construction d'une chaîne argumentative qui les amène à justifier ces relations.)	- Par exemple, pour prouver que le carré est un trapèze, au lieu de référer à la propriété essentielle du trapèze (1 paire de côtés parallèles) et de vérifier si le carré possède cette caractéristique, ils réfèrent aux propriétés essentielles du carré « parce qu'il a 4 côtés égaux et 4 angles droits… » et, ensuite, ils ne savent pas comment articuler la justification.
16. La classification des figures géométriques	- Dans la recherche de caractéristiques de classification des lignes en employant le diagramme de Venn, les étudiants s'en tiennent seulement à l'utilisation des caractéristiques opposées : ouverte et fermée, simple et non simple, ce qui rend l'ensemble d'intersection vide

Difficultés observées	Exemples
	- La classification des triangles chez les étudiants fait appel aux quatre classes suivantes : isocèles, équilatéraux, scalènes et rectangles. (Les critères de classification : selon les côtés et selon les angles ne sont pas utilisés) - Les étudiants ont une représentation erronée des relations entre les classes des triangles : les « triangles isocèles » et « triangles équilatéraux » sont vus comme deux classes distinctes, les triangles isocèles sont vus comme une sous-classe des « triangles scalènes »
17. La conception des définitions en utilisant les propriétés autres que celles présentées dans la définition habituelle. (Les étudiants font peu de distinction entre une définition et une description d'un quadrilatère. Pour eux, « définir » signifie souvent de nommer plus de propriétés d'une figure ou d'une classe de figures).	Parmi 120 définitions inhabituelles proposées par les étudiants à l'examen de mi-session (2001), 56 sont redondantes.

Vinner et Hershkowitz (1980) déclarent qu'en pensant des objets géométriques, les élèves n'emploient pas des définitions de concepts, mais plutôt des images, des combinaisons de toutes les images mentales et des propriétés qui ont été associées au concept. Leur recherche démontre qu'une même représentation graphique peut être associée par les élèves à des concepts géométriques différents et que telles représentations peuvent trouver leur source dans l'enseignement inopportun et dans le choix limité d'exemples qu'ils ont vus dans les manuels.

Les autres études (Zykova, 1969; Kabanova-Meller, 1970; Burger et Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) attestent que les conceptions limitées d'étudiants s'expliquent par l'habitude d'apprendre les exemples particuliers et de considérer des particularités non essentielles, mais communes, comme l'élément essentiel du concept. Hershkowitz (1989) constate également que les étudiants peuvent avoir des difficultés dans l'application d'une définition qu'ils connaissent s'ils ont aussi une image visuelle spécifique associée à ce concept. Cela aide à expliquer la résistance des étudiants aux rapports hiérarchiques chez les quadrilatères particuliers : les images attachées à chaque figure fonctionnent cognitivement non pas comme des cas particuliers, mais comme des modèles généraux (Fischbein, 1987).

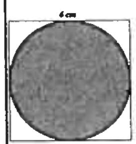
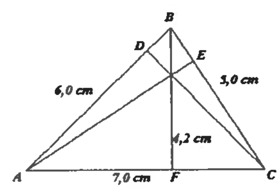
IV. Résolution de problèmes géométriques et processus géométriques requis

Les difficultés des étudiants liées à la résolution des problèmes géométriques concernent le niveau insuffisant de reconnaissance des éléments (indiqués ou supposés) nécessaires à la résolution d'un problème géométrique et d'anticipation de la stratégie de résolution. Il s'agit entre autres de la difficulté à tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (visualiser les éléments non tracés) et de déterminer les conséquences logiques de certaines données (voir le Tableau IV).

Les résultats de notre analyse de 184 cas d'échec (1999) montrent aussi que les difficultés principales des étudiants ayant échoué à l'examen d'admission en mathématique se trouvaient dans les domaines géométriques suivants : *la recherche d'aire d'une partie de l'hexagone* (66.3 % d'échec), *la conversion des unités de mesure* (88.6 % et 91.8 % pour deux questions), *l'emploi du raisonnement déductif pour justifier les énoncés portant sur les propriétés des quadrilatères et des triangles* (taux d'échec supérieur à 80 % pour chacune de six questions).

Tableau IV. Difficultés dans la résolution de problèmes

Difficultés observées	Exemples
18. La conversion des unités de mesure	À la dernière question du test d'entrée : « *Combien y a-t-il de mètres carrés dans* 2 kilomètres carrés? Dans 1 centimètre carré? », les taux de réussite ont été respectivement de 15/110 et 14/110.
19. L'oubli des formules principales	Dans la question du test d'entrée : « *L'aire d'un cercle est de 320 cm. Parmi les réponses suivantes (*31.4, 94.2, 62.8*), laquelle se rapproche le plus de la mesure de la circonférence? Encercler la réponse. Justifier.* », l'application des formules d'aire et de circonférence du cercle a été effectuée par 33 étudiants (parmi 110)
20. La justification des résultats	- 44 étudiants dans la question précédente ont seulement encerclé la réponse - À la question « Vrai ou Faux? Justifier la réponse. » a) *Si on double les côtés d'un rectangle, son aire aussi double*, la majorité des étudiants justifient par des exemples concrets.

Difficultés observées	**Exemples**
21. La résolution des problèmes géométriques (même à la fin de formation)	- Ils ont des difficultés dans la construction du développement du cylindre en sachant sa hauteur et le rayon de la base. - À la question de l'examen final (2001) demandant de trouver  l'aire de la partie blanche de la figure, presque le tiers du groupe ne répond pas à la question. Cependant, les étudiants connaissent très bien les formules d'aire du carré et du cercle. - À la question de l'examen final (2000) : « *Voici le triangle ABC dont les mesures des côtés sont : mAB=6cm, mBC=5cm, mAC=7cm et de la hauteur mBF=4,2cm. Trouvez les mesures de deux autres hauteurs* », la majorité des étudiants  essayent d'appliquer la formule de Pythagore, quelques-uns mesurent à la règle (bien que toutes les données nécessaires à la résolution soient présentes et chaque étudiant connaisse la formule de l'aire du triangle). Cet exemple correspond à un échec permanent et peut aussi être considéré comme « problème canonique ».

Dans une revue de l'Institut de la psychologie de l'Académie des sciences pédagogiques de RSFSR[7] (1958), les recherches, rattachées aux difficultés des élèves dans l'étude des preuves géométriques, expliquent leurs erreurs par un processus d'abstraction ou par une « vision mathématique »[8] insuffisamment développés (Zhuravlev, 1950; Zykova, 1955; Yakimanskay, 1959) et notent que les élèves ont des difficultés à coordonner mentalement le dessin avec la condition du problème contenu dans la consigne (Vladimirskii, 1949, Landa, 1955, Kabanova-Meller, 1959) et à identifier la figure requise pour la solution quand sa position et sa forme ne sont pas standard (Zykova, 1955).

---

[7] L'abréviation de la république russe (l'une des quinze républiques de l'U.R.S.S)

[8] Ce terme est employé dans la recherche de Zhuravlev (1950) sans être précisé. Nous comprenons par la « vision mathématique » le comportement attendu dans la résolution des tâches mathématiques (et géométriques en particulier) exigeant la reconnaissance des éléments (présents ou supposés) nécessaires à la résolution, la capacité de tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (déterminer les conséquences logiques de certaines données) et l'anticipation de la stratégie de résolution (le choix et l'emploi de concepts et de processus permettant la résolution d'un problème).

La performance de nos étudiants au niveau de la visualisation, de l'identification des propriétés géométriques, de la conceptualisation, de l'imagination spatiale et de l'abstraction et de la résolution de problèmes géométriques n'est certes pas élevée, surtout en début de la formation. Certaines tâches géométriques comme la classification de figures ou la résolution de problèmes qui exige « la vision mathématique » continuent de constituer un obstacle même à la fin de formation.

Quant à l'enseignement de notions géométriques et de la mesure, à l'emploi des activités d'observation et de recherche, à la création d'un besoin du passage des unités non conventionnelles aux conventionnelles, à la découverte de formules, à la distinction entre l'évaluation des grandeurs et le mesurage, les besoins des étudiants sont importants. Par exemple, ils connaissent une seule méthode d'enseignement de la notion du cercle, celle qui consiste à en montrer les propriétés essentielles, les nommer, montrer les formules, proposer les exercices d'application.

Cette identification des difficultés des étudiants à l'intérieur de la formation se révèle intéressante dans la mesure où elle sert de point de départ à leur analyse, à l'analyse du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution. L'analyse des recherches portant sur les difficultés en apprentissage de la géométrie nous permet de préciser les orientations principales de l'enseignement de la géométrie au primaire et de la formation géométrique des futurs maîtres : développer la visualisation, le langage géométrique, le raisonnement qui participeront à la construction des savoirs. Dit sommairement, ce qu'on veut développer chez les élèves, nous cherchons à le développer chez les futurs enseignants.

1.3 FORMATION DIDACTIQUE DES ENSEIGNANTS

La demande d'amélioration de la formation des maîtres influence l'enseignement de la didactique des disciplines et exige la contribution des formateurs à ce projet. Nous avons donc cherché à savoir quel peut être impact de la didactique des mathématiques et des cours de didactiques des mathématiques sur la formation des enseignants de mathématiques au primaire et de quelle façon les formateurs des maîtres peuvent utiliser les moyens théoriques et pratiques de la didactique pour contribuer à l'amélioration de la formation.

1.3.1 ENJEUX DE LA FORMATION DIDACTIQUE

En définissant son champ d'études, la didactique des mathématiques souhaite apporter des réponses à la question de l'enseignement des mathématiques. L'étude du fonctionnement du système didactique, de ses régularités, de ses contraintes, des phénomènes et des situations d'enseignement se base sur l'analyse épistémologique, mathématique et didactique en tenant compte du fonctionnement cognitif des élèves.

Dans le but de répondre aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques, depuis environ 1970, les recherches en didactique et les pratiques d'enseignement ont donné naissance à quelques théories importantes : la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1986-1998), la *Théorie de la transposition didactique* (Chevallard, 1985) et la *Théorie des champs conceptuels* (Vergnaud, 1991), et à des notions relatives à des thèmes importants de l'enseignement des mathématiques : *l'ingénierie didactique, le temps didactique, la mémoire didactique, le milieu, le contrat didactique, etc.* Ce matériel peut fournir un cadre théorique de référence pour de nouveaux enseignants, présenter des pistes pour les orienter dans leur enseignement, les aider dans son organisation et dans leur réflexion sur celui-ci.

Quant à la didactique de la discipline enseignée dans la formation initiale des maîtres, nous adhérons aux objectifs définis par chercheurs des équipes du Laboratoire Leibniz (cité par Comiti, 1999, p.177) :

> *La formation en didactique a pour objectif d'introduire « des éléments fondamentaux en didactique des mathématiques (conceptions, obstacles, contrat didactique, variables didactiques, situations didactiques et a-didactiques, ...) », de les faire fonctionner au travers de leur utilisation en tant qu'outil « pour l'analyse de pratique de classe » et de « montrer l'intérêt de leur mise en œuvre lors de l'élaboration de situation d'enseignement ». Il s'agit d'apporter un « fondement théorique indispensable à la professionnalisation », de fournir « des outils d'analyse pour expliciter et réaliser les choix auxquels tout enseignant est confronté ».*

Lorsqu'on tente de déterminer comment organiser une telle formation didactique, on constate l'énormité de la tâche du formateur à cause de la diversité des connaissances didactiques qu'il doit mettre en œuvre. Les objectifs visés par le Laboratoire Leibniz nous semblent trop ambitieux pour notre situation de formation. En effet, nos étudiants sont les futurs enseignants de l'école primaire et ce n'est un secret pour personne que les mathématiques ne sont pas la discipline préférée de la majorité d'entre eux. Ils n'ont généralement pas eu l'occasion d'étudier de façon approfondie la géométrie lors de leur formation et ils n'ont donc pas une représentation claire de leur tâche en ce qui concerne l'enseignement de cette matière. Les futurs enseignants s'inquiètent de cette partie de leur futur travail et attendent souvent des recettes du formateur. L'attente de règles et de méthodes qui peuvent être appliquées immédiatement est un problème « classique » de la formation des maîtres. On peut noter d'après les nombreux travaux expérimentaux (voir, par exemple, Cornu, 1988; Bailleul, 1994; Portugais, 1996) que l'application directe dans la pratique des méthodes enseignées lors du cours n'apporte pas les résultats désirés. Le processus d'enseignement est trop complexe pour qu'une « recette » puisse le rendre optimal.

Schmidt (2000, p.33) précise que « *La formation des futurs enseignants doit les amener à reconstruire un nouveau rapport avec les savoirs mathématiques, et ceci, dans une perspective d'enseignement et d'apprentissage qui diffère de leurs expériences d'apprenants, qui consistaient essentiellement à apprendre les maths pour apprendre les maths* » et pose la question qui nous intéresse également : comment les amener à faire leur ménage épistémologique et comment provoquer une évolution de leur position épistémologique?

Plusieurs chercheurs travaillent dans cette direction en proposant des moyens pour dépasser les formes habituelles de la formation des enseignants telles que les exposés magistraux, les travaux sur les textes didactiques, etc. Nous analysons certaines de ces recherches dans la section suivante.

1.3.2 MODÈLES DE FORMATION

Dans cette section, nous présentons très brièvement les différents dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques décrits par les recherches de Bailleul (1994), Comiti (1999), Coppe, Rolet et Tisseron (1999), Houdement et Kuzniak (1999), Millet (1999), Portugais (1995, 1996) et Robert (1996). À partir de la description de ces dispositifs et des résultats obtenus, nous examinons leur potentiel d'application à notre contexte de formation didactique à l'enseignement de la géométrie au primaire.

La majorité des dispositifs de formation décrits par les recherches citées sont centrés sur l'impact de la formation à la pratique enseignante. Mais ils sont très différents les uns des autres du point de vue organisationnel et du choix de savoirs didactiques qu'ils visent à développer. Par exemple, Coppe, Rolet et Tisseron (1999) analysent les pratiques enseignantes et essayent d'interpréter les actions de l'enseignant afin de déterminer l'origine des connaissances utilisées. Robert (1996) étudie les rapports entre la formation et les pratiques effectives (préparation du projet – sa réalisation). Les chercheurs Bailleul (1994) et Portugais (1995) proposent des ingénieries de formation qui sont centrées sur la dynamique entre les futurs maîtres et les formateurs de maîtres à propos des savoirs mathématiques et didactiques particuliers, savoirs qui sont spécifiquement étudiés lors des cours donnés en formation initiale universitaire. Ensuite, ces recherches étudient la dynamique qui se crée à propos de ces savoirs dans le milieu scolaire où les futurs enseignants réalisent leurs stages de préparation à l'enseignement.

Les moyens didactiques de l'élaboration des savoirs didactiques employés dans les recherches de Millet (1999) et de Comiti (1999) revêtent un intérêt certain. Le dispositif de formation proposé par Millet (1999) vise la création d'un besoin de savoir didactique particulier (formation – pratique (besoin théorique) – formation). Chaque séquence de la formation a pour but l'organisation d'un milieu d'observation. Les situations de formation provoquent chez le futur maître l'élaboration et l'explicitation de connaissances didactiques proches des savoirs didactiques officiels. Ces connaissances deviendront objet d'étude au cours de la séquence suivante. Par exemple, la question d'organisation d'une rencontre de l'élève avec un savoir amène l'étude de la notion de situation-problème, ce qui permet au formateur d'introduire la *Théorie des situations* (Brousseau, 1998). La didactique apparaît au futur maître comme une nécessité théorique pour l'étude des questions issues de ses pratiques.

Le dispositif de la recherche de Comiti (1999) est centré sur l'élaboration du mémoire professionnel qui « *a une fonction de mise en cohérence et d'unification des différents* *éléments de la formation* » (Comiti, 1999). Le futur enseignant de deuxième année est invité à s'intégrer dans une formation par l'analyse des pratiques. Il s'agit d'amener le futur enseignant à apprendre à poser, construire et résoudre ou reformuler un « problème professionnel ». Les treize ateliers (3h chacun) sont répartis d'octobre à mai. Au début, le travail en atelier permet de préciser les questions importantes du thème d'étude, d'aider chaque participant à préciser son propre questionnement et de lui faire connaître des travaux existant dans le domaine de son étude. L'un des objectifs que vise cette formation est de faire comprendre aux professeurs-stagiaires qu'il existe des moyens d'analyse didactique qui permettent une problématisation de phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Ce passage, du regard naïf à une analyse instrumentée, conduit le futur maître à une nouvelle interprétation de ce qui se passe en classe. Les allers et retours entre le travail dans les ateliers, la pratique et la recherche personnelle de l'étudiant participent à l'appropriation progressive des concepts introduits en formation. Dans un second temps, les ateliers sont consacrés à la définition des expérimentations et à l'analyse de données. L'auteure souligne que « *...les mises en relation entre ce travail théorique et la mise en œuvre personnelle des concepts en jeu pour la construction et l'analyse de situations sont productrices de connaissances nouvelles pour le professeur-stagiaire, connaissances qui participent en retour à son appropriation des concepts en jeu* » (Comiti, 1999, p.178).

La recherche de Houdement et Kuzniak (1999) touche de très près nos préoccupation car elle porte sur la formation des maîtres à l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. En référence aux travaux du mathématicien suisse Ferdinand Gonseth, les auteurs situent la place de l'intuition, de l'expérience et de la déduction dans l'activité géométrique. Houdement et Kuzniak présentent trois synthèses constitutives de la géométrie élémentaire, qu'ils appellent paradigmes géométriques : la « géométrie naturelle » (I), la « géométrie axiomatique naturelle » (II) et la « géométrie axiomatique formaliste » (III), selon le degré de dépendance entre la géométrie (I, II, III) et la réalité physique. Le dispositif de formation a pour objectif de créer des conflits cognitifs mettant en évidence les rapports entre les différents paradigmes. Ils proposent aux futurs maîtres d'analyser les tâches géométriques pour démontrer la complexité des sujets géométriques en termes de niveaux de géométrie. Une approche structurée autour des trois modes des connaissances : intuition, expérience, déduction dans chacun des paradigmes géométriques, selon ces chercheurs, doit permettre aux enseignants d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec les paradigmes géométriques de leurs élèves.

Quant aux résultats des recherches analysées, la plupart d'entre eux ne sont pas très encourageants. Bailleul (1994, p. 32) souligne que de nombreux stages de formation montrent que « *[...] transmettre oralement et même par écrit sous forme de documents polycopiés des savoirs didactiques ne garantit nullement leur exploitation dans le quotidien à venir.* » Dans le cadre de l'atelier consacré à leur recherche à la Xe école d'été (Houlgate, 1999), Houdement et Kuzniak mentionnent aussi l'impossibilité de discuter directement des paradigmes avec les futurs enseignants. La recherche de Millet (1999), dont les savoirs didactiques essentiels travaillés lors de la formation étaient les éléments de la *Théorie des situations* (la situation a-didactique, la situation d'action, la situation-problème, etc.), montre que peu de stagiaires ont compris les nuances entre l'*activité,* la *situation-problème et* la *situation a-didactique*. L'analyse de 89 mémoires professionnels de futurs maîtres effectuée dans la recherche de Comiti (1999) révèle que 37 % de ces mémoires ne font référence à aucun concept de didactique. Dans les autres travaux, l'emploi des concepts didactiques étudiés s'est limité aux concepts suivants : contrat didactique (23 %), conceptions (18 %), changement de cadres (16 %), ingénierie didactique (14 %).

L'analyse de ces différents dispositifs de formation nous permet néanmoins de retenir certains éléments qui peuvent être utiles pour notre recherche : la recherche des origines des connaissances utilisées par les enseignants (Coppe, Rolet et Tisseron, 1999), les difficultés que les futurs maîtres rencontrent dans le milieu des stages (Robert, 1996), les moyens d'introduction des savoirs didactiques (Millet, 1999; Comiti, 1999), l'analyse de tâches géométriques selon les différents paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 1999), etc.

Cependant, au regard de notre contexte de formation, il nous faut reconnaître que ces dispositifs ne correspondent pas aux différentes contraintes qui y sont présentes.

D'une part, il nous faut souligner l'absence de lien direct entre la formation théorique et la formation pratique (stage). Cela est très regrettable, car nous sommes d'avis qu'un couplage serré entre ces deux aspects de la formation est très important pour le développement professionnel du futur maître et du formateur des maîtres. Un lien étroit entre le milieu de formation et le milieu des stages permet la continuité du processus de formation et l'intégration des savoirs (mathématiques et didactiques). Un contexte didactique, où le futur enseignant peut viser des objectifs spécifiques, se questionner sur ses actions, sur le comportement des élèves, revenir sur les événements passés, les interpréter, les analyser et planifier ses interventions futures, peut apporter plus de sens à la formation. Les observations des stages par le formateur en didactique peuvent aussi constituer des données importantes pour l'amélioration de la qualité de ses cours. Comment le formateur en didactique peut-il étudier les influences à court terme de la formation didactique (contenu, méthodes, analyses, etc.) sur la pratique s'il n'a pas d'accès au milieu des stages?[9] Par exemple, les résultats des observations effectuées en 2000-2001[10] nous ont permis de décrire les phénomènes observés, d'enrichir notre expérience comme observateur et chercheur et de compléter la banque de cas particuliers concernant les comportements des stagiaires et des élèves relatifs à la construction des connaissances géométriques. Certaines de ces données constituent aussi les éléments intégrés aux situations de formation.

D'autre part, l'ampleur du contenu géométrique à couvrir avec les futurs maîtres dans un temps respectivement court (42h) et le nombre d'étudiants par groupe (60) ne nous permet pas de créer le dispositif visant spécifiquement l'étude d'un savoir géométrique et didactique particulier comme dans les recherches de Portugais (1992) et de Bailleul (1994). Le niveau de préparation géométrique moindre des étudiants rend difficile l'accès au niveau d'analyse proposé par la recherche de Houdement et Kuzniak (1999), car notre cours est le seul cours de la géométrie et les étudiants doivent se réapproprier tout le contenu nécessaire pour l'enseignement de la géométrie au primaire. Les contraintes de la situation de formation, telles que nous les avons décrites, nous obligent (en tant que formateur et non pas comme chercheur) à avoir une optique plus pragmatique. En effet, travailler auprès de petits groupes

[9] Voir à ce sujet Gattuso, 2000.

[10] Lors de ces années, nous avons obtenu la permission de part des étudiants et de leurs maîtres associés de participer aux stages. Dans ce contrat, nous pouvions être seulement un observateur et non pas un agent actif de formation pratique.

(15-20 personnes), sur une notion géométrique ou didactique particulière, en utilisant le même temps alloué aux apprentissages permet de construire de très beaux modèles de formation didactique, mais qui ne correspondent pas à notre situation de formation. Ces modèles constituent cependant une base intéressante à partir de laquelle une formation didactique particulière peut être élaborée.

1.3.3 FORMATION DIDACTIQUE ENVISAGÉE

Aborder la question de l'impact de la formation didactique à l'enseignement, ici l'enseignement de la géométrie, sur l'application efficace des savoirs acquis à la pratique enseignante, nous amène d'abord à nous interroger sur le choix de savoirs didactiques et sur les moyens de ce transfert. La question des moyens didactiques de l'organisation de la formation des futurs maîtres a été posée à plusieurs reprises par la communauté didactique du Québec. Par exemple, le rapport d'un groupe de travail au colloque du GDM-2001 (Côté, 2001, p.61) souligne l'apport de Brousseau, de Vergnaud et d'autres didacticiens sur la notion de « situation » comme modèle d'apprentissage et soulève la question de l'utilisation du modèle de situation didactique par les formateurs de maîtres : *« Il est essentiel que nous apprenions à penser les mathématiques en termes de situation, et que pendant toute leur formation, les futurs enseignants aient de multiples occasions de faire l'expérience du fonctionnement de connaissances mathématiques en situation, d'étudier ce que signifie piloter une situation, et essentiellement de concevoir et d'expérimenter un enseignement fondé sur des situations-problèmes »*.

Si nous considérons que les produits de recherches didactiques doivent servir aux futurs enseignants de cadre de référence, nous devons choisir les savoirs didactiques qui permettront d'associer le plus étroitement possible le contenu notionnel - la géométrie dans notre cas - à son apprentissage et à une réflexion sur son enseignement à l'école primaire. Quant aux moyens de leur transfert, nous devons créer à l'intérieur de notre formation les conditions de leur élaboration pour que les savoirs didactiques deviennent pour les futurs maîtres « *les outils ou des instruments* » Chevallard (1988, p.5) de leur l'enseignement qui les aideront à « *expliciter et réaliser les choix auxquels tout enseignant est confronté* » (Comiti, 1999, p.177).

L'appropriation des connaissances théoriques de la didactique ne vise pas que chaque futur enseignant devienne un expert en didactique, mais qu'il dispose de moyens d'analyse pour réfléchir à des questions d'enseignement, qu'il prenne conscience de ses propres connaissances et de leur influence sur l'enseignement. Comme le souligne Vergnaud (2001), la réflexion continue sur la situation, les stratégies, les actions de l'élève permet à l'enseignant d'adapter progressivement son enseignement aux situations rencontrées. « *On n'est pas expert seulement parce qu'on a répété un grand nombre de fois le même geste ou le même raisonnement, mais aussi parce qu'on est en mesure d'aborder et de traiter des situations nouvelles, jamais rencontrées auparavant* » (ibidem, p.9). Le savoir d'expert, selon cet auteur, se construit à partir de la variété de situations rencontrées et chaque nouvelle situation est perçue par l'enseignant relativement aux similitudes et aux différences par rapport à l'expérience vécue. Ce savoir permet à l'enseignant de porter un regard critique sur les méthodes et les modèles d'enseignement, sur le matériel pédagogique avant d'essayer leurs applications en classe. Cependant, l'expérience de la pratique et la réflexion sur ces expériences, seules, peuvent ne pas produire chez l'enseignant le sentiment d'être à l'aise avec les contenus enseignés et ne pas participer à l'efficacité du processus d'enseignement. Nous faisons l'hypothèse que l'expérience et la réflexion sur l'enseignement gagnent à être basées et nourries par les savoirs officiels disciplinaires, didactiques et autres.

Dans la formation initiale des maîtres, nous pensons que l'épistémologie personnelle de l'étudiant, ses capacités d'apprendre et de réfléchir, son évolution à travers l'analyse de ses allers-retours entre les éléments de la formation et la pratique de la classe jouent un rôle déterminant dans la construction des savoirs professionnels de l'enseignant. Nous pensons également que la formation didactique, en plus de la préparation disciplinaire, doit favoriser la réflexion du futur maître sur ses propres compétences professionnelles et participer au développement d'un répertoire de ressources qui peut être mis en place pour l'organisation des apprentissages et qui peut s'enrichir à travers son utilisation dans des expériences en classe.

C'est justement sur cet enjeu que la présente recherche se penche, portée par la conviction qu'au sein de la formation, doit être intégré le développement des connaissances disciplinaires et des moyens d'analyse de la pratique qui serviront de point de départ au développement de savoirs professionnels. Ces objectifs correspondent à la description des compétences professionnelles visées par le MEQ[11] pour la formation initiale des enseignants, notamment à la compétence 1 (qui réfère à la connaissance disciplinaire) et à la compétence 3 (qui fait appel à la conception des situations d'enseignement-apprentissage).

1.4 OBJET DE LA RECHERCHE

Les différents enjeux de la formation initiale à l'enseignement (phénomènes d'apprentissage identifiés, programme d'étude, demandes et besoins pour l'enseignement de la géométrie au primaire exprimés par des futurs maîtres, contraintes de la situation de formation, contenu des manuels autorisés pour l'enseignement, etc.), nous ont amenée à déterminer autant le choix de savoirs didactiques et géométriques à développer dans notre dispositif de formation que l'approche didactique qui sera installée à l'intérieur de cette formation.

Nous nous intéressons donc à la création d'un dispositif qui mène à la structuration des connaissances géométriques et à de nouvelles prises de décisions didactiques pertinentes pour l'enseignement de la géométrie au primaire. La construction du sens des notions géométriques et des liens entre les éléments du concept (et entre les concepts) nous semble très importante, car il s'agit de la structuration d'un système de connaissances qui va permettre le traitement de situations nouvelles. La performance dans l'utilisation des savoirs appris dépendra du niveau de développement conceptuel atteint par l'étudiant.

Nos futurs enseignants sont des étudiants de 4^{e} année universitaire et ils possèdent déjà certaines connaissances sur les contenus et sur l'enseignement. Les connaissances du futur enseignant, son point de vue sur la discipline à enseigner, sur le matériel didactique, sur les objectifs visés par les programmes et sur l'organisation de l'enseignement, influencent constamment ses apprentissages et sa pratique. En préparant le dispositif de recherche, nous devons en tenir compte, parce que leur ignorance, souligne Charlier (1989), « *[...] mènerait à*

---

[11] Gouvernement du Québec, Ministère de l'Éducation (2001). La formation à l'enseignement. Les orientations. Les compétences professionnelles.

développer chez eux deux modes de fonctionnement spécifiques : l'un propre à la situation de formation et l'autre, adapté à la pratique quotidienne, celle-ci restant hermétique aux apprentissages réalisés ailleurs. Une prise de conscience par les professeurs des représentations qu'ils véhiculent et des divergences entre celles-ci et l'objet de la formation, constituerait peut-être une condition nécessaire à la réussite de la formation ». Notre travail consiste donc à concevoir des situations intelligibles et fructueuses qui favorisent la réflexion de l'étudiant et puissent « [...] *provoquer, de façon contrôlée, l'évolution des conceptions* » (Artigue, 1988 p.291).

Les différentes conceptions exigent chacune un traitement didactique différent. Elles peuvent porter sur la représentation graphique, sur le langage, sur le raisonnement, sur les procédés (construire, décrire les étapes, anticiper les réponses possibles, etc.), sur la connaissance des propriétés (des figures, des transformations, des relations, etc.). En effet, des stratégies différentes peuvent être utiles selon la difficulté (sa nature, son origine ou le contenu sur lesquels elle porte) et selon les objectifs visés par le formateur. Dans ce contexte, l'approche qu'on choisit pour favoriser le passage aux savoirs scientifiques aura pour fonction ou de construire, ou de détruire et de reconstruire, ou encore de compléter les connaissances antérieures identifiées.

Nous devons aussi changer la perception négative que certains étudiants ont envers les mathématiques. Le rapport que les étudiants ont avec la géométrie représente pour nous l'un des aspects les plus déterminants pour l'enseignement de la géométrie. Nous sommes convaincue que la compréhension du contenu géométrique du primaire, des démarches scientifiques et des méthodes nécessaires devient possible pour chaque étudiant à partir du moment où il décide de s'impliquer dans l'étude proposée, de réinvestir ultérieurement et consciemment ses connaissances. Pour développer cette réflexion personnelle qui donne du sens à des apprentissages, les étudiants doivent avoir une attitude positive envers la connaissance, attitude qui fait évoluer progressivement leurs conceptions, qui les aide à comprendre les fondements épistémologiques de la géométrie et de l'enseignement de la géométrie. Il est utopique de vouloir transformer les conceptions des étudiants contre leur propre volonté, souligne Dionne (1987); les étudiants doivent sentir la nécessité et la possibilité de ce changement. Nous croyons que si l'étudiant n'entre pas comme « géomètre » dans le jeu géométrique, comme « chercheur » dans le jeu didactique et comme « ingénieur » dans sa pratique, notre formation ne développera pas de façon suffisante chez lui ni le savoir géométrique, ni le savoir didactique et hypothéquera sérieusement, par conséquent, sa capacité à développer son expertise d'enseignant.

Notre recherche s'intéresse donc à l'apprentissage de l'étudiant, futur maître et aux conditions de cet apprentissage. Nous faisons l'hypothèse qu'en faisant vivre des situations d'apprentissage à des futurs enseignants, nous les habituons à chercher la signification de ces situations et nous facilitons le passage à la mise en œuvre d'un même type de travail dans leur pratique professionnelle. Notre but premier est de créer les conditions permettant aux futurs enseignants de réfléchir à la pertinence des activités par rapport aux connaissances que nous voulons faire acquérir aux élèves. Nous souhaitons les rendre capables d'analyser des activités existantes et d'en concevoir de nouvelles.

La conception et l'analyse didactique de l'activité mathématique constituent la part importante, voire essentielle du métier de l'enseignant. Brousseau (1998, p.352) précise que « [...]*pour rester alerte, le professeur doit « refaire » des mathématiques connues en cherchant quel genre de problèmes elles permettent de résoudre, quel genre de questions elles conduisent à se poser, comment on peut améliorer leur efficacité et leur présentation. Recontextualiser autrement les mathématiques – en particulier pour ses élèves – est l'activité essentielle des professeurs.* » Brun (1981) souligne que la prise en compte du savoir constitue la spécificité de la didactique et que la didactique « [...] *contient une volonté de redonner de l'importance à l'analyse des contenus d'enseignement* », car la connaissance disciplinaire est le seul moyen de cette analyse. C'est ce savoir qui est d'abord en jeu dans la formation didactique des futurs enseignants, car sans connaissance géométrique solide, il est difficile d'avoir confiance en ses moyens et en soi comme un enseignant.

Par la formation offerte, nous voulons atteindre la compréhension du contenu à enseigner et de la didactique reliée à ce contenu et à son enseignement. Compte tenu du développement géométrique des étudiants et de leurs besoins réels concernant la pratique d'enseignement, nous attribuons à la didactique le rôle d'outil d'analyse des connaissances antérieures du futur enseignant et de la pratique enseignante. Nous voulons susciter l'émergence d'une réflexion sur l'organisation des apprentissages et sur l'ensemble des éléments du système didactique. Nous considérons notre formation comme une préparation à l'enseignement de la géométrie élémentaire à partir d'un cadre de référence didactique.

À partir des conditions décrites précédemment, notre recherche cherche à créer et à valider un dispositif didactique de formation visant le développement des connaissances permettant l'élaboration, la réalisation et l'analyse du processus d'enseignement. Le cadre théorique que nous développerons au chapitre suivant nous aidera à préciser les objectifs de la recherche.

2. CADRE THÉORIQUE

Le cadre théorique sur lequel prend appui le traitement des questions de recherche est divisé en deux parties : *Cadre géométrique* et *Cadre didactique*.

La section consacrée au *Cadre géométrique* présente une étude du développement de la pensée géométrique et du rôle de la visualisation, du langage, du raisonnement et de la résolution des problèmes dans l'apprentissage de la géométrie. En mettant à contribution différentes recherches portant sur les aspects principaux de l'enseignement de la géométrie et sur les difficultés des élèves en apprentissage, nous analysons plus particulièrement le travail de van Hiele (1959/1985) et de Duval (1995). Ces deux études nous permettront de faire ressortir les éléments importants sur lesquels nous nous appuierons pour développer et évaluer les compétences géométriques des futurs maîtres. Dans la section *Cadre didactique*, nous nous interrogeons sur la signification du terme « situation-problème » qui est au cœur des nouveaux programmes ministériels (MEQ, 2002). Nous nous référons en particulier à la *Théorie des situations didactiques* (Brousseau, 1998)[12] qui nous permettra de déterminer les savoirs didactiques de la formation ainsi que les moyens de transfert des connaissances géométriques et didactiques.

2.1 CADRE GÉOMÉTRIQUE

À partir de différents travaux consacrés à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie, nous faisons ressortir quelques repères théoriques qui permettent de mieux préciser les enjeux, défis et approches envisageables pour cet enseignement. Dans la section 2.1.1, en nous intéressant aux objectifs de l'enseignement de la géométrie, nous analysons différentes recherches portant sur les phénomènes d'enseignement et les difficultés des élèves en apprentissage de la géométrie (Zhuravlev, 1950; Zykova, 1955; Rubinshtein, 1958; Van Hiele, 1959/1985, 1986; Battista, Wheatley et Talsma, 1982; Van Hiele-Geldof, 1984; Yakimanskaya, 1959, 1971; Wirszup, 1976; Bishop, 1980, 1989; Artigue et Robinet, 1986;

---

[12] L'ouvrage « Théorie des situations didactiques » présente plusieurs textes de Guy Brousseau. La référence à l'année d'apparition de chacun se fait selon la bibliographie présentée dans cet ouvrage.

Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Hershkowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Mitchelmore et Vinner, 1990; Clements et Battista, 1992; Vergnaud, 1991; 2001; Berthelot et Salin, 1992; Duval, 1995). Dans les sections 2.1.2 et 2.1.3, nous étudions plus précisément les cadres de deux chercheurs : ceux de van Hiele (1959/1985) et ceux de Duval (1995), car ils constituent les éléments théoriques qui nous ont guidée dans l'organisation du dispositif de la formation. Bien que ces deux auteurs analysent les différents aspects de l'enseignement de la géométrie et de la construction des connaissances géométriques, l'orientation de leurs recherches est différente. Les niveaux de développement de la pensée géométrique de van Hiele (1959/1985) permettent de mieux percevoir l'apprentissage de la géométrie comme un contexte fécond pour le développement de la pensée, nous aident à réfléchir sur la continuité des apprentissages, autant chez les élèves que chez nos étudiants, et nous dotent d'un cadre d'analyse de leurs productions en géométrie. L'approche sémiotique de Duval (1995) et la notion de registre de représentation nous permettent d'entrer au fond de l'activité géométrique, de préciser les savoirs géométriques et d'envisager la manière de travailler les objets géométriques.

2.1.1 ÉLÉMENTS PRINCIPAUX DE L'ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE AU PRIMAIRE

L'analyse de différentes recherches portant sur les difficultés des élèves en apprentissage de la géométrie nous permet de préciser les objectifs de la formation géométrique et de réfléchir au rôle des activités qui participent à leur atteinte. Ces recherches accordent un rôle important à la visualisation, au langage géométrique et au raisonnement dans la construction des concepts et des processus géométriques et dans la résolution des problèmes géométriques.

Même s'il est souvent assez difficile de distinguer le processus de la perception de l'appréhension conceptuelle des objets dans une activité géométrique, nous allons quand même faire ressortir de cette étude les activités qui sont orientées plus sur le développement des capacités visuelles ou langagières des élèves pour en apprécier leur rôle dans la conceptualisation, le développement du raisonnement et la résolution de problèmes géométriques. Cette analyse permet ainsi d'observer les liens entre ces éléments dans les activités géométriques et d'expliciter certains phénomènes d'apprentissage observés et décrits dans la section 1.3.1.

2.1.1.1 VISUALISATION

Plusieurs chercheurs soulignent l'importance de l'approche visuelle dans les activités d'exploration au niveau de l'enseignement primaire. Fuys, Geddes et Tischler (1988) expliquent son utilité dans les activités géométriques tant pour maintenir l'intérêt des élèves, que pour les aider dans la construction des concepts. « *Visualizations are used as a basis for assimilating abstract [geometric] knowledge and individual concepts* », soulignait Yakimanskaya (1971, p. 145). Laborde (1988, p.343) affirme aussi que « *les données issues de la perception sont un des éléments clés dans la construction des savoirs théoriques* ».

L'analyse des recherches portant sur les difficultés des élèves dans la résolution des tâches spatiales fait ressortir deux éléments principaux de difficultés visuelles :

- *l'orientation* spatiale qui exige la compréhension et le fonctionnent des rapports entre les positions spatiales (possibles) d'un objet et la position présente et
- la *visualisation* spatiale qui exige la compréhension et l'exécution mentale des mouvements d'objets bi - et tridimensionnels (Bishop, 1980).

La lecture du dessin demande soit de reconnaître un tout à partir de ses éléments ou de « disséquer » les parties d'un tout, soit d'analyser la figure selon son arrangement spatial, soit encore d'établir des relations entre les éléments de la figure et de découvrir de nouvelles informations (Zhuravlev, 1950; Zykova, 1955; Yakimanskaya, 1959). Ce problème a été travaillé par Rubinshtein (1958). Ce chercheur explique que les figures (ou les éléments nécessaires pour résoudre un problème) ne heurtent pas l'œil quand on « regarde » simplement le dessin et que le processus de perception d'un dessin n'est pas un acte momentané, ayant pour résultat une découverte immédiate de la complexité entière d'un objet géométrique. La diversité des éléments du dessin apparaît seulement par l'activité mentale analytique-synthétique active du sujet, qui définit les divers critères de l'analyse; en conséquence, d'abord quelques figures, puis d'autres, seront examinées. Laborde (1994, p. 386) affirme que la sélection des éléments pertinents d'un dessin pour les interpréter géométriquement et leur attachement à des concepts géométriques ne sont pas des compétences spontanées chez les élèves, mais le résultat d'un apprentissage.

Vergnaud souligne la contribution de la perception et de l'imagination à la conceptualisation, car « *la conceptualisation est, par définition, l'identification des objets du monde et de leurs propriétés et relations* » (Vergnaud, 2001, p.25). Mais la visualisation seule ne suffit pas à l'identification des objets géométriques et à la construction des concepts géométriques. Par la nature des opérations invoquées, ces processus exigent le recours au langage.

2.1.1.2 DÉVELOPPEMENT DU LANGAGE

Le langage sera toujours un facteur essentiel dans l'acquisition ou la construction des concepts et beaucoup d'échecs en mathématiques, souligne Vergnaud (1991), s'expliquent par l'incapacité à lire correctement, à comprendre l'énoncé, à justifier la démarche, etc. L'importance de la place de la structure langagière est affirmée par van Hiele (1959/1985, p. 246) qui reconnaît son rôle crucial dans la progression des élèves dans l'apprentissage de la géométrie.

L'une des difficultés avec le langage est qu'il se déploie souvent sur plusieurs niveaux. Ainsi, pour ce qui nous intéresse plus particulièrement, il faut tenir compte de l'existence d'un langage mathématique qui se distingue du langage naturel. Les recherches, par exemple celle d'Artigue et Robinet (1986) montrent que les maîtres doivent constamment, dans leur enseignement, tenir compte du langage naturel des enfants et l'utiliser. Dans les premières étapes de l'apprentissage, ils vont interpréter les termes mathématiques dans ce langage habituel ou alors, carrément remplacer ces termes par ceux utilisés par les élèves. Cette dernière approche n'est peut-être pas à exclure trop vite : Dina van Hiele-Geldof (1984) souligne effectivement que si le langage mathématique est employé trop tôt ou si l'enseignant l'utilise comme point de référence dans son discours quotidien, le risque est grand que les élèves le retiennent sans vraiment le comprendre. Il faut donc l'introduire progressivement et, au fur et à mesure que les élèves commencent à construire leur propre vocabulaire, l'enseignant doit soigneusement préciser des distinctions entre l'emploi des termes communs et celui des termes scientifiques (Clements et Battista, 1992; Fuys, Geddes et Tischler, 1988).

Plusieurs études poursuivent des objectifs didactiques particuliers comme : observer le langage spontanément employé par les élèves au début de l'enseignement, vérifier l'utilisation des termes nouveaux, faire découvrir le jeu de contraintes inhérent à toute figure géométrique, préciser le langage employé, etc. Ce travail est bien démontré dans l'ingénierie d'Artigue et de Robinet (1986) dans les situations de communication : pour transmettre le message à son récepteur, l'élève décrit une figure construite; l'élève-récepteur effectue la construction selon les informations obtenues. La comparaison des constructions permet de préciser les informations et le langage employé.

Les recherches analysées (Van Hiele, 1959/1985; Yakimanskaya, 1971; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) font ressortir le fait qu'afin de mettre en œuvre le processus de conceptualisation nécessaire à l'énonciation, on doit beaucoup insister sur la recherche et la description du maximum de propriétés d'une figure géométrique pour établir une base permettant plus tard la déduction des propriétés. Par conséquent, ce type de travail permet d'élargir le concept géométrique particulier et d'éviter les obstacles associés à la modification d'un concept déjà établi dans une forme réduite ou d'un énoncé géométrique mémorisé sans compréhension. Si, précise Yakimanskaya (1971), les enseignants fournissent seulement les informations verbales des propriétés de figures et ne se préoccupent pas de l'organisation des activités pour le développement de l'imagination spatiale des étudiants, cet enseignement « formaliste » ne participera pas à la construction des concepts, car la conceptualisation apporte une contribution décisive à l'énonciation et constitue même une condition de l'énonciation (Vergnaud, 1991). Dans de telles conditions, l'apprentissage au niveau supérieur exigera une mémorisation (Clements et Battista, 1992).

2.1.1.3 Raisonnement

Le raisonnement est l'un des éléments fondamentaux dans la construction de concepts géométriques (Vergnaud, 1991) et son emploi représente un indice de la progression conceptuelle de l'élève (van Hiele, 1959/1985). En ce sens, la géométrie présente un lieu privilégié, car elle « *entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est-à-dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation* *familière des images* » et « *prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques* » (Brousseau, 2000, p.1). Notons d'emblée, à l'instar de Brousseau (2000), que la tendance des « mathématiques modernes » à assimiler le raisonnement mathématique au raisonnement déductif a contribué fortement « [...] *à dévaluer la partie du « raisonnement » qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul...* » (p.2).

Paul et Elder (2001) décrivent la complexité du processus de raisonnement par l'implication d'un ensemble de processus intellectuels interreliés et qui engagent différents gestes mentaux, des connaissances et des expériences.

> *Chaque fois que vous raisonnez, vous le faites pour une raison, des questions sont soulevées sur la matière en discussion, des informations sont recherchées (données, faits, observations, expériences), des interprétations et inférences sont faites pour identifier des solutions et tirer des conclusions qui sont basées sur une série de concepts (théories, définitions, postulats, principes, modèles), à partir desquels des hypothèses sont formulées et des implications et conséquences sont considérées, et ce, en vue d'énoncer votre point de vue.* (p.53)

Jodra (2004) en décrivant le raisonnement comme l'opération de l'esprit qui consiste à faire passer sa croyance d'un jugement à un autre jugement, précise les principaux types de raisonnement :

> *On raisonne par analogie, par induction, et par déduction. Raisonner par analogie, c'est s'appuyer sur plusieurs ressemblances partielles entre plusieurs objets, pour affirmer une ressemblance totale; par induction, c'est observer des faits particuliers en plus ou moins grand nombre, pour s'élever à la connaissance des lois qui les régissent, c'est aller du particulier au général. L'opération contraire, qui consiste à descendre du général au particulier, constitue le raisonnement déductif. Tout raisonnement de cette nature suppose au moins deux vérités acquises, et, par conséquent, deux jugements antérieurs (A=B, et B=C), de la comparaison desquels résulte le troisième (C=A). De plus, il faut que les deux jugements antérieurs, au lieu de quatre termes distincts, n'en renferment que trois (A, B et C), et que l'un d'eux (B) soit commun aux deux jugements; sans cette condition, toute conception de rapport entre eux serait impossible; avec elle, cette conception devient irrésistible et fatale, et il se produit un troisième jugement.* (p.1)

En ce qui concerne le raisonnement visé par l'enseignement primaire, en plus du raisonnement *inductif* et *déductif*, le nouveau programme ajoute le raisonnement *créatif* où l'élève est appelé « *à imaginer des combinaisons d'opérations pour trouver diverses* *réponses à une situation-problème* » (MEQ, 2002, p.124). En décrivant le raisonnement par la capacité « *à établir des relations, à les combiner entre elles et à les soumettre à diverses opérations pour créer de nouveaux concepts et pour pousser plus loin l'exercice de la pensée mathématique*», le programme ministériel souligne aussi que ce processus exige d'« *effectuer des activités mentales telles que abstraire, coordonner, différencier, intégrer, construire et structurer* » qui s'exercent sur les relations entre les objets ou entre leurs propriétés (MEQ, 2002, p.128).

À partir de définitions et de descriptions présentées ci-dessus, nous interprétons l'emploi du raisonnement visé par ce niveau d'enseignement en tant que l'utilisation d'opérations mentales qui favorisent la formation des idées et des jugements destinés à construire la connaissance, à mettre de l'ordre dans la connaissance, à justifier, à convaincre, à prouver ou à réfuter et à développer des relations de dépendance entre des propositions pour aboutir à une conclusion. Il s'agit pour nous plus du fonctionnement « naturel » du raisonnement qui est commandé par les représentations des sujets (Duval, 1995) en le distinguant du raisonnement « logique »[13] qui est commandé par des règles de validité. Barbin (2002) précise la distinction entre la *géométrie déductive* où les propositions se déduisent les unes des autres dans un discours et la *géométrie naturelle* où les objets se déduisent les uns des autres.

Le but de cette analyse est de préparer un cadre théorique pour répertorier et illustrer différents types de raisonnement qui se présentent dans différentes activités géométriques à l'enseignement primaire.

2.1.1.3.1 ACTIVITÉS D'EXPLORATION VISANT LA CLASSIFICATION DES OBJETS

Les activités de manipulation, d'observation, de reproduction, de représentation et de construction permettent à l'élève d'agir sur les objets physiques et de les traiter de façon

---

[13] Duval (1995, p.250) distingue les formes suivantes de raisonnement :
- le syllogisme aristotélicien qui a été si longtemps considéré comme le raisonnement logique,
- le raisonnement déductif et le raisonnement par l'absurde qui sont, en mathématiques, les formes de raisonnement pour la démonstration,
- l'argumentation, forme de raisonnement plus adaptée aux situations ouvertes de discussion ou de recherche

géométrique (Berthelot et Salin, 1992). Même si ces activités ne relèvent pas directement des connaissances géométriques, elles contribuent au développement de l'imagination, du vocabulaire et initient les élèves aux démarches géométriques : observer, comparer, rechercher, sélectionner, établir des liens, organiser les informations, etc. qui favorisent la structuration de leurs pensées et de leurs connaissances (Vergnaud, 1991). Ce faisant, elles préparent, de façon intuitive, la prise de conscience de propriétés géométriques. En visant aussi l'enrichissement et la structuration de l'expérience spatiale des élèves, elles permettent à l'élève d'effectuer un contrôle efficace de ses relations à l'espace sensible (Berthelot et Salin, 1992) et favorisent un passage de l'espace représentatif (ou sensible) à l'espace géométrique[14].

Van Hiele (1987) écrit que dès l'école primaire, on doit offrir aux élèves des occasions pour la construction de la pensée géométrique et que si les élèves n'atteignent pas le niveau suffisant pour employer le raisonnement, c'est, en partie, parce qu'on ne leur offre pas de problèmes géométriques appropriés. Cette « *période prolongée d'inactivité géométrique* » (Wirszup, 1976, p. 85) dans les premières années d'apprentissage rendrait les élèves « *geometrically deprived* » (Fuys, Geddes et Tischler, 1988). Wirszup (1976) prétend aussi que la période d'accumulation inductive des faits ne doit pas être prolongée trop longtemps; il indique que la déduction simple doit être encouragée dès l'école primaire. Les enseignants devraient orienter leur travail tout d'abord vers le niveau où « *des figures géométriques deviennent les porteurs de propriétés* » (Wirszup, 1976, p. 88) pour ensuite, viser la compréhension des relations entre les propriétés de la figure et entre les figures. Des raisonnements fondés sur les propriétés des figures constituent de beaux objets pour un tel apprentissage et l'activité de classification de ces figures en est un exemple éprouvé.

Vergnaud (2001) indique que pour travailler la sélection des informations, les outils graphiques (diagrammes, schémas, tableaux, etc.) représentent un moyen qui permet de retenir ce qui est essentiel d'un objet, d'une classe ou d'un processus. Grâce à leur caractère

---

[14] Chevallard (1991) définit l'espace sensible comme l'« *espace contenant des objets, et qui nous est accessible par le biais des sens*» et l'espace géométrique comme le « *résultat de l'effort théorique appelé géométrie*» (cité dans Berthelot et Salin, 1992, p. 28).

structurant, souligne cet auteur, les diagrammes et les schémas fournissent à l'élève des outils dans son apprentissage, permettent de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation et participent à la conceptualisation. Une utilisation adéquate de ces outils permet une structuration des connaissances et favorise le développement du raisonnement et l'évolution de la pensée logique (Vergnaud, 2001, p.25). Duval (1995) admet que dans les activités de classification des figures géométriques qui utilisent les relations d'inclusion ou d'intersection, « [...] *le fonctionnement cognitif du syllogisme classique reste nécessairement très proche d'un emploi commun de la langue naturelle* » (p. 250). Par exemple, l'emploi du diagramme de Venn pour la classification des carrés, des rectangles et des trapèzes, selon Duval, représente l'extension des trois termes du syllogisme classique, sans la nécessité d'expliciter les règles[15] d'un syllogisme. Dans la figure ci-contre, l'utilisation des relations d'inclusion permet d'envisager d'emblée que tous les carrés sont des trapèzes.

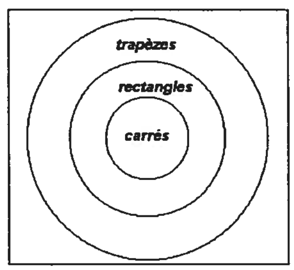


Figure 1. Classification des quadrilatères (diagramme de Venn-Euler)

2.1.1.3.2 JUSTIFICATION DES ÉNONCÉS

Selon Hershkowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Mitchelmore et Vinner (1990), le développement d'une synthèse de processus analytiques et verbaux dans la construction des concepts robustes est possible dès la cinquième année du primaire. Briand et Chevalier (1995,

[15] Exemple : Le syllogisme est organisé de telle sorte que le pas d'un raisonnement dépend uniquement de la présence d'un même terme dans les deux prémisses et y occupe l'une des deux positions grammaticales, de sujet dans la première prémisse et d'attribut dans la deuxième. Dans chacune des deux prémisses, il y a une relation d'inclusion, et la conclusion résulte de la combinaison de ces deux relations d'extension entre le terme commun et les deux autres termes.

Prémisses		**Conclusion**
Tous les rectangles sont des trapèzes		
Tous les carrés sont des rectangles	→	Tous les carrés sont des trapèzes

p. 132) soutiennent que certaines formes de raisonnement utilisées dans la vie quotidienne pourraient être sollicitées lors d'activités mathématiques à l'école élémentaire, comme par exemple la « *disjonction des cas* » ou le « *contre-exemple* ». Dans les exemples suivants, il est possible de recourir au contre-exemple pour nier la généralité d'une proposition à l'aide d'un exemple et invalider certaines affirmations.

Vrai ou Faux?
□ *Si deux droites sont perpendiculaires alors l'une est horizontale et l'autre verticale*
□ *Deux droites perpendiculaires sont concourantes*
□ *Deux droites sont perpendiculaires si elles forment un angle droit*

La « *disjonction des cas* » permet d'affirmer une proposition en faisant l'inventaire de tous les cas possibles et en s'assurant, à chaque fois, de leur validité (Briand et Chevalier, 1995, p.132).

Exemple : *Tous les parallélogrammes sont des trapèzes.*

Argumentation anticipée : *Le carré, le rectangle, le losange sont des parallélogrammes.*
Le carré possède une paire de côtés parallèles, alors il est un trapèze.
Le rectangle possède une paire de côtés parallèles, alors il est un trapèze.
Le losange possède une paire de côtés parallèles, alors il est un trapèze.
Le parallélogramme possède une paire de côtés parallèles, alors il est un trapèze.

Les activités nommées ci-haut (de classification et de justification) cherchent à expliciter certains liens entre les figures, à entrevoir les relations existant entre les divers concepts géométriques et à introduire ordre et clarté dans les éléments du concept. En ce qui concerne l'enseignement de la géométrie au primaire, les recherches analysées formulent des commentaires généraux sur l'emploi du raisonnement et ne précisent pas comment on doit aborder les concepts et processus mathématiques pour que la nécessité de raisonnement s'impose naturellement dans le problème, dans la tâche ou dans la situation et participe à l'acquisition des connaissances. Nous réfléchirons plus loin à ces aspects en essayant de décrire les différents raisonnements qui peuvent être visés par les activités géométriques concrètes.

2.1.1.3.3 RÉSOLUTION DE PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES

Les activités de résolution de problèmes géométriques cherchent aussi à développer progressivement le raisonnement, la visualisation et à appliquer les connaissances et les démarches acquises. L'importance de ces activités s'explique par le rôle heuristique que ces dernières permettent de faire jouer aux figures géométriques. (Duval, 1995)

L'analyse de recherches portant sur les difficultés des élèves dans la résolution de problèmes géométriques qui emploient le dessin (Yakimanskaya, 1959; Zykova, 1955; Zhuravlev, 1950), démontre que la démarche de recherche de la solution dépend du niveau de visualisation et de conceptualisation. Il s'agit de la reconnaissance et de l'identification des éléments (indiqués ou supposés) nécessaires à la résolution d'un problème géométrique, de la capacité de tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (visualiser les éléments non-tracés et les procédures permettant la résolution d'un problème) et de déterminer les conséquences logiques de certaines données. En effet, il n'est pas toujours facile de « voir » sur une figure les relations ou les propriétés en relation avec un énoncé ou une consigne, « [...] *une figure ne représente une situation géométrique que dans la mesure où la signification de certaines unités figurales et de certaines de leurs relations sont explicitement fixées au départ* » (Duval, 1995, p.188). La recherche de Yakimanskaya (1971) a prouvé que la lecture d'un dessin dépend directement de différentes formes et de niveaux des processus de l'analyse, de la synthèse, et de l'abstraction. La capacité d'établir ces rapports, de comparer des figures en vérifiant si elles ont des éléments homologues congrus (segments, angles, arcs, etc.) et si elles ont des éléments appartenant aux différents concepts (par exemple, le même segment peut être la base d'un triangle, une bissectrice d'angle, une diagonale d'un losange, etc.) est nécessaire à la résolution de problèmes géométriques. Cela permet à l'élève d'obtenir à partir du dessin les nouvelles données, qui ne sont pas directement incluses dans la condition du problème. Ainsi, souligne l'auteure, la capacité de « lire un dessin » dépend directement du degré auquel le processus de perception est commandé par la pensée ou par diverses connexions possibles entre les abstractions sensorielle et conceptuelle. La recherche de la dimension psychologique pour interpréter la composition du dessin est d'intérêt théorique et pratique, puisque les difficultés associées à l'interprétation sont souvent à la base de l'incapacité de résoudre des problèmes de la géométrie.

À partir des orientations principales de l'enseignement de la géométrie exprimées dans cette section, nous croyons important que la formation didactique permette aux futurs enseignants de comprendre que les activités de manipulation avec du matériel concret, d'observation, de construction, de résolution des problèmes géométriques qui cherchent à favoriser l'imagination, la capacité de représentation des figures, la comparaison, la description des figures, etc., doivent viser aussi l'introduction progressive au raisonnement. C'est justement par le développement progressif de ces éléments et par leur coordination à travers les différentes pratiques géométriques que nous souhaitons organiser les apprentissages des élèves, à travers la construction des concepts et des processus géométriques déterminés par le programme ministériel.

2.1.2 NIVEAUX DE PENSÉE GÉOMÉTRIQUE

La théorie de van Hiele, développée par les Hollandais Dina et Pierre van Hiele, présente la description de niveaux du développement de la pensée géométrique et des étapes d'enseignement des concepts géométriques. Selon cette théorie, dans l'apprentissage de la géométrie, les élèves progressent en passant par des niveaux de pensée d'un niveau perceptif (visuel) vers le niveau plus sophistiqué (rigueur) à travers la description, l'analyse, l'abstraction et la preuve (déduction formelle). La théorie est basée sur les postulats suivants :

- L'apprentissage est un processus discontinu.
- Les niveaux sont séquentiels et hiérarchisés. Pour atteindre un niveau plus avancé dans la hiérarchie de van Hiele, les élèves doivent maîtriser les compétences des niveaux inférieurs.
- Les concepts implicitement compris à un niveau précédent deviennent explicitement compris au niveau supérieur.
- Chaque niveau a son propre langage. La structure langagière est un facteur crucial dans le passage au niveau supérieur.

Le modèle original de van Hiele décrit cinq niveaux de pensée[16].

---

[16] Les recherches postérieures (voir, par exemple, Fuys, Geddes et Tischler, 1988) ont ajouté un sixième niveau (ou le niveau 0). Ces chercheurs indiquent l'existence d'une pensée plus primitive que celle décrite par le Niveau 1.

Niveau 1 : VISUEL

À ce niveau, les élèves reconnaissent (identifient et représentent) les figures géométriques selon leur apparence visuelle. L'enseignant peut observer que dans le processus d'identification des figures, l'élève emploie souvent des prototypes visuels; par exemple, les élèves disent qu'une figure donnée est un rectangle, parce qu'« *elle ressemble à une porte* ». À ce niveau, la perception domine sur le raisonnement des élèves. Bien que l'élève détermine les figures par leurs propriétés visuelles marquantes, il ne prend pas, cependant, conscience de ces propriétés. Par exemple, les élèves peuvent regrouper les objets ou distinguer une figure des autres sans savoir pourquoi et sans être capables de nommer une propriété qui les unit ou qui les distingue. L'élève explique qu'ils ont « *la même forme* » ou « *on le voit bien* ». Ou bien, par la déclaration « *Cette figure est un losange* », l'élève explique qu'il a appris que la figure ayant cette forme s'appelle « losange » (van Hiele, 1986, p. 109).

Lors de la transition des élèves du niveau visuel au niveau descriptif, la figure et la classe de figures commencent à être associées à leurs propriétés essentielles (marquantes). Le produit final de ce raisonnement est la création des concepts des figures qui sont basés sur l'identification explicite de leurs propriétés, ce qui permet à l'élève de passer au Niveau 2.

Niveau 2 : DESCRIPTIF/ANALYTIQUE

Les élèves commencent à voir la figure comme une collection de propriétés plutôt que comme un « tout » (apparence visuelle); l'image commence à être associée à des éléments qui la composent. Par exemple, un losange est identifié comme tel parce qu'il peut être pensé en termes d'une figure ayant quatre côtés congrus; donc, le terme « losange » se réfère à une collection « *de propriétés qu'il a appris à appeler losange* » (van Hiele, 1986, p. 109). En atteignant le deuxième niveau, les élèves reconnaissent et peuvent décrire des figures par leurs propriétés. Les propriétés sont établies expérimentalement : en observant, mesurant, dessinant et modélisant. Les élèves découvrent que certaines propriétés appartiennent à une classe de figures, d'autres non. À ce niveau, les élèves ne voient pas cependant de rapports entre les classes de figures (par exemple, un élève pourrait affirmer qu'une figure n'est pas un rectangle parce qu'elle est un carré). La raison de classement des objets donc se traduit en termes d'appartenance de propriétés que les élèves associent à chacun de ces objets.

Niveau 3 : ABSTRACTION/RELATIONNEL

Les élèves découvrent les propriétés des classes de figures par la déduction informelle, formulent les définitions abstraites, distinguent entre les conditions nécessaires et suffisantes pour déterminer un concept. À ce niveau, les définitions sont vues non plus simplement comme des descriptions, mais comme une méthode d'organisation logique. Il devient clair pourquoi, par exemple, un carré est un rectangle. Les élèves peuvent classifier les figures hiérarchiquement (en ordonnant leurs propriétés) et donner des arguments informels pour justifier leurs classifications. À ce niveau, l'élève peut déterminer la figure selon la combinaison de ses propriétés; un carré, par exemple, est identifié comme un losange parce qu'il peut être pensé comme « *losange ayant certaines propriétés supplémentaires* »; l'élève saura que la figure est un losange s'il joint la définition de quadrilatère à la propriété « quatre côtés congrus » (van Hiele, 1986, p. 109). Les élèves pourraient déduire que dans n'importe quel quadrilatère la somme des angles doit être 360 ° parce que n'importe quel quadrilatère peut être décomposé en deux triangles, chacun ayant la somme des angles intérieurs de180 °.

Cette organisation logique des « idées », écrit van Hiele, est la première manifestation de la déduction. Le produit de ce raisonnement est la réorganisation des connaissances à travers la construction de relations entre les propriétés d'une figure et entre les figures (ou classes de figures). Cependant, les élèves ne comprennent pas toujours que la déduction logique est la méthode pour l'établissement de vérités géométriques.

Niveau 4 : DÉDUCTION FORMELLE

Les élèves peuvent établir des théorèmes dans un système axiomatique quand ils atteignent le Niveau 4. Ils reconnaissent la différence parmi des termes non définis, des définitions, des axiomes et des théorèmes. Ils sont capables de construire des preuves originales; c'est-à-dire ils peuvent produire un ordre de déclarations qui justifient logiquement une conclusion comme une conséquence des faits.

À ce niveau, les élèves peuvent raisonner formellement en interprétant logiquement des déclarations géométriques comme des axiomes, des définitions et des théorèmes. Les objets de leur raisonnement sont des rapports entre les propriétés des classes de figures. Le produit de leur raisonnement est l'établissement d'ordre en termes de chaînes logiques dans un système géométrique.

Niveau 5 : RIGUEUR

Au cinquième niveau, les élèves peuvent étudier la géométrie en l'absence de modèles de référence et ils peuvent raisonner en manipulant formellement des propositions géométriques. Les objets de ce raisonnement sont des rapports entre organisations formelles. Le produit de leur raisonnement est l'établissement, l'élaboration et la comparaison des systèmes axiomatiques différents.

Selon la théorie de van Hiele, le progrès dans les niveaux dépend plus du processus d'enseignement que de l'âge ou de la maturité de l'élève. L'enseignant joue donc un rôle décisif dans le développement de la pensée de l'élève en ce qui concerne l'organisation des apprentissages et leur continuité. Quand les enseignants réduisent l'étude du savoir particulier à une simple mémorisation, les élèves ne peuvent pas avancer dans le développement de la pensée et passer à un niveau supérieur, car ce passage dépend de la compréhension. (Van Hiele souligne qu'à aucun niveau la mémorisation n'est une composante essentielle de l'apprentissage). L'acquisition du savoir ne se réalise pas ainsi par la voie de l'enseignement direct, mais exige de l'enseignant de faire le choix des problèmes appropriés.

Van Hiele et la plupart de chercheurs reconnaissent que ce sont les Niveaux 2 et 3 qui sont visés à la fin de l'école primaire et que les élèves doivent atteindre. Pourtant, souligne van Hiele, l'enseignement de chaque niveau doit s'intéresser à l'approfondissement du Niveau 1[17].

Plusieurs chercheurs ont appliqué la théorie de van Hiele pour analyser l'apprentissage des concepts géométriques chez les élèves de l'école primaire jusqu'à l'Université (Wirszup, 1976; Mayberry, 1983; Hoffer, 1985; Burger et Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Jaime et Gutierrez, 1991; Clements et Battista, 1992; etc.). Bien que chacune de ces recherches apporte certaines critiques et essaye de préciser le modèle de van Hiele,

[17] Nous pensons qu'il s'agit ici de l'approfondissement de la visualisation.

elles confirment néanmoins que l'apprentissage des concepts géométriques part d'une pensée plus globale vers une pensée analytique et une déduction formelle plus rigoureuse.

Par exemple, après avoir effectué les tests cliniques auprès des élèves de différents âges (du maternel à l'universitaire), Burger et Shaughnessy (1986) annoncent que les comportements des élèves sont généralement compatibles avec la description des niveaux de van Hiele. Ils confirment les résultats de recherches de Wirszup (1976) et d'Hoffer (1985) en indiquent la difficulté d'association aux niveaux de pensée des résultats de l'évaluation des élèves qui se trouvent à l'étape de transition entre le Niveau 2 et 3.

L'existence de structures uniques linguistiques correspondant à chaque niveau a été soutenue par les recherches de Mayberry (1983), de Burger et Shaughnessy (1986) et de Fuys, Geddes et Tischler (1988).

Mayberry (1983), Jaime et Gutierrez (1991) et d'autres recherches rapportent l'utilisation de niveaux différents de pensée pour des concepts différents. Burger et Shaughnessy (1986) signalent que ce phénomène s'observe parfois à l'intérieur d'une même tâche. Ces chercheurs ont caractérisé les niveaux de pensée comme un processus dynamique plutôt que statique.

La question de la hiérarchisation des niveaux a été touchée par plusieurs recherches nommées (voir Mayberry, 1983; Burger et Shaughnessy, 1986; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Wirszup, 1976; etc.) Si certaines recherches utilisent cette hypothèse pour interpréter leurs résultats, d'autres posent la question sur l'élaboration des tests rigoureux. Wirszup (1976) souligne que la hiérarchisation de niveaux dépend d'un processus d'enseignement.

En analysant le niveau de la pensée géométrique chez des élèves, Fuys, Geddes et Tischler (1988) s'interrogent sur la correspondance de différentes composantes de leçons géométriques aux niveaux de pensée. Parmi quatre caractéristiques analysées par ces chercheurs : but, matériel descriptif, exercices et questions d'examens, les manuels ont représenté la partie la plus déficiente. L'absence de choix systématique des contenus géométriques des manuels et l'enseignement superficiel de plusieurs concepts géométriques importants ont été signalés par Wirszup (1976).

En analysant ces recherches, Clements et Battista (1992) concluent que la théorie de van Hiele a des implications fortes sur l'enseignement de la géométrie et, en particulier, sur les objectifs de l'enseignement, sur le développement du langage et sur le rôle des activités géométriques dans l'apprentissage.

2.1.3 REGISTRES DE REPRÉSENTATION

Les activités visant l'appréhension des figures, le raisonnement, la conceptualisation, la résolution de problèmes requièrent l'utilisation de différents systèmes d'expression et de représentation : les images, le langage naturel, l'écriture symbolique pour les objets géométriques et les relations entre eux, des graphes, des réseaux, des diagrammes et des schémas, etc. « [...] *il n'y a pas des actes cognitifs (comme l'appréhension conceptuelle d'un objet, la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence) sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même* », remarque Duval (1995, p. 5).

Les activités qui travaillent le même objet dans ses différentes représentations, selon Duval (1995), développent les capacités cognitives de l'apprenant, ses représentations mentales et permettent une meilleure compréhension des objets géométriques. Toute confusion entre l'objet et sa représentation entraîne une perte de compréhension et les connaissances acquises deviennent alors vite inutilisables en dehors de leur contexte d'apprentissage : soit par non-rappel soit parce qu'elles « [...] *restent des représentations « inertes » ne suggérant aucun traitement producteur* » (ibidem, p. 2).

Duval mentionne l'existence d'un cloisonnement entre les représentations qui ne relèvent pas du même système sémiotique, c'est-à-dire que les étudiants ne reconnaissent pas le même objet à travers ses différentes représentations sémiotiques. Ce cloisonnement, souligne cet auteur, résulte du phénomène de *non-congruence* (ibidem, p.6) entre les représentations d'un même objet qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. Généralement, le passage d'une représentation à une autre se fait spontanément lorsqu'elles sont congruentes, c'est-à-dire lorsque les trois conditions suivantes sont remplies :

- correspondance sémantique entre les unités signifiantes qui les constituent,

- même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations,
- même ordre possible d'appréhension de conversion d'une unité signifiante de la représentation de départ en une seule unité signifiante dans la représentation d'arrivée

L'activité géométrique fait appel à au moins deux registres sémiotiques de représentation, le *registre discursif* (pour désigner les figures et leurs propriétés, énoncer les définitions, etc.) et le *registre des figures* (qui relève de l'organisation de la perception visuelle). « *L'originalité des démarches en géométrie, par rapport à d'autres formes d'activités mathématiques, tient au fait que la coordination des traitements spécifiques au registre des figures et à celui d'un discours théorique en langue naturelle y devient absolument nécessaire* » (ibidem, p.173).

La spécificité de l'activité géométrique ne se réduit pas à une coordination nécessaire entre des traitements dans les deux registres; elle tient aussi au fait que les traitements qu'elle requiert vont à l'encontre de ceux qu'on y pratique spontanément. Pour éviter les impasses d'une *fausse proximité* (ibidem, p.194) entre les traitements pertinents et ceux qui sont effectués spontanément dans la perception des figures, dans la compréhension du discours et dans sa production, les activités géométriques devraient viser d'abord les traitements de deux registres séparément, et une telle séparation des registres de traitements « *n'implique ni leur opposition, ni l'élimination de l'un au profit de l'autre, mais elle appelle, au contraire, leur articulation* » (ibidem, p.294).

2.1.3.1. Registre des figures

Une particularité essentielle de la géométrie présente le recours au registre des figures, car « [...] *une figure ne représente une situation géométrique que dans la mesure où la signification de certaines unités figurales et de certaines de leurs relations sont explicitement fixées au départ* » (Duval, 1995, p.188).

En déterminant les unités élémentaires qui constituent une figure géométrique, Duval rapporte que toute figure apparaît « [...] *comme une combinaison de valeurs pour chacune des variations visuelles de ces deux types,* ***dimensionnel*** *(0, 1, 2 ou 3) et* ***qualitatif*** *(ligne droite ou courbe, ouverte ou fermée, grandeur, orientation)* » (ibidem, p.176). Ces éléments, appelés par Duval *des unités figurales élémentaires,* fonctionnent comme des unités de base représentatives. Une représentation de la même figure peut avoir moins de variables visuelles pertinentes qu'une autre, ce qui relève de l'organisation de la perception visuelle. La grandeur de segments (par exemple, dans l'étude des angles) et l'orientation (dans l'étude de la symétrie axiale) sont des variables non-pertinentes pour une figure géométrique parce qu'elles ne « [...] *sont pas susceptibles de représenter intrinsèquement des relations topologiques ou projectives* » (ibidem, p.176); mais ces variables seront prises en compte dans l'analyse didactique mise en œuvre dans la préparation des apprentissages en géométrie.

Comme la même représentation graphique peut représenter différents objets géométriques[18], les traitements doivent être spécifiques au registre des figures. La possibilité de traitements figuraux est liée à la possibilité de modifications qui peuvent être effectuées physiquement ou mentalement. En analysant le rôle heuristique des figures dans l'activité géométrique, Duval (1995) distingue deux niveaux dans l'appréhension des figures géométriques :

- le niveau de reconnaissance des différentes unités figurales qui sont discernables dans une figure donnée (incluant la figure)
- le niveau de modifications possibles des unités figurales reconnues (incluant la figure)

Le premier niveau correspond à la perception de la figure, le second niveau à une appréhension opératoire[19] des figures.

Si dans la perception des figures, il y a une prédominance des unités de dimension 3 (ou 2 pour des figures planes) sur les unités de dimension inférieure (expliquée par la « loi gestaltiste » : lorsqu'un objet possède un contour simple et fermé, il se détache comme formant un tout), quand on passe de la représentation figurale à la description (ou la définition), on peut constater qu'il y a prédominance des unités figurales de dimension inférieure. Prenons, par exemple, les définitions habituelles des quadrilatères particuliers.

---

[18] Par exemple, la même représentation graphique de forme carrée peut représenter la figure plane appelée carré, la base d'un prisme ou d'une pyramide, la face d'un cube ou d'un autre prisme, la projection d'un prisme ou d'un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre de la base, etc.

[19] Conformément à Vergnaud (2001) et Duval (1995), nous utilisons le terme « opératoire » comme synonyme d'opérationnel i.e. « qui est prêt à fonctionner de façon suffisamment sûre pour être couramment utilisé ». Dans la théorie de Piaget, une connaissance opératoire est intégrée à une structure d'ensemble.

Chacune est représentée par les unités figurales de dimension 1 qui sont reliées par une certaine propriété : congruence (4 côtés congrus pour le losange et le carré), de parallélisme (1 paire de côtés // pour le trapèze, 2 paires pour le parallélogramme) ou de perpendicularité (rectangle, carré). Par contre, l'image que nous avons de chacun de ces quadrilatères est une unité de dimension 2. Duval souligne qu'une utilisation immédiate de représentations figurales de dimension inférieure pour illustrer une définition peut introduire une ambiguïté.

2.1.3.2 REGISTRE DISCURSIF

Toute figure géométrique peut être décrite et définie de différentes façons dans le discours. Le passage de l'emploi de descriptions aux définitions constitue un élément essentiel du niveau 3 de van Hiele. Ce passage exige la capacité de distinguer les propriétés nécessaires et suffisantes de l'ensemble des propriétés acquises sur un objet pour le définir.

Nous nous référons à Duval (1995) pour préciser la distinction entre description et définition d'un objet. Dans une *description*, chaque proposition nouvelle apporte une information complémentaire au contenu d'une figure étudiée et, par suite, à la représentation mentale de l'objet décrit. En comparaison avec la définition, le nombre de propriétés présentes dans la description n'est pas limité. La définition est une proposition dans laquelle nous explicitons la nature d'une figure géométrique ou le sens que nous accordons à telle ou telle propriété, expression, relation, etc. *Une définition* d'une figure géométrique (ou d'une classe de figures) est l'explicitation organisée de certaines de ses propriétés qui permet son identification sans aucun risque de confusion avec d'autres figures et qui fait référence à la nécessité et à la suffisance de propriétés employées.

Par exemple :

« Tout carré possède 4 côtés congrus, 4 angles droits, 2 paires de côtés //, des diagonales qui se coupent en leur milieu, qui sont congrues et perpendiculaires, etc. » est une ***description*** du carré. Nous pouvons enrichir cette description en ajoutant les autres propriétés à cette liste.

*« Le quadrilatère ayant des diagonales congrues qui se coupent en leur milieu à angle droit s'appelle **carré**. »* est une ***définition*** du carré. Nous avons utilisé les propriétés nécessaires et suffisantes pour définir le carré.

Les définitions les plus utilisées par l'enseignement primaire sont les définitions *caractéristiques*[20]. La propriété utilisée pour la définition est une propriété perceptive marquante et prend valeur de représentant pour tous les objets de cette classe. Par exemple, la propriété d'« *avoir tous les angles droits* » définit la classe de rectangles.

Les définitions *conceptuo-lexicales*[21] s'utilisent surtout dans les activités de classification des figures géométriques. De telles définitions relèvent d'une démarche dans laquelle les procédures de description et celles de classification ne sont pas séparables (Duval, 1995). Par exemple : *Le carré est un rectangle ayant tous les côtés congrus*.

Les définitions *constructives* déterminent un objet par une combinaison de propriétés et exigent un niveau assez haut de conceptualisation et de visualisation des figures selon leurs propriétés décrites. Elles requièrent la recherche de cas possibles susceptibles de vérifier la combinaison de propriétés retenues pour la définition afin de déterminer le nom d'objet (1995). Leur test d'acceptabilité est la résistance au contre-exemple. Par exemple : « *Le quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu à angle droit s'appelle losange* ».

Quand van Hiele parle de l'emploi de définitions en tant qu'une « *méthode d'organisation logique* », il semble référer aux définitions *constructives*, car les définitions caractéristiques réfèrent aux propriétés visuelles, le nombre de définitions conceptuo-lexicales est très restreint, tandis qu'on put créer une variété des définitions constructives.

---

[20] Les définitions *caractéristiques* sont les définitions qui, parmi les propriétés entrant dans la description d'un objet, sélectionnent celle(s) qui permet de l'identifier au moindre coût. L'utilisation de(s) propriété(s) retenue(s) pour la définition d'un objet permet le traitement rapide des situations et des objets où cet objet doit être reconnu. (Duval, 1995)

[21] Les définitions de ce type répondent à l'exigence suivante : décrire un objet de façon telle qu'il se trouve situé par rapport à l'ensemble des objets différents qui ont avec lui au moins un trait commun. Ces définitions répondent à un critère de comparabilité en termes de ressemblances et de différences. (Duval, 1995)

2.1.3.3 Coordination de registres de représentation

Selon Duval (1995), le rôle heuristique des figures dans l'activité géométrique est assuré par une possibilité intrinsèque de coordination de registres, c'est-à-dire, le contenu de certaines propositions peut être converti dans le registre des représentations figurales et vice versa. Comme la perception des figures tend à privilégier les unités de dimension supérieure et le discours privilégie les unités de dimension inférieure, « [...] *une figure joue donc un rôle heuristique si elle permet de travailler à la dimension supérieure à celle des unités figurales qui représentent un énoncé* » (ibidem, p. 191).

Il existe deux types de conversion employés dans l'activité géométrique : le passage d'un énoncé à une figure et d'une figure à un énoncé qui consiste à décrire une figure représentée. La reconnaissance de l'objet (dans sa représentation graphique ou verbale) et la rapidité de l'évocation dépendront de l'expérience géométrique et du niveau conceptuel d'un individu. Une interaction entre les traitements figuraux et discursifs dépendra de l'intégration de deux niveaux dans l'appréhension des figures géométriques. Cette interaction peut se trouver bloquée, remarque Duval (1995), si les étudiants n'ont pas appris à intégrer le niveau d'une appréhension gestaltiste des figures dans celui de leur appréhension opératoire et s'ils n'ont pas découvert la spécificité de l'organisation déductive du discours par rapport à d'autres formes d'expansion discursive comme, par exemple, la description.

L'organisation perceptive d'une figure privilégie la reconnaissance de certaines unités figurales et peut masquer les autres. Or les unités figurales que l'on peut aussi identifier visuellement ne s'accordent pas toujours avec celles qui sont désignées dans l'énoncé ou avec celles qui sont utilisées habituellement dans la définition. Duval (1995) relie certains de ces phénomènes à l'hétérogénéité dimensionnelle des unités figurales. En effet, la correspondance entre le registre des figures et celui du discours s'établit au niveau de la correspondance entre des unités figurales et des expressions référentielles. Dans le registre des figures, les allers et retours entre des unités figurales de dimensions différentes impliquent des sauts dans la perception de la figure (ibidem, p. 191). Donnons un exemple : les étudiants ne reconnaissent pas le parallélogramme dans la définition suivante :

« *Quadrilatère ayant des diagonales se coupant en leur milieu* », parce que cette propriété n'est pas une propriété visuelle marquante comme « *avoir deux paires de côtés parallèles* » et se soit sans doute rarement mise en jeu dans les activités géométriques.

La détermination d'une figure ne s'effectue pas seulement par l'analyse de chacune des unités figurales qui la composent, mais aussi par l'analyse de la valeur logique de la combinaison des unités. Duval décrit deux façons d'articuler figure et énoncé :

- articulation locale (qui s'appuie sur la correspondance entre les unités figurales de dimension 1 et les expressions référentielles);
- articulation globale (qui s'appuie sur la correspondance entre la vision globale d'une figure et l'enchaînement de pas de déduction).

Afin d'imposer naturellement la nécessité de raisonnement dans la situation, Duval (1995) suggère de proposer des activités préparatoires suffisamment riches pour que les élèves aient l'occasion de découvrir et d'observer des relations, des combinaisons de relations qui sont essentielles pour l'appréhension des figures géométriques.

2.1.4 IMPLICATION POUR LE DISPOSITIF DE FORMATION GÉOMÉTRIQUE

Dans cette section, nous essayons de préciser les éléments principaux retenus du *Cadre géométrique* qui seront mis à contribution pour la conception des situations d'apprentissage dans le cadre de la formation à l'enseignement de la géométrie. Ils sont les suivants :

- Progression des apprentissages selon les niveaux

La formation géométrique des futurs maîtres va présenter une organisation systématique et progressive de notions et de concepts géométriques comme éléments d'un système afin d'aider les étudiants à appréhender la géométrie de façon logique et continue. Ces situations présentent un ensemble d'étapes liées entre elles et orientées selon les objectifs de formation qui visent l'évolution des connaissances géométriques et l'appropriation des savoirs didactiques. Les apprentissages sont centrés sur l'accomplissement du Niveau 3 par tous les étudiants et sont orientés vers le Niveau 4. (Le niveau 3 est visé par l'enseignement de la géométrie à la fin du primaire. Il devrait être atteint par tous les futurs maîtres à la fin de la formation. C'est donc le niveau principal visé par la formation avec l'orientation vers le niveau de déduction.)

- Objectifs de la formation géométrique

Les problèmes et les tâches proposées par les différentes situations sont centrés sur le développement de la visualisation, du langage, du raisonnement afin de construire progressivement des concepts géométriques.

- Phénomènes de perception des figures

Il s'agit de *l'orientation* spatiale et de la *visualisation* spatiale. Bishop (1983) suggère deux voies de développement de capacités spatiales appropriées à l'étude de la géométrie :

- le développement de la capacité d'interprétation de l'information visuelle, de la compréhension des représentations visuelles et langagières
- le développement de la capacité de traitement visuel, de la manipulation et de la transformation de représentations graphiques et le passage des rapports abstraits à des représentations visuelles.

En mettant en jeu ces éléments dans les activités de formation géométrique, nous cherchons à faire connaître ces phénomènes aux futurs maîtres dans le cadre de leur préparation à l'enseignement. Nous pensons aussi que la connaissance de certains phénomènes et de leur attachement aux problèmes « canoniques » pourrait renseigner le futur enseignant sur les difficultés des apprentissages des élèves du primaire.

- Variété des représentations

Pour permettre aux étudiants de découvrir et de prendre conscience des différentes relations qui existent entre les propriétés appartenant au concept et entre différents concepts, nous devons leur proposer des situations et des tâches spécifiques qui prennent en compte les possibilités offertes par les différents registres de représentation. Duval (1995) souligne qu'« *on ne dispose pas encore véritablement de critères sûrs pour établir la ligne de partage qui distingue l'appréhension perceptive de formes représentées et l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques représentés* » et qu'« *on ne dispose pas davantage de moyens d'analyse pour mettre en évidence les traitements spécifiquement figuraux qui* *donnent aux figures un rôle heuristique et pour expliquer la variabilité de ce rôle d'une situation à l'autre* ». Nous allons quand même dissocier au moins partiellement les différents savoirs géométriques participant à l'apprentissage en les associant au registre des figures, discursif, symbolique, graphique et aux procédés et processus géométriques pour pouvoir les mettre dans le contexte des situations de formation et pour pouvoir contrôler leur emploi par les étudiants.

- Coordination des registres de représentation

Les situations de formation doivent permettre la coordination des traitements relevant de registres figuraux et discursifs et viser la réduction de l'écart qui affecte considérablement les fonctions discursives de référence.

- Changement du statut d'une figure et du discours

Les situations de formations doivent tenir compte de la progression dans la perception des figures et dans le discours correspondant.

- Introduction au raisonnement

Les activités d'exploration (de manipulation et d'observation), de construction et de résolution des problèmes géométriques qui cherchent à favoriser l'imagination, la capacité de représentation des figures, la comparaison, la description des figures, etc., doivent viser aussi l'introduction progressive au raisonnement. Sans avoir la prétention d'arriver à une déduction absolument mathématique de certaines relations (par exemple, la somme des angles du triangle, la relation de Pythagore, la similitude des triangles, etc.), nous cherchons à essayer d'obtenir aussi régulièrement que possible les divers principes rationnels permettant d'expliquer, de justifier et de prouver. Pour tendre vers la conceptualisation, il convient donc de proposer des activités permettant de mener des raisonnements différents où le raisonnement adopté va être propre à une connaissance visée et par cela de participer à la construction d'un cadre de référence (un ensemble de ressources) qui facilitera le passage au niveau de déduction.

Si les niveaux de développement de la pensée géométrique de van Hiele (1959, 1986) et l'approche sémiotique de Duval (1995) nous aident à repérer les compétences géométriques des étudiants et à expliciter certains phénomènes d'apprentissage de la géométrie, il nous reste à envisager le cadre théorique qui nous aide à préciser l'approche principale de la formation et certains éléments constituant le contenu didactique à acquérir.

2.2 CADRE DIDACTIQUE

Les enjeux de la formation initiale des maîtres et les phénomènes liés à l'application de l'approche par compétences dans l'organisation des apprentissages des élèves décrits dans la problématique, nous amènent à nous interroger sur l'emploi du terme « situation-problème » comme modèle d'apprentissage, tel que prôné par la réforme du curriculum. Dans la section 2.2.1, nous essayons de préciser le sens que nous accordons à ce terme pour le dispositif de la recherche.

Dans la section 2.2.2, nous résumons les travaux de Brousseau (présentés dans l'ouvrage de 1998) qui nous serviront à la fois de cadre (ou de modèle) permettant d'envisager l'apprentissage par « situations » et de source d'inspiration pour le dispositif de formation. Dans la sous-section « Implications pour l'enseignement et le dispositif de formation », nous précisons les éléments retenus de ce cadre théorique pour le dispositif de formation.

2.2.1 NOTION DE SITUATION-PROBLÈME

Le terme « situation-problème », comme d'ailleurs le « problème » sont décrits et interprétés selon les sources pédagogiques de façons différentes. Les débats continuels portant sur ces notions, la diversité des descriptions et le différent sens associé à des mêmes termes s'expliquent, en partie, par l'emploi ambigu de ces termes dans les manuels, par les objectifs d'apprentissage poursuivis et par le niveau de développement de l'élève et ses connaissances initiales. Dans les sections suivantes, nous étudions la signification des termes « problème », « situation-problème » et leur rôle dans l'organisation de l'enseignement et de l'apprentissage.

2.2.1.1 PROBLÈME ET RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Nous référons à Jean Brun (1997) pour préciser le sens que nous attribuons au terme « problème » :

> *Un problème est généralement défini comme une situation initiale avec un but à atteindre, demandant à un sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but. Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi que le problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel, par exemple.* (p. 46)

Pour pouvoir bénéficier du statut de problème, une question doit conduire l'élève à découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution (Vergnaud, 1986).

Ces définitions mettent en évidence que la majorité des tâches et des exercices proposés par les manuels ne constituent pas de « vrais » problèmes de point de vue mathématique et didactique. Nous admettons que l'appellation « problème » dans le contexte de l'enseignement ou de la formation porte un sens très général et dépend du moment particulier de l'apprentissage et du niveau conceptuel de la majorité des élèves (ou des étudiants) de la classe.

La résolution de problèmes se situe parmi les activités les plus complexes (Richelle, Droz, 1976). Elle suppose la maîtrise et la richesse de connaissances et d'habiletés de base et la combinaison ou la réorganisation des données dont le sujet dispose avant d'en arriver à la solution désirée. Cela implique beaucoup d'autonomie, d'initiative intellectuelle et de compréhension de la part du sujet. En effet, il est bien connu que dans tout apprentissage, les questions qui ont été personnellement rencontrées par l'élève lors de la résolution de problèmes sont bien assimilées. Pour qu'un apprentissage soit efficace, écrit Polya (1965, p. 284), celui qui apprend devrait découvrir par lui-même une tranche aussi large que possible du sujet en question, compte tenu des circonstances.

On trouve de nos jours une multitude d'ouvrages qui cherchent à expliciter les différentes façons d'aborder et de résoudre un problème, et qui s'inspirent en grande partie des phases de résolution de problèmes selon Polya (1965). Les phases proposées par Polya découlent de l'analyse des démarches scientifiques performantes et des opérations mentales typiques permettant la résolution d'un problème. Après s'être attaqué à un problème dont la résolution a nécessité de nombreux essais et erreurs, il importe d'analyser la succession des associations d'idées qui ont conduit à la solution. Polya (1965) précise que la recherche d'une méthode dépend d'un *espace idéal* de chaque individu. Cet espace idéal personnel intègre des expériences précédentes, des connaissances acquises, des habiletés cognitives, etc.

D'une manière très schématique, toute méthode de résolution de problème comprend les quatre phases suivantes :

- Comprendre le problème
- Concevoir un plan
- Exécuter le plan
- Revenir sur la solution

Nous croyons que de proposer aux élèves à suivre un plan global, comme celui proposé par Polya, peut être peu effectif si les connaissances nécessaires à la mise en œuvre de chaque phase pour un problème particulier ne sont pas disponibles. Cette description, très générale (comme les autres descriptions de modèle d'ailleurs), ne peut pas être envisagée comme une « méthode » à suivre, une « recette » qui doit être appliquée aveuglément ou une succession chronologique et logique de procédures, mais plutôt comme une description de phases par lesquelles s'opère la résolution de problèmes, et entre lesquelles il existe des possibilités d'allers-retours (Schoenfeld, 1985).

Dans le contexte des nouveaux programmes ministériels qui visent l'apprentissage par la résolution des situations-problèmes, il est possible de faire des associations entre la liste des composantes de la compétence essentielle « Résoudre une situation-problème»[22] et la description des étapes de la résolution de problèmes proposée par Polya.

---

[22] « Résoudre une situation-problème» :

1. Décoder les éléments de la situation-problème
2. Modéliser la situation-problème
3. Appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution
4. Valider la solution
5. Partager l'information relative à la solution

2.2.1.2 TYPOLOGIE DE PROBLÈMES

Nous analysons la typologie de problèmes proposés Charnay et Mante (1995) pour décrire la variété de problèmes et la diversité de choix de l'enseignant afin de guider son action pédagogique. Ces auteurs distinguent les problèmes selon les objectifs d'apprentissage poursuivis :

- les problèmes destinés à engager les élèves dans la construction de nouvelles connaissances[23] (souvent appelés « *situations-problèmes* »),
- les problèmes destinés à permettre aux élèves l'utilisation des connaissances déjà étudiées (souvent appelés « *problèmes de réinvestissement* » ou « *d'application* »),
- les problèmes destinés à permettre aux élèves l'extension du champ d'utilisation d'une notion déjà étudiée (parfois appelés « *problèmes de transfert* »),
- les problèmes plus complexes dans lesquels les élèves doivent utiliser conjointement plusieurs catégories de connaissances (parfois appelés « *problèmes d'intégration ou de synthèse* »),
- les problèmes dont l'objectif est de permettre au maître et aux élèves de faire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées (« *problèmes d'évaluation* »),
- les problèmes destinés à mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques (« *problèmes ouverts* »).

En analysant la typologie de problèmes décrite ci-dessus, il faut savoir que selon l'objectif poursuivi et selon le niveau de développement de l'élève et ses connaissances initiales, un même énoncé peut relever de l'une ou de l'autre des catégories. C'est-à-dire, que le même énoncé peut être celui d'un problème ouvert au début de l'apprentissage, celui d'une situation-problème en cours d'apprentissage ou encore un problème de réinvestissement. La majorité des problèmes sont d'abord centrés sur l'acquisition et la maîtrise de notions mathématiques, tandis que le *problème ouvert* (tel que défini par les chercheurs de l'IREM de Lyon) est

[23] C'est nous qui soulignons pour attirer l'attention sur les objectifs d'apprentissage visés.

destiné principalement à développer un comportement de recherche et des capacités d'ordre méthodologique : faire et gérer des essais, faire des hypothèses, imaginer des solutions, éprouver leur validité, argumenter, etc., ce qui exprime le caractère original du problème ouvert. La résolution de ces problèmes, dont l'objectif est d'apprendre à chercher, comporte des étapes qui ne sont pas précisées par des questions intermédiaires. En effet, le modèle de résolution de chacun de ces sous-problèmes est connu des élèves, mais la planification de l'ensemble de la résolution suppose un réel travail pour eux. Il est possible, à travers ce type de problèmes, de travailler plus spécifiquement le tri de données ou de questions, la recherche d'informations sur les différents supports ou la planification des étapes de résolution. Les problèmes dits *ouverts* et les *situations-problèmes* correspondent tous deux à l'orientation principale visée par la nouvelle réforme, car la situation-problème suppose une recherche, une observation de données, un décodage, un raisonnement, une mise en place de différentes stratégies ainsi qu'une mobilisation et un développement des connaissances.

2.2.1.3 SITUATION-PROBLÈME

La résolution de situations-problèmes se présente comme la compétence essentielle des nouveaux programmes ministériels. Compétence complexe, elle exige et permet donc de développer trois types de compétences : savoir rechercher, sélectionner, organiser et traiter l'information; savoir communiquer les démarches et les résultats; savoir valider les solutions. L'élève va donc être confronté, d'une part à la prise d'informations et, d'autre part, au traitement de l'information. En effet, il s'agit de mettre du sens derrière chaque information pour pouvoir la réutiliser au bon moment. Dans cette section, en nous référant à Vergnaud (1991) et à Brousseau (1991b), nous précisons la définition d'une situation-problème et nous décrivons le sens que nous accordons à ce terme dans le cadre de notre recherche.

Vergnaud (1991, p. 135-136) décrit la situation-problème par l'absence de schème de traitement prêt à l'emploi. Cet auteur distingue les situations d'enseignement en deux catégories :

- les situations « *pour lesquelles le sujet dispose dans son répertoire, à un moment donné de son développement et sous certaines circonstances, des compétences nécessaires au traitement relativement immédiat de la situation* »,
- les situations « *pour lesquelles le sujet ne dispose pas de toutes les compétences nécessaires, ce qui l'oblige à un temps de réflexion et d'exploration, à des hésitations, à des tentatives avortées. Et le conduit éventuellement à la réussite, éventuellement à l'échec* ».

Ces deux types de situations mobilisent des comportements cognitifs différents chez les apprenants. Les comportements des élèves observés dans le premier type de situation sont « *largement automatisés, organisés par un schème unique* », tandis que le deuxième type de situations exige la participation de plusieurs schèmes (Vergnaud, 1991, p.136). Dans les situations du deuxième type, le schème[24] rencontre des obstacles et se modifie aux situations nouvelles. Vergnaud écrit, que lors de l'acquisition des connaissances, plusieurs schèmes peuvent entrer en compétition et « [...] *doivent être accommodés, décombinés et recombinés* » pour aboutir à la solution recherchée (Ibid., 1991, p.136) et que la distinction classique qui considère que l'on est devant un problème seulement si l'ensemble des données et celui des méthodes dont on dispose se révèle insuffisants pour trouver la solution. Les situations permettant de développer des schèmes nouveaux sont celles appelées *situations de résolution de problèmes*.

Brousseau (1991b, p.136) définit la situation-problème de la façon suivante : « *Une situation-problème est une situation didactique dont le but et certaines conditions sont explicitées alors que d'autres restent implicites ou ignorées de l'élève* ». Il précise ensuite que les situations

---

[24] Un schème est « [...] une totalité dynamique fonctionnelle, c'est-à-dire quelque chose qui fonctionne comme une unité; en seconde lieu que c'est une organisation invariante de la conduite pour une classe de situations données (l'algorithme est un cas particulier de schème); et en troisième lieu qu'un schème est composé de quatre catégories d'éléments :

- des buts, intentions et anticipations;
- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle
- des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorème-en-acte)
- des possibilités d'inférence en situation.

[...] en entendant par « concepts-en-acte » les catégories qui permettent de prélever l'information pertinente en situation, et en « théorème-en-acte » les propositions tenues pour vraies par le sujet et qui lui permettent de traiter cette information. » (Vergnaud, 1994, p.180-181)

« *se distinguent des problèmes classiques par une certaine indétermination des questions posées, des objectifs d'enseignement, par l'existence d'un éventail de solutions et de décisions* ». En proposant la situation-problème, l'enseignant ne fournit donc aucune indication sur le type de méthode ou sur l'existence de situation de référence, sinon la situation ne serait plus un problème pour les élèves.

Dans le cadre de cette recherche, l'idée essentielle que nous retenons est qu'une situation-problème peut contribuer à développer un esprit de recherche en amenant l'élève à analyser une situation concrète, à la modéliser, à rechercher des stratégies efficaces, à raisonner, à exploiter des analogies, à généraliser, à conjecturer, à examiner des cas particuliers, à convaincre, etc. Elle suscite la curiosité, offre à l'élève la possibilité de faire travailler sa créativité et met en jeu des conduites mentales qui visent à un développement et une meilleure structuration des connaissances.

Pour la conception de situations de formation et pour l'analyse des situations d'apprentissage de la géométrie au primaire, nous nous intéressons aussi à la notion de *situation* comme modèle de l'apprentissage et au travail de l'enseignant dans la préparation et dans la gestion des situations. Dans la section suivante, nous essayons d'expliciter les notions principales de la *Théorie des situations didactiques* qui nous permettent de mieux comprendre le rôle du maître dans l'organisation des apprentissages, sa formation et son épistémologie[25] et les moyens de contrôle de l'enseignement. La *Théorie des situations didactiques* de Brousseau (1998) est la principale source d'inspiration de l'approche que nous visons à installer à l'intérieur de notre formation et à transmettre pour l'organisation des apprentissages en géométrie à l'école primaire.

2.2.2 SITUATION COMME MODÈLE D'APPRENTISSAGE

Le projet initial de Guy Brousseau (« [...] *déterminer de façon scientifique quel peut être le meilleur enseignement des mathématiques pour tous les enfants de l'école élémentaire* »

---

[25] *«[...] une méthode de production de la réponse : comment répondre à l'aide des connaissances antérieures, comment comprendre, construire une connaissance nouvelle, comment appliquer les leçons antérieures, reconnaître les questions, comment apprendre, deviner, résoudre..., etc.»* constitue ce que Brousseau appelle « l'épistémologie du professeur »(Brousseau, 1986a, p. 56).

(Perrin-Glorian, 1994, p.98)) a donné naissance à La *Théorie des situations didactiques*. En étudiant le système didactique[26], Brousseau cherche à mettre au point une modélisation de l'enseignement par le découpage en « situations » (et non pas en objets) qui permettent l'acquisition des savoirs. Grâce à cette théorie, le concept de « situation » et de différentes composantes essentielles de l'organisation des apprentissages a pris de l'ampleur dans les recherches en didactique.

Tout enseignant souhaite donner du sens aux savoirs qu'il enseigne et souhaite que les apprentissages ne se réduisent pas à des pratiques habituelles, mais la compréhension est à la charge de l'élève, elle ne peut pas être enseignée comme la liste de savoirs. Il faut, pour cela, que la « [...] *connaissance soit parfaitement justifiée par la logique interne de la situation* » (Brousseau, 1988b). Le rôle de l'enseignant est « [...] *d'offrir au sujet des situations - des occasions d'exercer des schèmes existants (de mieux en contrôler les opérations et les conditions, d'en automatiser certaines parties), et de développer des schèmes nouveaux (des conceptualisations et des règles d'actions nouvelles, des buts et des tâches inhabituelles)* » (Vergnaud, 1994, p. 181).

Le premier choix que fait l'enseignant est le choix des situations à proposer aux élèves. Vergnaud accorde un rôle important à la classification des situations possibles, des schèmes et des concepts, des représentations langagières et symboliques utilisables, grâce à laquelle, l'enseignant dispose donc d'un vaste arsenal de ressource. « *Un champ conceptuel*[27] *bien analysé est une mine pour le choix des situations proposer aux élèves, et pour les aides susceptibles de leur être apportées* » (ibidem, p. 187). Ce choix dépend des objectifs à atteindre (Vollrath, 1988, p. 335) et s'alimente à la clarification des sous-buts de l'activité, à l'épistémologie de la notion à étudier, à la connaissance du développement des élèves, à la planification des étapes permettant aux élèves d'acquérir la connaissance (d'entrer dans le jeu, utiliser les stratégies, faire des hypothèses, des conjectures, etc.) et aux choix de

---

[26] Le système didactique qui est défini par Chevallard (1985) comme le « *jeu qui se mène entre un enseignant, des élèves et un savoir mathématique* ».

[27] « Le champ conceptuel est un ensemble de situations parentes entre elles, et l'ensemble des concepts qui sont nécessaires pour les analyser.» (Vergnaud, 1994, p.187)

problèmes permettant la vérification des connaissances apprises. Arsac et Mante (1988-1989, p. 91)[28] précisent que c'est l'effet sur l'élève et non pas la subjectivité de l'enseignant qui doit rendre un choix décisif. Ce choix est surtout engendré par la compréhension de la situation, par son savoir et son savoir-faire personnel qui lui permettent de traiter cette situation (Schneider, 1994; Stufflebeam, 1980; Charlier, 1989).

Pour que la situation organisée par le maître soit une situation d'apprentissage, il faut que la réponse initiale de l'élève à la question posée ne soit pas celle qu'on veut lui enseigner; elle doit permettre à l'élève d'utiliser sa stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes. Quand cette stratégie devient inefficace pour répondre à la situation proposée, l'élève est amené à modifier son système de connaissances (Brousseau, 1988a, p.14). La « situation » exige donc « [...] *que la connaissance fonctionne comme moyen d'anticipation* » (ibidem, p.16). C'est l'idée maîtresse de la *Théorie des situations didactiques* que ces situations fonctionnent en interaction avec l'élève et « à l'abri » des interventions du maître au niveau des connaissances. Le professeur propose à l'élève une situation et cherche à obtenir quelque chose qu'il ne peut pas dire, par des moyens qu'il ne peut pas annoncer. La nécessité de donner du sens aux connaissances enseignées exige de l'enseignant de faire le choix de problèmes qui permettront à l'élève d'entrer dans une situation, d'utiliser tout son répertoire qui contient des compétences visuelles, langagières, sociales, affectives, etc., et de le modifier de façon autonome et personnelle en s'adaptant au *milieu*[29] d'une situation proposée et non à un désir du maître (Brousseau, 1988a, p.14).

Toute mise en place d'une situation d'enseignement se fait dans le cadre d'un *contrat didactique*[30], qui définit la répartition attendue des responsabilités de chacun (enseignant et élèves) dans l'acquisition du savoir visé. Il est nécessaire qu'en proposant le problème, « *le*

---

[28] « [...] le choix (=décision de gestion) de l'enseignant qui amène un changement du fonctionnement cognitif de l'enfant, qui change « le sens et la fonction » de la connaissance ». (Arsac, G. et M. Mante, 1988-1989, p. 91)

[29] L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est « *le facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres* » (Brousseau, 1986a, p.48). «[...] *dans une situation d'action, on appelle « milieu » tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit* ». (Perrin-Glorian, 1994, p.129).

[30] La notion de « contrat didactique » est introduite par Guy Brousseau comme « *l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus de maître* », (Brousseau, 1980a, cité dans Brouseau, 1990, p.18).

professeur accepte la responsabilité des résultats et qu'il assure à l'élève les moyens effectifs de l'acquisition des connaissances » et que l'élève aussi accepte cette responsabilité de le résoudre seul (Ibid., 1986a, p.52). Le professeur cherche donc *dévoluer*[31] la situation où l'élève donne lui-même un sens aux connaissances à travers la manipulation des raisonnements et des preuves, des formalisations et des reformulations, des modèles implicites et des rapports entre eux. Une nouvelle question de la part de l'élève amènera à la négociation du contrat et sa redéfinition, puisque l'élève est déjà capable de résoudre une tâche inconnue jusqu'alors. Toute négociation du contrat va modifier le fonctionnement du cours et donc la répartition des rôles.

Ce caractère *a-didactique*[32] de l'apprentissage qui permet les rencontres personnelles avec le savoir visé par la situation comporte des difficultés dans sa mise en place et oblige à repenser l'organisation du cours : dévolution du problème, négociation du contrat didactique, gestion du temps, etc. La recherche du fonctionnement des situations *a-didactiques* nous montre la profondeur de l'activité mathématique dans « [...] *la pensée rationnelle et l'importance éducative de leur enjeu qui dépasse le simple domaine de l'apprentissage de connaissances* » (Brousseau, 1998). Souvent, l'enseignant prépare des situations qui proposent à l'élève une autonomie intellectuelle, mais lors de la réalisation, il continue à guider les élèves dans leur parcours (c'est le cas de la majorité des activités des manuels scolaires).

Le projet de modélisation de situations consiste en une analyse de tous les sous-systèmes de la situation *a-didactique* et leurs interactions. Il s'agit, ici, d'établir une classification des interactions du sujet avec le *milieu a-didactique*, des types d'organisations de ce *milieu*, des types de fonctionnement d'une connaissance et des modes d'évolution spontanée des connaissances. Suivant la nature et le rôle de la connaissance dans la situation (langage,

---

[31] L'activité par laquelle le professeur cherche à atteindre ces deux résultats est appelée *dévolution*. Dans Brousseau (1990, p.35), la dévolution introduite comme « *l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une situation et accepte lui-même les conséquences de ce transfert* ».

[32] Les situations d'apprentissage dans lesquelles «[...] le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l'élève va faire [...] qui fonctionnent sans l'intervention du maître au niveau des connaissances », s'appellent situations a-didactiques (Brousseau, 1988a, p.17).

connaissance, moyen de résolution, moyen de construction ou de justification d'un savoir), Brousseau a défini quatre catégories de situations au cours desquelles le rapport de l'élève au savoir peut évoluer. Ce sont des situations d'*action,* de *formulation,* de *validation* et d'*institutionnalisation.*

Au cours des situations *d'action*, l'élève est placé devant un problème présentant les caractéristiques suivantes :

- la solution est la connaissance visée;
- l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;
- la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.

La situation d'*action* permet à l'élève de développer des stratégies, de les organiser, de construire une représentation de la situation qui lui sert de « modèle » et de guide pour prendre ses décisions. Cette adaptation se fait par essais et erreurs; les informations renvoyées par la situation sont perçues par l'élève comme des renforcements ou des sanctions de son action. « *En général, une stratégie est adoptée en rejetant intuitivement ou rationnellement une stratégie antérieure. Une stratégie nouvelle est donc mise à l'épreuve de l'expérience. Elle est acceptée ou rejetée suivant l'appréciation portée par l'élève sur son efficacité, cette appréciation peut être implicite*» (Ibid., 1998, p.32-33).

Pour que l'élève explicite la connaissance créée, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va intervenir sous forme d'un langage. « *Une dialectique de la formulation consisterait à mettre progressivement un langage que tout le monde comprenne et qui prenne en compte les objets et les relations pertinentes de la situation de façon adéquate (c'est-à-dire en permettant les raisonnements utiles et les actions* » (ibidem, p. 36).

Lors d'une phase de *formulation*, il peut arriver que les propositions (déclarations, messages, formulations, etc.) portant sur des stratégies, des descriptions, des jugements soient discutées du point de vue de la validité du contenu (c'est-à-dire de sa vérité ou son efficacité). On appelle ces discussions des phases de *validation.* « *Le schéma didactique de la validation motive les enfants à discuter une situation et favorise la formulation de leurs validations* *implicites, mais souvent leurs raisonnements sont encore insuffisants, incorrects, maladroits. Ils adoptent des théories fausses, acceptent des preuves insuffisantes ou fausses*» (ibidem, p. 41). Le rôle de l'enseignant est de construire une situation dont l'objectif est de démontrer aux élèves pourquoi la connaissance créée est valable. «*La situation didactique doit les conduire à évoluer, à réviser leur opinion, à remplacer leur théorie fausse par une théorie vraie. Cette évolution a aussi un caractère dialectique, il faut accepter suffisamment une hypothèse - au moins provisoirement - même pour montrer qu'elle est fausse* » (ibidem, p. 42).

Selon la *Théorie des situations didactiques*, pour que le savoir repéré par l'élève soit retenu, l'enseignant a la responsabilité de l'officialiser. La situation d'*institutionnalisation*[33] consiste à donner un statut didactique, scolaire, culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances (Brousseau, 1991b, p.137).

Le choix de situations et de conditions d'enseignement se justifie par la nécessité de donner sens aux connaissances et surtout de les reconnaître. Cette partie du travail de l'enseignant est la plus difficile (Ibid., 1988a, p.18). «*La négociation, par les maîtres, de l'enseignement de la compréhension et du sens pose un vrai problème didactique : problème technique et problème théorique de contrat didactique* » (ibidem, p.18). Donc, « [...] *si le maître n'a pas un bon contrôle de ses conceptions épistémologiques, relativement à ce type de situations, les erreurs sont plus lourdes de conséquences* » (ibidem, p.19). Cette position épistémologique, qui est difficile à identifier, à assumer et à contrôler,) joue un « *rôle important dans la qualité des connaissances acquises* » (ibidem, p.19).

Depuis 1989, la modélisation du rôle du maître s'est enrichie par l'introduction du concept de *mémoire didactique*. La nécessité du concept de mémoire didactique dans la *Théorie des situations didactiques* découle de l'hypothèse de possibilité d'apprentissage par adaptation. Pour que cette adaptation soit optimale pour chaque élève, le professeur a besoin de connaître autre chose que le seul texte du savoir. Il a besoin de garder la mémoire de certains faits de

---

[33] Les situations d'institutionnalisation sont « [...] celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir » (Brousseau, 1981, p.51-52).

l'histoire de la classe en référence à ce savoir. Brousseau et Centeno (1991) ont fait valoir que le maître doit trouver un équilibre entre ce qu'il faut conserver, voire rappeler, et ce qu'il faut oublier dans le savoir officiel de la classe. Pour faire ce passage d'un savoir privé de l'élève à un savoir public, c'est-à-dire à un savoir officiel de la classe et puis à un savoir institutionnel, l'enseignant a besoin d'utiliser sa mémoire didactique. La gestion de la mémoire didactique, selon Perrin-Glorian (1994, p.139) est l'un des points clés de l'institutionnalisation.

Ce cadre théorique représente les fondements de l'organisation des apprentissages et de leur analyse. Il nous oblige à nous interroger sur les moyens d'organisation de la formation didactique à l'enseignement de la géométrie et sur le choix des savoirs didactiques à transmettre. Nous devons créer les rencontres des futurs maîtres avec le savoir, rencontres qui d'après nous, vont changer le rapport au savoir géométrique et vont leur permettre de développer une réflexion sur la pratique mathématique.

2.2.2.1 IMPLICATION POUR LE DISPOSITIF DE FORMATION

Les concepts didactiques tels que *situation d'apprentissage*, *situation-problème*, *dévolution* de la situation, situation *didactique* et *a-didactique*, situation *d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation* sont des concepts-clés qui seront employés dans l'organisation des situations de formation didactique et représentent aussi les savoirs didactiques à développer. Nous allons tâcher d'élaborer les situations permettant leur découverte et, ensuite, leur utilisation dans l'analyse et dans la conception de situations d'enseignement.

Pour faire comprendre aux étudiants comment s'effectue le passage de la situation mathématique à son état didactique, nous leur proposons les tâches d'analyse des activités des manuels et de leur modification. Cette question a été touchée par Brun et Conne dans « Analyses didactiques de protocoles » (1990, p.265) : « [...] *comment induire un fonctionnement cognitif mathématique, ayant ses références dans un ensemble de situations mathématiques, par l'intermédiaire du montage d'une situation didactique : ce sont les paramètres de cette situation qui sont nos variables et non les caractéristiques des individus* ». Ce type de travail pourrait donc aider le futur enseignant à ajuster son enseignement aux différentes situations : soit celles rencontrées dans le manuel, soit, celles proposées par le chercheur ou par le maître-hôte, etc. Les étudiants vont construire un nouveau savoir-faire qui leur permettra de choisir et adapter à leurs besoins le matériel existant et de l'enrichir. Cette analyse peut conduire le futur enseignant à déceler des obstacles de nature épistémologique et à créer la nécessité d'approfondir ses propres connaissances. C'est l'analyse des problèmes de l'enseignement et la recherche de solutions possibles qui favoriseront la consolidation du savoir géométrique et la naissance et l'accroissement du nouveau savoir de nature didactique. Notre but premier est de créer les conditions permettant aux futurs enseignants de réfléchir à la pertinence des activités par rapport aux connaissances que nous voulons faire acquérir aux élèves.

Les activités d'analyse devraient favoriser la projection de l'étudiant dans le rôle de l'enseignant en l'amenant à utiliser les savoirs didactiques (ou géométriques) développés lors de la formation, sinon à créer une « demande » de savoirs didactiques (ou géométriques) appropriés à la situation rencontrée. Les problèmes d'enseignement rencontrés dans les activités vont renvoyer l'étudiant chercher dans les savoirs développés lors de la formation (géométriques ou didactiques) des informations nécessaires pour trouver la solution au problème posé. Idéalement, il s'agit de faire *dévolution* d'une situation de formation qui mènera à la reconceptualisation et à des nouvelles prises de décisions didactiques pertinentes pour l'enseignement de la géométrie au primaire. Cette recherche des solutions constitue pour nous une élaboration du savoir nouveau qui est de nature didactique et qui présente « des outils » d'analyse de la pratique enseignante.

L'analyse de différentes activités et extraits de manuels scolaires devrait pouvoir aider les futurs enseignants à identifier des difficultés que les élèves peuvent rencontrer, à anticiper leurs réponses et à préparer les interventions à ces réponses. Dans ce cas, le savoir didactique que les étudiants vont élaborer ne viendra pas du formateur; les étudiants pourront alors se sentir les créateurs des outils permettant la construction de l'activité et son analyse didactique afin de déterminer les formes appropriées d'apprentissage.

2.3 PRÉCISIONS DES OBJECTIFS DE RECHERCHE

À partir du cadre théorique étudié, nous précisons les orientations principales de la recherche.

La question principale de la recherche s'énonce maintenant de la façon suivante : *Comment coordonner la formation didactique et la formation géométrique de telle sorte qu'il y ait chez les futurs enseignants une progression de niveaux de la pensée géométrique et une appropriation et mise en œuvre des concepts didactiques?*

Cette question prévoit la recherche d'un équilibre dans l'articulation entre les savoirs géométriques et les activités géométriques et entre les savoirs géométriques et la pratique enseignante ce qui exige de notre part la conception d'une « ingénierie » (Artigue, 1988) de la formation. Nous comprenons par ce terme une élaboration d'une « organisation » progressive de notions et de concepts géométriques qui cherche à mener l'étudiant vers la cohérence de ses actions, vers la recherche du sens et à favoriser la structuration des connaissances, leur modification et leur consolidation. La conception et l'analyse de cette organisation s'appuient sur le cadre théorique étudié et sur les concepts retenus.

Du point de vue géométrique, nous cherchons le développement de la visualisation, du langage, du raisonnement et leur utilisation pour la construction des concepts géométriques. En tenant compte de difficultés des étudiants et de phénomènes d'apprentissage étudiés, les problèmes et les tâches proposées par les situations doivent faire appel aux différents registres de représentation et à leur coordination (Duval, 1995) et présenter un ensemble d'étapes articulées de façon cohérente par rapport à un objectif de formation et être proposés suivant la progression selon les niveaux de développement de la pensée géométrique (van Hiele, 1959/1985). Cela nécessite une description précise des savoirs et une analyse des liens entre les étapes d'enseignement de la même notion (et de différentes notions).

Du point de vue de l'appropriation des savoirs didactiques, nous devons réfléchir à l'organisation des activités permettant de faire connaître aux étudiants les principales démarches géométriques employées par l'enseignement primaire et les objectifs qu'elles visent, de développer un point de vue critique et constructif basé sur la connaissance profonde du contenu géométrique et de concevoir et d'analyser des activités d'apprentissage en fonction du but visé. Nous avons compris que notre rôle de formateur n'est pas de transmettre de nouvelles approches ou méthodes en supposant qu'il suffit aux étudiants de les appliquer pour leur appropriation, mais plutôt d'accompagner les étudiants dans leur démarche d'apprentissage, d'action, de questionnement, d'élaboration des concepts et des modèles d'organisation d'enseignement. Le cadre théorique didactique et les concepts didactiques choisis nous ont servi d'outils pour l'élaboration des situations de formation. Nous pouvons associer les différents enjeux de la formation géométrique (visualisation, langage, raisonnement) aux différentes démarches géométriques (observation, manipulation, description, classification, construction, résolution des problèmes, etc.) et aux différentes phases de l'activité. Par exemple, la situation d'action peut mettre en jeu la visualisation par la manipulation ou par l'observation, par la recherche des propriétés communes ou distinctes, etc. La phase de formulation peut viser la précision du vocabulaire employé dans la description des étapes ou des critères. La validation des résultats obtenus (différentes constructions, classifications, solutions, etc.) peut favoriser le raisonnement. Les situations de construction des figures ou de résolution des problèmes géométriques qui visent la coordination de la visualisation et du langage et le développement progressif du raisonnement peuvent être associées à la situation d'action et contenir les différentes phases : action, formulation, validation. En faisant vivre aux étudiants des situations de formation, nous supposons que ce type de travail aidera à introduire les savoirs didactiques et facilitera leur application dans la pratique. Nous croyons que si un travail visant à développer et à appliquer ces savoirs n'est pas mis en place de façon effective lors de la formation initiale, ces savoirs ne seront pas spontanément mobilisés dans la pratique enseignante. Il ne s'agit pas d'un cours de didactique théorique, mais de la découverte du fonctionnement de certains concepts didactiques dans des situations d'apprentissage et de leur application pour l'analyse et l'organisation des situations d'enseignement.

Notre recherche vise donc à élaborer, à expérimenter et à analyser un dispositif didactique de formation permettant le développement de la pensée géométrique des futurs maîtres et l'appropriation et la mise en œuvre des savoirs didactiques concernant l'enseignement de la géométrie.

3. MÉTHODOLOGIE

Dans ce chapitre, nous décrivons les principes généraux d'organisation méthodologique de la recherche. La section 3.1 présente le contexte de la recherche et les sujets participants. La section 3.2 est consacrée à la description des éléments importants du cadre méthodologique de l'ingénierie didactique retenus pour la création et l'analyse du dispositif de la recherche. Dans les sections 3.3 à 3.7, nous présentons les grandes lignes du dispositif de formation selon les étapes de l'ingénierie de la formation didactique : analyses préalables (3.3), choix du contenu (3.4), conception de la formation (3.5), expérimentation (3.6) avec la description des outils de recueil et d'analyse des données et analyse a posteriori (3.7).

3.1 CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET PARTICIPANTS

Le dispositif de la recherche s'intègre au cours obligatoire « Didactique de la géométrie et de la mesure » qui était au moment de sa réalisation le dernier cours de la formation didactique, mais le premier cours consacré à la géométrie et à la didactique de la géométrie. Nos sujets sont des étudiants de 4e année du programme du baccalauréat en enseignement primaire. Nous avons fait l'expérimentation du dispositif avec deux groupes d'étudiants (pour un total de 116 étudiants). Quant à l'expérience géométrique préalable des étudiants, une grande partie d'entre eux n'avaient pas eu de contact avec la géométrie depuis le secondaire[34].

De façon à éviter toute perturbation avec les objectifs et le déroulement de la formation et à assurer l'authenticité du contexte d'expérimentation, la démarche et les méthodologies employées dans la réalisation du dispositif reflètent la situation réelle de la classe. Le chercheur a cumulé les fonctions de formateur et d'observateur. Les futurs maîtres n'ont pas eu le sentiment d'être des « sujets de recherche », mais des étudiants inscrits au cours et leur comportement était tout à fait habituel.

Ce double rôle de chercheur-formateur, qui demande des précautions sur le plan de la cueillette et de l'analyse des données, nous a permis d'éviter les écueils normalement

---

[34] L'analyse des réponses des étudiants ayant échoué à l'examen mathématique d'admission montre qu'une grande partie n'a pas suivi de cours de mathématiques même dans les deux dernières années de l'enseignement secondaire (voir l'annexe 2).

associés au transfert chez l'enseignant de situations conçues par un chercheur (Artigue, 2002, p.64-66). Nous admettons que le passage du rôle de formateur à celui d'observateur peut avoir certaines conséquences sur le déroulement des activités; nous les avons assumées et nous avons essayé d'assurer la fiabilité et la fidélité des observations et des descriptions.

Le milieu de réalisation et d'observation du dispositif de la recherche est notre milieu de travail, que nous connaissons bien. Le travail entrepris dans le cadre de cette recherche s'est étendu sur une période de trois ans, ce qui a joué un rôle considérable dans l'organisation du dispositif. Il a commencé en septembre 2000, où pour la première fois nous avons expérimenté les situations conçues. Dans le cadre de la formation proposée cette année-là, nous avons pu observer et analyser les premiers phénomènes d'apprentissage, apporter des modifications et créer de nouvelles situations. Parallèlement, avec l'introduction des nouveaux programmes ministériels dans le cadre du cours, nous avons repéré et documenté certaines difficultés éprouvées par les étudiants dans l'application de l'approche par compétences dans les travaux de session et lors d'un stage scolaire. Le travail s'est poursuivi l'année suivante (2001) avec deux nouveaux groupes d'étudiants de 4e année de baccalauréat et les nouvelles modifications ont été apportées aux situations de formation. Pour l'année de la phase expérimentale (2002) de notre recherche, nous avons utilisé les résultats obtenus dans les années 2000-2001 pour la description des conduites anticipées.

Cette situation de « classe réelle » a influencé les méthodologies employées dans la phase expérimentale. La majeure partie de nos données sont quantitatives et proviennent de tests, d'examens et de fiches de travaux pratiques. La description des comportements observés lors du déroulement du cours a été faite à la fin de chaque cours et consignée dans une chronique. Ces descriptions jouent un rôle informatif en nous permettant de comprendre ce qui se passe dans la recherche menée, d'apporter (ou non) les modifications pour le cours suivant et d'avoir le contrôle sur l'évolution des apprentissages. Nous devons mentionner que l'emploi de méthodologies quantitatives pour la compilation des données ne porte pas le caractère « comparatif » par rapport à un autre type de formation décrite par des recherches en didactique, ou « sportif » (MacIsaac, 1996, p.2), pour présenter une preuve de succès ou d'échec de notre formation, mais plutôt informatif et explicatif en tenant compte du contexte des activités effectuées lors de la formation. Nous croyons donc aussi éviter les critiques apportées aux limites de l'approche quantitative et aux méthodes fréquemment employées dans les recherches qui emploient cette approche.

3.2 INGÉNIERIE DIDACTIQUE À DEUX NIVEAUX

En reconnaissant la complexité du processus d'enseignement, nous avons choisi d'utiliser la méthodologie d'ingénierie didactique (Artigue, 1988)[35] comme moyen permettant d'agir sur le système didactique. En nous appuyant sur les analyses suggérées par cette approche, nous avons recherché les moyens appropriés pour élaborer un dispositif qui réponde aux objectifs visés compte tenu du contexte réel de la situation de formation. Pour préparer un dispositif de recherche qui soit basé sur les réalisations didactiques en classe, nous nous sommes référée à la division temporelle proposée par ce cadre méthodologique. Cette méthodologie qui représente une « *action rationnelle sur le système basé sur des connaissances didactiques préalables* » (Artigue, 1988, p.285) témoigne de l'importance des réalisations didactiques en classe pour la recherche par rapport à l'emploi unique des méthodologies telles que questionnaires, entretiens, tests, qui composent une grande partie de recherches[36] (Chevallard, 1982, cité dans Artigue, 1988, p.285).

Comme méthodologie de recherche, l'ingénierie didactique se caractérise par l'élaboration, la réalisation et l'analyse de situations d'enseignement. Selon le niveau de la réalisation didactique impliquée dans la recherche, on y distingue la *micro-ingénierie* et la *macro-ingénierie*. Dans la micro-ingénierie, on analyse, réalise et évalue une situation selon quatre phases de découpage temporel :

- les analyses préalables,
- la conception et l'analyse *a priori* des situations didactiques de l'ingénierie,

[35] La notion d'*ingénierie didactique* est apparue en didactique des mathématiques au début des années quatre-vingt comme une forme de travail didactique comparable au travail de l'ingénieur. Pour réaliser un projet de recherche ou résoudre le problème d'enseignement que la science ne peut pas encore prendre en charge, les chercheurs utilisent les connaissances théoriques et méthodologiques de leur domaine qui leur permettent d'atteindre leur objectif.

[36] Chevallard (1982, cité dans Artigue, 1988, p.285) souligne que les méthodologies externes sont plus faciles à utiliser pour reconnaître les résultats de la recherche, mais ces résultats sont insuffisants pour l'analyse d'un système étudié à cause de sa complexité.

- l'expérimentation
- l'analyse *a posteriori* et l'évaluation.

Les recherches de micro-ingénierie par rapport à la macro-ingénierie permettent de prendre en compte la complexité du phénomène classe dans une situation concrète et sont plus aisées à mettre en place. En revanche, les recherches de macro-ingénierie permettent d'analyser la complexité des phénomènes liée à la durée dans les rapports enseignement/apprentissage et exigent un découpage cohérent des objets de connaissance. Artigue exprime la nécessité de recherches de macro-ingénierie, malgré les difficultés méthodologiques et institutionnelles qu'elles présentent (Ibid., p.286).

Pour la création du dispositif de formation, nous avons utilisé deux niveaux de macro ingénierie didactique : *l'ingénierie de formation* (à un niveau global) et *l'ingénierie de la notion géométrique particulière.*

La macro-ingénierie de *formation* correspond à la conception générale qui guide l'organisation et le déroulement des différentes ingénieries d'une *notion géométrique* à l'intérieur du projet de la formation. L'approche principale que nous utilisons pour le développement conceptuel du futur enseignant s'inscrit dans la progression des apprentissages par le biais de situations qui ont des liens entre elles et où le futur enseignant peut rencontrer le même concept dans ses différentes représentations et peut employer les mêmes démarches dans la construction des différents concepts. Il s'agit donc d'une organisation (ou planification) des liens entre les ingénieries des notions géométriques compte tenu des objectifs visés.

Dans une recherche d'ingénierie didactique, la phase de conception s'effectue en s'appuyant sur un cadre théorique didactique et sur un certain nombre d'analyses préliminaires. Artigue (Ibid., p.289) indique que les exigences d'analyse préalable et les composantes sur lesquelles elles portent ne sont pas les mêmes pour les différents types des ingénieries. Les objets d'une recherche d'ingénierie didactique peuvent être divers. Ils peuvent viser l'étude des processus d'apprentissage d'un concept donné, de méthodes, de mise en place de stratégies didactiques globales, etc. (Douady, 1987 cité dans Artigue, 1988, p.286-287). En général, cette étape contient l'analyse épistémologique des contenus, l'analyse de l'enseignement et de ses effets, l'analyse des conceptions des élèves, des difficultés et obstacles qui marquent leur évolution, l'analyse du champ de contraintes dans lequel se situe la réalisation didactique, tout en prenant en compte les objectifs spécifiques de la recherche.

Dans le cadre de notre recherche, à partir du cadre théorique étudié, nous avons effectué l'analyse des difficultés des étudiants en apprentissages et en enseignement observées lors des années précédentes, des contenus géométriques enseignés au primaire, ainsi que l'analyse des programmes ministériels et des manuels scolaires.

La seconde phase, celle de la conception et de l'analyse *a priori,* dans notre recherche se rapporte à trois niveaux différents : conception de la formation, conception d'une ingénierie de la notion géométrique et conception d'une situation d'apprentissage en classe. En tenant compte des analyses préalables, du choix de contenu (géométrique et didactique) et du cadre théorique étudié, nous avons décrit l'étape de la conception de la formation en présentant les stratégies principales et les moyens employés concernant l'organisation globale de l'ingénierie. En expliquant nos choix, nous référons dans cette description aux situations de la formation en indiquant leurs enjeux géométriques et didactiques.

L'analyse du contexte dans lequel se situe la réalisation didactique, nous a amenée à être plus pragmatique dans le choix du contenu à présenter. En tant que formateur nous admettons que la formation s'effectuera à partir du contenu géométrique et de certains savoirs didactiques et méthodes d'enseignement que le futur enseignant doit avoir acquis à la fin de formation (3.5). Cependant, dans le contexte de cette recherche, nous présentons seulement[37] deux ingénieries des notions géométriques : celles du triangle et des quadrilatères particuliers. Nous les avons choisies à titre d'exemple, car le taux d'échec aux questions portant sur ces notions et sur le raisonnement attendu (voir les difficultés identifiées dans la section 1.3.1) était assez élevé. De plus, comme les types de situations et les stratégies employées dans ces deux ingénieries sont très semblables, leur expérimentation à deux moments distincts de l'apprentissage permet d'observer l'évolution de la pensée géométrique des étudiants. L'analyse *a priori*

[37] La quantité importante de données recueillies ne permet pas de les présenter à l'intérieur de cette thèse de doctorat. Les données portant sur les autres notions géométriques seront les sujets des publications futures.

donc porte sur les deux ingénieries (triangle et quadrilatère) et sur le dispositif de la recherche. Afin de démontrer la progression des apprentissages des étudiants selon les niveaux de la pensée et les liens entre les situations à l'intérieur d'une ingénierie de la notion géométrique, nous avons fait ressortir toutes les questions principales posées par les situations et nous les relions aux savoirs visés (décrits à l'annexe 8) et aux conduites anticipées. Ces questions représentent un élément du milieu didactique mis en place dans le cadre de formation (5.3.2). L'analyse *a priori* du dispositif de la recherche montre la projection de la conception générale de la formation sur le dispositif de recherche et les liens entre les ingénieries (5.3.3).

La phase d'expérimentation représente dans notre recherche une étape de réalisation du dispositif et de cueillette de données sous forme des productions des étudiants (fiches de tests, examens, travaux pratiques) et des descriptions des phénomènes observés lors du cours. À l'intérieur de chacune de ces ingénieries, nous avons procédé à une analyse des situations d'apprentissage au niveau *micro* de l'ingénierie didactique. Afin de minimiser la lourdeur dans la présentation de cette recherche, nous avons inséré les éléments de ces analyses à différents moments de la présentation. L'analyse *a priori* de certaines situations est présentée dans la phase de conception de la formation où nous expliquons nos choix didactiques et leur pertinence pour les différentes situations de formation. Pour d'autres situations, cette analyse peut faire partie de l'analyse des manuels, si la situation contient l'analyse des extraits tirés des manuels. La description de chaque situation de formation (présentée aux annexes 18 et 19 correspondant à deux ingénieries) contient les buts (liés aux objectifs de formation et aux savoirs géométriques et didactiques visés), les étapes, le type d'organisation (travail individuel, en équipe, en groupe), le temps alloué, les consignes, les résultats obtenus et les effets observés. Les consignes et les conduites anticipées sont décrites dans l'analyse *a priori* de chaque ingénierie (5.3.2). Il convient de rappeler que plusieurs situations, méthodes et stratégies ont été déjà expérimentées dans les années antérieures à la phase de l'expérimentation du dispositif. Cela a influencé inévitablement les analyses, l'organisation du dispositif de la formation et de la recherche et leur description. Nous avons utilisé plusieurs résultats pour la modification des situations et dans la description des conduites anticipées.

Compte tenu des objectifs de la recherche et du contexte de l'expérimentation, nous n'avons pas procédé à la détermination et la description des *variables micro-didactiques* de chaque situation de formation. Au niveau micro-ingénierie, ces variables, appelées *variables de commande,* se distinguent en variables du problème mathématique et celles de situation reliées à l'organisation et à la gestion du milieu. Dans le cadre de cette recherche qui correspond à une macro-ingénierie, nous avons déterminé les choix globaux concernant l'organisation globale de l'ingénierie et nous présentons la projection de ces choix sur le déroulement de chaque ingénierie et sur chaque situation concrète.

L'analyse *a posteriori* au niveau *micro,* qui suit l'expérimentation et porte sur le déroulement et les phénomènes observés, est représentée (de manière très courte) dans nos décisions concernant les ajustements à apporter pour la séquence suivante. (3.6.2 et Annexes 18 et 19)

L'analyse *a posteriori* au niveau *macro de la notion géométrique* interprète les données quantitatives de deux ingénieries provenant de tests, des examens et des fiches de travaux pratiques selon les éléments méthodologiques développés (3.7). Les résultats de cette analyse et les descriptions de comportements des étudiants lors du déroulement consignés au niveau *micro* servent à alimenter l'analyse des résultats au niveau *macro-ingénierie de formation.*

L'analyse *a posteriori* (au niveau *macro*), qui correspond dans cette recherche à l'analyse des résultats de l'ingénierie de formation, cherche à évaluer comment le dispositif de la formation et les activités particulières participent à l'évolution conceptuelle du futur maître tant au niveau géométrique que didactique (3.7).

3.3 ANALYSES PRÉALABLES

Dans cette section, nous présentons très brièvement les buts visés par les analyses des difficultés des étudiants, des manuels et des programmes ministériels en référant au cadre théorique étudié au chapitre 2. Les résultats de ces analyses préalables seront présentés au chapitre 4.

3.3.1 ANALYSE DES DIFFICULTÉS

Une description des principales difficultés des étudiants a été présentée dans la problématique de la recherche. Il s'agit des difficultés d'ordre didactique (1.1) et d'ordre géométrique (1.3.1). Dans la section 2.1, nous avons étudié les différentes recherches qui nous ont permis d'analyser les difficultés des étudiants, de comprendre certaines raisons de leur apparition et de les lier aux phénomènes d'apprentissage de la géométrie décrits. Dans la section 4.1, nous interprétons ces difficultés à la lumière du cadre géométrique étudié.

3.3.2 ANALYSE DU CONTENU DE L'ENSEIGNEMENT AU PRIMAIRE

L'analyse préalable du contenu notionnel de la formation est centrée tout d'abord sur l'analyse des savoirs et des processus géométriques visés par l'enseignement primaire. Nous avons tâché de décrire les savoirs et les processus géométriques visés par l'enseignement primaire selon les différentes activités géométriques, selon les différents registres de représentation (Duval, 1995), compte tenu des phénomènes d'apprentissage soulignés dans la section 2.1, et aussi en fonction de la progression des apprentissages (van Hiele, 1959/1985) de façon à la faire correspondre aux niveaux de développement de la pensée géométrique de l'élève (4.2). Cette description cherche à expliciter l'enseignement de la géométrie au primaire et sert en même temps d'appui pour envisager les apprentissages des futurs maîtres.

3.3.2 ANALYSE DES PROGRAMMES

L'analyse des programmes porte sur la description des compétences essentielles visées par le ministère d'éducation et du contenu géométrique. Dans la première partie de notre analyse, nous utilisons le cadre théorique didactique (2.2) pour préciser le sens que nous attribuons à chaque terme utilisé dans cette description (4.3.1). La deuxième partie est consacrée à l'analyse de la description du contenu notionnel (4.3.2). En tenant compte de la progression systématique dans l'apprentissage des concepts pour atteindre un niveau plus haut de pensée géométrique, nous sommes intervenue sur la description du contenu notionnel, sur l'ordre dans lequel il est présenté en proposant des modifications et des ajouts de savoirs essentiels nécessaires au développement géométrique d'un élève selon les différents niveaux des apprentissages. Ces savoirs, organisés selon la progression à travers les niveaux, sont mis en jeu dans les activités d'analyse de la pratique scolaire et dans le contexte de préparation à l'enseignement de la géométrie au primaire dans le cadre de notre formation.

Nous présentons, donc, notre description des contenus géométriques du primaire selon le niveau de développement de la pensée géométrique : visuel, description/analytique, relation/abstraction (4.3.2, annexes 6 et 7).

3.3.3 ANALYSE DE DIFFÉRENTES RESSOURCES POUR L'ENSEIGNEMENT

Avec l'analyse des manuels scolaires, nous avons cherché à décrire la variété de situations proposées à l'étude de la géométrie, à les étudier selon les objectifs de l'enseignement de la géométrie au primaire, à repérer celles qui sont centrées sur le développement de la visualisation, du langage, sur la construction des relations entre les propriétés et les figures et d'analyser la coordination entre la visualisation et le langage dans une activité. Cette analyse nous a permis de choisir plusieurs extraits permettant d'attirer l'attention du futur maître sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, d'amorcer la discussion sur les propriétés du concept, de favoriser l'élaboration des critères d'analyse et leur application pour l'analyse et la conception des situations d'apprentissage.

Il nous semble important de préciser que les manuels analysés sont antérieurs à la réforme (les dates de leur apparition varient entre 1989-1998), car dans les deux premières années de l'implantation de la réforme, période où nous avons conduit notre expérimentation, les nouveaux manuels n'étaient pas encore disponibles. Malgré cette réserve, nous sommes d'avis que l'expérience développée dans les différentes activités d'analyse demeure pertinente et valable, et ce, pour deux raisons principales. Premièrement, certaines de ressources didactiques analysées (comme, par exemple, *Défi Mathématique* 4-6 (Lyons, M., Lyons, R., 1989-1991), *Mathématique* (exercices et résolution de problèmes) 1-2 (Beaulac, Constant, Gallini, 1990), « *Lexique mathématique* » (Vincent, 1994), *Lexique mathématique pour l'élève (*Beauregard, 1990), *Leximath* (Lexique mathématique de base (Côté, Gagnon, Perreault et Roegiers, 1998)) continuent d'être en usage aujourd'hui ou ont fait l'objet de modifications mineures dans la nouvelle version développée pour la réforme. Deuxièmement, nous pensons également, que les savoirs d'analyse développés peuvent participer à l'étude de la pertinence des activités présentes dans les nouveaux manuels et à la conception d'activités originales par les étudiants. L'analyse des différentes sources d'enseignement se trouve à la section 4.4.

3.4 CHOIX DU CONTENU DE FORMATION

Nous distinguons les deux types de savoirs que nous voulons développer chez les futurs maîtres lors de la formation : savoir géométrique et savoir didactique.

3.4.1 CONTENU GÉOMÉTRIQUE

En référence au contenu notionnel des programmes ministériels (MEQ, 2002), nous avons conçu une liste de notions géométriques (annexe 5) qui permet d'avoir une image globale du contenu géométrique étudié lors du cours de la didactique de la géométrie. En faisant appel aux difficultés en apprentissage de la géométrie, nous avons effectué une description des différents savoirs géométriques. En nous appuyant sur le cadre théorique de Duval (1995), nous les distinguons selon les registres de représentation[38] et nous décrivons les activités géométriques permettant leur coordination (voir les annexes 8 et 9). Cette liste des savoirs ne prétend pas être exhaustive, d'autres éléments pourraient lui être ajoutés. Nous avons cherché à décrire le plus d'éléments possible pour pouvoir les travailler séparément et les coordonner dans les différentes situations de formation. Ce sont ces éléments et leur coordination qui sont évalués dans les tests et les examens et que nous avons cherché à repérer dans les décisions du futur enseignant dans les travaux pratiques, dans certaines questions des examens et dans les travaux de session.

[38] Nous avons ajouté à cette liste les différents processus géométriques (construction, emploi des différents schémas de classification, etc.) qui font appel aux registres symbolique et graphique.

3.4.2 CONTENU DIDACTIQUE

Le savoir didactique que nous avons choisi de développer dans la formation des futurs maîtres est de nature théorique (venant de recherches didactiques) et pratique (venant de travaux pratiques proposés dans le cadre de formation).

Les principaux savoirs théoriques que nous visons coïncident avec les éléments de la *Théorie des situations* de Brousseau : *situation*, *situation-problème*, *dévolution* de la situation, situation *didactique* et *a-didactique*, situation *d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation*. Nous avons cherché à favoriser la découverte de ces savoirs et leur transfert à la pratique par leur intégration à l'analyse des activités et à la conception des séquences d'enseignement de la géométrie au primaire.

Dans le contexte d'organisation des apprentissages et d'analyse des activités déjà existantes, nous visons chez les étudiants le développement des compétences professionnelles suivantes :

- l'analyse didactique des manuels (objectifs visés par l'activité, pertinence des étapes, choix des représentations, des consignes, des définitions, du vocabulaire employé, anticipation des réponses possibles, des difficultés des élèves, modifications souhaitées),
- l'élaboration de situations didactiques pour l'apprentissage de la géométrie au primaire,
- l'emploi de « situation » comme modèle des apprentissages (avec la reconnaissance des phases d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation),
- l'emploi de l'approche par compétences (reconnaissance des compétences visées par l'activité existante, modification de l'activité pour contribuer au développement de compétences, conception d'une activité permettant le développement des compétences).

Dans le but d'une meilleure compréhension du travail enseignant et des apprentissages des élèves, nous avons cherché à créer les conditions d'élaboration des autres savoirs didactiques de nature plus pratique. À travers des situations de formation, nous voulons faire découvrir au futur enseignant différents savoirs portant sur l'organisation des apprentissages de la géométrie. Ce savoir peut consister en:

- une forme (ou un type de situation) d'introduction de nouvelles notions (situations d'observation, de manipulation, de construction) et leurs enjeux,

- des méthodes particulières de l'enseignement de différentes notions géométriques (par exemple, en employant les différents outils concrets, l'environnement informatique, etc.),
- un phénomène d'apprentissage (position inhabituelle de la représentation, dessin/concept),
- une élaboration progressive des critères d'analyse de l'activité mathématique.

3.5 CONCEPTION DE LA FORMATION

La didactique des mathématiques a accumulé depuis plusieurs années un grand nombre de résultats de recherches et il est donc possible de mettre en œuvre certains éléments introduits et étudiés par les chercheurs du domaine et « couvrir » une partie des thèmes géométriques en nous appuyant sur les travaux déjà existants. Nous avons essayé d'adapter et de modifier les situations didactiques et les tâches géométriques qui ont été développées dans le cadre de ces recherches, notamment pour les propriétés du cercle (*Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire,* Artigue et Robinet, 1986) et pour la notion de la mesure (*La mesure,* Brousseau, N., 1992). Ces deux ingénieries didactiques présentent une grande richesse sur le plan didactique : progression des apprentissages des élèves dans des situations bien définies, analyses préalables des conceptions des élèves sur les propriétés du cercle et de la mesure des objets (longueur, masse, etc.), éléments de gestion de la classe, étapes de l'ingénierie didactique : analyse a priori, observation, analyse a posteriori dans la construction des séquences d'enseignement. Nous avons aussi emprunté certains éléments de problèmes géométriques présentés par des chercheurs dans des différents colloques (« *Suis-je un parallélogramme*? » (Taurisson, 1999); « *nombre minimal de renseignements permettant la construction* » (Berthelot et Salin, 1992); « *Est-ce que le triangle ABC est équilatéral*? » (Côté, 1999)). Finalement, nous avons créé de nouvelles situations en suivant le conseil donné par Houdemant et Kouzniak à la Xe école didactique d'été (Houlgate, 1999) : chercher les *Petites Provocations Didactiques*[39].

[39] Des situations de formation relativement brèves, s'appuyant sur un contenu mathématique, et qui doivent surprendre suffisamment les étudiants pour les conduire à interroger leurs conceptions sur certains domaines des mathématiques.

La recherche de l'articulation entre les savoirs géométriques et didactiques dans le cadre de préparation à la pratique enseignante nous a amenée à la conception d'une ingénierie de formation. Le dispositif de formation présente une suite de séquences orientées selon les objectifs de formation et liées l'une à l'autre par l'idée de la progression des apprentissages selon les niveaux de développement de la pensée géométrique : visuel, descriptif/analytique, abstraction/relationnel, déduction. Les différents savoirs géométriques ont été mis dans le contexte des questions, des problèmes et des situations qui visent le développement géométrique des étudiants et incorporent dans cet apprentissage des concepts, des approches et des moyens didactiques à découvrir et à employer.

Le dispositif de formation est centré sur le développement progressif

- de la visualisation, du langage, du raisonnement, de la conceptualisation et sur leur emploi dans la résolution de problèmes géométriques, dans l'analyse des activités et dans la conception de nouvelles activités (objectifs géométriques),
- du questionnement sur l'organisation des apprentissages, des concepts et des modèles d'enseignement et de leur application pour l'organisation des apprentissages (objectifs didactiques).

Il est basé sur les principes-organisateurs suivants :

1. Progression des apprentissages selon les niveaux de développement de pensée géométrique
2. Problèmes et tâches qui font appel aux différents registres de représentation et d'expression et qui visent le travail sur le changement de registres
3. Emploi de mêmes types de situations dans les ingénieries de différentes notions : situation d'observation, de manipulation, de construction, de résolution de problèmes, d'analyse et de conception
4. Découverte de savoirs didactiques dans des situations de formation et leur application pour l'analyse et l'organisation des situations d'apprentissage

Pour faciliter la compréhension de la modélisation du dispositif, nous décrivons en détail, dans le chapitre 5, nos choix globaux, la démarche visée, les stratégies de formation employées et le rôle de différentes situations dans le développement des savoirs géométriques et didactiques.

3.6 EXPÉRIMENTATION

La phase d'expérimentation est une étape de mise en œuvre du dispositif de formation et de cueillette de données. Nous avons fait l'expérimentation du dispositif avec deux groupes d'étudiants (62 et 54 étudiants). La description des situations de deux ingénieries est rapportée aux annexes 18 et 19. Elles contiennent les buts (correspondant aux objectifs de formation et aux savoirs géométriques et didactiques visés), les étapes, le type d'organisation (travail individuel, en équipe, en groupe), le temps alloué, les consignes, les résultats obtenus et les effets observés.

3.6.1 CUEILLETTE DES DONNÉES

La partie majeure de nos données sont quantitatives et proviennent de tests, des examens et des fiches de travaux pratiques. Les données des tests et des examens représentent le taux de réussite aux différentes questions; celles provenant de travaux pratiques constituent soit la liste de constructions effectuées ou de différents schémas de classification proposés (et le nombre d'équipes ayant présenté chacun des variantes), soit la liste de différentes modifications apportées aux tâches proposées à l'analyse. Si cette approche cherche à maximiser le caractère objectif des données, l'analyse de ces données s'est toujours faite en tenant compte du contexte des activités effectuées lors du cours.

Nous distinguons toutes les données recueillies selon les catégories suivantes :

1. Comportements observés

Pour chaque situation proposée dans le cadre d'expérimentation, nous avons consigné dans une chronique les comportements observés lors du déroulement des situations de formation.

2. Tests et examens

L'évaluation dans le cadre du cours prévoyait deux tests (un au début de la formation et un autre vers la fin) et deux examens (un à la mi-session et un examen final).

Le test d'entrée, dont les questions posées ciblent les difficultés des étudiants identifiées lors des années précédentes, a une valeur diagnostique ayant pour but l'appréciation par les étudiants de l'état de leurs connaissances géométriques avant la formation[40]. Il est constitué de 7 questions principales faisant référence aux quatre thèmes abordés dans le programme d'étude de la géométrie : figures planes, solides, transformations géométriques et mesure, dont trois premières questions portent sur les notions du quadrilatère et du triangle. La deuxième et la troisième questions contiennent des sous-questions. (Annexes 10, 18.1 et 19.1). La rétroaction sur les résultats obtenus cherche à soulever les questions portant sur différents phénomènes géométriques : la reconnaissance de la figure dans sa représentation graphique (habituelle et non) et selon la description de ses propriétés, la distinction entre description/ définition et l'anticipation d'un maximum de réponses possibles.

L'examen Intra a eu lieu à la 8e rencontre (annexes 18.8 et 19.8). Il contient huit questions dont deux questions portant sur le triangle (construction et analyse didactique) et trois questions consacrées à la notion du quadrilatère (détermination du nom selon énoncé, conception des définitions inhabituelles et construction du carré selon les données abstraites).

Le deuxième test portant sur les figures planes est proposé une semaine avant l'examen final (annexes 17 et 19.9). Le but de ce mini-test est de permettre aux étudiants d'évaluer leurs connaissances et de réviser les notions de figures géométriques planes étudiées lors du cours. Les questions 1 et 2 portent sur la notion du cercle et celle du polygone, les questions 3 et 4 concernent la notion du quadrilatère particulier. La question 3 est présentée par la liste des énoncés portant sur les quadrilatères. La tâche demandée met l'accent sur la suffisance et la redondance des propriétés pour définir un quadrilatère particulier. La question 4 vérifie la reconnaissance d'un quadrilatère particulier dans sa représentation inhabituelle.

L'examen final est constitué de 15 questions vérifiant les savoirs géométriques et didactiques acquis lors de la formation, dont trois questions portent sur les notions concernées : analyse

[40] Nous devons mentionner que le but de mini-test d'entrée pour cette année se diffère de celui de l'année précédente. Nous ne visons pas l'identification des connaissances préalables. En effet, les observations des comportements des étudiants effectuées lors des sessions précédentes (1999-2001), nous permettent déjà d'anticiper le taux approximatif de réussite aux questions posées et nous prévoyons que l'étudiant retombera inévitablement dans les erreurs anticipées par nous.

du schéma de classification (triangle), détermination du nom du quadrilatère selon la description verbale et graphique (quadrilatères). (Annexes 18.12 et 19.10)

Pour chacun des tests et examens, nous avons recueilli les copies des 116 étudiants.

3. Travaux pratiques

Pour les ingénieries du triangle et du quadrilatère, nous avons recueilli les fiches de travaux pratiques portant sur la construction des figures et sur l'analyse des extraits tirés de différentes sources d'enseignement.

Les activités de construction prévoient le travail individuel au début (fiche personnelle), la synthèse – en équipe de 4 à 6 personnes (la remise d'une fiche d'équipe pour certaines activités) et la présentation et validation en groupe. Nous avons recueilli les fiches de 22 équipes portant sur la construction du triangle isocèle et du carré. (Annexes 12 et 14)

Les activités d'analyse prévoient, en général, le travail en équipe de 4 à 6 personnes et la présentation des résultats en groupe par le représentant d'une équipe. (Certaines activités d'analyse se font à partir d'observation des extraits présentés par l'intermédiaire du projecteur et suivies d'une discussion en groupe). Nous avons recueilli les fiches d'analyse portant sur le vocabulaire employé et sur l'activité de classification des quadrilatères (22 fiches d'équipes pour chaque situation). (Annexes 11.2 et 13.3)

4. Travaux de session

Nous avons demandé d'élaborer une séquence d'enseignement originale ou sur la base des situations et des tâches proposées par les manuels scolaires. Le travail de session est un travail d'équipe de 2-3 étudiants. Pour pouvoir couvrir les notions géométriques principales, nous avons limité le choix du contenu pour chaque groupe (d'environs 60 étudiants chacun) de la façon suivante :

1. Relations spatiales (2 équipes)
2. Solides (4 équipes)
3. Figures planes (polygones et non polygones, triangles, quadrilatères, polygone concave/convexe, polygones réguliers, cercle) (5 équipes)
4. Angles (2 équipes)
5. Transformations géométriques (3 équipes)

6. Mesure (de longueurs, d'aire, de volume, du temps, de température) (5 équipes)
7. Plan cartésien (1 équipe)

Parmi les neuf travaux portant sur les figures planes, six travaux (équipes de deux étudiants) concernent la préparation des séquences d'enseignement portant sur les propriétés des triangles (2), l'identification (2) et les constructions des figures planes (2). Ce sont ces travaux que nous avons utilisés dans le cadre de cette recherche. La remise de travaux était prévue au dernier cours.

3.6.2 ANALYSE DES DONNÉES (NIVEAU MICRO)

Nous décrivons dans cette section les outils d'analyse de données recueillies et des éléments étudiés. Il s'agit d'une analyse des données au niveau *micro* à l'intérieur des ingénieries d'une notion géométrique qui sert à alimenter l'analyse des résultats au niveau *macro-ingénierie de formation.*

Les données recueillies dans des différentes tâches, questions et problèmes géométriques sont associées aux niveaux de développement de la pensée géométrique. Notre analyse quantitative s'appuie sur le taux de réussite pour chaque question et fait correspondre ces résultats aux niveaux de la pensée géométrique.

Les données recueillies dans des situations de construction (présentées par les fiches d'équipes de 4 à 6 personnes) sont analysées de façon quantitative (combien d'équipes ont proposé tel ou tel type de construction d'une figure, ont déterminé la propriété utilisée dans la construction, ont trouvé le nombre minimal de propriétés nécessaires, ont décrit correctement des étapes).

Pour les travaux pratiques de formation portant sur les tâches d'analyse, nous avons décrit le nombre d'équipes ayant réussi la tâche en présentant les modifications effectuées. Nous avons interprété les décisions du futur enseignant en référence à ses connaissances géométriques constatées dans les questions des tests et des examens, au contenu étudié et aux situations concrètes de formation. Ces données présentent pour nous des informations concernant le processus de la formation de la décision et le contenu de la décision prise.[41]

Quant aux questions posées aux examens et qui portent sur l'analyse didactique des extraits tirés des manuels scolaires, pour chaque élément en question, nous avons repéré le nombre d'étudiants ayant identifié l'élément « problématique» (dans la définition, la consigne, les représentations ou le schéma) et la pertinence (de point de vue géométrique ou didactique) de modifications proposées.

3.7 ANALYSE DES RÉSULTATS (INGÉNIERIE DE FORMATION)

L'analyse *a posteriori* (au niveau *macro*), qui correspond dans cette recherche à l'analyse des résultats de l'ingénierie de formation, cherche à évaluer l'impact de la formation sur l'évolution conceptuelle des futurs maîtres. Par cette analyse, nous voulons montrer le rôle de l'ingénierie de la formation et le rôle déterminant des activités particulières dans la construction des connaissances géométriques et didactiques particulières.

Nous interprétons à cette étape les données quantitatives de deux ingénieries provenant de tests, des examens et des fiches de travaux pratiques selon les éléments méthodologiques développés. Nous décrivons les savoirs évalués en termes de registres à partir du cadre de Duval et nous associons les différentes réponses possibles aux niveaux de développement de la pensée de van Hiele.

Parmi les données que nous avons recueillies et qui portent sur la notion du triangle et du quadrilatère, nous avons évalué les savoirs géométriques et didactiques suivants[42] (voir le Tableau V):

[41] La complexité du phénomène de conceptualisation et la difficulté d'accéder aux connaissances humaines rendent difficile l'organisation des tests cliniques complets et réduisent le champ d'investigation des chercheurs dans ce domaine. Même si le processus décisionnel n'est pas directement observable et la description des activités cognitives est assez difficile, il peut être partiellement reconstitué à partir des traces telles que les verbalisations écrites dans les travaux pratiques et la description des comportements observés lors du déroulement du cours.

[42] Cette description tient compte des analyses préalables et de la conception des situations de formation lesquelles ont été rapportées dans les chapitres 4 et 5.

Tableau V. Outil d'analyse (niveau macro-ingénierie des notions géométriques)

Activité	Questions	Savoirs évalués	Niveaux
Test d'entrée (Annexe 10)	Question 1	- Reconnaître la figure plane dans sa représentation habituelle (registre *figural/discursif*) - Reconnaître la figure dans sa représentation inhabituelle (position inhabituelle; concepts, registre *figural/ discursif*) - Utiliser les schémas (diagrammes, tableaux, etc.) pour la classification des figures (registre *graphique/symbolique*)	- *niveau* 1 (A, B, C, D, F) - *niveau* 1 (E) - *niveau* 3 - *niveau* 2
	Question 2 (a et b)	- Déterminer (visualiser ou évoquer) le nom d'une figure (ou des figures) selon les propriétés décrites (descriptions habituelles) (registre *discursif/ figural*)	- *niveau* 2 (1 figure) - *niveau 3* (2 figures)
	Question 2 (c)		*niveau* 1 (triangle) - *niveau* 2 (triangle isocèle ou triangle rectangle) - niveau 3 (isocèle rectangle)
	Question 3 (a et b)	- Connaître les définitions habituelles (caractéristiques) (registre *discursif*)	- *niveau* 3
Analyse du vocabulaire (Annexe 11.2)	Situation 18.4	- Connaître les définitions habituelles (caractéristiques) (registre *discursif*) - Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.	- *niveau* 3
Construction du triangle isocèle (Annexe 12, situation 18.6)	Question 1	-Effectuer les différentes constructions de la figure (registre *graphique* ou *graphique /discursif*) - Décrire les procédures de la construction (registre *discursif*), - Déterminer la(les) propriété(s) qui sont en jeu dans la construction (*figural/discursif*)	- *niveau 1* (représentation graphique ayant la forme demandée; tracé du contour d'un objet physique de la forme demandée) - *niveau* 2 (selon une propriété visuelle) - *niveau* 3-4 (emploi du raisonnement)
	Question 2	-Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (*figural/discursif*) - Effectuer la construction d'une figure selon le nombre minimal de données abstraites et concrètes (*figural/discursif/graphique).*	- *niveau* 3 - *niveau* 3 (selon les propriétés visuelles) - *niveau* 4 (emploi du raisonnement)
Construction du carré (Annexe 14)	Situation 19.2 (Activité analogique à l'activité précédente)		

Activité	Questions	Savoirs évalués	Niveaux
Classification des quadrilatères (Annexe 13.3, situation 19.4)	Questions 1 et 2	- Formuler les relations d'inclusion (hiérarchisation) (registre *discursif*) - Justifier l'énoncé (registre *discursif*) - Déterminer la partie redondante de la définition (registre *discursif*)	- *niveau* 3 -*niveau* 3 -*niveau* 4
	Question 3	- Appliquer les savoirs didactiques : choix de représentations graphiques, choix du critère de classification et choix du diagramme dans l'activité de classification; analyser l'exactitude du schéma de classification	- *niveau* 4
Examen de mi-session (Annexes 18.8 et 19.8)	Question 1	- Comprendre la consigne (registre *discursif*) - Déterminer le nom du quadrilatère selon la description de ses propriétés (définitions caractéristiques et constructives) (registre *discursif / figural*)	- *niveau* 3 - *niveau* 3 (déf. car.) - *niveau* 4 (déf. const.)
	Question 2	- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives (registre *discursif*)	- *niveau* 3 - *niveau* 4
	Question 4	- Identifier les triangles (*figural/discursif*) - Classer les triangles dans le schéma existant (registre *graphique/symbolique*) - Concevoir le schéma de classification (*figural/discursif/graphique*)	- *niveau* 2 - *niveau* 2 - *niveau* 3-4
		- Appliquer les savoirs didactiques : analyser le but de l'activité, l'ordre des étapes, le choix de représentations graphiques (forme, grandeur, disposition, échantillon des figures, etc.), l'exactitude du schéma de classification, du vocabulaire employé (modifier si nécessaire)	
	Question 5	- Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (*figural/discursif*)	- *niveau* 3 (réponse incomplète) - *niveau* 4 (réponse complète)
	Question 7	- Concevoir le plan d'action (registre *discursif/graphique/symbolique*), - Déterminer les conséquences logiques de certaines données (registre *discursif*), - Décrire les étapes de la construction (registre *discursif*), - Effectuer la construction d'une figure selon les données abstraites (*graphique/figural/discursif*).	- *niveau* 3-4
Mini-test (Annexe 17)	Question 3	- Déterminer le nom de la figure selon la description inhabituelle (définitions constructives) (registre *discursif/figural*) - Déterminer si l'énoncé est suffisant pour définir une figure (classe) (registre *discursif*) - Déterminer la partie redondante de la définition (registre *discursif*)	- *niveau* 3 (énoncés 1, 2,4, 5, 8, 10, 11) - *niveau* 4 (énoncés 3, 6, 7, 9) - *niveau* 4 - *niveau* 4
	Question 4	- Déterminer le nom de la figure à partir de la lecture du dessin (registre *figural/discursif*).	- *niveau* 3

Activité	Questions	Savoirs évalués	Niveaux
Examen final (Annexes 18.12 et 19.10)	Question 1	- Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites (définition constructive) (*discursif/figural*)	- *niveau* 3 (a) - *niveau* 4 (b)
	Question 2	- Décrire les propriétés marquées par des symboles (*figural/symbolique/discursif*), - Déterminer les conséquences logiques de certaines données (registre *discursif*) - Déterminer le nom d'une figure (unité figurale de dimension 2 qui n'est pas discernable) selon la lecture du dessin (*figural/discursif*), - Justifier la réponse (*discursif*)	- *niveau* 3-4 - *niveau* 4 - *niveau* 4 - *niveau* 3
	Question 13	- Reconnaître une figure dans sa représentation habituelle ou non) (registre *figural/discursif*)	- *niveau* 2 (A), - *niveau* 4 (B)
		- Appliquer les savoirs didactiques : analyser l'exactitude du schéma de classification	
	Question 11	- Tracer les figures obtenues par la transformation (registre *graphique*) - Décrire les procédures de la construction (emploi du langage géométrique) (registre *discursif*)	- *niveau* 3

Pour montrer la progression des étudiants dans la construction des concepts géométriques particuliers et leur niveau de la visualisation, du langage et du raisonnement atteint à la fin de la formation, parmi les nombreuses données que nous possédons, nous choisirons celles portant sur une ou deux notions particulières (par exemple, le carré ou le losange) obtenues aux différents moments de la formation (test d'entrée, travail pratique, examen de la mi-session, mini-test, examen final).

Pour montrer le rôle de l'ingénierie de la formation et le rôle déterminant des activités particulières dans la construction des connaissances géométriques et didactiques, nous faisons le tri de données quantitatives et qualitatives obtenues dans les activités du même type appartenant à deux ingénieries (par exemple, dans les situations de construction, de manipulation, etc.). En associant les résultats obtenus aux activités de même type portant sur des notions différentes et en les présentant selon l'ordre chronologique, cette analyse permet d'observer la progression dans la pensée géométrique et de souligner le rôle de l'ingénierie de formation sur le développement conceptuel des étudiants.

À ce même niveau (*ingénierie de formation*), nous avons étudié des données portant sur l'appropriation des savoirs didactiques provenant de l'étude des travaux de session. Cette analyse vise à relier les décisions des étudiants dans la préparation d'une séquence d'enseignement au contenu de la formation. Nous avons cherché dans les décisions de futurs enseignants les références aux savoirs didactiques et géométriques étudiés dans le cadre du dispositif de formation. Les décisions sont comprises comme les indices de la compréhension qualitative des savoirs développés lors de la formation.

Toutes les activités, originales ou celles, créées sur la base des activités tirées de manuels scolaires, sont analysées selon une grille d'évaluation contenant onze critères correspondant à l'emploi des savoirs géométriques et didactiques travaillés lors de la formation (voir l'annexe 16). Nous devons admettre que cette dernière évaluation ne peut pas prétendre à une objectivité absolue. Pour en minimiser la subjectivité, les différents éléments décrits dans la grille ont été évalués de façon qualitative (excellent, très bien, bien, passable, insuffisant) conformément aux critères d'évaluation qualitative de l'université.

Nous présentons l'analyse des résultats obtenus en les distinguant selon deux aspects : l'emploi de connaissances géométriques et didactiques. Nous avons analysé l'emploi de connaissances géométriques dans les décisions des futurs maîtres concernant la détermination des objectifs, des connaissances en jeu, des étapes, de tâches proposées, des explications données aux élèves, des justifications des choix effectués, des commentaires ou des critiques portant sur l'activité tirée du manuel, des modifications effectuées et des nouvelles propositions. Quant à la méthode d'évaluation, au fur et à mesure de la lecture, nous avons coché les cases correspondantes, en laissant les traces dans la copie des étudiants. Ensuite, la moyenne (approximative) pour chaque critère a été mise dans la version finale de grille. La vérification des connaissances didactiques travaillées lors de la formation est centrée sur la correspondance de l'activité conçue aux objectifs visés, sur l'emploi de la « situation » comme modèle d'organisation des apprentissages et sur la détermination des compétences visées par le programme et leur justification. Notre analyse s'appuie sur des exemples concrets tirés de travaux des étudiants.

Nous confronterons les résultats obtenus de cette analyse aux objectifs visés et évaluerons la démarche entreprise dans la recherche.

4. ANALYSES PRÉALABLES

Ce chapitre est consacré aux résultats des analyses préalables effectuées à la lumière du cadre théorique. Nous présentons l'analyse des difficultés des étudiants (4.1), du contenu géométrique (4.2), des programmes (4.3) et des manuels (4.4).

4.1. ANALYSES DES DIFFICULTÉS EN GÉOMÉTRIE

Les différentes recherches étudiées dans la section 2.1 nous ont permis d'analyser les difficultés des étudiants, d'envisager certaines raisons de leur apparition et de les lier aux phénomènes d'apprentissage de la géométrie décrits.

Le cadre théorique de van Hiele (2.1.1) nous permet de distinguer ces difficultés selon les différents niveaux de développement de la pensée géométrique (voir le Tableau VI).

Tableau VI. Description des difficultés selon les niveaux de la pensée géométrique

Difficultés observées	Niveaux de pensée géométrique
1. L'emploi d'une seule caractéristique (en général, la plus marquante) dans l'identification des figures	Niveau 1
2. La visualisation (et la représentation) d'un ensemble de triangles et de triangles particuliers : isocèle-rectangle, isocèle-obtusangle, scalène-rectangle disposé sur l'hypoténuse	Niveau 1
3. La reconnaissance des figures dans leurs positions inhabituelles	Niveau 1
4. La reconnaissance de la forme du quadrilatère ne fait pas appel à la définition et à la recherche des propriétés communes de classes, même si la consigne le demande	Niveau 2
5. La reconnaissance des transformations géométriques dans la représentation de deux figures (initiale et image) ne fait pas appel aux propriétés des transformations considérées	Niveau 2
6. La reconnaissance (ou l'évocation) de toutes les transformations géométriques possibles (à l'enseignement primaire) dans la représentation de deux figures (initiale et image)	Niveau 2
7. La visualisation des axes de symétrie obliques des figures ou dans des figures disposées inhabituellement	Niveau 1

Difficultés observées	**Niveaux de pensée géométrique**
8. La visualisation des figures obtenues par la projection des solides et la reconnaissance (ou l'évocation) des solides selon la projection donnée (ou selon la vue de droite, de gauche, de haut, du bas)	Niveau 1
9. La visualisation (et la détermination) des figures selon la description de leurs propriétés visuelles (et l'évocation de plusieurs figures correspondant à la description)	Niveau 2
10. La compréhension de la consigne ou des mots particuliers de la consigne (comme « est », « s'appelle », « au moins », « certainement », etc.), qui participent à la réponse attendue.	Niveau 2
11. La visualisation (et la détermination) des figures selon la description de leurs propriétés (descriptions inhabituelles). (Les étudiants confondent ainsi l'appartenance d'une propriété à une classe de quadrilatères et la détermination d'une classe selon la propriété décrite)	Niveau 2
12. La visualisation et la représentation (dessin) du développement du cône	Niveau 2
13. La non-connaissance de certains termes géométriques étudiés à l'enseignement primaire	Niveau 1 ou 2
14. L'emploi des termes imprécis dans l'identification des figures, dans la description ou dans la définition des figures	Niveau 2
15. La justification des énoncés. (Les étudiants ne sont pas exigeants au niveau du raisonnement. Ils connaissent les relations, mais ont des difficultés pour construire la chaîne argumentative qui les amène à justifier ces relations.)	Niveau 2
16. La classification des figures géométriques	Niveau 2
17. La conception des définitions en utilisant les propriétés autres que celles présentées dans la définition habituelle. (Les étudiants font peu de distinction entre une définition et une description d'un quadrilatère. Pour eux, « définir » signifie souvent de nommer plus de propriétés d'une figure ou d'une classe de figures).	Niveau 2
18. La conversion des unités de mesure	Niveau 2
19. L'oubli des formules principales	Niveau 2
20. La justification des résultats	Niveau 2-3
21. La résolution des problèmes géométriques (même à la fin de formation)	Niveau 1-3 dépendamment de la tâche

Les difficultés de reconnaissance des figures dans leurs représentations graphiques dans les descriptions 1-3 et 7-8 du tableau ci-dessus correspondent au niveau insuffisant de la visualisation et signalent que les étudiants n'atteignent pas le niveau 2; celles dans les 4-6, 9 et 12 (qui sont liées à la connaissance des propriétés et de relations entre les propriétés) ne nous permettent pas de les situer au niveau 3. L'emploi de termes imprécis ou des caractéristiques élémentaires des figures dans la description des figures ou des démarches (13-14) révèlent les difficultés langagières des étudiants qui peuvent être associées au niveau 2 selon le modèle de van Hiele. La non-reconnaissance des figures dans leurs descriptions ou définitions (9-11), les difficultés dans la justification des énoncés (15), dans la classification de figures (16) et dans la conception des nouvelles définitions (17) qui exigent l'emploi du raisonnement, ne nous permettent pas de les situer au niveau 3 ou 4 (dépendamment de la question et des propriétés utilisées). Quant à la résolution des problèmes géométriques (18-21), les difficultés des étudiants relèvent de la reconnaissance (ou choix) des éléments nécessaires pour la résolution et de la détermination de ceux qui se trouvent dans le problème (sous forme de concepts). Ces difficultés donc peuvent être liées aux niveaux 1-3 (dépendamment de la réponse).

Comme il nous est impossible de distinguer les raisons exactes des erreurs des étudiants, nous pouvons admettre celles ressorties des recherches étudiées (voir 1.3.1 et 2.1). Rappelons brièvement que ces recherches expliquent que la performance assez faible des étudiants peut trouver sa source dans le choix limité d'exemples qu'ils ont vus dans les manuels (Vinner et Hershkowitz, 1980), dans l'enseignement basé sur la mémorisation (Yakimanskaya, 1971; Clements et Battista, 1992) et peut être attribuée à une expérience géométrique insuffisante (van Hiele, 1989). À cela, il nous faut sans doute ajouter le simple phénomène d'oubli (car cela fait plusieurs années qu'ils n'ont pas étudié la géométrie).

4.2. ANALYSE DU CONTENU DE L'ENSEIGNEMENT AU PRIMAIRE

L'analyse préalable du contenu notionnel de la formation est centrée sur l'analyse des savoirs et des processus géométriques visés par l'enseignement primaire. À partir des différentes ressources d'enseignement (manuels, dictionnaires, guides pédagogiques, etc.), nous avons fait le choix des représentations graphiques, des définitions, des schémas de classification et des constructions; nous les avons analysés en termes de différents registres de représentation, selon les niveaux de la pensée géométrique, en tenant compte des phénomènes d'apprentissage décrits au chapitre 2.1 et en référence aux différentes expériences géométriques : manipulation, observation, construction, résolution de problèmes employés par l'enseignement primaire. Il s'agit d'une transposition didactique des savoirs à enseigner qui est basée sur notre compréhension et notre vision de l'enseignement en vue de développement des compétences géométriques chez les élèves du primaire et compte tenu du cadre théorique géométrique présenté. Elle cherche à expliciter l'enseignement de la géométrie au primaire et sert en même temps d'appui pour envisager les apprentissages des futurs maîtres.

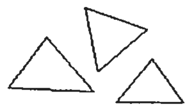
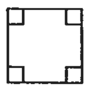
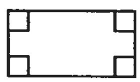
4.2.1 NIVEAU VISUEL

Au niveau *visuel*, l'enseignement de la géométrie vise le développement de la reconnaissance des figures selon leur apparence. À partir de différentes activités portant sur les solides et sur les figures planes, l'élève dégage le nom d'une figure qui peut être identifié par les contours, les projections, les vues des différents solides et dans la collection des figures planes proposées pour l'observation. En mettant en jeu la forme de la figure, ces activités expérimentales favorisent le développement de la visualisation (reconnaissance, imagination spatiale, comparaison, abstraction), de la représentation (modeler, dessiner, tracer, construire en utilisant les objets physiques) et du langage correspondant (pour identifier les figures, comparer, expliquer, etc.). L'élève arrive à associer une figure à un nom et le nom à la figure. Dans les activités de classification, selon van Hiele (1986, p.83), les élèves expliquent leur choix de regroupement ou de distinction des objets en se basant sur l'apparence visuelle, appelée « la forme », sans être capables pour autant de nommer une propriété qui les unit ou qui les distingue, car la perception, à ce niveau de développement, domine sur le raisonnement. Cependant, ces activités peuvent amener l'élève au raisonnement, en favorisant la précision du critère de la classification, la justification du résultat trouvé ou de la démarche choisie. Par exemple, la validation du nom du solide reconnu dans les figures obtenues par la projection (ou du nombre de figures planes reconnues dans la figure complexe, etc.) peut s'effectuer à partir de la preuve expérimentale : faire la projection (montrer, tracer, etc.). Ce caractère visio-explicatif du raisonnement peut intervenir ainsi dans la justification du critère de classification par son application à chaque objet proposé à l'observation. Quant à la justification de la démarche, l'élève peut raisonner par l'analogie. Par exemple, les activités expérimentales à ce niveau doivent chercher à préparer les conditions de transfert de responsabilités d'un travail intellectuel et viser l'apprentissage par les élèves des démarches et des méthodes d'observation, de distinction, de classification pour la résolution des autres situations. Ces processus peuvent devenir pour l'élève des outils de pensée qu'il appliquera aux nouvelles situations (d'observation, de construction, de manipulation, etc.).

L'activité de construction des figures représente une activité géométrique qui évolue au cours des apprentissages et dans laquelle beaucoup de propriétés de figures planes et des savoir-faire géométriques interviennent comme des outils pour guider les élèves vers le développement de nouvelles connaissances et vers la structuration des connaissances qu'ils possèdent déjà. À travers les niveaux de la pensée géométrique et les activités de construction proposées, nous pouvons observer le changement du statut de la figure et du discours correspondant.

Au niveau *visuel*, l'élève peut représenter la figure par le dessin général (à la main ou à la règle qui emploie la forme de la figure ou la propriété visuelle marquante (congruence de côtés et angle droit). Les dessins du carré, du rectangle, du triangle rectangle et du triangle isocèle donc peuvent être envisagés (voir le Tableau VII).

Tableau VII. Niveau Visuel (Construction des figures)

Nom	Dessin	Procédures envisagées	Propriétés utilisées
Triangle		Tracer (à la main, à la règle, contour d'un objet) la figure fermée se composant de trois côtés	Trois côtés et trois angles
Triangle rectangle		Tracer un angle droit (en utilisant le modèle); relier les extrémités	Trois côtés et angle droit
Carré		Tracer (à la main, à la règle, contour d'un objet) le carré (dessin approximatif)	Côtés congrus et angle droits
Rectangle		Tracer (à la main, à la règle, contour d'un objet) le rectangle (dessin approximatif)	Côtés opposés congrus et angles droits

Nous pouvons distinguer les différentes expériences géométriques décrites ci-haut en quatre catégories générales : *situations de manipulation, situations d'observation, situations de construction et résolution de problèmes.* Il serait utile de préciser que cette distinction n'est pas restrictive, et qu'une situation de manipulation ou de construction incorporent toujours une démarche d'observation, de même qu'une situation de construction peut exiger une manipulation des objets.

Dans les tableaux suivants (Tableaux VIII et IX), nous avons représenté le contenu de l'enseignement portant sur les triangles et les quadrilatères qui correspondrait au niveau *visuel.* Cette représentation tient compte de différentes expériences géométriques (manipulation, observation, construction, résolution de problèmes), des objectifs de l'enseignement de la géométrie (visualisation, langage, raisonnement et leur coordination), de développement des processus mentaux (observer, comparer, distinguer, évoquer, imaginer, etc.) et décrit les savoirs géométriques découverts dans les activités expérimentales en termes de registres : figural et discursif.

<table>
<tr><th>1</th><th>Situations de manipulation</th><th>Situations d'observation</th><th>Situations de construction</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Visuel (reconnaissance de la forme)</td><td>- Observer, toucher et bouger les solides. Décrire les solides en les associant aux objets réels, selon la forme de leurs faces, selon les mouvements observés. Regrouper (Classer) les solides (choix du critère de classification, <u>justification du choix</u>) selon la forme de leurs faces (planes et courbes), selon le mouvement (roulent et glissent), selon l'apparence, etc.) Introduire les noms de solides : cube, prisme, pyramide, cône, cylindre, boule et les noms de classes (« polyèdres » et « corps ronds »). Évoquer tous les solides ayant la face plane et la surface courbe.
- Observer les projections de différentes faces des solides (à l'aide d'un projecteur), nommer les figures obtenues. Décrire le solide selon la projection de leurs faces. Évoquer tous les solides ayant la projection d'une forme donnée.</td><td>- Observer la collection des figures planes. Reconnaître les figures (où sont les triangles, les carrés, …?). Identifier les figures dans une autre collection.

- Observer les faces planes des solides. Décrire les solides selon la forme de leurs faces planes. Classer les solides (choix du critère de classification, <u>justification du choix</u>) selon la forme et le nombre de leurs faces: triangulaires, carrées, circulaire, etc.)

- Observer la collection des figures planes. Reconnaître les figures ayant angle droit. Identifier les triangles, les carrés et les rectangles.</td><td>- Tracer les contours des solides (précision de tracés). Introduire les nommes de figures planes : carré, rectangle, triangle, cercle, etc. Décrire le solide selon les tracés. Évoquer tous les solides ayant le tracé donné. (Trouver les objets ayant la face de forme triangulaire (carrée, circulaire, etc.)) parmi les différents objets proposés à l'observation.

- Construire un triangle (choix particulier de grandeurs), un carré, un rectangle avec des palles (nombre et grandeur de pailles, nombre de boules). Introduction de termes : « côtés », « angles », « angle droit ».</td></tr>
<tr><td colspan="3">Résolution de problèmes
<u>(quelques exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géométriques)</u></td></tr>
<tr><td>- Toutes mes faces de la même forme. Qui suis-je?
- J'ai des surfaces carrées et des surfaces triangulaires. Qui suis-je?
*Évoquer le maximum de réponses possibles

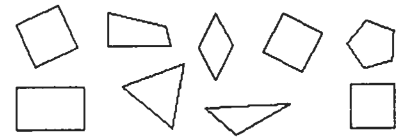
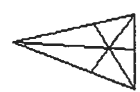
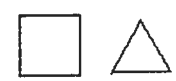
- Je ressemble à une boîte, mais je n'ai pas de faces carrées. Je suis …
- Je peux rouler et glisser. Je n'ai pas de projections de forme triangulaire. Qui suis-je?
- Combien de projections différentes peut avoir ce solide? Identifier leurs noms.
</td><td>- Où sont les carrés?

- Combien de triangles y a-t-il?

Est-il possible d'avoir le solide ayant les projections de ses faces de formes triangulaire et circulaire? Justifier.</td><td>- Quel solide reconnais-tu à partir des contours suivants :

- Est-il possible de construire un triangle avec trois pailles de la même longueur?
- Combien de triangles différents peut-on construire avec les trois pailles suivantes? (choix de grandeurs effectué par l'enseignant)
- À partir d'un côté donné, combien de triangles (carrés) différents peut-on construire?</td></tr>
</table>

Tableau VIII. <u>**Niveau visuel (Description des activités)**</u>

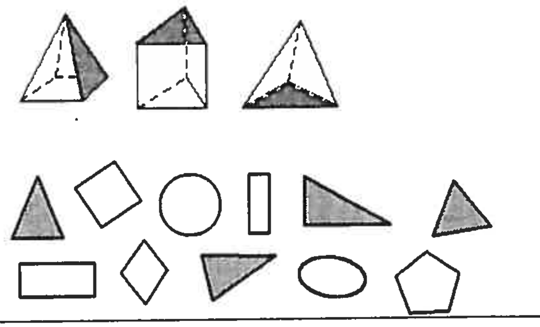
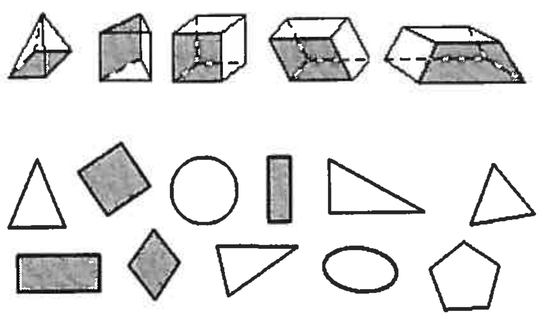
Niveau 1	Registre des figures	Registre discursif		
	Activités / Représentations graphiques	Situations de manipulation	Situations d'observation	Situations de construction
Triangle		- La forme de projections de la face d'une pyramide, de la base d'un prisme, d'un cône	- La forme de la face d'une pyramide, de la base d'un prisme (prisme à base triangulaire), d'un tétraèdre	- La forme du contour des faces latérales d'une pyramide, de la base d'un tétraèdre, d'un prisme à base triangulaire - La figure fermée composée de trois pailles (appelées côtés) - La figure ayant trois coins (appelés angles)
Carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze		- La forme de projections de faces d'un cube, de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide, d'un cylindre	- La forme de faces d'un cube, de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide	- La forme du contour des faces d'un cube ou de différents prismes, de la base d'un prisme ou d'une pyramide - Le carré se compose de quatre pailles de longueur égale (appelées côtés) et de quatre « beaux » coins (appelés angles droits) - Le rectangle se compose de quatre pailles (ou de deux paires de pailles de longueur différente) et de quatre angles droits

Tableau IX. <u>Niveau visuel (Représentations graphiques et discursives)</u>

4.2.2 NIVEAU DESCRIPTIF/ANALYTIQUE

Au niveau *descriptif/analytique*, à partir de différentes activités expérimentales, la figure commence à être associée à des éléments qui la composent (voir 2.1.1). L'enseignement de la géométrie à ce niveau vise l'identification des différentes figures dans des différentes positions selon les caractéristiques visuelles marquantes : côtés (congrus, parallèles, perpendiculaires) et angles (congrus, aigu, droit, obtus), la description de chaque figure par les caractéristiques découvertes et l'évocation (ou la détermination du nom) de la figure selon la description des propriétés.

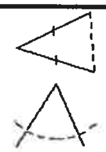
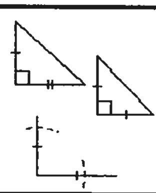
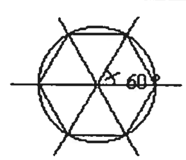
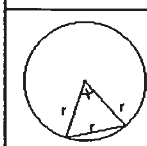
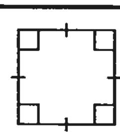
Les activités d'observation de différentes figures planes, leur comparaison et la recherche d'une propriété commune ou qui les distingue (ou d'une figure qui n'appartient pas à la collection) permettent l'introduction de termes « polygones », « polygone concave/ convexe », « triangle isocèle », « triangle équilatéral », « triangle scalène », « angle aigu », « angle obtus », la distinction des polygones selon le nombre de côtés en triangles, quadrilatères, pentagones, etc., et leur emploi dans l'identification et la description des figures. L'observation des relations possibles entre deux droites, conduit à l'introduction de termes *«parallèles»*, *«concourantes»*, *«perpendiculaires»* et à leur identification dans la collection des polygones.

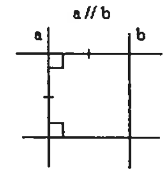
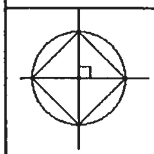
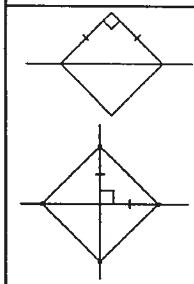
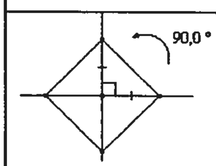
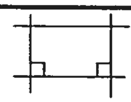
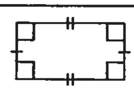
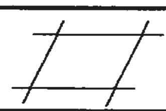
Les activités de manipulation des solides, d'observation des différentes vues (de face, de droite, de haut, etc.) et coupes (verticale, horizontale, oblique, passant par le sommet, etc.) favorisent le développement de la visualisation et participent à l'identification des figures planes. Les activités de partage de la figure plane en parties congrues ou en figures connues permettent l'introduction de nouveaux termes : *diagonale, bissectrice, hauteur, figure symétrique* et leur emploi dans la description des figures.

Quant au raisonnement, il continue de garder son caractère *visuo-explicatif* en faisant intervenir dans la justification les propriétés acquises.

Au niveau *descriptif/analytique*, les propriétés établies expérimentalement (congruence des côtés et des angles, perpendicularité et parallélisme des côtés, axe de symétrie, etc.) peuvent déjà être mises en jeu de la construction (ou de la reproduction du dessin) du carré, du rectangle, du losange, du triangle isocèle et du triangle rectangle en favorisant la description de la démarche et des techniques de construction (tracer à la règle et au compas, reporter les mesures de côtés et des angles, tracer les droites parallèles et perpendiculaires, les segments congrus, diviser un segment en deux parties congrues) et l'emploi du raisonnement approprié à ce niveau (voir le Tableau X). À ce niveau, le raisonnement peut intervenir dans la recherche du nombre minimal d'informations permettant la reproduction du dessin affiché au tableau ou dans la recherche de représentations différentes des triangles avec trois (ou deux) pailles de même grandeur ou de grandeurs différentes.

Tableau X. Niveau Descriptif/Analytique (Construction des figures)

Nom	Dessin	Procédures envisagées	Propriétés utilisées
Triangle Isocèle		Relier deux segments congrus ayant une extrémité commune par le segment	Deux côtés congrus
Triangle rectangle		Tracer un angle droit; reporter les mesures de côtés; relier les extrémités	Angle droit et deux côtés de mesure différente (ou égale)
Triangle équilatéral		Tracer un cercle; partager en six parties congrues	On peut inscrire l'hexagone régulier dans un cercle; l'hexagone régulier se divise en six triangles équilatéraux
		Tracer le cercle; reporter la longueur du rayon sur le cercle; relier le point obtenu au centre du cercle	On peut inscrire l'hexagone régulier dans un cercle; l'hexagone régulier se divise en six triangles équilatéraux
Carré		1. Reproduction du dessin : Tracer le segment; à l'une des extrémités du segment, tracer le segment perpendiculaire et de la même longueur; répéter; relier les extrémités. (Nombre minimal d'information est 1 (côté))	Les côtés sont congrus et perpendiculaires

		2. Tracer deux droites parallèles; tracer la droite perpendiculaire à ces droites; mesurer le segment créé; reporter la mesure de ce segment sur la première droite; tracer la droite perpendiculaire.	Les côtés opposés sont parallèles. Tous les côtés sont congrus. Les côtés consécutifs sont perpendiculaires
		3. Tracer le cercle; partager en quatre parties congrues (deux diamètres perpendiculaires); tracer le contour du carré (les sommets sont les points d'intersection de deux diamètres et du cercle).	Le carré peut être inscrit dans un cercle. Les diagonales du carré correspondent à deux diamètres perpendiculaires
		Tracer le triangle isocèle rectangle (contour du modèle); faire la symétrie de ce triangle par rapport à l'hypoténuse (ou faire les trois symétries consécutives par rapport à un côté)	Le carré est symétrique par rapport à sa (ses) diagonales (le carré se divise en deux triangles rectangles isocèles (congrus) par sa diagonale et en quatre triangles rectangles isocèles (congrus) par ses deux diagonales)
		Tracer le triangle isocèle rectangle (contour du modèle) ou tracer le segment; faire les trois rotations consécutives de quart de tours de ce triangle (ou de ce segment) autours de son sommet (son extrémité)	Le carré est invariant par rotation à 90°
Rectangle		Tracer deux droites parallèles; tracer deux droites perpendiculaires à ces droites	Deux paires de côtés parallèles. Les côtés consécutifs sont perpendiculaires
		1. Reproduction du dessin : tracer le segment (1^{e} côté); segment perpendiculaire (2^{e} côté) ; répéter (Nombre minimal d'information est 2 (deux côtés))	Deux paires de côtés opposés congrus et 4 angles droits
Losange		Tracer deux segments perpendiculaires se coupant en leur milieu (dessin approximatif)	Les diagonales sont perpendiculaires
Parallélogramme		Tracer deux droites parallèles; tracer deux droites parallèles et sécantes à ces droites	Deux paires de côtés parallèles
Trapèze		Tracer deux droites parallèles; tracer deux droites sécantes à ces droites	Une paire de côtés parallèles

Nous représentons notre description du contenu correspondant à ce niveau dans les Tableaux XI et XII.

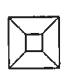
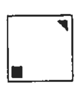
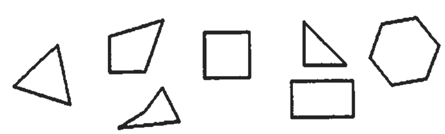
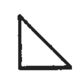
2	*Situations de manipulation*	*Situations d'observation*	*Situations de construction*
Descriptif/Analyse	- **Observer, identifier, représenter** graphiquement les différentes **vues** : de face, de droite, de haut, etc. (coupes : verticale, horizontale, oblique, passant par le sommet, etc.; développement) des solides. **Évoquer** les vues (coupes, figures) de différents solides et les solides ayant la(les) représentation(s) (de la vue (coupe) donnée(s). **Partager** la figure plane en deux parties congrues (par pliage). **Introduction** de la *réflexion, figure symétrique.* **Rechercher** les axes (passant par les côtés et par les angles) de figures particulières : cercle, triangle isocèle, triangle équilatéral, carré, rectangle, losange. **Introduction** des termes : *bissectrice* et *médiatrice.* **Rechercher** le nombre maximal d'axes de ces figures. **Décrire** la figure selon le nombre d'axes.	- **Observer** la collection de différentes figures planes (fermées). **Comparer et rechercher** des propriétés qui les distinguent (ligne courbe et ligne composée de segments de droite). **Introduire** le terme « *polygone* ». **Identifier** les polygones dans une autre collection de figures planes (**justifier**). - **Observer** la collection de différents polygones. **Comparer** et **rechercher** une propriété qui les distingue (nombre de côtés ou nombre d'angles). **Introduire** les noms de classes : *triangles, quadrilatères, pentagones,* etc. **Identifier** les différents polygones dans une autre collection (**justifier).** - **Observer** la collection de différents quadrilatères. **Identifier. Comparer** et **rechercher** une propriété commune (quatre côtés ou quatre angles) et des propriétés qui les distinguent (congruence ou non de côtés, d'angles, présence d'angle droit). **Décrire** chaque quadrilatère. - **Observer** la collection de différents quadrilatères. **Rechercher** une propriété commune (polygone à 4 côtés) et une propriété qui les distingue (angle rentrant). **Introduire** les termes « concave » et « convexe ». - **Observer** la collection de différents triangles. **Comparer** et **rechercher** une propriété commune (trois côtés et trois angles) et des propriétés qui les distinguent (congruence ou non de côtés, d'angles, présence d'angle droit, aigu, obtus). **Décrire** chaque triangle. - **Classifier** les polygones selon les différentes caractéristiques : polygones/non-polygones, concaves/convexes, nombre de côtés, côtés parallèles, côtés perpendiculaires.	- **Construire** un carré, un rectangle et un triangle rectangle (**reproduire** le dessin de la figure (report de mesure de côtés, report des angles). **Construire** à partir des données concrètes. Rechercher le nombre minimal d'information. **Décrire** la démarche. - **Prolonger** les côtés de différents quadrilatères et **observer** les relations entre deux droites. Introduire les termes «*parallèles*», «*concourants* », «*perpendiculaires*». **Identifier** les quadrilatères ayant les côtés //, les côtés ⊥ - **Composer** les différentes figures planes à l'aide des autres figures planes. **Décrire** la figure selon les différentes compositions. **Partager** (graphiquement) des figures en figures connues. **Introduire** le terme « *diagonale* », « *hauteur* ». - **Construire** la figure (ou la deuxième partie de la figure) obtenue par la réflexion (papier quadrillé). **Décrire** la démarche.
	Résolution de problèmes *(exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géométriques)*		
	- De quel solide s'agit-il?  *Suis-je symétrique?* 	*- Décrire la figure (Emloyer le maximum de termes géométriques)*  *- Trouver la caractéristique commune de ces figures*  *- Trouver le polygone qui n'appartient pas à cette collection. Justifier.*	*- Ce triangle représente ¼ du carré. Reconstituer le carré. (Décrire la démarche)*  *- Construire le pentagone concave, symétrique, possédant une paire de côtés parallèles et deux angles droits. Indiquer les propriétés par des symboles correspondants.*

Tableau XI. __Niveau Descriptif /Analyse (Description des activités)__

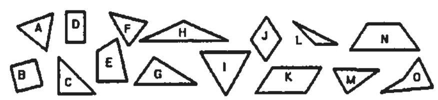
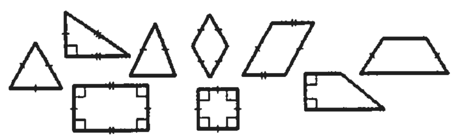
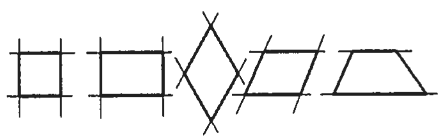
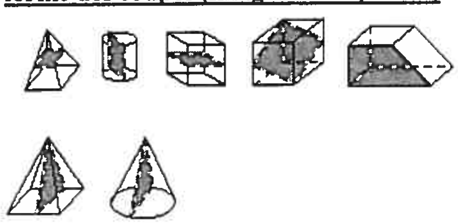
2	*Registres figural, symbolique, graphique*	*Registre discursif*		
	Activités *Représentations*	*Situations de manipulation*	*Situations d'observation*	*Situations de construction*
	Reconnaissance (et représentation grahique) de la figure  **Représentation des propriétés visuelles par des symboles**  **Reconnaisance de parallélisme de côtés**  **Visualisation (et représentation) de la forme des coupes (imagination spatiale)** 	**Les quadrilatères** (carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze) peuvent représenter : - la **vue** (de face, de gauche, de haut, de droite, etc.) de différents prismes, la vue de haut d'une pyramide à base carrée et rectangulaire, la vue de face d'un cylindre - la **coupe** (verticale, horizontale, oblique, etc.) de différents prismes, la coupe horizontale (ou passant par des faces latérales) d'une pyramide à base quadripôle, la coupe verticale ou oblique passant par des bases d'un cylindre - la figure constituant le **développement** des prismes et des pyramides à base carrée et rectangulaire **Le triangle** peut représenter : - la **vue** de face d'une pyramide, d'un cône, la vue de haut d'un tétraèdre, d'un prisme à base triangulaire - la **coupe** (verticale passant par le sommet) d'une pyramide, d'un cône, la coupe horizontale ou passant par les surfaces latérales d'un prisme à bas triangulaire - la figure constituant le développement des pyramides et	- Le **triangle** est un polygone à 3 côtés (à 3 angles) (figure plane fermée composée de 3 segments de droite) (*définition caractéristique*) - Le **quadrilatère** est un polygone à 4 côtés (*définition caractéristique*). - Le carré (B), le rectangle (D), le losange (J), le parallélogramme (K) et le trapèze (N) sont des quadrilatères convexes (O est un quadrilatère concave) ***Définitions caractéristiques des triangles*** - Les triangles ayant tous les côtés de même longueur s'appellent ***équilatéraux* (A et I)** - Les triangles ayant deux côtés de même longueur s'appellent *isocèles* **(C, H et F)** - Les triangles ayant trois côtés de longueur différente s'appellent ***scalènes* (G, L et M)** - Les triangles ayant tous les angles aigus s'appellent ***acutangles* (A, F, I et M)** - Les triangles ayant un angle droit s'appellent ***rectangles* (C et G)** Les triangles ayant un angle obtus s'appellent ***obtusangles* (H et L)** ***Définitions caractéristiques des quadrilatères particuliers*** - Le **carré** est un quadrilatère ayant tous les côtés congrus et les angles	- Le **carré (rectangle)** peut être construit à partir d'une donnée : côté (deux pour le rectangle) par la démarche suivante : segment, segment ⊥ et ≅ (non ≅ pour le rectangle), répéter les deux premières procédures, relier les extrémités des segments - Le **triangle rectangle** peut être construit à partir de deux données (côtés) par les démarches suivantes : a) Tracer un angle droit, reporter les mesures de côtés, relier les extrémités des segments. b) Tracer un angle droit, reporter la mesure d'un côté et par tâtonnement (ou avec compas) trouver le point d'intersection. - Le **carré (rectangle)** possède deux paires de côtés // (2 à 2), les côtés consécutifs sont ⊥; - Le **losange (parallélogramme)** possède deux paires de côtés // (2 à 2) - Le **trapèze** possède une paire de côtés parallèles

Tableau XII. Niveau Descriptif/Analyse (Représentations graphiques et discursives)

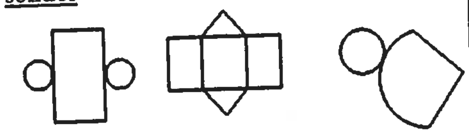
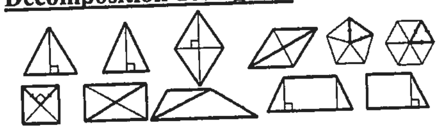
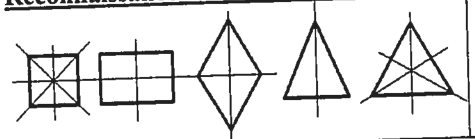
	Visualisation (et représentation) des figures constituant le développement des solides  **Décomposition des figures**  **Reconnaissance des axes de symétrie** 	d'un prisme à base triangulaire - Le **triangle équilatéral** possède 3 axes (ils sont les hauteurs et les bissectrices) - Le **triangle isocèle** possède 1 axe (il est une hauteur et la bissectrice) - Le **carré** possède 4 axes de symétrie - Le **rectangle** possède 2 axes - Le **losange** possède 2 axes (ils sont des diagonales et des bissectrices)	droits - Le **rectangle** est un quadrilatère ayant tous les angles droits - Le **losange** est un quadrilatère ayant tous les côtés congrus - Le **parallélogramme** est un quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles - Le **trapèze** est un quadrilatère ayant une paire de côtés parallèles	- Le **carré** peut être divisé en 2 triangles rectangles isocèles congrus (par sa diagonale) et en 4 triangles rectangles isocèles congrus par ses diagonales - Le **rectangle** peut être divisé en 2 triangles rectangles congrus (par sa diagonale) - Le **losange** peut être divisé en 2 triangles isocèles congrus (par sa diagonale) et en 4 triangles rectangles congrus par ses diagonales - Le **parallélogramme** (**trapèze**) peut être divisé en 2 triangles congrus (non congrus), etc.

Tableau XII-1. Niveau Descriptif/Analyse (Représentations graphiques et discursives)

4.2.3 NIVEAU ABSTRACTION/RELATIONNEL

Le niveau *abstraction/relationnel* est visé par l'enseignement de la géométrie à la fin du primaire. C'est le niveau principal visé par la formation avec l'orientation vers le niveau de déduction. (Il devrait être atteint par tous les futurs maîtres à la fin de la formation.)

À ce niveau, les activités de manipulation et d'observation participent à l'établissement de rapports entre les propriétés de la figure, des figures appartenant à une classe et entre les figures de différentes classes. Par exemple, d'après la mesure de côtés, un triangle peut être *isocèle*, *équilatéral* ou *scalène*. Les triangles équilatéraux sont des éléments de l'ensemble des triangles isocèles, car ils possèdent deux côtés de même longueur. Selon la mesure des angles, le triangle *isocèle* ou *scalène* peut être : *acutangle*, *rectangle*, *obtusangle*; tandis qu'un triangle *équilatéral* est toujours *acutangle*.

Quant aux quadrilatères, les activités de manipulation visent à enrichir le répertoire de représentations (visuelles et verbales), à favoriser le raisonnement dans la conception de nouvelles définitions, la visualisation d'un quadrilatère selon la description inhabituelle de ses propriétés et la recherche de contre-exemple. L'analyse des propriétés communes des carrées et des rectangles; des carrés et des losanges; des carrées, des rectangles, des losanges et des parallélogrammes; et entre tous ces quadrilatères et des trapèzes, permet d'établir les relations d'appartenance de propriétés à des classes différentes et de créer la hiérarchisation des classes.

Les activités de dallage, de partage et de composition des figures et les projets de construction permettent la découverte naturelle de relations métriques et de formules. Par exemple, en sachant que la somme des angles intérieurs d'un triangle (180°), les élèves pourraient déduire celle d'un quadrilatère convexe (360°), parce que chaque quadrilatère peut être décomposé en deux triangles (van Hiele, 1986, p.109).

Au niveau *abstraction/relationnel*, le raisonnement intervient dans la justification des énoncés, du choix des critères et des méthodes en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques et porte plus un caractère *visio-déductif* (Brousseau, 2000, p.2). Selon van Hiele (2.1.1), le produit de ce raisonnement est la réorganisation des connaissances à travers la construction de relations entre les propriétés ou entre les figures. Dans cette réorganisation, les activités de classification, de construction et de résolution de problèmes jouent un rôle essentiel.

4.2.3.1 CLASSIFICATIONS

Selon les recherches étudiées dans notre cadre théorique (2.1.3), les activités de classification permettent de retenir ce qui est essentiel d'un objet, de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation, de structurer les connaissances et de favoriser le développement du raisonnement (Vergnaud, 1990). À partir de ces activités, les différents schémas (de Carroll, à branches et de Venn) et les symboles désignant les objets géométriques (par exemple les lettres majuscules) peuvent être abordés.

Le type de diagramme utilisé dans une activité dépend de l'objectif de cette activité et du niveau de préparation des élèves. Les diagrammes peuvent être une aide à la conceptualisation et à la structuration des concepts pendant une période de l'apprentissage et un moyen de vérification des connaissances apprises.

Le *diagramme de Carroll,* utilisé au primaire, est un tableau à double entrée, où chaque case représente l'intersection des ensembles représentés par la rangée et par la colonne auxquelles elle appartient. Ce type de diagramme est proposé surtout au début des apprentissages où le but qu'on poursuit, en général, est de vérifier l'appartenance d'une propriété aux différentes classes de figures ou l'appartenance d'une classe à d'autres classes (voir la figure 2) :

	Tous les angles sont droits	Tous les côtés sont congrus	Deux paires de côtés //	Une paire de côtés //	Quatre côtés
Carré	✓	✓	✓	✓	✓
Rectangle	✓		✓	✓	✓
Losange		✓	✓	✓	✓
Parallélogramme			✓	✓	✓
Trapèze				✓	✓
Quadrilatère					✓

Figure 2. Classification des quadrilatères (diagramme de Carroll)

En analysant les cases cochées, nous pouvons observer les propriétés communes des quadrilatères, des trapèzes, des parallélogrammes, etc., formuler les définitions de toutes les classes particulières de quadrilatères, aborder la notion de suffisance de propriétés pour définir la classe et de redondance de propriétés dans la définition.

Ce type de diagramme permet de préciser la description des caractéristiques de propriétés des quadrilatères particuliers : côtés (congrus, parallèles), angles (droits, opposés congrus) et diagonales (se coupent en leur milieu, congrues, perpendiculaires), car il favorise le questionnement sur l'association d'une propriété donnée à chacune des classes et sur la détermination du quadrilatère défini par chacune de ses caractéristiques (voir la figure 3) :

Propriétés	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
1. Côtés - parallèles (2 à 2) - congrus (tous) - côtés opposés congrus	✓ - ✓	✓ - ✓	✓ ✓ ✓	✓ ✓ ✓
2. Angles - congrus (tous) - angles opposés congrus	- ✓	✓ ✓	- ✓	✓ ✓
3. Diagonales - se coupent en leur milieu - perpendiculaires - congrues	✓ - -	✓ - ✓	✓ ✓ -	✓ ✓ ✓

Figure 3. Propriétés particulières des quadrilatères

D'une part, les différentes combinaisons de propriétés des diagonales permettent de définir certaines classes de quadrilatères particuliers; d'autre part, elles permettent de travailler la suffisance de propriétés pour définir le quadrilatère et mettent en jeu la recherche du contre-exemple (une des difficultés des étudiants décrites dans la section 1.3.1.) Pour que les contre-exemples apparaissent, les propriétés essentielles des classes, leurs combinaisons habituelles qui déterminent les classes des figures (définitions), la représentation mentale des propriétés et des figures en question doivent être disponibles.

Pour les triangles, le diagramme de Carroll permet de visualiser et de représenter le triangle ayant deux caractéristiques différentes (voir la figure 4) :

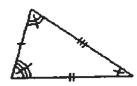
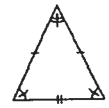
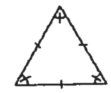
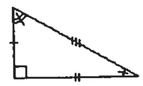
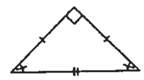
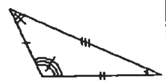
Triangle	scalène	isocèle	équilatéral
acutangle			
rectangle			
obtusangle			

Figure 4. Classification des triangles (diagramme de Carroll)

Cependant, le diagramme de Carroll ne permet pas l'organisation d'un concept sur la base d'une hiérarchisation des classes, ce que réussit le diagramme à branches.

Le *diagramme à branches* répond à différents buts de classification : analyser l'appartenance d'une propriété à une classe d'objets ou établir des relations entre les classes. Il existe différentes façons de représenter une classification des triangles et des quadrilatères selon les critères retenus. Le diagramme à branches suivant permet la classification des triangles selon les angles, l'analyse de relations entre les angles et les côtés du triangle et la détermination du triangle selon les deux caractéristiques (figure 5) :

Triangles
- *angle droit*
  - *aucun côté congru* — *triangle rectangle scalène*
  - *2 côtés congrus* — *triangle rectangle isocèle*
- *angle obtus*
  - *aucun côté congru* — *triangle obtusangle scalène*
  - *2 côtés congrus* — *triangle obtusangle isocèle*
- *3 angles aigus*
  - *aucun côté congru* — *triangle acutangle scalène*
  - *2 côtés congrus* — *triangle acutangle isocèle*
  - *3 côtés congrus* — *triangle équiangle (équilatéral)*

Figure 5. Classification des triangles (diagramme à branches)

Les diagrammes à branches suivants illustrent plutôt l'inclusion de classes (selon la caractéristique de côtés), la division des triangles selon la caractéristique des angles et les relations qui existent entre les classes (figure 6) :

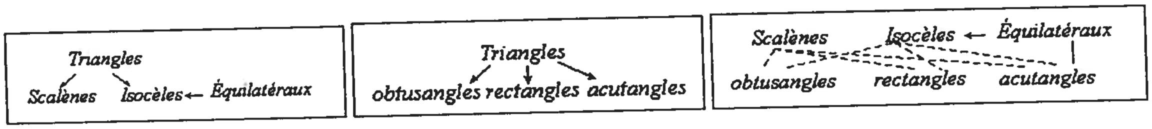


Figure 6. Choix de diagramme à branches (Classification des triangles)

Dans cette analyse, nous voulons nous arrêter sur la relation isocèles/équilatéraux (et plus particulièrement en ce qui concerne le sens de la flèche). Par exemple, la relation exprimée par la flèche suivante : isocèles ← équilatéraux montre que la classe de triangles équilatéraux est incluse dans la classe de triangles isocèles.

Dans les activités de classification des quadrilatères, le choix de différents diagrammes dépend de l'objectif visé et du choix de caractéristiques pour chaque niveau de classification : congruence de côtés, d'angles, parallélisme de côtés, égalité de diagonales, perpendicularité de côtés ou de diagonales (voir les figures 7 et 8) :

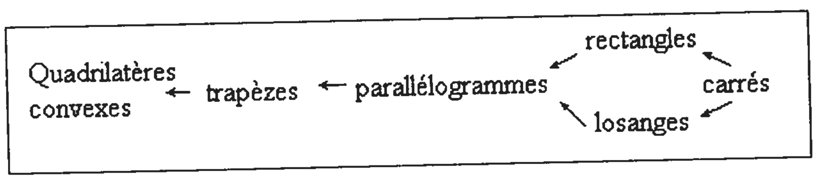


Figure 7. Classification des quadrilatères (diagramme à branches simplifié)

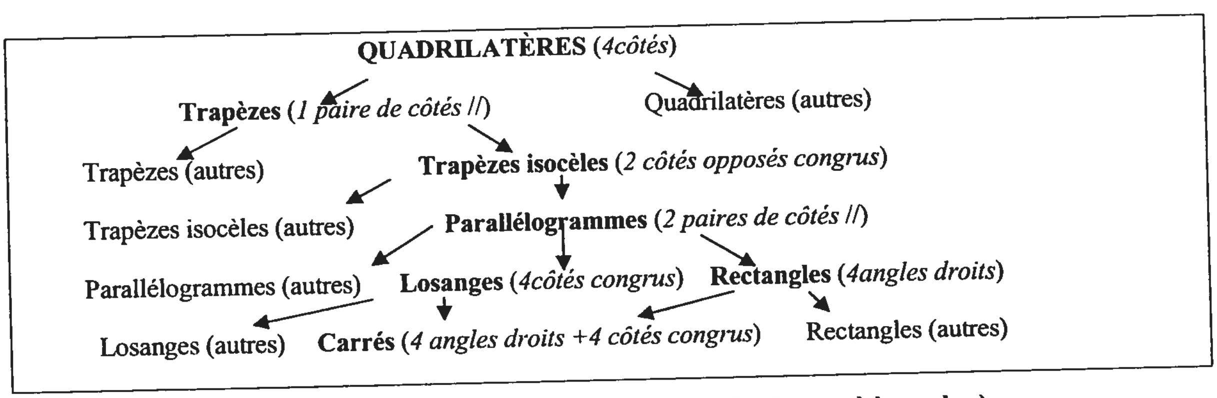
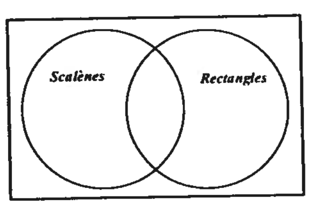


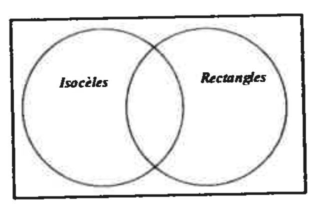
Figure 8. Classification des quadrilatères (diagrammes à branches)

En effet, quel que soit le nombre de caractéristiques demandées pour la classification, l'élève pose le même type de question pour chaque niveau de classification : l'objet géométrique possède-t-il la caractéristique envisagée? Ce type de diagramme permet à l'élève de comprendre la relation particulière entre les classes de quadrilatères : une classe B (par exemple les carrés) appartenant à une classe A (les rectangles) présente une partie de cette classe et il existe d'autres représentants de la classe A (les rectangles non-carrés) auxquels les éléments de la classe B n'appartiennent pas. C'est une caractéristique favorable d'un diagramme à branches qui est absente dans le diagramme de Carroll.

Le *diagramme de Venn-Euler* est une représentation graphique très visuelle d'inclusion de classes de figures géométriques et de classement d'objets ayant des caractéristiques communes. Cependant, son utilisation n'est pas facile pour l'élève du primaire, car même dans son usage le plus simple (deux ensembles avec une intersection), l'élève doit tenir compte de deux critères envisagés par le classement chaque fois qu'il veut placer un objet dans une région donnée, car chaque objet (élément) peut être classé seulement une fois. Pour la classification des triangles, ce type de diagrammes permet de déterminer les triangles ayant deux caractéristiques différentes (ou appartenant à des classes différentes selon les caractéristiques de côtés et d'angles).

Par exemple, la relation entre les triangles isocèles et les triangles rectangles ou entre triangles scalènes et rectangles (voir les diagrammes ci-dessous) :





Si l'activité de classification met en jeu les caractéristiques de côtés et une des caractéristiques d'angles (par exemple « angle droit »), nous pouvons anticiper la représentation suivante (figure 9) :

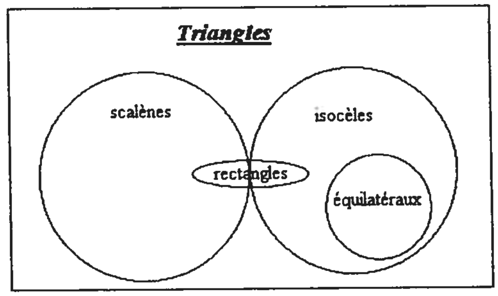


Figure 9. Classification des triangles (diagramme de Venn)

Quant aux quadrilatères, le diagramme de Venn dans sa représentation suivante démontre bien l'inclusion des classes de quadrilatères particuliers (figure 10) :

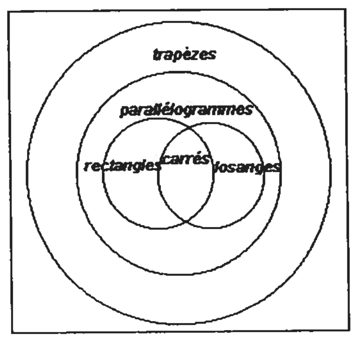


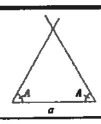
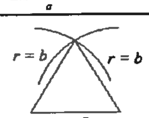
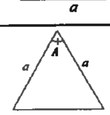
Figure 10. Classification des trapèzes (diagramme de Venn)

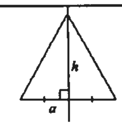
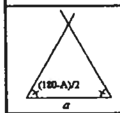
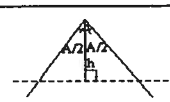
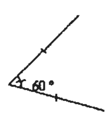
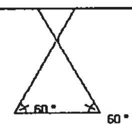
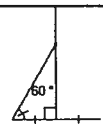
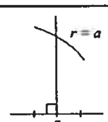
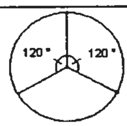
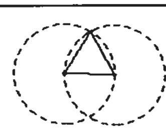
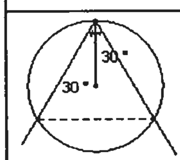
4.2.3.2 CONSTRUCTION DES FIGURES

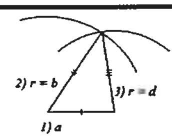
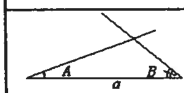
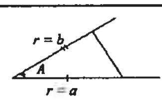
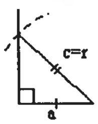
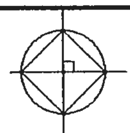
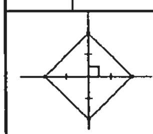
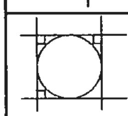
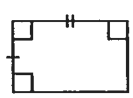
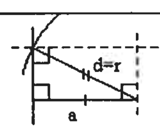
À travers les activités de construction, l'enseignement de la géométrie cherche à favoriser le développement progressif d'une capacité de représentation des figures, du langage géométrique et du raisonnement, des techniques de construction, à rationaliser des actions et à développer les opérations mentales nécessaires à la résolution de problèmes exigeant la construction. Les techniques géométriques (tracer, continuer le tracé, tracer la perpendiculaire, tracer la droite parallèle, mesurer, reporter la mesure, trouver le milieu, inscrire (ou circonscrire), trouver l'ensemble de points (lieu géométrique) équidistants d'un point, de deux ponts, de trois points, de deux côtés, etc.) en utilisant différents outils de construction (la règle, l'équerre, le compas, le rapporteur d'angles) et l'emploi du langage symbolique sont aussi importantes pour le développement des compétences visuelles et langagières des élèves. Elles favorisent la visualisation des relations entre les propriétés et permettent de leur associer plusieurs termes géométriques nouveaux ou découverts dans les activités expérimentales précédentes (de pliage, de partage des figures, etc.) Il s'agit de la coordination de différents types d'activité participant au développement de la pensée géométrique et de la construction des connaissances indispensables pour passer au niveau supérieur (de *déduction formelle)* et à la démonstration des théorèmes visée par l'enseignement de la géométrie au secondaire.

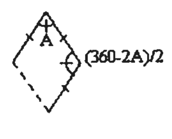
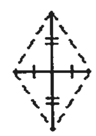
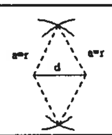
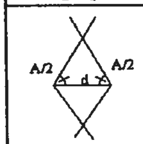
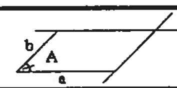
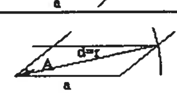
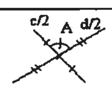
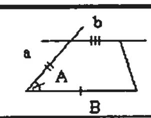
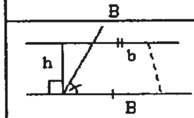
Au niveau *abstraction/relationnel*, les activités de construction en forme de résolution de problèmes peuvent participer à l'établissement de relations entre les figures, à la découverte de relations métriques et à l'application de connaissances et de démarches acquises. Ce genre d'activité participe à la coordination entre la représentation et la description et favorise l'emploi du raisonnement. À ce niveau d'enseignement, nous pouvons observer comment les propriétés découvertes dans les activités d'observation (relation entre deux droites), de manipulation (avec des objets physiques, de partage et de composition des figures, etc.) peuvent être mises en jeu dans la résolution de problèmes géométriques exigeant la construction. Il s'agit de propriétés visuelles marquantes (côtés congrus ou angles congrus), de propriétés de la hauteur (médiane, bissectrice), de diagonales (se coupent en leur milieu, congrues, perpendiculaires, axes de symétrie) et de relations métriques entre les propriétés et entre les figures (triangle équilatéral, carré et cercle). Les constructions du rectangle, du losange, du parallélogramme et du trapèze réfèrent aux techniques et procédés employés pour la construction des triangles et du carré (voir le tableau XIII).

Tableau XIII. **Niveau Abstraction/Relationnel (Construction des figures)**

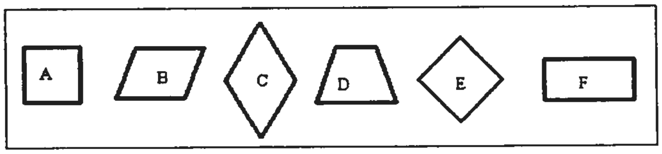
Nom	Dessin	Procédures envisagées	Propriétés utilisées
Triangle isocèle		1. Tracer le segment (base); de chacune des extrémités du segment, reporter l'angle donné (le troisième sommet est le point d'intersection)	Deux angles congrus
		2. Tracer le segment (base); de chacune des extrémités du segment, tracer deux arcs avec la même ouverture du compas; relier le point d'intersection avec les extrémités du segment	Deux côtés congrus
		3. Tracer le segment (côté); reporter l'angle donné; reporter la mesure du côté donné; relier les extrémités des segments	Deux côtés congrus

		4. Tracer le segment (base); tracer la médiatrice; trouver le milieu; tracer la droite perpendiculaire; reporter la mesure de la hauteur sur la médiatrice. (Le point obtenu est le troisième sommet)	Propriété de la hauteur (le point équidistant de deux extrémités du segment se trouve sur la médiatrice)
		5. Tracer le segment (base); calculer l'angle inconnu (180°-A)/2; effectuer la *construction* 2	Mesures de la base (a) et de l'angle opposé (A). (Deux angles congrus)
		6. Tracer le segment (côté); reporter l'angle donné (A); calculer l'angle inconnu (180°-2A); reporter l'angle obtenu d'une autre extrémité du segment	Mesures d'un côté et d'un angle (entre le côté et la base). (Deux angles congrus)
		7. Tracer le segment (hauteur); reporter ½ de la mesure d'angle de chaque côté; droite perpendiculaire à la hauteur (ou calculer l'angle inconnu (180°-A)/2; effectuer la construction précédente)	Mesure de la hauteur et d'un angle opposé à la base (A) (ou angle congrus). (La hauteur est une bissectrice)
Triangle équilatéral		1. Tracer un segment; reporter un angle de 60°; reporter la mesure du segment sur la demi-droite obtenue; relier les extrémités de deux segments (ou faire la rotation du segment à l'angle de 60°)	- Deux côtés congrus - Angle de 60° entre ces côtés
		2. Tracer un segment; de chacune des extrémités, reporter un angle de 60° (le point d'intersection de nouveaux segments est un troisième sommet du triangle).	Congruence de deux angles (ils sont de 60°)
		3. Tracer un segment; tracer la médiatrice; de l'une des extrémités, reporter un angle de 60°. (Le point d'intersection du côté de l'angle avec la médiatrice est un troisième sommet du triangle).	-Angle de 60° entre les côtés - Propriété de la hauteur (médiatrice)
		4. Tracer un segment; tracer la médiatrice; de l'une des extrémité du segment, tracer un arc du rayon égal à la mesure du segment. (Le point d'intersection est le troisième sommet du triangle)	- Propriété de la hauteur (médiatrice) - Congruence de côtés
		5. Tracer un cercle; tracer un rayon (le rayon est un des côtés d'un angle au centre du triangle); reporter un angle de 120° deux fois (ou faire la rotation du rayon à l'angle de 120°).	-Le polygone régulier peut être inscrit dans un cercle. -L'angle au centre est égal à 120°
		6. Tracer un segment; de chacune des extrémités du segment, tracer un cercle du rayon égal à la longueur du segment. (Le point d'intersection est le troisième sommet du triangle)	Trois côtés congrus (rayons des cercles congrus)
		7. Tracer un cercle; tracer un rayon (le rayon est une bissectrice d'un angle du triangle et le point d'intersection du rayon avec le cercle est un sommet du triangle); reporter un angle de 30° de chaque côté du rayon en mettant le point central du rapporteur d'angles sur ce sommet. (Les intersections de nouveaux segments avec le cercle sont les deux autres sommets du triangle).	Le polygone régulier peut être inscrit dans un cercle. La hauteur est une bissectrice.

Triangle scalène		1. Tracer le segment (base); de chacune des extrémités du segment, tracer un arc avec l'ouverture de compas égale à la mesure du deuxième et du troisième côté. (Le point d'intersection de deux arcs est le troisième sommet).	Trois côtés de mesure différente
		2. Tracer le segment (base); de chacune des extrémités du segment reporter un angle de deux angles donnés. (Le point d'intersection est le troisième sommet).	Côté et deux angles
		3. Tracer le segment (base); de l'une des extrémités du segment reporter un angle donné; reporter la mesure du deuxième segment sur la demi-droite obtenue; relier les extrémités de deux segments * La construction du triangle rectangle s'effectue à partir d'un angle droit et le report de mesures du côté et de l'hypoténuse	Deux côtés et angle entre les côtés Angle droit, côté et hypoténuse
Carré		3. Tracer deux droites perpendiculaires; du point d'intersection pris pour le centre, tracer le cercle; relier les points d'intersection du cercle avec les deux droites.	Les diagonales du carré correspondent à deux diamètres (elles se coupent en leur milieu, sont ≅ et ⊥)
		4. Tracer deux droites perpendiculaires; reporter les mêmes mesures d'un point d'intersection; relier les 4 points obtenus (ils sont des sommets).	Les diagonales se coupent en leur milieu, sont congrues et perpendiculaires
		5. Tracer le cercle; tracer la droite tangente; tracer la droite tangente au cercle et perpendiculaire à cette tangente; répéter 2 fois (construction approximative).	Le carré peut être circonscrit à un cercle. Les côtés sont perpendiculaires.
Rectangle		1. Calculer la mesure du côté b P = 2 (a+b), a =P/2 - b (A =ab, b = A/a) Tracer le segment (1e côté), tracer le segment perpendiculaire (2e côté) ; répéter	Mesure d'un côté (b) et P (ou A)
		2. Tracer un segment (1e côté); tracer une droite perpendiculaire passant par l'une des extrémités; d'une autre extrémité du segment avec ouverture du compas égale à la mesure d'une diagonale, tracer un arc ; tracer une droite perpendiculaire à la première droite et passant par le point d'intersection; tracer une droite perpendiculaire au segment	Mesure d'un côté (a) et d'une diagonale (d)
		Calculer la mesure d'une diagonale 2R=D, D=diagonale du rectangle (*construction* 2)	Mesure d'un côté et rayon du cercle circonscrit
Losange		1. *Construction* 3 d'un triangle isocèle; tracer les droites parallèles à chaque côté	Mesures du côté (a) (ou P) et d'angle (A). (Les côtés sont congrus; deux paires de côtés parallèles)

		2. Calculer l'angle inconnu (360-2A)/2; *construction* 3 d'un triangle isocèle; répéter la démarche (ou calculer la mesure du côté a=P/4)	Mesures du côté (a) (ou P) et d'angle (A). (Les côtés sont congrus et les angles opposés sont congrus)
		3. *Construction* 2 d'un carré (ou calculer la mesure de la deuxième diagonale D=2A/d)	Mesures de deux diagonales (ou d'une diagonale (d) et d'aire (A)) (Les diagonales sont perpendiculaires)
		4. Calculer la mesure du côté (a=P/4), *construction* 2 d'un triangle isocèle	Mesure d'une diagonale (d) et du côté (ou P). (Les côtés sont congrus)
		5. À partir d'un angle donné, *construction* 1 d'un triangle isocèle (A/2) ou calculer l'angle inconnu et effectuer la construction	Mesures d'une diagonale (d) et d'un angle (A)
Parallélogramme		1. *Construction* 3 d'un triangle scalène; tracer deux droites parallèles à chaque côté	Mesures de 2 côtés (a et b) et d'un angle (A)
		2. Tracer un segment (côté); de l'une des extrémités, reporter l'angle donné; de l'autre extrémité du segment, tracer une droite parallèle à un côté d'angle; tracer un arc (d=r); tracer une droite parallèle au segment initial	Mesures d'un côté (a), d'une diagonale (d) et d'un angle (A)
		3. Tracer un angle; prolonger les côtés; reporter les moitiés des diagonales; relier les points	Mesures de deux diagonales (c et d) et d'angle entre elles (A)
Trapèze		1. Construction consécutive (base, angle, côté, base//, relier les extrémités)	Mesures de 2 bases, d'un côté et d'un angle
		2. Tracer deux droites perpendiculaires; reporter les mesures de la base (B) et de la h; tracer la droite parallèle à la base (ou perpendiculaire à la h); reporter l'angle donné; du point d'intersection, reporter la mesure de la base (b)	Mesures de 2 bases, d'un angle et de la h

Les recherches analysées (Van Hiele, 1987; Yakimanskaya, 1971; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) font ressortir qu'afin de mettre le processus de conceptualisation en oeuvre, on doit insister beaucoup sur la recherche et la description du maximum de propriétés d'une figure géométrique pour établir une base permettant la déduction des propriétés. Pour que l'élève comprenne le contexte de la consigne, de la tâche, etc., et démontre les comportements attendus, il faut le faire participer à différentes activités qui lui permettent de rencontrer la variété des phénomènes géométriques : position oblique, dessin/concept, validité de la preuve obtenue par le procédé de mesure à la règle, justification par l'exemple concret ou par les données abstraites, etc. Car la même question «Où sont les trapèzes? » posée à différents niveaux d'enseignement pour la collection des quadrilatères suivante engendre des réponses différentes : D (niveau 1), A, B, C, D, E, F (niveau 3).



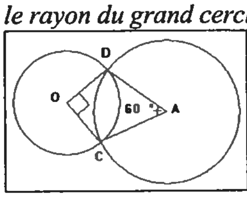
4.2.3.3 RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

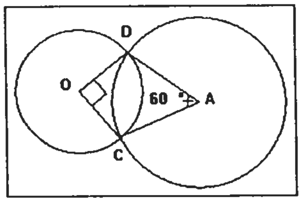
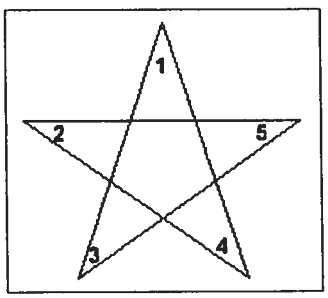
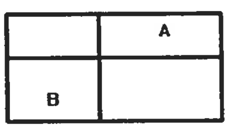
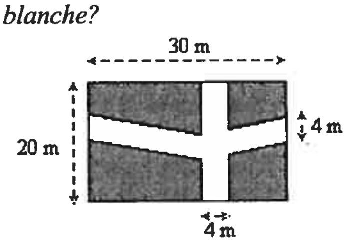
La résolution des problèmes à ce niveau d'enseignement cherche à mettre en jeu (ou à vérifier) les différentes connaissances acquises lors des activités expérimentales et à les coordonner dans les problèmes plus complexes par la reconnaissance (ou l'évocation) des éléments nécessaires à la résolution et par le choix des concepts correspondants.

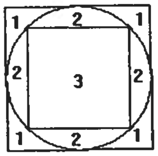
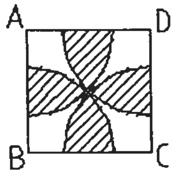
Les recherches étudiées dans notre *Cadre géométrique* (2.1) soulignent que la lecture d'un dessin (analyser la figure, distinguer les éléments, établir les rapports entre eux, etc.) dépend directement de différentes formes et de niveaux des processus de l'analyse, de la synthèse, et de l'abstraction. Cette analyse permet à l'élève d'obtenir à partir du dessin les nouvelles données, qui ne sont pas directement incluses dans la condition du problème.

Nous avons pris quelques problèmes géométriques connus correspondant (selon nous) aux niveaux 3 et 4 du modèle de van Hiele pour analyser et décrire les connaissances géométriques exigées pour leur résolution (voir le Tableau XIV).

Tableau XIV. Niveau Abstraction/Relationnel (Résolution de problèmes)

Problème	Connaissances en jeu	Solution
Par combien faut-il multiplier le rayon du petit cercle pour obtenir le rayon du grand cercle? 	- la visualisation de deux triangles (équilatéral et isocèle rectangle) et d'un élément commun [CD], - la détermination de la relation entre les propriétés de deux triangles (l'hypoténuse du Δ OCD est égale à la mesure du côté du Δ ACD) - l'utilisation de la relation de Pythagore	$\|CD\| = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$ $\|CD\| = R$ $R = r\sqrt{2}$

Problème	Connaissances en jeu	Solution
Par combien faut-il multiplier le rayon du petit cercle pour obtenir le rayon du grand cercle? 	- la visualisation de deux triangles (équilatéral et isocèle rectangle) et d'un élément commun [CD], - la détermination de la relation entre les propriétés de deux triangles (l'hypoténuse du triangle OCD est égale à la mesure du côté du triangle ACD) - l'utilisation de la relation de Pythagore	$\lvert CD\rvert = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$ $\lvert CD\rvert = R$ $R = r\sqrt{2}$
Quelle est la somme (en degrés) de tous les angles indiqués ? 	- la visualisation du pentagone régulier (à l'intérieur ou circonscrit), des triangles isocèles congrus, de congruence des angles 1, 2, 3, 4 et 5, etc. - la visualisation des angles supplémentaires (ou opposés par le sommet), - l'emploi de formules : somme des angles intérieurs du polygone régulier et somme des angles du triangle. (La représentation graphique des éléments nécessaires à la résolution (par exemple, le pentagone circonscrit), la comparaison des angles créés permet de faciliter la recherche de solutions).	L'une des solutions : La somme des angles intérieurs du polygone régulier $\Sigma = (n-2) \cdot 180°$ La mesure d'un angle intérieur du pentagone régulier est égale à 108°. $1 = 180° - 2 \cdot (180° - 108°)$ $= 36°$ $5 \cdot 36° = 180°$
Quelle aire est la plus grande du rectangle A ou B ? 	- Reconnaître les éléments non-tracés nécessaires à la résolution (diagonale), - Reconnaître les éléments congrus (la diagonale divise le rectangle en deux triangles congrus; elle divise les rectangles « blancs » en triangles congrus)	La comparaison de triangles obtenus par la division permet la résolution du problème A=B
Quelle est l'aire de la partie blanche? 	- Décomposer mentalement ou graphiquement des figures planes (La réformation des éléments de la figure (conjonction de polygones hachurés) permet de visualiser : a) le rectangle de dimensions suivantes : L=30-4, l= 20-4 b) ou le rectangle blanc 4x20 et deux parallélogrammes dont leur conjonction permet de visualiser le parallélogramme ayant la largeur de 4 m et la hauteur de (30-4) m	1re solution : $A1 = 20 \cdot 30 = 600$, $A2 = (30 - 4) \cdot (20 - 4) = = 26 \cdot 16 = 416$ $A = 600 - 416 = 184 (m^2)$ 2ème solution : $A1 = 4 \cdot 20 = 80$, $A2 = 4 \cdot (30-4) = 104$ $A = 104 + 80 = 184 (m^2)$

Problème	Connaissances en jeu	Solution
L'aire de quelle surface est la plus grande, 1 ou 2? 	- Visualiser les éléments de la figure : grand carré, cercle et petit carré, - Déterminer les rapports entre le rayon du cercle, le côté d'un grand carré et la diagonale d'un petit carré, - Décrire la solution en utilisant des paramètres abstraits	R = ½ c (grand carré)=1/2 d (petit carré) $A_{cercle} = \pi r^2$ $A_{g.carré} = (2r)^2 = 4r^2$ $A1 = 4r^2 - \pi r^2 = r^2 (4-\pi)$ $A3_{(p.carré)} = 2r^2$ $A2 = \pi r^2 - 2r^2 = r^2 (\pi-2)$ $\pi-2>4-\pi \Rightarrow A2 > A1$
Le côté du carré ABCD mesure 20 cm. Quelle est l'aire de la surface hachurée ? 	- Visualiser des éléments de la figure : carré, quart du disque, quatre parties blanches, - Visualiser deux parties blanches comme la différence entre le carré et les deux quarts du disque - Déterminer les rapports entre le rayon du cercle et la diagonale (Le rayon est égal à la moitie de la diagonale), - Décrire la démarche - (la surface blanche est formée de deux fois la différence de surfaces du carré et de la moitié du disque)	L'une des solutions : A1 du carré = 20x20=400 A2 (1/2 du disque) = $½ \pi r^2$ $AC = \sqrt{AD^2+AB^2} = \sqrt{800}$, $r = 1/2\sqrt{800}$. A2= ½ (3.14 •800/4)= = ½•628=314 A1-A2 = 400-314=86 A=2•86(cm²)

En analysant la description des savoirs nécessaires à la résolution, nous pouvons observer qu'elle correspond aux objectifs géométriques visés par l'enseignement de la géométrie : développement de la visualisation, du langage, du raisonnement et leur coordination et à notre description des savoirs géométriques de formation (voir les annexes 8 et 9).

Dans les tableaux qui suivent (Tableaux XV et XVI), nous présentons la description brève du contenu correspondant au niveau *abstraction/relationnel* analysé dans cette section.

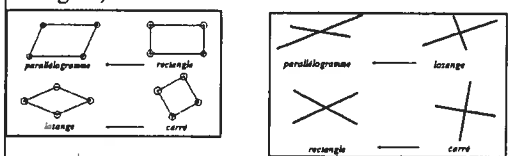
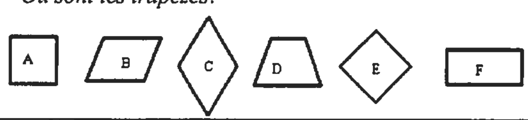
3	*Situations de manipulation*	*Situations d'observation*	*Situations de construction*
Abstraction / Relationnel	- Manipulation des modèles physiques permettant de **dégager les relations** entre les propriétés et entre les figures, de concevoir les définitions lexicales, de rechercher les contre-exemples et d'aborder la question de suffisance de propriétés pour déterminer la figure)   - **Mesurer** les contours de polygones. **Dégager** la relation de la mesure des contours de polygones particuliers. **Justifier** - **Dégager** la relation de la mesure de la surface du rectangle. (Activités de dallage de différentes surfaces et de partage graphique des figures en figures connues permettent de **dégager** la relation entre le rectangle et le triangle et entre les autres polygones). *Le même genre d'activités amène à découvrir la mesure du contour et de la surface du disque. - **Dégager** (par l'expérimentation) la relation de Pythagore - **Dégager** (par l'expérimentation) la relation sur la somme des angles d'un triangle et d'un quadrilatère	- **Observer** la collection de triangles. **Comparer** les figures **et identifier** un triangle qui n'appartient pas à la collection (triangle scalène). **Nommer** les classes de triangles *isocèles et scalènes.* **Comparer** les triangles isocèles et **nommer** la propriété commune (deux côtés ≅s) et celles qui les distinguent (angles). **Dégager** les différentes représentations de triangles isocèles (acutangles, rectangles et obtusangles). *(***Attirer** l'attention sur le cas du triangle équilatéral). **Analyser** les représentations des triangles scalènes (acutangles, rectangles et obtusangles). **Classifier** les triangles. **Justifier** le critère de classification (selon les côtés, selon les angles ou selon une propriété de côtés et une propriété d'angle) - **Observer** la collection de carrés et de rectangles. **Comparer** les figures **et identifier** une propriété commune (angles droits). (**Introduire** la classe de *rectangles.*) **Classifier** les rectangles. - **Observer** la collection de carrés et de losanges. **Comparer** les figures **et identifier** une propriété commune (côtés ≅). (**Introduire** la classe de *losanges).* **Classifier** les losanges (inclusion). - **Observer** la collection de carrés, rectangles, losanges et parallélogrammes. **Comparer** les figures **et identifier** une propriété commune (2 paires de côtés //). (**Introduire** la classe de *parallélogrammes).* **Classifier** les parallélogrammes (inclusion et hiérarchisation). - **Observer** la collection de carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes et trapèzes. **Comparer** les figures **et identifier** une propriété commune (1paire de côtés //). (**Introduire** la classe de *trapèzes).* **Classifier** les trapèzes (inclusion et hiérarchisation) : choix du diagramme, justification des critères de classification) - **Observer** la collection de différents polygones réguliers; **Rechercher** la propriété commune (congruence de côtés et d'angles). **Nommer** les polygones (à 3 jusqu'à 11 côtés)	- **Construire** les figures planes selon les données concrètes et abstraites. **Décrire** la démarche. **Rechercher** le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure unique. - **Découvrir** les techniques de recherche et de construction du (des) point(s) équidistant(s) d'un point donné (de deux points, de trois points, de deux côtés d'un angle, de trois côtés du triangle), des figures inscrites et circonscrites. **Employer** les termes : *milieu, médiatrice, bissectrice, médiane* - **Observer** le changement de forme du parallélogramme. **Identifier** la propriété qui ne change pas. **Formuler** les conditions permettant d'obtenir le losange, le rectangle, le carré (Environnement de Cabri) **Construire** le développement de différents polyèdres (vérifier les techniques de construction : segments ≅, //, ⊥, report d'angle, etc.) - **Partager** le cercle en parties congrues. **Dégager** la relation entre cercle et polygone régulier. **Dégager** la relation sur le nombre d'axes de symétrie du polygone régulier. - **Partager** (graphiquement) les polygones réguliers en triangles à partir du centre. **Observer** les angles du polygone régulier; **Dégager** la relation permettant le calcul d'angle au centre et d'angle au sommet.
	Résolution de problèmes *(exemples permettant de mettre en jeu la variété des représentations, les processus mentaux et les démarches géométriques)*		
	- *Un parallélogramme dont les diagonales sont congrues et perpendiculaires est :* ☐ un parallélogramme ☐ un losange ☐ un rectangle ☐ un carré - *Trouver l'aire d'un polygone*	-Vrai ou Faux? *Un carré est un parallélogramme* - *Où sont les trapèzes?*  	- *Comment peut-on inscrire le carré dans un cercle?* (Décrire la démarche) - *À partir de la lecture du dessin, faire la liste des énoncés et des relations entre les éléments de la figure* 

Tableau XV. **Niveau Abstraction/Relationnel (Description des activités)**

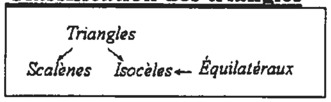
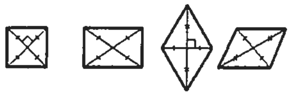
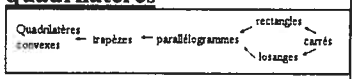
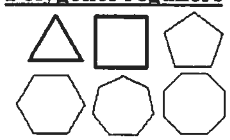
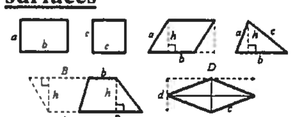
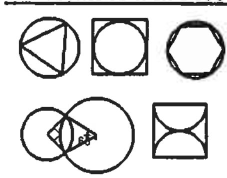
3	*Registres figural, symbolique, graphique*	*Registre discursif (langage naturel et raisonnement) et symbolique (indication des relations entre des propriétés)*		
		Situation de manipulation	***Situation d'observation***	***Situation de construction***
Abstraction/Relationnel	**Classification des triangles**  **Propriétés des diagonales**  **Classification des quadrilatères**  **Polygones réguliers**  **Mesure des contours et des surfaces**  **Visualisation des éléments nécessaires à la résolution** 	- Le triangle **isocèle** (ou scalène) peut être acutangle, rectangle ou obtusangle - Le triangle **équilatéral** est un triangle isocèle. Il est toujours acutangle ***Définitions conceptuo-lexicales*** - Le **triangle équilatéral** est un triangle isocèle ayant un angle de 60°. - Le **carré** est un rectangle ayant des côtés ≅ - Le **carré** est un losange ayant des angles droits - Le **losange** est un parallélogramme ayant des diagonales ⊥ - Le **rectangle** est un parallélogramme ayant des diagonales congrues ***Descriptions des propriétés des diagonales*** - Les diagonales du **carré** se coupent en leur milieu, sont ≅ et sont ⊥ - Les diagonales du **rectangle** se coupent en leur milieu et , sont ≅ - Les diagonales du **losange** se coupent en leur milieu et sont ⊥ - Les diagonales du **parallélogramme** se coupent en leur milieu **Mesure** - Le périmètre du triangle **équilatéral** est P=3a, du triangle **isocèle** est P=2a+b - Le périmètre du **carré** et du **losange** est P=4a - Le périmètre du **rectangle** et du **parallélogramme** est P=2 (a+b) - L'aire du **rectangle** est A=a x b - L'aire du **parallélogramme** est A= b x h - L'aire du **triangle** est A=½ b x h - L'aire du **carré** est $A=a^2$ -L'aire du **losange** est A= ½ D x d - L'aire du **trapèze** est A= ½ (B+b) x h	- Les triangles peuvent être classés selon les côtés (isocèles (équilatéral est un cas particulier) et scalènes) et selon les angles (acutangles, rectangles et obtusangles) - Le **carré** est un rectangle (4 angles droits), un losange (4 côtés ≅), un parallélogramme (2 paires de côtés //), un trapèze (1 paire de //) - Le **rectangle** et le **losange** sont des parallélogrammes (2 paires de côtés //) et des trapèzes (1 paire de //) - Le **parallélogramme** est un trapèze (1 paire de //) - Le **trapèze** peut être isocèle, scalène ou rectangle - Le triangle **équilatéral** et le **carré** sont des **polygones réguliers** (côtés ≅ et angles ≅)	- Le **polygone régulier** (triangle équilatéral et carré) peut être inscrit dans un cercle ou circonscrit à un cercle - Le triangle **équilatéral** peut être construit à partir d'une donnée (côté, h, P, rayon du cercle inscrit ou circonscrit, P ou A du cercle inscrit ou circonscrit, etc.) - Le triangle **isocèle** peut être construit à partir de deux (base et angle, base et côté, base et h, côté et angle, A et h, A et base, etc.) - Le triangle **scalène** peut être construit à partir de trois données (3 côtés; 2 côtés et angle; 2 angles et côté, etc.) - Le **carré** peut être construit à partir d'une donnée (côté, diagonale, P, A, rayon du cercle inscrit ou circonscrit, A ou C du cercle inscrit ou circonscrit) - Le **rectangle** peut être construit à partir de deux données (2 côtés; côté et diagonale; côté et P; côté et A; côté et rayon du cercle circonscrit; etc.) - Le **losange** peut être construit à partir de deux données (côté et angle; diagonale et angle; côté et A; diagonale et A; etc.) - Le **parallélogramme** peut être construit à partir de trois données (2 côtés et angle; côté, diagonale et angle; deux diagonales et angle entre elles; côté, angle et A; etc.) - Le **trapèze** peut être construit à partir de quatre données (2 bases, angle et h; 2 bases, côté et angle; base, angle, côté et h; etc.)

Tableau XVI. <u>**Niveau Abstraction/Relationnel (Représentations graphiques et discursives des figures)**</u>

4.3. ANALYSES DES PROGRAMMES

L'analyse des programmes porte sur la description des compétences essentielles visées par le ministère d'éducation et du contenu géométrique. Dans la section 4.3.1, nous utilisons notre cadre théorique pour préciser le sens que nous attribuons à chaque terme employé dans cette description. La section 4.3.2 est consacrée à l'analyse de la description du contenu notionnel.

4.3.1 ANALYSES DE LA DESCRIPTION DES COMPÉTENCES

Dans notre *Cadre géométrique* (2.1), nous avons étudié plusieurs recherches qui soulignent le rôle de la visualisation, du langage géométrique, du raisonnement dans la construction des concepts et dans la résolution des problèmes géométriques. Nous avons mis en parallèle ces orientations avec la description des compétences essentielles visées par le Ministère d'Éducation dans la partie mathématique de programme de formation (voir le Tableau XVII).

Tableau XVII. <u>Tableau comparatif (Éléments essentiels de développement de la pensée géométrique / Description des compétences MEQ, 2002)</u>

Éléments essentiels de développement de la pensée géométrique ressortis du cadre géométrique (2.1)	Programme de formation de l'école québécoise 2002 (enseignement primaire)
1. <u>Visualisation</u> - Reconnaître des représentations (physiques et graphiques)* des figures (de dimensions 3, 2, 1 et 0), - Reconnaître des éléments visuels* de la figure (de dimensions 3, 2, 1 et 0) (abstraction) - Visualiser (et représenter graphiquement ou à l'aide des outils) des figures à partir de leurs noms ou de la description de leurs propriétés** (imagination spatiale) - Repérer la ressemblance ou la dissemblance des objets observés (comparaison visuelle) - Visualiser des propriétés (non-décrites et non-tracées) appartenant à une figure qui sont nécessaires à la résolution (imagination spatiale) * *représentations habituelles et inhabituelles* * *positions habituelles et non* ***définitions caractéristiques, conceptuo-lexicales et constructives*	N'est pas évoquée

Éléments essentiels de développement de la pensée géométrique ressortis du cadre géométrique (2.1)	**PFEQ 2002**
2. **Langage** - Employer le langage géométrique dans : - l'identification des figures (de dimensions 3, 2, 1 et 0, - la description des figures (ensemble de propriétés découvertes dans les situations d'apprentissage), - la définition (caractéristique) des figures - la description des démarches - Employer le langage symbolique dans la production des énoncés et des messages écrits ($\angle$, //, $\perp$, $\cong$, π, h(hauteur), (a,b,c,d- côtés), P (périmètre), A(aire), C(circonférence), D (diamètre), R(rayon), etc.)	3. Communiquer à l'aide du langage mathématique - S'approprier le vocabulaire mathématique - Interpréter ou produire des messages à caractère mathématique - Établir des liens entre le langage mathématique et le langage courant
3. **Raisonnement** - Employer (choisir et appliquer) les concepts et les processus appropriés à la tâche, au problème, à la situation, - Justifier l'énoncé, le résultat, la démarche en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques (géométriques) ou en trouvant le contre-exemple - Dégager des relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de l'observation, de manipulation ou de l'analyse des données - Créer un système hiérarchisé de classes (formuler des relations d'inclusion)	2. Raisonnement à l'aide de concepts et de processus mathématiques - Cerner les éléments de la situation mathématique - Mobiliser des concepts et des processus mathématiques appropriés à la situation - Appliquer des processus mathématiques appropriés à la situation - Justifier des actions ou des énoncés en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques
4. **Résolution des problèmes géométriques** - Coordination entre la reconnaissance (ou visualisation) des éléments nécessaires pour la résolution (éléments constitutifs de la figure et les rapports entre eux) et l'emploi (choisir et appliquer) des concepts correspondants	1. Résolution d'une situation-problème - Décoder les éléments de la situation-problème - Modéliser la situation-problème - Appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution - Valider la solution - Partager l'information relative à la solution

En comparant les descriptions de deux colonnes, nous pouvons remarquer des similitudes, mais aussi des différences importantes. La description du langage et du raisonnement présentée dans la colonne de gauche rend précise ce qui est attendu par les programmes au niveau de compétences visées par l'enseignement de la géométrie. Même si elle ne spécifie pas à quel type de raisonnement réfèrent ses composantes, nous pouvons reconnaître les démarches permettant leur emploi. Par exemple, la composante « Employer (choisir et appliquer) les concepts et les processus appropriés à la tâche, au problème, à la situation » qui correspond aux trois premiers éléments de la compétence 2 « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques » peut faire appel au raisonnement par l'analogie (en employant les mêmes processus dans la situation semblable) ou au raisonnement déductif (dans la construction des figures ou dans la résolution des problèmes). Dans celle de « Dégager des relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de l'observation, de manipulation ou de l'analyse des données », nous pouvons reconnaître les activités de la découverte des relations métriques qui emploient la démarche inductive.

Les différences entre ces deux descriptions sont plus considérables au niveau de la visualisation et de la résolution de problèmes. Par exemple, la visualisation, élément important dans l'apprentissage géométrique, et en particulier dans le développement du langage, du raisonnement et dans la résolution des problèmes géométriques, n'est pas évoquée par les programmes. La résolution de problèmes géométriques fait appel à la visualisation, au raisonnement, aux concepts et processus géométriques et exige leur coordination. Quant à l'apprentissage par la résolution des situations-problèmes, qui se présente comme la compétence essentielle « Résoudre une situation-problème» des nouveaux programmes ministériels, la description présentée par le programme correspond plus à l'approche qui peut être appliquée pour l'organisation des apprentissages. Dans ce contexte, nous pouvons faire des associations entre la description de ses composantes (décoder les éléments de la situation-problème, modéliser la situation-problème, appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution, valider la solution, partager l'information relative à la solution) et les dialectiques d'action, de formulation, de validation proposées par la *Théorie des situations didactiques* de Brousseau (voir la section 2.2.2), mais aussi avec la description des étapes de la résolution de problèmes proposée par Polya (voir la section 2.2.1.1).

Cette voie privilégiée de l'apprentissage par la résolution des situations-problèmes rejoint l'orientation essentielle de la didactique des mathématiques. Cependant, la description présentée par le programme ne mentionne pas un élément important de l'approche didactique : les situations-problèmes doivent permettre aux élèves de « *mettre en oeuvre des choix ou des actions* » <u>sans que l'enseignant précise la méthode</u> ou fournisse des informations sur l'existence de situation de référence (selon la description d'une situation-problème présentée par Brousseau (1991)). En visant les apprentissages des élèves, les activités devraient se préoccuper de leur développement conceptuel et de la construction des connaissances.

4.3.2 ANALYSE DE LA DESCRIPTION DU CONTENU NOTIONNEL DU PFEQ (2002)

L'analyse du contenu géométrique des nouveaux programmes ministériels (*Savoirs essentiels* qui font partie de l'« ensemble de ressources ») nous amène à constater l'absence d'indications précises sur les relations qui lient concept et processus et sur leur incidence dans la progression des apprentissages. Sans prise en compte explicite de la progression systématique dans l'apprentissage des concepts pour atteindre un niveau plus haut de pensée géométrique, l'application du programme exige des interventions didactiques dans le cadre de formation à l'enseignement. Cela nous a amenée à proposer des modifications et des ajouts de savoirs essentiels[43] nécessaires au développement géométrique d'un élève. Les modifications apportées portent sur quatre aspects : la continuité et la logique des apprentissages, la liste des savoirs visés, la précision des descriptions et l'homogénéité de description.

1. *Continuité et logique des apprentissages*

Prenons, par exemple, le premier élément de la section « Solides » : *Comparaison et construction : prisme, pyramide, boule, cylindre, cône.* Lier ces deux activités (comparaison et construction) ne permet pas de voir qu'elles ont des enjeux différents et que chacune possède sa propre séquence de développement (voir la section 4.2). Pour ce qui est de la comparaison, au début des apprentissages, on observe, compare, décrit les différents solides selon leur apparence, la forme de leurs faces latérales et leurs bases, on introduit les noms de solides : cube, prisme à base carrée, pyramide à base carrée, cône, cylindre, sphère, etc. Ensuite, on les regroupe selon leurs caractéristiques communes et celles qui les distinguent; puis, on nomme les classes (par exemple : polyèdres et corps ronds, ou prismes et pyramides, etc.)

---

[43] Toutes les modifications apportées sont en caractères gras.

Quant à la construction des solides, cette activité dans ses différentes formes met en jeu différentes connaissances géométriques. Par exemple, la construction des solides à l'aide de pâte à modeler travaille la forme de solides; celle avec les pailles et la pâte à modeler amène à l'introduction de nouveaux termes : arêtes et sommets (la question de l'impossibilité de construire les corps ronds avec les pailles s'impose et amène à l'identification d'une propriété qui les distingue de polyèdres) et peut mettre en jeu la demande du matériel (nombre de pailles, grandeur) nécessaire pour la construction. La construction de développement de solides met en jeu les propriétés de figures planes qui constituent les faces planes et courbes de solides. Si le programme est muet sur ces progressions, il revient à la formation didactique d'outiller le futur enseignant en conséquence.

2. *Liste des savoirs*:

- Par exemple, l'élément « *Identification des figures planes* » est présent dans la description des savoirs essentiels, mais celui des solides est absent.

- Le savoir de reconnaissance des objets géométriques n'apparaît dans le contenu prescrit que pour le développement de polyèdres convexes. Quant à l'identification des figures planes telles que le parallélogramme, le trapèze, les polygones concaves et à la reconnaissance des solides (selon leurs projections, selon leurs empreintes, etc.), des mouvements de déplacement, de réflexion, de changement de la direction, etc., ces activités, qui sont importantes pour le développement de la visualisation (et de l'imagination spatiale) de l'élève, sont absentes du contenu des programmes.

- L'étude des angles qui est indispensable pour l'identification, la classification et la construction des figures est absente.

3. *Précision des descriptions :*

- Dans la description « *Construction de lignes parallèles, perpendiculaires* », nous ajoutons « *construction de segments, de segments congrus, d'angles : aigu, obtus* », car ces éléments sont des préalables pour la construction des polygones (carré, losange, triangle isocèle, triangle équilatéral, etc.);

- Dans la *« Description des triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle scalène, triangle équilatéral »,* les étapes de comparaison, d'identification de segments congrus, d'angles congrus, d'angles : droit, aigus ou obtus sont absentes.
- Dans la « *Classification des quadrilatères* » et « *Classification des triangles* », il faut préciser de quel type de classification il s'agit, car les futurs enseignants n'ont pas une idée claire sur les activités de classification.
- Quant à la construction des figures planes, il faut préciser le type d'activité (représentation (dessin général, à la main), reproduction d'un dessin, construction d'une figure) et l'associer au cycle d'enseignement. Ces activités ont chacune des enjeux différents : connaissance de la forme (et de propriétés) et de relations entre les propriétés, report des mesures, coordination de la représentation et de la description, développement des techniques de tracés associées à un vocabulaire géométrique, etc.

4. *Homogénéité des descriptions* :

La forme de descriptions des savoirs essentiels n'est pas homogène. On y retrouve la description en termes de processus (comparaison, description, classification, etc.), des attributs (nombre de faces, base) ou encore « Étude du cercle ». Nous avons tâché d'uniformiser la description des savoirs selon les concepts (solides, figures planes, etc.) et selon les processus.

Les modifications apportées au contenu des programmes, sont présentées dans le tableau de l'Annexe 6, où la première colonne correspond à la description des savoirs essentiels géométriques tirées d'un programme ministériel, et la deuxième colonne correspond à notre description[44]. Ces savoirs, et dans cet ordre (en général), sont mis en jeu dans les activités d'analyse de la pratique scolaire et dans le contexte de préparation à l'enseignement de la géométrie au primaire dans le cadre de notre formation.

L'analyse des aptitudes visuelles, langagières et des savoir-faire nécessaires pour le développement géométrique, des compétences visées par le programme ministériel et du

[44] Toutes les modifications apportées sont en caractères gras.

contenu notionnel nous permet de les associer, selon la progression, aux niveaux de développement de la pensée géométrique de l'élève : visuel, descriptif/analytique et abstraction/relationnel (selon le modèle de van Hiele, voir la section 2.1.1). Cette division selon les niveaux peut être associée aux trois cycles de l'enseignement primaire. Elle est présentée à l'annexe 7.

Il convient de rappeler que cette appellation (visuel, descriptif/analytique et abstraction/relationnel) spécifie le niveau où se situe l'action essentielle de l'élève (reconnaître, décrire, établir des relations) et le raisonnement employé. Le développement de la visualisation et du langage ne s'arrête pas aux niveaux visuel et descriptif.

4.4 ANALYSE DE DIFFÉRENTES RESSOURCES POUR L'ENSEIGNEMENT

L'analyse de différentes collections de manuels scolaires et de différents outils d'enseignement (guides, dictionnaires, lexiques mathématiques, etc.) qui peuvent être consultés par les enseignants nous a amenée à choisir plusieurs extraits permettant d'attirer l'attention du futur maître sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage et de favoriser l'élaboration de critères d'analyse. Nous pensons également que les savoirs d'analyse développés peuvent participer à l'étude de la pertinence des activités présentes dans les nouveaux manuels et à la conception d'activités originales par les étudiants.

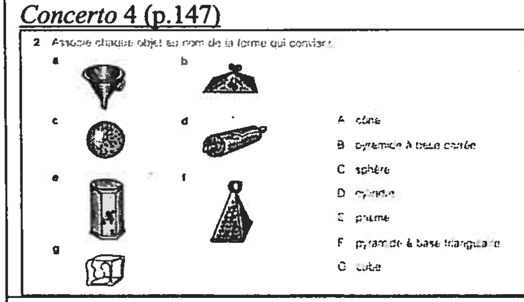
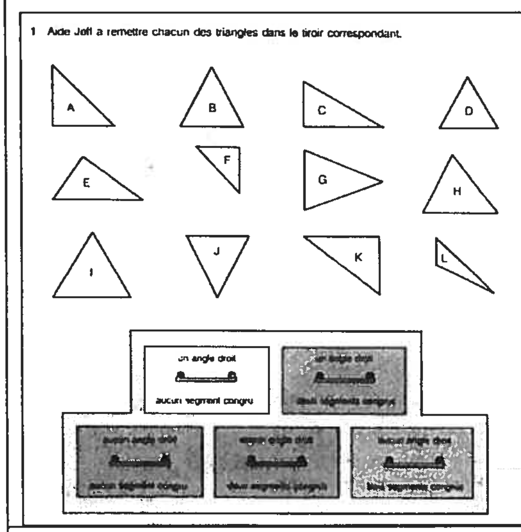
Dans le cadre de cette thèse, nous présentons seulement l'analyse des extraits portant sur les notions du triangle et du quadrilatère. La description présentée dans les sections suivantes est en lien avec les objectifs de la formation; elle est centrée plus sur les aspects visuels, langagiers et conceptuels de la géométrie.

4.4.1 BUT DE L'ACTIVITÉ

L'analyse de manuels scolaires nous livre les informations concernant l'approche générale employée par le manuel, le contenu des activités et des liens entre les activités. Notre impression générale est que les activités géométriques des manuels analysés essayent de travailler davantage l'expérience de l'élève que l'intuition et le raisonnement. Dans certaines activités, nous retrouvons le phénomène de la « méthode active » signalé par plusieurs chercheurs (voir entre autres Giordan, 1987) où l'ordre et la nature des questions posées par l'activité déterminent à l'avance des cheminements précis vers un savoir visé, en laissant de côté les conceptions et les procédures propres à l'élève. Dans notre analyse de la structure des activités, nous ne nous intéressons qu'à la dimension qui concerne le point de vue de la construction des connaissances. Les apprentissages organisés par l'activité doivent laisser une large autonomie à l'élève et être tels qu'il puisse s'identifier à la démarche d'interrogation, de recherche et de réflexion lorsqu'il aborde un problème. Les étapes de l'activité doivent suivre une progression logique où l'élève peut utiliser les résultats de l'étape précédente aux étapes suivantes. L'activité doit permettre à l'élève la recherche, la communication des résultats et leur validation (voir la section 2.2.2).

L'analyse de chaque situation concrète selon les buts qu'elle vise et selon la continuité des apprentissages soulève plusieurs questions qui demandent d'intervenir : changer l'ordre des étapes, supprimer certaines étapes ou en ajouter de nouvelles afin de favoriser la construction de connaissances. Certaines situations essayent de guider l'élève étape par étape vers la connaissance et d'expliquer presque directement la connaissance en jeu. Ce guidage peut s'exprimer par les consignes ordonnées, par la réponse attendue incorporée dans une consigne ou dans une représentation graphique (voir le tableau XVIII, XVIX ou l'analyse de l'activité dans la section 5.2.1.1).

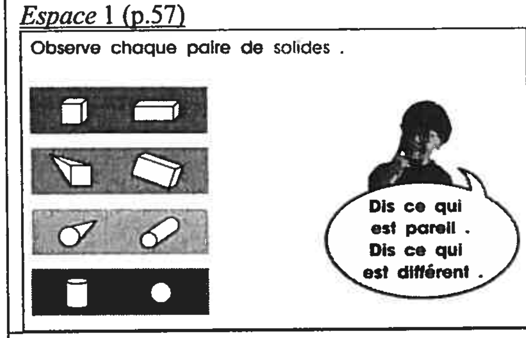
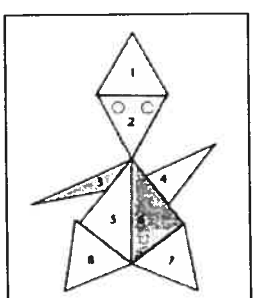
Tableau XVIII. Analyse des extraits (But)

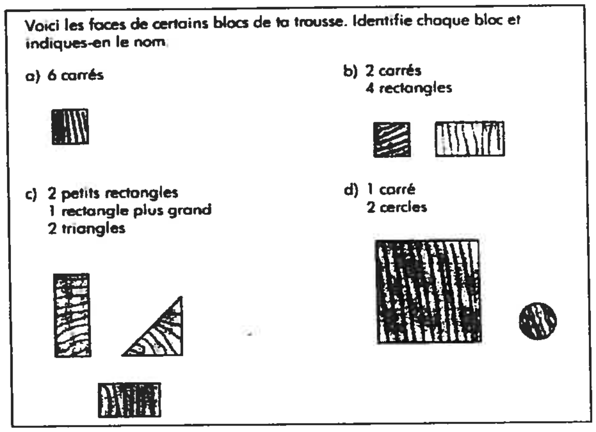
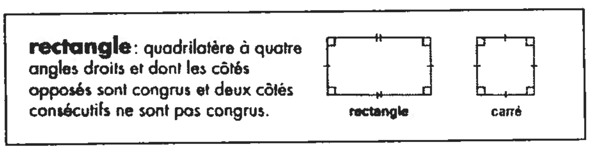
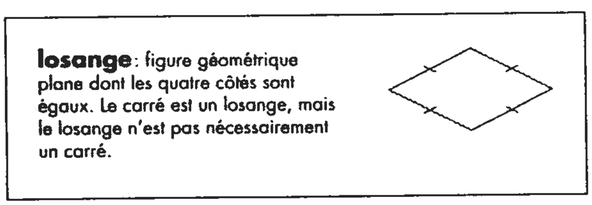
Extraits	Commentaires
Concerto 4 (p.147)  	**- le phénomène de « guidage »** : l'objet ***a*** est associé à un solide A, l'objet b – à un solide B, etc. **- la représentation graphique** utilisée pose des difficultés de reconnaissance de l'objet **b** comme une pyramide à base carrée et de l'objet **f** comme une pyramide à base triangulaire (car l'objet réel n'est jamais de cette forme).
Mathématique 6 (p.86)  	**- la variété de triangles, les positions « inhabituelles »** : A (isocèle rectangle), E (scalène rectangle), F (scalène rectangle), G (isocèle acutangle), H (isocèle acutangle), J (isocèle acutangle), K (scalène rectangle), L (scalène obtusangle), **- l'aspect conceptuel de représentation de la classification** (trois classes ne peuvent pas être nommées; le triangle ayant « trois côtés congrus » n'est jamais rectangle; les triangles obtusangles et acutangles ne sont pas mentionnés, **- le but de la classification** (selon lequel va dépendre la démarche et le choix du diagramme. Par exemple, ressortir les différents types de triangles pour les décrire et nommer, ou classifier les triangles selon les côtés, etc.)
Défi Mathématique 6 (p.221) **Les carrés pointés** 1. Reproduis ce carré pointé puis découpe les cinq pièces qui le composent. Utilise la fiche complémentaire Géométrie IV. Place toutes ces pièces de manière à former : a) un rectangle qui n'est pas un carré; b) un triangle rectangle; c) un parallélogramme non rectangle; d) un trapèze isocèle non parallélogramme; e) un trapèze rectangle non parallélogramme; f) un hexagone convexe et symétrique; g) un pentagone concave; h) un hexagone concave et symétrique. (J'en connais au moins trois...) Dessine toutes tes solutions sur du papier pointé. 	**- la diversité de termes employés** : « *trapèzes isocèles* », « *trapèze rectangle* », « *hexagone convexe et symétrique* », « *hexagone concave et symétrique* », « *pentagone concave* ». **- Le but visé** : Si l'activité vise qu'en composant la figure en question, l'élève fasse chaque fois référence au cas particulier d'un concept (par exemple, a) *un rectangle qui n'est pas un carré* ou e) *un trapèze rectangle non parallélogramme*), il faut que les activités précédentes préparent un cadre de référence permettant sa réalisation. (En général, le but principal des exercices de ce genre est de développer l'évocation d'une représentation de la figure selon le nom. Ce qui est déjà une tâche très complexe).

4.4.2 CHOIX DE REPRÉSENTATIONS

Bien que les représentations graphiques des figures utilisées dans certaines activités soient variées, cette variété n'est pas toujours mise au profit dans l'activité géométrique. Dans les activités de classification, le choix de figures à classer et de leurs représentations est parfois très limité. Si l'on étudie l'aspect visuel des activités, celui-ci doit souvent être précisé pour le développement de la perception des propriétés à partir de l'observation et de l'expérimentation et conduire à la reconnaissance des figures et de leurs propriétés : il convient tantôt d'ajouter certaines figures à l'échantillon de figures présentes, tantôt de modifier les dimensions ou encore de préciser le terme géométrique accompagnant une figure. Aussi devons-nous être attentifs aux représentations graphiques employées par les manuels qui ne permettent pas la reconnaissance d'une figure ou qui font preuve de guidage excessif. (Voir le Tableau XIX)

Tableau XIX. Analyse des extraits (Choix de représentations)

Extraits	Commentaires
Espace 1 (p.57) 	- l'**angle de projection d'un solide** (Les auteurs du manuel veulent absolument que l'élève reconnaisse la base circulaire du cône et du cylindre et la base carrée de la pyramide et déforment par conséquent la représentation du solide)
Bâtimath 5 (1991, p. 295) 	- **la différence peu visible de dimensions** d'une figure (les petites différences de mesures de côtés (1-2 mm) de triangles 2, 7 les distinguent de triangles équilatéraux), - **Le but de la classification** (Le choix de triangles à classer est relativement « pauvre » : scalène rectangle (5, 6) et obtusangle (3), isocèle acutangle (2, 4, 7) et équilatéral (1 et 8)).

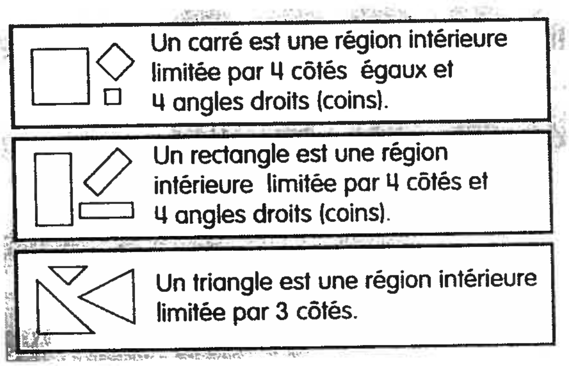
Extraits	**Commentaires**
Défi Mathématique 4 (p.157)  Voici les faces de certains blocs de ta trousse. Identifie chaque bloc et indiques-en le nom. a) 6 carrés b) 2 carrés 4 rectangles c) 2 petits rectangles 1 rectangle plus grand 2 triangles d) 1 carré 2 cercles	**- l'ambiguïté des représentations** Les faces du bloc **d** sont représentées par le carré et le disque. Nous connaissons bien la trousse de blocs qui sont utilisés dans plusieurs activités de *Défi Mathématique* : ce sont de blocs du bois (dont la texture est bien représentée sur le dessin). Alors s'il s'agit de faces des blocs, le carré ne peut pas représenter la face du cylindre, parce que le cylindre a deux faces planes (disques) et une surface courbe (cylindrique). Au cas où il s'agirait de projection des faces des solides, les dimensions du carré et du disque ne permettent pas la visualisation d'un solide). Si, par contre, nous travaillons le développement des solides, le terme « faces » doit être remplacé par le « développement » (ou par les « figures planes » permettant la construction des solides du papier dans l'activité de bricolage).
« *Lexique mathématique* » (Vincent, 1994, p. 152)  **rectangle** : quadrilatère à quatre angles droits et dont les côtés opposés sont congrus et deux côtés consécutifs ne sont pas congrus. 	**- la pertinence de la définition** (Il est étonnant de trouver dans la source destinée aux élèves du secondaire la définition qui distingue le rectangle du carré, car le concept du rectangle est présenté ici par la description de représentation graphique habituelle du rectangle. Alors, la construction du concept du rectangle est prévue à partir de quatrième année du primaire).
« *Lexique mathématique* » (p. 105)  **losange** : figure géométrique plane dont les quatre côtés sont égaux. Le carré est un losange, mais le losange n'est pas nécessairement un carré.	**- la pertinence de la représentation graphique** (Il s'agit dans cette définition d'un concept du losange, cependant la figure qui se trouve à droit n'est qu'une des représentations possibles du losange (ou la représentation habituelle)). **- le glissement de vocabulaire** dans le deuxième énoncé et, en particulier, dans sa deuxième partie « *mais le losange n'est pas nécessairement un carré* ». Cette expression qui est souvent employée par les manuels dans l'étude du losange (et non pas d'autres quadrilatères) ne fait pas la distinction entre le cas particulier et le cas général. Est-ce le losange est un carré? – Non. La classe de losanges se compose de différents quadrilatères ayant des côtés égaux : qui ne possèdent pas des angles droits (*losanges)* et qui possèdent des angles droits (*carrés*). Alors, le carré n'est jamais le losange représenté sur le dessin, de même ce losange n'est jamais un carré.

4.4.3 ANALYSE DES ÉNONCÉS

Nous nous centrons dans cette analyse sur l'emploi des termes, des consignes et des définitions utilisés par les manuels scolaires.

- *TERMES*

En analysant les descriptions langagières qui accompagnent les dessins, nous avons observé un certain glissement de vocabulaire et la présence d'ambiguïtés correspondantes. Par exemple, les figures planes y sont représentées tantôt par le tracé, tantôt par le dessin coloré, alors que les noms associés à ces dessins demeurent les mêmes : carré, rectangle, triangle, cercle, etc. Pour la notion du cercle, nous distinguons le tracé appelé « cercle » et sa région intérieure appelée « disque ». Nous utilisons donc l'expression « aire du disque » en recherchant la mesure de la surface délimitée par le cercle. Qu'en est-il des autres figures planes? Est-ce que cette distinction est importante? Le manuel *Concerto* 2 tente cette distinction : les polygones tels que carré, rectangle, triangle sont présentés en tant que « région intérieure » limitée par les côtés et les angles.[45] D'autres utilisent la même appellation pour le contour et pour la région intérieure.



Quant à nous, nous faisons le choix de faire plutôt la distinction entre le nom du polygone et le nom de faces de polyèdres où les faces planes seront appelées « face triangulaire », « face rectangulaire », etc., car les solides sont délimités aussi par des surfaces courbes qui ne peuvent pas être appelées par le nom de figures planes. Si nous nous centrons sur le

[45] Cependant, ce manuel ne nomme pas les contours de ces figures, comme on le fait pour le contour du disque.

développement des aptitudes visuelles des élèves, il est plus important, selon nous, de mettre la figure dans les différentes activités où l'élève peut l'associer à la face d'un solide, à la projection de différents solides, à l'empreinte que le solide laisse dans la pâte à modeler, à son modèle plastique dans le jeu de « Tangram » ou à celui du papier dans la construction du développement du solide, etc. Comme cela était souligné dans le cadre théorique par Fuys, Geddes et Tischler (1988), ces activités sont importantes et utiles pour la construction des concepts géométriques, particulièrement au niveau visuel (du modèle de van Hiele).

Nous retrouvons aussi plusieurs exemples de vocabulaire défectueux dans l'emploi des termes suivants : « parfaitement symétrique » (comme si une figure pouvait être imparfaitement symétrique; elle l'est ou elle ne l'est pas). On trouvera un jugement subjectif, par exemple lorsqu'on parlera d'un « quadrilatère parfait » pour le carré. Où alors on trouvera des confusions : la « forme » et la « taille », la « droite » et le « segment de droite », la « direction » et le « sens » (pour la translation), « pareil » et « semblable », le « triangle » pour la description de la surface latérale développée du cône, « le rectangle » pour la surface latérale développée du cylindre, etc.

- Consignes

À l'école primaire, la majorité des énoncés se présentent sous forme de questions de type « Qui suis-je? », « À quel ensemble appartient le triangle A? » qui demandent à l'élève de justifier sa réponse ou son travail de recherche. Cependant, il existe des consignes de type « Que remarques-tu? » (les plus utilisées par les manuels *Concerto* et *Espace*) accompagnées d'un dessin qui peuvent déboucher sur des considérations non prévues par l'enseignant; et il y a le risque que les élèves n'y trouvent pas le défi mathématique visé par l'activité.

Les questions de type « Qui suis-je? », « De quelles figures s'agit-il? » suivies de la description d'une propriété sont très présentes dans les manuels scolaires. En général, elles constituent la définition d'une figure; une seule réponse alors est possible. Cependant, elles énoncent parfois une propriété et demandent alors une recherche des figures ayant la propriété nommée et plusieurs réponses sont possibles. Par exemple : La question « Une de mes faces est courbe. Qui suis-je? » prévoit les réponses « cylindre » et « cône ».

L'anticipation du maximum de réponses possibles de la part des élèves exige le développement de cette habitude chez les futurs maîtres.

On doit ainsi être attentif à la façon dont la question est posée en référence au niveau de l'enseignement. Donnons quelques exemples de différents contextes pour la même question :

Qui suis-je?

1. *Je suis un quadrilatère et mes côtés opposés sont parallèles. Je suis certainement :*_______________
2. *Je suis un quadrilatère et j'ai deux paires de côtés parallèles. Je m'appelle :*

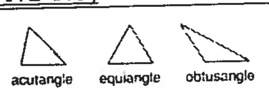
   ____
3. *Je suis un quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles. Qui suis-je?*

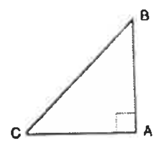
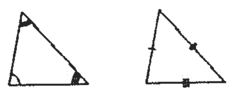
   ____

Les termes « certainement », « s'appelle », etc. donnent un statut de définition aux propositions, alors une seule réponse est possible. La manière dont la troisième question est posée rend acceptables de la part des élèves plusieurs réponses possibles : *parallélogramme, rectangle, losange, carré.* À ce niveau, l'élève a appris rechercher le maximum de propriétés appartenant à une figure donnée ou le maximum de figures possédant la propriété nommée. Il peut employer le questionnement suivant : *Quel quadrilatère possède cette propriété?* « *Je peux être carré, rectangle, losange et parallélogramme* »; ils possèdent tous deux paires de côtés parallèles.

- *ÉNONCÉS ET DÉFINITIONS*

Tableau XX. Analyse des extraits (Énoncés)

Extraits	**Commentaires**
<u>*Défi Mathématique* 4 (p.238)</u> « *Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent* ***triangles scalènes*** ».	- Cette définition est fausse parce que le triangle scalène peut avoir une caractéristique particulière : par exemple *angle droit*, ce qui le fait appartenir à la classe des triangles rectangles.
<u>« *Lexique mathématique* » (p. 172-173)</u> **triangle**. polygone à trois côtés et à trois angles. symbole : △  	- **La redondance de la définition** (le « *polygone à trois côtés* » a nécessairement trois angles).

Extraits	Commentaires
*Lexique mathématique pour l'élève (*Beauregard, 1990, p. 92) • Dans tout triangle, aux angles congrus sont opposés des côtés congrus. Un triangle équiangle est donc aussi équilatéral et un triangle isoangle est toujours isocèle. • Un triangle peut être à la fois isocèle et acutangle, équilatéral et acutangle et quelquefois scalène et acutangle. • Un triangle peut aussi être isocèle et rectangle à la fois. Le triangle ABC ci-contre a un angle de 90°, l'angle A, et deux de ses côtés sont congrus. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  	- **<u>la précision du vocabulaire</u>** : a) *Le triangle <u>peut</u> être à la fois équilatéral et acutangle* (Le mot « peut » pose un problème, car le triangle équilatéral est toujours acutangle). *b)Le triangle peut être <u>quelques fois</u> scalène et acutangle* (Vrai. Cependant, l'expression « *quelques fois* » est mal employée, car le triangle scalène peut être acutangle de la même façon que le triangle isocèle).
« *Lexique mathématique* » (Vincent, 1994, p. 172-173) **triangle acutangle** : polygone dont les trois angles sont aigus (< 90°) et de mesurent différentes. Le triangle acutangle est aussi un triangle scalène.  	- la définition est fausse, car le triangle acutangle peut avoir les mesures égales des angles. (C'est le cas des triangles acutangles isocèle et équilatéral).
triangle scalène : triangle dont les trois côtés sont de longueurs différentes. Le triangle scalène est aussi un triangle acutangle.  	- La deuxième affirmation de cet extrait : « *triangle scalène est aussi un triangle acutangle* » est fausse, car le triangle scalène peut être aussi obtusangle ou rectangle.
<u>« Le Robert » (Éd. Du Club France Loisirs, Paris, 1997).</u> QUELCONQUE adj. 1. adj. indéf. - *N'importe lequel, quel qu'il soit.* Un point *quelconque* du cercle. - Qui n'a aucune propriété particulière. *Triangle quelconque* ⇒ ***scalène.***	- **<u>La précision du vocabulaire</u>** Pour le terme « quelconque », nous retenons la première partie de définition du Robert : « *n'importe lequel, quel qu'il soit* ». Par exemple : *Prenons un triangle quelconque. Démontrons que la somme de ses angles intérieurs est égale à 180°*. Ça veut dire que nous nous intéressons à un triangle « *n'importe lequel, quel qu'il soit* » ou à « *tout* » triangle sans nous préoccuper de la particularité de ses côtés ou de ses angles. Cependant, ce triangle peut être isocèle, équilatéral, etc. Dans ce sens, la deuxième partie de la définition citée : « Qui n'a aucune propriété particulière. *Triangle quelconque⇒* ***scalène***» est fausse, parce que le triangle scalène peut avoir une propriété particulière, celle d'avoir un angle droit.

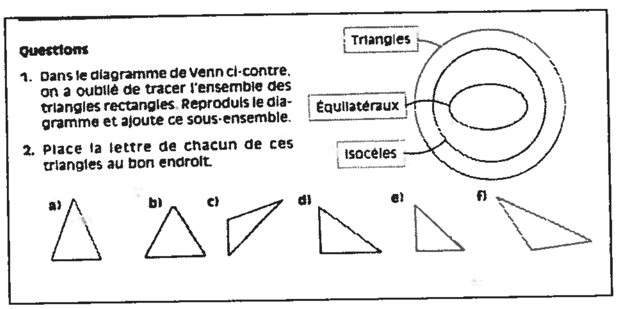
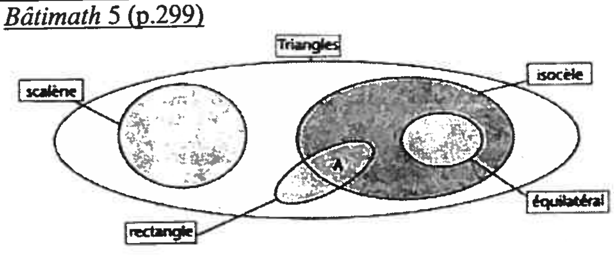
Extraits	Commentaires
Mathématique (exercices et résolution de problèmes) 2 secondaire, cahier de l'élève (p.111) Qui suis-je ? a) Je suis un quadrilatère ayant les caractéristiques suivantes : - 4 angles droits - diagonales congrues et se coupant perpendiculairement en leur milieu Réponse : ____________	- **La redondance de propriétés dans la description** (Nous pouvons considérer cet énoncé comme une définition, car une seule réponse est possible. Son analyse montre qu'elle est redondante, car le quadrilatère ayant des diagonales congrues et se coupant perpendiculairement en leur milieu est déjà un carré. Si nous voulons garder la première propriété « *4 angles droits* » (qui détermine un rectangle), pour éviter la redondance, nous pouvons modifier la deuxième propriété de façon suivante « *diagonales se coupent à angle droit* ». Nous supprimons « *diagonales congrues* » et « se *coupant en leur milieu* » parce que les diagonales du rectangle sont congrues et se coupent en leur milieu.
Mathématique (exercices et résolution de problèmes) 2 secondaire, cahier de l'élève (p.111) 2. Vrai ou faux ? a) Un carré est un trapèze. ________ b) Un losange est un parallélogramme. ________ c) Un trapèze est un rectangle. ________ d) Un parallélogramme est un rectangle. ________ e) Un trapèze est un losange. ________ f) Un carré est un losange. ________ g) Un losange est un trapèze. ________ h) Un rectangle est un carré. ________ i) Un carré est un rectangle. ________	- **Les difficultés anticipées :** L'expression « Un carré est un trapèze » est inhabituelle pour les étudiants québécois. (Ils sont plus à l'aise avec les propositions suivantes « Tout (chaque) carré est un trapèze ».) Selon l'expérience des années précédentes, les questions 2c, 2d, 2e et 2h posent des problèmes langagiers; les étudiants ont tendance à répondre « Vrai » parce qu'« un rectangle» ne signifie pas pour eux « tout rectangle» et ils interprètent un énoncé de la façon suivante : « un rectangle peut être un carré s'il a des côtés congrus».

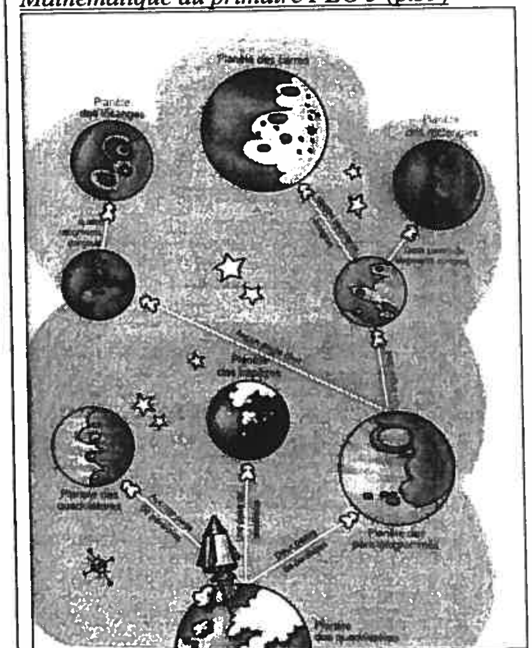
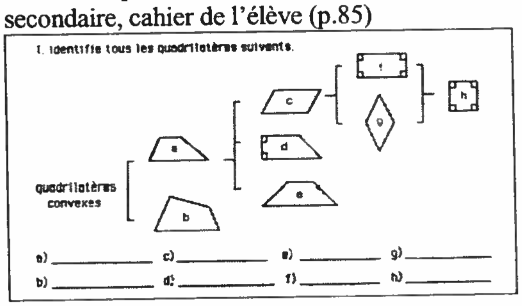
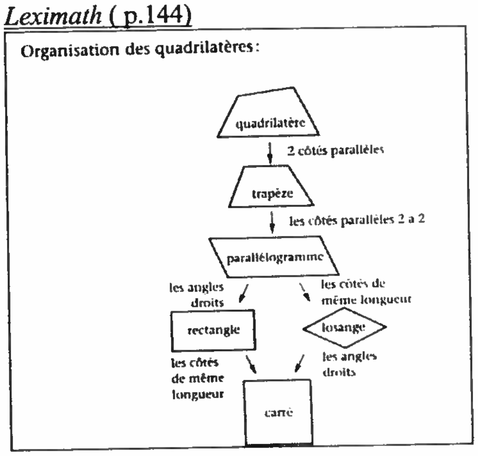
4.4.4 PERTINENCE DE SCHÉMAS DE CLASSIFICATION

À l'école primaire, la nécessité de raisonnement se présente plus dans des situations de classification où l'élève a l'occasion de découvrir et d'observer des relations des objets géométriques. Ces activités participent à une structuration des connaissances, à la construction de concepts géométriques, permettent de faire le choix, de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation, et par cela favorisent le développement de la pensée logique et du raisonnement.

L'absence des activités de recherche d'une propriété commune pour déterminer le nom d'une classe ou celles de reconnaissance des figures dans leurs positions inhabituelles, de détermination du nom d'un triangle selon la description de leurs propriétés, explique en partie la faiblesse des aptitudes visuelles et langagières des étudiants. Les propriétés des triangles telles qu'« angle aigu », « angle obtus » sont très rarement étudiées. À partir de la quatrième année, les différentes classifications sont proposées en tant que fait géométrique établi (Voir la classification des quadrilatères dans le manuel *Défi Mathématique* 4, Tableau XXI). Avec une telle approche, ce qu'il reste à l'élève est de mémoriser les énoncés. Il n'est pas donc étonnant que les étudiants n'aient pas une image claire des ensembles des triangles, des quadrilatères et de leurs différents représentants (voir la section 1.2.2).

Tableau XXI. Analyse des extraits (Classification)

Extraits	Commentaires
Défi Mathématique 4 (p. 238).  	**- La représentation du schéma** Le diagramme proposé pour l'analyse classifie les triangles selon leurs côtés. Il est demandé d'ajouter l'ensemble des triangles rectangles (caractéristique d'angle). Cet ensemble doit « chevaucher » entre les deux ensembles de triangles : *isocèles* et *scalènes*, car le triangle rectangle peut être isocèle et scalène selon la caractéristique des côtés. Cependant, cette schématisation ne permet pas une bonne visualisation de l'ensemble des triangles scalènes, car il n'est pas désigné par le schéma, mais fait partie des triangles à classer. En plaçant les triangles **c** et **d** dans un grand ensemble « Triangles », les élèves de quatrième année (et les futurs maîtres aussi), appellent souvent le grand cercle « Triangles scalènes », ce qui rend erronée la représentation d'inclusion de classes des triangles, car la classe des triangles isocèles (et équilatéraux) n'est pas un sous-ensemble de la classe des triangles scalènes.
Bâtimath 5 (p.299)  	**La pertinence du schéma** (Le diagramme utilise deux caractéristiques de classification des triangles : selon les côtés (scalène, isocèle, équilatéral) et selon les angles (rectangle). En analysant ce schéma, nous nous interrogeons sur les représentants de la classe « scalène » (Scalènes obtusangles et acutangles?) et de la classe « rectangle » (Scalènes rectangles?). En effet, l'ensemble « rectangle » doit chevaucher les classes « scalènes » et « isocèles ».

Extraits	Commentaires
Mathématique au primaire FLG 5 (p.39) 	- **La pertinence du schéma** (L'analyse de relations entre les classes des quadrilatères exige certaines modifications : - la classe des parallélogrammes doit être incluse dans la classe des trapèzes, - la classe des carrés doit être incluse dans la classe des rectangles, - la classe des carrés doit être incluse dans la classe des losanges.
Mathématique (exercices et résolution de problèmes) 2 secondaire, cahier de l'élève (p.85)  *Leximath* (p.144)  	Pour les deux schémas : - **Les représentations graphiques de quadrilatères** comme représentants de classes (Les dessins utilisés par ce schéma ne peuvent pas représenter des classes; ils sont des éléments de classes. (Par exemple, le trapèze scalène est l'un des éléments de la classe de trapèzes et ne peut pas représenter toute la classe, car la classe de parallélogrammes ne fait pas partie de trapèzes scalènes.) La représentation de la classification dépendra d'une caractéristique qu'on choisit pour chaque niveau de la classification (côtés ou angles) (voir l'analyse du contenu, section 4.2.3.1). - **Le sens de la flèche de classification** Si le diagramme veut démontrer l'inclusion de classes (et non pas la division), le sens de flèches doit être inversé. Quand on choisit la direction qui va d'une classe plus large vers une classe moins large, il faut nommer d'autres classes en lesquelles se divise la classe donnée.

De ce parcours rapide, ressortent les questions suivantes qui pourront servir à orienter l'analyse par les étudiants des activités des manuels :

- *Quel est le but principal de cette situation? Quels sont les buts secondaires?*
- *Quelles sont les connaissances géométriques en jeu dans cette situation?*
- *L'ordre des étapes est-il logique pour favoriser la réalisation de l'activité?*
- *Quel est le choix des figures, des grandeurs et des représentations graphiques utilisées dans cette activité ? Ces choix sont-ils pertinents? Les figures peuvent-elles induire des difficultés de lecture et d'interprétation? Si oui, lesquelles?*
- *Le vocabulaire géométrique utilisé est-il exact, suffisant pour accomplir la tâche proposée?*
- *Les consignes sont-elles pertinentes pour favoriser la réalisation de la tâche?*
- *Les définitions et les schémas sont-ils précis (de point de vue mathématique) et pertinents (de point de vue du développement conceptuel de l'élève)?*

Cette analyse nous a permis en même temps de repérer les activités et les extraits où les différents savoirs géométriques peuvent être mis en jeu et guider l'étudiant en formation à développer, réorganiser, consolider les connaissances géométriques, développer les savoirs d'analyse et le regard critique visés par la formation didactique. Les phénomènes identifiés dans les extraits analysés représentent un élément du milieu didactique mis en place dans le cadre de formation.

5 CONCEPTION DE LA FORMATION

En tenant compte des analyses préalables, du choix de contenu et des cadres théorique et géométrique étudié, nous expliquons comment s'est organisée l'étape de la conception de la formation et des différentes situations. Le dispositif de la formation didactique à l'enseignement de la géométrie représente une structure qui réunit les objectives de la formation, la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique, la multiplicité et la coordination des registres de représentation et les différentes activités qui permettent à atteindre les objectifs visés. L'approche principale que nous utilisons pour le développement conceptuel du futur enseignant s'inscrit dans la continuité des apprentissages par le biais des situations qui ont des liens entre elles et où le futur enseignant peut rencontrer le même concept dans ses différentes représentations et employer les mêmes stratégies et méthodes pour l'apprentissage des différentes notions. Il s'agit d'une ingénierie de formation qui guide l'organisation et le déroulement des différentes ingénieries à l'intérieur du projet de la formation. Dans le but d'atteindre les objectifs de la formation (évolution professionnelle du futur maître), les différentes activités ont comme objectifs spécifiques l'évolution de la visualisation et du langage, le développement du raisonnement, la conceptualisation ou l'emploi de ces différentes compétences dans la résolution des problèmes géométriques, dans l'analyse des activités et dans la conception de nouvelles activités.

Pour la conception de la formation et des différentes situations, nous avons eu à déterminer :

- le choix des activités géométriques qui favorisent le développement :
    - de la visualisation (reconnaissance des représentations physiques et graphiques habituelles et inhabituelles dans leurs positions habituelles et inhabituelles, visualisation des figures selon leur nom et selon la description (habituelle ou non) de leurs propriétés géométriques)
    - du langage (utilisation du langage précis dans les descriptions des propriétés des figures, définitions, descriptions des démarches, etc.; utilisation des symboles pour décrire les propriétés; utilisation des diagrammes pour classifier les figures)
    - du raisonnement (créer un système hiérarchisé de classes, formuler les relations d'inclusion, définir la figure (selon les nouvelles propriétés découvertes dans la situation), dégager des relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de

l'analyse des données, trouver le contre-exemple, justifier l'énoncé, le résultat, la démarche, etc.)
  - des compétences de résolution des problèmes (coordination entre reconnaissance (ou choix) des éléments nécessaires pour la résolution et emploi des concepts correspondants)
- le choix des activités qui favorisent la réflexion sur l'organisation des apprentissages :
  - des extraits à analyser et à modifier portant sur les éléments géométriques cités ci-haut,
  - des extraits à analyser et à modifier visant le développement progressif des questions d'analyse d'une activité mathématique
  - des activités permettant de découvrir et d'appliquer les savoirs didactiques visés
  - des activités qui emploient les différentes démarches géométriques (observation, manipulation, construction) et les différents environnements (papier/crayon, informatique, physique)
- le choix de l'organisation du travail en formation (transfert progressif des responsabilités)

Le dispositif de formation tient compte du contenu géométrique du primaire (4.2) et de la formation (3.4.1), du contenu didactique choisi (3.4.2), de la progression des apprentissages et des enjeux de situation de la formation : difficultés des étudiants dans l'apprentissage de la géométrie (4.1), nouveaux programmes ministériels (4.3), temps alloué à la formation (42h) et demandes exprimées par les étudiants au début de formation (session d'automne 2001) (Annexe 3).

Dans la section suivante, nous décrivons la démarche entreprise dans la formation. Les différents types de situation et les objectifs visés par chacune sont expliqués dans la section 5.2. Nous présentons des exemples pour chaque type de situation en illustrant la coordination des savoirs géométriques et didactiques visée par la formation. L'analyse a priori du dispositif de recherche est présentée dans la section 5.3.

5.1 DÉMARCHE

Du point de vue cognitif, le dispositif de formation cherche à mobiliser les connaissances antérieures des étudiants pour développer les nouvelles connaissances et pour employer ces connaissances dans la résolution des problèmes, dans l'analyse des activités et dans la conception de nouvelles activités. Au début, par l'intermédiaire du test, nous avons évoqué les conceptions des enseignants concernant les différents éléments de l'apprentissage (représentation graphique de la figure, langage, définition, connaissances des propriétés, des relations, etc.). Les questions posées par ce test permettent aux étudiants de prendre conscience de l'état de leurs connaissances géométriques. Quant à nous, cela nous amène de façon naturelle à envisager auprès des étudiants les pistes de travail futur.

Nos futurs enseignants sont des étudiants universitaires de 4^{e} année et ils possèdent déjà certaines connaissances sur les contenus géométriques. Par conséquent, dans le cadre du dispositif de la formation, nous avons débuté par des activités qui traitent les figures et leurs propriétés correspondant aux deux premiers niveaux (*visuel* et *descriptif/analytique)* du modèle de van Hiele. Cette première étape vise la construction d'un ensemble de ressources pour pouvoir le mettre en jeu dans les activités plus conceptuelles. Aux niveaux *visuel* et *descriptif/analytique*, nous avons cherché à rendre clairs les éléments géométriques de base, les démarches, les techniques et les opérations mentales nécessaires associées à un vocabulaire géométrique. Nous avons commencé par l'identification et la description des figures et leurs propriétés et par la visualisation des figures selon la description de leurs propriétés. Dans le cadre de chaque ingénierie (solides, triangles, quadrilatères particuliers, polygones réguliers, cercle, etc.), nous avons proposé les activités d'observation, de manipulation et de construction qui mettent en jeu la reconnaissance des propriétés visuelles marquantes (forme, nombre de faces et de côtés, égalité ou inégalité de mesures de côtés et d'angles, côtés parallèles et perpendiculaires, congruence des figures, invariance des propriétés). Ces activités, qui constituent le curriculum de l'enseignement de la géométrie au primaire, permettent aussi le développement de la visualisation (reconnaissance et évocation des différentes figures, anticipation de maximum de réponses possibles) et du langage (utiliser le maximum de propriétés pour décrire la figure) des futurs enseignants. Elles contenaient presque toujours des éléments de l'enseignement du niveau supérieur (l'échantillon des figures, les techniques, les définitions) ou/et les savoirs didactiques particuliers.

Pour favoriser la structuration des connaissances, nous mettons en jeu les relations entre les propriétés et entre les figures, ainsi que les processus et les démarches géométriques, en leur faisant construire les liens nécessaires entre les « morceaux » de ces connaissances (niveau *abstraction/relationnel*).

Au niveau *abstraction/relationnel,* à travers les différentes activités de construction, d'analyse du vocabulaire et de classification, nous avons cherché à impliquer les étudiants dans un véritable processus de construction des connaissances, où ils pouvaient prendre conscience de la nature épistémologique des notions, de processus de pensée et contrôler consciemment leurs apprentissages, donc s'évaluer conceptuellement. Notre objectif était de dépasser un comportement habituel de l'étudiant qui repose sur la mémorisation. Le but principal de cette étape est de développer les opérations mentales qui permettent la systématisation des connaissances par la mise en relation des différentes informations portant sur la notion, de construire un ensemble de ressources pour l'interprétation des données, l'anticipation des actions possibles et pour le choix de l'action à partir duquel le futur enseignant peut traiter les nouvelles situations. Pour vérifier l'emploi de connaissances et de démarches acquises, nous avons mis sur pied des situations où le futur enseignant doit mobiliser son savoir pour pouvoir l'opérationnaliser. Nous avons proposé l'analyse des activités tirées des manuels scolaires (dont l'influence sur la pratique enseignante est importante) ou des exemples concrets de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire (nos observations des enseignants expérimentés et des stagiaires) qui contiennent des problèmes spécifiques de l'organisation de l'enseignement de la géométrie ou de transposition du contenu géométrique. Le futur enseignant était donc mis en contexte d'application d'un savoir géométrique afin d'être en mesure de reconnaître sa valeur explicative et son utilité pour traiter la situation d'enseignement. La résolution de ces problèmes (l'identification d'un élément problématique et sa modification) avait pour but d'approfondir la connaissance géométrique des futurs enseignants et d'élaborer un nouveau savoir de nature didactique.

À chaque niveau visé du développement de la pensée géométrique, nous avons proposé plusieurs problèmes qui favorisent progressivement la visualisation (lecture du dessin) et la sélection des éléments nécessaires à la résolution. Certains de ces problèmes exigeaient la déduction de propriétés et l'emploi des concepts correspondant au niveau de *déduction* selon le modèle de van Hiele. Nous avons donc visé la reconceptualisation des connaissances géométriques par leur mise en jeu systématique dans différentes situations d'apprentissage et d'enseignement.

Les situations proposées dans le cadre de la formation didactique portant sur l'enseignement de la géométrie au primaire ne doivent pas être perçues comme un modèle général de formation, mais plutôt comme un exemple local d'un dispositif tenant compte des différents enjeux et contraintes de la situation de formation décrits précédemment et visant le développement conceptuel du futur maître et sa compréhension de l'enseignement de ce contenu.

Selon les objectifs et les connaissances visés par les situations de formation, nous les avons distingués, de manière très générale, en sept catégories : *situations d'observation*, *situations de manipulation*, *situations de construction*, *situations géométriques*, *résolution de problèmes*, *situations d'analyse* et *situations de conception*. Il serait utile de préciser que cette distinction n'est pas restrictive, et qu'une situation qui favorise le développement professionnel (situation d'analyse ou de conception) peut amener à retravailler les connaissances géométriques (et incorpore alors une dimension de situation géométrique), de même qu'une situation d'observation (de manipulation, de construction) qui constitue le curriculum de l'enseignement primaire peut viser le développement des savoirs didactiques et être proposée en tant qu'une situation d'analyse ou de conception. À partir du moment où les démarches proposées dans chaque type de situations et les buts qu'elles visent sont connus des étudiants, certaines situations sont proposées en forme d'évocation et de rappel.

5.2 TYPES DE SITUATIONS ET OBJECTIFS VISÉS

Dans les sept sections suivantes, nous précisons les enjeux de ces situations sur les plans géométrique et didactique, les objectifs que nous visons pour chaque type de situations et les stratégies de formation employées en donnant des exemples de situations de formation. Les démarches visées par les activités d'observation, de manipulation, de construction et de résolution des problèmes et leur rôle dans les apprentissages des élèves constituent aussi le contenu à transférer lors de la formation didactique. Notre objectif, donc, est de faire connaître aux futurs maîtres la variété des activités et leur rôle dans la structuration des expériences géométriques des élèves.

5.2.1 SITUATIONS D'OBSERVATION

Les situations d'observations, qui visent l'initiation à la démarche de classification, demandent d'observer, de rechercher, d'organiser des informations, d'établir des liens entre les faits, ce qui favorise la structuration des pensées et des connaissances (à partir du niveau visuel vers le niveau relationnel). La démarche employée dans les situations d'observation peut être appliquée pour l'introduction des différentes figures géométriques et leurs propriétés (lignes, triangles, quadrilatères, polygones/non polygones, polygones convexes/concaves, polygones réguliers, polyèdre et corps ronds, etc.) ou dans sa variante courte, pour développer la visualisation. Il s'agit des procédés suivants :

- observer,
- décrire (ou rechercher le maximum de propriétés d'une figure),
- comparer (rechercher des ressemblances et des différences, rechercher la caractéristique commune, rechercher un élément qui n'appartient pas à un ensemble d'objets, etc.),
- classifier (faire le choix du (des) critère(s) et effectuer les regroupements) et/ou nommer, définir.

En mettant en jeu les différents éléments des savoirs géométriques, que nous avons associés au registre des figures, discursif et au registre figural-discursif (voir les annexes 8 et 9), les activités d'observation cherchent à surmonter les difficultés des étudiants tant au niveau géométrique qu'au niveau de l'enseignement (voir les difficultés des étudiants liées à la visualisation, à l'emploi de termes géométriques, à la classification des figures (4.1) et leur demande de méthodes et de situations d'enseignement (voir l'annexe 3).

Dans le cadre de la formation didactique, nous avons employé les situations d'observation pour l'apprentissage de toutes les notions. La majorité des situations a incorporé les différents savoirs didactiques visés par le dispositif (soit les critères d'analyse, soit la démarche visée, ou encore l'analyse des étapes de l'activité en vue du développement des compétences, etc.) Certaines situations (les plus simples) sont proposées en tant que rappel. Par exemple, nous avons employé la situation d'observation pour la notion du triangle, en forme de rappel (au début de l'ingénierie), comme situation d'analyse (au milieu des apprentissages et à l'examen de mi-session), comme situation d'observation (en employant le moyen informatique) vers la fin des apprentissages. Quant aux quadrilatères, les activités d'observation ont été proposées au début de l'ingénierie (la première question du test d'entrée utilise la démarche d'observation), en tant que travail sur les erreurs à la suite de la situation d'analyse du schéma de classification, comme situation de validation des séquences d'enseignement préparées par les étudiants en utilisant le logiciel de constructions. La notion des quadrilatères particuliers dans la situation d'observation a été touchée dans l'activité d'analyse portant sur la classification des polygones.

5.2.1.1 Exemple de situation de formation (démarche d'observation)

Nous présentons, à titre d'exemple, la situation par laquelle débute la formation didactique des futurs maîtres du primaire. Cette situation fait appel à une démarche d'observation et de classification des figures, vise aussi la découverte des savoirs didactiques suivants : « situation » comme modèle d'apprentissage (les étapes d'*action*, de *formulation*, de *validation* et d'*institutionnalisation*) et l'emploi de l'approche par « compétences » visée par le Ministère d'éducation. L'objectif que nous visons est d'une part, de faire connaître aux étudiants la démarche d'observation et d'autre part, de développer un nouveau savoir qui vient à partir de la recherche des solutions aux problèmes de l'enseignement et de faire comprendre que ce savoir permet d'effectuer la transformation d'une situation mathématique à son état didactique.

Pour ne pas introduire tous ces concepts comme savoir institutionnalisé, nous avons conçu une activité menant à leur découverte. Nous proposons aux futurs maîtres d'analyser une situation tirée d'un manuel scolaire et de déterminer les objectifs de cette activité (en termes de savoirs), les étapes permettant de les atteindre, la (les) compétence(s) visée(s) par cette situation, le rôle de l'enseignant et de l'élève. Ils doivent justifier le choix d'objectifs et de compétences par la description de comportement des élèves dans une situation. Ils peuvent effectuer les modifications et justifier leur pertinence. À la fin de l'activité, nous organisons la présentation du travail effectué par chaque équipe suivie de la discussion en groupe à propos des moyens didactiques employés dans l'analyse et dans les modifications d'une situation d'apprentissage et de différentes connaissances que les situations modifiées visent à acquérir. Cela nous permet de faire découvrir les étapes de la situation d'observation, d'envisager les liens entre l'objectif visé par l'enseignant, les connaissances en jeu et les « compétences » à développer chez l'élève. L'analyse de la structure de l'activité favorise la discussion sur la notion de *situation* comme modèle d'enseignement, sur le transfert de responsabilité (*dévolution*), ainsi que l'identification par les étudiants des étapes de la situation qui sont associées par le formateur aux phases d'*action*, de *formulation,* de *validation* et d'*institutionnalisation.* Ce mouvement conduit à l'institutionnalisation d'un nouveau savoir didactique, celui-là même qui nous a servi d'outil dans l'élaboration de cette situation de formation.

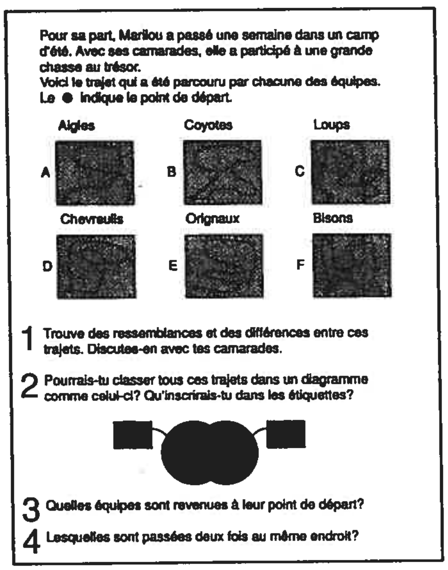
5.2.1.1.1 SAVOIRS VISÉS

La structure de l'activité[46] que nous proposons à l'analyse est très favorable pour amorcer la discussion sur l'organisation des apprentissages, pour faire connaître la démarche d'observation et pour introduire l'approche didactique. La mise en situation met les élèves dans le contexte d'une chasse au trésor. La situation invite les élèves à observer, à rechercher, à constituer et à organiser des informations, à établir des liens entre les faits, etc. Elle s'accompagne de notations écrites dont la mise en ordre fait émerger des constantes, des régularités, des oppositions. Les comparaisons entre élèves ou entre équipes permettent de valider les résultats obtenus. Pour unifier les caractéristiques, l'enseignant remplace les mots employés par les élèves par des termes géométriques. L'activité se termine par une synthèse où l'on résume ce qui a été découvert et appris. Nous pouvons donc faire des associations aux éléments de la *Théorie des situations didactiques* et aux phases d'*action*, de *formulation*, de *validation* et d'*institutionnalisation.*

---

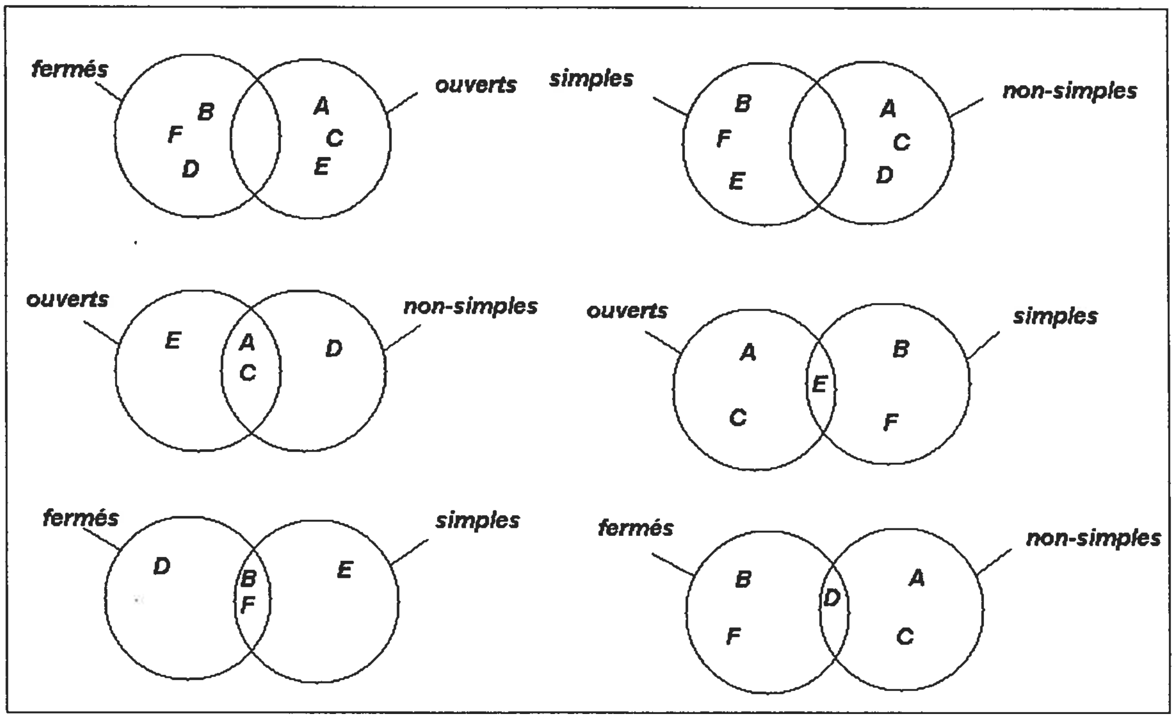
[46] Elle est tirée du manuel de l'élève *Mathématique 2* (Chevalier A. et P. Tranquille, LIDEC inc., 1993, p.3-4)

Nous décrivons la situation proposée pour l'analyse en expliquant en détail en quoi consiste une approche d'observation permettant à l'enseignant l'organisation des activités d'introduction de nouvelles notions et l'initiation des élèves à la démarche de classification. (La raison de cette description détaillée est que la méthode d'observation et son rôle dans le développement géométrique des élèves ne sont pas connus par les futurs maîtres. La démarche d'observation devient le concept-générateur dans l'organisation des différentes activités d'enseignement).



Cette situation engage les élèves à participer à une activité où l'action les amène à déployer leurs processus de pensée. D'abord, l'élève apprend comment « voir » des choses, sur « quoi » porter le regard. Ce processus participe au développement de l'abstraction qui amène un élève à chercher les propriétés visuelles marquantes (dans notre cas, ce sont « le point noir » et la présence de « croisement »). Pour trouver les ressemblances et les différences (*consigne 1*), il faut comparer les objets, ce qui exige aussi une méthode de pensée. Le choix du critère de classification se fait par son application à chaque objet proposé à l'observation et en fonction duquel on peut identifier s'il y a des ressemblances et des différences entre certains objets. Les allers-retours entre l'observation et la justification vont produire le sens. Par ce genre d'activité et par l'intermédiaire de contenus géométriques, l'élève construit un nouvel outil de la culture géométrique, l'outil d'observation. Ensuite, les élèves sont invités à classer les objets selon les caractéristiques retrouvées (*consigne 2*). À cette étape, certains élèves arrivent à expliquer et à justifier leur choix; d'autres ne sont peut-être pas sûrs, mais acceptent la solution grâce à l'explication de leurs «camarades».

L'organisation par l'enseignant de la présentation de différentes solutions au tableau permet de décrire les caractéristiques retrouvées, de les analyser et de les unifier, d'observer les différentes solutions, de les comparer et valider. Six classements différents sont possibles :



Pour unifier les caractéristiques, l'enseignant remplace les mots employés par les élèves par des termes géométriques. Il s'agit pour notre exemple de caractéristiques suivantes : ferme, ouverte, avec ou sans croisement (simple ou non simple), simple fermée ou ouverte et non simple fermée ou ouverte (il faut ajouter les quatre dernières caractéristiques à la phase d'institutionnalisation).

La description de cette démarche cherche à expliquer comment à partir de la situation nous pouvons favoriser chez les élèves le développement d'un outil permettant de structurer leurs pensées et leurs connaissances, d'utiliser un langage précis et préparer les conditions de transfert de responsabilités d'un travail intellectuel. Cette façon de procéder peut devenir un outil de pensée qui guide l'observation et qui peut être généralisée. Dans les activités suivantes[47], les élèves peuvent comprendre par eux-mêmes la démarche à entreprendre. En effet, dans le processus d'acquisition des connaissances, la façon dont on apprend joue un fondamental.

5.2.1.1.2 CONDUITES VISÉES

Nous cherchons à faire ressortir par les étudiants les éléments suivants :

- les étapes principales de cette activité : observation, description, comparaison, recherche des ressemblances et des différences, classifications (situation d'observation)
- la structure organisationnelle de l'activité (*action* : observation, recherche, choix; *formulation* : description des caractéristiques retrouvées et représentation de la solution à l'aide du diagramme; *institutionnalisation* : introduction du nouveau vocabulaire)
- le rôle de l'enseignant (préparer l'activité : *situation* comme modèle d'enseignement, favoriser le transfert de responsabilité (*dévolution*), décrire les caractéristiques retrouvées par les élèves, unifier les caractéristiques, remplacer les mots employés par des termes géométriques (*institutionnalisation*), organiser l'étape de *validation*, proposer l'activité d'application (pour vérifier les savoirs appris)).
- les connaissances en jeu (référence à Brousseau, 1998, p.280) :
    a) *propriétés* des lignes (ouverte, fermée, simple, non simple). (Les élèves observent et décrivent les trajets, donc il s'agit, selon Brousseau d'« *Emploi d'un langage pour exprimer. Le comportement manifeste un découpage en objets correspondants aux signes et aux mots »).*
    b) *relations* entre les classes (ouverte/simple, ouverte/non simple, fermée/simple, fermée/non simple); (Les élèves comparent les trajets, « *font le choix* » parmi des

[47] Par exemple, dans les activités portant sur la classification des solides, sur la recherche d'une propriété commune (des différentes classes de triangles, de quadrilatères, etc.), ou encore sur la recherche d'un élément qui n'appartient pas à un ensemble d'objets, etc.

ressemblances et des différences retrouvées, « *prennent la décision motivée par la connaissance en question* » (par exemple, le premier ensemble s'appelle *fermé*, le second – *simple,* etc.), analysent les trajets appartenant à deux ensembles et déterminent leurs noms).

c) *représentation de la solution* par le diagramme de Venn; (Les élèves déterminent les deux caractéristiques de classement, ils placent le trajet qui correspond à deux ensembles dans l'intersection).

d) *langage mathématique;* (L'élève emploie le langage courant pour décrire les trajets. Dans ses discussions avec les camarades, l'élève va utiliser les lettres désignant chaque trajet; le langage courant employé par l'élève sera remplacé par un langage plus formel).

- le but de l'activité (qui dépend des connaissances que l'enseignant veut faire acquérir aux élèves) : L'enseignant peut viser l'initiation à la démarche de résolution d'une situation-problème, la familiarisation avec le raisonnement, avec les étapes de classification, avec l'emploi de diagramme de Venn comme moyen de classification, l'introduction d'un nouveau vocabulaire ou l'application des savoirs et savoir-faire appris précédemment.
- les compétences visées : Les trois compétences peuvent être visées par cette activité. Par exemple,

<u>Compétence 1: Résoudre une situation-problème</u>

<u>Justification</u> : L'élève est amené à

- « *décoder les éléments de la situation-problème* » (il comprend qu'il faut effectuer le classement),
- « *modéliser la situation-problème* » (il doit chercher des caractéristiques, faire le choix de deux caractéristiques de classement, effectuer le classement selon la représentation suggérée)[48]

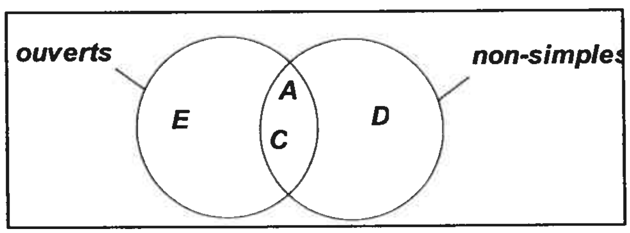
---

[48] La présence du diagramme de Venn dans cette situation réduit l'action de l'élève à la recherche de deux caractéristiques de classement. Cependant, par l'étape de validation des solutions présentées par les équipes,

- « *appliquer différentes stratégies en vue d'élaborer une solution* » (la démarche peut être différente selon les élèves),
- « *partager l'information relative à la solution* » (échanges avec les camarades)
- « *valider la solution* » (S'il s'agit de validation d'un critère, elle peut s'effectuer individuellement en l'appliquant à chaque trajet; si on envisage la validation de toutes les solutions, son organisation est à la charge de l'enseignant).

À propos des questions 3 et 4.

L'analyse de cette activité nous montre l'absence d'un problème, car les questions 3 et 4 indiquent aux élèves ce qu'ils doivent observer en tant que « ressemblance » et « différence » et guident les élèves vers un seul classement déterminé par l'activité.



Cet ordre de consignes n'est pas adéquat pour favoriser, par exemple, le raisonnement. Si, l'enseignant désire faire vivre aux élèves une situation-problème, il est pertinent d'éliminer les questions 3 et 4. L'enseignant peut en tenir compte au cas où certaines équipes auraient des difficultés à classer les trajets. Il peut également les utiliser dans la phase d'institutionnalisation quand il va interpréter les mots employés par les élèves en termes géométriques.

Compétence 2 : « Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques ». Justification : Raisonner, c'est effectuer des activités mentales (analyser, différencier, structurer, intégrer) qui s'exercent sur les relations entre les objets ou entre leurs propriétés de façon logique pour arriver à une conclusion ou pour trouver la solution.

---

les élèves peuvent découvrir un élément important de la pensée géométrique – rechercher le maximum de réponses possibles.

Les élèves se familiarisent avec les étapes de classification : observer, rechercher des différences et des ressemblances, regrouper selon les caractéristiques retrouvées. Dans les échanges avec ses camarades, l'élève va justifier le choix de caractéristiques en les appliquant à chaque trajet. Selon les connaissances préalables des élèves et les buts visés par l'activité, l'enseignant peut viser le développement ou l'application des processus mathématiques appropriés à la situation et la justification des actions. La gestion de l'activité et le partage de responsabilités peuvent aussi différer.

Compétence 3 : « Communiquer à l'aide du langage mathématique »

Justification : L'élève est invité à « *interpréter ou produire des messages à caractère mathématique* » (dans ses discussions avec les camarades, l'élève utilise les lettres désignant chaque trajet, ensuite, le message peut prendre forme de diagramme). À la fin de l'activité, l'enseignant interprétera les mots employés par les élèves en termes mathématiques ce qui vise à « *établir des liens entre le langage mathématique et le langage courant* » et à permettre aux élèves de s' « *approprier le vocabulaire mathématique* ».

L'idée essentielle que nous voulons que les étudiants retiennent est que l'organisation des apprentissages dépend des objectifs visés par l'enseignant et des connaissances qu'il veut faire développer chez l'élève et que la même présentation d'une activité dans un manuel scolaire peut prendre les différentes formes dépendamment de ces objectifs. Même si le but n'est pas pleinement conscient ou s'il y a plusieurs dans la même activité, une intentionnalité dans l'organisation de l'activité peut être toujours identifiée (Vergnaud, 2001).

5.2.1.1.3 Construction d'un outil d'analyse

Après avoir analysé cette situation selon les objectifs, les connaissances et les compétences visées par l'enseignant, il nous semble important de voir de quelle façon ces analyses participent à la conception d'une situation d'apprentissages. Dans le but d'intégration des connaissances didactiques introduites précédemment et de développement des connaissances d'enseignement, nous proposons aux étudiants une tâche de construction d'un outil méthodologique pour l'analyse et la conception des situations d'apprentissage. Nous avons posé la question en groupe : «*Vous voulez préparer la séquence d'apprentissage d'un savoir* *géométrique particulier. Par quoi commencez-vous? Quels critères appliquez-vous en préparant l'activité?*» Ce sont deux questions assez générales autours desquelles on prévoit la discussion en équipes suivie d'une description des critères au tableau et de leur validation.

Au début, émergeront peut-être des éléments généraux de référence permettant le contrôle a priori d'une situation didactique. Nous anticipons que les premières questions contiendront les éléments travaillés : objectif de l'activité, connaissances en jeu, compétence(s) visée(s), connaissances préalables de l'élève, anticipation des réponses possibles, interventions sur les réponses erronées, étapes de la situation et leur ordre, gestion de l'activité, vérification des connaissances apprises, etc. Les situations de formation suivantes vont diriger la construction progressive de cet outil. Nous visons éventuellement l'apparition de critères plus précis portant sur l'analyse du langage géométrique employé par l'activité, sur la précision de la consigne, sur le choix de figures proposées pour l'observation ou pour la classification, sur la pertinence du schéma de classification, sur la continuité des apprentissages et sur l'absence des étapes nécessaires pour atteindre les objectifs, etc.

Nous souhaitons que l'utilisation continue de ces critères pour l'analyse des extraits et des activités de manuels scolaires permette aux étudiants de développer une habitude de réflexion didactique sur les activités qu'ils proposent aux élèves.

5.2.2 SITUATIONS DE MANIPULATION

À partir du cadre théorique, nous pouvons conclure que le développement de la visualisation et du langage géométrique à l'école primaire, repose sur les expériences géométriques de l'élève qui le préparent à l'apprentissage de la géométrie. Il s'agit des activités avec du matériel concret (solides de bois, boîtes, formes géométriques de plastique, carton, etc.) dans le but de construire, d'observer, de reconnaître, de comparer des figures géométriques, de les décrire, etc.

L'expérience tirée des activités comme la manipulation et l'observation des figures géométriques, la recherche des similitudes et des différences, la reconnaissance du mouvement de figures géométriques dans l'espace, la reconnaissance des figures selon leurs projections et leurs empreintes, la description des figures géométriques, etc. contribue au développement des aptitudes visuelles et langagières de l'élève. Les situations développées en didactique pour introduire la notion du cercle contiennent les activités de pliage, de calquage, d'observation des mouvements de la porte et de l'horloge; celles de transformations géométriques incluent les jeux de déplacement (pour la translation), les activités de découpage et de pliage (pour la symétrie axiale) et avec l'horloge (pour la rotation). La réalisation de mosaïques et de frises fait typiquement appel à une suite de transformations (translation et réflexion). Par ce genre d'activités, on habitue les élèves à déplacer, tourner, appliquer la réflexion, etc. Beaucoup de figures planes peuvent se construire en appliquant les transformations géométriques (par exemple : triangles isocèle et équilatéral, certains quadrilatères, polygones réguliers, cercle, etc.) et plusieurs solides peuvent être générés (et visualisés) par le mouvement d'une figure plane (par exemple : cube, prisme, cône, cylindre, sphère, etc.) Les jeux de parcours, les activités de puzzles, de division et de composition des formes géométriques en formes connues, de remplissage de boîtes avec des billes, etc., préparent les élèves à la notion de la mesure et au calcul de périmètre, d'aire et de volume.

Les formes des activités et les buts visés par la formation varient considérablement. Certaines activités contiennent les éléments de l'enseignement du niveau supérieur, les autres visent plus l'orientation didactique et incorporent les savoirs didactiques. Certaines situations (par exemple portant sur les solides) ont pour but de faire connaître la variété des situations, de préciser les buts de chacune et de préparer la synthèse portant sur l'enseignement des solides à l'école primaire. Les situations de découpage, de dallage, de décomposition des figures planes en figures connues ont été proposées telles quelles dans le but de construction des connaissances préalables permettant aux étudiants de découvrir les relations métriques de différentes surfaces.

Quant aux notions du triangle et des quadrilatères particuliers, nous utilisons différents outils constitués de pailles et d'élastiques[49]. Les différents modèles construits à partir de cet outil, permettent de travailler la visualisation des figures et des classes (triangles, famille des triangles isocèles, famille de losanges) et d'analyser les relations entre les propriétés ou entre

[49] « d-stix », a creative 3-dimensional construction set for « engineers of all ages », 464 pieces, model 701, manufactured by Geodestix (P.O.Box 5179)

certaines classes (inégalité triangulaire, relations entre deux segments concourants (congrus et non), relation parallélogramme/losanges, parallélogramme/rectangle).

5.2.2.1 EXEMPLE DE SITUATION DE MANIPULATION

Nous présentons, à titre d'exemple, les trois activités de manipulation proposées dans le cadre des deux ingénieries (triangle et quadrilatère) qui emploient le modèle physique (pailles et élastique) permettant le travail sur la variété de représentations des figures. Du point de vue géométrique, chaque situation fait appel à la démarche de manipulation, l'analyse de différents cas possibles, la détermination du nom et l'évocation de la représentation selon les propriétés annoncées. Du point de vue didactique, l'emploi de modèles physiques à l'enseignement de la géométrie au primaire présente l'une des méthodes à transférer dans le cadre de préparation des futurs maîtres.

1re activité : Représentations des triangles

Cette activité est proposée à la suite de la première classification des triangles en utilisant le diagramme de Carroll (voir l'annexe 18.2). Elle cherche à atteindre les objectifs suivants :

- Enrichir le répertoire de représentations;
- Favoriser la visualisation d'un triangle selon les propriétés annoncées (voir la figure 11a)
- Visualiser la « famille » de triangles isocèles (voir la figure 11b)

Description d'un outil : composé d'une baguette de bois (ou d'une paille) d'environ 20 cm et d'un élastique accroché à ses deux extrémités. En tirant sur l'élastique, on peut avoir différentes représentations de triangles.

a) b)

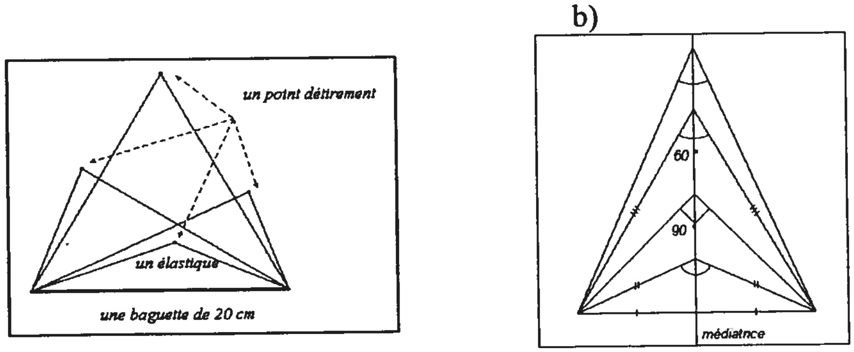


Figure 11. Outil de représentation des triangles

En demandant de représenter différents triangles avec cet outil, nous posons les questions suivantes :

- Un triangle scalène peut-il être obtusangle?
- Peut-on avoir un triangle isocèle obtusangle? isocèle rectangle? isocèle acutangle?
- Le triangle équilatéral peut-il être acutangle?
- Combien de représentations différentes peut avoir le triangle isocèle rectangle? le triangle équilatéral?

À première vue, les questions semblent simples et les réponses évidentes. Par ce genre de questions, nous amenons les étudiants à se représenter le triangle demandé et à se prononcer sur ses propriétés :

1. Un triangle scalène peut être obtusangle. C'est un triangle ayant trois côtés de longueur différente et l'un de ses angles est obtus.
2. Un triangle isocèle peut être obtusangle. C'est un triangle ayant deux côtés de longueur égale et un de ses angles est obtus.
3. Un triangle équilatéral est <u>toujours</u> acutangle.
4. Le triangle isocèle rectangle (ou équilatéral) dépendamment de la longueur de côtés peut avoir une infinité de représentations.

<u>**2e activité : Représentations des triangles isocèles**</u>

Cette activité est proposée à la suite de la situation d'observation de différents triangles isocèles et de recherche d'une propriété commune et de celle qui est différente (voir l'annexe 18-3).

<u>Buts :</u>

- Favoriser la visualisation de différents triangles isocèles
- Visualiser le passage d'un triangle isocèle obtusangle à acutangle par le triangle rectangle et le triangle équilatéral comme cas particulier d'un triangle isocèle acutangle (à l'aide du bâton et de l'élastique notamment) ;

Description de l'outil : composé de deux baguettes (pailles) congrues unies et d'un élastique accroché à deux bouts. En tirant un élastique, on peut avoir des représentations de différents triangles isocèles (figure 12).

Nous demandons de représenter les différents triangles isocèles et de déterminer les limites de mesure des angles congrus d'un triangle isocèle acutangle, rectangle et obtusangle. Nous nous arrêtons spécifiquement sur la représentation du triangle isocèle dont la mesure d'angle entre deux côtés congrus est égale à 60° (triangle équilatéral) et à 180° (« triangle aplati »).

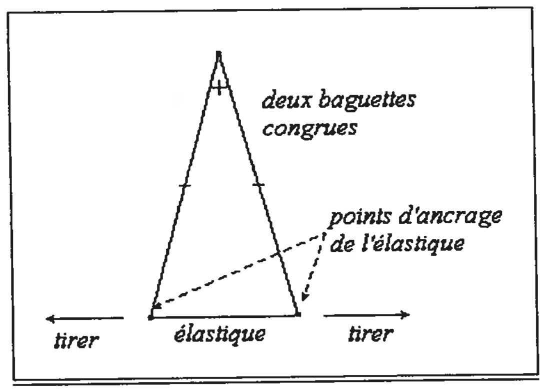


Figure 12. Outil de représentation des triangles isocèles

Réponses attendues :

- Si l'angle entre deux côtés congrus est aigu, la mesure de deux autres est plus grande que 45° et plus petite que 90° chacune;
- Si l'angle entre deux côtés congrus mesure 60°, les deux autres angles mesurent 60° chacun (le triangle équilatéral);
- S'il est droit, les deux autres angles mesurent 45° chacun;
- S'il est obtus, la mesure de deux autres angles est plus petite que 45° et plus grande que 0° chacune.
- S'il est plat, les deux autres angles mesurent 0° chacun

3e activité : Représentation des quadrilatères

Cette activité est proposée dans la situation « Visualisation des quadrilatères » (annexe 19-2 et 3) en tant qu'aide à la visualisation des quadrilatères particuliers et à l'analyse de leurs propriétés: côtés (congrus, parallèles), angles (droits, opposés congrus) et diagonales (se coupent en leur milieu, congrues, perpendiculaires).

Buts :

- Favoriser la visualisation d'une relation parallélogramme/ rectangle, losange/carré (conception des définitions conceptuo-lexicales)
- Enrichir le répertoire de représentations des quadrilatères (différentes positions de deux segments concourants représentant les diagonales)
- Favoriser la visualisation d'un quadrilatère selon les positions particulières (se coupent en leur milieu, perpendiculaires) de deux segments concourants (congrus et non)
- Favoriser la conception de définitions constructives

Description d'un outil :

1) composé de deux paires de baguettes (pailles) congrues 2 à 2 unies aux extrémités; composé de quatre baguettes (pailles) congrues (figure 13 a)

2) deux pailles congrues et une de mesure différente (figure 13 b).

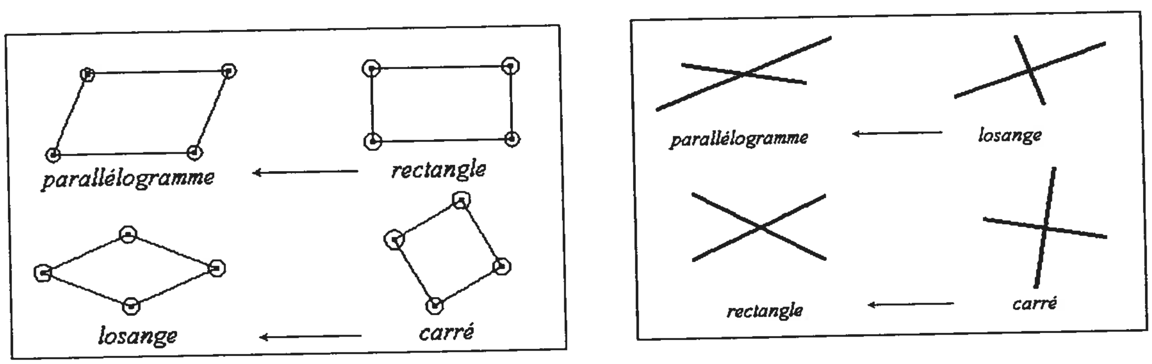


Figure 13. Outil de représentation des quadrilatères particuliers

Nous proposons aux futurs maîtres d'utiliser le jeu de construction tridimensionnelle pour créer des représentations physiques des quadrilatères qui travaillent les propriétés des côtés et des angles ou qui permettent de visualiser les propriétés de diagonales.

1) La description de matériel utilisé pour construire le parallélogramme (deux paires de côtés congrus) permet déjà de concevoir la nouvelle définition (*Quadrilatère ayant deux paires de côtés congrus 2 à 2 s'appelle* ***parallélogramme***). La déformation du parallélogramme facilite

l'analyse de propriétés (celles qui changent et celles qui restent invariantes), la représentation du rectangle comme parallélogramme ayant les angles droits et participe à la conception de la nouvelle définition (*Quadrilatère ayant des angles opposés congrus 2 à 2 s'appelle **parallélogramme***). Quant à la « famille » de losanges, cette manipulation permet de voir le carré comme cas particulier de losange et de le définir comme « *losange ayant des angles droits* ».

2) Les différentes dispositions de deux pailles de longueurs différentes permettent de représenter un ensemble de quadrilatères ayant des diagonales non-congrues. La position de deux pailles qui se coupent en leur milieu nous donne une bonne image du parallélogramme; celles qui se coupent en leur milieu à angle droit définissent un losange. Les différentes dispositions de deux pailles de même longueur permettent de représenter un ensemble de quadrilatères ayant des diagonales congrues. La position de deux pailles congrues qui se coupent en leur milieu nous donne une bonne image du rectangle; celles qui se coupent en leur milieu à angle droit présentent un carré. Par cet outil, nous ne travaillons pas l'inclusion de classes des quadrilatères, mais la représentation physique (et mentale) d'un quadrilatère selon la description de la relation qui existe entre ses diagonales. (Pourtant, certaines inclusions peuvent se travailler losange (parallélogramme, carré → rectangle). Il s'agit, dans ce jeu, d'une étape préalable à la construction du concept de quadrilatère qui permet seulement de visualiser la propriété et la figure particulière déterminée par cette propriété. Ce genre d'activité favorise le développement de la capacité d'avoir des contre-exemples.

Pour favoriser l'évocation de différents quadrilatères selon les propriétés annoncées, nous posons quelques questions en demandant de représenter cette propriété et de déterminer le nom du quadrilatère :

Quel quadrilatère est défini par

- deux diagonales qui se coupent en leur milieu?
- deux diagonales congrues?
- deux diagonales congrues qui se coupent en leur milieu?
- deux diagonales qui se coupent à angle droit?
- deux diagonales qui se coupent en leur milieu à angle droit?

- deux diagonales congrues qui se coupent à angle droit?
- deux diagonales congrues qui se coupent en leur milieu à angle droit?

D'une part, ces différentes combinaisons de propriétés des diagonales permettent de définir certaines classes de quadrilatères particuliers; d'autre part, elles permettent de travailler la suffisance de propriétés pour définir et mettent en jeu la recherche du contre-exemple. (Par exemple, la propriété annoncée dans la deuxième question « deux diagonales congrues » peut provoquer chez les étudiants la détermination du rectangle, cependant elle n'est pas suffisante pour le définir. Il suffit de représenter deux segments concourants qui ne se coupent pas en leur milieu.

5.2.3 SITUATIONS DE CONSTRUCTION

Les activités de construction cherchent à favoriser le développement d'une capacité de représentation des figures, d'organisation de schèmes opératoires et l'acquisition des concepts géométriques ce qui correspond aux objectifs visés par le dispositif de la formation : coordination de la visualisation, du langage géométrique et du raisonnement. Il s'agit des activités géométriques proposées au milieu de la séquence d'apprentissage de la notion du triangle, au début de l'étude du quadrilatère particulier, du cercle et des transformations géométriques dans l'environnement papier/crayon et vers la fin de la formation avec l'environnement informatique. Le logiciel Cabri-Géomètre II comme moyen graphique de la construction des figures permet aux étudiants d'utiliser leurs connaissances dans un environnement différent de celui de *papier-crayon* dans le but de leur consolidation[50]. Chaque activité de construction contient les mêmes étapes :

---

[50] Cet environnement dynamique présente beaucoup d'autres apports sur le plan didactique. Dans l'enseignement simultané de la géométrie et de l'apprentissage de l'utilisation d'un logiciel, nous pouvons observer que l'introduction du logiciel dans le milieu didactique provoque des obstacles didactiques (liés notamment à l'ergonomie du logiciel) et oblige les étudiants à des incursions pour résoudre des tâches qu'ils maîtrisaient auparavant dans l'environnement « papier-crayon ». Cependant cette question ne sera pas analysée dans cette thèse. Le but que nous avons visé ici était simplement de monter aux étudiants la variété des activités géométriques qui peuvent être envisagées avec cet environnement. Nous les avons fait participer à des activités d'observation, de construction, de comparaison des constructions effectuées dans les environnements différents, de résolution de problèmes et de conception des séquences d'apprentissage et cela pour des notions géométriques différentes. La connaissance des outils de Cabri était préalable à ce cours. Le logiciel était

- construction d'une figure (le choix de construction n'est pas précisé),
- description des procédures de construction,
- détermination d'une (des) propriété(s) qui sont en jeu de construction,
- présentation au tableau de toutes les constructions effectuées (précision des étapes de construction, du langage employé et d'une (des) propriété(s) essentielle(s) utilisée(s) pour la construction),
- description de toutes les propriétés retrouvées dans les constructions,
- recherche d'un nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure unique,
- autres constructions d'une figure selon les propriétés non identifiées par les étudiants (choix du professeur).

Les problèmes de construction prévoient la diversité des procédures possibles employées par les étudiants et la diversité des propriétés utilisées pour la construction ou recherchées expérimentalement. Ce type d'activité peut être considéré représentatif, car à partir de l'analyse du discours et de l'emploi (ou du traitement) de la figure, nous pouvons identifier le niveau conceptuel de l'étudiant.

Quatre situations de construction des figures sont analysées dans le cadre du dispositif de la recherche : construction d'un triangle isocèle, d'un triangle équilatéral, d'un carré et des figures planes dans un environnement de Cabri-Géomètre. Les autres constructions ont été abordées en tant qu'exercices d'application des connaissances apprises, sous forme de questions exigeant l'évocation de la démarche et dans la résolution des problèmes géométriques. Nous pensons que la familiarité avec la démarche (construction, description, détermination des propriétés nécessaires pour la construction, variété de constructions de la même figure, etc.) développée dans ce type de travail permet de préparer une bonne base pour pouvoir opérer avec les propriétés et les procédures au niveau supérieur.

---

installé dans tous les laboratoires et au début de la formation, nous avons avisé les étudiants des dates pour les séances avec ce logiciel. La majorité des étudiants ont signalé leur connaissance du logiciel.

5.2.3.1 EXEMPLE DE SITUATION DE CONSTRUCTION

Nous présentons, à titre d'exemple, la première situation de construction : construction d'un triangle isocèle, ses enjeux géométriques et didactiques. Elle se trouve à l'annexe 18.6 (étapes 3 à 6). (La situation de construction du carré contient les mêmes étapes et vise la consolidation de la démarche proposée (voir l'annexe 19.2, étapes 2 à 3.)

- *ASPECT GÉOMÉTRIQUE*

Sur le plan géométrique, la tâche demandée est suffisamment riche pour que les propriétés des figures puissent y être employées, mais pas trop complexe pour que les étudiants puissent y entrer facilement. Elle doit amener les étudiants à une recherche d'une solution possible, à un échange d'opinions, à l'utilisation et à la précision d'un langage mathématique en décrivant les propriétés trouvées et les étapes effectuées, à prouver le choix de propriétés nécessaires et suffisantes pour la construction d'une figure ou pour la production de la nouvelle définition.

Les principaux éléments que nous voulons développer par ce type de travail appartiennent à la liste de description des éléments des compétences géométriques (voir les annexes 8 et 9) et sont les suivants :

- <u>Tracer des figures géométriques (à partir de données abstraites et concrètes)</u>

En visant les différentes constructions de la figure, nous voulions faire comprendre aux étudiants que la même figure peut être construite de différentes façons, ainsi qu'une même propriété peut être mise en jeu dans différentes constructions. L'objectif que nous visions par ces activités était d'amener l'étudiant à effectuer la (les) construction(s) selon les propriétés disponibles (concrètes ou abstraites) avec et sans outils de construction.

- <u>Décrire les propriétés de la figure plane et les étapes de construction</u>

- <u>Développer les opérations mentales nécessaires à la construction</u>

Les étudiants doivent répondre aux exigences suivantes : décrire les figures et leurs propriétés visuelles, utiliser les termes précis dans les descriptions, définitions, etc.; déterminer les conséquences logiques de certaines données; décrire les procédures de la construction; comprendre la consigne; déterminer la propriété travaillée dans la construction; visualiser les constructions possibles.

En demandant de décrire les étapes et de déterminer la(les) propriété(s) employée(s) dans la construction, nous visons le développement des opérations mentales nécessaires à la construction. La description des étapes de la construction doit permettre aux étudiants de se prononcer sur ce qu'ils font (une des difficultés observées précédemment) et amener l'étudiant à utiliser les informations nécessaires dans la description des étapes de construction. Quant à la détermination de la (des) propriété(s) travaillée(s) dans la construction, l'objectif que nous visons par cette tâche est d'amener l'étudiant à décrire seulement les propriétés utilisées pour la construction (et non pas toutes les propriétés d'une figure donnée).

Nous donnons à titre d'exemple la description des procédures de la construction du triangle isocèle effectuée par l'une des équipes à l'année précédente : « *Tracer un segment de 4 cm; tracer la perpendiculaire; relier les extrémités* ». À la question concernant la(les) propriété(s) employée(s) par la construction, l'équipe répond : « *égalité de côtés* ».

Nous pouvons constater que dans la description des procédures, la recherche du milieu du segment est absente et que dans la détermination d'une propriété qui est en jeu, il faut préciser la propriété de la médiatrice. Nous voulons que le futur enseignant établisse un lien cohérent entre son action et la description verbale ou écrite de cette action. Cette cohérence permettra plus tard d'ordonner les actions des élèves et d'identifier rapidement leurs difficultés dans les constructions des figures. Donc, nous visons une description du genre de celle-ci : « *Tracer un segment; trouver le milieu*[51]*; tracer la droite passant par le milieu du segment et perpendiculaire à ce segment; choisir un point quelconque sur cette droite (ou reporter la mesure de la hauteur (h)); relier les extrémités du segment à ce point* ». À la question concernant la(les) propriété(s) employée(s) par la construction, nous visons une

[51] Les deux procédures sont acceptées : mesurer, diviser en deux; construction au compas

réponse comme: « *La hauteur principale du triangle isocèle est la médiatrice de la base (le lieu de points équidistants de deux extrémités)* ».

À la dernière étape, en demandant « *le nombre minimal d'informations permettant la construction d'un triangle isocèle superposable à un triangle caché* » (ou la construction d'un triangle isocèle unique), nous visons le développement du raisonnement et de l'imagination spatiale. L'analyse a priori de cette étape repose tout d'abord sur l'analyse de l'énoncé du problème. Pour comprendre le sens de la consigne, il faut retenir les informations pertinentes suivantes : « *triangle isocèle* », « *superposable* », « *nombre minimal de propriétés* ». Au début, l'étudiant fait appel aux propriétés essentielles du triangle isocèle (égalité de mesures de deux côtés et de deux angles). Il doit aussi tenir compte des propriétés de différents triangles isocèles : le triangle ayant deux côtés de mesure égale à une certaine valeur peut avoir les différentes représentations selon l'angle au sommet[52]. Le terme « *superposable* » l'oblige à déterminer les combinaisons de propriétés permettant la construction du triangle identique à un triangle caché. Par exemple : « *deux côtés de mesure égale et angle entre eux* », ou « *mesure de la base et des deux angles congrus* », ou encore « *mesure de la base et de la hauteur* », etc. Le nombre de ces combinaisons dépendra de l'expérience géométrique de l'étudiant. À la fin, il doit déterminer le nombre minimal de propriétés permettant la construction. Selon nos expériences des années précédentes, les étudiants utilisent différentes stratégies permettant la détermination du nombre minimal de données, comme par exemple, « *Combien de propriétés me suffissent pour effectuer cette construction? Si je connais la mesure du côté, suis-je capable de construire le triangle demandé?* » ou « *Si je connais la mesure de deux côtés égaux, de combien de données dispose-je?* » ou encore « *Si je connais les mesures de tous les côtés et de tous les angles, comment puis-je réduire le nombre d'informations permettant la construction?* » etc.)

Quant à l'imagination spatiale, nous visons la détermination de différentes combinaisons et par conséquent, l'évocation de différentes constructions.

À partir de constructions effectuées par des équipes, nous faisons la description des propriétés employées dans les constructions (congruence de côtés et des angles, propriétés de la

[52] Ces propriétés ont été déjà travaillées dans la situation de formation précédente.

hauteur : bissectrice, médiane). Nous en profitons pour préciser la signification de ces termes. Cette étape sert aussi à l'identification de propriétés qui n'étaient pas utilisées dans les constructions. Si leur nombre n'est pas grand, nous les proposerons pour les nouvelles constructions à toutes les équipes. Au cas où le nombre de propriétés non-utilisées serait considérable, les différentes propriétés seront proposées aux différentes équipes. La construction d'une figure à partir de données abstraites amène les étudiants à déduire les relations qui en découlent. (Par exemple, la propriété « *hauteur principale d'un triangle isocèle* » permet d'évoquer qu'elle est aussi la médiane et la bissectrice de ce triangle; celle d'« *angle au sommet principal* », permet d'évoquer la recherche de la mesure de deux autres angles (soustraire la mesure donnée et diviser en deux, car les deux autres angles sont congrus), etc.) Il s'agit à cette étape du développement du niveau trois ou quatre selon le modèle de van Hiele (selon les propriétés utilisées et le raisonnement mis à contribution).

- *CONDUITES ANTICIPÉES*

Nous anticipons les constructions générales qui emploient la propriété visuelle marquante « côtés congrus », celles qui utilisent la combinaison de propriétés visuelles (côtés et angles) et enfin les constructions qui utilisent la propriété de la hauteur. Ces différentes constructions peuvent être associées aux différents niveaux de la pensée géométrique (voir la section 4.2). Quant à la description de propriétés, nous prévoyons que les propriétés suivantes peuvent apparaître sur les fiches de construction :

- Deux côtés congrus
- Deux angles congrus
- La hauteur divise le côté opposé en deux parties congrues (elle est une médiane et une médiatrice)
- La hauteur divise un angle duquel elle est issue en deux angles congrus (elle est une bissectrice)
- La hauteur divise un triangle en deux triangles rectangles congrus (elle est un axe de symétrie)

Difficultés anticipées :

- Difficulté de réduire le nombre de propriétés suffisantes pour la construction
- Descriptions incomplètes et imprécises

- ASPECT DIDACTIQUE D'ORGANISATION

La situation de construction est une situation d'apprentissage qui permet la révision de connaissances que les étudiants possèdent déjà, leur structuration et l'acquisition d'un savoir nouveau. Les consignes générales telles que « *construire une figure plane donnée* », « *décrire les procédures de construction* », « *déterminer la propriété employée dans la construction* » cherchent à favoriser la visualisation, le langage, le raisonnement et les opérations mentales nécessaires. Dans la phase de présentation des résultats au tableau et de leur validation, nous envisageons un transfert de responsabilité aux étudiants. À cette étape, le représentant d'équipe vient au tableau et décrit les procédures. Pour la première présentation, la description de chaque procédure est suivie d'un tracé correspondant effectué par le formateur. Dans les présentations suivantes, c'est le représentant d'une autre équipe qui joue le rôle du constructeur. La comparaison de la description de la procédure avec le dessin tracé selon la description fait ressortir le caractère nécessaire des modifications requises (s'il y a lieu) et conduit à préciser le vocabulaire employé dans la description. Pour amener à préciser la procédure, la technique de contre-exemple est mise à contribution[53]. La description précise des étapes et des propriétés utilisées pour la construction rend clairs les actions et l'ordre des actions pour la construction et exige l'emploi du langage géométrique pour exprimer les actions et pour formuler les propriétés. Cette compétence est importante pour l'apprentissage et pour l'enseignement de la géométrie.

À la dernière étape, en demandant *le nombre minimal d'informations permettant la construction d'un triangle isocèle superposable à un triangle caché*, nous mettons les étudiants dans une situation jamais rencontrée auparavant où ils doivent comprendre la consigne, faire ressortir les informations pertinentes, concevoir le plan d'action, employer le raisonnement. Ils doivent en même temps penser la construction originale qui peut être

---

[53] Nous voulons mentionner que les étudiants comprennent assez vite l'exigence de la procédure de description et dans les activités de construction suivantes, les équipes selon l'ordre valident les présentations complètes effectuées au tableau : construction, l'ordre des procédures et le vocabulaire employés dans la description.

différente des constructions des autres équipes. Et cela requiert la recherche d'une combinaison inhabituelle de propriétés du triangle isocèle ou de prévoir plusieurs constructions. Ensuite, ils doivent présenter leur construction, décrire les procédures en ordre logique et en employant le vocabulaire géométrique précis (les connaissances travaillées précédemment).

Quant à l'institutionnalisation, qui « [...] *est une condition nécessaire pour que la situation de recherche dans laquelle un élève s'est effectivement impliqué ait pour lui une fonction d'apprentissage* » (Douady, 1994, p.23), elle est présente dans la liste de toutes les propriétés utilisées dans les constructions décrites au tableau, dans la révision de toutes les constructions effectuées par les équipes avec le nombre minimal de données et dans le message du professeur d'en tenir compte pour les activités suivantes : construction du carré, du cercle, du triangle équilatéral et construction des figures planes dans un environnement du Cabri-Géomètre II.

Au début de chaque activité de construction (triangle isocèle, carré, cercle), qu'on considère en grande partie comme la révision de connaissances que les étudiants possèdent et leur structuration, il y a une situation de rappel. C'est un moment du cours où nous demandons aux étudiants de se souvenir des éléments importants (notion, propriétés, méthode, principe, formule, etc.) qui ont des liens avec le contenu visé par le cours. Selon Douady (1994), ce type de travail mis sous la responsabilité des étudiants (quand le professeur n'apporte aucune information) peut être très fructueux pour le changement du rapport au savoir. Nous visons que les étudiants retiennent les événements essentiels du cours en prévision du cours suivant.

- *SAVOIRS DIDACTIQUES VISÉS*

À la fin de cette activité, nous proposons aux étudiants d'analyser l'organisation de l'activité : sa structure et le rôle de l'enseignant dans la gestion de l'activité. Nous souhaitons faire ressortir par les étudiants les éléments suivants :

- la structure organisationnelle de l'activité (*action* : construction; *formulation* : description des procédures; *validation* : présentation des constructions et validation par les étudiants; *institutionnalisation* : révision de constructions effectuées, leur distinction de plus primitives aux plus complexes, rappel sur l'emploi du langage dans la description et sur de la démarche pour les situations de construction prochaines.

- le rôle de l'enseignant (préparer l'activité : *situation* comme modèle d'enseignement, favoriser le transfert de responsabilité (*dévolution*), gérer le temps et le déroulement des étapes, faire la synthèse (*institutionnalisation*)).

À l'étape de présentation, nous analysons les constructions effectuées en les associant aux dessins généraux (qui emploient la forme de la figure ou la propriété essentielle) et à celles que nous appelons « construction » et qui utilisent les données concrètes et abstraites. Par cette distinction des constructions, nous cherchons à provoquer la réflexion sur la correspondance de la démarche employée dans la construction au niveau du développement de l'élève. (Cette situation fait partie de l'ingénierie du triangle et présentée à l'annexe 18.4)

5.2.4 SITUATIONS « GÉOMÉTRIQUES »

Le terme que nous avons choisi pour identifier ce type de situations est le plus général, car la variété des situations ne nous a pas permis de trouver de nom plus précis. Il s'agit de situations de pratique géométrique « pure » (sans incorporer les savoirs didactiques) qui visent à développer la visualisation, le langage, le raisonnement, les compétences de la résolution des problèmes, la construction des concepts, etc.

Les différents savoirs géométriques ont été mis en jeu dans les situations pour surmonter les difficultés des étudiants liées à l'articulation du registre du discours mathématique et de celui des figures géométriques. Il s'agit des éléments suivants : reconnaître la figure dans sa représentation ou disposition inhabituelle, visualiser la propriété décrite, visualiser la figure selon les propriétés décrites (descriptions habituelles et non), décrire la figure et les propriétés à partir de la lecture du dessin, en utilisant le maximum de propriétés, concevoir différentes définitions de la même figure, déterminer la figure selon la lecture des propriétés visuelles ou verbales, rechercher le contre-exemple, résoudre les problèmes géométriques, reconnaître les éléments nécessaires à la résolution du problème, déterminer les conséquences logiques de certaines données, appliquer les concepts appropriés, etc. (Voir les annexes 8 et 9)

En tenant compte du fonctionnement du registre figural, nous visons, par ces situations, la reconnaissance de figures (unités de dimension 3 et 2), des éléments de la figure (unités de dimension 3, 2, 1 et 0), nous mettons en jeu l'organisation déductive du discours et par cela la modification des stratégies d'intervention et la facilité des traitements géométriques et didactiques des tâches proposées aux élèves.

Pour la notion du triangle, plusieurs activités géométriques ont été proposées : analyse du vocabulaire géométrique, classification des triangles, résolution de problèmes géométriques. Quant aux quadrilatères particuliers, les activités considérées « géométriques » portaient sur la description des propriétés du carré, sur les représentations des quadrilatères particuliers selon la propriété décrite, selon la combinaison des propriétés et sur la recherche de contre-exemple. Il s'agit aussi d'activités de classification, de justification des énoncés (*Vrai* ou *Faux*), de conception des nouvelles définitions des figures (tenant compte de la nécessité et de la suffisance de propriétés employées) et de détermination du nom de la figure selon l'analyse du dessin ou de l'énoncé, etc.

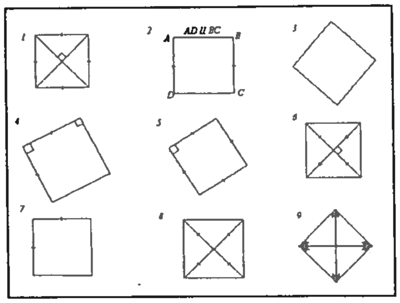
5.2.4.1 EXEMPLE DE SITUATION « GÉOMÉTRIQUE»

Cette situation est proposée vers la fin des apprentissages portant sur la notion du quadrilatère. Elle travaille les propriétés des quadrilatères dans un contexte différent de celui utilisé jusqu'à présent. Du point de vue géométrique, nous visons le développement de l'abstraction, de la capacité à décrire fidèlement les propriétés indiquées, des opérations mentales nécessaires pour déterminer le nom du quadrilatère. Par cette activité, nous cherchons à atteindre les objectifs suivants :

- Favoriser la lecture des propriétés indiquées par des symboles
- Favoriser la détermination des conséquences logiques de la combinaison de propriétés
- Favoriser la détermination du nom du quadrilatère à partir de la lecture du dessin.

Nous présentons à titre d'exemple l'extrait de la situation présentée à l'annexe 19.6.

Question 2 : *Sommes-nous des carrés ?*



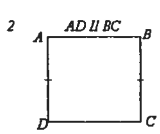
Dans cette activité, l'exploration heuristique des figures, tend à masquer les unités de dimension 2 et à privilégier celles de dimension inférieure, car les unités figurales de dimension 2 ne sont pas discernables. La difficulté de cette tâche consiste en ce dont la représentation graphique d'un quadrilatère (sa forme) n'aide pas l'étudiant à déterminer son nom (tous les quadrilatères ont l'apparence d'un carré, mais ils ne le sont pas tous). Cette représentation des figures rend le problème beaucoup plus difficile du point de vue cognitif. Premièrement, ces figures sont spontanément vues comme des carrés (car les unités figurales de dimension 2 prédominent sur des unités figurales de dimension inférieure). Les constructions ont été faites dans l'environnement de Cabri-Géomètre II, ce qui permet d'effectuer les constructions avec des petites différences dans les mesures des côtés et des angles sans que ces différences soient perceptibles à l'œil. Deuxièmement, certaines figures géométriques contiennent plus d'unités figurales élémentaires que celles requises pour les définir (ou les construire). Troisièmement, les propriétés que les étudiants pouvaient identifier perceptivement ne s'accordaient pas toujours avec celles qui sont utilisées habituellement dans la définition. Pour reconnaître la figure, il faut neutraliser sa perception d'une figure comme unité figurale de dimension 2 et analyser les unités figurales de dimension 1 dans leur combinaison en utilisant le pas de raisonnement. Si l'étudiant n'a pas déjà à l'esprit l'image de chaque propriété et de la figure déterminée par cette propriété, il y a peu de chances qu'il détermine la figure en question. On ne peut pas estimer que la seule lecture de propriété va conduire à la détermination de la figure. Ce comportement repose sur la coordination de deux registres. Notre but est de développer la lecture visuelle des propriétés, leur transcription fidèle, l'image mentale de chaque propriété, la détermination des figures ayant cette propriété et la détermination d'une figure définie par cette (ces) propriété(s).

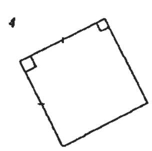
- RÉPONSES VISÉES :

N	Description de propriétés indiquées	Nom
1	4 côtés congrus ⇒ losange, diagonales ⊥ ⇒ losange	Losange
2	1 paire de côtés // ⇒ trapèze, ils (côtés) sont congrus ⇒ parallélogramme	Parallélogramme
3	Polygone à 4 côtés	Quadrilatère
4	Deux angles consécutifs droits ⇒1 paire de côtés // ⇒ trapèze rectangulaire	Trapèze
5	4 côtés congrus ⇒ losange, 1 angle droit ⇒ carré	Carré
6	Diagonales se coupent en leur milieu ⇒ parallélogramme, à angle droit ⇒ losange	Losange
7	4 côtés ⇒ quadrilatère, 2 côtés consécutifs congrus ⇒ quadrilatère	Quadrilatère
8	Diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu ⇒ rectangle	Rectangle
9	Diagonales sont des bissectrices des angles intérieurs ⇒ losange	Losange

- DIFFICULTÉS ANTICIPÉES

Nous anticipons des difficultés dans la reconnaissance des figures 2 et 4.





L'identification perceptive de ces unités ne s'accorde pas avec celles qui sont utilisées habituellement dans la définition. De plus, la détermination de ces figures ne s'effectue pas seulement par l'analyse de chacune des expressions référentielles, mais aussi par l'analyse d'une valeur logique de la combinaison de propriétés.

L'expression symbolique (AD// BC) (figure 2) doit être analysée en combinaison avec la « congruence » de ces côtés. La description des unités figurales de dimension 1 de la figure 4 : « *deux angles consécutifs droits et deux côtés consécutifs congrus »)* exige la déduction (*deux angles consécutifs droits* ⇒1 paire de côtés //). De plus, la propriété « *deux côtés consécutifs congrus* » n'apporte aucune information supplémentaire favorisant la détermination.

La reconnaissance des figures dans cette activité représente pour nous un indice de la compréhension qualitative du concept géométrique correspondant au niveau 4 du modèle de van Hiele.

5.2.5 RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

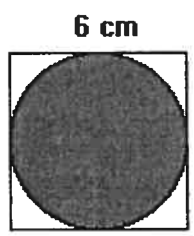
Le but principal que nous visons par la résolution de problèmes géométriques est de vérifier l'emploi de connaissances et de démarches acquises. Le but secondaire est de faire reconnaître aux étudiants l'importance de la planification progressive de ce type d'activité. En nous nous intéressant aux problèmes géométriques qui emploient (ou exigent) le dessin, nous avons créé une banque de problèmes portant sur toutes les notions étudiées au primaire et sur les relations entre ces notions. D'après notre étude des différentes recherches traitant les difficultés de la résolution des problèmes (voir la section 2.1), nous pouvons conclure que les difficultés principales se situent dans la coordination entre la reconnaissance (ou la visualisation) des éléments nécessaires pour la résolution et l'emploi (choisir et appliquer) des concepts correspondants. Il est vrai que dans un problème ordinaire de la géométrie dans lequel la consigne d'un problème est souvent accompagnée d'un dessin, les étudiants n'ont pas besoin d'utiliser toutes les composantes de la figure, mais seulement celles à l'aide desquelles le problème peut être résolu.

En tenant compte de la continuité des apprentissages, les problèmes qui favorisent la visualisation et la sélection des éléments nécessaires à la résolution sont proposés en progression : nous débutons par la reconnaissance des unités de dimension 3 et 2 et en référent aux termes correspondants vers la reconnaissance des unités (ou des éléments des unités) de dimension inférieure. Les activités expérimentales qui contribuent au développement de l'imagination, du vocabulaire et de la pensée logique, favorisent l'acquisition des connaissances permettant la résolution des problèmes. La réussite des étudiants dans la résolution de problèmes dépend tant de leurs expériences géométriques et de leur niveau conceptuel que du choix de problèmes et du nombre de fois que ce type de travail a été proposé.

5.2.5.1 EXEMPLE DE LA DÉMARCHE VISÉE

Donnons un exemple concret tiré de nos expériences (voir la section 1.3.1) :

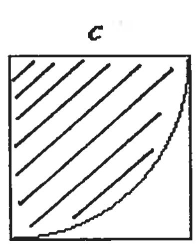
À la question de l'examen final (2001) demandant de trouver l'aire de la partie blanche de la figure, près du tiers du groupe ne répond pas à la question. Cependant, les étudiants connaissent très bien les formules d'aire du carré et du disque.



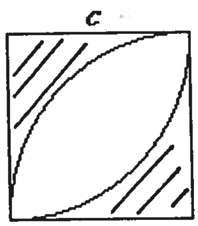
Dans le cadre du dispositif de formation de l'année 2002, nous avons mis l'accent sur la capacité de l'étudiant à « voir » la figure et à lier les données visuelles aux concepts permettant la résolution d'un problème géométrique. Nous avons proposé d'abord l'étape de la lecture du dessin (description des éléments du dessin), d'établissement de relations entre les éléments du dessin et d'évocation des concepts correspondants.

1. Par exemple, pour le problème donné, il fallait nommer les figures (carré, cercle), le rapport entre elles (le cercle est inscrit dans le carré) et leurs propriétés (le diamètre correspond à la mesure du côté), évoquer les relations métriques ($D=2r$, $A_{cercle} = \pi r^2$, $A_{carré} = c^2$) et compléter le modèle mathématique avec les relations spécifiques à la situation ($r=½ c$, $A_{zone\ blanche} = A_{carré} - A_{cercle}$).

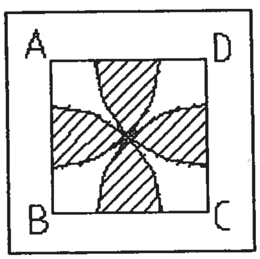
2. Pour résoudre le problème analogue suivant, l'étudiant doit reconnaître le quart d'un disque, trouver l'aire du disque et soustraire le quart de cette mesure de l'aire du carré.

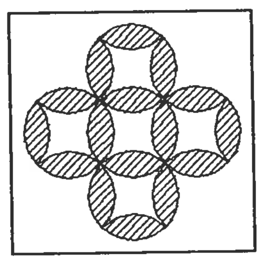


3. En enchaînant avec le problème suivant, nous augmentons le niveau de la difficulté en ajoutant un élément supplémentaire. La résolution de ce problème dépend de la reconnaissance de deux parties hachurées congrues. Du quart du disque, on doit soustraire l'aire d'une partie hachurée (voir le problème précédent).



La suite de problèmes de ce genre n'a pas de limites.





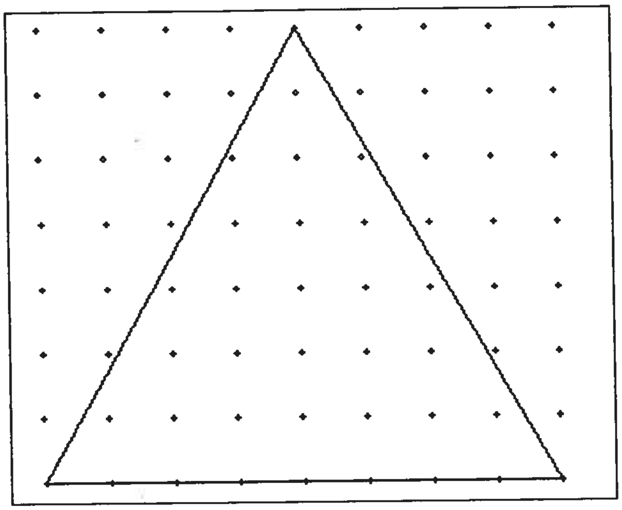
Cependant, en proposant le problème n.3 (ou 4 et 5) sans que les étudiants possèdent les compétences nécessaires à la résolution et en comprennent les enjeux (chercher les figures ou les éléments de figures connues et appliquer les concepts auxquels ils appartiennent), la résolution de ce problème apparaît difficilement envisageable.

À chaque cours, un ou deux problèmes ont été proposés pour la description des éléments et pour l'évocation des concepts et de la démarche de la résolution.

5.2.5.2 Exemples de problèmes

Les différentes démarches acquises dans les activités de formation sont mises en jeu dans la résolution de tâches et de problèmes géométriques. Les deux premières questions font partie de situations d'apprentissage, les deux problèmes suivants ont été proposés aux examens. Les problèmes analysés dans la section 4.2.3.3 se trouvent dans la section « Résolution de problèmes » dans le recueil de textes destiné à ce cours.

a) « *Est-ce que le triangle est équilatéral?* »



Cette situation (voir l'annexe 18.11) est reprise de la communication de Benoît Côté présentée au colloque du GDM en mai 1999. Sur le papier quadrillé les étudiants construisent un triangle ABC de façon suivante : « *De A on compte 8 cases horizontalement pour identifier le point C, ensuite on trouve le milieu du segment AC et partant de ce point verticalement on compte 7 cases pour identifier le point B* ». Côté demande aux étudiants de mesurer à la règle les côtés du triangle ABC et il pose deux questions suivantes :

1. Est-ce que le triangle ABC est équilatéral?
2. Pourquoi la réponse à la question 1 n'a-t-elle rien à voir avec le fait de mesurer à la règle les trois côtés?

Selon la relation de Pythagore, le triangle ci-dessus n'est qu'isocèle, et non équilatéral malgré les apparences. Parfois, les futurs enseignants pensent qu'on peut démontrer par la prise des mesures. Ils doivent comprendre que toute mesure sur une échelle (mesure d'un segment de droite, d'angle en degrés) est une approximation; on ne peut pas utiliser des mesures approchées pour démontrer une égalité comme celle qui concerne dans notre cas la longueur des côtés du triangle.

Les comportements observés par Côté :

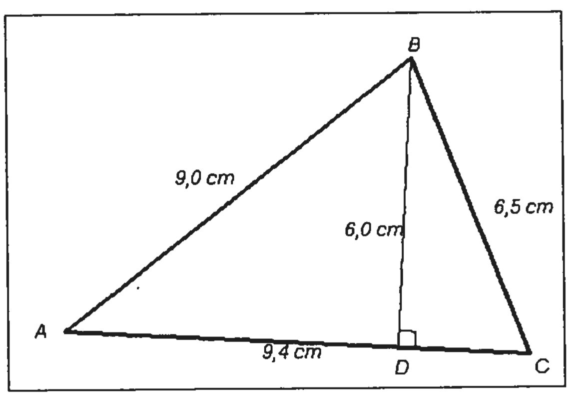
1. La plupart des étudiants conclurent que le triangle est équilatéral.

2. Une partie d'étudiants (qui ont trouvé déjà l'égalité des côtés) demande les mesures des angles.

2. Seulement 3-4 étudiants sur 50 tiennent compte de la construction effectuée et font le calcul.

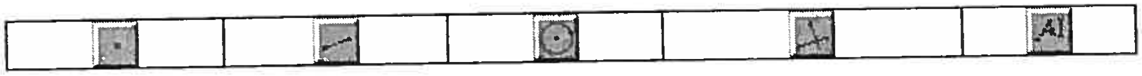
Côté propose ce problème dans les premiers cours de la formation pour amorcer la discussion de la nature des objets géométriques. De notre part, nous avons décidé de présenter ce problème vers la fin des apprentissages pour faire appel aux procédures acquises.

b) « *Construire le triangle* ABC, |AB|=9cm, |BC|=6.5cm, |AC|=9.4cm. *En sachant la mesure de la hauteur* |BD|=6, *pouvez-vous trouver les mesures de deux autres hauteurs sans les mesurer directement?* » (Voir l'annexe 18.10)



La question demande la construction d'un triangle selon trois côtés et l'utilisation de la formule d'aire du triangle. Le problème semble être simple, mais d'un an à l'autre les étudiants éprouvent des difficultés en le résolvant. Ils voient que la hauteur divise le triangle en deux triangles rectangles et ils essayent d'utiliser la relation de Pythagore pour le calcul d'une autre hauteur.

c) *Construire un carré ABCD en n'utilisant que les outils suivants :*



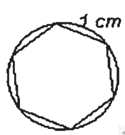
(L'outil « cercle » ne peut être utilisé qu'une seule fois)

	Procédures de construction	**Outils utilisés**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

*Quelle(s) propriété(s) du carré est(sont) en jeu dans cette construction ?*_______________

Cette question (voir l'annexe 19.8) met en jeu la propriété de diagonales du carré, les propriétés du cercle et les démarches et les procédés acquis dans les activités de construction. Selon la démarche choisie, les propriétés suivantes peuvent être utilisées : congruence des rayons, des diamètres; perpendicularité du diamètre et de la tangente; « être inscrit dans le carré » ou « être circonscrit à un carré » (voir les constructions 2, 3 et 5b à l'annexe 20).

d) Trouver l'aire du cercle dans lequel est inscrit l'hexagone régulier de 1cm côté



La démarche de la recherche de solution correspond bien aux objectifs visés par la formation géométrique :

- Décomposer mentalement ou graphiquement des figures planes (l'hexagone régulier se divise en six triangles équilatéraux)
- Reconnaître (ou visualiser) les éléments nécessaires à la résolution (le rayon du cercle correspond à la mesure du côté du triangle équilatéral (R=1)
- Employer les processus correspondants ($A=\pi r^2$, $R=1 \Rightarrow A=\pi$)

5.2.6 SITUATIONS D'ANALYSE

Pour le dispositif de la formation didactique, nous avons conçu des activités qui favorisent la réflexion sur l'organisation des apprentissages et cherchent à développer le point de vue critique et constructif face aux différentes ressources pour l'enseignement. La variété des activités proposées et des formes d'organisation de travail (individuelle, en paires, en équipes et en groupe, analyses de petits extraits ou de situations d'apprentissage) s'explique par les différents objectifs visés par chaque situation de formation : consolider les connaissances géométriques, attirer l'attention sur les phénomènes d'apprentissage et des difficultés possibles des élèves, développer les critères d'analyse, introduire les savoirs didactiques particuliers (des méthodes et des outils favorisant les apprentissages des élèves du primaire et des approches et des méthodes permettant l'organisation des apprentissages).

Les situations proposées pour l'analyse cherchaient à guider les futurs enseignants dans la construction progressive d'un outil d'analyse. Ce dernier permet la modification d'activités en fonction du but de l'apprentissage et sert d'outil à l'analyse et à la conception des situations d'enseignement. Parmi les activités proposées, se trouvent aussi celles qui favorisent la compréhension et l'emploi d'une nouvelle approche (par compétences) pour l'organisation des apprentissages (voir l'exemple dans 5.2.1.1).

Dans le cadre de l'ingénierie du triangle, nous avons proposé des situations d'analyse portant sur le vocabulaire employé dans différentes ressources pour l'enseignement, sur deux activités d'observation et de classification (une – en tant que travail pratique, l'autre comme question de l'examen de mi-session), sur l'analyse du schéma de classification (question de l'examen final). Pour aider les étudiants à surmonter les difficultés éprouvées dans l'analyse de l'activité proposée à l'examen de mi-session, nous avons repris l'analyse de cette activité en classe.

Pour l'ingénierie des quadrilatères particuliers, les activités d'analyses ont porté sur trois schémas de classification différents (travaux pratiques en classe) et sur le vocabulaire employé par les différentes ressources pour l'enseignement (comme devoir hebdomadaire avec la vérification en classe).

5.2.7 SITUATIONS DE CONCEPTION

Les situations de conception mettent l'accent sur les critères d'analyse, sur la modification et l'enrichissement des activités analysées et sur l'organisation des apprentissages. L'objectif que nous visons par ce travail est que le futur enseignant développe la capacité de planifier une séquence d'enseignement de la géométrie et de la mesure pour l'école primaire, d'analyser de point de vue didactique les tâches proposées aux élèves et d'intégrer les activités et les tâches de manuels dans ses propres séquences d'enseignement. Il s'agit des savoir-faire professionnels suivants :

- Déterminer le but et les connaissances en jeu,
- Analyser la structure de l'activité (continuité des apprentissages, liens entre les étapes).
    - Quel est le problème à résoudre?
    - Quelles sont les connaissances préalables qui suffiront à l'élève pour « entrer » dans la situation? Y a-t-il une phase de rappel?
    - Quelles procédures (savoir-faire) sont suffisantes pour résoudre le problème?
    - Quelles sont les étapes d'action d'élève permettant de résoudre ce problème?
- Anticiper les réponses possibles des élèves, préparer les interventions
- Vérifier les connaissances acquises
- Planifier le prolongement

Nous souhaitons aussi que pour la conception des séquences d'apprentissage le futur enseignant utilise les critères développés dans les situations d'analyse (analyser le choix de figures, le vocabulaire employé, les schémas de classification, etc.) et effectue les modifications (s'il y a lieu) pour améliorer la présentation et la réalisation de l'activité existante. Les savoirs d'analyse didactique offrent au futur maître la possibilité d'intégrer les activités et les tâches de manuels dans ses propres séquences d'enseignement.

Les situations de conception ont été proposées dans le cadre de chacune des ingénieries de notion géométrique. La conception de situations portant sur la notion du triangle et des quadrilatères particuliers faisait partie du travail pratique correspondant à la synthèse des activités de l'enseignement de polygones (triangle, quadrilatère, polygones : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, etc., polygones concaves/convexes, polygones réguliers). Il s'agissait de la planification d'une famille d'activités pour les trois cycles de l'enseignement primaire. Chaque équipe était responsable d'une notion particulière et d'un cycle d'enseignement. La conception d'une séquence d'enseignement a été proposée aussi comme travail de session où les étudiants ont été invités à élaborer des activités d'enseignement originales ou sur une base des situations et des tâches proposées par les manuels scolaires.

5.3 ANALYSE A PRIORI DU DISPOSITIF DE RECHERCHE

En tenant compte de contraintes de situation de formation et de ses différents enjeux, la planification des situations de formation a été effectuée de façon à mener progressivement la majorité des étudiants vers la cohérence des actions et vers la recherche du sens qui va favoriser la structuration des connaissances, leur modification et leur consolidation. Cette organisation vise donc le transfert progressif de responsabilités et le travail autonome d'un étudiant. Nous avons cherché à analyser comment cette organisation coordonne les savoirs géométriques et didactiques et participe à l'évolution géométrique et didactique du futur maître dans les deux ingénieries.

Avant de présenter le dispositif de formation, nous décrivons brièvement les événements qui ont précédé le déroulement des ingénieries du triangle et du quadrilatère et qui sont importants pour comprendre la continuité de la formation et les savoirs géométriques et didactiques étudiés.

5.3.1 ÉTAPES PRÉALABLES AU DÉROULEMENT DU DISPOSITIF

Parmi les étapes les plus importantes préalables au déroulement du dispositif, nous voulons préciser l'introduction à la formation, l'ingénierie des solides et l'introduction à la géométrie plane. Dans le tableau suivant, nous présentons les objectifs (géométriques et didactiques) communs aux activités préalables.

<table>
<tr><th>Activités</th><th>Objectifs visés</th></tr>
<tr><td><u>Introduction à la formation</u>

(Voir la section 5.2.1.1)</td><td rowspan="3"><u>Objectifs géométriques</u> :
- favoriser le développement de la visualisation (reconnaissance et évocation des différentes figures, anticipation de maximum de réponses possibles) et du langage (utiliser le maximum de propriétés pour décrire la figure)
- favoriser la démarche de classification (observation, recherche de ressemblances et de différences, choix du critère de classification, choix du schéma)
<u>Objectifs didactiques</u> :
- faire participer et faire connaître aux futurs maîtres les démarches visées par les activités d'observation, de manipulation, de construction et de résolution des problèmes et leur rôle dans la structuration des expériences géométriques des élèves
- favoriser la réflexion sur l'organisation de l'activité : buts, connaissances visées, étapes, choix de figures proposées à l'observation, précision des consignes, utilité de différents schémas
- découvrir les étapes d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation dans une situation d'apprentissage et les intégrer dans l'organisation des apprentissages
- déterminer des compétences visées par l'activité analysée</td></tr>
<tr><td><u>Ingénierie des solides</u>

(Voir les activités d'observation et de manipulation dans la section 4.2.1)</td></tr>
<tr><td><u>Introduction à la géométrie plane</u>

(Voir la description des activités d'observation dans la section 4.2.2)</td></tr>
</table>

5.3.2 DESCRIPTION DU DISPOSITIF

Nous analysons à présent le dispositif de recherche pour les ingénieries du triangle et du quadrilatère. Cette analyse présente chaque ingénierie comme une structure qui réunit les objectifs de l'enseignement de la géométrie, la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique et différents types d'activité.

5.3.2.1 ANALYSE A PRIORI DE L'INGÉNIERIE DU TRIANGLE

Afin de démontrer la progression des apprentissages et les liens entre les situations, nous avons fait ressortir toutes les questions principales posées par les situations (deuxième colonne) et nous les relions aux savoirs visés (décrits à l'annexe 8 et à l'annexe 9) et aux conduites anticipées (troisième colonne). Les numéros dans la première colonne (voir le Tableau XXII) réfèrent à la numérotation des situations selon l'ordre dans lequel ces situations ont été présentées aux étudiants. Pour certaines questions, nous avons anticipé les difficultés possibles. Cette description s'appuie sur nos observations de conduites des étudiants dans les années précédentes. Nous pouvons constater que les premières situations réfèrent davantage aux niveaux 2 ou 3 et les suivantes aux niveaux 3 et 4. (La description détaillée des situations est présentée à l'annexe 18 qui correspond à l'ingénierie du triangle).

Tableau XXII. Ingénierie du triangle

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
1. Test d'entrée	**Question 2 (c)** : *Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont congrus et ayant un angle droit*	**-Déterminer la figure selon les propriétés décrites** (descriptions habituelles) (registre *discursif/ figural*) **Réponses anticipées :** -triangle -triangle isocèle ou triangle rectangle -isocèle rectangle	 1 2 3
2. Rappel (révision de propriétés)	**Étape 1. Révision des propriétés** **Consigne** : Imaginez que vous êtes des élèves de 3e année du primaire. L'enseignante vous distribue les feuilles sur lesquelles vous retrouvez plusieurs triangles de différentes formes et grandeurs. Ils possèdent une propriété commune. Vous avez à votre disposition la règle graduée, l'équerre, le papier calque, le compas. **Question 1** : *Quelle propriété, selon vous, pourront retrouver les élèves du primaire?* (Selon les réponses des étudiants, nous avons posé les questions concernant le nom de chacune des classes des triangles définies par caractéristique nommée). **Question 2** : *Comment s'appelle le triangle ayant …*	**-Reconnaître les ressemblances des figures** (ex. : deux côtés (angles) de mesure égale, trois côtés (angles) de mesure égale, angle droit, angle obtus, trois côtés de mesure différente, trois angles aigus) (Nous ne pensons pas que les élèves du primaire retrouveront les propriétés suivantes : « trois côtés de différente longueur » et « trois angles aigus ». Cependant, nous anticipons ces propriétés de la part des étudiants en formation.) **-Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites** (descriptions habituelles) (ex. : *Deux côtés de mesure égale ⇒ triangles isocèles)*	2 2
	Étape 2. Identification **Consigne** : Observer et nommer les triangles dans la collection suivante (voir l'annexe 11.1) Les questions suivantes cherchent à provoquer le questionnement sur les phénomènes d'apprentissage : « position inhabituelle », choix de propriétés pour nommer le triangle, choix du critère pour regrouper les triangles **Question 1 :** *Comment déterminez-vous le nom du triangle? Selon quels critères?* **Question 2 :** *Comment peut-on regrouper les triangles? Selon quels critères?* **Question 3 :** *Pourquoi la reconnaissance de triangle (A, G, H ...) est-elle difficile?*	**- Identifier des figures géométriques** **- Reconnaître une figure dans sa représentation non-verticale** **Difficultés anticipées :** - la reconnaissance de triangles A, G, H sera difficile (position inhabituelle) - l'emploi d'une seule caractéristique pour nommer le triangle	1-2-3

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
3. Classification des triangles (diagramme de Carroll)	**Étape 1. Représentation des classes** **Question 1 :** *Selon les critères nommés à l'étape précédente, comment peut-on modéliser la représentation de différents triangles?* (Nous faisons le choix du diagramme de Carroll, car l'emploi du diagramme à branches est prévu à la suite de l'analyse du vocabulaire (activité suivante), celui du diagramme de Venn a été abordé dans l'ingénierie des solides et des quadrilatères et sera proposé en tant qu'une question à l'examen de mi-session.) **Consigne :** Analyser les liens qui existent entre les deux caractéristiques et représenter les différents triangles en utilisant le diagramme de Carroll (Voir l'analyse du contenu 4.2.3.1) **Question 2 :** *Comment peut-on représenter les caractéristiques de propriétés par des symboles?*	- Les étudiants proposent d'utiliser les différents schémas (Carroll, à branches, de Venn) (ces savoirs ont été travaillés dans l'ingénierie des solides) **- Utiliser des schémas, des tableaux et des diagrammes pour la classification des figures** **- Visualiser (et représenter graphiquement) un triangle selon les deux caractéristiques nommées** Difficultés anticipées : - représenter le triangle isocèle rectangle, isocèle obtusangle et scalène obtusangle - accepter les deux cases vides **- Employer les symboles pour désigner l'égalité ou la différence des mesures des côtés ou des angles** (tirets d'égalités et de différence, marques d'angles)	 2-3 2-3 3
	Étape 2. Outil de représentations **Consigne :** Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des triangles (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle peut-il favoriser le travail sur la variété de représentations de triangles et sur leurs propriétés? (Voir la figure 11 dans la section 5.2.2.1) **Questions** : - *Un triangle scalène, peut-il être obtusangle? rectangle? acutangle?* - *Peut-on avoir un triangle isocèle obtusangle? rectangle? acutangle?* - *Le triangle équilatéral peut-il être acutangle?* - *Combien de représentations différentes peut avoir le triangle isocèle rectangle? le triangle scalène obtusangle? le triangle équilatéral?*	**- Visualiser (et représenter à l'aide d'outil) une variété des triangles répondant aux caractéristiques nommées** Savoir didactique : Emploi des modèles physiques pour l'enseignement (Ex. En tirant sur l'élastique, on peut favoriser la visualisation rapide d'un triangle selon les propriétés annoncées, enrichir le répertoire de représentations) **- Déterminer si une figure donnée appartient ou non à une catégorie donnée** **- Justifier la réponse, l'énoncé, la solution, etc.** (Ex. : Un triangle scalène peut être obtusangle (rectangle, acutangle). C'est un triangle ayant trois côtés de longueur différente et l'un de ses angles est obtus (droit, aigu).)	2-3 3 3

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
4. Analyse du vocabulaire	**Question :** *Que représente pour vous le travail appelé « Analyse des énoncés »?* (Nous prévoyons la discussion sur la recherche de termes imprécis, des affirmations fausses, sur l'analyse de la suffisance et de la redondance des propriétés dans l'énoncé, etc. **Consigne :** Vous avez quatre extraits tirés de différentes sources didactiques. Vous devez les analyser du point de vue mathématique et didactique (trouver l'élément problématique, réfléchir sur les conséquences didactiques). (Voir l'annexe 11.2 et l'analyse dans la section 4.4.3) (Cette activité est l'une des premières consacrées à l'analyse des extraits et pour que les étudiants comprennent le défi de l'analyse et l'importance du vocabulaire précis pour la construction des concepts géométriques, au cas de difficultés, nous allons analyser chaque mot de chaque énoncé.)	**- Connaître les définitions habituelles** **- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.** **- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.** **- Déterminer les conséquences logiques de données** **- Distinguer la description de définition** **- Trouver un contre-exemple** **Difficultés anticipées :** - les expressions « peut être » et « quelquefois » du premier extrait et le terme « quelconque » du dernier extrait sont les plus difficilement repérables.	3 3-4 3-4 4 4 3-4
5. Classification des triangles (diagramme à branches)	**Étape 1. Classification** **Consigne** : Présenter la classification de toutes les classes de triangles en utilisant le diagramme à branches et trouver la place d'un triangle « quelconque » dans ce diagramme.	**- Concevoir des schémas, des tableaux et des diagrammes pour la classification des figures** **- Formuler les relations d'inclusion** **Difficultés anticipées :** - Absence de relation isocèle/équilatéral	3 3
	Étape 2. Évocation des critères **Question 1 :** *Comment peut-on regrouper les triangles? Selon quels critères?* **Question 2 :** *Quels critères appliquez-vous pour juger de la pertinence de l'activité d'apprentissage?* **Consigne** : Analyser l'activité de classification des triangles. Proposer les modifications, si nécessaire. (Voir l'annexe 11.1, l'analyse dans la section 4.4.4 et les schémas de classification dans la section 4.2.3.1).	**Savoirs didactiques :** Emploi des critères d'analyse : but, connaissances en jeu, ordre des étapes, choix de figures, choix de représentations, choix du critère de classification, choix du schéma (ces savoirs ont été travaillés aux étapes précédant à l'expérimentation, voir la section 5.3.1) **- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.** **- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.** **- Déterminer les conséquences logiques de données** **- Concevoir des schémas, des tableaux et des diagrammes pour la classification des figures**	3-4

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
6. Triangle isocèle (détermination des propriétés particulières et construction des triangles)	**Étape 1. Identification des propriétés** **Rappel :** Observer les triangles, trouver la ressemblance et les différences. (collection des triangles isocèles)	**- Reconnaître les ressemblances et les différences des figures** Savoirs didactiques visés : Démarche d'observation (recherche d'une propriété commune, identification du nom)	2-3
	Étape 2. Outil de représentation **Question :** *Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des triangles (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle peut-il favoriser le travail sur la variété de représentations de triangles isocèles et sur leurs propriétés?* (Voir la figure 12 dans la section 5.2.2.1) **Consigne :** Déterminer les limites de mesure des angles congrus d'un triangle isocèle acutangle, rectangle et obtusangle. (Nous nous arrêtons spécifiquement sur la représentation du triangle dont la mesure d'angle entre deux côtés congrus est égale à 60° et à 180°)	Savoir didactique : Emploi des modèles physiques pour l'enseignement (Ex. En changeant l'ouverture entre deux pailles ou en tirant sur l'élastique, on peut enrichir le répertoire de représentations du triangle isocèle, favoriser la visualisation du passage d'un triangle isocèle obtusangle à acutangle par le triangle rectangle et le triangle équilatéral comme cas particulier d'un triangle isocèle acutangle; Savoirs géométriques : **- Visualiser (et représenter) la variété des triangles isocèles** **- Décrire les propriétés d'une figure** **- Concevoir la définition conceptuo-lexicale**	 3 3 3
	Étape 3. Construction **Consigne :** Construire un triangle isocèle. Décrire les procédures de construction. Quelle propriété(s) est(sont) en jeu dans la construction? (Voir l'annexe 12) (Nous anticipons les constructions générales et concrètes qui utilisent les propriétés essentielles (côtés et angles) et de la hauteur (médiane et bissectrice) (voir les sections 4.2.2 et 4.2.3.2). À l'étape de validation, nous associons les constructions au niveau de développement de l'élève.	**- Effectuer les différentes constructions de la même figure** **- Décrire les procédures effectuées** **- Utiliser le langage précis dans la description** - **Difficultés anticipées :** (voir la section 5.2.3.1) - Description (fidèle) des procédures - Emploi du langage précis	2-3
	Étape 4. Nombre minimal **Question** : *Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le triangle superposable au triangle isocèle caché ?* (Effectuer la construction, décrire les procédures de construction).	**- Déterminer le nombre minimal de données permettant la construction** **- Tracer les figures selon le nombre minimal de données** **- Effectuer les différentes constructions d'une figure en utilisant la même propriété** **Difficultés anticipées :** - Comprendre la consigne - Réduire le nombre de propriétés suffisantes pour la construction - Description (fidèle) des procédures - Emploi du langage précis	3-4 3-4 3-4

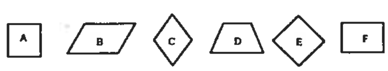
N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
	Étape 5. Description des propriétés **Consigne** : Décrire les propriétés utilisées dans les constructions présentées. (Cette étape servira à la précision de termes employés : *segment, hauteur, milieu, médiane, médiatrice et bissectrice.*)	**- Décrire les propriétés d'une figure** **- Utiliser le langage précis dans la description** (Ex. : Congruence de deux côtés et de deux angles, propriété de la h (médiane, bissectrice, axe de symétrie).	2-3
	Étape 6. Analyse des étapes **Question :** *Quelles sont les étapes principales de cette activité? Quel est le rôle de l'enseignant dans la gestion de l'activité ?* (Voir la section 5.2.3.1)	**Savoirs didactiques :** - Démarche de construction (construire, décrire les procédures et les propriétés utilisées) -Analyse de la structure de l'activité et du rôle de l'enseignant dans la gestion (approche par situations; situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation)	
7. Triangle équilatéral	**Consigne 1** : Trouver trois façons de construire un triangle équilatéral, décrire les procédures et les propriétés utilisées pour chacune des constructions. **Consigne 2 :** Rechercher les nouvelles constructions du triangle équilatéral (devoir)	**- Effectuer les différentes constructions de la même figure** **- Décrire les procédures effectuées** **- Utiliser le langage précis dans la description des propriétés** (Ex. : Congruence de côtés et des angles, propriété de la h, relation avec le cercle circonscrit, angle au centre, invariance par la rotation autour du centre à l'angle de 120°) Nous anticipons les constructions semblables à celles décrites dans la section 4.2.2. et 4.2.3.2) et moins de difficultés dans la description des étapes de construction et dans la détermination d'une propriété en jeu de la construction.	3-4
8. Examen de mi-session	**Question 4**. Voici un extrait du manuel scolaire de 4e année. Lire l'introduction ci-contre et répondre aux questions 1-5 (Voir l'annexe 18.8 et l'analyse dans la section 4.4.4 et 4.2.3.1).	**- Identifier les triangles** **- Classer les triangles dans le schéma existant** **- Concevoir le schéma de classification** - **Appliquer les savoirs didactiques** : analyser le but de l'activité, l'ordre des étapes, le choix de représentations graphiques (forme, grandeur, disposition, échantillon des figures, etc.), l'exactitude du schéma de classification, du vocabulaire **Difficultés anticipées :** - emploi des critères d'analyse (car ils ne sont pas spécifiés par les questions). - emploi du diagramme de Venn (ce type de diagrammes était utilisé pour la classification des solides, des trajets, des quadrilatères, mais pas pour les triangles)	2 3 3
	Question 5 : *De quelle(s) information(s) minimale(s) avez-vous besoin pour construire le triangle superposable à un triangle caché?* Écrire deux réponses possibles.	**- Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure**	3-4

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
9. Travail sur les erreurs	**Question** : *Quels critères de votre liste pouvez-vous appliquer pour analyser cette activité?* Nous souhaitons que l'analyse effectuée en équipes suivie d'une discussion permette aux étudiants de comprendre leurs difficultés d'application des connaissances qu'ils possèdent.	**Appliquer les savoirs didactiques** : analyser le but de l'activité, déterminer les connaissances en jeu, analyser la phase de rappel, l'ordre des étapes, le choix de figures, l'exactitude du schéma de classification, du vocabulaire employé et proposer les ajustements et corrections	
10. Cabri-Géomètre II	**<u>Étape 1. Rappel</u>** **Question** : *De quelle figure s'agit-il?*	**- Déterminer le nom de la figure**	3
	<u>Étape 2. Construction</u> **Consigne** : Regardez votre liste de constructions du triangle équilatéral. En sachant les outils de Cabri, pouvez-vous inventer les nouvelles constructions? Décrire les procédures de construction.	**- Appliquer les connaissances et les démarches acquises dans le contexte nouveau**	3
	<u>Étape 3. Résolution de problèmes</u> **Consigne :** Construire le triangle ABC, $\mid AB\mid=9$cm, $\mid BC\mid=6.5$cm, $\mid AC\mid=9.4$cm. *De quels outils de Cabri avez-vous besoin pour la construction?* (Voir 4.2.3.2 et 5.2.2.2) **Question** : *En sachant la mesure de la hauteur $\mid BD\mid=6$, pouvez-vous trouver les mesures de deux autres hauteurs sans les mesurer directement?*	**- Tracer des figures à partir des données concrètes** **- Concevoir un plan de résolution d'un problème** Difficultés anticipées : - évoquer la formule d'aire pour calculer les mesures	3 4
11. RDP	**Consigne** : *Est-ce que le triangle ABC est équilatéral?* (Voir l'analyse dans la section 5.2.2.2)	**- Déterminer le nom d'une figure dans sa représentation inhabituelle** **- Déterminer les conséquences logiques de données visuelles ou verbales**	4
12. Examen final	**Question 13 :** Déterminer les noms des triangles. Faire une critique didactique de cet extrait. (Annexe 18.12, l'analyse dans la section 4.4.4)	- Déterminer le nom du triangle **- Appliquer les savoirs didactiques** : analyser l'exactitude du schéma de classification (l'emploi du diagramme de Venn pour la classification des triangles)	A (2) B (4) 3
	Question 11. Effectuer la rotation du triangle ABC. L'angle de rotation est 30°. Décrivez les étapes de construction.	**- Tracer les figures obtenues par la transformation** **- Décrire les procédures de la construction (emploi du langage géom.)**	3
13. TS	Élaboration et analyse d'une séquence d'enseignement	- Application des savoirs géométriques et didactiques travaillés lors du cours	

5.3.2.2 Analyse a priori de l'ingénierie du quadrilatère

Dans le Tableau XXIII, nous présentons la description des situations de formation correspondant à l'ingénierie du quadrilatère. La description détaillée est présentée à l'annexe 19.

Tableau XXIII. Ingénierie du quadrilatère

<table>
<tr><th>N</th><th>Questions, problèmes, tâches</th><th>Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées</th><th>Niveau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Test d'entrée (Annexe 10)</td><td>Question 1. Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères suivants selon le tableau

ci-dessous :
<table><tr><th>Quadrilatères</th><th>Réponses</th></tr><tr><td>Carré</td><td></td></tr><tr><td>Losange</td><td></td></tr><tr><td>Rectangle</td><td></td></tr><tr><td>Parallélogramme</td><td></td></tr><tr><td>Trapèze</td><td></td></tr></table></td><td>- Reconnaître la figure plane dans sa représentation habituelle

- Reconnaître la figure dans sa représentation inhabituelle (position inhabituelle,
concepts
- Utiliser les schémas (diagrammes, tableaux, etc.) pour la classification des figures</td><td>1 (A, B, C, D, F)

1 (E)

3
2</td></tr>
<tr><td>Question 2. Qui suis-je?
a) Je suis un quadrilatère ayant 4 angles droits.
Réponse : ____________

b) Je suis un quadrilatère dont des diagonales se coupent en leur milieu à angle droit.
Réponse : ____________</td><td>- Déterminer (visualiser ou évoquer) le nom d'une figure (ou des figures) selon les propriétés décrites (descriptions habituelles)</td><td>2
(1fig.)
3
(2fig.)</td></tr>
<tr><td>Question 3 : Comment appelle-t-on?
a) Quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux s'appelle
____
b) Quadrilatère dont les côtés sont congrus s'appelle ____________</td><td>- Connaître les définitions habituelles (caractéristiques)</td><td>3</td></tr>
</table>

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexe 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
2. Construction du carré	**Étape 1. Rappel** **Question 1:** *Quelle démarche avons-nous utilisée pour dégager la classe de polygones? de quadrilatères?* **Consigne :** Observer et identifier les polygones. Identifier et décrire les quadrilatères. (Voir l'annexe 13.1) **Question 2:** *Quel quadrilatère pensez-vous mieux connaître? Comment pouvons-nous le définir? Pouvez-vous le définir autrement?*	**Savoirs didactiques** : Évocation d'une démarche d'observation et de distinction de propriétés **Savoirs géométriques** : **- Identifier des figures géométriques** **- Décrire les propriétés d'une figure (côtés congrus, parallèles, perpendiculaires)** **- Connaître les définitions habituelles** **- Déterminer les conséquences logiques de données** **- Distinguer la description de la définition** **- Trouver un contre-exemple** **Difficultés anticipées :** - Emploi de descriptions de propriétés des quadrilatères (et non de définitions) (Nous prévoyons une discussion sur la distinction entre *description/définition* et sur la précision de définitions du rectangle et du losange)	2 2 3 3-4
	Étape 2. Construction **Consigne** : Construire un carré. Décrire les procédures de construction. Quelle propriété(s) est(sont) en jeu dans la construction? (Voir l'annexe 14 et l'analyse dans la section 5.2.3.1) Pour éviter la construction qui utilise la démarche suivante (côté, angle droit, etc.), nous l'avons fait en groupe. À l'étape de validation, nous associons les constructions au niveau de développement géométrique de l'élève)	**- Effectuer les différentes constructions de la même figure** **- Décrire les procédures effectuées** **- Utiliser le langage précis dans la description** (Nous anticipons les constructions qui utilisent les propriétés essentielles (côtés et angles) et de diagonales (perpendiculaires, se coupent en leur milieu, congrues, axes de symétrie, bissectrices) et la relation carré/cercle (voir la section 4.2.3.2). **Difficultés anticipées :** Nous anticipons moins de difficultés que dans l'activité de construction précédente (triangle isocèle), une variété de constructions et plus de descriptions précises	2-4 2-4 2-4
	Étape 3. Nombre minimal **Question :** *Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le carré superposable à un carré caché ?* (Effectuer la construction, décrire les procédures de construction)	**- Déterminer le nombre minimal de données permettant la construction** **- Tracer les figures selon le nombre minimal de données** **- Effectuer les différentes constructions d'une figure en utilisant la même propriété** (Nous anticipons les constructions qui utilisent le « côté », la « diagonale », A, P, le rayon du cercle en tant que donnée) **Difficultés anticipées :** - Moins de difficultés à comprendre la consigne, à réduire le nombre de propriétés suffisantes pour la construction	2 2-4 3

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
3. Visualisation des quadrilatères	**Étape 1. Description et visualisation des propriétés** **Consigne 1** : Tracer le tableau à double entrée contenant trois colonnes. Dans la première colonne, décrire les propriétés retrouvées par vous dans l'activité précédente. Dans la deuxième colonne, déterminer le nom du quadrilatère défini par chaque propriété transcrite. (Voir le schéma dans la section 4.2.3.1) **Consigne 2** : Nous vous proposons d'utiliser le jeu créatif de construction tridimensionnelle pour créer les modèles physiques de représentation des quadrilatères qui travaillent les propriétés des côtés et des angles et ceux qui permettent de visualiser les propriétés de diagonales (voir la figure 13 dans la section 5.2.2.1).	**- Utiliser le langage précis dans la description** **- Déterminer le nom de la figure selon les propriétés décrites (descriptions habituelles et non)** **- Visualiser une variété de figures répondant aux caractéristiques nommées** Nous anticipons la description de dizaine de propriétés **Difficultés anticipées :** - liées à la représentation mentale d'une figure déterminée par la propriété nommée et des figures qui la possèdent Nous prévoyons les propositions suivantes : (a) côtés et angles La déformation du parallélogramme favorise l'analyse de propriétés qui changent et qui restent sans changement. La déformation du losange permet de voir le carré comme son cas particulier et de concevoir une nouvelle définition « un losange ayant des angles droits » b) diagonales Les différentes dispositions de deux pailles congrues (et non-congrues), qui se coupent en leur milieu (ou non) permettent de représenter un ensemble de quadrilatères et des quadrilatères particuliers : un rectangle (et un carré comme son cas particulier) et un parallélogramme (et un losange comme son cas particulier).	2-3 3-4 3-4
	Étape 2. Conception de définitions conceptuo-lexicales et constructives **Consigne** : Si nous voulons définir le carré, quelle propriété faut-il ajouter à celle transcrite dans la première colonne? Déterminer et décrire cette propriété dans la troisième colonne. (Nous intervenons à la conception de deux premières définitions) **Question :** Comment les manuels scolaires ont-ils fait le choix de définitions? Selon quels critères?	**- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives** **- Déterminer les conséquences logiques de données verbales** **- Déterminer le nom de la figure selon les propriétés décrites (descriptions habituelles et non)** **- Trouver un contre-exemple** **Difficultés anticipées :** liées à la représentation mentale d'une figure déterminée par la propriété nommée et des figures qui la possèdent (Nous voulons provoquer la réflexion sur les propriétés visuelles marquantes et amorcer la discussion sur les définitions caractéristiques et constructives)	3-4 3-4 3-4 3-4

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
4. Analyse des propriétés des quadrilatères	**Étape 1. Description et analyse des propriétés. Suffisance de propriétés pour définir.** **Consigne** : Dans le tableau ci-dessous, décrire les propriétés particulières des côtés, des angles et des diagonales de parallélogrammes, de rectangles, de losanges et de carrés. Encercler les propriétés qui déterminent la classe correspondante. (Voir le schéma dans la section 4.2.3.1)	**- Décrire les propriétés des quadrilatères** **- Analyser l'appartenance d'une propriété à une classe donnée et la détermination d'une classe de figures** **- Concevoir les définitions constructives** **- Trouver un contre-exemple** **Difficultés anticipées :** - la distinction description/définition, appartenir/définir, - la recherche du contre-exemple	2-3 3-4 3-4 3-4
	Étape 2. Analyse du vocabulaire **Consigne** : Analyser les définitions, les termes, les représentations de point de vue mathématique (sont-ils précis) et de point de vue du développement conceptuel de l'élève (sont-ils pertinents)? (Voir l'annexe 13.2 et l'analyse dans la section 4.4)	**- Connaître les définitions habituelles** **- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.** **- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.** **- Déterminer les conséquences logiques de données** **- Distinguer la description de la définition** **- Trouver un contre-exemple** **Savoirs didactiques** - l'importance du vocabulaire précis pour la construction des concepts géométriques - phénomène *figure/concept,* - détermination du but de l'activité	3 4 4 4 4 3-4
5. Classification des quadrilatères	**Consigne :** Voilà une activité tirée d'un cahier d'élève. Elle contient trois questions : transformer la description en une définition, justifier les énoncés (Vrai ou Faux), analyser le schéma de classification des quadrilatères particuliers et proposer une modification. (Voir l'annexe 13.3 et l'analyse dans les sections 4.4.3 et 4.4.4) **Étape 1. Justification des énoncés** **Étape 2. Analyse du schéma**	**- Formuler les relations d'inclusion** **- Justifier l'énoncé** **- Déterminer la partie redondante de la définition** (Nous anticipons l'autonomie dans le travail (les étudiants comprennent le défi) et la réussite dans les étapes 1 et 2) **Savoirs didactiques :** - Appliquer les savoirs didactiques : choix du critère de classification et choix et exactitude du diagramme de classification **Difficultés anticipées :** - analyse et modification du schéma (Nous organisons la discussion sur l'emploi de représentations graphiques, sur le sens de la flèche et sur la hiérarchisation de classes)	3 3 4
	Étape 3. Application des connaissances **Consigne** : Analyser le schéma de classification des quadrilatères. Justifier vos commentaires. Proposer les modifications. (Voir l'annexe 13.4 et l'analyse dans la section 4.4.4). **Question** : *Quelles relations entre les classes de quadrilatères particuliers ne sont pas respectées par ce schéma?* Justifier.	**Savoirs didactiques :** - Appliquer les savoirs didactiques : choix de représentations graphiques, choix du critère de classification et choix et exactitude du diagramme de classification (Nous anticipons une aisance dans les modifications et dans les justifications)	

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
6. Détermination du nom	**Question 1.** *Sommes-nous des parallélogrammes?* **Question 2.** *Sommes-nous des carrés ?* (Voir l'annexe 15 et l'analyse dans la section 5.2.4.1)	**- Déterminer le nom d'une figure (unité figurale de dimension 2 qui n'est pas discernable) selon l'analyse de propriétés marquées par des symboles** **Difficultés anticipées :** - liées à la représentation mentale d'une figure selon la combinaison de propriétés - emploi du raisonnement	3-4
7. Constructions avec Cabri-Géomètre II	**Étape 1. Comparaison des constructions** **Consigne :** Choisir 3 constructions différentes d'un carré effectuées dans un environnement papier-crayon. (Voir le tableau de constructions d'un carré – Situation 2.) *Est-il possible d'effectuer les mêmes constructions dans un environnement de Cabri?* Décrivez les outils.	**- Appliquer les connaissances acquises :** effectuer les différentes constructions de la même figure, décrire les procédures effectuées, utiliser le langage précis dans la description **Difficultés anticipées :** - liées à la connaissance du logiciel	3-4
	Étape 2. Conception d'une séquence **Consigne :** Organiser un environnement pour travailler l'inclusion des classes de parallélogrammes. *Comment cet environnement peut-il favoriser le travail sur les relations entre les classes*?	**Appliquer les connaissances géométriques :** - propriétés du parallélogramme - démarches de construction **et didactiques :** - méthode de manipulation de modèles physiques pour représenter les différents quadrilatères particuliers - méthode d'observation	3-4
8. Examen de mi-session	**Question1.** Voici quelques énoncés des quadrilatères particuliers (10 énoncés*)* Dans un tableau suivant, donnez les numéros d'énoncés qui **définissent** les carrés, les rectangles, les losanges, les parallélogrammes et les trapèzes.	**-Détermination du quadrilatère selon les propriétés décrites** **Difficultés anticipées :** - dues à la détermination du quadrilatère selon la combinaison inhabituelle de propriétés et à la distinction « définition / appartenance »	3-4
	Question 2 : La définition la plus répandue du rectangle est *« Quadrilatère ayant 4 angles droits »* et celle du losange est *« Quadrilatère ayant 4 côtés congrus»*. Pouvez-vous donner une autre définition de chacun de ces quadrilatères.	**- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives** **Difficultés anticipées :** - emploi de propriétés suffisantes pour définir	4
	Question 7 (Cabri) : Construire un carré ABCD en n'utilisant que les outils suivants : point, segment, cercle, droite perpendiculaire (L'outil cercle ne peut être utilisé qu'une seule fois). (Voir la section 5.2.2.2)	**- Tracer des figures à partir des données abstraites** **- Concevoir un plan de résolution d'un problème** **Difficultés anticipées :** - visualiser les relations possibles entre les propriétés du carré et du cercle	3-4 3-4

N	Questions, problèmes, tâches	Savoirs visés (annexes 8 et 9), conduites et difficultés anticipées	Niveau
.9. Mini-test	**Question 3 :** Déterminer si l'énoncé est juste pour définir le carré, insuffisant ou redondant. Dans le cas d'insuffisance, déterminer le quadrilatère défini par l'énoncé. Souligner la partie redondante de l'énoncé (s'il y a lieu). (Voir l'annexe 17)	**- Déterminer le nom de la figure selon la description inhabituelle (définitions constructives)** **- Déterminer si l'énoncé est suffisant pour définir une figure (classe)** **- Déterminer la partie redondante de la définition** **<u>Difficultés anticipées :</u>** - identification de la partie redondante dans la définition.	3-4 4 4
	Question 4 : Déterminez le nom du quadrilatère.	**- Déterminer le nom de la figure à partir de la lecture du dessin**	3
10. Examen final	**Question 1.** Répondre aux questions suivantes en cochant la ou les réponses appropriées : a) *Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est* : ☐ un carré ☐ un losange ☐ un rectangle ☐ aucune des réponses précédentes b) *Un trapèze dont les deux bases ont la même longueur est* : ☐ un carré ☐ un losange ☐ un rectangle ☐ un parallélogramme ☐ aucune des réponses précédentes	**- Déterminer le nom de la figure selon la description inhabituelle** **<u>Difficultés anticipées</u>** : - analyse de l'énoncé (description inhabituelle) selon la vérification de sa possibilité à définir une classe des quadrilatères	4
	Question 2. Dans le tableau ci-dessous, décrivez les propriétés indiquées de chacun des quadrilatères et déterminez son nom. Sont-ils des trapèzes ?	- Décrire les propriétés marquées par des symboles - Déterminer les conséquences logiques de certaines données - Déterminer le nom d'une figure (unité figurale de dimension 2 qui n'est pas discernable) selon la lecture du dessin - Justifier la réponse **<u>Difficultés anticipées :</u>** - à déterminer la figure 2 (emploi du raisonnement)	3-4
11. TS	**Le travail de session :** Élaboration et analyse d'une séquence d'enseignement	- Application des savoirs géométriques et didactiques travaillés lors du cours	

5.3.2.3 Analyse a priori des liens entre les ingénieries

Cette analyse cherche à montrer les liens entre les deux ingénieries à travers la description des stratégies et méthodes employées et les savoirs géométriques et didactiques visés. Pour faciliter la lecture de la présentation du dispositif, nous expliquons les éléments employés dans sa description. Nous avons découpé le dispositif de recherche selon les niveaux : *visuel et descriptif/analytique* (5.3.2.3.1, Tableau XXIV) et *abstraction/ relationnel* (5.3.2.3.2, Tableau XXV) et *déduction* (5.3.2.3.3, Tableau XXVI). Chaque niveau est représenté par la description commune des savoirs géométriques (voir les annexes 8 et 9) et didactiques visés dans les deux ingénieries. Afin de démontrer l'emploi de différents types de situations, nous avons indiqué le nom de chaque situation par son abréviation (par exemple, 2.SO signifie la situation numéro 2 selon l'ordre dans lequel cette situation est décrite dans l'ingénierie et qui est une situation d'observation, SM signifie une situation de manipulation, SC – une situation de construction, SG – une situation géométrique, SA – une situation d'analyse, RP – une situation de la résolution de problèmes et SCP – une situation de conception).

5.3.2.3.1 Visuel et Descriptif/Analytique

Tableau XXIV. Niveau Visuel et Descriptif/Analytique (Dispositif de la recherche)

Ingénierie du triangle (annexe 18)	**Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)**
Situations d'observation, de manipulation et situations « géométriques » (SO, SM et SG)	
Savoirs géométriques visés : (voir les annexes 8 et 9). - Identifier et décrire les figures - Reconnaître les ressemblances des figures - Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites - Représenter les figures (représentation graphique, verbale, mentale, physique) **Savoirs didactiques visés :** - Employer la démarche d'observation dans les activités d'introduction - Connaître le phénomène de perception « position inhabituelle » - Employer les outils de représentation de triangles et de quadrilatères (modèles physiques)	

<table>
<tr><th>Ingénierie du triangle (annexe 18)</th><th>Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations de construction (SC)</u>
<u>Savoirs géométriques visés :</u>
- Effectuer les différentes constructions de la figure correspondant à ce niveau (à partir des données abstraites et concrètes, à partir du nombre minimal d'informations)
- Employer le langage précis dans la description des procédures de construction (emploi de termes : segment, milieu, médiatrice, bissectrice, médiane, hauteur, etc.)
- Employer le raisonnement correspondant à ce niveau
- Employer les opérations mentales dans la construction des figures (visualiser la construction à partir des propriétés disponibles)</td></tr>
<tr><td>2. SO : Identification des triangles et évocation de propriétés des triangles
3. SG (dessin) et SM (outil) : Représentation des triangles
6. SM : Représentation des triangles isocèles (étape 2)
6. SC : Construction du triangle isocèle. Description des procédures et des propriétés utilisées (étape 3)
7. SC : Construction du triangle équilatéral. Description des propriétés du triangle équilatéral
8. Examen de mi-session : Déterminer le triangle selon la représentation graphique (emploi de deux caractéristiques) (question 4)</td><td>2. SO : Identification des quadrilatères et évocation de définitions caractéristiques (étapes 1 et 2)
2. SC : Construction du carré. Description des procédures et des propriétés utilisées (étape 2)
3. SG : Description des propriétés (étape 1)
3. SM : Représentation de quadrilatères (étape 1)</td></tr>
</table>

5.3.2.3.2 ABSTRACTION/RELATIONNEL

Tableau XXV. <u>Niveau Abstraction/Relationnel (Dispositif de la recherche)</u>

<table>
<tr><th>Ingénierie du triangle (annexe 18)</th><th>Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations de construction (SC)</u>
<u>Savoirs géométriques visés :</u>
- Effectuer les différentes constructions de la figure correspondant à ce niveau (à partir des données abstraites et concrètes, à partir du nombre minimal d'informations)
- Employer le langage précis dans la description des procédures de construction
- Employer le raisonnement correspondant à ce niveau (déterminer les conséquences logiques de certaines données, déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction, concevoir la suite logique des procédures),
- Employer les opérations mentales dans la construction des figures (visualiser la construction à partir des propriétés disponibles)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ingénierie du triangle (annexe 18)</th><th>Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)</th></tr>
<tr><td>6. SC : Construction du triangle isocèle. Description des procédures et des propriétés utilisées (étape 3)

7. SC : Construction du triangle équilatéral

8. Examen de mi-session : Déterminer le nombre minimal d'information pour construire le triangle et décrire les propriétés employées (question 5)

12. Examen final : Tracer le triangle obtenu par la rotation. Décrire les procédures (question 11)</td><td>2. SC : Construction du carré. Description des procédures et des propriétés utilisées (étape 2)

8. Examen de mi-session : construire un carré selon les données abstraites (question 7)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations d'analyse (SA)</u>
<u>Savoirs géométriques visés :</u>
- Connaître les définitions caractéristiques des figures
- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.
- Employer les différents schémas pour la classification des figures
- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.
- Distinguer une description d'une définition
- Trouver un contre-exemple

<u>Savoirs didactiques visés :</u>
- Savoirs d'analyse : déterminer le but et les connaissances en jeu, comparer la démarche utilisée par l'activité à la démarche d'observation visant la classification, analyser le choix de représentations graphiques, des critères de classification et du diagramme dans l'activité de classification
- Expliquer l'importance du vocabulaire précis pour la construction des concepts géométriques
- Connaître le phénomène figure/concept, la position « inhabituelle » de la figure
- Analyser la structure de l'activité (approche didactique) et le rôle de l'enseignant dans la gestion</td></tr>
<tr><td>4. SA : Analyse du vocabulaire géométrique employé par les différentes sources d'enseignement

5. SA : Analyse de l'activité sur la classification des triangles (étape 2)

6. SA : Analyse de l'organisation de la situation de formation (étape 6)

8. Examen de mi-session : analyse de l'activité : représentations graphiques, vocabulaire, schéma de classification (question 4)

9. SA : Travail sur les erreurs (précision des critères d'analyse, du vocabulaire, du schéma)

12. Examen final : analyser le schéma de classification (question 13)</td><td>4. SA : Analyse du vocabulaire employé par les différentes sources d'enseignement (étape 2)

5. SA : Analyse d'une définition (étape 1)

5. SA : Analyse du schéma de classification (étape 2)

5. SA : Analyse des extraits de classification employés par les différentes sources d'enseignement (étape 3)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ingénierie du triangle (annexe 18)</th><th>Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)</th></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations géométriques (SG) : Classification des figures</u>
<u>Savoirs géométriques visés :</u>
- Établir les rapports entre les propriétés de la figure et entre les figures (ou classes de figures)
- Formuler les relations d’inclusion (hiérarchisation)
- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales</td></tr>
<tr><td>5. SG : Classification des triangles (diagramme à branches) (étape 1)
9. SG : Travail sur les erreurs : Classification des triangles (diagramme de Venn), précision des critères de classification</td><td>5. SG : Classification des quadrilatères (étape 2)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations géométriques (SG) : Visualisation, langage et raisonnement</u>
<u>Savoirs géométriques visés :</u>
- Identifier et décrire les figures
- Représenter les figures (représentation graphique, verbale, mentale)
- Trouver un contre-exemple
- Distinguer une description d’une définition, appartenir/définir
- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives</td></tr>
<tr><td>6. SC : Conception de définitions conceptuo-lexicales du triangle équilatéral (étape 2) et constructives du triangle isocèle (étape 3)
7. SC : Conception de définitions constructives du triangle équilatéral</td><td>3. SG : Détermination de différents quadrilatères selon la propriété décrite et selon la combinaison (habituelle et non). Conception de définitions conceptuo-lexicales et constructives (étapes 1 et 2)
4. SG : Analyse des propriétés (côtés, angles, diagonales) selon l’appartenance à une classe et selon la définition d’une classe. Conception de définitions conceptuo-lexicales et constructives (étape 1)
5. SG : Justification des énoncés (étape 1)
8. Examen de mi-session :
- Déterminer le quadrilatère selon la description de ses propriétés (question 1),
- Présenter les définitions (conceptuo-lexicales ou constructives) du rectangle et du losange (question 2)
10. Examen final
- Déterminer les quadrilatères selon la lecture du dessin
- Justifier l’énoncé (question 2)</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Situations de conception (SCP) : Application des connaissances géométriques et didactiques</u></td></tr>
<tr><td>13. Élaboration et analyse d’une séquence d’enseignement</td><td>11. Élaboration et analyse d’une séquence d’enseignement</td></tr>
</table>

5.3.2.3.3 DÉDUCTION

Tableau XXVI. Niveau Déduction (Dispositif de la recherche)

<table>
<tr><th>Ingénierie du triangle (annexe 18)</th><th>Ingénierie du quadrilatère (annexe 19)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Savoirs géométriques visés par différentes situations de formation
- Déterminer la figure selon la lecture des propriétés indiquées par des symboles, selon la description d'une combinaison inhabituelle de ses propriétés, selon la déduction de propriétés nécessaires pour déterminer le nom ou selon le calcul des mesures
- Déterminer la suffisance de propriétés dans l'énoncé pour déterminer une figure
- Déterminer la partie (propriété) redondante dans la définition
- Trouver un contre-exemple
- Employer les propriétés, les techniques et les opérations mentales nécessaires à la construction des figures dans l'environnement informatique
- Résoudre les problèmes géométriques : visualiser (déterminer, choisir) les éléments nécessaires à la résolution, concevoir un plan de résolution d'un problème, employer les concepts correspondants
- Déterminer le nombre minimal de données permettant la construction
- Tracer les figures selon le nombre minimal de données (combinaison de propriétés autres que visuelles ou les incluant comme une donnée)
Savoirs didactiques visés :
- Analyse du rôle des activités expérimentales dans la construction de concepts géométriques
- Organisation des apprentissages dans l'environnement informatique</td></tr>
<tr><td>6. SC/SG : Tracer le triangle isocèle selon les données suivantes : h et angle, base et angle opposé, base et côté, etc.

7. SC/SG : Tracer le triangle équilatéral selon les données suivantes : h, r du cercle inscrit ou circonscrit, etc.

10. SO : Détermination du triangle (Cabri-Géomètre II)

10. SC : Emploi des connaissances dans la construction des triangles (Cabri-Géomètre II) (étape 2)

10. RP : Emploi de concepts et de processus mathématiques (Cabri-Géomètre II) (étape 2)

11. RP : Détermination du triangle (la validité de la preuve obtenue par le procédé de mesure à la règle)

12. Examen final : RP</td><td>2. SC/SG : Tracer les quadrilatères selon les propriétés suivantes : r, d, a ou C du cercle inscrit ou circonscrit (carré); diagonale et côté (rectangle), diagonale et angle (losange); côté, angle et diagonale (parallélogramme), etc.
6. SG : Détermination du quadrilatère selon la lecture de propriétés indiquées par des symboles
7. SC : Emploi des connaissances dans la construction des quadrilatères; Comparaison des moyens de construction (environnement papier/crayon et informatique) (étape 1)
7. SCP : Conception d'une situation pour travailler la famille de parallélogrammes (étape 2)
9. Mini-test (SG) : Détermination du quadrilatère selon la description de propriétés. Détermination des conditions : suffisante, insuffisante et redondante pour définir le carré; Reconnaissance du quadrilatère selon la lecture des propriétés visuelles marquées par des symboles.
10. Examen final
- Déterminer les quadrilatères selon les descriptions inhabituelles de propriétés (question 1)
- Déterminer les quadrilatères selon la lecture de propriétés indiquées par des symboles (déterminer les conséquences logiques de certaines données) (question 2)</td></tr>
</table>

Par cette mise en relation, nous voulons démontrer la projection de la conception générale de formation sur la planification de deux ingénieries. D'un côté, en décrivant les savoirs visés par la formation et en les associant aux niveaux de développement de pensée géométrique, cette analyse nous permet de suivre le développement de la pensée géométrique des étudiants dans les deux ingénieries et montre la coordination des savoirs géométriques et didactiques; d'un autre côté, à travers la description de types de situations, cette analyse permet de repérer l'emploi de mêmes moyens dans l'organisation de la formation. Nous pouvons donc observer la progression dans la construction des concepts géométriques et didactiques particuliers à travers les différentes activités et en même temps observer les liens entre les activités appartenant aux différentes ingénieries. Nous croyons pouvoir répondre à la première partie de notre question principale qui cherche les moyens de la coordination des savoirs géométriques et didactiques dans le cadre du dispositif de la formation.

6. RÉSULTATS

Lors de l'expérimentation, nous avons recueilli une quantité importante de données : fiches de deux activités de construction (22 équipes pour chaque activité), fiches de deux activités d'analyse (22 équipes pour chacune), résultats de deux tests et de deux examens (116 copies pour chacun), description des comportements observés dans 16 situations de formation et planification d'une séquence d'enseignement (56 travaux de session, dont seulement 6 portants sur la notion de polygones sont analysés).

À partir de ces données, nous avons analysé le rôle de la conception générale de la formation dans le déroulement de deux ingénieries : celle du triangle et celle du quadrilatère. Le dispositif de la formation didactique à l'enseignement de la géométrie est vu comme une structure qui réunit les objectifs de l'enseignement de la géométrie, la progression des apprentissages selon les niveaux de la pensée géométrique et différents types d'activités qui tiennent compte de la multiplicité et de la coordination des registres de représentation et qui visent à faire atteindre les objectifs de la formation. Nous avons tâché à évaluer comment cette organisation participe à l'évolution géométrique et didactique du futur maître.

Dans la section 6.1, nous analysons la progression des étudiants dans la construction des concepts géométriques particuliers et le niveau de la visualisation, du langage et du raisonnement atteint à la fin de la formation.

Dans la section 6.2, nous analysons le rôle de l'ingénierie de la formation et le rôle déterminant de certaines activités spécifiques dans la construction des connaissances géométriques et didactiques. Nous avons mis en parallèle les données obtenues dans les activités du même type lors du déroulement des deux ingénieries. Il s'agit de données quantitatives provenant de tests, de travaux pratiques et des examens et de données qualitatives provenant de descriptions des comportements des futurs maîtres observées dans des activités de ce type au niveau *micro* (les annexes 18 et 19). En ordonnant les résultats chronologiquement et en les associant aux activités de même type portant sur les notions différentes, nous pouvons observer la progression dans la pensée géométrique et en même temps observer le rôle de l'ingénierie dans cette progression. Le taux de réussite correspond au pourcentage des étudiants atteints à peu près le niveau associé aux savoirs évalués (voir 3.7 ou 5.3.2.1, 5.3.2.2).

Dans la section 6.3, nous analysons l'impact de situations de formation sur l'appropriation des savoirs didactiques par des futurs maîtres. Cette analyse vise à relier les décisions des étudiants dans la préparation d'une séquence d'enseignement (travail de session) au contenu de formation proposée. Nous avons cherché dans les décisions de futurs enseignants les références aux savoirs didactiques et géométriques étudiés dans le cadre du dispositif de formation.

Nous confrontons les résultats obtenus aux objectifs visés et évaluons la démarche entreprise dans la recherche.

6.1 FORMATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉTUDIANTS

Pour montrer la progression de la pensée géométrique des étudiants dans la construction des concepts géométriques particuliers, nous avons tiré parmi des nombreuses données que nous possédons[54] celles portant sur la notion du « losange »[55]. Nous l'avons choisie pour les deux raisons principales suivantes:

- la notion du losange est moins connue que celle du carré (pour laquelle nous avons obtenu les meilleurs résultats), mais ce quadrilatère possède plusieurs propriétés particulières;

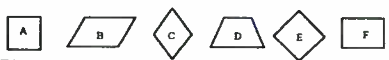
- les données portant sur cette notion proviennent de différents moments d'évaluation : test d'entrée (questions 1 et 3b), travail pratique 19.5 (question 2), examen de la mi-session (questions 1 et 2), mini-test (question 3, énoncé 2) et examen final (question 2).

Dans le tableau suivant, nous mettons ces données en ordre correspondant au moment de la cueillette de données en décrivant les questions, les savoirs évalués, les réponses obtenues en les associant au niveau de la pensée et le taux de réussite (Tableau XXVII) :

[54] Le lecteur intéressé peut toujours consulter les résultats obtenus dans les tests et examens aux annexes 18 (ingénierie du triangle) et 19 (ingénierie du quadrilatère).

[55] Le lecteur intéressé peut toujours consulter les annexes 18 (ingénierie du triangle) et 19 (ingénierie du quadrilatère) pour les résultats obtenus dans les tests et examens.

Tableau XXVII. Évolution de la conception du losange

<table>
<tr><th></th><th>Questions</th><th>Savoirs évalués</th><th>Niveaux</th><th>Taux de réussite</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Test d'entrée</td><td><u>Question 1</u>. Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères suivants selon le tableau ci-dessous :


<table><tr><th>Quadrilatères</th><th>Réponses</th></tr><tr><td>Carré</td><td></td></tr><tr><td>Losange</td><td></td></tr><tr><td>Rectangle</td><td></td></tr><tr><td>Parallélogramme</td><td></td></tr><tr><td>Trapèze</td><td></td></tr></table></td><td>- Reconnaître la figure plane dans sa représentation habituelle et dans la position inhabituelle (registre figural/ discursif)
-Reconnaître la figure dans sa représentation inhabituelle (concepts, registre figural/ discursif)</td><td>niveau 1
-C (un losange)
-E (un carré dans une position verticale)

niveau 3
- A comme un losange
- C comme un parallélogramme
- C comme un trapèze</td><td>
98 %
60 %

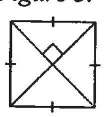
42 %

69 %

3 %</td></tr>
<tr><td><u>Question 3</u> : Comment appelle-t-on?
b) Le quadrilatère dont les côtés sont congrus s'appelle ____________</td><td>-Connaître les définitions caractéristiques (registre discursif)</td><td>niveau 2
- losange et carré
-carré
niveau 3
- losange</td><td>
6 %
87 %

6 %</td></tr>
<tr><td>SG 19-5</td><td><u>Étape 1 : Justification des énoncés</u>
2. Vrai ou Faux?
b) Un losange est un parallélogramme
e) Un trapèze est un losange
f) Un carré est un losange
g) Un losange est un trapèze</td><td>-Formuler les relations d'inclusion de classe (registre discursif)
- Justifier la réponse (registre discursif)</td><td>niveau 3</td><td>100 %
100 %
100 %
100 %</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Examen de la mi-session</td><td><u>Question 1 :</u> Déterminer le quadrilatère défini par l'énoncé
6. Mes diagonales sont des bissectrices des angles
7. Mes diagonales se coupent à angle droit en leur milieu.</td><td>- Déterminer le nom du quadrilatère selon la description de ses propriétés (définitions constructives) (registre discursif/ figural)</td><td>niveau 4</td><td>77 %
87 %</td></tr>
<tr><td><u>Question 2</u> : La définition la plus répandue du losange est « Quadrilatère ayant 4 côtés égaux ». Pouvez-vous donner une autre définition de ce quadrilatère.</td><td>- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives (registre discursif)</td><td>niveau 3
(définitions ayant une propriété redondante)
niveau 4
(définition juste)</td><td>39 %

56 %</td></tr>
</table>

	Questions	Savoirs évalués	Niveaux	Taux de réussite
Mini-test	<u>**Question 3**</u> : Déterminer si l'énoncé est juste pour définir le carré, insuffisant ou redondant. (Dans le cas de l'insuffisance, il est demandé de déterminer le quadrilatère défini par l'énoncé; dans le cas de la redondance - souligner la partie redondante.) 2. *Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et <u>des diagonales se coupant à angle droit</u>*	- Déterminer si l'énoncé est suffisant pour définir une figure (classe) (registre *discursif*) - Déterminer le nom de la figure selon la description inhabituelle (définitions constructives) (registre *discursif*)	***niveau* 4**	82 % 82 %
Examen final	<u>**Question 2 :**</u> *Décrire les propriétés indiquées de chacun des quadrilatères et déterminer son nom. Sont-ils des trapèzes?* *Figure 3.* 	- Décrire les propriétés marquées par des symboles (*figural/symbolique/discursif*), - Déterminer les conséquences logiques de certaines données (registre *discursif*) - Déterminer le nom d'une figure (unité figurale de dimension 2 qui n'est pas discernable) selon la lecture du dessin (*figural/discursif*), - Justifier la réponse (*discursif*)	***niveau* 4** ***niveau* 4** ***niveau* 4** (losange) ***niveau* 3**	100 % 81 % 100 %

En analysant les données présentées dans le tableau, nous pouvons observer la progression de la pensée géométrique des étudiants et la progression de la complexité de tâches géométriques exigées par les questions, ainsi que la variété des activités géométriques employées par la formation qui tiennent compte de la coordination des registres de représentation.

Nous commençons par la reconnaissance du losange dans les représentations graphiques et selon la définition habituelle (test d'entrée), ensuite nous vérifions les relations entre le losange, le carré et le trapèze (situation géométrique 19.5). À l'examen de la mi-session, nous évaluons la reconnaissance d'un losange dans les définitions constructives et la conception des nouvelles définitions. Vers la fin de la formation, nous proposons l'analyse de l'énoncé selon sa suffisance pour définir le carré et la recherche de la partie redondante (mini-test) et nous terminons par la détermination du losange selon la lecture de propriétés marquées par des symboles dans la représentation graphique inhabituelle (examen final). Nous devons mentionner que si au test d'entrée nous avons voulu vérifier le niveau de conceptualisation correspondant aux niveaux 1, 2 et 3 du modèle de van Hiele, pour les questions des examens et du mini-test, c'est le niveau 4 qui, en général, était exigé.

Les résultats du test d'entrée indiquent que la reconnaissance du quadrilatère dans sa représentation habituelle ne fait pas appel aux définitions et à la recherche de propriétés communes de classes, même si la consigne le demande. Nous voulons souligner qu'il y a un grand écart entre l'aptitude perceptive et conceptuelle dans la reconnaissance des figures. La majorité des étudiants reconnaissent le losange dans sa représentation habituelle (98 %) ce qui correspond au niveau 1 du modèle de van Hiele. Cependant seulement 42 % des étudiants incluent le carré dans la classe des losanges et 3 % des étudiants parmi 109 participés au test, incluent les losanges dans la classe de trapèzes. Ces réponses peuvent être associées au niveau 3 de la pensée géométrique.
Les réponses à la question 3 montrent que 93 % des étudiants ne se rappellent pas de la définition du losange (87 % des étudiants ont répondu : « carré ») et 6 % des étudiants ne font pas la distinction entre la « description » et la « définition » (ils répondent : « losange et carré »). Les difficultés de reconnaissance des figures dans leurs représentations graphiques et selon la description de leurs propriétés dépendent des expériences individuelles et du niveau conceptuel que les étudiants ont de ces figures (Talyzina, 1978).

Les premières activités de l'ingénierie du quadrilatère (par exemple, la situation 19.3 « Description des propriétés du carré et visualisation des quadrilatères » et la situation 19.4 « Analyse des propriétés des quadrilatères) ont cherché à renforcer le niveau de visualisation de l'étudiant, la représentation mentale de chaque quadrilatère selon la propriété décrite et la recherche du contre-exemple. Elles ont permis aussi de concevoir les définitions conceptuo-lexicales et constructives[56] et de soulever la question de la suffisance de propriétés pour définir la figure et de la redondance des propriétés dans la définition.

À l'examen de mi-session, nous avons pu vérifier l'impact de notre travail sur les réponses des étudiants. En demandant de déterminer le quadrilatère défini par l'énoncé (question 1,

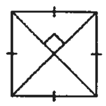
[56] Par ce type de travail, lors des années 2000-2002, les étudiants ont composé 39 définitions inhabituelles du carré.

énoncés 6 et 7) et de présenter la définition inhabituelle du losange (question 2), nous avons obtenu des taux de réussite de 77 % et 87 % pour la première question et de 95 % pour la seconde. Nous pouvons faire correspondre les étudiants ayant réussi la détermination du quadrilatère selon les définitions constructives (question 1) au niveau 4 du modèle de van Hiele.

En analysant le choix de définitions proposées par les étudiants, on peut remarquer la dominance de la propriété des diagonales : « *se coupent à angle droit en leur milieu* » et « *sont des bissectrices des angles* » pour le losange. Cependant, on retrouve aussi les combinaisons de propriétés originales : « *deux paires de côtés // et des diagonales congrues* », « *médiatrices sont des axes de symétrie* », « *quadrilatère qui se divise par une de ses diagonales en deux triangles rectangles* », etc. L'échec de 5 % pour la définition du losange est dû à la non-suffisance de la combinaison de propriétés pour définir la figure et essentiellement à l'absence du terme « en leur milieu ». Nous pouvons également observer le nombre considérable de définitions redondantes, ce qui ne nous permet pas d'associer les 39 % des étudiants au niveau 4 du modèle de van Hiele. Cela démontre que ces étudiants n'ont pas encore intégré les règles de la suffisance de propriétés pour définir une figure. Les résultats du mini-test permettent ainsi de constater que même à la fin de la formation, la détermination d'une partie redondante d'un énoncé constitue être une difficulté à peu près pour 50 % des étudiants parmi 82 % ayant réussi la détermination d'une figure.

Par le dernier exemple (question 2 de l'examen final), nous voulons montrer le niveau de la visualisation, du langage et du raisonnement atteint à la fin de la formation. Lors de la formation, nous avons constamment mis en jeu les savoirs géométriques qui sont indispensables à la résolution de problèmes géométriques : savoir « lire » le dessin (reconnaître des éléments de la figure et des rapports entre les éléments, visualiser des éléments non-tracés nécessaires à la résolution d'un problème, etc.), déterminer les conséquences logiques de certaines données, etc. Nous pouvons observer l'emploi de ces éléments dans les réponses des étudiants :

Question 2. *Décrire les propriétés indiquées de chacun des quadrilatères et déterminer son nom.*

Dessin	Description des propriétés visée	Taux de réussite	Détermination du nom	Taux de réussite
Figure 3. 	4 côtés congrus et diagonales sont perpendiculaires	100 %	4 côtés congrus ⇒ losange; diagonales sont perpendiculaires (information redondante) ⇒ Losange	81 %

La difficulté de cette tâche vient de ce que la représentation graphique d'un quadrilatère (sa forme) n'aide pas l'étudiant à déterminer son nom. (Le quadrilatère a l'apparence d'un carré, mais n'en est pas un. La construction a été faite dans l'environnement de Cabri-Géomètre II, ce qui permet d'effectuer les constructions avec des petites différences dans les mesures des côtés et des angles sans que ces différences soient perceptibles à l'œil). De plus, cette figure contient plus d'unités figurales élémentaires que celles requises pour la définir. Pour reconnaître la figure, il faut neutraliser sa perception comme unité figurale de dimension 2 et analyser les unités figurales de dimension 1 dans leur combinaison en utilisant le pas de raisonnement. Ce comportement repose sur la coordination de deux registres.

Le taux de réussite indique le pourcentage d'étudiants ayant atteint le niveau 4 dans la description des propriétés et dans la détermination du nom. Nous pouvons donc considérer que, dans cette tâche, le niveau de la visualisation et du langage de 100 % des étudiants correspond au niveau 4 du modèle de van Hiele, tandis que celui du raisonnement permet d'associer à ce niveau 81 % des étudiants.

Le critère de la reconnaissance d'une figure selon la lecture de ses propriétés inhabituelles (graphiques ou décrites) représente pour nous un indice de la compréhension qualitative du concept géométrique. Ce travail exige la capacité d'avoir une image mentale de propriétés annoncées et d'effectuer les déductions de combinaisons inhabituelles de propriétés.

Pour conclure la présente section, nous voulons souligner que l'expérience acquise par les étudiants dans toutes les activités de formation (d'observation, de manipulation, d'analyse, de résolution des problèmes, etc.) a participé à leur évolution au niveau de la visualisation, du langage et du raisonnement. Leur coordination planifiée a permis de favoriser la construction des concepts géométriques permettant leur emploi dans la résolution de différents problèmes, et en particulier, de répondre aux questions posées.

6.2 RÔLE DE L'INGÉNIERIE DE FORMATION

Dans cette section, nous analysons l'impact de l'ingénierie de formation sur l'évolution géométrique et didactique du futur maître. Nous avons choisi pour cette analyse les données provenant de deux types de situations : situation de construction et situation d'analyse. Parmi les données quantitatives et qualitatives obtenues dans le déroulement de deux ingénieries, nous avons sélectionné celles correspondant au type d'activité choisi. Dans la section 6.2.1, notre analyse est centrée sur le rôle de situations de construction dans la progression de la pensée géométrique. La section 6.2.2 est consacrée à l'évolution géométrique et didactique du futur maître à travers les activités d'analyse proposées dans les deux ingénieries.

6.2.1 RÔLE DES SITUATIONS DE CONSTRUCTION

Les situations de construction (dans les deux environnements différents) ont présenté, sur le plan géométrique, une évolution au cours de la formation. Elles ont cherché à faire envisager et effectuer une variété de constructions différentes de la même figure, à préciser le vocabulaire employé dans la description des propriétés et des procédures, à développer les opérations mentales nécessaires à la construction (concevoir le plan d'action, déterminer la propriété travaillée dans la construction, déterminer les conséquences logiques de certaines données, rechercher un nombre minimal d'informations nécessaires pour la construction, représenter mentalement une construction selon les propriétés données et annoncer la démarche). Nous analysons la progression des étudiants dans les activités de construction à partir de données obtenues dans les travaux pratiques (18.6, 19.2) et à l'examen de la mi-session (18.8 et 19.8). Nous avons parallèlement décidé d'analyser une question supplémentaire proposée à l'examen final qui ne porte pas sur les notions choisies, mais qui vérifie la démarche et le vocabulaire acquis dans les situations de construction (question 11). Dans le tableau suivant (Tableau XXVIII), nous mettons ces données en ordre correspondant aux apprentissages.

Tableau XXVIII. Progression dans les activités de construction

	Questions	Savoirs évalués	Niveaux	Pourcentage des étudiants
Construction du triangle isocèle (Situation 18..6, étape 3 et 4, Annexe 12)	**Consigne :** Construire un triangle isocèle. Décrire les procédures de construction. Quelle propriété(s) est(sont) en jeu dans la construction?	- Effectuer les différentes constructions de la figure (registre *graphique* ou *graphique /discursif*) - Décrire les procédures de la construction (registre *discursif*) - Déterminer la(les) propriété(s) qui est(sont) en jeu dans la construction (*figural/discursif*)	***niveau 1*** (représentation graphique ayant la forme demandée; tracé du contour d'un objet physique de la forme demandée) ***niveau* 2** (selon une seule propriété visuelle) ***niveau* 3** (emploi du raisonnement)	5 % 14 % 81 %
	Question : *Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le triangle superposable au triangle isocèle caché ?* Effectuer la construction, décrire les procédures de construction.	-Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (*discursif/ graphique*) - Effectuer la construction d'une figure selon le nombre minimal de données abstraites et concrètes (*symbolique/ discursif/ graphique).*	***niveau* 3** ***niveau* 3** (selon les propriétés visuelles) ***niveau* 4** (emploi du raisonnement)	45 % 22.5 % 22.5 %
Construction du carré (Situation 19.2, étape 2 et 3, Annexe 14)	**Consigne** : Construire un carré. Décrire les procédures de construction. Quelle propriété(s) est(sont) en jeu dans la construction?	- Effectuer les différentes constructions de la figure (registre *graphique* ou *graphique /discursif*) - Décrire les procédures de la construction (registre *discursif*) - Déterminer la(les) propriété(s) qui est(sont) en jeu dans la construction (*figural/discursif*)	***niveau 1*** (représentation graphique ayant la forme demandée; tracé du contour d'un objet physique de la forme demandée) ***niveau* 2** (selon une propriété visuelle) ***niveau* 3** (emploi du raisonnement)	5 % 18 % 77 %
	Question : *Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le carré superposable au carré caché ?* Effectuer la construction, décrire les procédures de construction.	-Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (*discursif/ graphique*) - Effectuer la construction d'une figure selon le nombre minimal de données abstraites et concrètes (*symbolique/discursif/ graphique).*	***niveau* 3** ***niveau* 3** (selon les propriétés suivantes : côté, diagonale, P ou A) ***niveau* 4** (rayon, diamètre, A ou C du cercle inscrit ou circonscrit)	81 % 68 % 14 %

	Questions	Savoirs évalués	Niveaux	Pourcentage des étudiants
Examen de mi-session	**Question 5:** *De quelle(s) information(s) minimale(s) avez-vous besoin pour construire le triangle superposable à un triangle caché?* Écrire deux réponses possibles.	- Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (*figural/discursif*)	***niveau* 3 a** (réponse incomplète) ***niveau 3* b** (une réponse) ***niveau* 4** (deux réponses)	19 % 7 % 74 %
	Question 7 (Cabri): Construire un carré ABCD en n'utilisant que les outils suivants : point, segment, cercle, droite perpendiculaire (L'outil cercle ne peut être utilisé qu'une seule fois). Décrire la démarche. Quelle propriété(s) est(sont) en jeu dans la construction?	- Concevoir le plan d'action (registre *discursif/ figural*), - Déterminer les conséquences logiques de certaines données (registre *discursif*), - Décrire les étapes de la construction (registre *discursif*), - Effectuer la construction d'une figure selon les données abstraites (*symbolique/graphique/discursif*).	***niveau* 3-4**	81 %
Examen final	**Question 11.** Effectuer la Rotation du triangle ABC. L'angle de rotation est 30°. Décrivez les étapes de construction.	- Tracer les figures obtenues par la transformation (registre *graphique*) - Décrire les procédures de la construction (emploi du langage géométrique) (registre *discursif*)	***niveau* 3**	97 %

Nous interprétons ces données en nous référant aux situations concrètes de la formation et aux effets observés lors du déroulement.

En analysant les résultats obtenus dans la première situation de construction (construction du triangle isocèle), nous pouvons observer que 19 % des étudiants emploient une seule propriété (la congruence de côtés) ou un outil de construction de la forme demandée (une équerre). 12 équipes parmi 22 ont eu des difficultés à trouver le « nombre minimal d'informations » et à effectuer une construction selon ce nombre d'informations (45 % de réussite). Pourtant, il y avait aussi celles liées à l'incompréhension de l'utilité de description des procédures de la construction. Un nombre considérable des erreurs et de difficultés identifiées à l'étape de présentation a permis de convaincre les étudiants de l'importance de la verbalisation de la démarche afin de préciser le vocabulaire employé et l'ordre des procédures dans la construction.

Dans l'activité de construction suivante (construction du carré, 19.2), la réussite des étudiants dans la recherche du nombre minimal d'informations pour effectuer la construction était supérieure (68 %) par rapport à l'activité de construction précédente. 4 équipes (parmi 22) ont eu des difficultés à le trouver et 3 équipes en décrivant le nombre et la propriété nécessaire n'ont pas présenté la construction. Quant à la variété de constructions, la majorité d'équipes ont employé, en tant qu'« informations », le côté ou la diagonale, ce qui correspond au niveau 3 du modèle de van Hiele. On note quelques constructions qui ont utilisé l'« aire » (2), le « périmètre » (1), le « rayon du cercle inscrit » (1), le « rayon du cercle circonscrit » (1) et le « diamètre du cercle circonscrit » (1). Ces trois dernières approches peuvent être associées au niveau 4 de la pensée géométrique.

Lors de la formation, les étudiants avaient plusieurs possibilités d'appliquer les savoirs acquis et de les valider dans les constructions des autres figures (dans les deux environnements, papier/crayon et informatique), dans la résolution des problèmes géométriques et dans le contexte de l'organisation des apprentissages des élèves.

Par les questions de l'examen de mi-session portant sur les constructions, nous avons voulu vérifier l'application des connaissances acquises dans un contexte un peu différent : construction du triangle (sans préciser lequel) et construction du carré selon les données abstraites en utilisant les outils de Cabri-Géomètre II. La recherche du nombre minimal d'informations permettant la construction du triangle quelconque superposable n'avait pas été travaillée en classe. La question avait été posée à la fin du cours à la suite de l'étape de présentation des constructions du triangle équilatéral. Comme les étudiants avaient eu des difficultés à répondre de façon immédiate, cette question avait été proposée en tant que devoir. (Ils pouvaient ainsi trouver les différentes constructions du triangle scalène dans le recueil de textes destiné à ce cours).

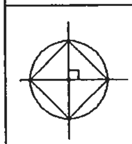
En demandant « *De quelle(s) information(s) minimale(s) avez-vous besoin pour construire le triangle superposable à un triangle caché? Écrire deux réponses possibles* » (question 5 de l'examen de mi-session), nous avons obtenu la réussite de 74.2 % des étudiants. Par contre 6.4 % des étudiants ont encore donné qu'une réponse. Parmi les 19.4 % n'ayant pas réussi, 12.9 % des étudiants ont présenté les propriétés nécessaires pour la construction du triangle isocèle, 1.6 % des étudiants - pour le triangle isocèle rectangle et 1.6 % – pour le triangle équilatéral. La discussion organisée après l'examen a permis d'identifier la difficulté principale des étudiants qui consistait en l'interprétation du terme « triangle ». Et c'est l'interprétation du terme « triangle » comme « n'importe lequel » et l'évocation de plusieurs constructions possibles nous permet d'associer les réponses de 74.2 % des étudiants au niveau quatre du modèle de van Hiele.

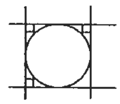
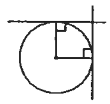
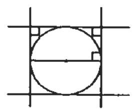
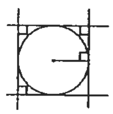
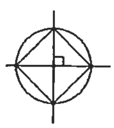
Quant à la construction du carré à partir des données abstraites (question 7 de l'examen de mi-session), 80.6 % des étudiants ont présenté les constructions et les descriptions de procédures correctes.

Question 7 : *Construire un carré ABCD en n'utilisant que les outils suivants (l'outil « cercle » ne peut être utilisé qu'une seule fois). Décrire la démarche.* Quelle(s) propriété(s) du carré est(sont) en jeu dans cette construction ?

Nous avons observé six constructions différentes qui emploient les propriétés de congruence et de perpendicularité des diagonales et des côtés du carré et les propriétés du cercle : l'égalité de mesure des rayons, des diamètres, la perpendicularité du diamètre et de la tangente, « être inscrit dans le carré ». Trois nouvelles constructions qui n'avaient pas été travaillées lors du cours sont apparues (voir le tableau XXIX, dont le numéro associé à la construction correspond à son numéro dans le tableau de construction de différentes figures planes présenté à l'annexe 20).

Tableau XXIX. Choix de constructions effectuées à l'examen de la mi-session

Dessin	Procédures de construction	Pourcentage d'étudiants ayant proposé cette démarche
	3b. Cercle, Segment (rayon), Droite $\perp$ à ce segment et passant par le centre, Droite $\perp$ à cette droite et passant par le centre, Polygone (relier les points d'intersection)	39 %

	5. Cercle, Segment (qui touche le cercle en un point selon aspect visuel de Cabri), Droite ⊥ à ce segment (et tangente au cercle), répéter 2 fois (construction approximative)	15 %
	Cercle, Segment, Segment (2 rayons ⊥ selon l'aspect visuel de Cabri), 2 Droites ⊥ à ces rayons (et tangentes au cercle) (construction nouvelle)	13%
	Cercle, Segment passant par le centre (aspect visuel de Cabri), Droite ⊥ au diamètre et tangente au cercle, droite ⊥ à cette tangente et tangente au cercle, répéter 2 fois (construction nouvelle).	7%
	Cercle, Segment (rayon), Droite ⊥ à ce segment (et tangente au cercle), répéter 2 fois (construction approximative) (construction nouvelle).	5%
	3c. Segment, Droite ⊥, Cercle (à partir du point d'intersection de deux droites pris pour le centre), Polygone (relier les points d'intersection du cercle avec les deux droites)	3%

En fonction de l'ensemble de savoirs exigés par la question (représentation graphique, description des procédures et vocabulaire employé, description des outils de Cabri permettant la construction et description d'une (des) propriété(s) en jeu), la réussite de 80.6% des étudiants dans toutes ces tâches peut approximativement être associé au niveau 4 du modèle de van Hiele.

Nous voulons souligner que la description précise des procédures et des propriétés utilisées pour la construction a rendu clairs les actions et l'ordre des actions dans la construction. Lors du déroulement du cours, il nous a suffi parfois de nommer seulement la ou les propriété(s) permettant la construction pour que les étudiants évoquent de façon immédiate le plan d'action. Par exemple, à la question de l'examen final demandant de décrire les procédures de la construction du triangle obtenu par la rotation, 97 % des étudiants ont réussi la tâche et ont employé le vocabulaire précis dans la description des procédures : relier le premier sommet du triangle au centre de rotation; mesurer la longueur de ce segment; à partir du centre, reporter l'angle donné; sur la demi-droite obtenue, reporter la longueur du premier segment (on obtient le premier point de la figure); répéter les étapes précédentes pour les autres points. 3 % des étudiants se sont trompés dans le sens de rotation.

Pour démontrer le rôle de l'ingénierie sur la progression des étudiants dans la pensée géométrique, nous avons choisi un élément semblable (construction selon le nombre minimal d'information) dans les quatre sources de cueillette de données (deux situations de construction et deux questions de l'examen de mi-session) et nous analysons son emploi à trois moments différents de la cueillette (cours 3, 4 et 8) en faisant correspondre les réponses des étudiants aux niveaux de la pensée géométrique (figure 14).

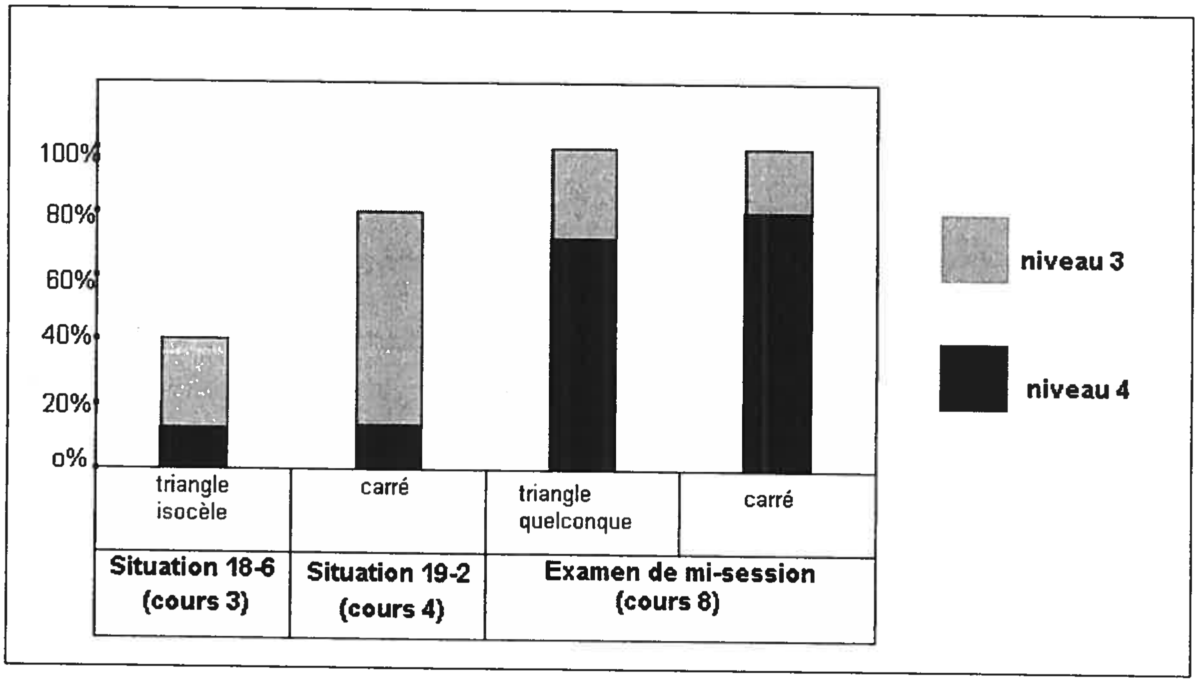


Figure 14. Progression des réponses des étudiants dans les activités de construction

La partie basse de chaque colonne correspond au pourcentage d'étudiants ayant proposé la démarche qui peut être associée au niveau 4, la partie haute de la colonne exprime l'emploi des procédures correspondant au niveau 3. Nous pouvons observer qu'au début de la formation, c'est le niveau 3 (et la familiarité dans la démarche de construction) que nous avons visé chez tous les étudiants, tandis que vers la fin, c'est le niveau 4 qui était exigé et qui domine dans les réponses des étudiants. Par notre demande dans les situations de construction de rechercher les nouvelles combinaisons de propriétés permettant la construction des figures ou en proposant les propriétés non-employées par les étudiants dans les constructions, nous les avons orientés toujours vers le niveau 4 et vers l'emploi du raisonnement nécessaire pour la construction.

6.2.2 RÔLE DES SITUATIONS D'ANALYSE

Dans le contexte d'organisation des apprentissages, nous avons cherché constamment dans nos situations à créer les conditions permettant aux futurs maîtres de s'interroger sur la pertinence des activités géométriques, de favoriser l'élaboration des savoirs didactiques et leur transfert à la pratique dans l'analyse des activités nouvelles et dans la conception des séquences d'enseignement de la géométrie au primaire. Les situations d'analyse proposées dans le cadre de formation avaient aussi pour but d'approfondir la connaissance géométrique des futurs enseignants.

Dès la première rencontre, nous avons proposé la situation d'analyse (voir la section 5.2.1) qui visait la découverte et l'application des savoirs didactiques suivants : démarche et buts visés des activités d'observation, analyse de la structure organisationnelle de la situation, élaboration des critères d'analyse et détermination des compétences décrites par les nouveaux programmes dans l'activité analysée.

Au fur et à mesure des apprentissages, nous avons proposé l'analyse et l'amélioration des activités tirées des manuels scolaires ou de nos observations des séquences d'enseignement qui contiennent des problèmes spécifiques de l'organisation de l'enseignement de la géométrie. Le futur enseignant était donc mis en contexte d'élaboration du nouveau savoir (géométrique ou didactique) ou d'application des connaissances afin d'être en mesure de reconnaître leur utilité pour traiter la situation.

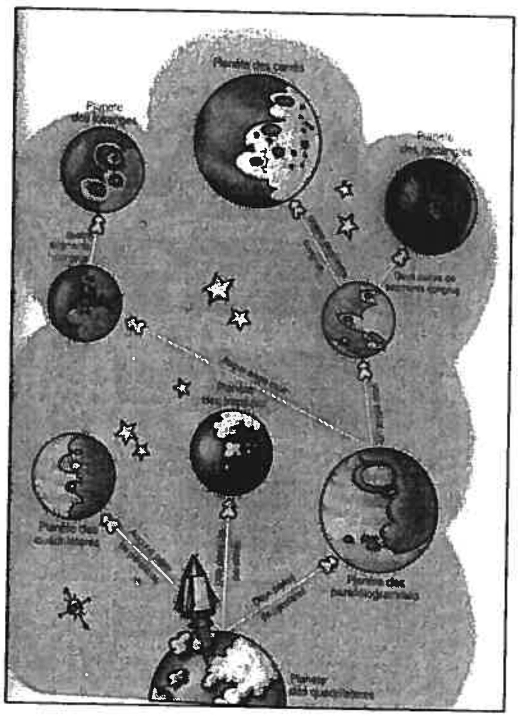
Par exemple, en proposant d'analyser le vocabulaire géométrique portant sur la notion du triangle employé dans les différentes sources d'enseignement (voir l'annexe 11.2), nous avons visé l'approfondissement et la consolidation des connaissances géométriques, ainsi que la prise de conscience de l'importance du langage précis et des conséquences possibles de son emploi. Le taux de réussite de cette tâche était de 50 % approximativement pour l'ensemble des extraits (voir les résultats dans le tableau XXX, où le résultat de la dernière colonne correspond au nombre d'équipes ayant trouvé l'élément problématique parmi 22 équipes ayant participé à l'activité).

Tableau XXX. Analyse du vocabulaire géométrique

Extrait	Énoncés tirés des extraits	Corrections	Nombre d'équipes
1. Lexique mathématique	- Un triangle peut être à la fois équilatéral et acutangle - Un triangle peut être à la fois isocèle et acutangle et quelquefois scalène et acutangle	un triangle équilatéral est toujours acutangle un triangle peut être à la fois scalène et acutangle	7 10
2. Lexique mathématique pour l'élève	- Triangle : polygone à trois côtés et à trois angles - Triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus et de mesures différentes. - Le triangle acutangle est aussi un triangle scalène	Triangle : polygone à trois côtés (ou à trois angles) Triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus. Le triangle acutangle peut être un triangle scalène	7 13 15
3. Défi Mathématique 4	- Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent triangles scalènes	Les triangles qui ont trois côtés de mesures différentes s'appellent triangles scalènes	19
4. Le Robert	- Quelconque : Qui n'a aucune propriété particulière. Triangle quelconque $\Rightarrow$ scalène	Quelconque : n'importe lequel, quel qu'il soit.	10

Cette activité, qui faisait appel à l'épistémologie de la notion et à la capacité de réfléchir et de raisonner, était l'une des premières consacrées à l'analyse. L'analyse paraît être une tâche assez difficile pour certains étudiants. Nous avons continué la discussion soulevée dans cette activité en proposant de classer les triangles en utilisant le diagramme à branches et de trouver la place du « triangle quelconque » (expression utilisée par le dernier extrait analysé). Les représentations au tableau de différents schémas de classification ont engendré les discussions sur les relations entre les classes des triangles et sur l'utilité des différents schémas dans les activités de classification des triangles. Afin de donner aux étudiants la possibilité d'appliquer les nouvelles connaissances, nous avons proposé d'analyser l'extrait qui mettait en jeu certains éléments des savoirs didactiques visés par le dispositif de formation : la variété de représentations graphiques des triangles (et des positions inhabituelles) et le choix du critère de classement de triangles (voir l'annexe 18.5, étape 2).

Quant aux quadrilatères, les premières analyses portaient sur le vocabulaire employé dans des différents extraits tirés des manuels scolaires (voir l'annexe 19.4, étape 2) et sur le schéma de classification (voir l'annexe 19.5, étape 2 et 3). Les modifications du schéma proposées par les étudiants portaient essentiellement sur les ajouts de noms de classes (trapèzes, parallélogrammes, rectangles, losanges et carrés) et de caractéristiques de classification (2 côtés parallèles, les côtés parallèles 2 à 2, les angles droits, les côtés de même longueur) et seulement à peu près dans la moitié de fiches des équipes, sur la transformation du schéma (supprimer les figures et indiquer le sens de flèches). Les nouveaux schémas étaient présents dans 14 fiches d'équipes (parmi 22) : 12 diagrammes à branches, 1 diagramme de Carroll et 1 diagramme de Venn. La discussion organisée en classe a permis de prendre conscience de la hiérarchisation des classes, de l'emploi des représentations graphiques des classes et de l'orientation de la flèche désignant la relation entre deux classes.



Le résultat de cette discussion a été vérifié par les analyses de deux extraits tirés du matériel didactique de l'enseignement (voir l'annexe 19.5, étape 3). L'analyse du dernier extrait était un succès. Nous avons demandé d'analyser les relations entre les classes de quadrilatères particuliers et d'identifier celles qui ne sont pas respectées par le schéma (voir l'extrait ci-dessous).

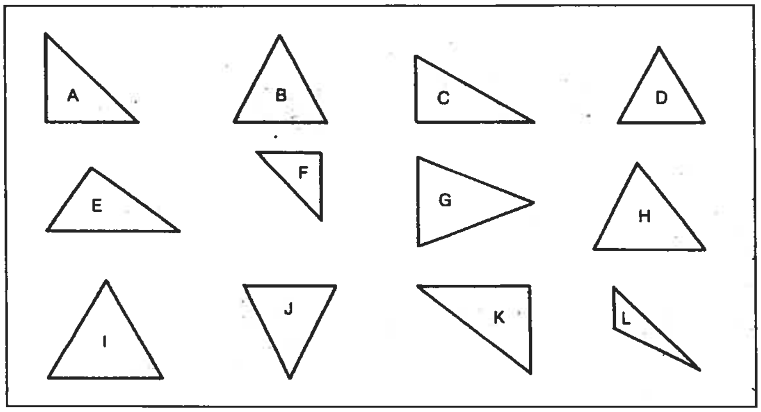
Toutes les équipes ont identifié les relations non respectées par le schéma entre les classes de quadrilatères particuliers (parallélogrammes→ trapèzes, carrés → rectangles, carrés → losanges) et ont présenté les justifications correctes.[57]

Lors de la formation, nous avons mis un accent particulier sur la variété de représentations des figures et sur les phénomènes de perception. Il s'agit avant tout de *l'orientation* spatiale

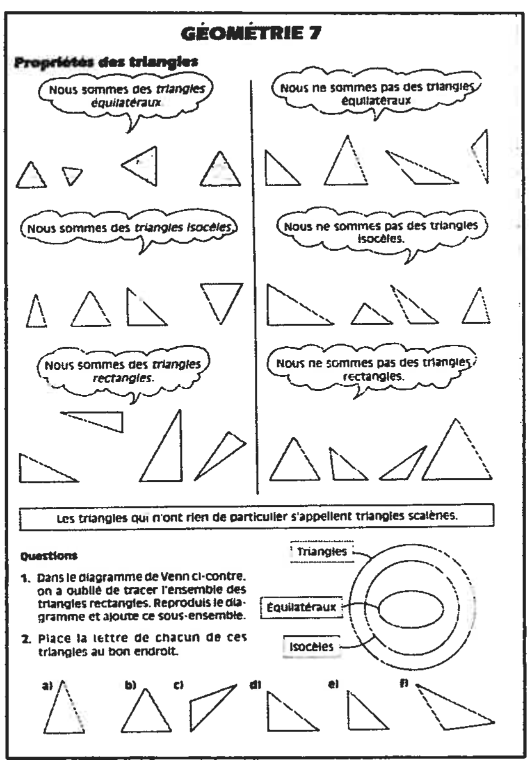
---

[57] L'année suivante la phase expérimentale (2003), nous n'avons pas proposé cet extrait à l'analyse lors de la formation mais en tant que question à l'examen de mi-session. 90% d'étudiants ont répondu correctement. Pour démontrer leur savoir géométrique, plusieurs étudiants ont tracé à côté les différents schémas de classification.

(positions inhabituelles) et de la *visualisation* spatiale (évoquer, représenter mentalement, interpréter les données visuelles, etc.). Plusieurs extraits proposés à l'observation et à l'identification des figures ou des éléments contenaient les représentations inhabituelles (voir l'extrait ci-dessous tiré de la situation 18.2 ou l'annexe 11.1).



En faisant rencontrer les étudiants les difficultés de la reconnaissance d'une figure (par exemple, la détermination des triangles A, H et G comme isocèles), nous avons cherché à provoquer le questionnement sur les phénomènes d'apprentissage afin de les faire connaître et d'en tenir compte dans l'organisation des apprentissages. Nous analysons l'impact de ce travail dans l'analyse des séquences d'enseignement conçues par les étudiants dans la section 6.3.



En proposant à l'examen de mi-session l'analyse d'une activité portant sur les triangles, nous voulions vérifier l'emploi des critères d'analyse, dont une élaboration progressive a été mise en place lors de la formation. Il s'agit pour l'activité proposée à l'analyse des éléments suivants : objectifs visés par l'activité, pertinence des étapes, choix des représentations, précision du vocabulaire employé dans des consignes et dans des définitions, anticipation des réponses possibles et des difficultés des élèves, modifications souhaitées. En même temps, nous étions intéressée par l'emploi du diagramme de Venn pour la classification des triangles (qui n'était pas utilisé lors de la formation pour classifier les triangles, cependant faisait objet des classifications des quadrilatères). Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau suivant (Tableau XXXI):

Tableau XXXI. Taux de réponses de l'analyse d'une activité (première évaluation)

Commentaires		**Taux de présence du commentaire**
1. Absence de la classe de triangles scalènes dans la mise en situation		27 %
2. Absence de définitions des classes		63 %
3. Absence de différents triangles dans les représentations graphiques; ou représentations ambiguës		58 %
4. La définition des triangles scalènes est fausse		44 %
5. Difficulté d'utilisation du diagramme de Venn pour la classification des triangles selon les côtés et selon les angles		69 %
6. La classe de triangles scalènes n'est pas désignée dans le diagramme		52 %
Modification du diagramme	1. Diagramme à branches	66 %
	2. Diagramme de Venn	27 %
	3. Diagramme de Carroll	7 %

Même si le taux de réussite pour chaque élément de l'outil d'analyse n'était pas très élevé (car les critères n'étaient pas spécifiés et l'analyse portait sur toute une situation), les différents éléments des analyses didactiques travaillés lors de la formation sont ressortis :

- but de l'activité et connaissances en jeu,
- ajout des étapes de l'activité,
- recherche d'une propriété commune (élément de l'activité d'observation),
- choix de représentations,
- précision du vocabulaire,
- critères de classification (côtés et angles),
- utilité de différents diagrammes de classification.

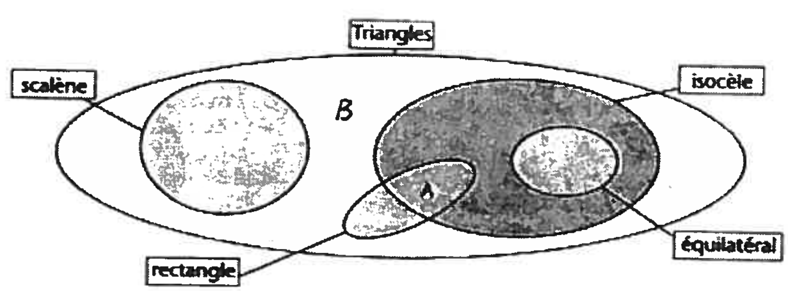
Cependant, l'analyse des schémas de classification modifiés nous montre que dans le tiers des diagrammes à branches proposés par les étudiants, la relation entre la classe des triangles isocèles et équilatéraux est absente et la moitié des diagrammes de Venn sont erronés.

Cette première évaluation a permis aux étudiants de prendre conscience de leur propre capacité d'analyser et de l'état de leurs connaissances géométriques qui permettaient cette analyse.

Nous avons décidé de reprendre l'analyse de cette activité au début du cours suivant en équipe de 4 à 6 étudiants (voir l'annexe 18.9). L'analyse proposée a ciblé tant la consolidation des connaissances géométriques (les propriétés de côtés et d'angles, les différentes représentations des triangles et la relation entre les classes) que l'application des connaissances didactiques (but, ordre des étapes, vocabulaire employé, choix de représentations employées dans la phase de rappel et pour la classification, pertinence du schéma, gestion de l'activité, détermination des compétences).

À l'examen final, parmi sept questions de nature didactique, il y avait une question demandant d'analyser un extrait portant sur la classification des triangles. La tâche que nous avons demandée ressemble beaucoup à la question de l'examen de la mi-session, sauf que les ensembles des triangles scalènes et rectangles sont présents dans un diagramme (voir le diagramme ci-dessous)

Question 13. *Faire une critique didactique du schéma de classification des triangles.*



L'analyse des commentaires proposés par les étudiants montre les résultats suivants :

- 82 % d'étudiants ont identifié que l'ensemble des triangles rectangles ne fait pas partie des triangles scalènes et qu'il doit chevaucher les deux régions : isocèle et scalène.

- 97 % des étudiants se prononcent sur les critères de classification des triangles : selon les côtés (scalène, isocèle, équilatéral) et selon les angles (rectangle). Certains indiquent les difficultés des élèves à employer le diagramme de Venn (ils doivent tenir compte de deux critères envisagés par la classification)
- 79 % d'étudiants ont écrit que le grand ensemble (appelé « Triangles ») est une région vide, car selon le critère de classification (côtés), il n'existe aucune autre classe de triangles à part des *scalènes* et *isocèles*.

Nous pouvons analyser la progression des étudiants dans les activités d'analyse en comparant les résultats obtenus à l'examen final à ceux de l'examen de la mi-session. Dans le graphique suivant, nous mettons ces données en ordre correspondant aux moments de la cueillette de données (figure 15) :

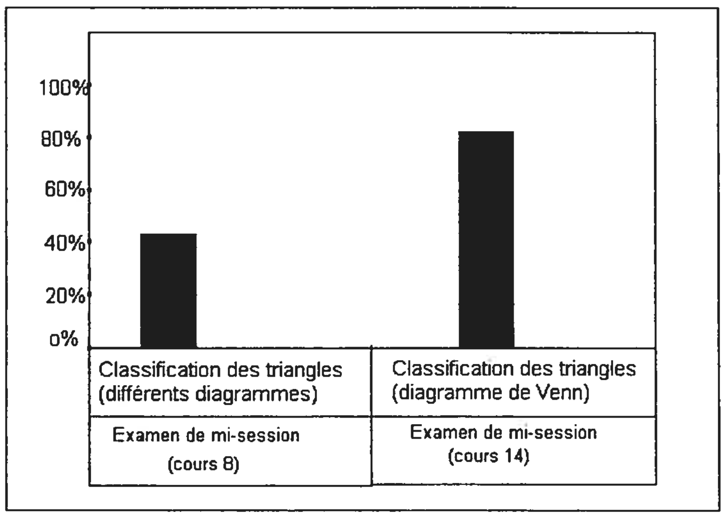


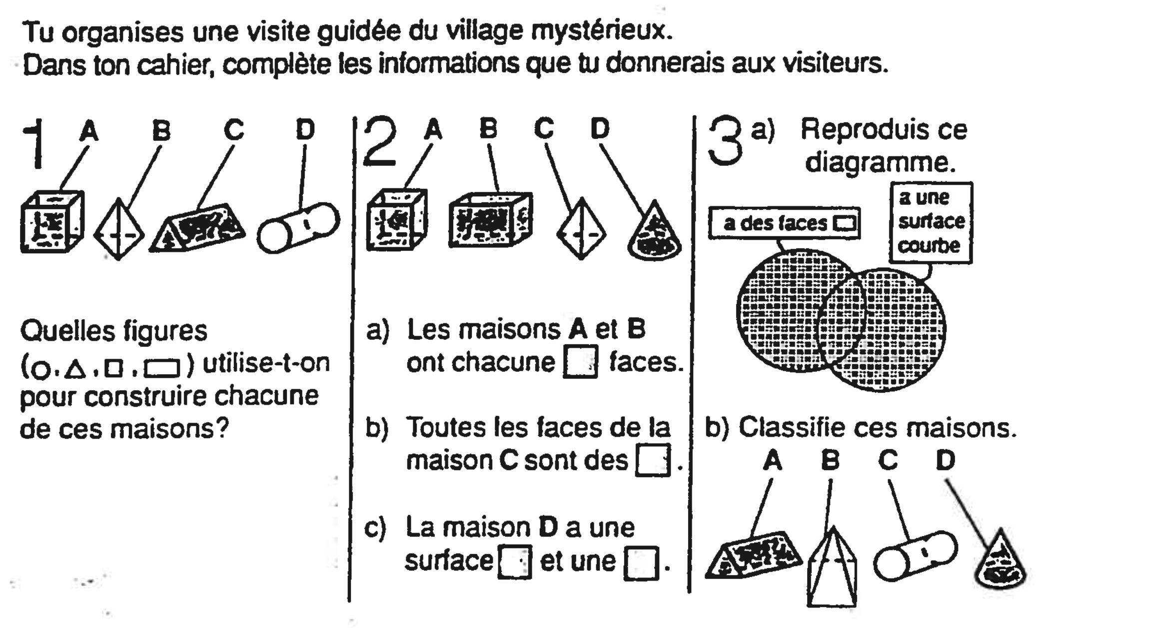
Figure 15. Progression des réponses des étudiants (Classification des triangles)

Les résultats présentés dans le tableau indiquent le taux de réussite des étudiants dans la modification du schéma à l'examen de mi-session (42.5 %) et l'augmentation du taux (82 %) à l'examen final (commentaires portant sur la modification du schéma). Cette progression est due à un travail constant sur la construction des relations entre les propriétés et entre les classes et sur le choix des activités de classification proposées pour les notions différentes : lignes, lignes droites, solides (différentes classifications), polygones, triangles, quadrilatères, similitudes.

L'analyse des résultats et des comportements des étudiants lors des activités d'analyse montre, qu'au début des apprentissages c'est surtout le niveau de connaissances géométriques et des expériences géométriques préalables qui influencent les décisions de futurs maîtres, tandis que vers la fin de formation, la connaissance géométrique et surtout les différentes méthodes (ou approches) utilisées dans la réalisation des activités et l'emploi des critères élaborés à partir de l'analyse des tâches proposées dans le cadre de formation jouent un rôle décisif dans l'analyse et la modification des activités.

Pour appuyer nos conclusions, nous avons parallèlement décidé d'analyser les réponses des étudiants données à une question supplémentaire proposée à l'examen final (question 14 c) qui ne porte pas sur les notions choisies, mais qui vérifie l'emploi des critères d'analyse.

14. c) Analyser l'activité de classification (activité 3).



Parmi les commentaires présentés par les étudiants, nous analysons ceux portant sur la pertinence du schéma et sur le choix des solides à classer (voir les résultats obtenus dans le tableau XXXII).

Tableau XXXII. Commentaires sur la pertinence du schéma et pourcentage de réponses

Commentaires sur la pertinence du schéma		Pourcentage d'étudiants ayant proposé le commentaire
Modifier les noms des ensembles	« faces planes » et « surfaces courbes »	56 %
	« polyèdres » et « corps ronds »	6 %
	« roulent » et « glissent »	3 %
	« faces△», « faces□», « faces ▫ » et « faces ○ »	6 %
	nombre de « faces△», « faces□», « faces ▫ » et « faces ○ »	3 %
	Appliquer les différentes démarches de manipulation et d'observation et laisser le choix des critères et du diagramme libre (sans identifier l'élément problématique)	6 %
Choix des figures à classer	Ajouter pour la classification la sphère et tous les solides travaillés dans les deux étapes précédentes	45 %
	L'échantillon de figures n'est pas suffisant et laisse l'espace vide dans le diagramme (sans précision de solides à ajouter)	5 %

L'analyse de ces données nous permet d'observer la réussite de 74 % des étudiants dans l'identification d'un élément problématique portant sur les noms des ensembles et la variété des démarches de classification des solides proposée par 81 % des étudiants. La proposition de 50 % des étudiants à ajouter les autres solides pour donner plus d'ampleur à la classification est aussi un élément positif de l'analyse des étudiants qui démontre l'emploi des critères élaborés lors de la formation.

Pour conclure la présente section, nous voulons souligner que l'application de critères d'analyse participe efficacement à la compréhension du contenu disciplinaire. Lors de la formation, nous avons observé comment l'intérêt pour l'étude épistémologique du contenu vient de l'analyse des activités et du questionnement didactique. Nous nous étions préoccupée considérablement par l'organisation des activités d'apprentissage, sur le développement du point de vue critique et constructif, basé sur la connaissance profonde du contenu géométrique et permettant la modification de l'activité selon le but de l'apprentissage. Nous avons essayé et nous pensons que nous avons réussi à faire émerger l'obligation d'analyser les activités avant de les proposer en classe.

6.3 FORMATION DIDACTIQUE DES ÉTUDIANTS

Dans cette section, nous analysons l'impact de situations de formation sur le développement professionnel des futurs maîtres. Par l'étude de préparations des séquences d'apprentissage effectuées par des futurs maîtres nous voulons, d'une part, vérifier leurs compétences d'analyser du point de vue didactique les tâches proposées aux élèves et d'intégrer les activités et les tâches de manuels dans leurs propres séquences d'enseignement et d'autre part, comprendre comment, pour chaque notion géométrique retenue de la liste du contenu notionnel, se sont articulés les savoirs géométriques et didactiques, développés lors de la formation.

Dans le tableau ci-dessous (Tableau XXXIII), nous présentons les résultats d'analyse de six travaux concernant la préparation des séquences d'enseignement portant sur les propriétés des triangles, l'identification et les constructions des figures planes. Les différents critères décrits dans la grille sont évalués selon de façon qualitative : excellent, très bien, bien, passable, insuffisant, correspondant aux éléments de la grille d'évaluation qualitative de l'université.

Tableau XXXIII. Grille d'évaluation de travaux de session

N	Critères	Excellent	Très bien	Bien	Passable	Insuffisant
1	La description de buts, de connaissances en jeu dans la situation correspond au type de travail proposé	4		1	1	
2	L'analyse de la mise en situation et de l'ordre des consignes	3	2		1	
3	L'analyse du vocabulaire géométrique	2	1	2	1	
4	Le choix des figures et des grandeurs retenues, les difficultés de lecture et d'interprétation des schémas, des dessins et des représentations graphiques sont décrites	2	3		1	

5	L'analyse didactique de la situation (situation d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation)		2	1	1	2
6	L'anticipation des réponses des élèves, les interventions sur les erreurs		2	2	2	
7	Les compétences reliées aux tâches sont présentées et justifiées		3	2	1	
8	Les ajustements et les corrections sont présentés et justifiés	1	2	2	1	
9	La connaissance géométrique démontrée par le travail		3	2	1	
10	Le travail a effectivement permis de vérifier du point de vue mathématique et didactique la capacité d'analyser des situations et des tâches proposées aux élèves	1	3	1	1	
11	Le travail a effectivement permis de vérifier du point de vue mathématique et didactique la capacité de modifier des situations et des tâches proposées aux élèves et de les intégrer dans les séquences d'enseignement		2	3	1	

Pour maximiser l'objectivité de l'analyse, nos commentaires vont s'appuyer sur les exemples concrets tirés de travaux des étudiants. Nous présentons l'analyse des résultats obtenus en les distinguant selon deux aspects : l'emploi de connaissances géométriques et didactiques.

6.3.1 EMPLOI DE CONNAISSANCES GÉOMÉTRIQUES

Nous avons analysé l'emploi de connaissances géométriques dans les décisions des futurs maîtres qui concernent les commentaires critiques portant sur l'activité tirée du manuel, les modifications effectuées et les nouvelles propositions, ainsi que la pertinence géométrique des tâches, la connaissance des propriétés des figures, des définitions, le vocabulaire employé dans les consignes, etc.

Les travaux analysés démontrent un très bon niveau de connaissances géométriques ce qui s'observe dans la description des connaissances géométriques en jeu, dans l'explication de critères de classification des triangles et du choix de matériel, dans l'analyse du choix de figures à observer (ou à classer) et dans l'analyse du vocabulaire.

Par exemple, dans la description des connaissances géométriques en jeu, des étudiantes écrivent :

> *« Il est important que l'enfant comprenne qu'un même triangle peut avoir les propriétés appartenant à plus d'une catégorie. De plus, un triangle peut être classifié sous deux dimensions (côté et angle). Par exemple : un triangle peut avoir un angle droit donc être un triangle rectangle. Ce même triangle peut avoir deux côtés congrus donc être un triangle isocèle. Ce triangle est donc un triangle rectangle isocèle. » (Travail n.17, p.3)*

Dans un autre travail, portant aussi sur les triangles, nous trouvons l'explication suivante de critères de classification des triangles :

> *« Or, on sait très bien que tous les triangles se divisent en deux grandes classes selon les côtés : scalènes et isocèles. En effet, un triangle qui n'est pas scalène est automatiquement isocèle. » (Travail n.25, p.6)*
>
> *« De plus, en raisonnant de cette manière, le jeune pourra décortiquer à fond chacun de ces concepts et ainsi faire certains liens entre ceux-ci. Par exemple, en étudiant le triangle isocèle et équilatéral, l'élève réalisera que le concept « isocèle » inclut nécessairement le concept »équilatéral. » Un triangle ayant trois côtés congrus (équilatéral) n'a-t-il pas nécessairement deux côtés congrus (isocèle)? » (Travail n.25, p.8)*

Plusieurs équipes soulignent l'importance accordée au choix de figures et aux différentes positions de représentations graphiques des figures planes :

> *« L'idée est que l'élève constate que le triangle peut se présenter sous différentes dimensions et formes) » (Travail n.19, annexe 2, p.1)*
>
> *« Le fait de représenter une variété de triangles est pertinent puisqu'il permet à l'élève de se familiariser avec toutes les catégories de triangles possibles. »(Travail n.25, p.6)*

Dans l'explication du choix de présentation des figures, les étudiants mentionnent les éléments des activités d'observation :

> *« De plus, nous estimons que le fait de les [carré et rectangle] présenter dans un même temps permet de faire ressortir les différences entre les deux et d'obtenir une meilleure compréhension des élèves par le fait qu'ils voient les particularités de chacune des figures, mais aussi les différences entre elles. » (Travail n41, p.2)*

Les commentaires portant sur l'analyse du vocabulaire démontrent aussi les fruits du travail effectué lors du cours :

> *« Pour la question 1, « **Observe les objets qui t'entourent dans la classe. Identifie ceux qui ont la forme d'un cercle** », nous pensons [...] qu'il n'est pas approprié de dire « qui ont la forme d'un cercle ». Un objet ne peut pas avoir la forme d'un cercle, c'est plutôt qu'une des faces de l'objet a une surface circulaire. [...] La question deviendra*

> *donc : « **Identifie ceux dont une des faces est un disque.** » Bien entendu, l'enseignante aura à vérifier, si elle ne l'a pas encore enseigné, ce qu'est un disque pour que tous comprennent et cherchent le même type d'objets. Pour ce faire, nous croyons que le bel exemple pourrait être celui d'un disque compact pour être certaines que les enfants s'en souviennent, ayant déjà un terme de vocabulaire en commun (disque). » (Travail n.41, p.7-8)*

La notation « passable », attribuée à quelques reprises est surtout liée à la non-reconnaissance de certaines ambiguïtés ou certaines erreurs dans l'analyse des activités tirées du manuel scolaire ou encore à l'emploi de termes géométriques non-appropriés à un niveau d'enseignement touché par l'activité.

Par exemple, dans l'identification et dans la description du triangle (Travail n.17, p.4), la future enseignante anticipe la réponse suivante : « *Polygone à 3 côtés dont la somme des angles intérieurs est égale à 180* ». Tout d'abord, c'est une définition redondante (un polygone à 3 côtés est déjà un triangle); de plus, ni dans cette activité, ni dans la description de connaissances préalables des élèves, la notion de somme des angles intérieurs n'était touchée.

Dans le corrigé de l'activité, en décrivant les triangles isocèles, la future enseignante utilise le terme erroné « opposés » dans la réponse suivante : « *Les triangles situés dans la région A ont les propriétés suivantes : deux côtés congrus, deux angles <u>opposés</u> congrus.* » (Travail n.25, p.25)

Dans le tableau de classification des figures planes (Travail n.30, p.8), l'étudiante présente une seule caractéristique « *les quatre côtés sont de même mesure* » dans la description des propriétés essentielles du carré et du losange, tandis que le carré exige encore des angles droits. Pour le rectangle, nous observons seulement la caractéristique suivante « *Les côtés opposés d'un rectangle sont de même mesure* » qui n'est pas une caractéristique déterminante de cette classe et s'applique à tous les parallélogrammes. Ensuite, dans la description des figures planes (p.11), la future enseignante anticipe de remplacer le terme « *côtés congrus* » employé par un élève par le terme « *côtés isométriques* ». (Tout d'abord, nous ne pensons pas qu'un élève de 6 ans utilisera le terme « *congru* »; de même, nous ne voyons pas en quoi le terme « *isométrique* » est plus pertinent que le terme « congrus »).

Nous voulons souligner que l'analyse du contenu géométrique (du choix de figures, de différentes représentations des figures, du langage employé dans les consignes et dans les définitions, de la pertinence des schémas, etc.) du point de vue de son enseignement a favorisé la compréhension des contenus géométriques et de certaines conditions de l'organisation des apprentissages. Nous sommes consciente que ce n'est qu'avec l'expérience que les étudiants vont s'approprier la répartition du contenu et du vocabulaire à acquérir selon le cycle. Et que c'est seulement dans la pratique qu'ils vont sentir si les activités qu'ils proposent et le vocabulaire qu'ils utilisent sont appropriés ou non pour le cycle particulier de l'enseignement.

6.3.2 EMPLOI DE CONNAISSANCES DIDACTIQUES

Les critères élaborés lors de la formation sont destinés à favoriser le questionnement didactique sur les objectifs qu'ils visent, sur la structure de l'activité (mise en situation, l'ordre des étapes pour arriver à ce but) et sur l'analyse épistémologique du contenu afin de déterminer les formes appropriées d'apprentissage. La réflexion sur les actions des élèves : sur les connaissances préalables qui suffiront à l'élève pour « entrer » dans la situation, sur les procédures qui sont suffisantes pour résoudre le problème, permet d'anticiper les comportements des élèves et de préparer les interventions.

Notre analyse révèle une très bonne reconnaissance des buts et des connaissances en jeu dans la situation, une analyse très profonde de la mise en situation et de l'ordre des consignes, du vocabulaire employé par l'activité, de choix des figures, de pertinence des schémas de classification. Les extraits suivants montrent les liens directs avec les activités de formation :

1. Buts de la situation (les futurs maîtres précisent aussi la démarche envisagée)

> *« Le but principal de cette situation est de familiariser les élèves aux différentes propriétés des triangles et de les rendre capable de classer n'importe quel triangle dans sa catégorie. » (Travail n.25, p.3)*
>
> *« La leçon permet aux élèves d'identifier, de décrire, de construire et de comparer des figures planes » (Travail n.19, p.2)*
>
> *« Le but principal de cette situation d'enseignement est d'amener l'élève à identifier les figures planes. [...] À la fin de l'enseignement, l'élève devra être capable de décrire et nommer les figures en utilisant le langage mathématique. » (Travail n.30, p.9)*

2. L'ordre des étapes

« En ce qui a trait aux consignes, elles suivent un ordre logique. De l'activité 1 à l'activité 4, elles permettent de découvrir les figures planes, de les nommer, de les caractériser, de les identifier dans des différents contextes (papier et concret), de les utiliser dans une autre discipline (arts plastiques) et enfin, de s'amuser avec ces dernières en guise de consolidation. » (Travail n.1, p.9)

« [...] nous ferons le numéro un dans lequel l'élève doit tracer des figures. Ensuite, l'apprenant fera le numéro deux qui consiste à dégager les différences entre les figures. Par contre, nous pensons qu'il serait préférable que l'élève dégage leurs propriétés avant de les différencier, car les caractéristiques propres aux figures permettent la différenciation. Après cette dernière étape, il est important de faire un retour collectif pour s'assurer que tous les enfants ont atteint les objectifs visés.) (Travail n.30, p.17)

3. Le choix de représentations

« Nous trouvons qu'il est intéressant que ces figures soient représentées dans des formats et dans des orientations différentes. De cette façon, les élèves s'habituent aux différentes dispositions que peuvent prendre les figures planes et ils ne créent pas de représentations mentales figées de ces figures. » (Travail n.19, p.4)

« Il est important que les enfants puissent concevoir une figure sous différentes dimensions et sous différentes orientations dans un plan. Trop souvent, les enseignants présentent les figures toujours dans une même orientation. Faire ce genre de généralisation provoque de futures difficultés chez les élèves. » (Travail n.30, p.11)

«Les enfants sont habitués de voir des figures de façon horizontale ou verticale seulement, rien d'oblique. » (Travail n.41, p.9)

4. La pertinence des consignes

« L'activité tient compte du bas âge des élèves, c'est pourquoi les consignes sont émises au fur et à mesure que l'activité se déroule. Elles sont brèves et précises. L'utilisation de consignes simples, c'est-à-dire, demander aux élèves une seule chose à la fois, est essentiel quand on s'adresse à des élèves du premier cycle » (Travail n.30, p.10)

*« Donc, plutôt que de demander aux élèves « **Combien compte-t-on de paires de triangles congrus dans l'illustration de ce personnage?** », question qui, selon nous, n'a pas de lien direct avec la mise en situation, nous demanderions « **Aide Mario à décrire chaque partie de son personnage aux spectateurs selon ce que tu connais des triangles** ». Grâce à un tel contexte, l'élève comprendra que les exercices qui suivent lui serviront à remplir cette tâche et, nous pourrons voir quelles sont les connaissances qu'ils possèdent déjà sur les triangles.» (Travail n.25, p.3)*

Quand nous avons décidé d'introduire l'approche par « situations » en formation initiale des maîtres, il s'agissait pour nous d'attirer l'attention du futur enseignant sur la préparation des conditions d'acquisition des connaissances et de faire comprendre aux étudiants comment s'effectue le passage de la situation mathématique à son état didactique. L'un des objectifs que nous avons visés est de faire réfléchir les futurs enseignants sur la structure organisationnelle de l'activité qui doit permettre d'atteindre les buts de l'apprentissage.

En ce qui a trait à la dialectique d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation, nous n'avons vu apparaître la notion de « transfert de responsabilité » que dans l'analyse des phases d'action des séquences d'enseignement. Les phases de formulation et de validation ont été dirigées par des consignes et des questions d'une enseignante. Les phases d'institutionnalisation (ou leur absence) ont été reconnues dans les analyses des activités des manuels, cependant elles sont rarement employées dans les activités modifiées ou originales. Nous présentons un exemple qui identifie ces aspects dans la planification d'une situation d'apprentissage.

1. Dévolution

> *« La séquence d'activités telle que proposée dans le manuel ne permet pas complètement un transfert des responsabilités vers l'élève. Ce dernier est rarement amené à se questionner sur les figures planes. Aucune activité ne lui permet de découvrir les caractéristiques propres à ces figures. Les questions et l'enseignante sont trop souvent les sources des réponses. Le processus d'action est exploité assez faiblement tout au long des activités. On demande souvent à l'élève de reproduire ce qui lui permet d'intégrer la notion des figures planes. Cependant, il est peu souvent amené à expliquer ses choix ou les notions vues. [...] le processus de validation est inexistant tout au long de l'activité. Seulement l'enseignante et la partie « coffre aux trésors » de l'activité peuvent offrir des réponses. Rarement, au long de cette séquence, l'élève est amené à poser des hypothèses et à les vérifier. » (Travail n.19, p.6)*

2. Action, formulation, validation, institutionnalisation

> *«<u>Phase d'action</u> : les élèves vont, en équipes, manipuler et observer les figures données. Ils doivent comprendre comment la figure est constituée. Ils doivent se rendre compte à cette étape que, par exemple, tous les côtés du carré sont égaux, qu'il est possible d'utiliser un coin de feuille (angle droit) pour s'assurer que les figures sont bien un carré ou un rectangle, etc.*
>
> *<u>Phase de formulation</u> : les élèves doivent discuter entre eux pour décider des informations qui seront écrites sur le tableau de l'équipe. À ce moment, ils doivent transposer en mots leurs observations et émettre des hypothèses sur les propriétés de leur figure.*
>
> *<u>Phase de validation :</u> il y aura une mise en commun des observations faites. Les élèves seront confrontés aux questions et aux réactions des autres élèves de la classe et, spécialement, de l'autre équipe « expert ». Ils auront à expliquer et à démontrer sur quel aspect visuel des figures sur lesquelles ils sont basés pour émettre leurs hypothèses.*

> *Phase d'institutionnalisation : les élèves devront retenir les hypothèses les plus pertinentes et celles-ci seront écrites sur le grand carton par une équipe de volontaires pendant la récréation ou l'heure du midi, pour les afficher en classe.*
>
> *Pour conclure, un retour sera fait par l'enseignante et avec les élèves pour résumer les propriétés retenues par la classe pour l'identification du carré, du rectangle et du triangle. » (Travail n.19, p.18)*

Néanmoins, à travers l'analyse de planifications, nous pouvons observer que les étudiants ont retenu de cette approche une idée de faire « entrer » les élèves dans une situation (observer, rechercher, construire, etc.), de leur permettre de décrire, formuler, énoncer, de présenter les résultats de leur travail et de les valider, et cela, dans chaque séquence analysée.

Par exemple, dans la situation de la description des triangles (Travail n.17), les futurs enseignants organisent une recherche d'une propriété commune de chaque classe et proposent ensuite d'analyser les différences des triangles appartenant à la même classe.

Dans le travail portant sur la construction des figures planes (Travail n.41), les futurs enseignants utilisent les procédures et l'ordre appropriés à un niveau de développement de l'élève. Ainsi, au début, les élèves utilisent les solides pour tracer les contours et les futurs enseignants se préoccupent de la précision des tracés. Ensuite, les futurs enseignants nomment les figures planes et proposent une activité portant sur la reconnaissance des tracés possibles obtenus à l'aide de différents solides. À la deuxième étape, les élèves reproduisent les dessins de figures planes en utilisant le papier quadrillé. À la fin de l'activité, les futures enseignantes organisent une activité portant sur la recherche des propriétés des figures planes (par exemple : carré possède 4 côtés de même mesure et 4 angles droits) afin de reproduire le dessin du carré et du rectangle en utilisant le papier régulier.

Cependant, dans deux planifications, nous avons noté que certaines tâches proposées aux élèves ne correspondaient pas aux objectifs déclarés par les futurs enseignants.

1. Par exemple, dans l'activité consacrée à l'identification de figures planes (Travail n.1, p.19), les futurs enseignants proposent la description du triangle, du carré, du rectangle et du losange selon le nombre de côtés et d'angles sans expliquer comment cette description permet aux élèves de distinguer ces figures.

2. Dans une séquence portant sur la description des figures planes (Travail n.30), les futurs enseignants proposent une activité de composition des figures (carré, rectangle, losange, etc.) à l'aide des autres figures (qui vise, en général, la description de différentes compositions et l'introduction à la notion de la mesure des surfaces) et essayent de faire ressortir les propriétés de congruence de côtés et de la présence d'angles droits de façon artificielle.

En ce qui concerne l'emploi de l'approche par compétences pour les apprentissages géométriques, nous avons proposé plusieurs situations où le futur maître pouvait s'interroger sur les compétences visées par une activité proposée pour l'analyse ou dans laquelle il a participé. Les différentes analyses effectuées cherchaient à mettre en relation le but que l'enseignant vise par une activité d'apprentissage avec la connaissance à acquérir et avec la(les) compétence(s) décrite(s) par le nouveau programme. La détermination du but principal de la situation et des buts secondaires, selon nous, permet au futur enseignant de comprendre quel savoir est en jeu dans une situation, d'analyser la pertinence de chaque étape de la situation et les liens logiques entre les étapes permettant d'atteindre les buts visés.

L'analyse de travaux de session démontre que la compréhension de buts, de connaissances en jeu dans la situation, d'une intentionnalité dans l'organisation de l'activité permet aux étudiants de déterminer les compétences décrites par le programme. Cependant, les justifications que les futurs enseignants présentent ne sont pas toujours rattachées aux tâches particulières de l'élève et restent très générales reprenant les descriptions de composantes des compétences présentées par le programme.

Nous voulons souligner que la reconnaissance des compétences décrites par le programme ministériel est une tâche réalisable sans l'analyse didactique profonde du contenu de l'activité. Presque chaque activité géométrique vise le développement du vocabulaire (Compétence 3), demande la recherche des ressemblances et des différences, faire le choix du critère de la classification, etc., ce qui exige la justification qui fait appel à des concepts mathématiques (Compétence 2). Dès que l'étudiant en formation rencontre les consignes demandant d'effectuer la tâche, discuter avec un ami, vérifier la solution, il a un recours à la Compétence 1, dont les consignes ressemblent aux composantes de celle-ci. Cependant, sans analyse du contenu de point de vue de son enseignement (liens aux connaissances préalables, choix de figures et de leurs positions proposées à l'observation, logique des étapes, vocabulaire et schémas précis, etc.), il est impossible d'identifier les variables qui favorisent ou contrent le développement de la compétence particulière et des apprentissages envisagés. Les variations dans les approches et les méthodes adoptées pour atteindre les objectifs du programme ministériel dépendront de l'expérience du futur enseignant et de ses connaissances géométriques et didactiques.

Nous osons espérer que l'approche, les méthodes et les démarches employées dans les situations de formation se transféreront à la pratique réelle et les affirmations des étudiants suivantes ne resteront pas que des « conclusions » du travail pratique du cours.

> *« Nous devons prendre conscience que l'analyse des activités est un travail qui doit être fait régulièrement puisque nous ne pouvons pas prendre pour acquis que le matériel publié est adéquat. Chaque leçon doit être appropriée et justifiée, et ce, selon les compétences, que nous voulons développer chez nos élèves. Comme enseignants, notre responsabilité est d'analyser le matériel didactique afin d'améliorer et de modifier les situations d'enseignement en les rendant plus pertinentes et ainsi maximiser les chances d'apprentissage de nos élèves. » (Travail n.19, p.12)*
>
> *« La construction de notre activité d'apprentissage nous a permis de réfléchir sur l'intégration des diverses situations didactiques. [...] L'expérimentation auprès d'un petit garçon de six ans confirme que notre activité est adaptée aux élèves du premier cycle. Par contre, quelques points de la situation d'enseignement sont à modifier. L'utilisation du carton pour former les formes est difficile à manipuler. Pour contrer ce problème, il serait plus adapté d'utiliser du polystyrène pour construire les formes. Ce changement favoriserait grandement la manipulation.*
>
> *[...] pour nous, l'essentiel est de satisfaire les besoins d'apprentissage des élèves tout en les stimulant à travers des activités motivantes. C'est d'ailleurs ce qui a déclenché notre envie de réaliser cette activité. » (Travail n.30, p.18)*
>
> *« Toute séquence didactique profite mieux aux élèves que des situations d'apprentissage isolées les unes des autres. Cependant, ce n'est qu'avec l'expérience que l'on peut réellement vérifier l'exactitude et la pertinence d'une séquence didactique. » (Travail n.41, p.13)*

En conclusion, nous voulons souligner deux points importants qui ressortent de l'analyse de résultats de travaux de session. Premièrement, la simple description d'une nouvelle méthode ou d'une nouvelle approche d'enseignement n'assure pas son application. Brousseau (1998, p.356) souligne que « [...] *si les professeurs croient suffisamment à l'efficacité propre d'une méthode didactique au point de se reposer presque complètement sur elle, ils ne remplissent plus leur rôle dans la négociation du contrat didactique, et la méthode échoue.* »

Deuxièmement, aucune innovation ne peut faire abstraction de la connaissance profonde de la discipline à enseigner. Et ce point constitue le point de départ pour toute réflexion sur l'organisation de la formation.

7. CONCLUSION

Dans cette conclusion, en reprenant les objectifs de la recherche, nous voulons souligner les principales étapes de notre démarche et les résultats obtenus. Nous précisons les apports et les limites de la recherche et terminons en ouvrant sur les suites qui pourraient lui être données.

7.1 OBJECTIFS ET RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

La question de moyens didactiques d'organisation de formation des futurs maîtres a été posée à plusieurs reprises par la communauté didactique. En tant que formateur, nous nous étions intéressée à l'impact de notre formation sur le développement professionnel du futur enseignant et par notre recherche, nous espérons avoir contribué à répondre à cette question. La question principale « Comment coordonner la formation didactique et la formation géométrique de telle sorte qu'il y ait chez les futurs enseignants une progression de niveaux de la pensée géométrique et une appropriation et mise en œuvre des concepts didactiques? » a orienté et guidé le projet de la recherche.

L'analyse de recherches menées dans le domaine de la formation des maîtres portant sur la préparation mathématique des enseignants du primaire (Mayberry, 1983; Graeber, Tirosh, Glover, 1986; Ginther, Pigge et Gibney, 1987; Porter, 1989; Brown, Cooney et Jones, 1990; Fennema et Franke, 1992; Bauersfeld, 1994), nous a permis de faire ressortir leurs difficultés et les raisons principales de leurs lacunes mathématiques. Les difficultés se situent sur les plans de la visualisation, du langage, du raisonnement, de la résolution des problèmes, de l'organisation des concepts géométriques et sont influencées par le contenu étudié, le nombre de cours suivis et surtout par la façon dont ce contenu a été enseigné et appris. Dans le cadre de cette recherche, nous avons identifié et décrit les difficultés des futurs maîtres dans la résolution de tâches géométriques concrètes et dans l'enseignement de la géométrie lors des stages scolaires. La description des difficultés dans l'apprentissage corrobore les résultats de recherches étudiées. Pour les expliquer, nous avons choisi de tirer parti des recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans les apprentissages de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques (Zhuravlev, 1950; Zykova, 1955; Rubinshtein, 1958; van Hiele, 1959/1985; Yakimanskaya, 1959, 1971; Wirszup, 1976; Bishop, 1980, 1989;

Battista, Wheatley et Talsma, 1982; Fuys, Geddes et Tischler, 1988; Hershkowitz, 1989; Hershkowitz, Ben-Chaim, Hoyles, Lappan, Mitchelmore et Vinner, 1990; Battista, 1990; Clements et Battista, 1992; Vergnaud, 1991, 2001; Duval, 1995).

L'analyse des difficultés et des besoins des futurs maîtres pour l'enseignement de la géométrie et de la mesure nous a conduite à nous centrer sur la préparation géométrique des futurs maîtres, à rechercher les moyens didactiques permettant la résolution des difficultés des étudiants en apprentissage de la géométrie et à faire le choix des savoirs didactiques qui permettront d'associer le plus étroitement possible le contenu notionnel de la géométrie à son apprentissage et à une réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire.

L'analyse des études qui présentent les moyens de transfert des résultats didactiques dans la formation des maîtres nous a permis de constater qu'il y a peu de recherches qui abordent la question d'implication des futurs enseignants dans le processus de formation. Quelques unes de ces recherches proposent des ingénieries de développement des concepts mathématiques particuliers ou des concepts didactiques particuliers, mais nous n'en avons pas trouvé aucune, qui prenne en compte la préparation des futurs maîtres à l'enseignement de la géométrie dans un contexte semblable au nôtre. Notre recherche est donc une contribution à la didactique de la formation des maîtres. Elle s'intéresse aux apprentissages des futurs maîtres, aux concepts et outils didactiques permettant l'organisation de la formation et au transfert des produits des recherches didactiques en formation des maîtres.

Les différents enjeux et contraintes de la formation initiale à l'enseignement (changement de programmes d'étude, le temps, le nombre d'étudiants, le niveau de préparation géométrique), ont été déterminants pour le choix des savoirs géométrique et didactique et pour le choix des moyens permettant la création et la réalisation du dispositif de formation.

En employant le cadre théorique de van Hiele (1959/1985) et de Duval (1995) pour l'analyse des contenus géométriques et des difficultés dans l'apprentissage de la géométrie, nous avons décrit les différents éléments du savoir géométrique visé au primaire et nous les avons intégrés aux situations de formation, en suivant une progression et une logique des apprentissages.

La formation didactique que nous proposons donc tient compte du développement géométrique des étudiants et de leurs besoins réels concernant la pratique d'enseignement. Pour réaliser cet objectif, nous avons choisi les concepts didactiques qui peuvent servir aux futurs enseignants de cadre de référence et d'outils pour leur travail et nous avons créé les conditions pour leur permettre d'intégrer ce savoir et d'utiliser ces outils dans leur pratique. Les éléments de la *Théorie des situations didactiques* développée par Brousseau (1998) qui nous ont servi d'outils pour l'organisation des situations de formation, ont constitué ainsi les uns des savoirs didactiques que ces situations visent à développer. En faisant vivre des étudiants des situations de formation, nous avons créé les conditions permettant d'introduire les savoirs didactiques et nous espérons que ces expériences vécues par les étudiants favoriseront un enseignement efficace de la géométrie et que les connaissances didactiques acquises se transféreront à leur pratique professionnelle.

Nous avons utilisé la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988) en tant que moyen d'organisation d'« ingénierie didactique de formation » qui a guidé le fonctionnement des différentes « ingénieries des notions géométriques » à l'intérieur du projet de la formation.

Notre étude apporte un éclairage sur le comportement du futur enseignant face aux situations de formation. Elle montre comment et dans quelle mesure se développe le niveau conceptuel des étudiants en géométrie et quel rôle joue dans cette progression la formation géométrique et didactique. Le changement de rôle du savoir géométrique et son passage à un savoir d'enseignement se sont réalisés progressivement à travers les situations de formation qui amenaient le futur maître à appliquer les connaissances géométriques et à intégrer les connaissances didactiques. Cette démarche a permis de favoriser la consolidation des connaissances géométriques, d'acquérir les connaissances didactiques, d'enrichir le répertoire des moyens permettant d'intervenir dans le contexte d'enseignement de la géométrie et par le fait de devenir plus compétent.

7.2 LIMITES DE LA RECHERCHE

L'examen de la validité et du potentiel de transfert des résultats obtenus dans le contexte particulier de cette recherche peut susciter quelques interrogations.

Celles-ci peuvent d'abord porter sur les méthodologies employées dans la phase de mise à l'essai du dispositif de formation. Le renoncement à la présence d'observateur externe et à l'enregistrement vidéo était volontaire afin d'éviter toute perturbation avec les objectifs et le déroulement de la formation et d'assurer l'authenticité du contexte d'expérimentation et de comportements des étudiants. Cela a permis de garder les futurs maîtres dans leur statut d'« étudiants » inscrits au cours de « Didactique de la géométrie et de la mesure »; leur comportement était tout à fait habituel. Pour compenser l'absence d'enregistrement, la description des comportements observés lors du déroulement du cours a été faite à la fin de chaque cours et consignée dans une chronique. Ces descriptions ont joué un rôle informatif et nous ont permis de repérer des phénomènes dans la recherche menée, d'apporter (ou non) des modifications pour le cours suivant et d'avoir le contrôle sur l'évolution des apprentissages. De plus, les observations des comportements des étudiants et du déroulement des situations de formation s'étendaient sur une période prolongée (2000-2002). Plusieurs phénomènes que nous avons identifiés se sont reproduits d'une année à l'autre.

En ce qui concerne la validation du dispositif développé, il ne pouvait être question, dans notre cas, de comparer des performances entre groupes expérimental et témoin ou de montrer les acquis pour présenter une preuve de succès ou d'échec de la formation proposée. Les données quantitatives provenant de tests et des examens portent un caractère informatif et sont analysées en tenant compte du contexte des activités effectuées lors du cours. En revanche, nous croyons qu'une observation détaillée et une analyse fine des événements de classe tout au long de la recherche avec les données quantitatives provenant de sources différentes et prises à différents moments de la formation permet de faire valoir nos conclusions.

En expliquant les raisons qui nous ont amenée à nous attribuer le double rôle de chercheur-formateur, il nous faut néanmoins reconnaître que ce choix impose une limite importante à cette recherche. Si le fait de nous être attribué ce double rôle nous a permis d'éviter les écueils normalement associés au transfert chez l'enseignant de situations conçues par un chercheur (Artigue, 2002), il convient de questionner la transférabilité des résultats obtenus au cas où les situations seraient pilotées par un autre enseignant. Si nous avons cherché à documenter de façon précise les ingénieries réalisées et les raisons derrière les choix didactiques afin d'en faciliter le transfert à d'autres enseignants, nous ne pouvons pour autant garantir la reproductibilité des phénomènes observés et des résultats obtenus. Peut-être convient-il d'admettre tout simplement que la prise en charge par le chercheur de la conception et de la réalisation des situations d'enseignement-apprentissage était un élément constitutif du dispositif de formation élaboré dans cette recherche. Aborder la question de transférabilité du dispositif nous amène à souligner que les situations proposées dans le cadre de la formation didactique ne doivent pas être perçues comme un modèle général d'une telle formation, mais plutôt comme un exemple local d'un dispositif tenant compte des différents enjeux et contraintes de la situation de formation.

Nous sommes aussi consciente que la formation géométrique indispensable aux futurs enseignants ne peut pas être dispensée de façon complète et adéquate dans le cadre d'un seul cours de didactique; cependant, en tenant compte des différents enjeux de la formation initiale à l'enseignement et des contraintes de la situation de formation réelle, nous croyons avoir contribué à rendre cette démarche plus efficace.

7.3 APPORTS ET PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

En nous nous intéressant à la qualité de la formation géométrique et didactique des futurs maîtres au primaire, à la logique et à la continuité de leurs apprentissages, nous avons voulu contribuer à la qualité de l'enseignement de la géométrie et des apprentissages des élèves. Ce travail offre à chaque enseignant du primaire une source d'informations concernant les phénomènes d'apprentissages, les orientations principales de l'enseignement de la géométrie, les différents types des activités et les buts qu'elles visent. Il porte un regard critique sur les programmes ministériels (MEQ, 2002) et propose des modifications de la description des savoirs essentiels (annexes 6 et 7). Nous croyons que les deux cadres théoriques : de van Hiele (1959/1985) et de Duval (1995) pourraient être envisagés comme éléments potentiels du contenu didactique de la formation à l'enseignement de la géométrie.

Néanmoins, la démarche entreprise par cette recherche permet de justifier la poursuite des travaux et l'élaboration de nouvelles situations de la formation des futurs maîtres.

Nous avons exploré plusieurs situations, lesquelles peuvent être utilisées en totalité ou en partie par les formateurs des maîtres. La recherche présente donc un point de départ théorique (description détaillée des savoirs participant à l'étude de la géométrie présentée, voir les annexes 8 et 9) et méthodologique (situations de formation, voir les annexes 18 et 19) pour mener une réflexion didactique sur les contenus et les méthodes des processus de formation didactique à l'enseignement de la géométrie.

RÉFÉRENCES

Altet, M. (1994). La formation professionnelle des enseignants. Analyse des pratiques et situations pédagogiques, Pédagogie d'aujourd'hui, Paris : PUF.

Altet, M. (1996). Les compétences de l'enseignant-professionnel : entre savoirs, schèmes d'action et adaptation, le savoir analysé, Dans L. Paquay, M. Altet, É. Charlier et P. Perrenoud (dir.), *Former des enseignants professionnels*, Bruxelles : De Boeck, 27-40.

Arsac, G. (1998). L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée, ALÉAS, IREM de Lion.

Arsac, G. et M. Mante. (1988-1999). Le rôle du professeur. Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité, *Séminaire n.101*, 91.

Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques, Thèse d'État, Université Paris VII.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7(1)*, 5-62.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9(3)*, 281-308.

Artigue, M. et J. Robinet (1986). Conception du cercle chez les élèves de l'école élémentaire, IREM de Paris.

Bailleul, M. (1994). Analyse statistique implicative : variables modales et contribution des sujets, Thèse de doctorat, Université de Rennes I.

Barbin, É. (2002). L'ordre naturel des choses de la géométrie, *Actes du Colloque en l'honneur de Nicolas ROUCHE* « Épistémologie et enseignement des mathématiques », France, Louvain-la-Neuve.

Battista, M.T., Wheatley, G.H. & Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers, Journal for Research in Mathematics Education, 13, 332-340. In S. I. Brown, T. J. Cooney & D. Jones, Mathematics teacher education, in W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire, *Revue des sciences de l'éducation*, *20(1)*, 175-198.

Bautier, E. et A. Robert. (1987). Apprendre des mathématiques et comment apprendre des mathématiques : premiers éléments pour une étude des représentations des élèves de l'enseignement post-obligatoire de l'accès au savoir mathématique, *Cahier de didactique des mathématiques*, 41, Paris : IREM Paris 7.

Bautier, E. et A. Robert. (1988). Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques, *Revue française de Pédagogie*, *84*, 13-20.

Berthelot, R. et M.-H. Salin (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse de Doctorat d'État, Université de Bordeaux I.

Bishop, A. J. (1980). Spatial ability and mathematics education, *Studies in Mathematics Education*, *11*, 257-269.

Bishop, A. J. (1989). Review of visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11(1)*, 7-16.

Blouin P. et L. Gattuso. (2000). *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Collection Astroïde, Modulo, Montréal.

Briand, J. et M.-C. Chevalier. (1995). Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques, Paris : Hatier.

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *2 (1)*, 39-127.

Brousseau, G. (1986a). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7(2)*, 33-115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9(3)*, 309-336.

Brousseau, G. (1988a). Les différents rôles du maître, *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, Conférence prononcée à l'UQAM, 2/23, 14-24.

Brousseau, G. (1989b). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège, *Petit x*, 21, 48-68.

Brousseau, G. (1991b). *Glossaire de didactique,* Inédit transmis à la VIe école d'été de didactique des mathématiques.

Brousseau, G. (1995). L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques, Saint-Sauves d'Auvergne*, Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand, 3-46.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*, [En ligne]. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf. 8 (Page consultée le 15 mai 2002)

Brousseau, G. et N. Brousseau. (1987). *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Brousseau, G. et J. Centeno. (1991). La mémoire didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11(3)*, 167-210.

Brown, S. I., Cooney, T.J. & Jones, D. (1990). Mathematics teacher education, 639-657, In W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan.

Brun J. et F. Conne. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations, *Éducation et Recherche*, *3*, 261-286.

Brun, J. (1981). À propos de la didactique des mathématiques, *Math-École*, *100-101*, 14-20.

Brun, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 67-83.

Brun, J. (1997). Apprentissages numériques et résolution de problèmes, Dans *ERMEL CM1*, Paris : Hatier, 46.

Burger, W. & Shaughnessy, J. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education, 17*, 31–48.

Burton J., Detheux-Jehin, M. et A. Fagnant (1997). *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire ?,* Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université.

Capponi, B. et C. Laborde. (1995). Modélisation à double sens, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian, *Actes de la VIIIe École didactique d'été*, Saint-Sauves d'Auvergne, France, 265-272.

Charlier, É. (1989). Planifier un cours c'est prendre des décisions, Bruxelles : De Boeck.

Charlier, É. (1996). Former des enseignants-professionnels pour une formation continuée articulée à la pratique, Dans L. Paquay, M. Altet, É. Charlier et P. Perrenoud (dir.), *Former des enseignants professionnels*, Bruxelles : De Boeck.

Charnay R. et M. Mante. (1995). Préparation à l'épreuve mathématique du concours de professeur des écoles, Paris : Hatier, 11-77.

Chevallard, Y. (1981). *Pour la didactique*, Texte présenté lors de la journée de rentrée de l'IREM d'Aix-Marseille, 22 septembre 1981.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 2e édition de 1991.

Chevallard, Y. (1986). Les programmes et la transposition didactique, Bulletin de l'association des professeurs des mathématiques de l'enseignement public, 65(352), 32-50.

Chevallard, Y. (1988). Esquisse d'une théorie formelle, Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1991a). Les études scientifiques à l'IUFM : éléments fondamentaux du schéma directeur, Marseille : IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1991b). La place des savoirs disciplinaires dans le système d'étude de l'IUFM, Marseille : IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1997). Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en didactique des mathématiques*, *17 (3)*, 17-57, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, In D. Grows, (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NewYork: Macmillan Publishing Co., 1992.

Comiti, C. (1999). Effets de dispositif de formation à et par la didactique sur les pratiques didactiques des professeurs-stagiaires, Dans M. Bailleul, *Actes de la Xe École didactique d'été*, Houlagate, France, 1999, 177-181.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne, Dans Lemoyne G. et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Montréal : Les Presses de l'Université de Montréal, 31-70.

Coppe, S., Rolet, C., Tisseron, C. (1999). Différents types de savoirs en jeu dans l'activité professionnelle des enseignants, Dans M. Bailleul, *Actes de la Xe École didactique d'été*, Houlgate, France, 1999, 147-154.

Cornu, R. (1988). Recherche sur l'enseignement et formation des enseignants, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, 297-306.

Côté, B. (1999). Analyse épistémologique de l'apprentissage de la démonstration en géométrie, *Actes du colloque du GDM du Québec*, 17-18 mai, 1999, 123-135.

Côté, B. (2001). Rapport du groupe de travail, *Actes du colloque de GDM*, Montréal, 59-61.

Dionne, J.-J. (1986). Vers un renouvellement de la formation et du perfectionnement des maîtres du primaire : le problème de la didactique des mathématiques, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

Dionne, J.-J. (1987). School teacher's perception of mathematics and mathematics teaching and learning: twelve case studies, In J.C. Bergeron, N. Herscovics & Kieran, C. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Montreal: University of Montreal.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7/2*, 5-31.

Douady, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères IREM*, *15*, 1-25, Topiques Éditions.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive?, *Petit x*, *31*, 37-61, IREM de Grenoble.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels, Berne : Peter Lang.

Ekimova, E. et J. Portugais. (2001). L'emploi de manuels scolaires et du référentiel des compétences par de futurs enseignants en enseignement de l géométrie au primaire, *Actes du colloque de GDM*, Montréal, 94-119.

Fennema, E. & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact, In D.A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning,* 147-164, New York: The National Council of Teachers of Mathematics.

Fennema, E. & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors, *American Educational Research Journal*, *14*, 51-71.

Fennema, E. & Sherman, J. (1978). Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: a further study, *Journal for Research in Mathematics Education*, *9*, 189-203.

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics,* Dortrecht, The Netherlands : D. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in mathematics*, *24(2)*, 139-162.

Franco, L. & Sperry, R.W. (1977). Hemisphere lateralization for cognitive processing of geometry, *Neuropsychologia, 15,* 107-114.

Fuys, D., D. Geddes & Tischler, R. (1988). The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, *3*, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Galpérine, Y. (1966). Essais sur la formation par étapes des actions et des concepts, Moscou, Éditions du Progrès.

Gardner, H. (1983). Forms of mind. The theory of multiple intelligence, New York: Basic Books.

Gattuso L. (1992). Les conceptions personnelles au sujet de l'enseignement des mathématiques et leur reflet dans la pratique, un essai d'autoanalyse, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

Gattuso L. (2000). Conclusion. Synthèse des commentaires et de la discussion, Dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Collection Astroïde, Modulo, Montréal, 89-97.

Ginther, J.L., Pigge, F. & Gibney, T.C. (1987). Three decade comparison of elementary teachers' mathematics courses and understandings, *School Science and Mathematics*, 587-597.

Giordan, A. et G. de Vecchi. (1987). Les origines du savoir. Des conceptions des apprenants aux concepts scientifiques, Neuchâtel/Paris, Delachaux & Niestlé.

Graeber, A., Tirosh, D. & Glover, R. (1986). Perservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems, In G. Lappan & R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, East Lansing, MI : Michigan State University, 262-267.

Guay, R.B. & McDaniel, E. (1977). The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, *Journal of research in Mathematics Education*, *8*, 211-215.

Gutiérrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education, 22(3)*, 237-251.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, *11*, 61-76.

Hershkowitz, R., Ben-Chaim, D. Hoyeles, C., Lappan, G., Mitchelmore, M. & S. Vinner (1990). Psychological aspects of learning geometry, In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International group for the Psychology of mathematics Education,* 70-95, Cambridge, MA: Cambridge University press.

Hoffer, A. (1985) Pesquisa baseada em van Hiele, In Landau M. & R. Lesh, *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.*

Houdement, C. et A. Kuzniak (1999). Élément de cohérences pour la formation des maîtres à l'enseignement de la géométrie, Dans M. Bailleul, *Actes de la Xe École didactique d'été,* Houlgate, France, 1999, 134-141.

Houdement, C. et A. Kuzniak (1999). Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x, 51*, IREM de Grenoble.

Houdement, C. et A. Kuzniak (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics, 40/3,* Kluwer Academic Publishers.

Houdement, C. et Kuzniak A. (2000). Formations des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20(1),* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Jodra, S. (2004). Idées et Méthodes, Dictionnaire « Imago-Mundi », [En ligne]. http://www.cosmovisions.com/raisonnement.htm, (Page consultée le 30 juin 2005)

Kabanova-Meller E. N. (1959). Positive and negative abstraction in the process of solving geometry problems, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, *Published in Reports (Doklady) of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, 1,* 31-34, Translated by Joan W. Teller.

Kabanova-Meller E. N. (1970). The role of the diagram in the application of geometric theorems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *4*, 7-49, Chicago: University of Chicago.

Krutetskii, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago: University of Chicago press.

Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, *9(3)*, 337-364.

Laborde, C. (1994). Les rapports entre visuel et géométrie dans un EIAO, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* Grenoble : La Pensée Sauvage, 387-394.

Landa, L. N. (1955). *The Psychology of Forming Methods of Reasoning*, (dissertation), Moscow.

Legendre, M.-F. (2000). *La logique d'un programme par compétences*, Conférence donnée pour le MEQ, le 2mai 2000.

Leinhardt, G. (1988). Expertise in instructional lessons: An example from fractions, In D. Grows, T. Cooney & D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, 47-66, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MacIsaac, D. (1996). *Nontraditional Science Education Research. The Problem of Accountability in Science Education Research*, [En ligne]. http://physicsed.buffalostate.edu/danowner/nontrad.html. (Page consultée le 3 mars 2000).

Mayberry, J. (1983). The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*, 50-59.

MEQ (2002). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement primaire.* [En ligne]. http://www.meq.gouv.qc.ca/lancement/prog_formation/index.htm. (Page consultée le 1 septembre 2002)

Millet, J.-L. (1999). Effets de dispositif de formation à et par la didactique sur les pratiques didactiques des professeurs-stagiaires, Dans M. Bailleul, *Actes de la Xe École didactique d'été*, Houlgate, France, 1999, 173-176.

Paquay, L., Altet, M., Charlier É. et P. Perrenoud. (1996). *Former des enseignants professionnels,* Bruxelles : De Boeck.

Paul, R. & Elder, L. (2001). Critical Thinking – Tools for Taking Charge of Your Learning and Your Life, Prentice Hall, New Jersey, 53-59.

Perrenoud, Ph. (1994). La formation des enseignants en question(s), Pédagogies, Revue du Département des sciences de l'éducation de L'université de Louvain, *Actes du Colloque du REF*, Former des enseignants. Pratiques et recherches, *10*, 11-21.

Perrin-Glorian, M. J. (1992). Aire de surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté au niveau CM-6, *IREM, Paris VII*, chap.7, 380-381.

Perrin-Glorian, M. J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles », *Recherches en Didactique des Mathématiques, 13(1)*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Perrin-Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 97-147.

Polya, G. (1965). Comment poser et résoudre un problème, Paris : Dunod.

Porter, A. (1989). A curriculum out of balance. The abc of elementary school mathematics, *Educational Researcher*, *18*, 9-15.

Portugais, J. (1995). Didactique des mathématiques et formation des enseignants, Berne : Peter Lange.

Portugais, J. (1996). *Le futur enseignant face au savoir didactique; que se passe-t-il si on lui donne la recette?*, Recherche sur l'injection de résultats de recherche en didactique dans le système de formation à l'enseignement, Inédit écrit pour les Cahiers Interactions didactiques, Université de Genève.

Robert, A. (1988). Une introduction à la didactique des mathématiques (à l'usage des enseignants), *Cahier de didactique des mathématiques*, *50*, IREM de Paris VII.

Robert, A. (1994). Formation des maîtres : des conditions nécessaires aux conditions nécessaires et suffisantes, *Repères-IREM*, *17*, 71-73.

Robert, A. (1996). IUFM : Réflexion sur formation professionnelle initiale des professeurs de mathématiques des lycées et collèges, *Repères-IREM*, *23*, 83-108.

Rubinshtein, S. L. (1958). *Bowing Consciousness*, Moscow.

Schmidt, S. (2000). Qu'est-ce que la didactique des mathématiques? Influence des perspectives adoptées sur les pratiques de formation des futurs maîtres, Dans P. Blouin et L. Gattuso (dir.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants*, Collection Astroïde, Modulo, Montréal, 29-34.

Schneider, D.K. (1994). *Modélisation de la démarche du décideur politique dans la perspective de l'intelligence artificielle*, Thèse de doctorat, Université de Genève. [En ligne]. http://tecfa.unige.ch/tecfa/general/tecfa-people/schneider.html, (Page consultée le 19 juin 2001)

Schubauer-Léoni, M.-L. (1999). Les pratiques de l'enseignant de mathématiques. Modèles et dispositifs de recherche pour comprendre ces pratiques, Dans Bailleul M., *Actes de Xe École didactique d'été*, Houlgate, France, 34-49.

Stufflebeam, D. (1980). Evaluation in Large Urban School Systems, In F. S. Chase (ed.), *Educational quandaries and opportunities*, Dallas: Urban Education Studies.

Tardif, J. (2001). Les compétences dans le programme de formation : fantaisie, leurre ou axe fédérateur de l'ensemble des apprentissages?, *Actes du colloque de GDM*, Montréal, 28-55.

Taurisson, A. (1999). La recherche du sens en mathématique et l'enseignement de la géométrie, *Actes du colloque du GDM du Québec*, 17-18 mai, 11-38.

Van Hiele, P.M. (1959/1985). The child's thought and geometry, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 243-252, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

Van Hiele-Geldof, D. (1984). The didactics of geometry in the lowest class of secondary school, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 1-214, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques: un exemple, les structures additives, *Revue Grand* n°38, p.21-40.

Vergnaud, G. (1990). Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives, Dans G. Netchine-Grynberg (dir.), *Développement et fonctionnement cognitifs*, Paris : Presses universitaires de France, 261-277.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, *10(2-3)*, 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* Grenoble: La Pensée Sauvage, 177-191.

Vergnaud, G.(2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque de GDM*, Montréal.

Villers D. (1996), Des savoirs, des outils, des pratiques, Dans J. Beillerot, C. Blanchard-Laville et N. Mosconi. (dir.), *Pour une clinique du rapport au savoir*, Paris : L'Harmattan, 283-300.

Villers, M. D. (1987). *Research Evidence on Hierarchical Thinking. Teaching Strategies and the van Hiele Theory: Some Critical Comments*, Working document prepared for the Working Conference on Geometry, held at Syracuse University (NY), 11-13.

Vinner, S. & R. Hershkowitz. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Berkeley.

Vladimirskii, G. A. (1949). The Experimental Basis of a System and Methodology of Exercises in the Development of Spatial Imagination, *Proceedings of the APS*, 27.

Vollrath, H.-J. (1988). Une théorie de l'enseignement de concepts mathématiques dans la formation des maîtres, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Wirszup, I. (1976). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, In J. L. Martin & D. A. Bradbard. (Eds.), *Space and geometry, Papers from a research workshop*, 75-97, Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 132 033).

Yakimanskaya, I. S (1959). Individual differences in solving geometry problems on proof, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, Published in *Reports (Doklady) of the Academv of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, *1*, 31-34. (Translated by Joan W. Teller).

Yakimanskaya, I. S. (1971). The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *5*, 145-168, Chicago: University of Chicago.

Zhuravlev, B. B. (1950). Mathematical Vision, *Mathematics in the School*, 5.

Zykova, V. I. (1955). Essays oh the Psychology of Mastering Elementary Geometric Knowledge, Moscow, 1955. Of the Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. Published in *Report (Doklady) of Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, 1958, *3*, 49-54. Translated by Linda Norwood.

Zykova, V. I. (1969). Operating with concepts when solving geometry problems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *1*, 93-148, Chicago: University of Chicago.

Manuels et autres sources pédagogiques

Bardier, J.-C. et D. Charest. (1987). *Mathématique au primaire FLG5*, Éditions Grand Duc-HRW.

Beaulac, Constant, Gallini (1990). *Mathématique* (exercices et résolution de problèmes) 2 secondaire, Éditions de l'Équilibre, Notre-Dame-de-l'Il-Perrot, Québec.

Beaulac, Constant, Gallini (1990). *Mathématique* (exercices et résolution de problèmes), 1 secondaire, Éditions de l'Équilibre, Notre-Dame-de-l'Il-Perrot, Québec.

Beauregard, M., (1990). *Lexique mathématique pour l'élève*, Éditions FM, Laval, Québec.

Champoux, G. et L. Gameau. (1992). *Mathématique 6*, LIDEC inc.

Cimon, J.-L., Gagnon, M. et R. Gobeil. (1991) *Bâtimath 6*, Éditions Beauchemin limitée.

Côté, Gagnon, Perreault et X. Roegiers (2002). *Leximath* : lexique mathématique de base, Laval (Québec) : Beauchemin.

Côté, R., Gagnon, M., Perreault, N. et X. Roegiers. (1991). *Leximath* : lexique mathématique de base, Laval (Québec) : Beauchemin.

Huard, C. (1994). *Espace mathématique 1*, Éditions du Renouveau Pégagogie inc., Ottawa, Canada.

Lacasse, C. et al. (1997). *Concerto 4*, Éditions CEC, Anjou, Québec.

Lacasse, C. et S. Boisvert. (1996). *Concerto 2*, Éditions CEC, Anjou, Québec.

Lyons, M. et Lyons, R. (1989). *Défi mathématique 4*, Mondia Éditeurs inc., Canada.

Lyons, M. et Lyons, R. (1990). *Défi mathématique 6*, Mondia Éditeurs inc., Canada.

Morency, R., Laberge, M.-F. et U. Lafontaine. (1991). *Bâtimath 5*, Éditions Beauchemin limitée.

Vincent, J.-F. (1994). Lexique mathématique à l'usage des étudiants et des étudiantes, Éditions : Guérin, Montréal/Toronto.

ANNEXES

1. QUESTIONNAIRE

Dans le cadre d'un projet de recherche qui vise à mieux comprendre les conditions et les contraintes des enseignants débutants pendant le stage et, en particulier, en ce qui touche à l'enseignement des mathématiques, nous vous invitons à répondre aux quelques questions suivantes :

1. Quel type d'approche de la part de votre maître associé avez-vous eu lors de vos stages scolaires? (Encercler la lettre correspondante)
a) *directive (*le maître associé intervient sur l'enseignement (sur le « quoi enseigner et comment »)
b) *collaboratrice (*le maître associé cherche avec vous les façons d'enseigner.
c) *non directive* (le maître associé permet au débutant de conserver son expérience « autonome » : il peut expérimenter, analyser et prendre les décisions lui-même pour améliorer son propre enseignement).

2. Quel type d'approche, parmi les trois approches nommées, préférez-vous? (Encercler la lettre correspondante)
a) directive *b) collaboratrice* *c) non directive*

1. Lors de vos cours, étiez-vous observés par le maître associé? (Encercler ce qui correspond à la réponse)
a) Oui (toujours, souvent, quelquefois) b) Non

4. Receviez-vous la rétroaction de votre maître associé? (Toujours, souvent, quelquefois, jamais).

5. Avez-vous utilisé ses commentaires dans vos préparations? (Toujours, souvent, quelquefois, jamais).

6. Dans le cadre de votre enseignement des mathématiques faisiez-vous des préparations écrites de vos cours? (Encercler ce qui correspond à la réponse)
a) Oui (toujours, souvent, quelquefois) b) Non

7. Vos préparations contenaient-elles des analyses didactiques des activités, les modifications des tâches proposées par le manuel, des anticipations des réponses des élèves? Encercler ce qui correspond à la réponse
a) Oui (toujours, souvent, quelquefois) b) Non

8. Faisiez-vous l'analyse a posteriori de ce qui s'est passé lors d'un cours?
a) Oui (toujours, souvent, quelquefois) b) Non

9. Dans vos préparations de leçons, quel matériel didactique utilisiez-vous? (Mettez les numéros de priorité : 1, 2, 3, 4, 5)
- manuel scolaire
- guide du maître
- activités d'enseignement préparées par le maître associé
- les notes des cours de didactique des mathématiques
- autre (préciser)

10. Pensez-vous que le contenu didactique présenté au cours vous sera utile pour votre enseignement?
a) Oui b) Non

Si oui, précisez quel type de travail en classe vous avez apprécié. (Souligner ce qui correspond à la réponse)

a) approche didactique dans l'introduction des notions géométriques (situations d'observation, de manipulation, de construction), résolution des problèmes, autres (préciser)

b) analyse didactique des extraits tirés des manuels scolaires

c) étude de recherches didactiques (cercle, mesure)

2. FORMATION MATHÉMATIQUE PRÉALABLE

Nombre de cours suivis par les étudiants ayant échoué à l'examen d'admission en mathématique en 1999 (programme préscolaire-primaire et orthopédagogie)

	Nombre d'étudiants échoués	**Secondaire IV-V**				**Collège**			
		0 cours	1 cours	2 cours	3 cours	0 cours	1 cours	2 cours	3 cours
Préscolaire-primaire	114	2	38	68	6	93	9	4	8
Orthopédagogie	70	3	25	32	10	57	3	5	5
Total	184	5	63	100	16	150	12	9	13
Pourcentage		4 %	34 %	54 %	8 %	83 %	6 %	4 %	7 %

3. ATTENTES DES ÉTUDIANTS AU DÉBUT DE FORMATION

1. Révision de notions de base (rapidement, urgent)
   - propriétés de figures
   - transformations géométriques
   - construction des figures
   - les solides
   - les formules
2. Bien comprendre les concepts, le vocabulaire
3. Apprendre la géométrie étape par étape
4. Regarder différents manuels; apprendre comment adapter efficacement les activités des manuels scolaires; comprendre et développer un savoir-faire pour analyser les situations-problèmes et les exercices
5. Capacité de se mettre au même niveau que les élèves afin de mieux comprendre leur raisonnement
6. Savoir comment amener les enfants à développer leurs habiletés en géométrie, donner un sens de la géométrie aux élèves
7. Capacité de réfléchir la manière d'enseigner
8. Comment ne pas tout leur donner tout cuit dans le bec
9. Avoir une plus grande aisance dans l'enseignement
10. Apprendre la façon d'enseigner pour que ça semble utile
11. Apprendre comment bien enseigner la géométrie afin que les élèves aient du plaisir
12. Apprendre les méthodes les plus simples pour expliquer aux élèves
13. Connaître des outils d'enseignement, des techniques d'enseignement, des trucs
14. Apprendre des jeux pour les enfants
15. Avoir des exemples d'activités
16. Approche proposée par le MEQ, comment favoriser le développement des compétences, distinguer les 3 compétences
17. J'ai besoin d'un cours qui m'aidera à aimer les maths.
18. Voir l'importance, l'utilité de la géométrie dans la vie
19. Avoir une enseignante disponible, ouverte et claire

4. DESCRIPTION DU COURS

Le cours DIDACTIQUE DE LA GÉOMÉTRIE ET DE LA MESURE est un cours obligatoire du programme de baccalauréat B.Ed. en éducation préscolaire et enseignement primaire (B.ED.4). Il est consacré à l'analyse et à l'étude didactique des contenus en géométrie et mesure dans le cadre de l'enseignement primaire et au développement de l'habileté à utiliser les connaissances mathématiques et didactiques dans la préparation des séquences d'enseignement. L'étude des nouveaux programmes ministériels et des principales collections de manuels autorisés à l'enseignement permet de mieux préparer le futur enseignant à intervenir dans un contexte réel en enseignement de la géométrie au primaire. L'introduction du logiciel Cabri-Géomètre II pour la construction d'activités géométriques permet de mettre en jeu les connaissances géométriques dans l'environnement informatique.

Objectifs généraux

- Développer des connaissances mathématiques et des connaissances didactiques relatives aux situations d'enseignement de la géométrie et de la mesure au primaire.
- Analyser, de façon critique, les programmes, les méthodes et le matériel didactique utilisés dans l'apprentissage de la géométrie et de la mesure au primaire.
- Développer des compétences de base dans la construction des séquences d'enseignement.
- S'initier à l'utilisation de moyens informatiques dans la construction de tâches et d'énoncés de problèmes de géométrie (Cabri-Géomètre II).

Objectifs spécifiques

- explorer les différentes approches et méthodes (observation, manipulation, construction, résolution de problèmes, etc.) qui conduisent à des apprentissages et qui permettent de donner un sens à des concepts géométriques et de la mesure

- se construire un langage mathématique (langage parlé et écrit, langage courant et langage mathématique, construction de définitions selon les différentes propriétés, analyse critique de définitions et d'énoncés présents dans les manuels scolaires);

- se donner une culture de base en géométrie à travers une étude historique des notions (repères historiques du développement de la géométrie);

- se familiariser avec les nouveaux programmes de mathématiques au primaire (compréhension de lignes principales de nouveaux programmes, analyse des activités mathématiques selon l'approche par compétences, construction d'activités mathématiques dans le but de développer des compétences visées);

- élaborer des séquences d'enseignement des notions géométriques et de la mesure en utilisant l'approche par situations didactiques dans le but d'avoir un point de vue didactique sur les activités d'enseignement, de pouvoir anticiper les réponses des élèves, d'intervenir sur les réponses erronées, etc.;

- développer des habiletés d'utilisation de moyens informatiques dans les constructions d'activités géométriques dans le but, d'une part, de travailler les propriétés géométriques des figures et, d'autre part, de comprendre les forces et les faiblesses des moyens informatiques dans l'enseignement de la géométrie et de la mesure (se familiariser avec le logiciel, travailler les propriétés des figures et des relations dans les exemples existants, construire ses propres exemples, analyser les avantages et les inconvénients de l'utilisation du logiciel par rapport aux méthodes traditionnelles de l'enseignement des différentes notions géométriques : ex.: droites parallèles, droites perpendiculaires, triangles isocèles, classe de trapèzes, cercle, nombre π , circonférence, transformations géométriques).

5. CONTENU GÉOMÉTRIQUE DU COURS DE DIDACTIQUE DE LA GÉOMÉTRIE

- Solides : noms, propriétés (faces : planes et courbes (cylindrique, conique et sphérique), nombre de faces, de sommets, d'arêtes), représentations graphiques des solides (de leurs faces, de projections, de coupes et du développement, de vue de gauche, de droite, etc.), classifications;

- Lignes : noms, classification, relations entre deux droites.

- Angles (nul, aigu, droit, obtus, plat, plein)

- Triangles : noms, propriétés (égalité des angles et des côtés, hauteur, médiane, médiatrice, bissectrice), définitions, constructions, classification (selon les angles et les côtés).

- Quadrilatères : noms, représentations graphiques (cas généraux et particuliers), constructions, classifications, définitions caractéristiques des quadrilatères particuliers (selon les caractéristiques des côtés et des angles), définitions conceptuo-lexicales et constructives (selon les propriétés découvertes dans des activités géométriques) (exemple : Le quadrilatère ayant 4 axes de symétrie s'appelle ***carré)***

- Autres polygones (dont le nombre de côtés varie de 5-12), polygones concaves/convexes, polygones réguliers : noms, propriétés (égalité des côtés et des angles, angle au centre, angle au sommet, nombre d'axes de symétrie.)

- Cercle : définitions, constructions, propriétés (invariance de la longueur des rayons et des diamètres, D=2R, constance de la courbure, invariance du cercle en rotation autour de son centre (point fixe de rotation), angle au centre).

-Transformations géométriques : noms (translation, réflexion, rotation); propriétés des transformations : translation (figures isométriques, flèche : direction, sens, longueur); réflexion (figures isométriques, axe, égalité de la distance à l'axe, perpendicularité de l'axe et du segment reliant les points correspondants); rotation (figures isométriques, centre et angle de rotation, égalité de la distance du centre de rotation à des points correspondants, etc.); reconnaissance des transformations géométriques dans la représentation de deux figures (initiale et image) et recherche de leurs propriétés (axe, flèche, centre, angle de rotation), construction des figures obtenues par la transformation;

- Mesure des longueurs (longueur, périmètre, circonférence);

- Mesure des surfaces (aire des polygones, du cercle);

- Mesure de l'espace délimité (volume des prismes).

6. SAVOIRS ESSENTIELS (MEQ, 2002) ET NOS PROPOSITIONS

NOUVEAUX PROGRAMMES (2002)	NOS PROPOSITIONS (2002)
ESPACE	
- Repérage d'objets et de soi dans l'espace, relations spatiales (devant, sur, à gauche, etc.) - Repérage sur un axe - Repérage dans un plan - Repérage dans le plan cartésien Vocabulaire à acquérir : (II) plan, plan cartésien, système de repérage	- Repérage d'objet et de soi dans l'espace (devant, sur, à gauche, **à l'intérieur, à l'extérieur,** etc.) - Repérage sur un axe - Repérage dans un plan - Repérage dans le plan cartésien Vocabulaire à acquérir : (I) **région, frontière, ligne fermée, ouverte, simple, non simple;** (II) plan, axe ; (III) plan cartésien
SOLIDES	
- Comparaison et construction : prisme, pyramide, boule, cylindre, cône - Comparaison des objets de l'environnement aux solides - Attributs (nombre de faces, base): prisme, pyramide - Classification de prismes et de pyramides - Description de prismes et de pyramides à l'aide de faces, de sommets, d'arêtes - Reconnaissance du développement de polyèdres convexes - Expérimentation de la relation d'Euler (relation entre les faces, les sommets et les arêtes d'un polyèdre convexe) - Développement de prismes et de pyramides Vocabulaire à acquérir (I) solide, base d'un solide, cube, prisme, pyramide, cône, cylindre, boule, face (II) arête, sommet, corps rond, développement d'un solide, surface, surface courbe, surface plane (III) Polyèdre, polyèdre convexe, relation d'Euler	- Comparaison, **description et identification de solides :** prisme, pyramide, cylindre, cône, boule (**forme et nombre de faces, de bases)** - Identification et association des objets de l'environnement aux solides - **Classification des solides selon la forme de leurs faces (« roule et glisse », planes et courbes,** prismes et pyramides, **polyèdres et corps ronds)** - **Reconnaissance des solides selon les empreintes et les projections de leurs faces et évocation des formes des empreintes ou des projections de différents solides** - **Représentation graphique de différentes vues de solides (de face, de droite, de haut) et reconnaissance des solides selon la représentation de différentes vues** - **Reconnaissance des coupes (horizontale, verticale, oblique) des solides et évocation de formes des coupes de différents solides** - **Construction** (pailles et pâte à modeler) et **description** de solides : prisme, pyramide à l'aide de faces, de sommets, d'arêtes (choix de nombre et de grandeurs de pailles, nombre de boules de pâte) - Expérimentation de la relation d'Euler (relation entre les faces, les sommets et les arêtes d'un polyèdre convexe) - Reconnaissance du développement de polyèdres convexes (prisme et pyramide) et de **corps ronds** (cône et cylindre) - Construction de développement de prismes et de pyramides (développement de corps ronds : cylindre et cône - facultatif) Vocabulaire à acquérir (I) solide, base d'un solide, cube, prisme, pyramide, cône, cylindre, boule, face (II) arête, sommet, développement d'un solide, surface, surface courbe, surface plane, corps rond, polyèdre (III) **solide tronqué**, polyèdre convexe/**concave**, relation d'Euler

FIGURES PLANES	

- Comparaison et construction de figures composées de lignes courbes ou lignes brisées fermées
- Identification du carré, du rectangle, du triangle, du cercle et du losange
- Description du carré, du rectangle, du triangle, du cercle et du losange
	- **Reconnaissance des figures planes dans les contours, les faces, les projections et les empreintes de solides**
	- Identification de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle
	- **Comparaison, description et identification des angles : aigu, droit, obtus, plat (approche par rotation : quart de tour, demi-tour; comparaison des angles par rapport à l'angle droit (plus petit, plus grand))**
	- Comparaison et **description** de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle **(ligne courbe, segments de droite, nombre de côtés, d'angles, égalité de côtés, angle droit)**
	- Construction de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle
	  - **dessin à la main (ou tracer les contours de faces de solides)**
	  - **reproduction du dessin** (construction de lignes (segments) parallèles, perpendiculaires, **de segments congrus, d'angle droit, report d'angles (aigu, obtus) en utilisant le modèle ou le reporteur d'angles)**
	  - **selon les données (abstraites ou mesures concrètes)**

- Description des polygones convexes et non convexes
- Description des quadrilatères, dont le trapèze et le parallélogramme : segments parallèles, segments perpendiculaires, angle droit, angle aigu, angle obtus
- Classification des quadrilatères
- Construction de lignes parallèles (//) et de lignes perpendiculaires (⊥)
	- **Comparaison,** description et **identification** de polygones convexes et non convexes
	- **Comparaison,** description et **identification** de quadrilatères : parallélogramme, trapèze (identification de segments parallèles, perpendiculaires, d'angles : droit, aigu, obtus)
	- Classification des quadrilatères
	  - **carrés et rectangles (comparaison et identification d'une propriété commune : angles droits)**
	  - **carrés et losanges (comparaison et identification d'une propriété commune : côtés congrus)**
	  - **carrés, rectangles, losanges et parallélogrammes (comparaison et identification d'une propriété commune : 2 paires de côtés parallèles)**
	  - **carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes et trapèzes (comparaison et identification d'une propriété commune : 1paire de côtés parallèles)**

- Description des triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle scalène, triangle équilatéral
 	
- Classification des triangles
	- **Comparaison,** description et **identification** de triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral **(identification de segments congrus, des angles congrus, d'angles droit, aigu, obtus)**
	- Classification des triangles
	  <u>**Selon les côtés**</u>
	  - **Triangles isocèles (triangles acutangles, rectangles, obtusangles ayant une propriété commune : 2 côtés égaux; relation triangle isocèle/équilatéral)**
	  - **Triangles scalènes (triangles acutangles, rectangles, obtusangles ayant une propriété commune : côtés de mesures différentes)**

- Étude du cercle : rayon, diamètre, circonférence, angle au centre Vocabulaire à acquérir : (I) figure plane, ligne brisée, ligne courbe, carré, cercle, losange, rectangle, triangle, côté (II) parallélogramme, polygone, polygone non convexe, polygone convexe, quadrilatère, trapèze, segment (III) angle au centre, triangle équilatéral triangle isocèle, triangle rectangle, triangle scalène, disque, diamètre, rayon, circonférence	**Selon les angles** **- Triangles acutangles (isocèles et scalènes)** **- Triangles rectangles (isocèles et scalènes)** **- Triangles obtusangles (isocèles et scalènes)** **- Découverte et identification des propriétés du cercle** : rayon, diamètre, **invariance de la longueur des rayons et des diamètres, D=2R, constance de la courbure, invariance du cercle en rotation autour de son centre (point fixe de rotation),** angle au centre Vocabulaire à acquérir : (I) figure plane, **ligne droite,** ligne brisée, ligne courbe, ligne fermée/ouverte, carré, cercle, losange, rectangle, triangle, côté (II) parallélogramme, polygone, polygone non convexe, polygone convexe, quadrilatère, trapèze, segment (III) angle au centre, **angle au sommet**, triangle équilatéral triangle isocèle, triangle scalène, triangle rectangle, **triangle acutangle, triangle obtusangle**, disque, diamètre, rayon, **secteur circulaire**
FRISES ET DALLAGES – TRANSFORMATIONS GÉOMÉTRIQUES	
- Observation et production de régularités à l'aide de figures géométriques - Figures isométriques (mêmes mesures) - Observation et production (grilles, papier calque) de frises par réflexion : réflexion, axe de réflexion - Observation et production de dallages à l'aide de la réflexion - Observation et production (grilles, papier calque) de frises par translation : translation, flèche de translation (longueur, direction, sens) - Observation et production de dallages à l'aide de la translation Vocabulaire à acquérir : (II) axe de réflexion, réflexion, dallage, figure symétrique, frise (III) flèche de translation, translation	- **Reconnaissance** des figures isométriques (**même forme et mesure des côtés (ou des rayons pour les cercles)** - Reconnaissance des régularités et **du mouvement de déplacement, de réflexion et de changement de la direction** dans les frises et dallages - Production de régularités à l'aide de figures géométriques (construction de frises et dallages à l'aide de translation, de réflexion : pliage, papier calque, tracer) - **Reconnaissance et description de transformations géométriques (mouvement de déplacement (vers 3h, 6h, 9h, 12h, 1 h 30 min, 4 h 30 min, 7 h 30 min, 10 h 30 min), de réflexion et de changement de la direction d'une figure (¼, ½ et ¾ de tour) dans la représentation de deux figures : initiale et image dont les propriétés (flèche, axe, centre et angle) ne sont pas marquées** - **Effectuer le déplacement d'une figure (selon la flèche de translation, selon l'axe, selon le centre et l'angle : ¼, ½ et ¾ de tour)** Vocabulaire à acquérir : (II) dallage, frise, réflexion, axe de réflexion, figure symétrique, translation, flèche de translation (III) **rotation, angle de rotation, centre de rotation**

7. DESCRIPTION DES SAVOIRS ESSENTIELS SELON LES NIVEAUX DE DÉVELOPPEMENT (NOS PROPOSITIONS)

Niveau de développement **Savoirs essentiels**	**Niveau I** Visuel	**Niveau II** descriptif/ analytique	**Niveau III** abstraction/ relationnel
Espace			
- Repérage d'objet et de soi dans l'espace (devant, sur, à gauche, à l'intérieur, etc.)	*		
- Repérage sur un axe		*	
- Repérage dans un plan		*	
- Repérage dans le plan cartésien			*
Solides			
- Comparaison, description et identification de solides : prisme, pyramide, cylindre, cône, sphère (forme et nombre de faces, base)	*	*	*
- Comparaison des objets de l'environnement aux solides	*		
- Classification des solides selon la forme de leurs faces (« roule et glisse », planes et courbes, prismes et pyramides, polyèdres et corps ronds)	*	*	*
- Reconnaissance des solides selon les empreintes et les projections de leurs faces et évocation des formes des empreintes ou des projections de différents solides	*	*	
- Représentation graphique de différentes vues de solides (de face, de droite, de haut) et reconnaissance des solides selon la représentation de différentes vues	*	*	*
- Reconnaissance des coupes (horizontale, verticale, oblique) et évocation de formes des coupes de différents solides	*	*	*
- Construction (pailles et pâte à modeler) et description de solides : prisme, pyramide à l'aide de faces, de sommets, d'arêtes (choix de nombre et de grandeurs de pailles, nombre de boules de pâte)		*	
- Expérimentation de la relation d'Euler (relation entre les faces, les sommets et les arêtes d'un polyèdre convexe)			*
- Reconnaissance du développement de polyèdres convexes (prisme et pyramide) et de corps ronds (cône et cylindre)		*	*
- Construction de développement de prismes et de pyramides (développement de corps ronds : cylindre et cône - facultatif)		*	*
Figures planes			
- Reconnaissance de figures planes dans les contours, les faces, les projections et les empreintes de solides	*		
- Identification de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle	*		
- Comparaison, description et identification des angles : aigu, droit, obtus, plat (approche par rotation : quart de tour, demi-tour; comparaison des angles par rapport à l'angle droit (plus petit, plus grand))	*	*	
- Comparaison et description de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle (ligne courbe, segments de droite, nombre de côtés, d'angle, égalité de côtés, angle droit)		*	
- Construction de figures planes : triangle, carré, rectangle, losange, cercle			
- dessin à la main (ou tracer les contours des objets)	*		
- reproduction du dessin (construction de lignes (segments) parallèles, perpendiculaires, de segments congrus, d'angle droit, report d'angles (aigu, obtus)	*	*	
- selon les données (concrètes et abstraites)		*	*
- Comparaison, description et identification de polygones convexes et non		*	

convexes			
- Comparaison, description et identification de quadrilatères : parallélogramme, trapèze (identification de segments parallèles, perpendiculaires, d'angle droit, aigu, obtus)		*	
- Classification des quadrilatères - carrés et rectangles (comparaison et identification d'une propriété commune : angles droits) - carrés et losanges (comparaison et identification d'une propriété commune : côtés congrus) - carrés, rectangles, losanges et parallélogrammes (comparaison et identification d'une propriété commune : 2 paires de côtés parallèles) - carrés, rectangles, losanges, parallélogrammes et trapèzes (comparaison et identification d'une propriété commune : 1paire de côtés parallèles)		*	*
- Identification, comparaison et description de triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle scalène, triangle équilatéral (identification de segments et d'angles congrus, d'angle droit, aigu, obtus)	*	*	
- Classification des triangles <u>Selon les côtés</u> - Triangles isocèles (triangles acutangles, rectangles, obtusangles ayant une propriété commune : 2 côtés égaux) - Relation triangle isocèle/équilatéral - Triangles scalènes ((triangles acutangles, rectangles, obtusangles ayant une propriété commune : côtés de mesures différentes) <u>Selon les angles</u> - Triangles acutangles (isocèles et scalènes) - Triangles rectangles (isocèles et scalènes) - Triangles obtusangles (isocèles et scalènes)		*	*
- Découverte et identification des propriétés du cercle : rayon, diamètre, invariance de la longueur des rayons et des diamètres, D=2R, constance de la courbure, invariance du cercle en rotation autour de son centre (point fixe de rotation), angle au centre	*	*	*
<u>Transformations géométriques</u>			
- Reconnaissance des figures isométriques (même forme et mesure des côtés (ou des rayons pour les cercles))	*	*	*
- Reconnaissance des régularités et du mouvement de déplacement, de réflexion et de changement de la direction dans les frises et dallages	*	*	
- Production de régularités à l'aide de figures géométriques (construction de frises et dallages à l'aide de translation, de réflexion : pliage, papier calque, tracer)	*	*	
- Reconnaissance et description de transformations géométriques (mouvement de déplacement (vers 3h, 6h, 9h, 12h, 1 h 30 min, 4 h 30 min, 7 h 30 min, 10 h 30 min), de réflexion et de changement de la direction d'une figure (¼, ½ et ¾ de tour) dans la représentation de deux figures : initiale et image dont les propriétés (flèche, axe, centre et angle) ne sont pas marquées		*	*
- Effectuer le déplacement d'une figure (selon la flèche de translation, selon l'axe, selon le centre et l'angle : ¼, ½ et ¾ de tour)		*	*

8. SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES VISÉS

SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES LIÉS AU REGISTRE DES FIGURES	
Perception	- **Reconnaître les figures du plan et de l'espace** - **Reconnaître les propriétés visuelles d'une figure** a) dans les unités de dimension 2 (**figures planes**) : - les unités de dimension 2 : **angle** (aigu, droit, obtus, plat, rentrant, plein), **arc** - les unités de dimension 1 : **côtés** (et leurs relations mutuelles : congrus, perpendiculaires, parallèles), **diagonales** (et leurs relations mutuelles : congrues, perpendiculaires, se coupent au milieu), **diamètre, rayon, corde** pour le cercle, **hauteur**, **médiane**, **bissectrice** - les unités de dimension 0 : **centre** pour le cercle, **point** d'intersection des diagonales; b) dans les unités de dimension 3 (**solides**) : - les unités de dimension 3 : **surfaces courbes** (cylindre, cône, sphère), - les unités de dimension 2 : **faces planes** (polyèdres et corps ronds), - les unités de dimension 1 : **arêtes, hauteur** (cône et cylindre), rayon et diamètre (sphère), - les unités de dimension 0 : sommets, centre (sphère) - **Reconnaître les marques de propriétés** (tirets d'égalité et de différence des mesures, marque d'angles) - **Reconnaître les transformations géométriques et leurs propriétés (perceptives ou marquées)** a) pour la **translation**, la **réflexion** et la **rotation** : la **même forme** et **les mêmes dimensions** d'une figure initiale et d'une figure-image b) pour la translation : **flèche, direction et sens** c) pour la réflexion : **axe de symétrie**, égalité de la distance à l'axe de tout point de la figure initiale et de son point correspondant (son symétrique), perpendicularité d'un segment reliant les points correspondants à l'axe c) pour la rotation : angle (et de façon approximative sa mesure), côtés d'un angle (et leur égalité), centre de rotation, sens de rotation (positif ou négatif)
« imagination spatiale » et abstraction	- **Reconnaître une figure dans sa représentation non verticale** - **Reconnaître un polygone concave, un solide tronqué** - **Reconnaître les différences et les similitudes des figures données** - **Associer les représentations graphiques des objets tridimensionnels à leurs modèles physiques** (solides de bois, boîtes, etc.) - **Reconnaître et visualiser les objets tridimensionnels selon leurs projections, leurs empreintes, leur développement** (patron), **leurs vues** (de face, de gauche, de droite, etc.) - **Visualiser** (et représenter graphiquement) **les projections, les empreintes, le développement, les vues des solides, la forme d'une coupe** - **Reconnaître une figure simple** (ou une partie) **à l'intérieur d'une figure plus complexe** (« figures emboîtées » et autres) - **Visualiser** (et représenter graphiquement) **des éléments auxiliaires d'une figure utiles à la résolution d'un problème** (diagonales, hauteur, bissectrice, médiane) et **leurs relations avec les autres éléments de la figure** (congruence, perpendicularité, parallélisme, se coupent au milieu, divise un segment en deux parties congrues, divise un angle en deux parties congrues, divise une figure en parties congrues, etc.) - **Décomposer mentalement** (ou graphiquement) une figure plane en autres figures planes (par exemple, chaque triangle peut être divisé en deux triangles rectangles; l'hexagone régulier se divise en deux trapèzes isocèles congrus, en trois losanges congrus, en six triangles équilatéraux, etc.) - **Reconnaître les transformations géométriques** (mouvement de déplacement, de réflexion et de changement de la direction) dans la représentation de deux figures : initiale et image dont les propriétés (flèche, axe, centre et angle) ne sont pas marquées

<table>
<tr><th colspan="2">SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES LIÉS AU REGISTRE DISCURSIF</th></tr>
<tr><td>Langage naturel</td><td>- Nommer les figures (de dimensions 3, 2, 1 et 0),
- Décrire les figures (selon les propriétés découvertes dans les situations d'apprentissage),
- Définir les figures (définitions caractéristiques)
- Décrire la démarche
- Produire un message en utilisant un langage géométrique</td></tr>
<tr><td>Raisonnement</td><td>- Expliquer la consigne (ressortir les informations pertinentes)
- Concevoir un plan de résolution d'un problème, d'une tâche
- Expliquer la démarche
- Formuler la conjecture
- Justifier l'énoncé, le résultat, la démarche en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques (géométriques) ou en trouvant le contre-exemple
- Déterminer les conséquences logiques de certaines données verbales
- Formuler les relations d'inclusion
- Concevoir les définitions conceptuo-lexicales ou constructives
- Connaître les distinctions entre une description et une définition
- Analyser l'exactitude et la précision du langage utilisé dans la consigne, l'énoncé, la définition, etc.
- Déterminer si l'énoncé est suffisant pour définir une figure (classe)
- Déterminer la partie redondante de l'énoncé</td></tr>
<tr><th colspan="2">SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES LIÉS AU REGISTRE SYMBOLIQUE</th></tr>
<tr><td>Langage Symbolique</td><td>- Produire (et interpréter) un message utilisant des symboles pour désigner les figures (a, A, ABC, ABCD, ∠, etc.), les relations (//, ⊥, ≅, ~) et les mesures (P (périmètre), A(aire), C(circonférence), D (diamètre), R(rayon), π, etc.)
- Marquer les caractéristiques particulières par des symboles (tirets d'égalité et de différence des mesures, marques d'angles)
- Employer les différents schémas et diagrammes pour classer les figures (Carroll, à branches, de Venn)</td></tr>
<tr><th colspan="2">SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES LIÉS AU REGISTRE GRAPHIQUE</th></tr>
<tr><td>Procédés des constructions</td><td>- Dessiner les figures géométriques (lignes, segments, polygones, cercle, solides)
- Tracer une figure géométrique (de dimensions 3, 2, 1 et 0) en utilisant les outils de construction (règle, équerre, compas, rapporteur d'angles) et en employant les démarches de construction (tracer les droites // et ⊥, reporter les mesures, trouver le milieu, trouver le point (le lieu de points) équidistant de un (deux, trois) point(s), de deux (trois, quatre) côtés d'une figure, inscrire une figure dans un cercle (ou circonscrire à un cercle), etc.)
- Tracer les développements de solides (prismes, pyramides, cylindre, cône)
- Tracer les figures obtenues par la transformation géométrique (translation, réflexion, rotation)</td></tr>
</table>

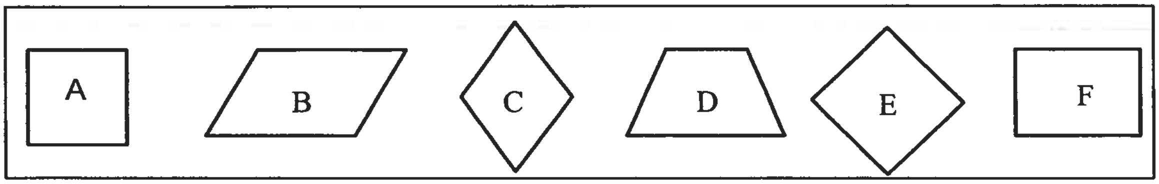
9. COORDINATION DE REGISTRES

	SAVOIRS GÉOMÉTRIQUES LIÉS À LA COORDINATION DE REGISTRES
Niveau I et II	- Identifier une figure géométrique, une transformation géométrique (*figure→ nom*) - Décrire une figure (une transformation géométrique) par ses propriétés visuelles ou découvertes expérimentalement (*figure→ description*) - Visualiser (et représenter) une figure (une propriété) à partir de son nom (*nom → image mentale (dessin, modèle*)) - Déterminer une figure à partir de sa définition caractéristique (ou de la description des propriétés visuelles) (*texte →figure*) - Décrire une figure nommée (*nom→ image mentale d'une figure→ description*) - Déterminer si une figure donnée appartient ou non à une catégorie donnée (*figure→justification*) - Justifier le résultat et la démarche en faisant appel à des preuves expérimentales ou à des concepts et des processus mathématiques (géométriques) (*discursif/figural, discursif/graphique, dis./symb.*) - Classer les figures données selon leurs propriétés visuelles marquantes (forme de faces de solides, polygones et non-polygones, nombre de côtés, concave/convexe, présence d'angle droit) en utilisant les différents schémas et diagrammes (Carroll, à branches, de Venn) (*figural/discursif/graphique /symbolique*) - Tracer (reproduire ou construire) des figures à partir des données concrètes (triangle isocèle, triangle équilatéral, triangle rectangle, carré, rectangle, losange, cercle) (*discursif/figural/graphique)* - Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (carré, rectangle, triangle rectangle, cercle) superposable à la figure cachée (propriétés visuelles : côtés, angles, rayon) (*figural/discursif*)
Niveau III-IV	- Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites (descriptions conceptuo-lexicales et constructives) (*texte →figure*) - Dégager les relations entre les figures (ou entre les propriétés) à partir de l'observation (ou de l'analyse des données verbales) (*figural/discursif, discursif*) - Tracer (construire) les figures à partir des données concrètes et abstraites (combinaisons de propriétés autres que les côtés et les angles ou les incluant) (*discursif/graphique*) - Tracer les figures obtenues par la transformation géométrique (translation, réflexion, rotation), tracer les propriétés de la transformation considérée (flèche, axe, centre et angle) à partir de la représentation de deux figures : initiale et image - Déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction d'une figure (triangle isocèle, équilatéral, scalène, losange, parallélogramme, trapèze) superposable à la figure cachée (*figural/discursif*) - Visualiser (évocation de la démarche) et effectuer les différentes constructions de la même figure (*figural/discursif, figural/discursif/graphique*) - Visualiser (évocation de la démarche) et effectuer les différentes constructions d'une figure en utilisant la même propriété (*figural/discursif, figural/discursif/graphique*) - Justifier l'énoncé, le résultat, la démarche en faisant appel à des concepts et à des processus mathématiques (géométriques) ou en trouvant le contre-exemple (*discursif/symbolique/figural/graph*) - Classer les figures données selon leurs propriétés (congruence des côtés ou des angles, parallélisme des côtés) en utilisant les différents schémas et diagrammes (Carroll, à branches, de Venn) (*discursif/symbolique*) - Créer la hiérarchisation de classes en utilisant les différents schémas et diagrammes (*discursif/symbolique/graphique*) - Interpréter ou employer les symboles dans des énoncés, des messages écrits, dans des figures (d/s) - Déterminer le nom d'une figure (unité figurale de dimension 2 qui n'est pas discernable) selon la « lecture » du dessin (*figural/discursif*) - Employer (choisir et appliquer) les concepts et les processus appropriés à la tâche, au problème, à la situation

10. TEST D'ENTRÉE

NOM et PRÉNOM : ____

I. Figures planes



1. *Regardez les figures planes suivantes* :

Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères selon le tableau ci-dessous :

Quadrilatères	**Réponses**
Carré	
Losange	
Rectangle	
Parallélogramme	
Trapèze	

2. Qui suis-je?

a) Je suis un quadrilatère ayant 4 angles droits.

Réponse:_____________________

b) Je suis un quadrilatère dont des diagonales se coupent en leur milieu à angle droit.

Réponse: ______________________________

c) Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont congrus et ayant un angle droit.

Réponse : ___________________________

3. Comment appelle-t-on?

a) Quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux s'appelle_______________

b) Quadrilatère dont les côtés sont congrus s'appelle ____________________

II. Solides

4. De quels solides s'agit-il ?

Ma hauteur tombe au centre du disque qui est ma seule base **Réponse :** _______

J'ai au moins une surface courbe. **Réponse :** ______________________________

On peut me générer par une translation d'un triangle. **Réponse :** ______________

Ma projection est un disque. **Réponse :** ___________________________________

III. Transformations géométriques

5. Faites un dessin pour chacune des transformations géométriques suivantes en indiquant leurs propriétés.

a. Symétrie axiale

b. Rotation

IV. Mesure

6. L'aire d'un cercle est de 320 cm. Parmi les réponses suivantes, laquelle se rapproche le plus de la mesure de la circonférence?

a) 31.4

b) 94.2

c) 62.8

Justification :

7. Combien y a-t-il de mètres carrés dans :

a) 2 km^2? **Réponse :**

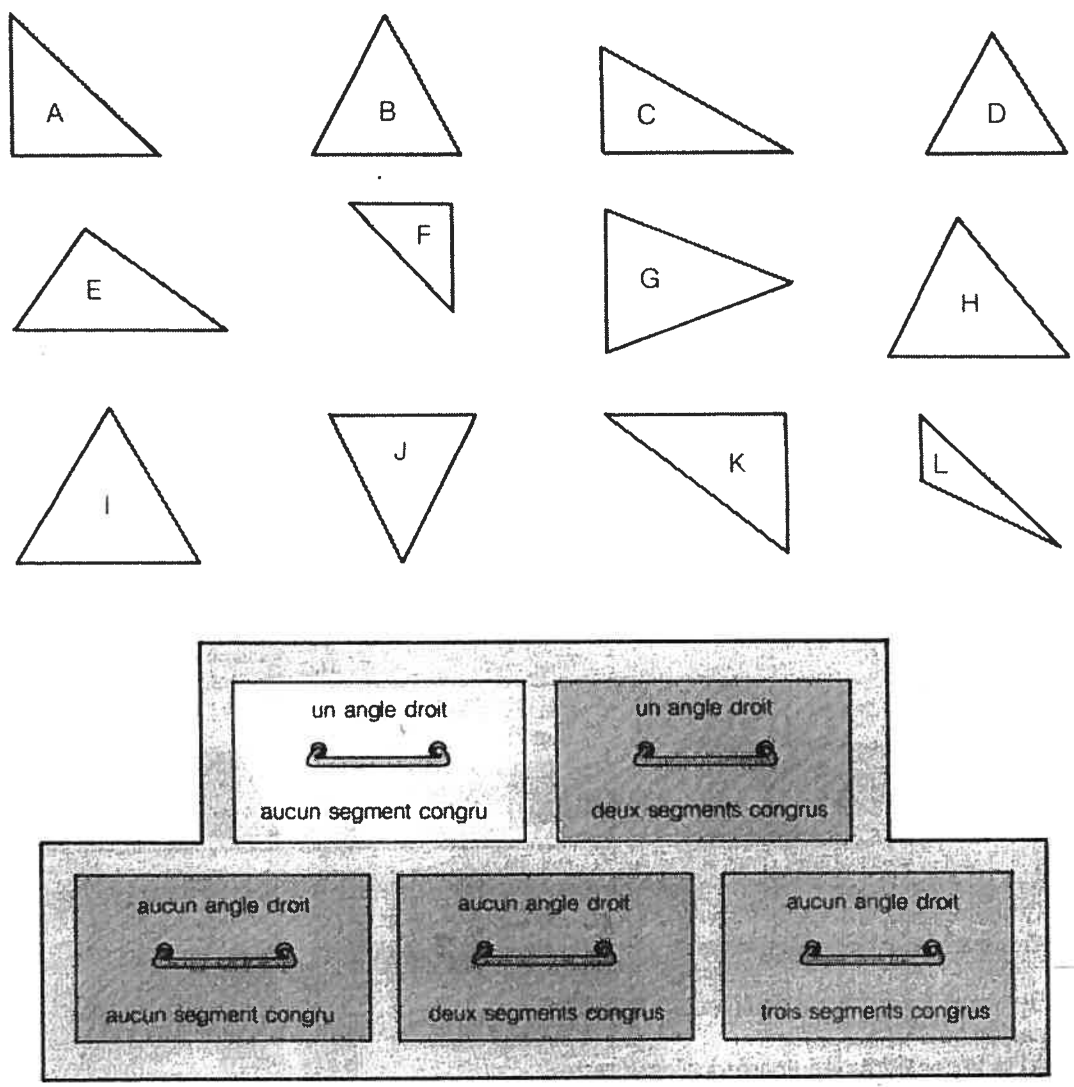
b) 1 cm^2? **Réponse :**

11. TRIANGLES

11.1 OBSERVATION DES TRIANGLES (FICHE 1)

Mathématique 6 (p.86)

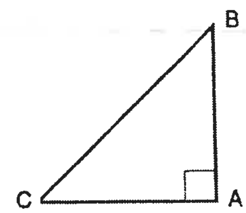
1 Aide Jeff a remettre chacun des triangles dans le tiroir correspondant.



11.2 ANALYSE DU VOCABULAIRE (FICHE 2)

1. *Lexique mathématique pour l'élève (*Beauregard, 1990, p. 92)

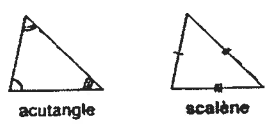
- Dans tout triangle, aux angles congrus sont opposés des côtés congrus. Un triangle équiangle est donc aussi équilatéral et un triangle isoangle est toujours isocèle.
- Un triangle peut être à la fois isocèle et acutangle, équilatéral et acutangle et quelquefois scalène et acutangle.
- Un triangle peut aussi être isocèle et rectangle à la fois. Le triangle ABC ci-contre a un angle de 90°, l'angle A, et deux de ses côtés sont congrus.
  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$



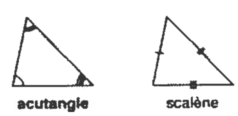
2. *Lexique mathématique* (Vincent, 1994, p. 172-173)

triangle : polygone à trois côtés et à trois angles.
symbole : △

triangle scalène : triangle dont les trois côtés sont de longueurs différentes. Le triangle scalène est aussi un triangle acutangle.



triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus (< 90°) et de mesurent différentes. Le triangle acutangle est aussi un triangle scalène.



3. *Défi Mathématique* (Lyons et Lyons, 4e année, 1991, p.238)

Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent ***triangles scalènes***

4. « Le Robert » (Éd. Du Club France Loisirs, Paris, 1997).

QUELCONQUE adj. 1. adj. indéf.

- *N'importe lequel, quel qu'il soit.* Un point *quelconque* du cercle.
- Qui n'a aucune propriété particulière. *Triangle quelconque* (***scalène.***

12. CONSTRUCTION DU TRIANGLE ISOCÈLE (FICHE 3)

1. Construire un triangle isocèle.

Construction 1 :

Démarche :

1.______________________________
2.______________________________
3.______________________________
4.______________________________
5.______________________________
6.______________________________

Quelle(s) propriété(s) est(sont) en jeu de cette construction?

Construction 2 :

Démarche :

1.______________________________
2.______________________________
3.______________________________
4.______________________________
5.______________________________
6.______________________________

Quelle(s) propriété(s) est(sont) en jeu de cette construction?

2. Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le triangle superposable à un triangle isocèle caché? Écrire le nombre et la(les) propriété(s) nécessaire(s).

Nombre : ____ Propriété (s)____

<u>Construction du triangle isocèle avec le nombre minimal d'informations</u>

<u>Description de la démarche de construction</u>:

1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

3. Décrire le maximum de propriétés du triangle isocèle.

Chaque triangle isocèle possède ...

1) ____

2) ____

3) ____

4) ____

5) ____

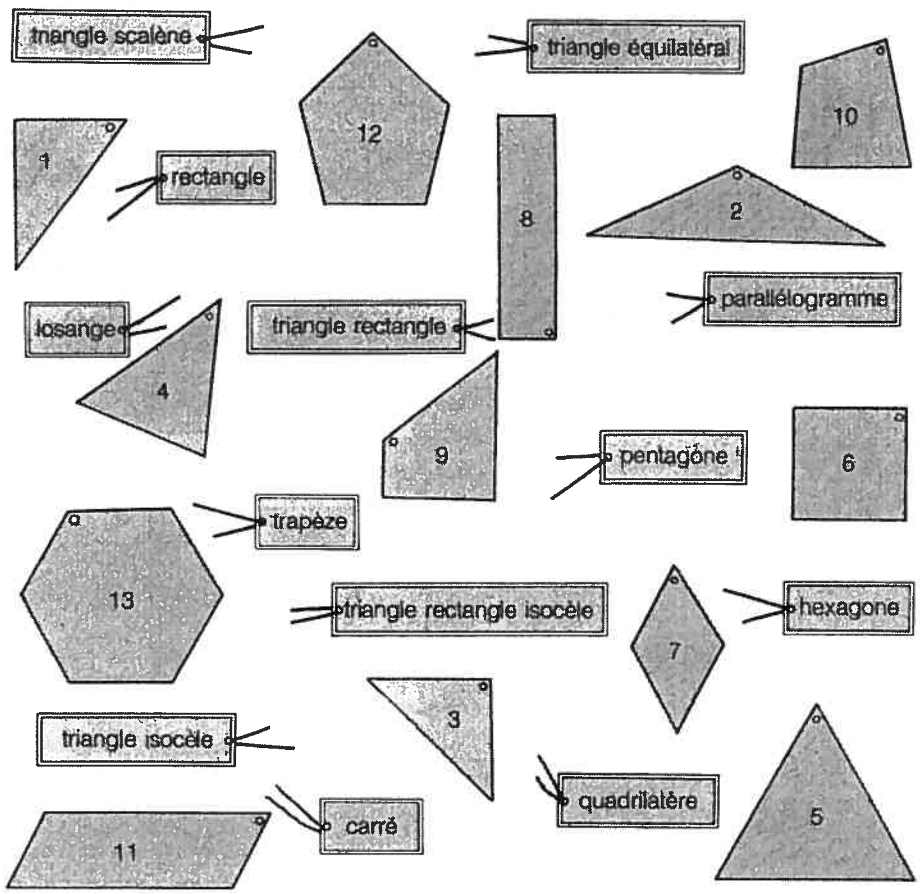
6) ____

13. QUADRILATÈRES

13.1 OBSERVATION DES POLYGONES (FICHE 4)

Mathématique 6 (p.88)

1 Tout est en désordre! Tu as pour tâche de rattacher chaque étiquette à la figure correspondante.



2 Quelles figures placerais-tu à l'intérieur de chacune des boîtes suivantes?

N.B. La même figure peut être placée dans les deux boîtes.

13.2 ANALYSE DU VOCABULAIRE (FICHE 6)

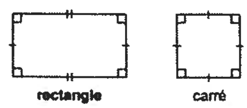
1. Lexique mathématique pour l'élève (Beauregard, 1990, p.67)

1. Définition

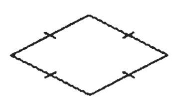
Un quadrilatère est une figure plane comprenant quatre segments de droite appelés côtés. Le quadrilatère est donc un polygone et il a les mêmes caractéristiques.

2. *Lexique mathématique* (Vincent, 1994, p. 152, 105)

rectangle: quadrilatère à quatre angles droits et dont les côtés opposés sont congrus et deux côtés consécutifs ne sont pas congrus.



losange: figure géométrique plane dont les quatre côtés sont égaux. Le carré est un losange, mais le losange n'est pas nécessairement un carré.



3. *Défi Mathématique 6* (Lyons, Lyons, 1991, p.221)

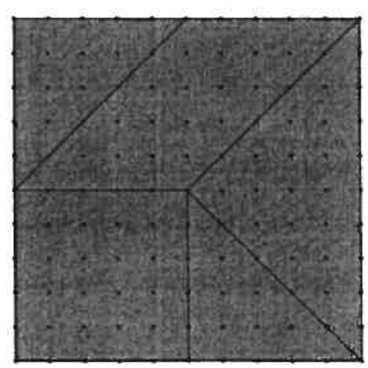
Les carrés pointés

1. Reproduis ce carré pointé puis découpe les cinq pièces qui le composent. Utilise la fiche complémentaire Géométrie IV.

   Place toutes ces pièces de manière à former :

   a) un rectangle qui n'est pas un carré;
   b) un triangle rectangle;
   c) un parallélogramme non rectangle;
   d) un trapèze isocèle non parallélogramme;
   e) un trapèze rectangle non parallélogramme;
   f) un hexagone convexe et symétrique;
   g) un pentagone concave;
   h) un hexagone concave et symétrique. (J'en connais au moins trois...)

   Dessine toutes tes solutions sur du papier pointé.



13.3 ACTIVITÉ DE FORMATION (FICHE 7)

Étape 1. Transformer la description suivante en une définition

Qui suis-je ?
a) Je suis un quadrilatère ayant les caractéristiques suivantes :
- 4 angles droits
- diagonales congrues et se coupant perpendiculairement en leur milieu.

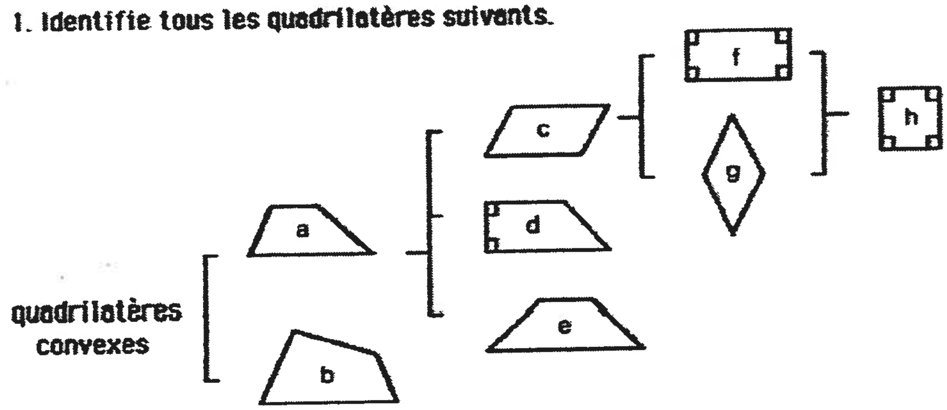
Réponse : ____________________

2. Vrai ou faux ?

a) Un carré est un trapèze. ________
b) Un losange est un parallélogramme. ________
c) Un trapèze est un rectangle. ________
d) Un parallélogramme est un rectangle. ________
e) Un trapèze est un losange. ________
f) Un carré est un losange. ________
g) Un losange est un trapèze. ________
h) Un rectangle est un carré. ________
i) Un carré est un rectangle. ________

Étape 2. Analyser le schéma de classification. Modifier si nécessaire.

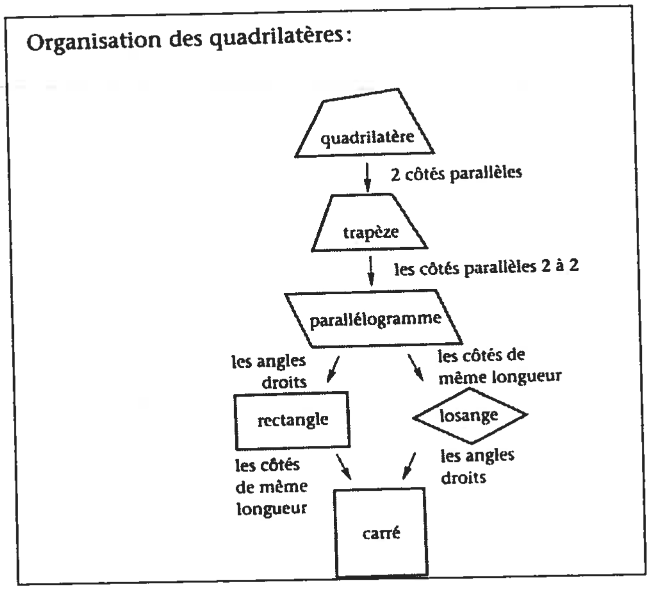
1. Identifie tous les quadrilatères suivants.



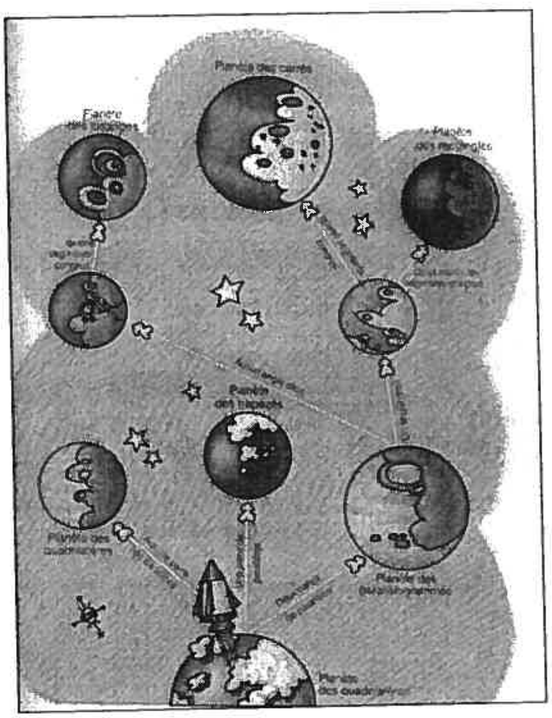
a) ____________ c) ____________ e) ____________ g) ____________
b) ____________ d) ____________ f) ____________ h) ____________

13.4 ANALYSE DES SCHÉMAS DE CLASSIFICATION (FICHE 8)

Leximath (Lexique mathématique de base, Côté, Gagnon, Perreault et Roegiers, 2002, p.144)



Mathématique au primaire FLG 5 (Champagne, Bardier, 1991, p.39)



14. CONSTRUCTION DU CARRÉ (FICHE 5)

1. Construire un carré.

Construction 1 :

Démarche :

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______

Quelle(s) propriété(s) est(sont) en jeu de cette construction?

______

Construction 2 :

Démarche :

1. ______
2. ______
3. ______
4. ______
5. ______
6. ______

Quelle(s) propriété(s) est(sont) en jeu de cette construction?

______

2. Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le carré superposable au carré caché ? Écrire le nombre et la(les) propriété(s) nécessaire(s).

Nombre : ____ Propriété (s)____

Construction du carré avec le nombre minimal d'informations :

Description des procédures de construction :

1. ____

2. ____

3. ____

4. ____

3. Décrire le maximum de propriétés du carré

Chaque carré possède …

1) ____

2) ____

3) ____

4) ____

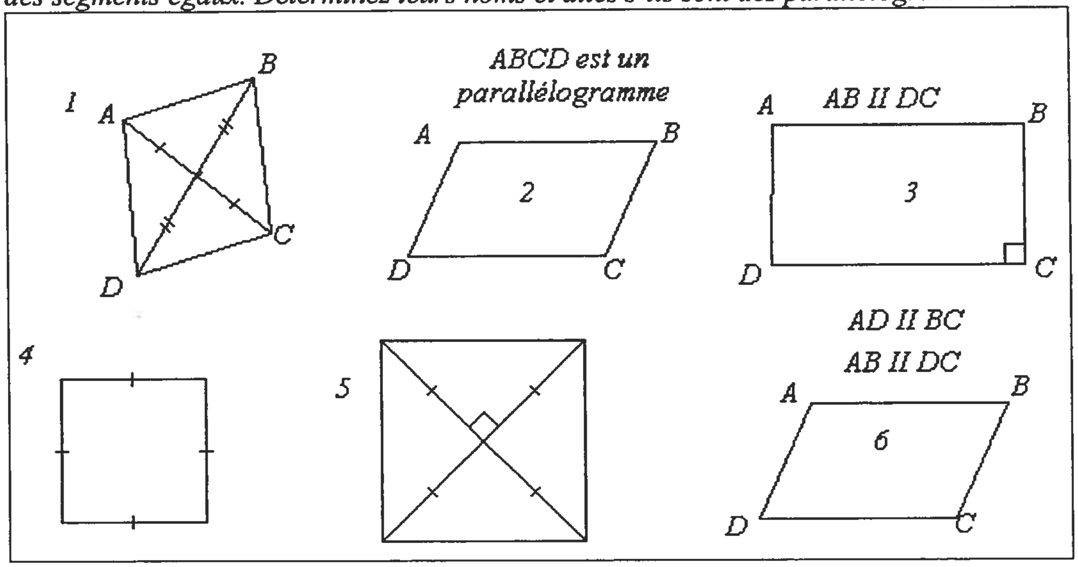
5) ____

6) ____

15. DÉTERMINATION DES QUADRILATÈRES (FICHE 9 ET 10)

15.1 SOMMES-NOUS DES PARALLÉLOGRAMMES ?

Regardez ces quadrilatères. Ils comportent un certain langage visuel. Les tirets mettent en évidence des segments égaux. Déterminez leurs noms et dites s'ils sont des parallélogrammes ou non.



N	Propriétés indiquées	Nom du quadrilatère	Parallélogramme ou non?
1			
2			
3			
4			
5			
6			

16. GRILLE D'ÉVALUATION DE TRAVAUX DE SESSION (2002)

N	Critères	Excellent	Très bien	Bien	Passable	Insuffisant
1	La description (ou analyse) de buts, de connaissances en jeu dans la situation					
2	L'analyse de la mise en situation et de l'ordre des consignes					
3	L'analyse du vocabulaire géométrique					
4	Le choix des figures et des grandeurs retenues, les difficultés de lecture et d'interprétation des schémas, des dessins et des représentations graphiques sont décrites					
5	L'anticipation des réponses des élèves, les interventions sur les erreurs					
6	Les compétences reliées aux tâches sont présentées et justifiées					
7	L'emploi de « situation didactique » comme modèle d'apprentissage					
8	Les ajustements et les corrections sont présentés et justifiés					
9	La connaissance géométrique démontrée par le travail					
10	Le travail a effectivement permis de vérifier du point de vue mathématique et didactique la capacité <u>d'analyser</u> des situations et des tâches proposées aux élèves					
11	Le travail a effectivement permis de vérifier du point de vue mathématique et didactique la capacité de <u>modifier</u> des situations et des tâches proposées aux élèves et de les intégrer dans les séquences d'enseignement					

Commentaires :

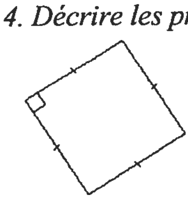
17. MINI-TEST (FIGURES PLANES)

NOM ET PRÉNOM : ____________________________________

3. Déterminer si l'énoncé est juste pour définir le carré, insuffisant ou redondant. Dans le cas d'insuffisance, déterminer le quadrilatère défini par l'énoncé. Souligner la partie redondante de l'énoncé (s'il y a lieu).

Énoncés	Juste pour définir le carré	Redondant	Insuffisant	Quadrilatère défini par l'énoncé
1. Losange ayant 4 angles droits				
2. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales perpendiculaires				
3. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues qui sont des bissectrices des angles				
4. Quadrilatère ayant 4 angles droits et des diagonales se coupant en leur milieu				
5. Quadrilatère ayant des diagonales se coupant en leur milieu, congrues et perpendiculaires				
6. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles rectangles congrus				
7. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues se coupant en leur milieu				
8. Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie				
9. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles congrus				
10. Quadrilatère régulier				
11. Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles et des diagonales se coupant en leur milieu				

4. Décrire les propriétés indiquées par des symboles et déterminer le nom du quadrilatère.



18. INGÉNIERIE DU TRIANGLE

18.1 TEST D'ENTRÉE

Le problème posé par la question 2b (voir l'annexe 10) porte sur l'identification d'un triangle et fait appel à la classification des polygones selon le nombre de côtés et à la classification des triangles selon les caractéristiques de leurs côtés et de leurs angles. Selon nos observations (voir les difficultés observées dans la section 1.1.1), les étudiants ont un niveau limité de la visualisation des triangles selon la description de leurs propriétés.

Question 2b : *« Qui suis-je? - Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont congrus et 1 angle de 90°»*. L'analyse de trois différents types de données utilisés dans la question (trois côtés, deux côtés congrus, angle droit) prévoit la réponse suivante : *triangle isocèle rectangle.*

- *Résultats obtenus*

Deux groupes (109 étudiants) ont participé au test. La répartition des réponses obtenues est la suivante :

- 40 réponses « triangle isocèle rectangle »
- 49 réponses « triangle rectangle »
- 11 réponses « triangle isocèle »
- 8 réponses « triangle »
- 1 (sans réponse)

Ces résultats affirment nos hypothèses préalables qu'il existe un problème de détermination d'un triangle selon ses propriétés et suggèrent ainsi que, dans la détermination du nom d'un triangle, la caractéristique d'« avoir un angle droit » domine par rapport à celle d'« avoir » deux côtés de mesure égale (49 pour 11). Nous référons les étudiants aux résultats obtenus à la fin de l'activité suivante.

18.2 SITUATION DE RAPPEL (RÉVISION DES PROPRIÉTÉS)

Savoirs géométriques visés :

- Propriétés des triangles (côtés : congrus et de longueur différente, angles : droit aigu, obtus) et de noms des classes (isocèle, équilatéral, scalène, acutangle, rectangle, obtusangle)
- Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites
- Identifier les triangles selon la représentation graphique

Savoirs didactiques visés :

- Évocation d'une démarche d'observation (recherche d'une propriété commune, « propriété particulière », introduction du nom)
- Connaître le phénomène de la reconnaissance des figures « position inhabituelle »

Organisation : professeur et groupe

Temps alloué[1] : 10-15 min

Étape 1. Révision des propriétés

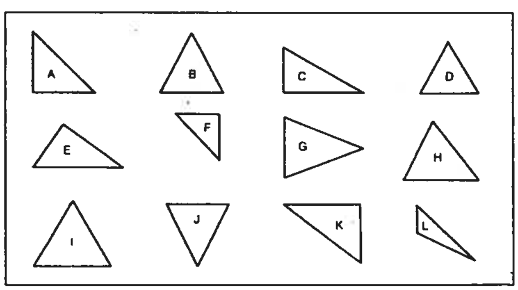
Consigne : Imaginez que vous êtes des élèves de 3e année du primaire. L'enseignante vous distribue les feuilles sur lesquelles vous retrouvez plusieurs triangles de différentes formes et grandeurs. Ils possèdent une propriété commune. Vous avez à votre disposition la règle graduée, l'équerre, le rapporteur d'angles, le compas. Trouvez cette propriété.
Question 1 : *Quelle propriété, selon vous, pourront retrouver les élèves du primaire?*

Question 2 : *Comment s'appelle le triangle ayant …*

Étape 2. Identification

À l'aide de rétroprojecteur, nous proposons d'observer un extrait du manuel scolaire pour identifier les triangles et pour soulever la question portant sur le phénomène « position inhabituelle ». (Voir l'annexe 11.1 - Fiche 1 et l'analyse dans la section 4.4.2)

Consigne : Observer et nommer les triangles.



Question 1 : *Comment déterminez-vous le nom du triangle? Selon quels critères?*

Question 2 : *Pourquoi la reconnaissance de triangle (A, G, H ...) était-elle difficile?*

---

[1] Malgré que nous ayons planifié nos situations selon le temps alloué à ces situations dans les années précédentes, il nous est arrivé souvent que le niveau de préparation des étudiants d'un groupe soit plus élevé que d'un autre, alors le temps alloué à ces situations pouvait jouer un rôle décisif dans le déroulement d'une situation.

- *Déroulement*

Étape 1.

Les six premières caractéristiques ont été identifiées. (Nous ne pensons pas que les élèves du primaire retrouvent les propriétés suivantes : trois côtés de différentes longueurs et trois angles aigus, parce que nous considérons tâche assez difficile pour eux. Cependant, nous avons anticipé ces propriétés de la part des étudiants en formation. N'oublions pas qu'il s'agit des étudiants de 4e année universitaire et la connaissance touchée par cette question donc doit être déjà acquise). Selon les réponses des étudiants, nous avons posé la question concernant le nom de chacune des classes des triangles définie par la caractéristique nommée.

1. Deux côtés de mesure égale ⇒ triangles isocèles
2. Trois côtés de mesure égale ⇒ triangles équilatéraux
3. Un angle droit ⇒ triangles rectangles
4. Deux angles de mesure égale ⇒ triangles isoangles
5. Trois angles de mesure égale ⇒ triangles équiangles
6. Un angle obtus ⇒ triangles obtusangles
7. Trois côtés de mesure différente ⇒ triangles scalènes
8. Trois angles aigus ⇒ triangles acutangles

Les noms « isoangles » et « équiangles » n'étaient pas habituels pour les étudiants, car ils sont plus familiers avec les noms « isocèles » et « équilatéraux », même s'il s'agit de mêmes classes de triangles.

Nous considérons cette étape en tant que rappel et les informations recueillies nous serviront à la classification des triangles et à l'analyse des extraits des manuels scolaires.

Étape 2.

Tel que nous avons prévu, la reconnaissance des triangles A (isocèle rectangle), G (isocèle acutangle) et H (isocèle acutangle) était difficile. La question sur la variété de triangles et positions inhabituelles proposée par l'activité a été soulevée. Les étudiants ont conclu que pour développer les aptitudes visuelles de l'élève et son imagination, il faut proposer les dispositions variées des triangles.

Par des questions 1 et 2, nous avons cherché à provoquer le questionnement sur les phénomènes d'apprentissage tels que « position inhabituelle », « propriété particulière » et « choix de propriétés » pour nommer le triangle.

Nous avons fait également le retour au test d'entrée et nous avons présenté le taux de réponses portant sur le triangle.

18.3. CLASSIFICATION DES TRIANGLES (DIAGRAMME DE CARROLL)

Savoirs géométriques visés :
- Visualiser (et représenter graphiquement) un triangle selon les deux caractéristiques nommées
- Employer les symboles pour désigner l'égalité ou la différence des mesures des côtés ou des angles
- Visualiser (et représenter à l'aide d'outil) une variété des triangles répondant aux caractéristiques nommées
- Déterminer si une figure donnée appartient ou non à une catégorie donnée
- Justifier la réponse, l'énoncé, la solution, etc.

Savoirs didactiques visés :
- Emploi du diagramme de Carroll pour la classification des figures à l'enseignement primaire
- Emploi d'un outil (modèle physique) de représentations des triangles

Étape 1. Représentation des classes

Organisation : travail individuel **Temps alloué** : 10-15 min

Question 1 : *Selon les critères nommés à l'étape précédente, comment peut-on modéliser la représentation de différents triangles*?

Consigne : Analyser les liens qui existent entre les deux caractéristiques (côtés et angle) et représenter les différents triangles en utilisant le diagramme de Carroll. (Voir la section 4.2.3.1)

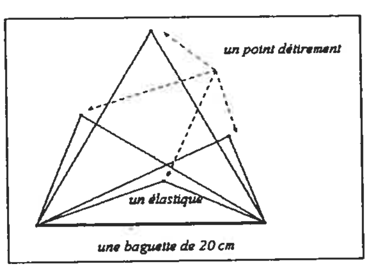
Triangle	scalène	isocèle	équilatéral
acutangle			
rectangle			
obtusangle			

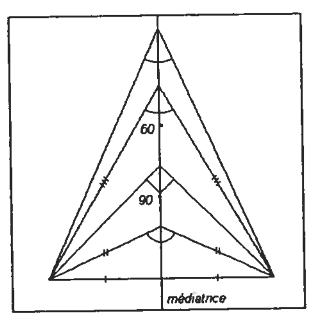
Question 2 : *Comment peut-on représenter les caractéristiques de propriétés par des symboles?*

Étape 2. Outil de représentations

Organisation : travail individuel **Temps alloué** : 10 min

Consigne : Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des triangles (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle peut-il favoriser le travail sur la variété de représentations de triangles et sur leurs propriétés? (Voir la description des modèles dans la section 5.2.2.1)





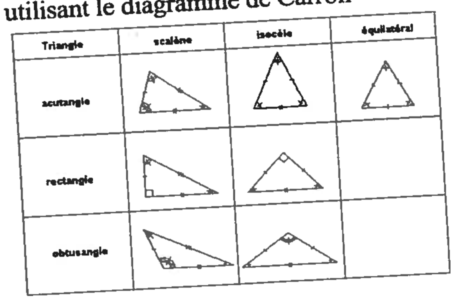
- *Déroulement et effets observés*

Étape 1. Représentation des classes

Question 1 : *Selon les critères nommés à l'étape précédente, comment peut-on modéliser la représentation de différents triangles*?

Les différents diagrammes et schémas ont été proposés par des étudiants (ces savoirs ont été travaillés dans l'ingénierie des solides). (Nous faisons le choix du diagramme de Carroll, car l'emploi du diagramme à branches est prévu à la suite de l'analyse du vocabulaire (activité suivante), celui du diagramme de Venn est abordé dans l'ingénierie des solides et des quadrilatères et sera proposé en tant que question à l'examen de mi-session.)

Consigne : Analyser les liens qui existent entre les deux caractéristiques et représenter les différents triangles en utilisant le diagramme de Carroll



Effets observés :
- L'aspect visuel du tableau (de toutes les représentations des triangles) a impressionné les étudiants. Certains ont exprimé le fait que pour la première fois ils avaient une image claire de différentes formes des triangles.
- La difficulté de représentation des différents triangles
- Certains étudiants étaient étonnés qu'il reste deux cases vides
- La demande d'ajouter deux rangées : triangle isoangle et équiangle

En ce qui concerne les difficultés de représentation de différents triangles, plusieurs activités sont prévues à ce sujet. Quant aux triangles isoangles et équiangles, nous avons proposé de tracer leurs représentations et, ensuite, de les comparer aux triangles présentés dans le tableau. Les étudiants ont conclu que les termes « isoangle » et « isocèle » (« équiangle »/« équilatéral ») sont réciproques.

Question 2 : *Comment peut-on représenter les caractéristiques de propriétés par des symboles?*

Il n'y avait pas de difficultés à cette étape. Dans les activités qui vont suivre, nous utilisons souvent les marques d'égalité (et de différence) des côtés et des angles, d'angle droit pour rendre plus visible l'articulation d'une propriété avec la définition ou pour améliorer la « lecture » d'une ou de plusieurs figures.

Étape 2. Outil de représentations

Consigne : Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des triangles (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle peut-il favoriser le travail sur la variété de représentations de triangles et sur leurs propriétés?

Nous avons engendré la discussion sur l'utilité des modèles créés pour favoriser la visualisation de différents triangles et du passage d'un triangle isocèle obtusangle à acutangle par le triangle rectangle et le triangle équilatéral (à l'aide du bâton et de l'élastique notamment). Nous avons demandé de reproduire le même outil et de l'apporter au cours suivant.

En demandant de représenter différents triangles avec cet outil, nous avons posé les questions suivantes : Un triangle scalène peut-il être obtusangle? Peut-on avoir un triangle isocèle obtusangle? isocèle rectangle? isocèle acutangle? Le triangle équilatéral peut-il être acutangle? Par ce genre de questions, nous avons amené les étudiants à se représenter le triangle demandé et à se prononcer sur ses propriétés (Exemple : Un triangle scalène peut être obtusangle. C'est un triangle ayant trois côtés de longueur différente et l'un de ses angles est obtus. Un triangle équilatéral est toujours acutangle. Etc.)

18.4 ANALYSE DU VOCABULAIRE

But : Consolider la connaissance des propriétés et des relations entre les classes. Comprendre le défi de tâche d'analyse du vocabulaire (Identifier l'élément problématique, modifier)

Savoirs géométriques visés :
- Connaître les définitions habituelles
- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.
- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.
- Déterminer les conséquences logiques de données
- Distinguer la description de définition
- Trouver un contre-exemple

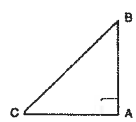
Organisation : Travail en équipe de 5-7 étudiants
Temps alloué : 15 min – travail en équipe, 10 -15 min - présentation d'une analyse (et discussion en classe).

Question : Que représente pour vous le travail appelé « *analyse des énoncés* »?

Consigne : Vous avez quatre extraits tirés de différentes sources didactiques. Vous devez les analyser du point de vue mathématique et didactique (trouver l'élément problématique, réfléchir sur les conséquences didactiques). (Voir l'annexe 11.2, Fiche 2 et l'analyse dans la section 4.4.3)

1.*Lexique mathématique pour l'élève (*Beauregard, 1990, p. 92)

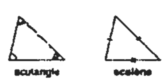
- Dans tout triangle, aux angles congrus sont opposés des côtés congrus. Un triangle équiangle est donc aussi équilatéral et un triangle isoangle est toujours isocèle.
- Un triangle peut être à la fois isocèle et acutangle, équilatéral et acutangle et quelquefois scalène et acutangle.
- Un triangle peut aussi être isocèle et rectangle à la fois. Le triangle ABC ci-contre a un angle de 90°, l'angle A, et deux de ses côtes sont congrus.
  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$



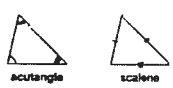
2. *Lexique mathématique* (Vincent, 1994, p. 172-173)

triangle : polygone à trois côtés et à trois angles.
symbole : △

triangle scalène : triangle dont les trois côtés sont de longueurs différentes. Le triangle scalène est aussi un triangle acutangle.



triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus (< 90°) et de mesurent différentes. Le triangle acutangle est aussi un triangle scalène.



3. *Défi Mathématique* (Lyons et Lyons, 4e année, 1991, p.238)

Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent ***triangles scalènes***

4. « Le Robert » (Éd. Du Club France Loisirs, Paris, 1997).

QUELCONQUE adj. 1. adj. indéf.
- *N'importe lequel, quel qu'il soit.* Un point *quelconque* du cercle.
- Qui n'a aucune propriété particulière. *Triangle quelconque ⇒* ***scalène.***

- Déroulement et résultats obtenus

L'analyse paraît être une tâche assez difficile pour certains étudiants, car elle fait appel à l'analyse du sens de termes employé et demande la capacité de réfléchir et de raisonner. 22 équipes de 4-7 étudiants chacune ont participé à l'analyse des extraits. Nous présenterons les résultats de cette analyse dans le tableau ci-dessous.

Extrait	Énoncés tirés des extraits	Corrections	Nombre d'équipes
1. Lexique mathématique	- Un triangle peut être à la fois équilatéral et acutangle - Un triangle peut être à la fois isocèle et acutangle et quelquefois scalène et acutangle	un triangle équilatéral est toujours acutangle un triangle peut être à la fois scalène et acutangle	7 10
2. Lexique mathématique pour l'élève	- Triangle : polygone à trois côtés et à trois angles - Triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus et de mesures différentes. - Le triangle acutangle est aussi un triangle scalène	Triangle : polygone à trois côtés (ou à trois angles) Triangle acutangle : polygone dont les trois angles sont aigus. Le triangle acutangle peut être un triangle scalène	7 13 15
3. Défi Mathématique 4	- Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent triangles scalènes	Les triangles qui ont trois côtés de mesures différentes s'appellent triangles scalènes	19
4. Le Robert	- Quelconque : Qui n'a aucune propriété particulière. Triangle quelconque ⇒ scalène	Quelconque : n'importe lequel, quel qu'il soit.	10

Cette activité est l'une des premières consacrées à l'analyse des extraits. Afin de faire comprendre aux étudiants le défi d'une tâche d'analyse des énoncés, nous sommes intervenue sur certaines présentations des analyses effectuées et sur les mots particuliers (par exemple, les expressions « peut être » et « quelquefois » du premier extrait et le terme « quelconque » du dernier extrait ont été les plus difficilement repérables).

Nous avons décidé de continuer la discussion soulevée dans cette activité en proposant l'activité de classification des triangles en utilisant le diagramme à branches.

18.5 « EXISTE-T-IL UN TRIANGLE QUELCONQUE? »

Savoirs géométriques visés :

- Concevoir des schémas, des tableaux et des diagrammes pour la classification des figures
- Formuler les relations d'inclusion
- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.
- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.
- Déterminer les conséquences logiques de données

Savoirs didactiques visés :

- Emploi des critères d'analyse : but, connaissances en jeu, ordre des étapes, choix de figures, choix de représentations, choix du critère de classification, choix du schéma (ces savoirs ont été travaillés aux étapes précédant à l'expérimentation, voir la section 5.3.1)

<u>Étape 1. Classification</u>

Consigne : Présenter la classification de toutes les classes de triangles (en utilisant le diagramme à branches) et trouver la place d'un triangle « quelconque » dans ce diagramme.

Organisation : en équipe de 4-7 étudiants.

Temps alloué : 10 min - travail en équipe, 15 min – présentation au tableau et la discussion.

<u>Étape 2. Situation d'analyse (Fiche 1)</u>

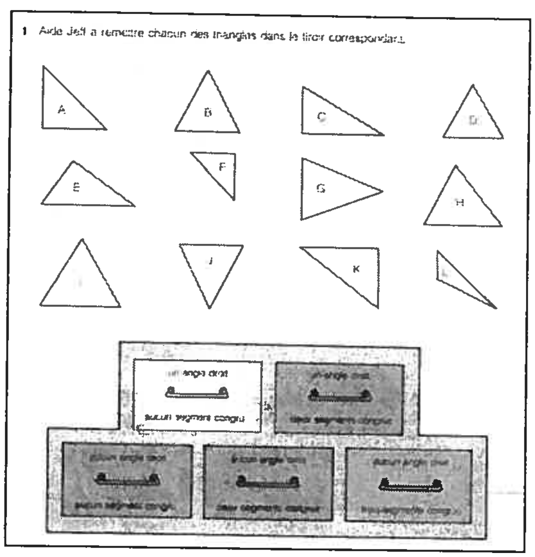
Question 1 : *Comment peut-on regrouper les triangles? Selon quels critères?*

Question 2 : *Quels critères appliquez-vous pour juger de la pertinence de l'activité d'apprentissage?*

Consigne : Analyser l'activité de classification des triangles. Proposer les modifications, si nécessaire. (Annexe 11.1) (Voir l'analyse dans la section 4.4.4 et les schémas de classification dans la section 4.2.3.1).

Organisation : Travail en équipe de 4-7 étudiants.

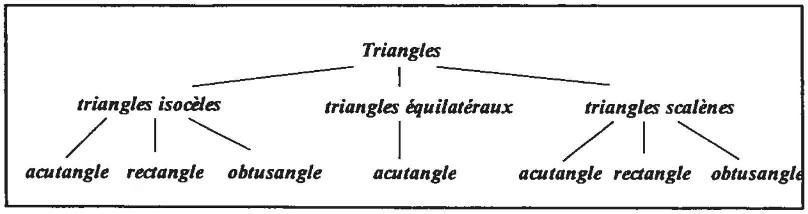
Temps alloué : 10 min – travail en équipe, 10 min - discussion en classe



- *Déroulement, résultats obtenus et effets observés*

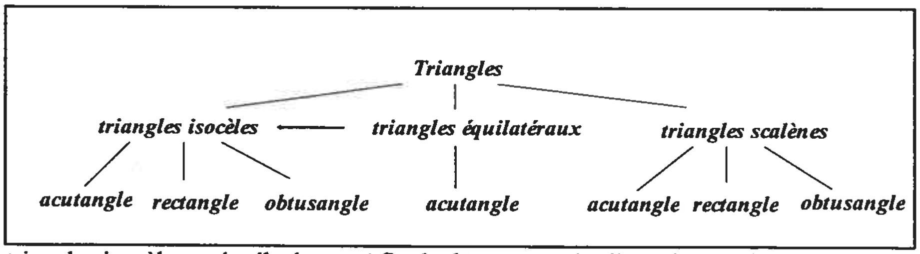
Étape 1. Classification

Toutes les équipes divisent les triangles en trois classes : isocèles, équilatéraux et scalènes (en oubliant que la classe de triangles équilatéraux est incluse dans la classe de triangles isocèles). Les schémas ayant légères distinctions ressemblent à un diagramme à branches suivant :



Seulement 2 équipes parmi 15 mettent en relation les triangles isocèles et équilatéraux en gardant la division en trois classes (voir le schéma ci-dessous) :

Les représentations au tableau de différents schémas de classification ont engendré les discussions sur les relations entre les classes des triangles et en particulier entre les triangles isocèles et scalènes et entre les



triangles isocèles et équilatéraux. Afin de donner aux étudiants la possibilité d'appliquer ces connaissances, nous avons proposé à analyser une activité tirée du manuel scolaire.

Étape 2. Situation d'analyse (Fiche 1)

Question 1 : *Comment peut-on regrouper les triangles? Selon quels critères?*

Les étudiants ont conclu qu'on peut classer les triangles selon les côtés ou selon les angles.

Question 2 : *Quels critères appliquez-vous pour juger de la pertinence de l'activité d'apprentissage?*

Les critères principaux employés pour l'analyse des activités de classification (but, connaissances en jeu, choix de triangles, choix du critère de classification, choix du schéma) ont été ressortis.
Quant à l'analyse de l'activité, dont l'observation de triangles a été proposée dans la situation 2, nous avons observé seulement une présentation. Cette équipe a fait la proposition suivante : « Pour effectuer la classification des triangles, on a besoin au moins de 7 types différents de triangles (3 isocèles (acutangle, rectangle, obtusangle), 1 équilatéral et 3 scalènes (acutangle, rectangle, obtusangle) ». Ils ont ajouté alors le triangle scalène acutangle et le triangle isocèle obtusangle. Les étudiants ont déterminé que l'activité utilise le critère « angle droit » pour classer les triangles qui ne s'applique pas aux triangles équilatéraux et ne permet pas l'identification des classes de triangles acutangles et obtusangles (dans les trois tiroirs se trouvent les triangles non-rectangles scalènes, non-rectangles isocèles et non-rectangles équilatéraux). Ils ont supprimé trois tiroirs en bas et ajouté cinq nouveaux tiroirs : « un angle aigu, aucun segment congru», « un angle obtus, aucun segment congru», « un angle aigu, deux segments congrus », « un angle obtus, deux segments congrus » et « trois segments congrus ». Ensuite, ils ont proposé de nommer les classes des triangles.

À la suite de la première présentation, les autres équipes ont accepté les modifications proposées sans vouloir montrer les leurs. (Peut-être l'une des raisons principales de cette acceptation était la fin proche du cours).

18.6 PROPRIÉTÉS PARTICULIÈRES DES TRIANGLES ET CONSTRUCTION DES TRIANGLES

Savoirs géométriques visés :

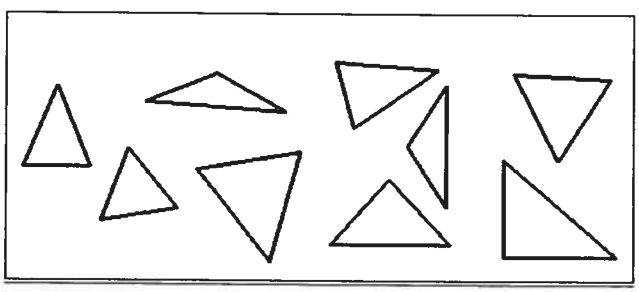
- Reconnaître les ressemblances et les différences des figures (ressemblance : congruence de deux côtés et de deux angles (au moins); différences : les triangles isocèles peuvent être acutangles, rectangles ou obtusangles.)
- Visualiser (et représenter) la variété des triangles isocèles
- Effectuer les différentes constructions de la même figure
- Décrire les procédures effectuées (précision de la suite logique des procédures)
- Utiliser le langage précis dans la description (emploi de termes : segment, milieu, médiatrice, bissectrice, médiane, hauteur, etc.)
- Déterminer le nombre minimal de données permettant la construction
- Tracer les figures selon le nombre minimal de données
- Déterminer les conséquences logiques de certaines données
- Décrire les propriétés d'une figure

Savoirs didactiques visés :

- Démarche d'observation (recherche d'une propriété commune, identification du nom)
- Emploi des modèles physiques pour l'enseignement (ex. : En changeant l'ouverture entre deux pailles ou en tirant sur l'élastique, on peut enrichir le répertoire de représentations du triangle isocèle, favoriser la visualisation du passage d'un triangle isocèle obtusangle à acutangle par le triangle rectangle et le triangle équilatéral comme cas particulier d'un triangle isocèle acutangle;
- Démarche de construction (construire, décrire les procédures et les propriétés utilisées)
- Analyse de la structure de l'activité et du rôle de l'enseignant dans la gestion (approche par situations; situation d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation)

Étape 1. Identification des propriétés

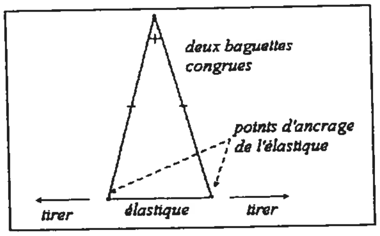
Consigne : Observer les triangles, trouver la ressemblance et les différences.



Organisation : Travail en groupe classe
Temps alloué : 2-3 min

Étape 2. Outil de représentation

Consigne : Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des triangles (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle favorise le travail sur la variété de triangles isocèles et sur leurs propriétés? (Voir les modèles dans la section 5.2.2.1) Déterminer les limites de mesure des angles congrus d'un triangle isocèle acutangle, rectangle et obtusangle.
Temps alloué : 5 min



<u>Étape 3. Construction d'un triangle isocèle</u> (Fiche 3)

Consigne : Construire un triangle isocèle, décrire les procédures de construction et les propriétés qui sont en jeu.

Matériel : la règle graduée, le compas, l'équerre.

Organisation : travail individuel et en équipe de 4-7 suivi de la présentation de constructions du triangle isocèle au tableau et de la description des procédures et de propriétés utilisées pour la construction. (Chaque équipe, selon l'ordre, décrit les procédures. Pour la première présentation, la description de chaque procédure est suivie d'un tracé correspondant effectué par le formateur. Dans les présentations suivantes, c'est le représentant d'une autre équipe qui joue le rôle du constructeur. S'il y a lieu, le professeur pose les questions ou donne des contre-exemples pour préciser la description des procédures). (Voir l'analyse préalable dans la section 5.2.3)
Temps alloué : construction – 5 min, présentation – 15 min.

<u>Étape 4. Construction du triangle isocèle superposable à un triangle isocèle caché.</u>

Consigne : Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le triangle superposable au triangle isocèle caché ?

Organisation : Travail en équipe de 4-7 personnes, suivi de la présentation de constructions au tableau et de la description des étapes et de propriétés utilisées pour la construction

Temps alloué : construction – 5-7 min, présentation – 15 min.

<u>Étape 5. Description des propriétés du triangle isocèle</u>

Consigne : Décrire les propriétés utilisées dans les constructions.

Organisation : Travail en groupe classe : les équipes annoncent une propriété, le professeur la décrit au tableau

Temps alloué : 5 min

<u>Étape 6. Analyse de la structure de l'activité</u>

Consigne : Quelles sont les étapes principales de cette activité? Quel est le rôle de l'enseignant dans la gestion ?

Organisation : Travail en équipe de 4-7 personnes, suivi d'une discussion

Temps alloué : 5 min

-Déroulement, résultats obtenus et effets observés

Étape 1. Identification des propriétés

Consigne : Observer les triangles, trouver la ressemblance et les différences.

La réponse à cette question était immédiate : Ressemblance — congruence des côtés. Selon la présence d'angle droit, obtus ou de trois angles aigus, le triangle isocèle peut être acutangle, rectangle et obtusangle.

Étape 2. Outil de représentation

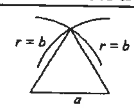
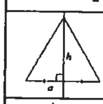
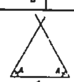
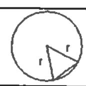
En tirant un élastique, on peut avoir des représentations différentes des triangles isocèles. Les limites de mesure des angles congrus d'un triangle isocèle acutangle, rectangle et obtusangle ont été décrites au tableau.

- Si l'angle entre deux côtés congrus est aigu, la mesure de deux autres angles est plus grande que 45° et plus petite que 90° chacune;
- S'il est droit, les deux autres angles mesurent 45° chacun;
- S'il est obtus, la mesure de deux autres angles est plus petite que 45° et plus grande que 0° chacune.

Nous avons attiré l'attention des étudiants sur la représentation du triangle isocèle dont la mesure d'angle entre deux côtés congrus est égale à 60° et à 180°.

Étape 3. Construction d'un triangle isocèle (Fiche 3)

22 équipes de 4-7 personnes chacune ont participé à cette situation. Nous présentons leurs constructions selon l'ordre de leur fréquence.

Construction	Démarche	Nombre	Niveau
	1. Segment (base); deux arcs de même ouverture du compas égale à la mesure du côté; relier le point d'intersection avec les extrémités du segment	7	3
	3. Segment (base), médiatrice; reporter la mesure de la hauteur sur la médiatrice	6	3
	2. Segment (base); reporter l'angle donné de chacune des extrémités du segment	5	3
	Deux côtés congrus reliés par le segment	2	2
	Tracer le contour d'une équerre	1	2
	Deux côtés congrus (Tracer le cercle; relier deux rayons du cercle par la corde)	1	2

Il y avait encore sept constructions du triangle isocèle rectangle (quelques équipes ont présenté deux constructions) dont les procédures de construction sont suivantes : tracer un angle droit, reporter deux segments de longueur égale, relier les extrémités.

Parmi les constructions présentées au tableau, nous avons repris celle qui utilise la médiatrice (construction 3). Nous avons demandé de trouver le lieu de points équidistants de deux extrémités du segment de base. Nous avons amené les étudiants (à partir du point milieu) à visualiser l'ensemble de points équidistants et à déterminer son nom : médiatrice. Nous nous sommes interrogée sur les distinctions entre deux termes « médiane » et « médiatrice » en général et pour le cas du triangle isocèle en particulier.

Effets observés :

- Incompréhension par des étudiants (au début de l'activité) de l'utilité de la description de procédures et de propriétés utilisées pour la construction. (Un nombre important des erreurs et de difficultés identifiées à l'étape de présentation a permis de convaincre les étudiants de l'importance de la verbalisation de la démarche afin de préciser le vocabulaire employé et l'ordre des procédures);
- Plusieurs descriptions des étapes de construction exigeaient des précisions. (En général, le contre-exemple était utilisé en tant que moyen de modification.)
- Descriptions de propriétés utilisées pour la construction contenaient les autres propriétés que ne faisaient pas partie de construction.

Étape 4. Construction du triangle isocèle superposable à un triangle isocèle caché.

Voici la liste de constructions effectuées :

Noms des propriétés (Le nombre minimal est 2)	**Nombre d'équipes**
1. Base et angle (entre base et côté)	1
2. Base et côté	1
3. Côté et angle opposé à la base	1
4. Base et hauteur	2
5. Base et angle opposé	2
6. Côté et angle (entre côté et base)	3

Parmi 22 équipes participé, 5 équipes n'étaient pas capables de réduire le nombre de propriétés suffisantes pour la construction en demandant 3 données dont deux données parmi trois étaient présentées par les cotés congrus ou les angles congrus et 7 équipes n'ont pas présenté les nouvelles constructions.

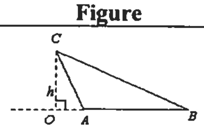
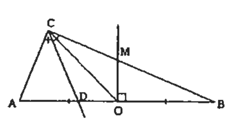
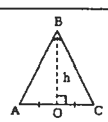
Nous avons proposé à tous d'effectuer individuellement les constructions selon les propriétés décrites dans les constructions n.1, 3 et 6.

Étape 5. Description des propriétés du triangle isocèle

Toutes les propriétés anticipées ont été décrites par les étudiants.

1. Deux côtés congrus et deux angles congrus
2. La hauteur divise le côté opposé en deux parties congrues (elle est une médiane et une médiatrice).
3. La hauteur divise un angle duquel elle est issue en deux angles congrus (elle est une bissectrice).
4. La hauteur divise un triangle en deux triangles rectangles congrus (elle est un axe de symétrie)

Cette étape a servi à la précision de termes employés : segment, côté, base, hauteur, milieu, médiane, médiatrice et bissectrice.

Figure	**Description**
	*Chaque côté d'un triangle peut être la base de ce triangle. Le choix de la base dépend du côté sur lequel repose le triangle ou sur lequel on abaisse la hauteur. La hauteur est la perpendiculaire abaissée de l'un des sommets du triangle sur le côté opposé ou sur son prolongement.*
	*La médiane est la droite qui joint l'un des sommets au milieu du côté opposé. La médiatrice d'un segment est la perpendiculaire élevée à ce segment en son milieu. La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue du sommet de cet angle et qui le divise en deux angles congrus.* *CO est la médiane (/AO/ =/ OB/)* *MO est la médiatrice (MO⊥ AB, /AO/=/OB/)* *CD est la bissectrice de ∠ACB (m∠ACD = m∠DCB)*
	*Dans un triangle isocèle, la médiane issue du sommet dont la mesure de l'angle est différente est à la fois la bissectrice de cet angle, la hauteur du triangle et la médiatrice du côté opposé. BO est la médiane, la hauteur, la médiatrice et la bissectrice.*

Étape 6. Analyse de la structure de l'activité

Consigne : Quelles sont les étapes principales de cette activité? Quel est le rôle de l'enseignant dans la gestion

À la suite de la discussion en équipes, les étudiants ont nommé les étapes suivantes : construction, description, leur vérification et ensuite, acceptation de celles qui sont bonnes. Quant au rôle du formateur, en général, nos anticipations étaient proches aux réponses obtenues : proposer la situation, gérer le temps, organiser la présentation des constructions au tableau, « dire ce qui est bon ou non ». Nous avons ainsi référé les étudiants aux étapes découvertes dans la première situation d'analyse (voir la section 5.2.1.1.) en les associant aux étapes d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. Cette dernière expression « dire ce qui est bon ou non » nous a semblé utile pour amorcer la discussion sur l'étape de l'institutionnalisation et de différentes formes que l'institutionnalisation peut prendre.

18.7 CONSTRUCTION DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Savoirs géométriques visés :
- Effectuer les différentes constructions de la même figure
- Décrire les procédures effectuées
- Utiliser le langage précis dans la description des propriétés

Consigne 1 : Trouver trois façons de construire un triangle équilatéral, décrire les procédures et les propriétés utilisées pour chacune des constructions.

Organisation. : Travail en équipe

Temps alloué : 10 min pour effectuer les constructions, 10 min pour la présentation

Consigne 2 : Rechercher les nouvelles constructions (devoir)

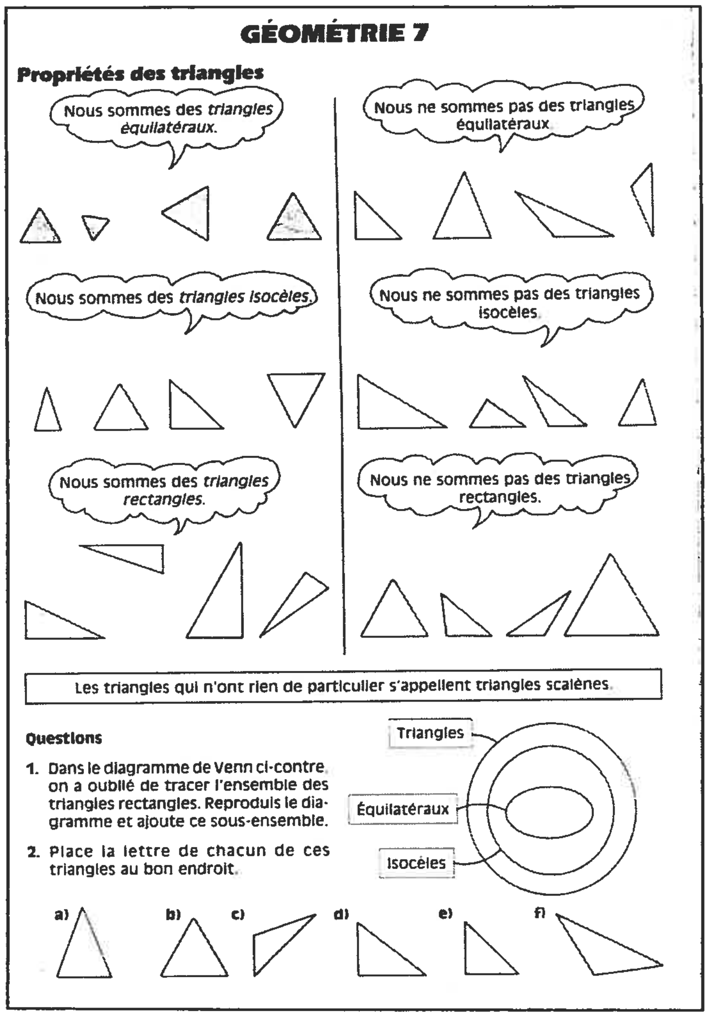
- *Déroulement et effets observés*

Cette situation est reprise de l'ingénierie didactique de M. Artigue et de J. Robinet « Conceptions du cercle chez les élèves de l'école élémentaire » (situation 6 : Construction de figures géométriques, séances 10 et 11 au CM, p.50). Avant de nous adresser à l'étude de procédures des élèves dans la construction du triangle équilatéral, nous avons proposé aux étudiants à la fin du cours portant sur la notion du cercle de trouver trois différentes façons de le construire.

<u>**Effets observés :**</u>
- Les constructions des triangles étaient assez variées. (Nous avons décrit cinq différentes démarches qui réfèrent aux constructions 1- 4 et 6 de la liste présentée dans la section 4.2.3.2)
- Il n'y avait presque pas des erreurs dans la description des procédures de la construction
- Les propriétés suivantes ont été décrites au tableau :
  - *Tous les angles sont congrus (60° chacun) et tous les côtés sont congrus (le triangle équilatéral est on polygone régulier à trois côtés).*
  - *Toute hauteur divise le côté opposé en deux parties congrues; elle est une médiane et une médiatrice (propriété de triangles isocèles).*
  - *Toute hauteur divise un angle duquel elle est issue en deux angles congrus (de 30° chacun); elle est une bissectrice.*
  - *Toute hauteur divise un triangle en deux triangles rectangles congrus; elle est un axe de symétrie (il y en a trois axes).*
  - *Dans un triangle équilatéral, les hauteurs, les médianes et les bissectrices coïncident.*
  - *L'angle au centre est égal à 120°*
  - *Il se superpose avec lui-même par la rotation autour du centre à l'angle de 120°*
- Le nombre minimal de données permettant la construction du triangle équilatéral unique (la question posée à la fin de présentations) était donné de façon immédiate : il est égal à 1 et le nom de la donnée est « longueur du côté ». Ensuite, les autres possibilités ont été proposées : périmètre du triangle et rayon du cercle circonscrit. Nous avons également effectué les constructions qui utilisent ces données.
- Nous avons proposé en tant que devoir à la maison d'effectuer la construction du triangle équilatéral qui utilise la « hauteur » et le « rayon du cercle inscrit » et de composer la nouvelle définition du triangle équilatéral en utilisant les propriétés décrites ci-haut.
- En posant la question sur le nombre minimal de données permettant la construction du triangle quelconque superposable à un triangle caché, nous n'avons pas obtenu la réponse. Cette question était proposée en que devoir. (Les étudiants pouvaient ainsi trouver les différentes constructions du triangle scalène dans le recueil de textes destiné à ce cours (voir les constructions dans la section 4.2.3.2). (Nous admettons que notre choix pourrait être le meilleur. Au cours suivant, nous avons apporté l'outil de construction « d-stik » pour vérifier le nombre minimal de propriétés permettant la construction et pour évoquer la relation d'inégalité triangulaire).

18.8 EXAMEN DE LA MI-SESSION

<u>Question 4</u>. *Voici un extrait du manuel scolaire de 4e année. Lire l'introduction ci-contre et répondre aux questions 1-5.*



GÉOMÉTRIE 7

Propriétés des triangles

Nous sommes des *triangles équilatéraux*.

Nous ne sommes pas des triangles équilatéraux.

Nous sommes des *triangles isocèles*.

Nous ne sommes pas des triangles isocèles.

Nous sommes des *triangles rectangles*.

Nous ne sommes pas des triangles rectangles.

Les triangles qui n'ont rien de particulier s'appellent triangles scalènes.

Questions

1. Dans le diagramme de Venn ci-contre, on a oublié de tracer l'ensemble des triangles rectangles. Reproduis le diagramme et ajoute ce sous-ensemble.
2. Place la lettre de chacun de ces triangles au bon endroit.

Triangles

Équilatéraux

Isocèles

a) b) c) d) e) f)

3. À quel ensemble appartient le triangle c?

*4. Nommer les triangles **d** et **e**.*

5. Pouvez-vous décrire les difficultés des élèves dans la réalisation de cette activité?(Dénombrez vos réponses). Proposez des modifications ou des améliorations du diagramme.

<u>Question 5 :</u> *De quelle(s) information(s) <u>minimale(s)</u> avez-vous besoin pour construire le triangle superposable à un triangle caché? Écrire deux réponses possibles.*

- *Conduites attendues*

Question 4. Analyse

En proposant l'analyse de l'activité, nous voulions vérifier les connaissances géométriques et didactiques travaillées lors du cours : détermination d'un triangle selon les propriétés de ses côtés et de ses angles, définition des triangles scalènes, classification des triangles. En même temps, nous étions intéressée à l'emploi de différents savoirs didactiques : choix de représentations, recherche d'une propriété commune pour introduire les noms des classes, précision du vocabulaire, critères de classification (côtés et angles), utilité de différents diagrammes de classification. En même temps, nous étions intéressée par l'emploi du diagramme de Venn pour la classification des triangles (qui n'était pas utilisé lors de la formation pour classifier les triangles, cependant faisait objet des classifications des quadrilatères). (Voir l'analyse du schéma dans la section 4.2.4 et l'utilité de différents schémas dans la section 4.2.1.2).

Nous posons cinq sous-questions, dont les questions 1 et 2 font partie d'un extrait, les questions 3 à 5 sont ajoutées par nous. Les questions 3 et 4 vérifient la reconnaissance d'un triangle (réponses attendues : 3 — Triangles scalènes, 4d – triangle rectangle scalène, 4e — triangle rectangle isocèle.)
Nous anticipons certaines difficultés de l'analyse de l'activité, car les critères d'analyse n'étaient pas spécifiés par les questions.

Question 5. Nombre minimal

Le but que nous visons par cette question est de vérifier la représentation mentale de différentes constructions du triangle scalène. Seulement les constructions des triangles isocèles et équilatéraux ont été travaillées lors du cours de manière complète.

Réponses attendues :

Figure géométrique	Nombre minimal de données	Noms de données
Triangle	3	- 3 côtés - 2 côtés et 1 angle entre eux - 2 angles et 1 côté entre eux - 1 côté, 1 angle et la hauteur à ce côté, etc.

- *Résultats obtenus*

Question 4. Analyse

Même si le taux de réussite pour chaque élément de l'outil d'analyse n'était pas très élevé (car les critères n'étaient pas spécifiés et l'analyse portait sur toute une situation), les différents éléments des analyses didactiques travaillés lors de la formation sont ressortis :
- but de l'activité et connaissances en jeu
- ajout des étapes de l'activité
- recherche d'une propriété commune (élément de l'activité d'observation),
- choix de représentations,
- précision du vocabulaire,
- critères de classification (côtés et angles),
- utilité de différents diagrammes de classification.

Cependant, l'analyse des schémas de classification modifiés nous montre que dans le tiers des diagrammes à branches proposés par les étudiants, la relation entre la classe des triangles isocèles et équilatéraux est absente et la moitié de diagrammes de Venn sont erronés.

Nous présentons les résultats obtenus dans le tableau suivant :

Commentaires		Taux de présence du commentaire
1. Absence de la classe de triangles scalènes dans la mise en situation		27 %
2. Absence de définitions des classes		63 %
3. Absence de différents triangles dans les représentations graphiques; ou représentations ambiguës		58 %
4. La définition des triangles scalènes est fausse		44 %
5. Difficulté d'utilisation du diagramme de Venn pour la classification des triangles selon les côtés et selon les angles		69 %
6. La classe de triangles scalènes n'est pas désignée dans le diagramme		52 %
Modification du diagramme	1. Diagramme à branches	66 %
	2. Diagramme de Venn	27 %
	3. Diagramme de Carroll	7 %

Cette première évaluation a permis aux étudiants de prendre conscience de leur propre capacité d'analyser et de l'état de leurs connaissances géométriques qui permettaient cette analyse. Nous avons décidé de reprendre l'analyse de cette activité au début du cours suivant.

<u>Question 5. Nombre minimal</u>

Nous présentons les résultats obtenus dans le groupe de 62 étudiants. (Les résultats du deuxième groupe sont semblables).

Réponses	Nombre d'étudiants ayant répondu
Nombre minimal de données (3)	42
- 3 côtés - 2 côtés et 1 angle entre eux	29
- 3 côtés - 2 angles et 1 côté entre eux	11
- 2 côtés et 1 angle entre eux - 2 angles et 1 côté entre eux	5
- 3 côtés - 1 côté, 1 angle et la hauteur à ce côté, etc.	1

L'analyse de résultats permet d'observer que 74.2 % des étudiants ont présenté deux réponses correctes. Encore 6.4 % des étudiants ont donné seulement une réponse. Parmi les 19.4 % n'ayant pas réussi, 12.9 % des étudiants ont présenté les propriétés nécessaires pour la construction du triangle isocèle, 1.6 % des étudiants — pour le triangle isocèle rectangle et 1.6 % – pour le triangle équilatéral. Le reste des étudiants présentent le nombre insuffisant de propriétés pour construire un triangle unique et ne spécifient pas le type du triangle.

La discussion organisée après l'examen a permis d'identifier la difficulté principale des étudiants qui consistait en l'interprétation du terme « triangle ».

18.9 ANALYSE DE L'ACTIVITÉ (TRAVAIL SUR LES ERREURS)

L'analyse proposée a ciblé tant la consolidation des connaissances géométriques (les propriétés de côtés et d'angles, les différentes représentations des triangles et la relation entre les classes) que l'application des connaissances didactiques (but, ordre des étapes, vocabulaire employé, choix de représentations employées dans la phase de rappel et pour la classification, pertinence du schéma, gestion de l'activité, détermination des compétences).

Question : *Quels critères de votre liste pouvez-vous appliquer pour analyser cette activité?*

Organisation : travail en équipe de 4-7 étudiants

Temps alloué : 10 min (analyse), 15 min (présentation)

- *Déroulement et effets observés*

Nous avons divisé les critères annoncés par les étudiants en trois groupes. (7 équipes travaillaient sur chaque groupe de critères). Les deux premiers groupes de critères s'appliquent à la phase d'introduction et le troisième groupe – à la classification des triangles.

1e groupe de critères

- Quelles connaissances géométriques sont-elles en jeu dans cette situation?
- La phase de rappel donne-t-elle un contexte plausible à l'exercice proposé? Pourquoi?
- Le vocabulaire géométrique utilisé est-il exact, nécessaire pour résoudre l'exercice? Justifier.
- Quels ajustements et corrections proposez-vous?

2e groupe de critères

- Quel est le choix des figures et de leur disposition? Sont-ils pertinents?
- Quels ajustements et corrections proposez-vous?

3e groupe de critères

- L'ordre des consignes est-il logique pour favoriser la réalisation de la tâche?
- Le schéma et les représentations graphiques utilisés pour la classification sont-ils pertinents?
- Quels ajustements et corrections proposez-vous?

La question concernant les compétences visées par cette activité sera posée à tout un groupe.

Nous allons vous présenter les critiques et les propositions faites par toutes les équipes. Ce sont des résultats généraux obtenus du travail des équipes et de discussions effectuées au moment de la présentation. (Notre point de vue peut être différent de celui des étudiants).

1er groupe de critères (Critiques proposées)

- Les connaissances en jeu dans cette situation sont les propriétés des triangles (congruence des côtés et la présence d'angle droit). La connaissance de ces propriétés doit permettre l'identification d'un triangle et son placement dans la région correspondante.

- La mise en situation présente une phase de rappel des principales classes de triangles. Elle ne donne pas un contexte plausible à un bon déroulement de l'activité, car elle ne propose pas la recherche des régularités de chaque ensemble des triangles.

Propositions :

- Ajouter la phase de formulation à la suite de la recherche des régularités de chaque ensemble :

  « *Les triangles qui ont _______________ s'appellent triangles équilatéraux* ».

« *Les triangles qui ont* _______________ *s'appellent triangles isocèles* »

- Dégager la relation qui existe entre les triangles isocèles et équilatéraux (le triangle équilatéral fait partie des triangles isocèles)

- Ajouter l'ensemble « Nous sommes des *triangles scalènes* » contenant trois différents triangles : obtusangle, acutangle et rectangle et l'ensemble « *Nous ne sommes pas des triangles scalènes* » contenant 4 triangles : 3 triangles isocèles (obtusangle, acutangle et rectangle) et 1 triangle équilatéral, ainsi que la phase de formulation à la suite de la recherche des régularités des triangles scalènes :

  « *Les triangles qui ont* _________________ *s'appellent triangles scalènes* ».

- Ajouter la phase de formulation à la suite de la recherche des régularités de la classe des triangles rectangles :

  « *Les triangles qui ont* _________________ *s'appellent triangles rectangles* ».

- Ajouter l'ensemble « Nous sommes des *triangles acutangles* » contenant trois différents triangles : scalène, isocèle et équilatéral et l'ensemble « Nous ne sommes pas des *triangles acutangles* » contenant 4 triangles : 2 triangles isocèles (obtusangle et rectangle) et 2 triangles scalènes (obtusangle et rectangle), ainsi que la phase de formulation à la suite de la recherche des régularités de la classe des triangles acutangles :

  « *Les triangles qui ont* _________________ *s'appellent triangles acutangles* ».

- Ajouter l'ensemble « Nous sommes des *triangles obtusangles* » contenant 2 différents triangles : scalène et isocèle et l'ensemble « Nous ne sommes pas des *triangles obtusangles* » contenant 4 triangles : 2 triangles isocèles (acutangle et rectangle), 1 triangle équilatéral et 2 triangles scalènes (acutangle et rectangle), ainsi que la phase de formulation à la suite de la recherche des régularités de la classe des triangles obtusangles :

  « *Les triangles qui ont* _________________ *s'appellent triangles obtusangles* ».

- <u>Le vocabulaire géométrique</u> utilisé n'est pas exact et nécessaire pour résoudre l'exercice : la définition de classe de triangles scalènes est erronée, car le triangle scalène peut être particulier (le triangle scalène rectangle). Modifier la définition pour la suivante : « *Les triangles qui ont tous les côtés différents s'appellent triangles scalènes* ».

<u>2^e groupe de critères (Critiques proposées)</u>

La phase de rappel ne donne pas un contexte plausible à un bon déroulement de l'activité à cause du choix des triangles :

- La première étape, « Nous sommes des *triangles équilatéraux* » fait ressortir la propriété d'avoir trois côtés congrus. L'ensemble « *Nous ne sommes pas des triangles équilatéraux* » contient trois triangles isocèles : rectangle, acutangle et obtusangle et un triangle scalène obtusangle. C'est acceptable, car il n'y a pas beaucoup d'espace pour représenter encore deux triangles scalènes : acutangle et rectangle.

- La deuxième étape, « Nous sommes des *triangles isocèles* », fait ressortir la propriété d'avoir deux côtés congrus (Parmi les triangles donnés à titre d'exemple, il y a un triangle équilatéral, deux triangles isocèles acutangles et un (n.3) triangle isocèle rectangle). <u>Proposition</u> : Supprimer 1 triangle isocèle acutangle et ajouter un triangle isocèle obtusangle.

- L'ensemble « Nous ne somme pas des *triangles isocèles* est présenté par des triangles scalènes : rectangle, 2 obtusangles et 1 acutangle qui a une différence de mesures des côtés ≈ 1-2 mm. <u>Proposition</u> : Préparer des bonnes représentations de trois triangles scalènes : rectangle, acutangle et obtusangle dont les angles aigus, obtus et droit sont visibles.

- L'ensemble « Nous sommes des *triangles rectangles* » fait ressortir la propriété d'avoir l'angle droit. (Les exemples donnés représentent seulement les triangles rectangles scalènes). <u>Propositions</u> : Ajouter un triangle isocèle rectangle.

- Le contre-exemple « *Nous ne sommes pas des triangles rectangles* » contient deux triangles équilatéraux, 1 triangle scalène obtusangle et 1 triangle isocèle obtusangle, dont l'angle obtus mesure 92°. <u>Proposition</u> :

Supprimer 1 triangle équilatéral et ajouter 1 triangle scalène acutangle et 1 triangle isocèle acutangle, dont les angles aigus et obtus sont visibles.

<u>**3e groupe de critères (Critiques proposées)**</u>

- Changer <u>l'ordre de consignes</u> (2⇒1).

    1. Analyser chaque triangle selon la caractéristique des côtés (congruence de 2 côtés, de 3 côtés ou les côtés de différentes longueurs) et déterminer son nom;
    2. Placer le triangle dans la région correspondante (le diagramme initial).

En suivant cet ordre, l'élève peut effectuer les procédures suivantes :

- Rechercher dans le diagramme les triangles ayant 1 angle droit (Les élèves s'aperçoivent que ces triangles appartiennent à des différentes régions);
- Encercler les triangles ayant l'angle droit;
- Nommer l'ensemble.

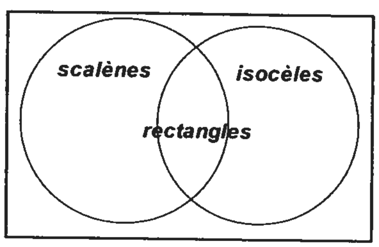
L'analyse de schémas modifiés proposés par les équipes a donné lieu encore une fois à la discussion sur le terme « quelconque » utilisé par 1/6 d'étudiants pour nommer l'ensemble de tous les triangles (1/3 d'étudiants à l'examen de la mi-session ont nommé cet ensemble « Triangles scalènes »).

Nous avons posé la question en classe : *Désigner dans ce diagramme l'ensemble de* « Triangles scalènes ». En analysant le schéma proposé, les étudiants ont éprouvé des difficultés à déterminer la place de cet ensemble. Les comportements observés dans les années précédentes se sont reproduits. Pour résoudre la situation, nous avons proposé de trouver la propriété commune de deux classes : triangles isocèles et triangles scalènes. Les étudiants ont répondu immédiatement que ces deux classes ne possèdent pas des éléments communs.

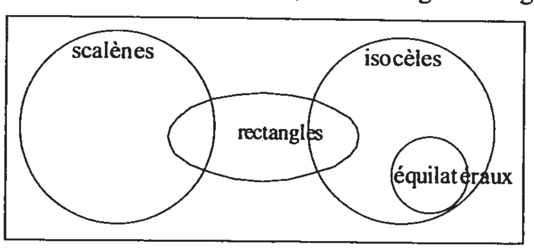
Question : *Pouvez-vous représenter graphiquement deux ensembles qui n'ont pas de relations?* (Les étudiants ont tracé deux cercles.)

Question : *Trouver la place pour l'ensemble « **triangles rectangles** » dans ce schéma.*

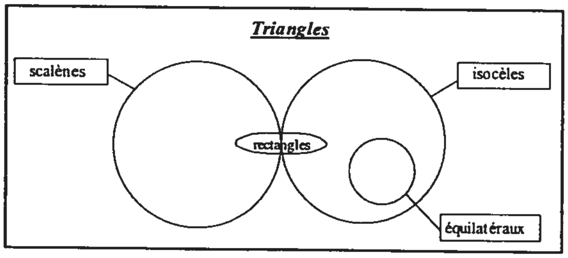
La première solution ressemblait au schéma de classification de « Lignes » (voir la section 5.2.1). Cette représentation a engendré la question sur l'existence du triangle qui est à la fois scalène et isocèle?



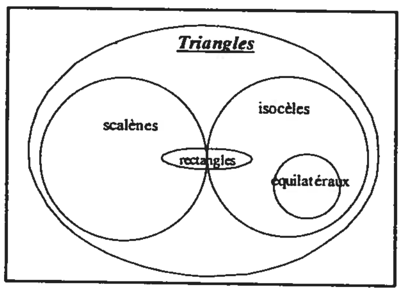
La deuxième modification a engendré aussi la question sur le contenu de la région centrale de l'ensemble « rectangle ». (Elle est vide, car le triangle rectangle, soit isocèle, soit scalène.)



Finalement, la solution a été trouvée. Ce diagramme représente les classes les plus travaillées au primaire.

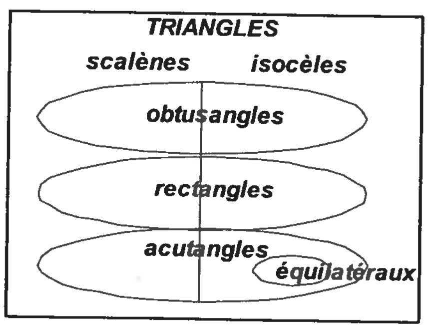


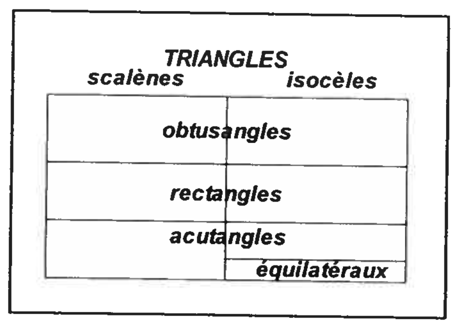
La dernière question a été lancée en groupe : « Pouvez-vous représenter l'ensemble qui contient tous les triangles? » Les étudiants ont immédiatement encerclé la dernière représentation.



Nous avons mis le point à l'intérieur de l'ensemble « triangles » et nous avons demandé de déterminer le nom de ce triangle. Une étudiante a répondu : « *C'est un triangle, qui n'est ni isocèle, ni scalène, ni rectangle. Il peut être acutangle ou obtusangle.* » Après cette réponse, nous avons décidé de lancer la discussion en équipes. Dans 2-3 min, les équipes ont été prêtes avec la réponse : Ce triangle n'existe pas.

L'une des équipes s'est interrogée sur l'utilité du diagramme de Venn comme moyen de la représentation de toutes les classes de triangles. Nous avons reposé cette question pour le travail à la maison. Les deux schémas présentés au cours suivant (qui ressemblent beaucoup le diagramme de Carroll) ont été considérés par les étudiants les meilleurs.





L'analyse des autres schémas effectuée en forme de discussion montre que les étudiants éprouvent encore des difficultés d'application des connaissances qu'ils possèdent. Cette discussion organisée à la suite de l'analyse de chaque schéma proposé a permis aux étudiants d'expliquer leurs difficultés et d'analyser l'utilité du diagramme de Venn pour la classification des triangles.

Nous avons posé également à toutes les équipes la question concernant les compétences visées par cette activité. Les étudiants ont conclu que les trois compétences peuvent être visées. Ils ont ajouté qu'en changeant l'ordre des étapes (ou en suppriment certaines questions) et en modifiant le schéma (ou en le supprimant) on peut créer la situation-problème. La discussion a permis de ressortir un fait assez intéressant : les étudiants, futurs enseignants, ne veulent pas prendre un risque en proposant la situation-problème, ils préfèrent « bien guider » les élèves vers la connaissance visée par la situation.

18.10 CONSTRUCTION DES TRIANGLES (CABRI-GÉOMÈTRE II)

Nous avons décidé d'introduire le logiciel Cabri Géomètre en tant que moyen de construction des figures géométriques et d'organisation des activités d'apprentissage. Ce travail a cherché à permettre aux étudiants d'une part, d'utiliser leurs connaissances dans un environnement différent de celui de papier-crayon et d'autre part, de consolider leurs connaissances. Nous croyons que les moyens informatiques peuvent en fait contribuer à l'apprentissage de la géométrie au niveau primaire si elles sont économiquement rentables, didactiquement efficaces et servent à l'enseignement de concepts. Plusieurs activités ont été explorées lors de deux cours, dont les trois portent sur la notion du triangle.

Savoirs géométrique visés :

- Déterminer le nom de la figure (à partir de l'observation)
- Appliquer les connaissances et les démarches acquises dans le contexte nouveau
- Tracer des figures à partir des données concrètes
- Concevoir un plan de résolution d'un problème

Étape 1. Rappel

Organisation : observation en classe
Temps alloué : 5 min

Question : *De quelle figure s'agit-il?*

Étape 2. Construction d'un triangle équilatéral

Organisation : travail individuel ou en paires

Temps alloué : 15 min

Consigne : Regardez votre liste de constructions du triangle équilatéral. En sachant les outils de Cabri, pouvez-vous inventer les nouvelles constructions? Effectuer la construction et décrire les procédures.

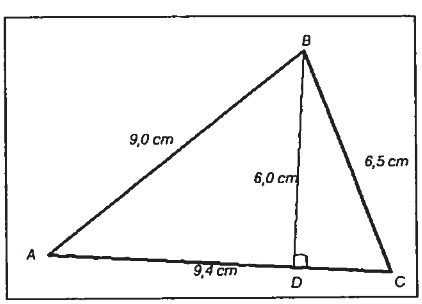
Étape 3. Résolution de problèmes.

Organisation : travail individuel ou en paires

Temps alloué : 3 min pour la construction d'un triangle et l'affichage des données, 5 min pour la recherche (celui qui ne terminera pas continuera la recherche dans le laboratoire après le cours).

Consigne 1 : Construire le triangle ABC, $|AB|$=9cm, $|BC|$=6.5cm, $|AC|$=9.4cm. De quels outils de Cabri avez-vous besoin pour la construction?

Consigne 2 : En sachant la mesure de la hauteur $|BD|$=6, pouvez-vous trouver les mesures de deux autres hauteurs sans les mesurer directement?



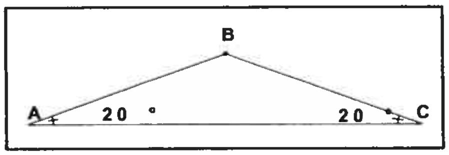
- *Déroulement*

<u>Étape 1. De quelle figure s'agit-il?</u>

Nous avons mis en jeu la reconnaissance d'une figure selon les propriétés visuelles (trois côtés, trois angles). Nous avons montré aux étudiants une figure ci-contre en demandant de quelle figure il s'agit.

En obtenant la réponse « *segment* », nous avons annoncé qu'il s'agit d'un triangle. Nous avons demandé la définition d'un triangle (*Polygone à trois côtés* (ou à trois angles)), nous avons montré les trois côtés : [AB], [BC] et [AC] et ensuite, les trois angles : ∠BAC, ∠BCA, ∠ABC en présentant en même temps les mesures cachées 0°, 0°, 180°.

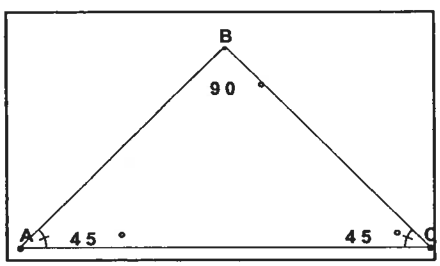
Nous allons tirer le point B et les étudiants vont observer le triangle ci-contre.



Nous avons demandé le nom de ce triangle et nous avons obtenu la réponse immédiate « triangle isocèle ». Car les mesures des angles ont été affichées, nous avons demandé de préciser le nom : triangle isocèle obtusangle.

En continuant de « tirer » le point B, nous avons reposé la question. Par ce procédé, nous voulions faire référence au modèle concret utilisé au début de l'ingénierie qui nous a permis de montrer une famille de triangles isocèles (voir l'activité 18-2).

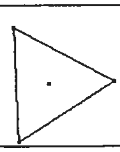
Ensuite, nous avons précisé de nouveau les limites de mesures des angles congrus du triangle isocèle obtusangle, rectangle et acutangle en nous nous arrêtant sur son cas particulier : triangle équilatéral.

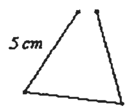
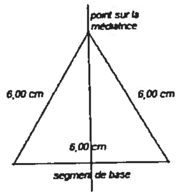
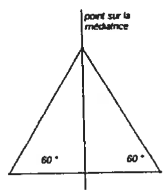


<u>Étape 2. Construction d'un triangle équilatéral</u>

Au début de cette étape, les étudiants ont essayé d'effectuer toutes les constructions de la liste. Ensuite, nous avons décrit au tableau, les procédures de constructions (en termes d'outils de Cabri) qui ne sont pas possibles dans un environnement papier-crayon.

Constructions proposées par des étudiants :

Dessin	Outils et procédures de construction
	1. Outil « POLYGONE RÉGULIER »

	2. Outil « REPORT DE MESURE » - SEGMENT - MESURE DU SEGMENT - REPORT DE MESURE (2fois) - Superposer les deux extrémités (tâtonnement)
	3. Outil « MÉDIATRICE » et affichage de mesures des côtés. - SEGMENT - MÉDIATRICE - POINT sur la médiatrice - SEGMENT (relier ce point avec les extrémités du segment) - DISTANCE ET LONGUEUR (afficher les mesures de segments) - Déplacer le point sur la médiatrice jusqu'à l'obtention de l'égalité des côtés
	4. Outil « MÉDIATRICE » et affichage de mesures des angles. - SEGMENT - MÉDIATRICE - POINT sur la médiatrice - SEGMENT (relier ce point avec les extrémités du segment) - MESURE D'ANGLE (afficher les mesures des angles) - Déplacer le point sur la médiatrice jusqu'à l'obtention de l'égalité des angles

La première démarche permet la construction rapide, la deuxième travaille les propriétés des côtés, la troisième et la quatrième constructions utilisent la méthode générale de construction d'un triangle isocèle, ce qui démontre bien l'inclusion du triangle équilatéral dans cette classe.

Nous avons obtenu encore deux constructions qui utilisent les propriétés des côtés et des angles du triangle équilatéral :

1. Construire un triangle en utilisant l'outil SEGMENT.
2. Afficher les mesures des côtés (ou des angles)
3. En bougeant chacun de sommets, essayer d'obtenir l'égalité de tous les côtés (ou de tous les angles).

Ce type de constructions exige beaucoup de temps d'essai ce qui le fait moins appréciable.

Nous avons fait le bilan, en nomment en termes d'outils de Cabri toutes les constructions effectuées.

<u>Étape 3 : Résolution de problèmes.</u>

Cette situation prévoit faire fonctionner plusieurs connaissances tant du logiciel que géométriques :

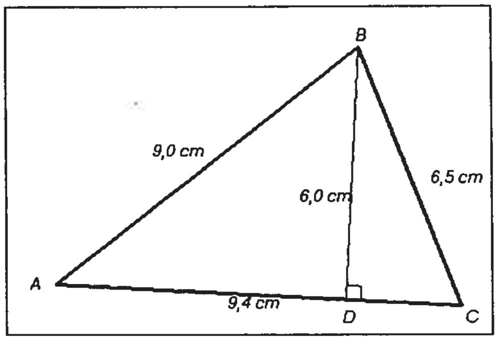
1. La construction du triangle en sachant les mesures de trois côtés,
2. La recherche d'aire du triangle
   a) en construisant le triangle par-dessus et en demandant la mesure d'aire (outils « Triangle », « Aire »)
   b) en construisant la hauteur et en utilisant la formule d'aire (outils « Droite perpendiculaire », « Segment » et « Distance et Longueur » (ou « Point sur deux objets » et « Distance et Longueur ») et « Calculatrice »)

Consigne 1 : *Construire le triangle ABC, $|AB|$=9cm, $|BC|$=6.5cm, $|AC|$=9.4cm. De quels outils de Cabri avez-vous besoin pour la construction?*

Les étudiants n'ont pas rencontré des difficultés particulières, car la construction du triangle selon les trois mesures de côtés a été évoquée lors du cours, elle présente dans les notes du cours et cette question a été posée à l'examen de la mi-session. Quant à l'outil « Report de mesure », nous l'avons déjà utilisé pour plusieurs constructions.

<u>Outils de Cabri employés :</u> Nombre (9.4), Point, Report de mesure, Segment, Nombre (9), Nombre (6.5), Report de mesure (9), Report de mesure (6.5), Cercle (A comme centre avec le rayon 9), Cercle (C comme centre avec le rayon 6.5). Le point de rencontre est le troisième sommet.

Consigne 2 : *En sachant la mesure de la hauteur $|BD|=6$, pouvez-vous trouver les mesures de deux autres hauteurs sans les mesurer directement?*



La question exige l'utilisation de la formule d'aire du triangle. Le problème semble être simple, mais d'un an à l'autre les étudiants éprouvent des difficultés en le résolvant. Ils voient que la hauteur divise le triangle en deux triangles rectangles et ils essayent d'utiliser la relation de Pythagore pour le calcul d'une autre hauteur.

Les résultats semblables se sont produits cette année. La vérification des notes des étudiants a montré qu'un pourcentage significatif des étudiants n'ont pas employé le procédé exigé. À la fin du compte, ce problème a été résolu, mais seulement parce que dans la recherche de toutes les propriétés inhérentes aux figures données, les étudiants « ont trébuché à travers » jusqu'à ce dont ils ont besoin pour résoudre le problème, autrement dit en essayant tout ce qu'ils pouvaient (et surtout le théorème de Pythagore). Cet exemple illustre les deux niveaux de pensée géométrique utilisée : prise des mesures des objets et emploi du raisonnement. Plusieurs autres problèmes qui développent la sélection des éléments nécessaires pour résoudre le problème sont proposés dans l'étude portant sur la notion de la mesure. (Voir, par exemple, la situation suivante).

18.11 L'ŒIL DE SPECTATEUR OU DE GÉOMÈTRE?

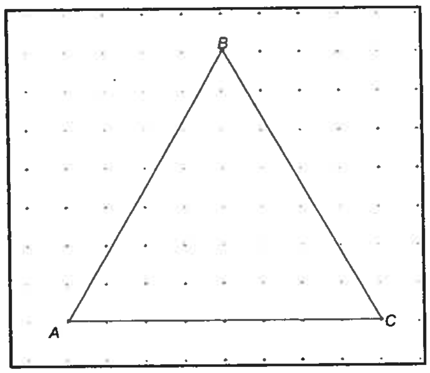
But : Déterminer la nature du triangle selon sa représentation graphique. Résoudre les problèmes géométriques : visualiser (déterminer, choisir) les éléments nécessaires à la résolution, employer les concepts correspondants
Organisation de travail : individuelle ou en paires.

Groupe 1 : Les étudiants reçoivent les feuilles avec le dessin

Groupe 2 : Les étudiants font l'observation sur l'écran.

Temps alloué : travail et discussion en groupe 10 min

Consigne : *Est-ce que le triangle ABC est équilatéral?*



- *Conduites anticipées*

Cette situation est reprise de la communication de Benoît Côté présentée au colloque du GDM en mai 1999 (voir la section 5.2.2.2). Côté propose ce problème dans les premiers cours de la formation pour amorcer la discussion de la nature des objets géométriques. De notre part, nous avons décidé de présenter ce problème vers la fin des apprentissages pour faire appel aux procédures acquises. Nous nous attendons à la reconnaissance d'un triangle selon la visualisation des propriétés nécessaires et selon le calcul des mesures. Nous l'avons modifié légèrement et nous avons proposé l'organisation différente dans les deux groupes d'étudiants.

<u>Nous anticipons les réponses suivantes</u> :

<u>1. Le triangle ABC est équilatéral</u>. (Il est trop probable, que les étudiants dans le groupe 1 commencent par mesurer les côtés à la règle et il est possible qu'ils arrivent au même résultat que chez Côté. Pourtant, nous espérons, quand même, d'obtenir les réponses correctes, car un grand travail sur la détermination d'une figure (triangle, quadrilatère et cercle) selon les propriétés visuelles ou décrites a été effectué lors du cours.

<u>2. Le triangle ABC est isocèle.</u> (Par Pythagore, les côtés AB et BC mesurent $\sqrt{65}$ et le côté AC mesure $\sqrt{64}$).

Dans le groupe 2, nous attendons plus de réponses correctes, car les étudiants sont privés d'effectuer la prise de mesures directe. Dans ce cas, nous nous intéressons aux procédures effectuées pour arriver à la solution. Cela peut être la construction identique de ce triangle et le calcul de mesures des côtés (ou comme dans le cas précédent, la prise de mesure à la règle). Cependant, nous prévoyons ainsi le tracé du triangle à la main et l'identification des mesures de la base et de la hauteur (ou simplement le calcul des mesures).

<u>3. Le triangle ABC est isocèle acutangle</u>. (La mesure du côté AB est plus grande que la mesure du côté AC).

- *Comportements observés*

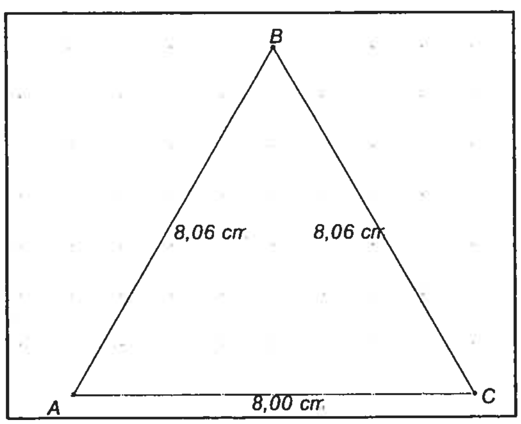
Groupe 1 :

45 étudiants sur 62 ont conclu que le triangle ABC est équilatéral. Et en tant que la preuve ils ont présenté les mesures des côtés prises à la règle. (La question sur les mesures des angles comme chez Côté (1999) n'a pas été soulevée). Ces étudiants référaient uniquement à l'aspect visuel du triangle représenté sur papier sans tenir compte de l'aspect visuel du papier quadrillé. Selon Côté, ce type de comportements justifie que «[...] *l'introduction de situations didactiques où la question du statut épistémologique des objets géométriques est explicitement posée, et où l'existence de ce saut épistémologique correspondant au passage de la figure en tant qu'objet matériel à la figure en tant qu'objet abstrait que l'on peut représenter (imparfaitement) par un dessin, est pris en compte de façon ouverte et délibérée. C'est justement ce que la reconstruction complète d'un système déductif permet de faire* ».

Groupe 2 :

Deux types de réponses ont été obtenus : équilatéral et isocèle. Pour savoir le taux approximatif de réponses correctes, nous avons demandé de lever les mains à ceux qui pensent que le triangle ABC est équilatéral. La moitié du groupe (approximativement) a levé les mains. L'autre moitié a utilisé le calcul par Pythagore. [2]

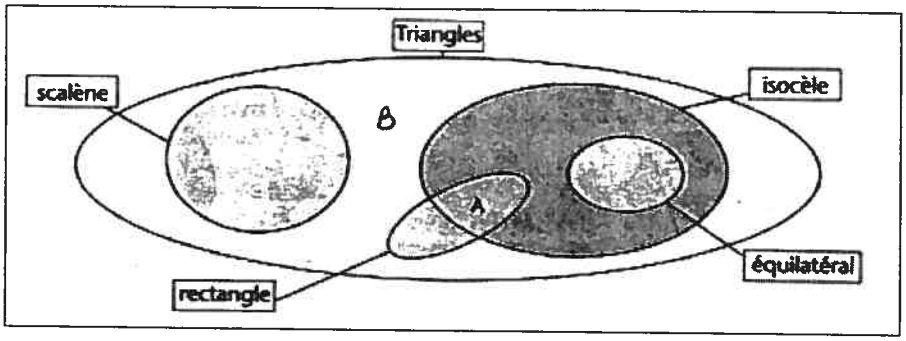
Pour amorcer la discussion sur la validité de la preuve obtenue par le procédé de mesure des côtés à la règle, nous avons fait appel aux situations portant sur la notion du cercle « *Suis-je un cercle?* » et sur les quadrilatères « *Sommes-nous des carrés*? ». Dans ces situations, pour arriver à la solution il fallait retrouver les preuves, parce que toutes les courbes ressemblaient aux cercles et tous les quadrilatères avaient l'apparence des carrés. (Les figures étaient construites avec logiciel Cabri-Géomètre II). Dans ces situations, le fait de mesurer à la règle ne permettait pas d'avoir la preuve, il fallait rechercher le centre et mesurer le rayon (pour le cercle) et analyser les propriétés marquées par des symboles pour les quadrilatères. Après la discussion en groupe sur les résultats obtenus, nous avons montré le dessin avec les mesures des côtés.



[2] Nous n'avons pas eu la possibilité de vérifier les procédures effectuées pour arriver à cette solution.

18.12 EXAMEN FINAL

Question : *Voici un extrait sur les triangles tiré d'un manuel scolaire.*



a. Déterminer les noms des triangles suivants :

A : ________________

B : ________________

b. Faites une critique didactique de cet extrait.

- *Conduites attendues*

Pour l'examen final, nous avons préparé la question concernant l'analyse de l'extrait du manuel scolaire *Bâtimath* 5 (Morency, R., Laberge, M.-F., Lafontaine, U., 1991, p.299) dans le but de vérifier l'application de savoirs géométriques et didactiques suivants : détermination du nom selon deux propriétés, classification des triangles et le problème que pose l'emploi du diagramme de Venn comme moyen de la représentation graphique de classification des figures. La question ressemble beaucoup à la question de l'examen de la mi-session, sauf que les ensembles de triangles scalènes et rectangles sont présents dans ce diagramme. Nous anticipons la réussite majore des étudiants dans la réalisation d'une tâche demandée.

Cependant, la question a) pour le cas du triangle B peut causer la difficulté particulière. Pour répondre que ce triangle n'existe pas, il faut analyser les représentations graphiques des classes et référer aux concepts appris. En analysant le schéma de classification, nous nous interrogeons aux représentants de classe « scalène » (Scalènes obtusangles et acutangles?) et de classe « rectangle » (Scalènes rectangles?). En effet, l'ensemble « rectangle » doit chevaucher les classes « scalènes » et « isocèles ».

- *Résultats obtenus*

Nous présentons les résultats obtenus dans les deux tableaux correspondant aux questions a et b.

Réponses	Taux de réussite
A : triangle isocèle rectangle	100 %
B : il n'existe pas	36 %

En analysant les autres réponses pour le triangle B, nous pouvons les diviser en trois groupes suivants : triangle, triangle quelconque, triangle autre qui n'est ni scalène ni isocèle, sans réponse.

Commentaires	Taux de présence du commentaire
Le diagramme utilise deux caractéristiques de classification des triangles : selon les côtés (scalène, isocèle, équilatéral) et selon les angles (rectangle)	97 %
L'ensemble des triangles scalènes rectangles doit chevaucher les ensembles scalènes et isocèles	82.3 %
La région où se trouve le triangle B est vide (car il n'existe aucune autre classe de triangles à part des *scalènes* et *isocèles*.	79 %
La classe des triangles équilatéraux se trouve à l'intérieur de l'ensemble des triangles isocèles	Ne sont pas nombreux, car après le travail effectué en classe, les étudiants considèrent cette relation évidente

Nous voulons souligner le fait intéressant : parmi 79 % des étudiants ayant répondu que le grand ensemble (où se trouve le triangle B) est une région vide, car il n'existe aucune autre classe de triangles, seulement la moitié des étudiants à la question : « *Déterminer le nom du triangle B* » répond qu'il n'existe pas.

19. INGÉNIERIE DU QUADRILATÈRE

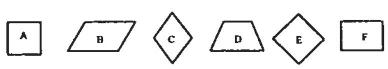
19.1 TEST D'ENTRÉE

- *Résultats obtenus et effets observés :*

Le test d'entrée avait une valeur diagnostique ayant pour but l'appréciation par les étudiants de l'état de leurs connaissances géométriques avant la formation. Trois premières questions (parmi 7) portent sur les notions du quadrilatère et du triangle. La deuxième et la troisième questions contiennent des sous-questions (voir l'annexe 10).

Nous présentons les réponses obtenues en les associant au niveau de la pensée géométrique dans le tableau suivant (Tableau XXXIV) :

Tableau XXXIV. Résultats obtenus au test d'entrée (Annexe 19.1)

<table>
<tr><th>Questions</th><th>Savoirs évalués</th><th>Niveaux</th><th>Taux de réussite</th></tr>
<tr><td><u>Question 1</u>. Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères selon le tableau ci-dessous :

<table><tr><th>Quadrilatères</th><th>Réponses</th></tr><tr><td>Carré</td><td></td></tr><tr><td>Losange</td><td></td></tr><tr><td>Rectangle</td><td></td></tr><tr><td>Parallélogramme</td><td></td></tr><tr><td>Trapèze</td><td></td></tr></table></td><td>- Reconnaître la figure plane dans sa représentation habituelle et dans la position inhabituelle (registre figural)
- Reconnaître la figure dans sa représentation inhabituelle (concepts, registre figural/discursif)</td><td>niveau 1
- A, B, C, D, F

- E

niveau 3</td><td>100 %

97 %

30-60 % selon la figure (et 3 % pour la classe de trapèzes)</td></tr>
<tr><td><u>Question 2</u> : Qui suis-je?
a) Je suis un quadrilatère ayant 4 angles droits.</td><td rowspan="2">- Déterminer (visualiser ou évoquer) le nom d'une figure (ou des figures) selon les propriétés décrites (descriptions habituelles) (registre discursif/figural)</td><td>niveau 2
- rectangle
- carré
niveau 3 (2figures)</td><td>56 %
28 %
16 %</td></tr>
<tr><td>b) Je suis un quadrilatère ayant les diagonales se coupant perpendiculairement en leur milieu.</td><td>niveau 2
- losange
- carré
niveau 3 (2 figures)</td><td>75 %
9 %
2 %</td></tr>
<tr><td><u>Question 3</u> : Comment appelle-t-on?
a) Quadrilatère dont les côtés sont parallèles deux à deux s'appelle_______________</td><td rowspan="2">- Connaître les définitions habituelles (caractéristiques) (registre discursif)</td><td>niveau 3
(parallélogramme)</td><td>97 %</td></tr>
<tr><td>b) Quadrilatère dont les côtés sont congrus s'appelle
_______________</td><td>niveau 2
- losange et carré
-carré
niveau 3 (losange)</td><td>6 %
87 %
6 %</td></tr>
</table>

Les résultats à la question 1 indiquent qu'il y a un grand écart entre l'aptitude perceptive et conceptuelle dans la reconnaissance des figures. Seulement 3 étudiants parmi 109 incluent les quadrilatères proposés dans la classe de trapèzes et peuvent être considérés atteints le niveau 3 selon le modèle de van Hiele.

Voici la répartition de réponses de 109 étudiants participés au test d'entrée.

Quadrilatères	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Carré	109				106	
Losange	46		107		66	
Rectangle	49				32	109
Parallélogramme	40	109	75	6	53	36
Trapèze	3	3	3	109	3	3

Ces réponses montrent le niveau conceptuel insuffisant pour accomplir la tâche demandée. Nous pouvons conclure que la présentation graphique de quadrilatères ne fait pas appel aux définitions de quadrilatères et à la recherche de propriétés communes de classes.

Les réponses à la question 2 montrent qu'une partie considérable des étudiants (84 %) ne fait pas la distinction entre la « description » et la « définition » (14 % donnent les réponses non appropriées et 3 % des étudiants ne répondent pas). La reconnaissance du losange dans l'énoncé b) (75 %) renvoie à une représentation graphique du losange employée par les manuels (représentation verticale avec deux « *diagonales se coupant perpendiculairement en leur milieu* ») ce qui rend cette propriété « visuellement marquante » et c'est pour cela que certains manuels scolaires l'incluent dans la définition du losange. Cependant, bien que le fait d'« *avoir 4 angles droits* » soit une propriété visuelle marquante des rectangles, cela n'a pas permis à 28 % des étudiants de répondre à cette question.

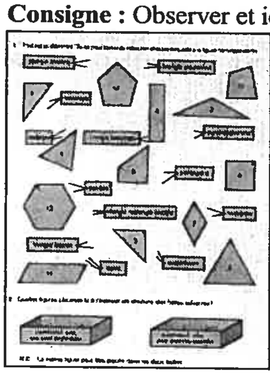
Le taux de réussite à la question 3b) indique que les étudiants ne se rappellent pas de la définition du losange (87 % des étudiants ont répondu « carré »). Les difficultés de reconnaissance des figures dans leurs représentations graphiques et selon la description de leurs propriétés dépendent des expériences individuelles (Talyzina, 1978), du niveau conceptuel que les étudiants ont de ces figures et aussi fait l'objet d'influences culturelles (manuels, guides, etc.).

19.2 CONSTRUCTION DU CARRÉ, RECHERCHE DES PROPRIÉTÉS

Savoirs géométriques visés :
- Identifier les quadrilatères selon les représentations graphiques
- Connaître les définitions caractéristiques
- Distinguer description de la définition
- Trouver un contre-exemple
- Développer la démarche de construction (Emploi de différentes propriétés pour la construction du carré. Description de procédures de la construction. Employer le langage précis dans la description des procédures de construction)
- Développer le raisonnement (déterminer les conséquences logiques de certaines données, déterminer le nombre minimal d'informations permettant la construction)

Savoirs didactiques : Évocation d'une démarche d'observation (recherche d'une propriété commune, classification)

Étape 1. Rappel
Organisation : en groupe classe. (À l'aide de rétroprojecteur, nous proposons l'extrait du manuel scolaire de *Mathématique 6*, p.88 pour identifier et décrire les quadrilatères. Voir l'annexe 13.1)
Temps alloué : 5-7 min
Question 1 : *Quelle démarche avons-nous utilisée pour dégager la classe de polygones? de quadrilatères?*
Consigne : Observer et identifier les figures planes. Identifier et décrire les quadrilatères.



Question 2 : *Quel quadrilatère pensez-vous mieux connaître ? Comment pouvons-nous le définir ? Pouvez-vous le définir autrement ?*

Étape 2. Construction (Annexe 14, Fiche 5)

Consigne : Effectuer deux constructions différentes d'un carré, décrire les procédures de construction et les propriétés qui sont en jeu. (Voir l'analyse préalable dans la section 5.2.3.1 et la liste de construction dans la section 4.2.3.2)
Matériel : la règle graduée, le compas, l'équerre.
Organisation : travail individuel et en équipe de 4-6. **Présentation :** Deux représentants d'équipe viennent au tableau, un décrit les procédures utilisées pour la construction et l'autre - effectue la construction (une autre équipe joue le rôle de vérificateurs)
Temps alloué : 15 min pour les constructions, 15 min pour les présentations

Étape 3 : Nombre minimal de propriétés nécessaires pour la construction

Question : *Quel est le nombre minimal d'informations dont vous avez besoin pour construire le carré superposable à un carré caché ?* (Effectuer la construction, décrire les procédures de construction)
Organisation : recherche en équipe de 4-6; présentation : professeur et groupe
Temps alloué : 5 min pour la construction, 5-7 min pour les présentations

- *Déroulement*

Étape 1. Rappel

Nous avons organisé la phase de rappel de propriétés en forme de discussion. Nous avons référé aux activités de cours précédents et nous avons proposé aux étudiants d'évoquer la démarche d'observation et de distinction de propriétés utilisée pour dégager la classe de polygones, de polygones à quatre côtés (quadrilatères), leurs noms (carré, trapèze, rectangle, losange, parallélogramme, etc.) et les propriétés particulières (congruence, parallélisme et perpendicularité de côtés).

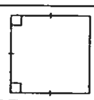
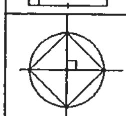
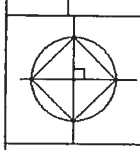
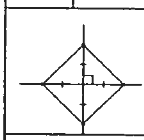
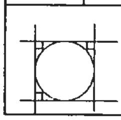
Pour faire le lien à l'activité de construction du carré, nous avons demandé de nommer le quadrilatère particulier qu'ils pensent mieux connaître en attendant que la majorité va répondre : « carré ». (Même si les étudiants auront répondu différemment, nous aurons repris le cas du carré à partir duquel nous visons à ressortir les propriétés de quadrilatères particuliers). Nous avons demandé la définition du carré et, ensuite de définir le carré autrement.

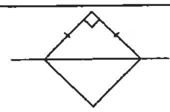
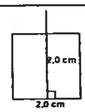
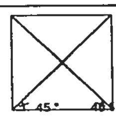
Les définitions les plus connues sont les définitions du carré et du parallélogramme. La propriété de l' «inégalité » de côtés intervient dans la définition du rectangle, de « perpendicularité de diagonales » se retrouve dans la définition du losange.

Tel qu'était prévu, à la demande de donner les autres définitions du carré, les étudiants ont commencé à dénombrer ses propriétés, ce qui a amorcé la discussion sur le sujet « définition d'une figure ou présence d'une propriété chez une figure ». Par exemple, à la réponse des étudiants « *Polygone régulier* », nous avons précisé : « À combien de côtés? »; ou à la réponse des étudiants : « *2 paires des côtés parallèles* », nous avons demandé : « Est-ce la définition du carré? Peut-on définir le carré en décrivant seulement cette propriété? Par exemple, « *Quadrilatère ayant 2 paires de côtés parallèles s'appelle carré* » est une définition correcte? Est-ce que cette propriété est suffisante pour définir le carré? De cette manière, nous avons amené les étudiants à l'analyse de la suffisance de propriétés pour définir une figure géométrique (ou une classe de figures).

Étape 2. Construction

22 équipes ont participé à l'activité. Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les constructions en indiquant le nombre d'équipes effectuant la construction décrite.

N	**CONSTRUCTIONS**	**Nombre d'équipes**
	1. Segment (règle); segment ⊥ et ≅ issu de l'une des extrémités du segment; répéter; relier les extrémités	Faite en classe (pour éviter son apparition)
	3b. Cercle (compas); diamètre (règle); diamètre perpendiculaire (coin de la règle); tracer le contour du carré (les sommets sont les points d'intersection de deux diamètres et du cercle).	3
	3c. Deux droites ⊥; du point d'intersection pris pour le centre tracer le cercle; relier les points d'intersection du cercle avec les deux droites.	9
	4. Deux droites ⊥; reporter les mêmes mesures d'un point d'intersection d'un carré, relier les 4 points obtenus (ils sont des sommets).	1
	5. Cercle (compas); droite tangente; droite tangente ⊥ à cette tangente; répéter 2 fois (construction approximative).	2

	6. Tracer le triangle isocèle rectangle; faire la symétrie de ce triangle par rapport à l'hypoténuse (ou faire les trois symétries consécutives par rapport à un côté)	1
	Segment; médiatrice de ce segment; reporter la mesure de ce segment sur la médiatrice. Tracer le segment // au premier segment (ou ⊥ à la médiatrice) et ayant la même médiatrice. Relier les extrémités des segments	1
	Segment; reporter l'angle de 45° de deux extrémités du segment (le point d'intersection est le centre du carré). Reporter les mesures des côtés du triangle obtenu sur les prolongements des côtés (ce sont les diagonales du carré). Tracer le contour du carré en reliant les points.	1
	Placer ensemble deux équerres (isocèles), tracer le contour (construction primitive)	3

Les trois dernières constructions ne faisaient pas partie de nos anticipations. Les étudiants se sentaient assez à l'aise dans les constructions, les descriptions et la recherche du nombre minimal de propriétés permettant la construction. Nous pouvons dire que presque tout le déroulement de l'activité était sous la responsabilité des étudiants. Les étudiants connaissaient déjà la démarche à suivre et comprenaient le défi de chaque étape.

Étape 3. Nombre minimal de propriétés nécessaires pour la construction

En ce qui concerne le nombre minimal de données pour effectuer la construction du carré superposable, la réussite de cette partie de l'activité était supérieure par rapport à l'année précédente (2001). La consigne demandait trois différentes réponses. Parmi 22 équipes ayant participé à l'activité, 3 équipes ont proposé 3 différentes constructions, 9 équipes – 2 constructions, 6 ont présenté seulement 1 construction et 3 équipes n'ont présenté aucune. 4 équipes n'ont pas répondu à la question et ont présenté la même construction qu'au début de l'activité. Voici le tableau représentant les propriétés utilisées pour la construction :

Propriété	**Nombre d'équipes proposées la construction**
1. Côté	16
2. Diagonale	11 (4)
3. Aire	2
4. Périmètre	1
5. Rayon du cercle inscrit	1
6. Rayon du cercle circonscrit	1
11. Diamètre du cercle circonscrit	1

La discussion organisée après l'activité a permis de ressortir la difficulté de certains étudiants de faire le choix d'une seule propriété avec laquelle la construction est possible. Ceux-ci voulaient être sûrs de réussir la construction d'un carré identique au carré caché. Les questions *« Les carrés, peuvent-ils avoir des angles autres que des angles droits? »* et *« Si on connaît 3 côtés d'un carré, peut-on effectuer sa construction? Deux côtés? »* ont fait le « déclic ». Certains étudiants ont proposé de commencer la recherche du nombre minimale par « 1 ». Si cela ne suffit pas, essayer avec le « 2 », etc.

19.3 VISUALISATION DES QUADRILATÈRES. COMPOSITION DES DÉFINITIONS

Savoirs géométriques :
- Utiliser le langage précis dans la description
- Visualiser la variété de figures répondant aux caractéristiques nommées
- Déterminer le nom d'une figure selon les propriétés décrites
- Trouver un contre-exemple
- Distinguer la description de la définition, appartenir/définir
- Concevoir les définitions constructives et conceptuo-lexicales

Savoirs didactiques :
- Emploi d'un outil (modèle physique) de représentation des quadrilatères

Étape 1. Description et visualisation des propriétés

Consigne 1 : Tracer le tableau à double entrée contenant trois colonnes. Dans la première colonne, décrire les propriétés retrouvées par vous dans l'activité précédente. Dans la deuxième colonne, déterminer le nom du quadrilatère défini par chaque propriété transcrite.
Organisation : travail en équipe de 4-6 étudiants

Temps alloué : 10 min

Présentation : professeur et groupe (Chaque équipe, selon l'ordre, annonce 1 propriété à la fois. L'équipe qui énoncera la dernière propriété sera la gagnante. À la suite de la description de deux premières propriétés, le professeur questionne au sujet de sa définition d'une classe particulière de quadrilatères.)
Temps alloué : 15 min pour la description des propriétés au tableau

Consigne 2 : Nous voulons utiliser les modèles physiques de représentation des quadrilatères (jeu créatif de construction tridimensionnelle). Comment ce modèle peut-il favoriser le travail sur les représentations et sur la détermination des quadrilatères selon les propriétés annoncées (voir la figure 13 dans la section 5.2.2.1)

Étape 3. Conception des nouvelles définitions

Consigne : Si nous voulons définir le carré, quelle propriété faut-il ajouter à celle transcrite dans la première colonne? Déterminer et décrire cette propriété dans la troisième colonne.

Organisation : travail en équipe de 4-6 étudiants

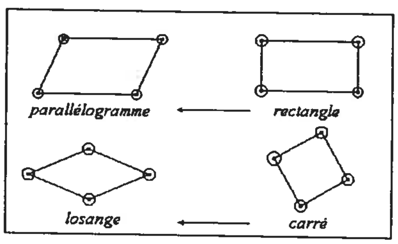
Temps alloué : 7-10 min pour la détermination, 15 min pour la présentation et la validation (recherche de contre-exemples)
Question : Comment les manuels scolaires ont-ils fait le choix de définitions? Selon quels critères?

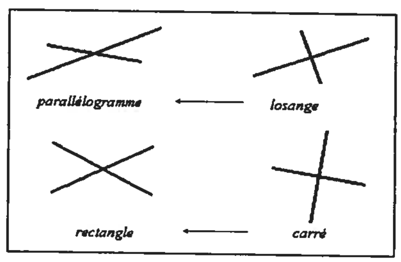
- *Déroulement*

Cette activité cherche à renforcer la réflexion de l'étudiant sur la représentation mentale de chaque quadrilatère à partir de la description de ses différentes propriétés.

À la première étape de cette situation, la dévolution du problème aux étudiants a mal fonctionné. Les étudiants n'ont pas cherché à investir tous les moyens dont ils disposaient (la majorité des équipes a décrit les propriétés essentielles du carré), et les finalités de cette étape ont été remplies artificiellement de façon à atteindre le niveau suffisant pour l'étape suivante. Nous avons décrit au tableau la liste de propriétés trouvées par toutes les équipes (une équipe a fait une véritable recherche) et nous avons proposé de continuer la recherche à la maison.

À l'étape 2, pour la première propriété, à titre d'exemple, nous avons effectué la recherche de combinaisons ensemble. En composant les définitions du carré, les étudiants ont eu des difficultés dans le choix de propriétés nécessaires et suffisantes pour la définition. (Plusieurs propositions ont été redondantes). L'activité (19.4) est conçue pour surmonter ces difficultés. Pour la meilleure visualisation, nous proposons aux futurs maîtres d'utiliser le jeu créatif de construction tridimensionnelle pour créer les modèles physiques de représentation des quadrilatères qui travaillent les propriétés des côtés et des angles et ceux qui permettent de visualiser les propriétés de diagonales. (Voir la section 5.2.2.1)





Comme résultat de ce travail, les étudiants ont conçu 16 nouvelles définitions. L'analyse de combinaisons possibles a permis de déterminer que les propriétés : « 2 paires de côtés // », « angles opposés congrus » sont des propriétés redondantes dans les définitions de classes des rectangles, des losanges et des carrés.

Dans le tableau ci-dessous (XXXV), nous décrivons les combinaisons possibles :

Tableau XXXV. Tableau de propriétés du carré (Annexe 19.3)

N	Propriétés du carré	Quadrilatère particulier défini par la propriété	Propriété(s) qu'il faut ajouter pour définir le carré
1	4 côtés congrus	Losange	4 angles droits (2)
			diagonales sont congrues (5)
			Médiatrices sont des axes de symétrie (9)
			Peut être inscrit dans un cercle (14)
2	4 angles droits	Rectangle	4 côtés congrus (1)
			diagonales sont perpendiculaires (6)
			diagonales sont des bissectrices (7)
			diagonales sont des axes de symétrie (8)

3	2 paires de côtés //	Parallélogramme	diagonales sont congrues (5) et sont perpendiculaires (6) diagonales sont congrues (5) et peut être circonscrit à un cercle (15) sont perpendiculaires (6) et peut être inscrit dans un cercle (14)
4	diagonales se coupent en leur milieu	Parallélogramme	diagonales sont congrues (5) et sont perpendiculaires (6) diagonales sont congrues (5) et peut être circonscrit à un cercle (15) sont perpendiculaires (6) et peut être inscrit dans un cercle (14)
5	diagonales sont congrues	Aucun	4 côtés congrus (1) diagonales sont perpendiculaires (6) et se coupent en leur milieu (4) diagonales sont des bissectrices (7) diagonales sont des axes de symétrie (8) Périmètre = 4c (13) peut être circonscrit à un cercle (15)
6	diagonales sont perpendiculaires	Aucun	4 angles droits (2) diagonales se coupant en leur milieu (4) et pouvant être inscrit dans un cercle (14) médiatrices sont des axes de symétrie (9)
7	diagonales sont des bissectrices des angles	Losange	4 angles droits (2) diagonales sont congrues (5) médiatrices sont des axes de symétrie (9) peut être inscrit dans un cercle (14)
8	diagonales sont des axes de symétrie	Losange	4 angles droits (2) diagonales sont congrues (5) médiatrices sont des axes de symétrie (9) peut être inscrit dans un cercle (14)
9	médiatrices sont des axes de symétrie	Rectangle	4 côtés congrus (1) diagonales sont perpendiculaires (6) diagonales sont des bissectrices des angles (7) diagonales sont des axes de symétrie (8) Périmètre = 4c (13) peut être circonscrit à un cercle (15)
10	4 axes de symétrie	Carré	
11	Aire = c^2	Carré	
12	Somme des angles intérieurs = 360°	Aucun	*rend redondante toute définition*
13	Périmètre = 4c	Losange	4 angles droits (2) diagonales sont congrues (5) médiatrices sont des axes de symétrie (9) peut être inscrit dans un cercle (14)

14	peut être inscrit dans un cercle	Aucun	4 côtés congrus (1) diagonales se coupent en leur milieu (4) et sont perpendiculaires 6 diagonales sont des bissectrices (7) diagonales sont des axes de symétrie (8) Périmètre = 4c (13)
15	peut être circonscrit à un cercle	Aucun	4 angles droits (2) diagonales se coupent en leur milieu (4) et sont congrues (5) médiatrices sont des axes de symétrie (9)
16	Se divise par une de ses diagonales en 2 triangles isocèles rectangles	Carré	
17	Se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles rectangles	Carré	
18	Se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles congrus	Carré	
19	quadrilatère régulier	Carré	
20	polygone régulier à 4 côtés	Carré	

Selon les propriétés décrites, lors de trois années consécutives, les étudiants ont composé 39 définitions.

1. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus (1) et 4 angles droits (2)
2. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus (1) et des diagonales congrues (5)
3. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus (1) et des médiatrices qui sont des axes de symétrie (9)
4. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus (1) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
5. Quadrilatère ayant 4 angles droits (2) et des diagonales perpendiculaires (6)
6. Quadrilatère ayant 4 angles droits (2) et des diagonales qui sont des bissectrices des angles (7)
7. Quadrilatère ayant 4 angles droits (2) et des diagonales qui sont des axes de symétrie (8)
8. Quadrilatère ayant 4 angles droits (2) dont le périmètre est égal à la mesure de son côté prise 4 fois (13)
9. Quadrilatère ayant 4 angles droits (2) et pouvant être circonscrit à un cercle (15)
10. Quadrilatère ayant 2 paires de côtés // (3) et des diagonales congrues (5) et perpendiculaires (6)
11. Quadrilatère ayant 2 paires de côtés // (3), des diagonales congrues (5) et pouvant être circonscrit à un cercle (15)
12. Quadrilatère ayant 2 paires de côtés // (3), des diagonales perpendiculaires (6) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
13. Quadrilatère dont des diagonales se coupent en leur milieu (4), sont congrues (5) et perpendiculaires (6)
14. Quadrilatère dont des diagonales se coupent en leur milieu (4), sont congrues (5) et pouvant être circonscrit à un cercle (15)
15. Quadrilatère dont des diagonales se coupent en leur milieu (4), sont perpendiculaires (6) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
16. Quadrilatère dont des diagonales sont congrues (5) et sont des bissectrices des angles (7)
17. Quadrilatère dont des diagonales sont congrues (5) et sont des axes de symétrie (8)
18. Quadrilatère dont des diagonales sont congrues (5) et le périmètre est égal à la mesure de son côté prise 4 fois (13)

19. Quadrilatère ayant des diagonales congrues (5) et pouvant être circonscrit à un cercle (15)
20. Quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires (6) et des médiatrices qui sont des axes de symétrie (9)
21. Quadrilatère dont des diagonales sont des bissectrices des angles (7) et dont des médiatrices sont des axes de symétrie (9)
22. Quadrilatère dont des diagonales sont des bissectrices des angles (7) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
23. Quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétrie (8) et les médiatrices sont des axes de symétrie (9)
24. Quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétrie (8) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
25. Quadrilatère dont les médiatrices sont des axes de symétrie (9) et le périmètre est égal à la mesure de son côté prise 4 fois (13)
26. Quadrilatère dont les médiatrices sont des axes de symétrie (9) et pouvant être circonscrit à un cercle (15)
27. Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie (10)
28. Quadrilatère dont l'aire est égale à la mesure de son côté au carré (11)
29. Quadrilatère dont le périmètre est égal à la mesure de son côté prise 4 fois (13) et pouvant être inscrit dans un cercle (14)
30. Quadrilatère qui se divise par une de ses diagonales en 2 triangles isocèles rectangles (16)
31. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles rectangles (17)
32. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles congrus (18)

Nous avons fait le retour à la composition de définitions après l'étude de transformations géométriques et nous avons ajouté à notre liste les nouvelles définitions.

33. Quadrilatère régulier (19)
34. Polygone régulier à quatre côtés (20)
35. Quadrilatère invariant par rotation à 90° autour de son centre.
36. Quadrilatère qu'on obtient par les 3 rotations consécutives d'un triangle isocèle rectangle autour du sommet d'un angle droit.
37. Quadrilatère qu'on obtient par la translation d'un de ses côtés. La longueur de la flèche de translation est égale à la longueur de ce côté et perpendiculaire à ce côté.
38. Quadrilatère qu'on obtient par la suite de 3 symétries axiales d'un triangle isocèle rectangle (l'axe de symétrie est le côté du triangle)
39. Quadrilatère qu'on obtient par la symétrie axiale d'un triangle isocèle rectangle (l'axe de symétrie est l'hypoténuse du triangle).

La capacité de composer les définitions et de visualiser la figure selon les propriétés décrites dépend du niveau des aptitudes visuelles, du raisonnement et de l'expérience géométrique de l'étudiant. Pour déterminer la figure, tout d'abord, il faut avoir la représentation mentale de chaque propriété et des figures ayant cette propriété.

À la fin de cette activité, nous avons organisé la discussion sur le choix de définitions habituelles. Nous voulions provoquer la réflexion sur les propriétés visuelles marquantes et amorcer la discussion sur les définitions constructives. (Par exemple : « *Laquelle parmi ces* 16 (nombre de définitions retrouvées par les étudiants qui peut être différent selon le groupe) *définitions du carré, vous semble la meilleure*? » « *Pourquoi dans chaque manuel scolaire (ou presque) retrouve-t-on cette définition*? » *Si je vous dis « Déterminer le quadrilatère ayant des diagonales congrues qui sont des axes de symétrie », quelle sera votre réponse? Sans consulter notre tableau, pouvez-vous répondre à cette question de façon immédiate? Cependant, si nous demandons le nom du quadrilatère ayant 4 côtés congrus et 4 angles droits, vous me répondez immédiatement. Pourquoi?* », etc.

Les étudiants ont conclu que ces propriétés nous donnent « *une bonne image de ce qu'est un carré* ».

Ensuite, nous avons analysé les définitions des autres quadrilatères particuliers. Deux aspects ont été abordés : la définition du rectangle « *4 angles droits et deux paires de côtés de longueur différente* » et la définition du losange « *4 côtés congrus et les diagonales se coupent à angle droit en leur milieu* », retrouvées dans les manuels scolaires. Donc, la relation carré/rectangle et la question de la suffisance (et de la redondance) de propriétés pour définir la classe ont été soulevées. Cette étape a servi aussi à la recherche des contre-exemples.

19.4 ANALYSE DES PROPRIÉTÉS DES QUADRILATÈRES

Savoirs géométriques visés :
- Décrire les caractéristiques des côtés, des angles et des diagonales des quadrilatères
- Déterminer le quadrilatère déterminé par la propriété donnée
- Trouver un contre-exemple
- Distinguer la description de la définition, appartenir/définir
- Concevoir les définitions constructives
- Analyser l'exactitude du langage utilisé dans l'énoncé, la définition, etc.
- Justifier la réponse, l'énoncé, etc.
- Déterminer les conséquences logiques de certaines données

Savoirs didactiques visés :
- Expliquer l'importance du vocabulaire précis pour la construction des concepts géométriques
- Connaître le phénomène *figure/concept*
- Déterminer le but de l'activité
- Modifier l'activité selon le but visé

Étape 1. Description et analyse des propriétés

Organisation : professeur et groupe

Temps alloué : 10 -15 min

Consigne : *Décrire les propriétés particulières des côtés, des angles et des diagonales de parallélogrammes, de rectangles, de losanges et de carrés dans le tableau suivant. Encercler les propriétés qui déterminent la classe correspondante.* (Voir le schéma dans la section 4.2.3.1)

Propriétés	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
1. Côtés				
2. Angles				
3. Diagonales				

Étape 2. Application des connaissances pour l'analyse des extraits

Consigne : *Analyser les définitions, les termes, les représentations de point de vue mathématique (sont-ils précis) et de point de vue du développement conceptuel de l'élève (sont-ils pertinents)?* (Voir l'annexe 13.2 et l'analyse dans la section 4.4.2)

Organisation : Devoir. Vérification en forme de discussion au prochain cours (professeur et groupe)

Temps alloué : travail en classe 10 min

- *Déroulement*

Étape 1. Analyse des propriétés

Cette activité est la suite logique de l'activité précédente qui vise à consolider la connaissance des propriétés de quadrilatères particuliers. Elle cherche à préciser la description des caractéristiques de propriétés des quadrilatères particuliers : côtés (congrus, parallèles), angles (droits, opposés congrus) et diagonales (se coupent en leur milieu, congrues, perpendiculaires) et à favoriser le questionnement sur l'association d'une propriété donnée à chacune des classes et sur la détermination du quadrilatère défini par chacune de ses caractéristiques.

À l'étape 1, chaque propriété décrite dans le tableau était analysée selon sa définition d'une classe particulière de quadrilatères. Par exemple, « La classe de parallélogrammes, possède-t-elle *2 paires de côtés //*? – Oui. » « Définit-elle la classe de parallélogrammes? – Oui. » Nous avons demandé à l'un des étudiants de continuer à haute voix l'analyse de cette propriété selon l'appartenance et selon la définition pour la classe de rectangles, etc. Les propriétés qui définissent la classe en question doivent être encerclées (elles sont en gras dans le tableau de présentation).

Propriétés	Parallélogramme	Rectangle	Losange	Carré
1. Côtés				
- parallèles (2 à 2)	✓	✓	✓	✓
- congrus (tous)	-	-	✓	✓
- côtés opposés congrus	✓	✓	✓	✓
2. Angles				
- congrus (tous)	-	✓	-	✓
- angles opposés congrus	✓	✓	✓	✓
3. Diagonales				
- se coupent en leur milieu	✓	✓	✓	✓
- perpendiculaires	✓	✓	✓	✓
- congrues	✓	✓	✓	✓

Après avoir rempli le tableau, nous avons questionné les étudiants sur les noms des quadrilatères définis par une seule propriété, par deux propriétés, par trois. Pour vérifier l'emploi d'une méthode introduite (outil concret) et pour pouvoir travailler la visualisation de différentes positions possibles de deux diagonales, nous avons posé quelques questions en demandant de représenter la propriété décrite et de déterminer le nom du quadrilatère :

- Quel quadrilatère est défini par
  - deux diagonales qui se coupent en leur milieu?
  - deux diagonales congrues?
  - deux diagonales congrues qui se coupent en leur milieu?
  - deux diagonales qui se coupent à angle droit?
  - deux diagonales qui se coupent en leur milieu à angle droit?
  - deux diagonales congrues qui se coupent à angle droit?
  - deux diagonales congrues qui se coupent en leur milieu à angle droit?

D'un côté, ces différentes combinaisons de propriétés des diagonales permettent de définir certaines classes de quadrilatères particuliers, d'autre côté, elles permettent de travailler la suffisance de propriétés pour définir et mettent en jeu la recherche du contre-exemple. L'analyse des propriétés des quadrilatères a permis de conclure que chaque classe particulière de parallélogrammes (rectangles, losanges et carrés) peut être ainsi définie par la description des propriétés de diagonales.

Quant à l'étape 2, nous organisons la discussion qui reprend les grandes lignes de l'analyse présentée dans la section 4.4 et qui fait partie de l'activité suivante.

19.5 CLASSIFICATION DES QUADRILATÈRES

Savoirs géométriques visés :
- formuler les relations d'inclusion (hiérarchisation)
- justifier l'énoncé
- Trouver un contre-exemple
- Déterminer la suffisance de propriétés pour définir, la partie redondante
- concevoir les définitions conceptuo-lexicales

Savoirs didactiques visés :
- rechercher l'élément problématique de l'activité (de l'énoncé, du schéma, etc.), justifier et modifier
- appliquer les savoirs didactiques : choix de représentations graphiques, choix du critère de classification et choix du diagramme dans l'activité de classification.

Étape 1. Analyse d'une définition. Recherche de la valeur de vérité des énoncés

Consigne générale : Voici une activité tirée d'un cahier d'élève. Elle contient trois questions : transformer la description en définition, justifier les énoncés (Vrai ou Faux), analyser le schéma de classification des quadrilatères particuliers et proposer une modification.
(Voir l'annexe 13.3 et l'analyse dans les sections 4.4.3 et 4.4.4)

Organisation : Travail individuel

Présentation : Vérification en groupe

Temps alloué : travail individuel- 5 min et vérification en groupe- 10 min

Étape 2. Analyse du schéma de classification et modifications souhaitées

Organisation : Travail en équipe de 4-7étudiants

Présentation : représentant d'une équipe présente le schéma modifié au tableau,

Temps alloué : travail en équipe (10 min), présentation et discussion (15 min)

Étape 3. Application des connaissances (Voir l'annexe 13.4 et l'analyse dans la section 4.4.4)

Consigne 1 : *Observer et analyser le schéma de classification des quadrilatères. Justifier vos commentaires.*

Consigne 2 : *Quelles relations entre les classes de quadrilatères particuliers ne sont pas respectées par ce schéma? Justifier.*

Organisation : en équipe de 4-7 étudiants

Présentation : Pour l'analyse du deuxième extrait, le professeur nomme une équipe (aléatoirement) pour présenter les suggestions de modification du schéma

Temps alloué : l'analyse et la présentation de chaque extrait – 10 min

- *Déroulement*

Étape1. Analyse de la définition. Recherche de la valeur de vérité des énoncés.

L'analyse de la définition et la vérification des réponses aux questions « Vrai ou Faux » se sont déroulées de façon prévue. La transformation de la description en une définition et l'identification de la partie redondante a été réussite par 6 équipes parmi 22 et 100 % des équipes ont réussi la tâche de justification. Les explications sur « pourquoi » ont permis aux étudiants d'automatiser l'analyse de relations entre les classes.

Étape 2. Analyse du schéma de classification et modifications souhaitées

L'identification des quadrilatères n'a pas présenté des difficultés pour les étudiants. Cependant, le schéma de classification a posé quelques problèmes conceptuels qui sont décrits dans les sections 4.4.4 et 4.2.3.1.

Les modifications du schéma proposées par des équipes ont porté essentiellement sur l'explicitation des caractéristiques de classification (2 côtés parallèles, les côtés parallèles 2 à 2, les angles droits, les côtés de même longueur) et sur l'ajout de noms des classes. Seulement à peu près dans la moitié de fiches des équipes, nous avons trouvé les commentaires constructifs. Nous les présentons dans le tableau suivant :

Commentaires	Nombre d'équipes ayant répondu
1. Supprimer les figures d et e	9
2. Supprimer la figure b	10
3. Indiquer le sens de flèches (inclusion ou division)	3
4. Remplacer par le diagramme à branches habituel	12
5. Remplacer par le diagramme de Carroll	1
6. Remplacer par le diagramme de Venn	1

Nous étions obligée d'intervenir sur le choix de critères choisis et sur les représentations graphiques des classes à l'étape de validation de différents schémas. (Par exemple : En quelles classes peut-on diviser la classe des parallélogrammes ? Réponse anticipée : losanges et rectangles.) Connaissez-vous les autres parallélogrammes qui ne sont pas des rectangles ou des losanges? Pouvez-vous dessiner ce parallélogramme? Etc.) Les dessins utilisés par ce schéma ne peuvent pas représenter des classes; ils sont des éléments de classes. (Par exemple, le trapèze scalène est l'un des éléments de la classe de trapèzes et ne peut pas représenter toute la classe, car la classe de parallélogrammes, ne fait pas partie de trapèzes scalènes.)

Si le diagramme veut démontrer l'inclusion de classes (et non pas la division), le sens de flèches doit être inversé. Quand on choisit la direction qui va d'une classe plus large vers une classe moins large, cela prévoit de nommer les autres classes en lesquelles se divise la classe donnée.

Cette discussion a cherché à favoriser la prise de conscience sur la hiérarchisation des classes, sur les représentations graphiques des classes et sur le sens de la flèche désignant l'inclusion (ou division) des classes. Quant aux nouveaux schémas, comme nous voyons dans le tableau ci-haut, les diagrammes à branches (voir la figure 7 dans la section 4.2.3.1) ont été les plus populaires.

Étape 3. Application des connaissances

Pour pouvoir appliquer les connaissances acquises dans les étapes précédentes, nous avons préparé deux extraits portant sur la classification des quadrilatères particuliers où les propriétés de quadrilatères et les relations entre les classes sont ambiguës. (Voir l'analyse dans la section 4.4.4).

Effets observés :

1^er^ extrait : Le sens de flèches a été identifié immédiatement et les représentations graphiques ont été mentionnées seulement par quelques étudiants. Nous avons décidé de reprendre la question portant sur les représentations en recherchant le représentant fidèle de chaque classe. Les étudiants ont conclu que seulement la représentation du carré peut l'être.

2^e^ extrait : La tâche a paru très facile pour les étudiants (toutes les équipes ont porté les modifications)

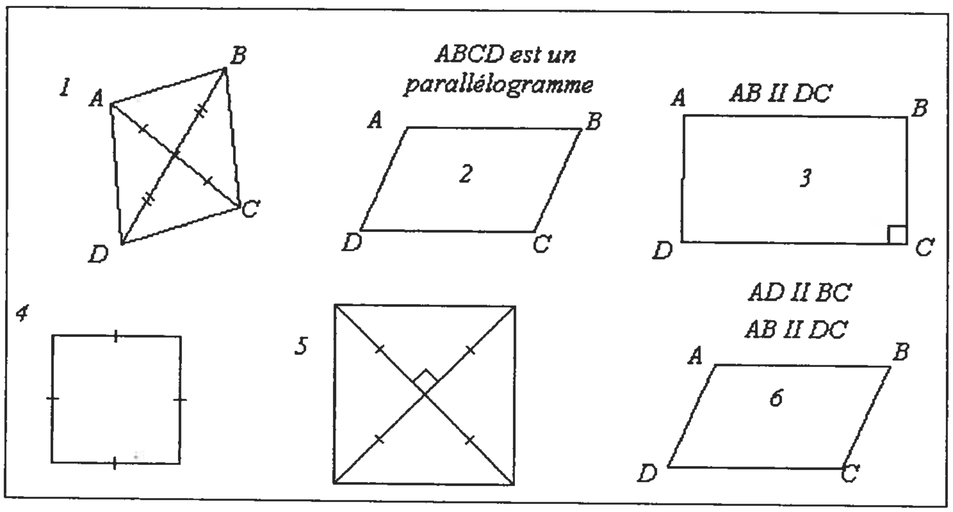
* Nous considérons cette réussite comme réussite de l'équipe. Les étudiants pouvaient partager leurs idées pour déterminer la réponse. À l'année suivante de la phase expérimentale (2003), nous avons proposé cette question à l'examen de la mi-session. 90 % d'étudiants ont répondu correctement. Pour démontrer leur savoir géométrique, plusieurs étudiants ont tracé à côté les différents schémas de classification.

19.6 DÉTERMINATION DU NOM DU QUADRILATÈRE

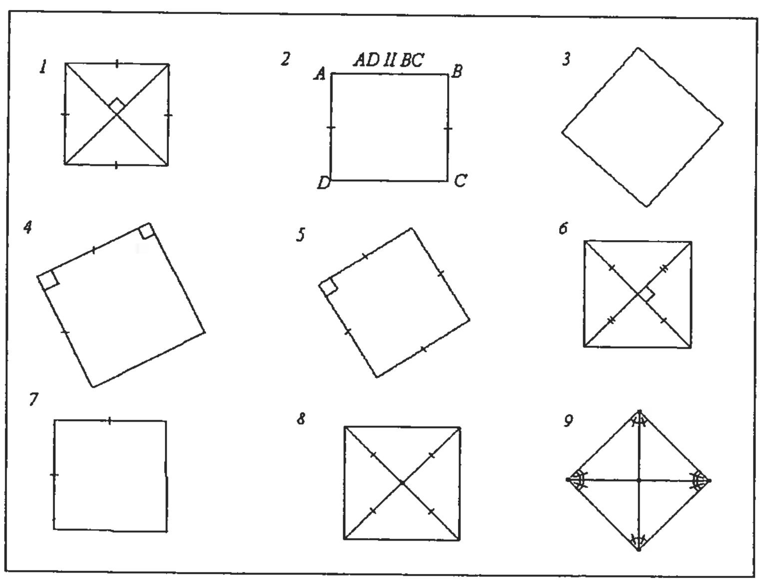
Savoirs géométriques visés :

- Déterminer la figure selon la lecture des propriétés indiquées par des symboles, selon la description d'une combinaison inhabituelle de ses propriétés, selon la déduction de propriétés nécessaires pour déterminer le nom
- Trouver un contre-exemple
- Justifier la réponse

Question 1 : *Sommes-nous des parallélogrammes?*(Annexe 15, Fiche 9)



Question 2 : *Sommes-nous des carrés?* (Annexe 15, Fiche 10)



Organisation : Travail individuel (ou en paires) suivi d'une discussion en groupe (Nous avons partagé les figures de chaque activité en deux parties : la première moitié nous travaillons en classe, l'autre moitié est proposée en que devoir)

Temps alloué : travail individuel 5 min, discussion en classe 5 min (pour chaque activité)

- *Conduites anticipées*

Cette activité travaille les propriétés des quadrilatères dans l'environnement différent de celui utilisé jusqu'à présent. Les propriétés indiquées par des symboles font partie de définitions caractéristiques ou constructives travaillées lors du cours. (Voir la description de l'activité dans la section 5.2.4.1.) Nous anticipons les difficultés dans la reconnaissance de figures 2 et 4 (question 2), car l'identification perceptive des unités indiquées ne s'accorde pas avec celles qui sont utilisées habituellement dans la définition ce qui exige l'emploi du raisonnement.

Réponses attendues :

Question 1 : *Sommes-nous des parallélogrammes?*

N	Propriétés indiquées	Nom de quadrilatère	Parallélogramme ou non et pourquoi
1	Diagonales se coupent en leur milieu	Parallélogramme	Oui, c'est une propriété qui définit un parallélogramme
2	ABCD est un parallélogramme	Parallélogramme	Oui (écrit dans la consigne)
3	1 paire de côtés // ⇒ trapèze + 1 angle droit	Trapèze rectangulaire	Non (il n'y a pas de deux paires de côtés //)
4	4 côtés congrus	Losange	Oui, tout losange possède 2 paires de côtés // ⇒ parallélogramme
5	Diagonales congrues se coupent en leur milieu ⇒ rectangle, À angle droit ⇒ carré	Carré	Oui, tout carré possède 2 paires de côtés // ⇒ parallélogramme
6	2 paires de côtés //	Parallélogramme	Oui, c'est une propriété qui définit un parallélogramme

Question 2 : *Sommes-nous des carrés?*

N	Description de propriétés indiquées	Nom
1	4 côtés congrus ⇒ losange, diagonales ⊥ ⇒ losange	Losange
2	1 paire de côtés // ⇒ trapèze, ils (côtés) sont congrus ⇒ parallélogramme	Parallélogramme
3	Polygone à 4 côtés	Quadrilatère
4	Deux angles consécutifs droits ⇒1 paire de côtés // ⇒ trapèze rectangulaire	Trapèze
5	4 côtés congrus ⇒ losange, 1 angle droit ⇒ carré	Carré
6	Diagonales se coupent en leur milieu ⇒ parallélogramme, à angle droit ⇒ losange	Losange
7	4 côtés ⇒ quadrilatère, 2 côtés consécutifs congrus ⇒ quadrilatère	Quadrilatère
8	Diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu ⇒ rectangle	Rectangle
9	Diagonales sont des bissectrices des angles intérieurs ⇒ losange	Losange

- *Effets observés*

- l'activité a provoqué l'intérêt des étudiants à cette forme de la représentation des quadrilatères qui permet de façon économique de décrire les propriétés qu'ils possèdent

- Nous nous sommes intervenue sur la démarche de la description et sur l'enchaînement de pas du raisonnement pour déterminer les figures 1, 3 et 4 (question 2)

19.7 CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES DANS L'ENVIRONNEMENT CABRI-GÉOMÈTRE II.

Savoirs géométriques visés :
- Employer les propriétés, les techniques et les opérations mentales nécessaires à la construction des figures dans l'environnement informatique

Savoirs didactiques visés :
- Comparer les démarches utilisées pour la construction d'une figure dans deux environnements
- Organisation des apprentissages dans l'environnement informatique

Étape 1 : Comparaison des constructions

Consigne : Choisir 3 constructions différentes du carré effectuées dans un environnement papier-crayon. (Voir le tableau de constructions d'un carré – Situation 19.2.) *Est-il possible d'effectuer les mêmes constructions dans un environnement de Cabri* ? Décrivez les outils.

Organisation : Travail individuel (ou en paires) suivi d'une discussion en groupe

Temps alloué : constructions 15 min, discussion en classe 10 min

Étape 2 : Conception d'une séquence

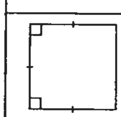
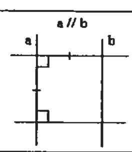
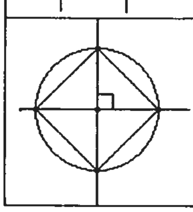
Consigne 2 : Organiser un environnement pour travailler l'inclusion des classes de parallélogrammes. *Comment cet environnement peut-il favoriser le travail sur les relations entre les classes*?

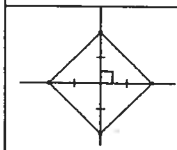
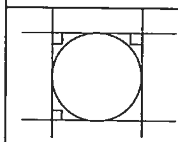
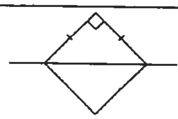
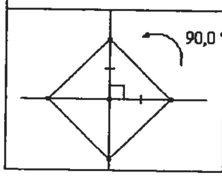
Organisation : Travail individuel (ou en paires) suivi d'une discussion en groupe

Temps alloué : construction (15 min), discussion en classe 10 min

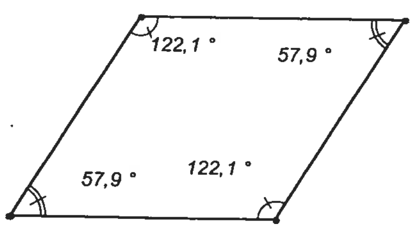
- *Déroulement et effets observés*

Le but de la première activité est de retravailler les propriétés du carré dans un environnement différent. En même temps, nous voulions montrer aux étudiants que les outils de Cabri permettent la majorité des constructions déjà réalisées dans l'environnement de papier-crayon.
Les constructions des carrés ont été assez faciles pour les étudiants (les sept constructions ont été analysées).

	CONSTRUCTIONS PAPIER-CRAYON	?	CONSTRUCTIONS CABRI
	1. Segment (règle); segment ≅ et ⊥ issu de l'une des extrémités du segment; répéter; relier les extrémités.	Oui	Segment, Droite ⊥, Mesure, Report de mesure, Droite ⊥, Droite ⊥
	2. Deux droites //; droite ⊥ à ces droites; mesurer le segment créé; reporter la mesure de ce segment sur la première droite; tracer la droite perpendiculaire.	Oui	Droite, Droite //, Droite ⊥, mesure de ce point à ce point, Report de mesure 2 fois, Segment
	3b. Cercle (compas); diamètre (règle); diamètre ⊥ (coin de la règle). Tracer le contour du carré (les sommets sont les points d'intersection de deux diamètres et du cercle).	Oui	Cercle, Droite (passe par ce point), Droite ⊥ à cette droite qui passe par ce point, Polygone.

	3c. Deux droites ⊥; du point d'intersection pris pour le centre tracer le cercle; relier les points d'intersection du cercle avec les deux droites.		Droite, Droite ⊥, cercle, polygone
	4. Deux droites ⊥; du point d'intersection reporter les mêmes mesures; relier les 4 points obtenus (ils sont des sommets).	Oui	Droite, Droite ⊥, Nombre, Report de mesure (de point d'intersection 4 fois), Polygone
	5. Cercle (compas); droite tangente; droite tangente ⊥ à cette tangente; répéter 2 fois (construction approximative).	Oui	Cercle, Point sur le cercle, Droite (passe ce point), Droite ⊥ à cette droite qui touche le cercle, répéter 2 fois.
	6. Tracer le triangle isocèle rectangle; faire la symétrie de ce triangle par rapport à l'hypoténuse (ou faire les trois symétries consécutives par rapport à un côté)	Oui	Tracer le triangle (constructions variées), Symétrie axiale
	7. Tracer le triangle isocèle rectangle (ou tracer le segment); faire les trois rotations consécutives de quart de tour de ce triangle (ou de ce segment) autour de son sommet	Oui	Tracer le triangle (constructions variées), Rotation

La deuxième étape a cherché à favoriser l'emploi de différentes propriétés du parallélogramme (côtés opposés congrus et parallèles, angles opposés congrus et diagonales se coupent en leur milieu) et l'emploi de la méthode de transformation des figures employée dans la situation 3 et 4 (outil de représentation). Cette transformation permet de présenter la variété de représentations graphiques de parallélogrammes (carré, losange, rectangle) et de mettre en jeu leurs propriétés essentielles (côtés congrus et angles droits). En indiquant les mesures des angles et des côtés du parallélogramme et en tirant l'un de ses sommets, nous pouvons démontrer qu'un parallélogramme peut être : rectangle (quand ses angles mesurent 90° chacun), losange (quand ses côtés ont les mesures égales) et carré (quand ces côtés ont les mesures égales et ses angles mesurent 90° chacun). Selon la définition caractéristique de parallélogrammes, le carré, le rectangle, le losange sont des parallélogrammes parce qu'ils ont deux paires de côtés parallèles.



Les constructions présentées n'étaient pas nombreuses, car le nombre de propriétés particulières des parallélogrammes n'est pas grand.

PROCÉDURES DE CONSTRUCTION	OUTILS DE CABRI	PROPRIÉTÉ
1. Tracer deux droites parallèles 2. Tracer une droite sécante passant les deux points de construction des droites[3] 3. Tracer une droite // à la sécante 4. Tracer un parallélogramme par-dessus 5. Cacher les parties de droites 6. Afficher les mesures des angles 7. Afficher les mesures des côtés	- DROITE, DROITE PARALLÈLE - DROITE - DROITE PARALLÈLE - POLYGONE - CACHER / MONTRER - MESURE D'ANGLE - DISTANCE ET LONGUEUR	Deux paires de côtés parallèles
1. Tracer deux segments issus d'un même sommet 2. Tracer une droite // à un premier segment 3. Tracer une droite // à un deuxième segment 4. Tracer un parallélogramme par-dessus 5. Cacher les parties de droites 6. Afficher les mesures des angles 7. Afficher les mesures des côtés	- SEGMENT - DROITE PARALLÈLE - DROITE PARALLÈLE - POLYGONE - CACHER / MONTRER - MESURE D'ANGLE - DISTANCE ET LONGUEUR	Deux paires de côtés parallèles
1. Construire deux droites sécantes 2. Construire un point sur chacune 3. Construire deux points symétriques 4. Tracer un parallélogramme par-dessus 5. Cacher les parties de droites 6. Afficher les mesures des angles 7. Afficher les mesures des côtés	- DROITE - POINT - SYMÉTRIE CENTRALE - POLYGONE - CACHER / MONTRER - MESURE D'ANGLE - DISTANCE ET LONGUEUR	Diagonales se coupent en leur milieu
1. Construire un segment, la diagonale du parallélogramme 2. Trouver son milieu 3. Tracer une droite passant par le milieu 4. Tracer une droite passant par l'extrémité du segment et qui est sécante à la droite 5. Tracer une droite parallèle à cette droite passant par l'autre extrémité du segment 6. Tracer un parallélogramme en utilisant les points d'intersection 7. Cacher les parties de droites 8. Afficher les mesures des angles 9. Afficher les mesures des côtés (outil)	- SEGMENT - MILIEU - DROITE - DROITE - DROITE PARALLÈLE - POLYGONE - CACHER / MONTRER - MESURE D'ANGLE - DISTANCE ET LONGUEUR	Diagonales se coupent en leur milieu

En utilisant les propriétés de côtés (parallélisme et congruence) dans la construction du parallélogramme, les étudiants ont eu certaines difficultés dues à la connaissance du logiciel (et en particulier à l'emploi de points de construction de droites).

[3] Condition (technique) nécessaire à la présentation du changement de forme du parallélogramme.

19.8 EXAMEN DE LA MI-SESSION

<u>Question1 :</u> *Voici quelques énoncés des quadrilatères particuliers :*

1. *Mes diagonales sont congrues et se coupent à angle droit en leur milieu.*
2. *J'ai deux côtés parallèles.*
3. *Mes diagonales se coupent en leur milieu.*
4. *Mes diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu.*
5. *J'ai deux paires de côtés parallèles.*
6. *Mes diagonales sont des bissectrices des angles.*
7. *Mes diagonales se coupent à angle droit en leur milieu.*
8. *Mes côtés sont congrus et mes diagonales sont congrues.*
9. *Mes côtés sont parallèles et mes diagonales sont congrues.*
10. *Mes diagonales se coupent à angle droit.*

Dans un tableau suivant, donnez les numéros d'énoncés qui **<u>définissent</u>** les carrés, les rectangles, les losanges, les parallélogrammes et les trapèzes.

Carré	
Rectangle	
Losange	
Parallélogramme	
Trapèze	

<u>Question 2</u> : *La définition la plus répandue du rectangle est « Quadrilatère ayant 4 angles droits » et celle du losange est « Quadrilatère ayant 4 côtés congrus». Pouvez-vous donner une autre définition de chacun de ces quadrilatères?*

<u>Question 7</u> : *Construire un carré ABCD en n'utilisant que les outils suivants :*

Points	Segment	Cercle	Droite perpendiculaire	Nommer
				

(L'outil « cercle » ne peut être utilisé qu'une seule fois)

	Procédures de construction	**Outils utilisés**
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Quelle(s) propriété(s) du carré est(sont) en jeu dans cette construction ? ____________________

- *Réponses attendues et résultats obtenus*

Question 1. Détermination des quadrilatères selon la description de propriétés

Réponses attendues :

Carré	1,8
Rectangle	4,9
Losange	6,7
Parallélogramme	3,5
Trapèze	2

La difficulté de cette tâche consiste en une distinction « définition/appartenance » pour déterminer le nom du quadrilatère. L'analyse de chaque énoncé doit être faite selon la vérification de sa possibilité à définir une classe des quadrilatères. Dans nos évaluations nous avons tenu compte des éléments manquants ou en trop.

Réponses obtenues :

Énoncé	Figure définie	Taux de réussite
1. Mes diagonales sont congrues et se coupent à angle droit en leur milieu	Carré	94 %
2. J'ai deux côtés parallèles	Trapèze	98 %
3. Mes diagonales se coupent en leur milieu	Parallélogramme	52 %
4. Mes diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu	Rectangle	86 %
5. J'ai deux paires de côtés parallèles	Parallélogramme	100 %
6. Mes diagonales sont des bissectrices des angles	Losange	77 %
7. Mes diagonales se coupent à angle droit en leur milieu.	Losange	87%
8. Mes côtés sont congrus et mes diagonales sont congrues	Carré	87 %
9. Mes côtés sont parallèles et mes diagonales sont congrues	Rectangle	48 %
10. Mes diagonales se coupent à angle droit	Aucun	74 %

Effets observés :

- Nous voyons une très bonne reconnaissance :
  - du trapèze et du parallélogramme dans les énoncés 2 et 5 qui représentent les définitions habituelles de ces figures,
  - du losange (énoncé 7), dont la propriété décrite souvent fait partie de la définition habituelle.
- 18 étudiants ont commis 1 erreur (la majorité a cherché le losange dans l'énoncé 10);
- 16 étudiants ont commis 2 erreurs (l'une des erreurs consiste en une propriété 10)
- au lieu de déterminer le nom du quadrilatère (analyse de l'énoncé sur la possibilité de définir un quadrilatère particulier), 5 étudiantes ont nommé toutes les classes des quadrilatères particuliers ayant la propriété décrite dans l'énoncé.

Nous pouvons reconnaître la réussite dans la détermination des figures selon les définitions constructives qui utilisent les propriétés des diagonales (énoncés 1, 4, 6, 8). Cependant, seulement 50 % des étudiants ont déterminé le parallélogramme dans l'énoncé 3 et le rectangle dans l'énoncé 9.

Question 2. Conception d'une définition

La difficulté de cette tâche consiste en une distinction « définition/description ». La définition utilise le nombre minimal de propriétés suffisantes pour déterminer la figure. Dans la description, le nombre de propriétés n'est pas limité. L'évaluation de définitions tient compte de redondance des propriétés utilisées.

Résultats obtenus : Dans les tableaux ci-dessous, nous avons décrit les résultats obtenus en indiquant le nombre d'étudiants présentant chaque définition (Les résultats portent sur un groupe de 62 étudiants).

DÉFINITIONS DU RECTANGLE	**NOMBRE D'ÉTUDIANTS**
Quadrilatère ayant des diagonales congrues et se coupant en leur milieu	44
Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles et des diagonales congrues	3
Quadrilatère qui se divise par une de ses diagonales en deux triangles rectangles (nouvelle définition)	1
Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles et un angle droit (nouvelle définition)	2
Quadrilatère dont les médiatrices sont des axes de symétrie	1
Quadrilatère ayant deux paires de côtés perpendiculaires (nouvelle définition)	1

DÉFINITIONS DU LOSANGE	**NOMBRE D'ÉTUDIANTS**
Quadrilatère dont les diagonales se coupent à angle droit en leur milieu	30
Quadrilatère dont les diagonales sont des bissectrices des angles	28
Quadrilatère dont les diagonales sont des axes de symétrie	1

Tableau représentatif du nombre de définitions justes et de définitions redondantes :

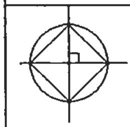
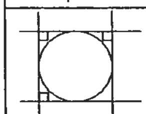
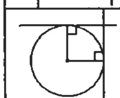
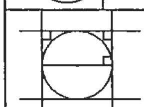
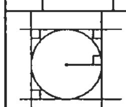
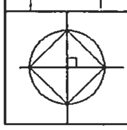
Nom de quadrilatère	**Définition juste**	**Redondante**
Rectangle	42	10
Losange	35	24

Effets observés :

84 % d'étudiants ont présenté des définitions inhabituelles du rectangle et 95 % d'étudiants – les définitions inhabituelles du losange. En analysant le choix de définitions, on peut remarquer la dominance de la propriété des diagonales : « *congrues et se coupent en leur milieu* » pour le rectangle et « *se coupent à angle droit en leur milieu* » et « *sont des bissectrices des angles* » pour le losange. En analysant les résultats obtenus, on peut remarquer ainsi le nombre considérable de définitions redondantes : 10 pour le rectangle et 24 pour le losange.

Question 7. Construction du carré

Résultats obtenus : (La numérotation des constructions dans la deuxième colonne correspond à celle du tableau de constructions à l'annexe 20)

Dessin	Procédures de construction	Pourcentage d'étudiants
	3b. Cercle, Segment (rayon), Droite ⊥ à ce segment et passant par le centre, Droite ⊥ à cette droite et passant par le centre, Polygone (relier les points d'intersection)	39 %
	5. Cercle, Segment (qui touche le cercle en un point selon aspect visuel de Cabri), Droite ⊥ à ce segment (et tangente au cercle), répéter 2 fois (construction approximative)	15 %
	Cercle, Segment, Segment (2 rayons ⊥ selon l'aspect visuel de Cabri), 2 Droites ⊥ à ces rayons (et tangentes au cercle) (construction nouvelle)	13 %
	Cercle, Segment passant par le centre (aspect visuel de Cabri), Droite ⊥ au diamètre et tangente au cercle, droite ⊥ à cette tangente et tangente au cercle, répéter 2 fois (construction nouvelle).	7 %
	Cercle, Segment (rayon), Droite ⊥ à ce segment (et tangente au cercle), répéter 2 fois (construction approximative) (construction nouvelle).	5 %
	3c. Segment, Droite ⊥, Cercle (à partir du point d'intersection de deux droites pris pour le centre), Polygone (relier les points d'intersection du cercle avec les deux droites)	3 %

L'analyse de résultats montre que 80.6 % d'étudiants présentent les constructions et les descriptions des procédures correctes. Les 19.4 % d'étudiants n'ont pas respecté la consigne et ont présenté les constructions du rectangle. Au prochain cours, nous prévoyons le travail sur les erreurs et vers la fin de la formation, le mini-test portant sur la suffisance de propriétés pour définir la classe des carrés.

19.9 MINI-TEST

Organisation : Travail individuel suivi d'une discussion en groupe (après la pause)

Temps alloué : Travail individuel 10-15 min, (faire les copies de productions), discussion en classe 10 min

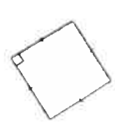
Le but de ce mini-test (annexe 17) est de permettre aux étudiants d'évaluer leurs connaissances et de réviser les notions de figures géométriques planes étudiées lors du cours (car l'étude du quadrilatère s'est terminée 1 mois avant l'examen final). Les questions 1 et 2 portent sur la notion du cercle et du polygone. Nous présentons donc les questions 3 et 4 qui concernent la notion du quadrilatère particulier. La tâche posée par la question 3 consiste en l'analyse d'une propriété selon sa suffisance à définir le carré. Si la propriété ne définit pas le carré, il faut déterminer la classe qu'elle définit. La difficulté particulière se trouve dans l'identification de la partie redondante dans la définition. Nous avons donné la consigne orale supplémentaire : souligner la partie redondante de la définition. La question 4 demande la lecture des propriétés indiquées par des symboles, leur description et la détermination du nom de quadrilatère. Après tout le travail effectué, nous ne prévoyons pas de difficultés pour cette question.

- *Réponses attendues*

Question 3 :

Énoncés	Juste pour définir le carré	Redondant	Insuffisant	Quadrilatère défini par l'énoncé
1. Losange ayant 4 angles droits	Oui			
2. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales perpendiculaires			Oui	Losange
3. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues qui sont des bissectrices des angles		Oui		
4. Quadrilatère ayant 4 angles droits et des diagonales se coupant en leur milieu			Oui	Rectangle
5. Quadrilatère ayant des diagonales congrues et se coupant en leur milieu à angle droit	Oui			
6. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles rectangles congrus			Oui	Losange
7. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues se coupant en leur milieu		Oui		
8. Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie	Oui			
9. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles congrus	Oui			
10. Quadrilatère régulier	Oui			
11. Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles et des diagonales se coupant en leur milieu			Oui	Parallélogramme

Question 4 : Réponse : 4 côtés égaux ⇒ losange, + angle droit ⇒ carré



Résultats obtenus :

Pour faciliter l'analyse de résultats obtenus, nous avons gardé deux colonnes initiales (première et dernière) et nous avons ajouté la colonne avec le nombre d'étudiants ayant échoué la question (les résultats portent sur le groupe de 62 étudiants) :

Propriétés	Quel quadrilatère définit-elle?	Nombre d'étudiants ayant échoué
1. Losange ayant 4 angles droits	Carré	8
2. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales perpendiculaires	Losange	11
3. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues qui sont des bissectrices des angles	Carré	15
4. Quadrilatère ayant 4 angles droits et des diagonales se coupant en leur milieu	Rectangle	9
5. Quadrilatère ayant des diagonales congrues et se coupant en leur milieu à angle droit	Carré	5
6. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles rectangles congrus	Losange	24
7. Quadrilatère ayant 4 côtés congrus et des diagonales congrues se coupant en leur milieu	Carré	12
8. Quadrilatère ayant 4 axes de symétrie	Carré	16
9. Quadrilatère qui se divise par ses diagonales en 4 triangles isocèles congrus	Carré	26
10. Quadrilatère régulier	Carré	11
11. Quadrilatère ayant deux paires de côtés parallèles et des diagonales se coupant en leur milieu	Parallélogramme	20

Effets observés :

- Les résultats les plus bas concernent la reconnaissance du losange dans l'énoncé n.6 et du carré dans l'énoncé n.9. Nous pouvons donner notre version de l'interprétation de ces résultats : Ces deux propriétés ont été touchées seulement 1 fois et nous prévoyons les mettre en jeu dans les activités de découpage des figures planes, de dallage, de composition des différentes figures à l'aide des autres figures dans les activités portant sur la notion de la mesure des surfaces de figures planes.
- La redondance de propriétés dans l'énoncé était mentionnée à peu près par la moitié du groupe (par exemple, 29 pour l'énoncé n.3 et 27 pour l'énoncé n.7)
- 5 étudiants n'ont pas reconnu le carré dans la représentation graphique proposée. (question 4)

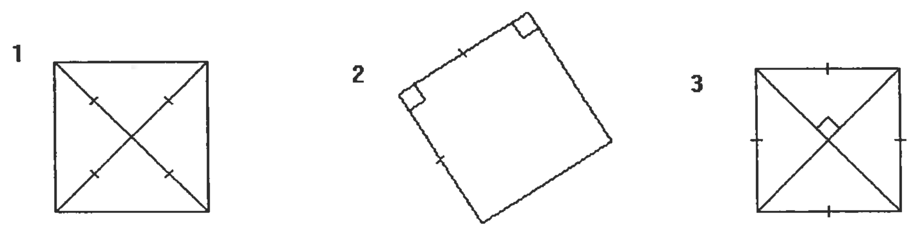
19.10 EXAMEN FINAL

Question 1. *Sans faire de dessin, répondre aux questions suivantes en cochant la ou les réponses appropriées :*

a) *Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est :*
- ☐ un carré
- ☐ un losange
- ☐ un rectangle
- ☐ aucune des réponses précédentes

b) *Un trapèze dont les deux bases ont la même longueur est :*
- ☐ un losange
- ☐ un rectangle
- ☐ un carré
- ☐ un parallélogramme
- ☐ aucune des réponses précédentes

Question 2. *Dans le tableau ci-dessous, décrire les propriétés indiquées de chacun des quadrilatères et déterminer son nom.*



Numéro	Propriétés indiquées	Nom
1		
2		
3		

Sont-ils des trapèzes ?

Expliquer : ____

____

- Résultats obtenus :

Question 1.

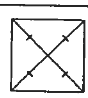
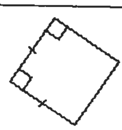
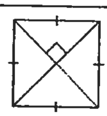
Nous présentons les résultats dans le tableau, où la dernière colonne correspond aux plusieurs réponses données pour le même énoncé. Par exemple, à la première question, 24 % des étudiants ont coché deux réponses : un carré et un losange et à la deuxième question 19 % d'étudiants ont coché quatre réponses : un carré, un losange, un rectangle et un parallélogramme. Il s'agit dans ce cas de l'appartenance de la propriété mentionnée dans l'énoncé à une classe des quadrilatères.

Énoncé	Réponse	Taux de réussite	Taux de réponses indiquant l'analyse de l'énoncé selon l'appartenance d'une propriété à une classe
Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est…	un losange	63 %	24 %
Un trapèze dont les deux bases ont la même longueur est …	un parallélogramme	63 %	19 %

En analysant les résultats obtenus, nous avons pensé que peut-être c'est le verbe « être » qui pose le problème et les étudiants l'interprètent comme « peut être ». Pour l'année 2004 (hors de l'expérimentation), nous avons décidé d'ajouter les mots « sûrement », « nécessairement » à chaque énoncé. Les résultats ne sont pas changés : 30 % des étudiants ont analysé le premier énoncé selon l'appartenance de la propriété décrite à des classes des quadrilatères et 21 % d'étudiants l'ont fait pour le deuxième énoncé. Tout cela nous permet de conclure qu'il faut penser les activités spécifiques qui vont émerger le travail sur l'analyse de chaque mot employé par l'énoncé.

Question 2. *Décrire les propriétés indiquées de chacun des quadrilatères et déterminer son nom.*

L'évaluation de réponses à cette question a tenu compte de la description des propriétés et de la détermination du nom du quadrilatère. Dans le tableau ci-dessous, nous présentons les réponses correctes et les résultats obtenus

Dessin	Description des propriétés visée	Taux de réussite	Détermination du nom	Taux de réussite
	Diagonales sont congrues et se coupent en leur milieu	95 %	Rectangle	84 %
	Deux angles consécutifs droits et deux côtés consécutifs congrus	-	Deux angles consécutifs droits ⇒ une paire de côtés // ⇒ trapèze rectangulaire; Deux côtés consécutifs congrus ⇒ (information inutile) ⇒ Trapèze rectangulaire	44 %
	4 côtés congrus et diagonales sont ⊥	100 %	4 côtés congrus ⇒ losange; Diagonales ⊥ (information redondante) ⇒ Losange	81 %

Nous voulons souligner que pour la figure 2, la détermination du nom était la plus difficile (44 %). Il convient à noter que pour cet exemple, la description des propriétés, dont la reconnaissance a composé le premier élément de l'association, ne permettait pas la détermination immédiate d'une propriété ou d'une figure. L'identification de ces propriétés s'est produite pendant l'analyse et la détermination des conséquences des propriétés décrites pour lesquelles les étudiants possédaient des images mentales. Nous n'avons pas mis le taux de réussite dans la colonne de description des propriétés de la figure n.2, car aucune description n'était précise. (La majorité des étudiants ont présenté la description suivante : *Deux côtés congrus, deux angles droits*). Lors de la formation, le travail important sur le sens de mots particuliers et de termes géométriques précis dans les énoncés et sur leur emploi dans la description ou dans la définition a été mis en place. L'emploi de termes « consécutifs » ou « opposés » en conjonction avec les « côtés congrus » ou les « angles droits » détermine les figures différentes :

- Les propriétés : « côtés opposés congrus » ou « angles opposés congrus » déterminent un parallélogramme
- La propriété « deux angles opposés droits » détermine le rectangle
- La propriété « deux angles consécutifs droits » détermine le trapèze rectangulaire
- La propriété « deux angles opposés droits » et « deux côtés consécutifs congrus » détermine le carré

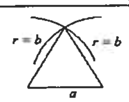
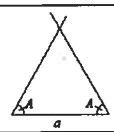
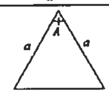
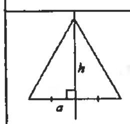
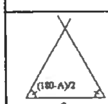
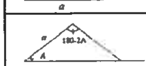
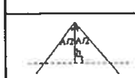
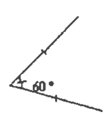
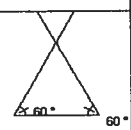
Nous pensons que si la description des propriétés était plus précise, nous pourrions nous attendre à l'analyse de ces données et à la détermination d'une figure. La réponse donnée pour la figure n.2 n'a pas permis aux étudiants de répondre positivement à la dernière question. Cependant, 16.1 % de réponses négatives ont été justifiées correctement : « Non, parce que la figure n.2 ne possède pas une paire de côtés // ».

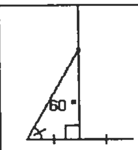
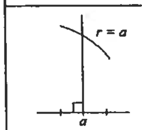
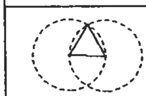
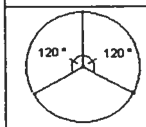
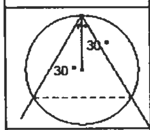
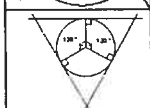
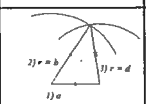
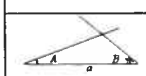
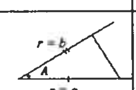
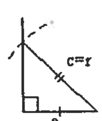
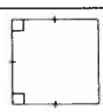
Pour conclure l'analyse des résultats du travail effectué sur la notion du quadrilatère, nous voulons souligner que les questions de l'examen de la mi-session et final exigeaient surtout la reconnaissance des propriétés de figures géométriques dans les représentations (graphique et verbales) <u>inhabituelles</u>, ainsi que l'emploi de propriétés non marquantes pour représenter les figures ou pour résoudre les tâches géométriques. Par exemple, le taux de réussite des étudiants dans la question 7 de l'examen de mi-session (80.6 % d'étudiants présentent les constructions et les descriptions des procédures correctes) et dans la question 2 de l'examen final (83.9 % de réussite pour la première figure, 80.6 % pour la troisième) nous considérons « assez élevé ».

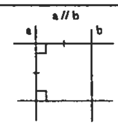
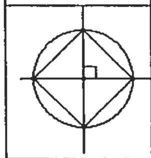
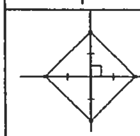
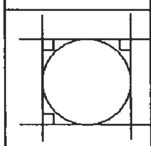
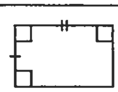
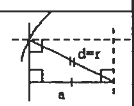
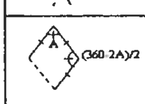
Nous pouvons distinguer les différents niveaux de maîtrise des propriétés des quadrilatères particuliers. Le premier niveau correspond à l'emploi des propriétés essentielles (propriétés de côtés et d'angles) (niveau 2 de van Hiele, 1986), le deuxième niveau utilise les propriétés de diagonales, d'axes de symétrie, de bissectrices, etc. (niveau 3 de van Hiele). Le critère de la reconnaissance d'une figure selon la lecture de ses propriétés (graphiques ou décrites) <u>inhabituelles</u> représente pour nous un indice de la compréhension qualitative du concept géométrique (début du niveau 4). Ce travail exige la capacité d'avoir l'image mentale de propriétés annoncées et d'effectuer les déductions de combinaisons inhabituelles de propriétés.

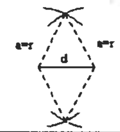
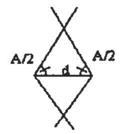
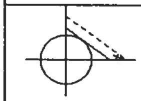
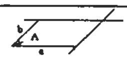
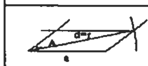
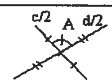
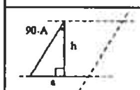
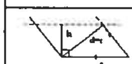
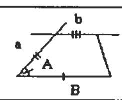
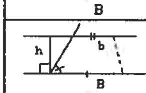
Nous pensons que l'expérience acquise dans toutes les activités de formation (d'observation, de manipulation, d'analyse, de résolution des problèmes, etc.), et non pas seulement dans l'activité particulière, a participé à l'évolution des compétences nécessaires pour répondre à cette question.

20. TABLEAU DE CONSTRUCTIONS

	FIGURE	NOMBRE MINIMAL DE DONNÉES	NOM(S) DE DONNÉE(S)	DÉMARCHE	NIVEAU
Triangle isocèle		2	Mesures de la base et d'un côté	1. Segment (base); deux arcs de même ouverture du compas égale à la mesure du côté; relier le point d'intersection avec les extrémités du segment	3
		2	Mesures de la base et d'un angle (entre la base et le côté)	2. Segment (base); reporter l'angle donné de chacune des extrémités du segment	3
		2	Mesures d'un côté et d'un angle (entre les côtés congrus)	4. Segment (côté); reporter l'angle donné; reporter la mesure du côté donné; relier l'extrémité du segment donné avec le point obtenu	3
		2	Mesures de la base et de la h	3. Segment (base), médiatrice; reporter la mesure de la hauteur sur la médiatrice	3
			Aire et la mesure de la h	A=bh/2, b=2A/h, *construction* 3	3
			Aire et la mesure de la base	A=bh/2, h=2A/b, *construction* 3	3
		2	Mesures de la base et de l'angle opposé (A)	5. Segment (base); calculer l'angle inconnu (180°-A)/2; effectuer la *construction* 2	3
		2	Mesures d'un côté et d'un angle (entre le côté et la base)	6. Segment (côté); reporter l'angle donné (A); calculer l'angle inconnu (180°-2A); reporter l'angle obtenu d'une autre extrémité du segment	3
		2	Mesure de la h et d'un angle opposé à la base (ou angle congru)	7. Hauteur; reporter ½ de la mesure d'angle de chaque côté; droite ⊥ à la h. (ou calculer l'angle inconnu (180°-A)/2; effectuer la construction précédente)	4
Triangle équilatér.		1	Mesure d'un côté	1. Segment; reporter un angle de 60°; reporter la mesure du segment sur la demi-droite obtenue; relier les extrémités de deux segments (ou faire la rotation du segment à l'angle de 60°)	3
		1		2. Segment; de chacune des extrémités, reporter un angle de 60°	3

				3. Segment, médiatrice; de l'une des extrémités, reporter un angle de 60°; relier le point d'intersection à l'extrémité du segment.	3
				4. Segment, médiatrice; de l'une des extrémités du segment, tracer un arc du rayon égal à la mesure du segment	3
				5. Segment; de chacune des extrémités du segment, tracer un cercle de rayon égal à la longueur du segment	3
		1	Rayon du cercle circonscrit	6. Cercle; tracer un rayon; reporter un angle de 120° deux fois (ou faire la rotation du rayon à l'angle de 120°)	3
		1	Rayon du cercle circonscrit	7. Cercle; tracer un rayon; reporter un angle de 30° de chaque côté du rayon; relier les points d'intersection	4
		1	Rayon du cercle inscrit	8. Cercle; partager en trois parties égales (reporter un angle de 120°); tracer les droites perpendiculaires aux rayons	4
			Aire (ou h)	$A=b^2/4\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{A}/\sqrt{3}$ (les premières six constructions) ($b=2h/\sqrt{3}$)	4
Triangle scalène (ou quelconque)		3	Mesures de trois côtés	1. Segment; de chacune des extrémités du segment, tracer deux arcs avec l'ouverture de compas égale à la mesure de deuxième et du troisième côté (le point d'intersection de deux arcs est le troisième sommet)	3
			Mesures d'un côté et de deux angles	2. Segment; de chacune des extrémités du segment, reporter les mesures de deux angles (le point d'intersection est le troisième sommet)	3
	 		Mesures de deux côtés et d'un angle entre eux	3. Segment ; de l'une des extrémités du segment, reporter un angle donné; reporter la mesure du deuxième segment sur la demi-droite obtenue; relier les extrémités de deux segments * La construction du triangle rectangle s'effectue à partir d'un angle droit en reportant les mesures de côtés (ou d'un côté et de l'hypoténuse)	3 2 3
Carré		1	Mesure d'un côté	1. Segment (côté), segment congru et perpendiculaire; répéter; relier les extrémités	1-2
			Aire (ou P) du carré	$A = c^2$, $c = \sqrt{A}$, ($P = 4c$, $c = P/4$)	3
			Aire (ou C) du cercle inscrit	$A = \pi r^2$, $r = \sqrt{A\pi}$, $2r = c$, $c = 2\sqrt{A\pi}$, ($C = 2\pi r = \pi D$, $D = C/\pi$, $c = D$)	4

		1	Les côtés opposés sont parallèles. Tous les côtés sont congrus. Les côtés consécutifs sont perpendiculaires	2. Tracer deux droites //; tracer la droite ⊥ à ces droites; mesurer le segment créé; reporter la mesure de ce segment sur la première droite; tracer la droite perpendiculaire.	2
		1	Rayon du cercle circonscrit	3b. Cercle; deux diamètres perpendiculaires; relier les points d'intersection de deux diamètres et du cercle. (Ou les procédures renverses : 3c. Deux droites ⊥, cercle)	2-3
		1	Mesure d'une diagonale	4. Segment (diagonale); milieu; droite perpendiculaire; du point d'intersection, reporter sur la droite la mesure de ½ de la mesure de la diagonale; relier les points	3
			Aire (ou C) du cercle circonscrit	$A=\pi r^2$, $r = \sqrt{A\pi}$, 2r =D, D=diagonale, ($C = 2\pi r = \pi D$, $D = C/\pi$)	4
		1	Rayon du cercle inscrit	5a. Cercle; tangente; tangente ⊥ à la première; tangente ⊥ à la deuxième; tangente ⊥ à la première et à la troisième (construction approximative) 5b. Cercle; rayon; droite⊥ au rayon (tangente); répéter	3
Rectangle		2	Mesures de deux côtés	1. Segment (1[e] côté); segment ⊥ (2[e] côté) ; répéter	1-2
			Mesure d'un côté et P (ou A)	Calculer la mesure du côté b P = 2 (a+b), a =P/2 - b (A =ab, b = A/a) (*construction* 1)	3
		2	Mesure d'un côté (a) et d'une diagonale (d)	2. Segment (1[e] côté); droite ⊥ passant par l'une des extrémités; d'une autre extrémité du segment avec ouverture du compas égale à la mesure d'une diagonale; tracer un arc ; droite ⊥ à la première et passant par le point d'intersection; droite ⊥ au segment	3
			Mesure d'un côté et rayon du cercle circonscrit	Calculer la mesure de la diagonale 2R=D, D=diagonale du rectangle (*construction* 2)	4
Losange		2	Mesures du côté (a) (ou P) et d'angle A	1. *Construction* 3 d'un triangle isocèle; tracer les droites parallèles à chaque côté	3
		2	Mesures du côté (a) (ou P) et d'angle (A)	2. Calculer l'angle inconnu (360-2A)/2; *construction* 3 d'un triangle isocèle; répéter la démarche (ou calculer la mesure du côté a=P/4)	3
		2	Mesures de deux diagonales (ou d'une diagonale (d) et A)	3. *Construction* 2 d'un carré (ou calculer la mesure de la deuxième diagonale D=2A/d)	3

		2	Mesure d'une diagonale et du côté (ou P)	4. Calculer la mesure du côté (c=P/4), *construction* 2 d'un triangle isocèle	3
		2	Mesures d'une diagonale et d'un angle (A)	5. À partir de l'angle donné, *construction* 1 d'un triangle isocèle (A/2) ou calculer l'angle inconnu et effectuer la construction	3-4
		2	Rayon du cercle inscrit et mesure d'un angle (A)	6. Cercle; deux droites ⊥ passant par le centre du cercle; reporter A/2; segment // et tangent au cercle; reporter A/2 d'un autre côté; du point d'intersection avec la droite ⊥, reporter (360-2A)/4; relier les points	4
Parallélogramme		3	Mesures de 2 côtés (a et b) et d'un angle (A)	1. *Construction* 3 d'un triangle scalène; droite // au premier côté; droite // au deuxième côté	3
		3	Mesures d'un côté (a), d'une diagonale (d) et d'un angle (A)	2. Segment (côté); reporter l'angle donné; droite // à un côté d'angle; arc (d=r); droite // au segment	3
		3	Mesures de deux diagonales (c et d) et d'angle entre elles (A)	3. Tracer l'angle donné; prolonger les côtés; reporter les moitiés des diagonales; relier les points	3
		3	Mesures d'un côté, d'un angle et A (P)	4. Calculer h=A/a; segment (h); droite ⊥; reporter l'angle 90-A; du point d'intersection, reporter la mesure du côté; droites // à chaque côté	4
		3	Mesures d'un côté, d'une diagonale et de la h	5. Segment (côté); segment ⊥ (h); droite // au côté et passant par l'extrémité de la h; relier le point d'intersection à l'extrémité du segment; droite // à ce côté	4
Trapèze		4	Mesures de deux bases, d'un côté et d'un angle	1. Construction consécutive (base, angle, côté, base//, relier les extrémités)	3
		4	Mesures de deux bases, d'un angle et de la h	2. Tracer deux droites perpendiculaires; reporter les mesures de la base (B) et de la h; tracer la droite // à la base (ou ⊥ à la h); reporter l'angle donné; du point d'intersection, reporter la mesure de la base (b)	3-4