Université de Montréal

Enseignement introductif de l'algèbre et validation

par
Gustavo Barallobres

Faculté des sciences de l'éducation
Département de didactique

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph. D.) en sciences de l'éducation, option didactique

Juillet, 2005

Université de Montréal
Faculté d'études supérieures

Cette thèse intitulée :
Enseignement introductif de l'algèbre et validation

présentée par
Gustavo Barallobres

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

France Caron
président-rapporteur

Gisèle Lemoyne
directrice de recherche

Louise Poirier
membre du jury

Claire Margolinas
examinatrice externe

Jean M. Turgeon
représentant du doyen de la FES

Résumé

Dans cette recherche, nous avons analysé deux situations didactiques afin d'étudier le fonctionnement des connaissances arithmétiques dans le contexte du passage de l'arithmétique à l'algèbre, en considérant la validation intellectuelle comme une problématique fondamentale dans ce changement de pratiques. Ces situations ont été expérimentées dans quatre classes, deux classes en Argentine (niveau correspondant à la 1ère année de l'enseignement secondaire québécois) et deux classes au Québec (2e secondaire). Notre étude visait à mettre en lumière certaines limites des pratiques arithmétiques et des pratiques de validation associées, lorsqu'il s'agit de résoudre une contradiction et de valider le caractère général d'une formule algébrique. Nous étions également intéressé à analyser le développement des situations dans le cadre de classes caractérisées par des contrats didactiques différents : efforts d'adaptation des connaissances des élèves dans le but de provoquer un changement de pratiques (changement de contrat); travail du professeur à l'intérieur des contraintes imposées par les situations.

La conception des situations a reposé sur la théorie des situations et sur plusieurs études en didactique de l'algèbre. La problématique de notre recherche nous a amené à une analyse plus fine des certains aspects de ces théorisations. La prise en compte de la nécessité du développement d'une pratique de validation intellectuelle, comme problématique en soi et comme source possible pour donner sens à des pratiques algébriques, a conduit à un examen plus attentif de la notion d'adidacticité et des situations de validation, dans la théorie des situations didactiques élaborée par Brousseau (1998).

Notre essai pour mettre en place une pratique de validation nous a permis d'observer un fonctionnement différent des connaissances arithmétiques, en permettant de donner sens à l'entrée des élèves dans de pratiques algébriques, puis de développer un langage particulier. Le développement de ce langage a favorisé, en même temps, l'entrée dans les classes des nouveaux objets : les « expressions numériques », qui étaient auparavant un moyen de calcul, deviennent maintenant des objets de réflexion. Mais la reconnaissance du caractère explicatif et opératoire des écritures exige une utilisation différente des propriétés des opérations, fruits d'accords sociaux et de conventions culturelles spécifiques d'une nouvelle pratique. Notre recherche a permis de caractériser ce changement de pratique et de contrat, et de réaliser la complexité du rôle du professeur dans ce contexte.

L'élaboration d'accords sociaux et de conventions culturelles spécifiques d'une nouvelle pratique implique la production de connaissances. Notre recherche a caractérisé la nature de cette production et la nature des connaissances impliquées, en identifiant différents niveaux de connaissances en jeu. Nous avons analysé ces connaissances et les conditions de production à la lumière de la théorisation existante; nous avons enfin formulé des questions qui n'ont pas encore été traitées dans les recherches en didactique des mathématiques.

Mots-clés : validation, algèbre, adidactique, adidacticité, introduction à l'algèbre, validation intellectuelle, validation empirique, situations de validation, situations didactiques, débat collectif.

Summary

In this research, we have analyzed two didactical situations to study the functioning of arithmetical knowledge in the transition from arithmetic to algebra considering the intellectual validation as a fundamental problematic in this change of practices. The situations have been experienced in four classes, two in Argentina (the level was that corresponding to a 1st year high school in Quebec) and the other two in Quebec (2^{nd} year high school). The aim of our research was to be able to highlight certain limits of arithmetic practices and the validation practices associated to it in situations in which the students have to resolve a contradiction and validate the general character of an algebraic formula. We were also interested in analyzing the development of situations within the scope of classes characterized by different didactic contracts: students′ efforts to adapt its knowledge in the context of a change of practice (negotiation of the contract), the teacher's work within the constraints imposed by the situations.

The conception of the situations is based on the theory of situations and on several researches on the didactics of algebra. Our research problematic has lead us to a more detailed analyses of certain aspects of these theorizations. To consider the need to develop a practice of intellectual validation –as a problematic in itself and as a possible source of giving sense to the algebra practices— has lead us to a more careful study of the notion of "adidacticity" and situations of validation according to the Brousseau's (1998) theory of didactic situations.

While trying to enhance a validation practice, we have been able to observe a different functioning of the arithmetic knowledge. This functioning has given sense to the students' introduction to the algebraic practices and subsequently develop a particular language. The development of this language has also favored the apparition of new objects: the «numerical expressions» which had previously been a calculus device, have now become an object of reflection. But to recognize the explicative and operative character of the numerical expressions, the properties of the operations must be used in a different way. Thus, the new practice arises from specific social agreements and cultural conventions. Our research has allowed us to characterize these changes of practice and contract and see the complexity of the teacher's role in such a context.

The development of this new practice implies the production of "knowledge". Our research has characterized the nature of this production and the nature of the knowledge implied, identifying different levels of knowledge. We have analyzed those different levels of knowledge and the conditions of their production in light of the existing theorization. Finally, we have posed some questions that have not yet been discussed in mathematics didactics research.

Key words: validation, algebra, adidactical, adidacticity, introduction to algebra, intellectual validation, empiric validation, didactical validation, didactical situation, collective debate.

Table de matières

Remerciements

C'est à plusieurs titres que j'exprime ici ma profonde reconnaissance à Madame Gisèle Lemoyne. Tout d'abord, à la directrice de thèse qui, avec sens critique, soutien éclairé et ouverture d'esprit, m'a conduit avec expertise au but de cette exploration mais également à la « personne » très généreuse avec qui j'ai eu le plaisir de partager ces trois années d'étude. Nos conversations quotidiennes, à propos de divers sujets, ont grandement contribué à ma formation professionnelle mais aussi plus fondamentalement à ma formation humaine.

Les premières idées de cette recherche ont émergé dans un séminaire de didactique des mathématiques à l'Université de Buenos Aires dans lequel nous essayions de comprendre l'ouvrage « De l'importance du vrai et du Faux dans les classes de mathématiques » de Claire Margolinas. Je remercie les professeurs qui animaient ce séminaire, Mabel Panizza et Patricia Sadovsky, mes premiers «formateurs» en didactique des mathématiques. Ce séminaire n'a été que le début de nombreuses discussions qui ont renforcé notre relation intellectuelle et amicale, encore aujourd'hui vivante. Il faut préciser que ces séminaires ont commencé sans aucun appui institutionnel, motivés par le seul plaisir de l'enrichissement intellectuel. Je les remercie vivement pour le temps qu'ils nous ont accordé gracieusement dans le difficile contexte de travail en Argentine.

Claire Margolinas n'a pas été seulement l'auteur de l'ouvrage qui m'a enthousiasmé et incité à étudier la problématique de la validation. Elle a été aussi la personne généreuse qui, via le courriel, m'a éclairé de son avis à chacune de mes demandes (et qui a toujours reçu mes critiques avec un esprit d'ouverture). Elle m'a aussi reçu en France afin de poursuivre nos discussions. Je remercie donc Claire Margolinas pour ces échanges qui ont grandement contribué à ma formation en didactique des mathématiques, en particulier, à la théorie de situations.

J'aimerais accorder une place très importante dans mes remerciements aux professeurs qui ont participé à l'expérimentation, Héctor Ponce, Claudia Comparatore, Simone Ghoubril et Friz Boucher ainsi que les élèves et les autorités des écoles à Buenos Aires et de l'école Pierre Laporte à Montréal. Enfin, à mes amis, Mirta Hanfling, Horacio Itzcovich et Valeria Machiunas qui m'ont aidé à réaliser les enregistrements en Argentine ainsi que, à nouveau, Gisèle Lemoyne qui m'a accompagné lors des séances d'expérimentations dans les classes de Montréal.

J'aimerais également souligner que cette recherche a été encouragée par le Conseil de la recherche en sciences humaines du Canada et la Faculté des études supérieures de l'université de Montréal respectivement par le biais de bourses d'études doctorales et de rédaction.

Introduction

Introduction

L'école secondaire est une institution dans laquelle des transformations des activités mathématiques des élèves doivent se produire pour enrôler ces activités dans certaines pratiques mathématiciennes (Conne, 1999), quelques-unes étant commandées par l'introduction de nouveaux objets et d'autres, par des ruptures avec des pratiques de l'institution École primaire. Parmi ces transformations, nous en identifions deux : le changement des pratiques arithmétiques aux pratiques algébriques et le passage de la validation empirique à la validation intellectuelle.

Plusieurs chercheurs (Arzarello, 1993; Balacheff, 2001; Bednarz, Kieran et Lee, 1996; Chevallard, 1989; Grugeon, 1995; Kieran, Boileau et Garançon, 1996; Lemoyne, Conne et Brun, 1993; Lins, 2001; Radford, 1999, 2003) ont essayé de caractériser le passage de l'arithmétique à l'algèbre en termes de continuités et de ruptures; d'autres ont étudié l'activité et les difficultés des élèves dans le cadre de ce changement de pratiques. En analysant le savoir à enseigner (programmes et manuels scolaires), certains auteurs (Chevallard, 1989; Broin, 2002) remarquent la présence d'une « fausse » dialectique arithmétique-algèbre dans la construction des pratiques algébriques. En ce qui concerne la problématique de la validation, elle a été traitée par divers auteurs (Arsac, 1992, 1997; Balacheff, 1987, 1991; De Villiers, 1993; Hanna, 1989, 1990; Harel et Sowder, 1998; Legrand, etc.) mais, sauf exceptions (Mary, 1999, Healy et Hoyles, 2000), les travaux se sont développés en géométrie.

Dans notre recherche, nous nous intéressons au développement de pratiques algébriques scolaires dans lesquelles la construction d'un système de validation interne, qui règle leur fonctionnement, occupe un lieu central. Nous nous interrogeons sur le fonctionnement des connaissances arithmétiques à la base d'une « vraie » dialectique arithmétique-algèbre. Dans un contexte formel, certains des savoirs nécessaires à la validation en algèbre sont données par les axiomes, d'autres en sont déduits, ce qui n'est pas le cas (ni ne pourrait l'être) dans le contexte scolaire.

Supposer la transparence de la transposition au calcul algébrique des propriétés des opérations définies dans les différents ensembles numériques (nombres naturels, nombres entiers, nombres rationnels), nourrit, à notre avis, l'illusion qui commande la fausse dialectique dont nous avons déjà parlé. Le fonctionnement de ces propriétés dans l'arithmétique scolaire (leur contexte d'introduction) et dans l'algèbre scolaire est différent. Par exemple, le calcul « $18 - 3 - 6$ » n'exige pas l'utilisation des propriétés des opérations, tandis que la réduction de l'expression « $3a - b - a$ » (ou la recherche d'une expression équivalente) l'exige; la transformation suivante de cette dernière expression, soit « $a(3-1) - b$ » fait intervenir, entre autres (implicitement ou explicitement), la distributivité de la multiplication. Dans les manuels scolaires du primaire que nous avons pu analyser, cette dernière propriété apparaît implicitement dans les algorithmes de calcul et dans certains calculs mentaux (calculs limités, de manière surprenante, aux nombres naturels), généralement comme moyens pour obtenir un résultat numérique et non pas comme moyens de contrôle ou de justification. De plus, la transposition de cette propriété de l'ensemble des nombres naturels aux autres ensembles des entiers relatifs et des nombres rationnels est loin d'être évidente.

Dans le contexte d'une fausse dialectique, cette différence dans le fonctionnement des connaissances en arithmétique et en algèbre n'est pas identifiée : si une expression algébrique était « l'image » d'un calcul numérique, pourquoi l'élève ferait-il appel à des propriétés des opérations pour réduire l'expression algébrique si, dans son « image », ces propriétés ne sont pas des moyens de résolution?

Par un manque de clarté sur ce qui pourrait être une dialectique arithmétique-algèbre pour la reconstruction de l'algèbre scolaire, le système éducatif réagit de diverses manières: le calcul algébrique est présenté comme un ensemble de règles sans justification; les connaissances qui valident le calcul algébrique se « transposent directement » de l'arithmétique (elles sont une « copie » des connaissances arithmétiques); des « artefacts didactiques » remplacent la dialectique arithmétique-algèbre par un système extérieur qui « copie » le fonctionnement algébrique, en le transposant sur des objets externes à la mathématique (tuiles algébriques, balance). Selon cette transposition, la validation n'est pas interne; les mécanismes régulateurs des connaissances algébriques ne sont pas de connaissances mathématiques : dans certains cas, il s'agit de connaissances issues du contexte de référence (le principe d'équilibre, pour la balance); dans d'autres cas, il s'agit de « conventions » élaborées sur des systèmes d'objets concrets et construites à l'image du fonctionnement du système qu'on veut étudier (tuiles algébriques).

Les processus de « concrétisation » qui envahissent l'enseignement des mathématiques ne nous semblent pas uniquement attribuables à des interprétations réductrices de la notion de « contextualisation»; ils témoignent également d'un problème épistémologique. Comme Glaser (1981) le montre à propos des nombres entiers, il a fallu une *rupture idéologique* qui imprégnait la pensée mathématique –fondamentalement des génies de l'époque!- pour dépasser les exemples pratiques qui « expliquaient » les nombres relatifs sur le mode métaphorique et les accepter comme des pures « inventions ». L'élaboration d'une genèse artificielle pour la reconstruction scolaire des savoirs ne peut négliger les processus de contextualisation liés à la production du sens (Brousseau, 1998). Mais ces processus ne devraient pas être des obstacles à certaines « ruptures » nécessaires à l'évolution de la pensée mathématique; la construction de « sens locaux » ne devrait pas obstruer la construction de sens « plus globaux » associés à des processus de construction internes aux mathématiques. La culture scolaire semblerait « éviter », par tous les moyens possibles, de faire face à ces ruptures : dans le cas des nombres entiers, l'effort de recherche de « modèles concrets » à partir desquels justifier les opérations va dans ce sens. Lorsqu'un processus d'abstraction -nécessaire à l'évolution de la pensée mathématique- point à l'école, l'artillerie « du concret » a toujours ses armes préparées pour l'arrêter. Certains « modes de production » en mathématique, à la base de ces ruptures, par exemple, le principe de permanence dans la construction des ensembles de nombres (Glaser, 1981), ne sont pas considérés explicitement lorsqu'il s'agit de reconstruire artificiellement des savoirs scolaires. La didactique des mathématiques doit se poser le défi de la construction de sens « locaux » des savoirs en « harmonie » avec des « façons de faire » caractéristiques de la rationalité mathématique et des modes de validation internes. Comme le fait remarquer Glaser (1981), la *justification* de la règle des signes « moins fois moins fait plus » implique une construction intellectuelle qui exige de se détacher du concret pour aborder le problème dans une *toute autre perspective* (saut épistémologique décisif vers l'idéalisation des objets mathématiques). Si le système scolaire décide que ce changement de perspective n'est pas à la portée des élèves, il doit au moins avoir conscience des limites des reconstructions provoquées et des obstacles possibles à des reconstructions futures.

C'est dans ce contexte que nous analyserons, au premier chapitre, les pratiques algébriques dominantes dans les institutions scolaires au Québec; cette analyse sera orientée par certaines des questions formulées par Lefebvre (1991) : sur quoi l'algèbre élémentaire, telle qu'enseignée dans nos écoles, est-elle fondée? Sur des nombres? Mais sur quels nombres, ayant quelles propriétés, établies, présentées ou justifiées de quelle façon? Cette analyse nous permettra de mettre en évidence l'impossibilité de réaliser notre étude dans le cadre des pratiques ordinaires des classes, puis le besoin de perturber le fonctionnement de ces classes par l'élaboration d'une ingénierie. La mise en œuvre des transformations ne pourra donc se faire, sans l'élaboration de projets d'enseignement; elle commandera l'étude et l'analyse des conditions didactiques qui nous permettront d'explorer l'entrée des élèves dans des pratiques algébriques dans lesquelles la validation intellectuelle occupe un lieu central.

Notre travail n'a pas l'ambition de caractériser cet espace didactique sur lequel pourrait s'appuyer la construction de l'algèbre scolaire, mais plus modestement d'explorer *quelques-unes* de ses caractéristiques possibles dans le cadre d'études expérimentales. Nous partons de l'hypothèse qu'une « vraie » dialectique arithmétique-algèbre est au cœur de cet espace didactique; nous essayerons d'apporter des éléments de réflexion afin d'identifier certaines des caractéristiques fondamentales de cette « vraie » dialectique et de la faire vivre dans les classes. Dans ce contexte, l'analyse de pratiques algébriques à reconstruire et la confrontation avec le développement scolaire de l'arithmétique nous ont conduit à reconnaître un fonctionnement différent des connaissances arithmétiques, notamment des connaissances sur les propriétés des opérations; ces propriétés changent ainsi de statut: d'outils pour obtenir un résultat numérique, elles deviennent des moyens pour établir des équivalences d'expressions algébriques. L'étude d'un espace didactique qui favorise ce changement devient nécessaire.

Voici certaines des questions qui orientent notre étude des conditions didactiques qui permettraient de provoquer un changement de statut des connaissances arithmétiques:

Dans quel contexte serait-il nécessaire d'établir l'équivalence d'expressions numériques?

Chevallard (1989) propose l'étude et la validation de certaines propriétés numériques, comme un contexte possible pour donner sens au calcul algébrique. Mais certaines recherches (Arsac, 1992, 1997; Healy et Hoyles, 2000) ainsi que notre expérience personnelle, montrent que, lorsqu'il s'agit de valider une propriété numérique (en général, avec un domaine de validité infini), les preuves des élèves (qui sont en train de construire une rationalité mathématique) ne dépassent pas, majoritairement, l'empirisme naïf (Balacheff, 1987). L'établissement des équivalences entre des expressions numériques acquerrait un sens dans le contexte de preuves intellectuelles et non, dans celui de preuves empiriques. Alors,

Comment aider les élèves à dépasser ce niveau empirique de validation et à entrer dans un jeu intellectuel?

Pour étudier ces questions, nous avons choisi de construire des situations didactiques dans lesquelles l'enjeu ne soit pas de déterminer la vérité d'une propriété numérique, mais d'expliquer pourquoi cette propriété est vraie ou ne l'est pas. Une question encore plus précise découle de ce choix :

Quelles conditions didactiques permettraient d'engager les élèves dans la recherche d'une explication, dans la recherche de la compréhension?

Pour Piaget (1974) la compréhension est une recherche d'équilibre; elle implique la recherche de raisons qui ont amené le résultat obtenu. Selon DeBlois (1995, p. 5),

« Pour qu'il y ait recherche de compréhension, la poursuite d'un but doit être perturbée par un obstacle ou une lacune, le résultat obtenu doit surprendre. Toutefois, la pensée offre d'abord des résistances aux changements en annulant ou en rejetant la perturbation qui provoque un déséquilibre. L'enfant arrive alors à réaliser des compensations incomplètes mais plus économiques »

La première situation didactique a été choisie de manière à provoquer des déséquilibres. Les caractéristiques de ces déséquilibres (liées aux savoirs en jeu, c'est-à-dire au cœur de la dialectique arithmétique-algèbre) et les variables didactiques que nous avons retenues pour un tel objectif seront explicitées dans l'analyse a priori des situations (au troisième chapitre). La recherche d'un équilibre va exiger un fonctionnement différent des opérations arithmétiques et de leurs propriétés. Nous parlerons ici de fonctionnement « algébrique » du numérique.

La question de la nécessité de l'établissement d'équivalences d'expressions algébriques (ou d'expressions numériques) a guidé la construction de la deuxième situation. Mais, nous avons aussi voulu explorer un autre contexte : il ne s'agit pas de confronter les élèves avec une contradiction pour provoquer un déséquilibre, mais d'exiger l'élaboration de méthodes de calculs rapides (qui impliquent l'étude de relations numériques), lesquelles donnent origine à des formules équivalentes (écritures algébriques des méthodes). La validation de chaque formule et de l'équivalence, dans les contextes spécifiques que nous avons choisis, va nous confronter aux problématiques de la validation contextuelle et de la validation syntaxique. Nous rencontrons ici une question déjà identifiée par divers auteurs, entre autres, par Arzarello, Bazzini, et Chiappini (2001), soit celle qui concerne les résolutions algébrique et contextuelle. Le choix de certaines variables didactiques de la situation a pour but d'opérer un détachement du contexte, afin de faire face à la question de la validation syntaxique. La recherche d'une explication n'est pas liée à la résolution d'une contradiction, mais à la confrontation de différentes stratégies et de leurs écritures associées.

Nous faisons l'hypothèse que le fonctionnement algébrique du numérique est à la base de la construction, dans le contexte du calcul algébrique, de mécanismes régulateurs qui font appel à des connaissances mathématiques pour la validation (critères de validité selon le sens défini par Margolinas, 1992).

Dans le second chapitre, nous présenterons le cadre théorique avec et contre lequel nous avons interagi pour l'élaboration d'un cadre de référence pour la construction et l'analyse des situations didactiques. Cette interaction nous permettra de situer notre travail par rapport à d'autres propositions didactiques. Dans les premières sections de ce chapitre, nous ferons le point sur quelques approches sur l'enseignement de l'algèbre et sur la validation dans l'enseignement des mathématiques. Pour l'identification et l'étude de conditions didactiques locales, nous ferons appel à la théorie de situations; de cette manière, nous réinterpréterons la problématique de la validation en algèbre dans le cadre spécifique de cette théorie. Les contraintes institutionnelles qui interagissent avec ces conditions, plusieurs d'entre elles étant canalisées par l'action de l'enseignant, par la culture de la classe, etc., seront prises en compte dans l'analyse des données.

Le troisième chapitre portera entièrement sur les aspects méthodologiques. Nous présenterons les caractéristiques générales de l'ingénierie que nos proposons, les descriptions et analyses des situations retenues, situations ayant fait l'objet de mises à l'essai dans des classes en Argentine et ayant été adaptées pour tenir compte des spécificités des institutions d'enseignement québécoises. Nous définirons ensuite les observables de notre recherche et leur traitement.

Suivant l'approche proposée par Mercier (1998), nous considérons l'acte d'enseigner comme une activité coopérative entre l'enseignant et l'élève. De ce point de vue, élaborer et étudier des projets d'enseignement visant la mise en œuvre de nouvelles pratiques nous amène à analyser l'activité du couple enseignant-enseigné (Conne, 1999) du coté des élèves et du coté de l'enseignant. De plus, comme le souligne Balacheff (1987 et 2001), dans ces nouvelles pratiques, le rôle de l'enseignant est fondamental; il écrit à ce propos :

« As in the case of linear algebra (Dorier,1997) or in the case of mathematical proof, there is no possible entrance to the world of algebra without a strong push and guidance from the teacher because there is no natural passage from the problématique accessible from the child's world to the mathematical problématique » (Balacheff, 2001, p. 259)

S'il est possible, dans une certaine mesure, de rapporter l'activité de l'élève à celle de l'enseignant (Bloch, 1999), il faut aussi reconnaître qu'une partie des contraintes internes (Coulange, 2001) qui pèsent sur l'activité de l'enseignant dépend de l'activité des élèves. Il est donc possible de voir une imbrication des activités du couple enseignant-enseignés, d'où notre intérêt d'étudier leurs relations.

Le quatrième chapitre sera consacré à l'analyse et à l'interprétation des résultats. Une synthèse des principaux résultats de notre recherche, une identification des apports et limites de notre recherche, ainsi qu'une brève présentation de quelques perspectives de recherches, seront effectuées au cinquième chapitre.

Chapitre I

Problématique

Chapitre I

Problématique

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre ont donné lieu à de nombreuses recherches en didactique des mathématiques, certaines montrant les difficultés rencontrées par les élèves dans l'interprétation d'écritures algébriques et dans la représentation algébrique de problèmes et d'autres, proposant divers dispositifs pour renouveler l'enseignement de l'algèbre et remédier à ces difficultés. Comme nous l'avons mentionné en introduction, peu d'études ont été dévolues à la construction de dispositifs didactiques pouvant faciliter l'entrée des élèves dans des pratiques algébriques et la transformation de pratiques arithmétiques héritées de l'école primaire pouvant servir de tremplin pour la construction de pratiques algébriques. La construction de pratiques algébriques implique également une transformation des pratiques de validation. Notre recherche vise donc à créer un milieu pour installer de telles pratiques.

Pour mieux définir les problèmes qui nous préoccupent dans cette recherche, nous effectuons d'abord une analyse des études permettant de préciser ce que nous entendons par pratiques arithmétiques et algébriques. Ces précisions nous permettent ensuite de procéder à une étude des manuels en usage et de montrer comment l'enseignement prenant appui sur ses manuels, et sur les programmes d'enseignement actuels, ne peut assurer le développement de pratiques algébriques et de pratiques de validation, du moins selon la perspective que nous définirons. L'obligation de penser à des dispositifs extérieurs aux dispositifs usuels d'enseignement de l'algèbre motive enfin la présente recherche.

1. Pratiques arithmétiques, pratiques algébriques et validation

Chevallard (1989) identifie une dialectique entre le numérique et l'algébrique qui, selon lui, existait avant la construction d'un langage algébrique proprement dit :

«Les Grecs distinguaient entre deux arithmétiques, l'arithmétique vulgaire, ou logistique, celle des calculateurs, et l'arithmétique « propre aux philosophes », comme dit Platon, c'est à dire, en gros, la théorie de nombres. Les calculateurs calculent. Les arithméticiens étudient la structure du numérique. Tous manipulent, pour cela, un langage ***du numérique,*** *mais tous ne l'emploient pas aux mêmes tâches, et ne lui reconnaissent pas les mêmes valeurs»* (p. 72)

Voilà les caractéristiques fondamentales de cette dialectique, selon Chevallard (1989):

- l'algèbre apparaît comme une mémoire permettant de conserver la trace des opérations effectuées. L'algèbre s'oppose ainsi à l'arithmétique par une propriété qui lui donne une puissance supérieure. Chevallard (1989, p. 57) écrit à ce propos que *« l'algèbre apparaît, à la fois, comme l'accomplissement de l'arithmétique. S'appliquant à l'origine au même corps de problèmes, elle est une arithmétique délivrée de l'opacité et de l'oubli qui dérobent à nos yeux la structure des problèmes étudiés ».* L'algèbre est donc un instrument supérieur pour une tâche semblable. Il s'agit moins d'établir les résultats d'opérations successives que d'en tracer le tableau, et de découvrir ainsi des formules pour trouver la solution de tous les problèmes du même genre.

- l'arithmétique est régie par la loi de la simplification : l'expression « 4 + 8 » ne saurait, en calcul numérique, figurer comme réponse; le calcul, à ce stade, est considéré « inachevé ». Cette expression ne saurait être qu'une forme transitoire, labile (parce que quatre plus huit font douze). En revanche, dans l'étude des Pythagoriciens sur l'analyse du numérique, les représentations géométriques des nombres conduisent à un autre utilisation, et aussi à un autre statut, des expressions numériques: $5 + 7 = 3 \times 4$ exprime le rapport entre la somme de deux nombres impairs consécutifs et les multiples de 4, ainsi que le statut générique.

- le langage algébrique actuel, créé notamment par Viète et Descartes, prend appui sur l'analyse précédente du numérique, y conférant souplesse et puissance. Les précisions effectuées par Chevallard (1989, p. 75) sont fort instructives pour apprécier cette évolution :

« le calcul arithmétique utilise le langage numérique pour son pouvoir ***désignatif*** *essentiellement : ¾; 0,75; 4+8 et 12 sont à cet égard équivalents, puisqu'ils désignent le même nombre. Ils sont des* ***noms*** *différents pour un même être mathématique. L'arithmétique « algébrique », au contraire, distingue ces noms, parce que, bien qu'ils désignent la même chose, ils ne montrent pas la même chose (ils n'apportent pas la même information monstrative) à propos de l'être mathématique dont ils sont deux noms différents (2^2+2^3 montre que 12 est une somme de puissances de deux). C'est ainsi que, au cœur même du langage numérique, s'insinue un clivage, et pour tout dire une tension, entre deux* ***modes de fonctionnement*** *: l'efficacité désignative (propre à l'usage calculatoire du langage numérique) tend à ignorer la valeur monstrative de l'expression écrite; le principe d'achèvement des calculs voue à l'éphémère les « noms intermédiaires », et « 4+8 » devient ainsi « 12 », sans qu'aucune trace nous soit conservée de l'histoire de ce « 12 ». Au contraire, le langage algébrique –notamment parce qu'il est une mémoire- vient permettre de conserver de meilleure façon l'information monstrative, et surtout de faire apparaître l'information monstrative pertinente : le passage, en simplification, de l'expression (2p-1)+(2p+1) à l'expression 4p, fait apparaître que (2p-1)+(2p+1) désigne un nombre multiple de 4; le passage en complexification de 4p à $(p+1)^2-(p-1)^2$, fait apparaître que (2p-1)+(2p+1) est une différence de deux carrés »*

- L'outil essentiel pour l'arithmétique traditionnelle est le langage ordinaire, augmenté du calcul sur des nombres. On ne calcule pas sur les énoncés du langage ordinaire : pour cela, on prêtera donc à l'arithmétique la vertu d'obliger à « raisonner » sur les énoncés du langage ordinaire, et on déniera au calcul toute autre valeur que celle d'une mécanique, qui peut seulement dérailler, et faillir. L'algèbre fournit un moyen plus puissant, essentiellement lié à l'usage des lettres et à la possibilité de calculer sur les expressions littérales qu'elle conduit à former : le raisonnement se fait calcul.

Pour Chevallard (1989), la création du langage algébrique permet de dégager plus nettement la problématique de l'étude du numérique, permet de mieux maîtriser la dialectique du numérique et de l'algébrique. L'algébrique devient un outil de l'étude du numérique, le premier outil, le plus élémentaire sans doute. Mais pour que le fonctionnement de cet outil soit efficace, il faut quelque peu étudier cet outil, par exemple se poser les problèmes de la factorisation des expressions algébriques (afin notamment de résoudre des équations algébriques). Or, en ce point, le numérique lui-même est un outil d'étude à l'algébrique : le flux s'inverse, ce qui nous autorise à parler de dialectique.

En analysant les programmes scolaires en France, Chevallard fait remarquer qu'au-delà de la disparition de la structure du corpus mathématique enseigné en arithmétique et algèbre, c'est la dialectique du numérique et de l'algèbre - implicitement présente à travers l'opposition de l'arithmétique et de l'algèbre- qui va se trouver atteinte. Ces deux domaines –le numérique et le littéral- vont coexister dans une simple juxtaposition, existences qui trouvent en elles-mêmes leur propre justification : ce n'est pas l'algébrique qui vient permettre d'étudier le numérique, c'est le numérique qui « justifie » et « permet de comprendre » l'algébrique. Chevallard montre comment la dialectique est remplacée par une interaction fictive dans laquelle « le numérique » vient remplir le rôle du « concret ». Voici un exemple paradigmatique, proposé par Chevallard (1989, p. 77), exemple que l'on peut encore rencontrer dans les manuels et aussi dans le discours du professeur :

Pour justifier que $x-y = x+ (-y)$, le manuel propose :

«x , y et z appartiennent à D. z= x-y signifie que z+y=x.
Comment est appelé z pour x et y dans cet ordre?

Observe :

$Z = 13-(-7)$	$z = x-y$
$Z+(-7) = 13$	$z+y = x$
$(Z+(-7))+7 = 13+7$	$(z+y)+(-y) = x+(-y)$
$z+((-7)+7) = 13+7$	$z+(y+(-y))= x+(-y)$
$z+0 = 13+7$	$z + 0 = x+(-y)$
$z = 13+7$	$z = x+(-y)$

Pour tout x de D, pour tout y de D, x-y est un décimal et x-y =x+(-y). Exemples :
8-(-7)=8+7=15; 9-14=9+(-14) = -5.
L'opération qui, à chaque couple (x;y), x et y de D, fait correspondre le décimal x-y est la soustraction dans D »

Chevallard explique que pour le mathématicien, la « justification » est toute entière contenue dans la colonne de droite (si on définit en général –y comme étant le nombre tel que y +(-y)=0, et si les propriétés ordinaires (associativité, etc.)- valent encore pour le nouvel ensemble de nombres ainsi défini, alors le nombre z que je dois ajouter à y pour obtenir x- ce qu'on appelle la différence de x et y et, qu'on note x – y, n'est pas autre chose que x +(-y)). Dans cet exemple, la « justification » fait appel « au numérique ». Mais le contenu de la colonne de gauche n'est que l'image en miroir des calculs littéraux de la colonne de droite. Et, c'est pour permettre de tels calculs, que le langage algébrique est précisément nécessaire : la justification de l'algébrique s'appuierait sur un mode de fonctionnement de l'algébrique, et qui suppose donc l'algébrique!

On peut reconnaître clairement dans l'analyse proposée par Chevallard (1989) que, dans le cadre algébrique, les propriétés qui valident « l'opératoire » au niveau du modèle proviennent du système qu'il modélise : si on définit en général y comme étant le nombre tel que y + (-y) = 0 et si on veut intentionnellement maintenir les opérations et leurs propriétés de base déjà définies dans les ensembles numériques (associativité, distributivité, etc.), il serait suffisant de montrer que x + (-y) + y est égal à x pour justifier que x - y = x + (-y) (définition de la soustraction). Le calcul algébrique élémentaire construit ses normes dans une interaction avec le numérique, son « système modélisé », ce qui confère un sens à son fonctionnement. Mais, comme l'explicite Broin (2002), ces savoirs ont des fonctions différentes : la connaissance des propriétés des opérations, comme savoirs formels et moyens de calculs, est nécessaire en algèbre élémentaire pour réaliser des calculs et pour les valider, de la même façon qu'en arithmétique, les propriétés des opérations servent au contrôle des calculs. On peut voir qu'une reconstruction de l'algébrique en dialectique avec son système modélisé, le numérique, est différente d'une élaboration qui prétend attirer « par abstraction » un fonctionnement du système modélisé qui ne lui appartient pas, qui existe seulement à la lumière du modèle que l'on veut construire.

L'idée de « l'algèbre comme outil pour étudier le numérique » est contenue dans la notion de modélisation mathématique comme noyau de l'activité mathématique, postulée par l'approche anthropologique. Pour Gascon, Bosch et Bolea (2001), l'algèbre scolaire devrait apparaître initialement comme un « instrument algébrique » pour donner origine, progressivement, à des organisations mathématiques chaque fois plus « algébrisées »; ils ajoutent que l'algèbre scolaire n'est pas, en soi-même, une organisation ou praxéologie mathématique structurée avec tous ses composantes (tâches, techniques, technologies, théories). Il nous semble important d'insister sur le fait que l'algèbre est un instrument qui a ses « normes » ou « règles » qui déterminent son fonctionnement, qui permettent, par exemple, de contrôler la validité mathématique du travail au niveau du modèle. C'est ainsi l'étude du modèle, non comme un instrument mais comme un objet, qui entraînera ultérieurement l'émergence de savoirs sur les structures algébriques. (Gascon et al., 2001). Les « normes » du fonctionnement du modèle s'élaborent dans le cadre d'une dialectique entre lui et le système qu'il modélise; elles sont « héritées » du système modélisé (ce qui ne veut pas dire que le modèle soit une simple généralisation du système étudié). La complexité de cette dialectique ne va pas de soi, comme le montrent les travaux de différents chercheurs (Bednarz et al., 1996; Grugeon, 1995; Lemoyne et al., 1993).

Lorsqu'on ne situe pas dans la logique des structures algébriques (position axiomatique), mais plutôt dans le cadre de l'élaboration de pratiques algébriques à l'école, les propriétés du modèle nécessaires pour valider le travail au niveau du modèle s'élaborent dans le cœur d'une dialectique avec le numérique, comme le souligne bien Chevallard (1989):

« Nous essaierons de montrer que le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ses emplois, lui est doublement lié (en référence au problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres qui est au cœur du curriculum du collège). D'une part, en effet, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera le calcul algébrique, ainsi qu'on l'a déjà souligné. Mais, d'autre part, le calcul algébrique constituera le mobile essentiel, et l'outil fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs ». (p.50)

« ...Or la maîtrise formelle du calcul algébrique suppose par nature une bonne connaissance des systèmes de nombres sur lesquels se construit le calcul algébrique; en d'autres termes, elle ne peut s'appuyer sur le seul enseignement ***in vacuo,*** *c'est à dire formel, des formalismes. En retour, le développement du calcul algébrique ne peut s'accomplir que par le moyen de ces extensions successives. C'est la considération de l'équation ax=b (a non nul) qui invite à passer à un système de nombres sur lequel la division (par un nombre non nul) soit possible; et c'est cette extension qui, alors, invite à étendre le calcul algébrique aux fractions rationnelles qu'elle permet maintenant de définir»* (p.52)

Les analyses précédentes sont importantes pour comprendre les enjeux notionnels des positions retenues dans l'enseignement introductif de l'algèbre. Ainsi, si la dialectique numérique-algébrique est absente dans les propositions d'introduction à l'algèbre, la justification du travail au niveau du modèle (l'algébrique) ne pourra que se baser sur des artéfacts didactiques (balance, tuiles, etc.), que sur des validations liées au contexte de référence, comme nous le montrerons dans l'étude de certaines pratiques actuelles d'enseignement. Il importe toutefois de préciser que notre position n'implique, d'aucune manière, un mépris des modélisations extra-mathématiques; il s'agit, essentiellement de remarquer les limites de ce type de modélisation, le besoin d'articuler les sens construits dans ces contextes avec un sens « interne » -qui permet de donner sens au travail syntaxique et d'élaborer les normes de son fonctionnement- et, fondamentalement, de distinguer entre des modélisations extra-mathématiques et des artéfacts didactiques qui prétendent avoir un statut de modélisation.

L'identification de phénomènes didactiques associés à l'utilisation de contextes extra-mathématiques pour le développement de savoirs algébriques a donné lieu à quelques études récentes. Lins (2001), ainsi que Arzarello, Bazzini, et Chiappini (2001), signalent les difficultés des élèves à sortir du contexte de référence (en particulier par rapport au contrôle), ainsi qu'à passer dans un espace où les objets perdent leurs traces extra-mathématiques. Sadovsky (2003) montre que les significations construites autour du même objet mathématique -la division entière- sont différentes dans des contextes intra-mathématiques et extra-mathématiques; elle ajoute qu'elles participent à un enrichissement de la conceptualisation de l'objet en question.

Lins (2001) s'est intéressé aux jeux et enjeux notionnels des artéfacts didactiques dans l'enseignement de l'algèbre. Il porte à notre attention les « limites épistémologiques » et la nature des objets construits dans ces conditions. Les artéfacts provoquent, selon lui, une multiplication des significations pour des objets de nature mathématique équivalente (par exemple, des équations avec des coefficients différents requièrent des artéfacts didactiques différents); il devient difficile d'articuler ces significations, de leur conférer un sens qui permettrait de parvenir à un contrôle mathématique des connaissances élaborées, qui permettrait de pouvoir dire qu'on « fait de l'algèbre » (Balacheff, 2001). La recherche permanente du « concret » pour « doter de sens » les objets algébriques et l'absence d'un processus de décontextualisation, articulateur des sens construits, conditionnent le type de validation possible dans ce modèle d'algèbre scolaire.

Gascon, Bosch et Bolea (2001) interprètent la prolifération des modèles « concrets » dans l'enseignement (qui, selon nous, n'ont pas tous nécessairement le statut de modélisations extra-mathématiques) comme un phénomène social qui exige que tout élément de savoir qui s'enseigne puisse se traduire en termes compatibles avec « l'épistémologie culturelle courante »; les seuls modèles acceptés sont ceux qui sont culturellement familiers et naturalisés par la culture, jusqu'à apparaître comme les seuls « pensables ». À notre avis, dans le cas particulier des artéfacts didactiques utilisés dans l'enseignement de l'algèbre, cette prolifération pourrait aussi être associée à l'amputation de la dialectique numérique-algébrique. Comme le rappelle Chevallard (1989), dans l'enseignement, et au fil des ans, cette dialectique a été remplacée par l'enseignement des structures algébriques lesquelles, en disparaissant, laissent leur « trace » dans ces modèles concrets qui n'« héritent » que de certaines aspects de « forme » (dans ces modèles ainsi que dans les structures, peu importe l'objet représenté par la variable, ce qui intéresse ce sont les règles qui définissent les opérations sur ces variables et leurs propriétés). Nous pouvons compléter cette analyse par une analyse « micro-didactique ». Ainsi, même si les professeurs, les auteurs de manuels, les spécialistes en didactique de mathématiques, font tous partie de la société et, donc, participent (par option ou par omission) à l'épistémologie culturelle courante dans le choix des conditions didactiques pour le travail algébrique, ces conditions sont aussi motivées par des raisons micro-didactiques. Les études conduites dans le cadre de la théorie de situations (Balacheff, 1987; Brousseau, 1998) ont montré que la gestion de situations didactiques qui favorisent une pratique mathématique, dans laquelle la validation occupe une place fondamentale, est plus coûteuse que la gestion de situations basées sur des « modèles concrets » - du type de ceux dont on a fait référence précédemment -, cette dernière gestion ne conduisant qu'à des algorithmisations des objets algébriques. De cette manière, les artéfacts didactiques « plus familiers » (balance, tuiles, etc.) ne sont pas seulement des éléments qui, hypothétiquement, facilitent l'apprentissage (Gascon et.al., 2001), mais aussi des éléments qui, hypothétiquement, facilitent l'enseignement.

Mais si les « normes » de base qui règlent le fonctionnement du modèle ne peuvent pas, au moins au début du travail algébrique, être indépendantes du système mathématique modélisé, dans notre cas, du numérique, la notion de « suspension de contexte » évoquée par Arzarello, Bazzini et Chiappini (2001) devrait être entendue comme un changement du contexte. Broin (2002) partage avec plusieurs auteurs l'idée qu'une perte de sens est liée au traitement algébrique des termes et que cette perte de sens est due au fait que ce sont des théorèmes qui contrôlent à présent le passage d'une relation à une autre et non l'adéquation au milieu; le contrôle syntaxique remplace alors le contrôle sémantique de l'arithmétique élémentaire. Nous partageons également ce point de vue sur le changement de contrôle qui marque le travail en algèbre; il nous semble toutefois plus approprié de parler de changement de sens que de perte de sens. Le travail au niveau syntaxique, en l'absence d'une structure, voire d'une axiomatique explicite, n'est pas vide de sens; il a son propre sens. Le contrôle est ainsi élaboré en interaction avec le système qui joue le rôle de « système modélisé », c'est-à-dire quelques-uns des théorèmes auxquels fait référence Broin, sont construits en interaction avec ce système qui leur donne sens. Un jeu d'anticipations peut commander le choix de certaines écritures et de certaines transformations à réaliser, donnant sens – à un niveau interne ou mathématique- au travail syntaxique. De cette façon, plutôt que dire qu'en algèbre « le raisonnement se fait calcul » (Chevallard, 1989), nous proposons de dire qu'une partie importante du raisonnement se fait calcul.

Panizza et Drouhard (2003) affirment que nombre de mathématiciens pourraient accepter, qu'en algèbre, la relation entre les énoncés résulte de l'application de règles d'inférence, elles-mêmes renvoyant à un nombre restreint d'énoncés de base sur les propriétés des structures. Mais comme nous l'avons déjà exprimé, le fait que l'algèbre élémentaire se développe hors d'un cadre axiomatique explicite (structures) implique l'« héritage » des normes du système modélisé (on pourrait dire que les propriétés qui permettent des validations syntaxiques sont celles qui sont « héritées » de l'ensemble auquel les expressions algébriques engagées renvoient, indépendamment de leurs sens, comme le proposent Arzarello, Bazzini et Chiappini (2001). Mais, comme l'explique

Broin (2002), ces normes ont une fonction différente; la connaissance des propriétés des opérations comme savoirs formels et moyens de calculs est nécessaire en algèbre élémentaire pour réaliser des calculs et pour les valider, autant qu'en arithmétique, les propriétés des opérations **servent au contrôle des calculs**. À ce niveau élémentaire, le problème de la rigueur est toujours lié à une sémantique car, sans la notion de structure, le travail purement syntaxique n'a pas de sens. Et même dans le cadre d'une structure algébrique, le travail algébrique ne peut se réduire à des aspects syntaxiques; notamment lorsqu'il se rapporte à la validation. Comme Durand-Guerrier et Arsac (2003) le font remarquer, le travail de recherche de contre-exemples, travail fondamental en mathématiques, et en algèbre, n'a pas de signification dans le calcul de propositions, car il s'agit d'une procédure de type sémantique. En se référant à Da Costa (1997), ces chercheurs affirment la nécessité de prendre en compte les trois dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique, pour l'analyse des disciplines logico-mathématiques. À l'aide d'un exemple, ils montrent comment la prise en compte de ces trois dimensions permet de gérer les contradictions apparentes dans les discours de certains élèves; nous reproduisons un extrait de leur analyse:

« *Imaginons ainsi un élève qui affirmerait que l'énoncé « la somme de deux carrés est un carré » est un énoncé à la fois vrai et faux. À un niveau syntaxique, cela revient à affirmer simultanément un énoncé et sa négation, ce qui du point de vue de la logique classique est incohérent, et a toutes les chances d'être jugé comme tel par un enseignant de mathématiques. Cependant, le principe de charité auquel nous invite Quine pousse à faire une hypothèse méthodologique de cohérence pour l'élève. La prise en compte de la dimension sémantique montre que ceci est possible : on pourrait en effet interpréter l'affirmation de l'élève comme signifiant « l'énoncé est vrai pour certains couples de carrés et faux pour d'autres ». Ce qui est le cas ici; l'énoncé est vrai pour 3 et 4 car* $3^2+4^2=5^2$, *et faux pour 4 et 5 car* $4^2+5^2=41$, *qui n'est pas le carré d'un entier. La prise en compte de la situation d'énonciation (la dimension pragmatique) peut permettre dans certains cas de confronter ou d'invalider cette hypothèse* » (p.314)

À notre avis, on ne peut pas caractériser le travail en algèbre élémentaire comme celui qui exige une « suspension de sens » pour entrer dans un problème syntaxique. Ce travail requiert une interaction permanente entre les niveaux syntaxiques, sémantiques et pragmatiques auxquels Durand-Guerrier et Arsac font référence. La prise en compte de la dimension pragmatique peut permettre aux élèves de décider de la pertinence d'entrer dans un niveau sémantique ou syntaxique. Pour initier les élèves à l'algèbre, en prenant en compte la validation, on ne peut pas ignorer un certain niveau sémantique -interne à la mathématique-, ce qui permettra de donner sens aux propriétés qui déterminent la validité des raisonnements algébriques. La dialectique entre le numérique et l'algébrique ne peut alors être absente.

Notre travail s'insère dans le cœur de cette dialectique, en essayant de mieux comprendre le lieu du numérique dans la construction de l'algébrique, comme instrument de modélisation, et dans la construction de normes qui permettent de valider le fonctionnement de cet instrument.

Chevallard (1989) affirme qu'entre le fonctionnement arithmétique et le fonctionnement algébrique du numérique (par exemple, un élève écrit 13 + 7 = 13 - (-7) au lieu de faire 13 + 7= 20; cet élève fait de **l'algèbre sur du numérique**), il y a ainsi une distance –un saut- que nul procédé « d'abstraction » ne peut venir combler. Par abstraction, nous référons à un procédé qui relève d'une conception empiriste-sensualiste de la connaissance, selon laquelle « la théorie » est tirée, par abstraction, de la réalité. Selon une telle conception, au lieu de fournir une sémantique aux énoncés algébriques, le numérique légitime ces énoncés. Les propos suivants de Chevallard (1989, p. 81) sont encore plus critiques :

« Plus encore, l'algébrique ne sert plus à connaître le numérique. Il n'est plus désormais qu'une sténographie essentialisante, qui décrit, résume et sépare l'essence de l'accident. L'ordre didactique s'organise autour d'une épistémologie imaginaire selon laquelle il y a une dissolution de l'objet de connaissance au profit de l'objet réel, objet donné à voir dans une abstraction réputée immédiate et facile. »

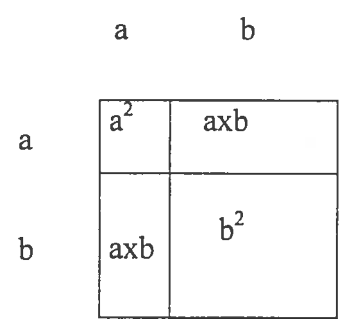
Partageant le point de vue de Chevallard sur les fonctionnements arithmétique et algébrique, nous proposons donc de construire un espace didactique pour aider les élèves à effectuer ce « saut » arithmétique/algébrique et d'analyser la nature du travail des élèves et du professeur dans le cadre de cet espace. À notre avis, la dialectique numérique-algébrique est au cœur du « saut » identifié par Chevallard; elle permettra aux élèves d'entrer dans le monde de l'algèbre, en donnant sens à ce nouveau type de pratique.

L'aménagement d'un espace didactique inscrit dans une dialectique numérique-algébrique ne peut enfin être pensé sans une connaissance du savoir algébrique qui se montre dans les manuels en usages, manuels approuvés par les responsables des programmes d'enseignement. Nous procédons donc à l'examen de ce savoir.

2. Le savoir algébrique dans les manuels scolaires

Le savoir algébrique à enseigner n'est pas un savoir figé. On assiste ainsi régulièrement à des transformations des programmes scolaires qui affectent ce savoir. Comme le montre Chevallard (1989), avec les transformations des programmes scolaires en France, la dialectique entre le numérique et l'algébrique s'est évanouie; ce dernier événement n'est pas uniquement localisé en France. Nous verrons qu'il est aussi présent dans d'autres pays, notamment au Québec. En l'absence d'une telle dialectique, le savoir algébrique à enseigner devient autre. Quel est le savoir algébrique qui est alors objet d'enseignement? Quels en sont les effets sur les connaissances construites par les élèves, sur leur validation? Avant de procéder à une analyse du savoir algébrique dans les manuels scolaires québécois, il nous apparaît intéressant de rappeler très brièvement les résultats d'une étude menée par Panizza et Drouhard (2003) sur l'enseignement de l'algèbre, étude dans laquelle ces chercheurs procèdent à un examen de situations d'enseignement représentatives de celles que l'on retrouve dans les manuels scolaires.

Selon Panizza et Drouhard (2003), à l'école secondaire en Argentine et en France, l'algèbre est un ensemble de formules qui décrivent des faits numériques, et un ensemble de règles d'action pour bien appliquer les formules. Les auteurs montrent, par exemple, que dans l'identité $(a+b)^2$, qui est introduite au moyen d'une activité géométrique (voir la figure suivante), les calculs algébriques restent dans un deuxième plan ou ne se réalisent pas. L'identité apparaît pour les élèves plus comme une « formule » que comme un théorème. Ils ajoutent que ces présentations ont des conséquences sur les conceptions des élèves par rapport à *ce que sont* et *comment s'obtiennent* les résultats en algèbre.



Ainsi, si dans une tâche apparaît l'expression $(a+b)^2$, les élèves ont tendance à identifier une *règle d'action* associée à une expression de cette forme, soit « développer le carré », même si la tâche ne le requiert pas. La règle d'action fonctionne sans que soit exercé un contrôle sur ses conditions; selon les termes de Da Costa (1997), la dimension pragmatique est absente.

Le résultat précédent montre comment les conceptions, souvent implicites, dù savoir algébrique à enseigner, conceptions qui se traduisent concrètement dans les manuels en usage, affectent les rapports des élèves à ce savoir. C'est dans cet esprit que nous procédons à une analyse des conceptions sous-jacentes au savoir algébrique dans les manuels québécois.

Même avec certaines nuances culturelles, les caractéristiques fondamentales des pratiques algébriques dans les institutions québécoises et argentines sont similaires. Dans les manuels utilisés dans les deux pays, ces nuances ne se manifestent que par questions de forme : par exemple, dans tous les cas, les variables sont représentées par des objets physiques, soit par des cases (dans un manuel québécois), soit par des pommes (dans un manuel argentin).

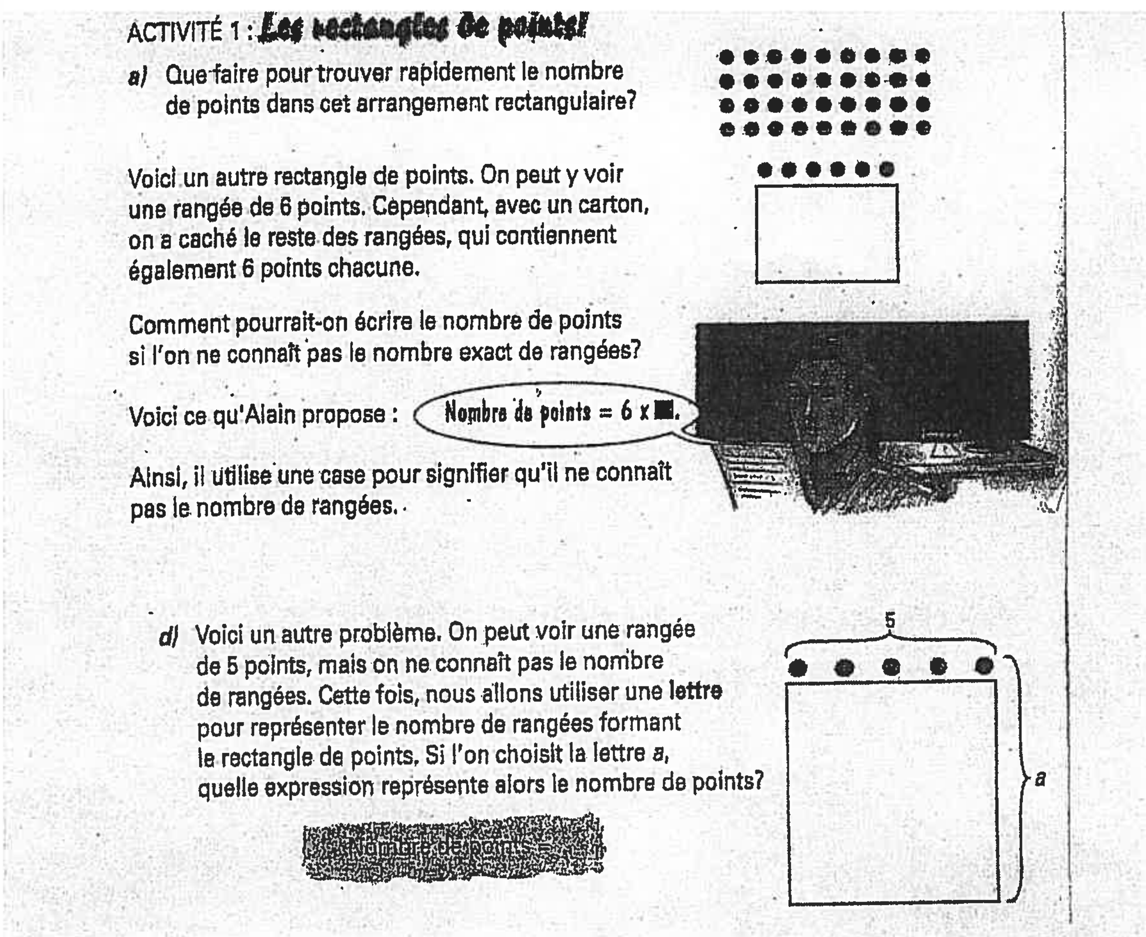
Plusieurs manuels sont en usage au Québec et en Argentine. Il nous a semblé plus utile d'analyser plus finement un de ces manuels que de procéder à des analyses abrégées et comparatives de tous les manuels en usage. Nous avons retenu un manuel scolaire approuvé par le Ministère de l'Éducation de Québec, soit le manuel Carrousel Mathématique (Breton, 1995). Il s'agit d'un des manuels les plus utilisés à l'école secondaire, qui est représentatif des manuels disponibles, et qui reflète concrètement et spécifiquement les caractéristiques du modèle de pratiques algébriques dominantes dans les institutions scolaires du Québec et d'Argentine.

Nous centrerons notre analyse sur les expressions algébriques et les opérations sur ces expressions, en faisant particulièrement attention à la question de la validation.

2.1. Introduction aux expressions algébriques

En 1ère secondaire, il s'agit de « préparer » les élèves à l'apprentissage de l'algèbre, qui sera plus spécifiquement abordée en 2e secondaire. Le manuel analysé propose des activités qui ont comme objectif d'amener les élèves à recourir à une écriture algébrique, en les plaçant dans des situations où ils doivent observer des régularités, puis exprimer en langage symbolique la règle reliant un nombre et son rang dans une suite (patterns). Dans ce cas, le langage algébrique permet de représenter le terme général de la suite, de l'exprimer à travers d'une formule. L'utilisation qu'on fait de la formule est, au maximum, pour calculer n'importe quel terme de la série, tâche pour laquelle la représentation algébrique n'est pas nécessaire (il est suffisant d'identifier la structure du terme général). Comme Mary (1999) le fait remarquer, la particularité du cadre de présentation choisi par les auteurs élimine la possibilité de production de formules diverses; cette production permettrait cependant, même en 1ere secondaire, la réalisation d'un travail non formel sur l'équivalence des procédures et des expressions algébriques. La question de la validation est ainsi absente.

En 2^{e} secondaire, l'objectif terminal est la résolution des problèmes se traduisant par une équation du premier degré. On peut reconnaître la structure globale suivante: une introduction aux différents sens des expressions algébriques, aux calculs sur des expressions algébriques et à l'application de l'opératoire algébrique à la résolution des équations. Les expressions algébriques sont introduites comme « moyens d'expression », « moyens de formulation » et « moyens de généraliser d'une situation ». Dans le premier cas - les expressions algébriques : un moyen d'expression -, les activités proposées se centrent sur l'écriture du résultat d'un calcul dont un des éléments est une inconnue :


ACTIVITÉ 1 : *Les rectangles de points!*

a) Que faire pour trouver rapidement le nombre de points dans cet arrangement rectangulaire?

Voici un autre rectangle de points. On peut y voir une rangée de 6 points. Cependant, avec un carton, on a caché le reste des rangées, qui contiennent également 6 points chacune.

Comment pourrait-on écrire le nombre de points si l'on ne connaît pas le nombre exact de rangées?

Voici ce qu'Alain propose : **Nombre de points = 6 x ■.**

Ainsi, il utilise une case pour signifier qu'il ne connaît pas le nombre de rangées.

d) Voici un autre problème. On peut voir une rangée de 5 points, mais on ne connaît pas le nombre de rangées. Cette fois, nous allons utiliser une **lettre** pour représenter le nombre de rangées formant le rectangle de points. Si l'on choisit la lettre *a*, quelle expression représente alors le nombre de points?

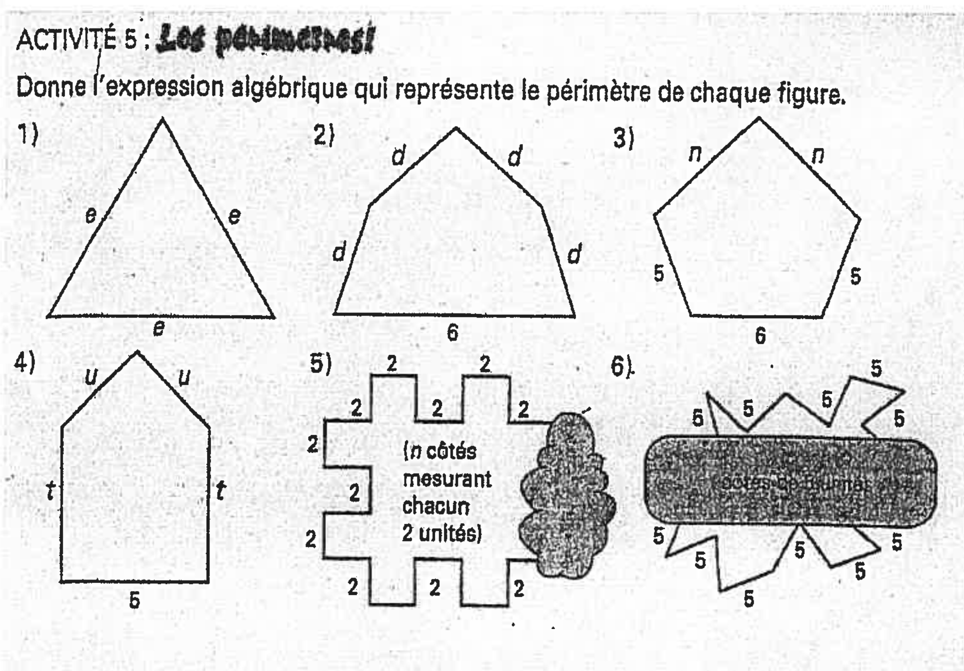
[redacted]

Même si l'auteur remarque que « les lettres qu'on utilise pour remplacer des nombres sont appelées des **variables »,** elles n'ont pas ce statut :

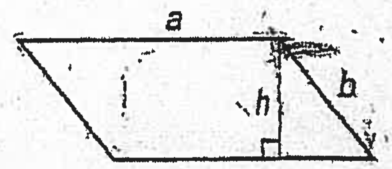
« ... Cependant, avec un carton, on a caché le reste des rangées, qui contiennent également 6 points chacune » (activité 1.a, p. 168)

On peut voir clairement que la lettre représente un nombre fixe, mais inconnu. Dans cette activité et dans les suivantes, les formules produites sont des formules de l'arithmétique: le signe égal ne représente pas une équivalence (il indique « le résultat de ») et les lettres ont le statut d'inconnues. Il ne s'agit pas de représenter algébriquement des relations, mais d'écrire avec de lettres « le résultat d'un calcul ».

Les tâches suivantes ont la même structure; seul change le contexte. Sous le slogan « *Les expressions algébriques sont très utiles en géométrie »,* se présentent des activités qui n'exigent qu'une écriture avec des lettres d'une des mesures et qui ne permettent pas de reconnaître l'utilité à laquelle l'auteur fait référence : cette écriture n'est pas la représentation algébrique des relations qui permet de modéliser, puis de résoudre un problème géométrique. Voilà quelques exemples représentatifs :



i) Dans un parallélogramme ayant *a* et *b* comme mesures de côtés et *h* comme hauteur, quelle expression algébrique représente :



1) son périmètre?

2) son aire?

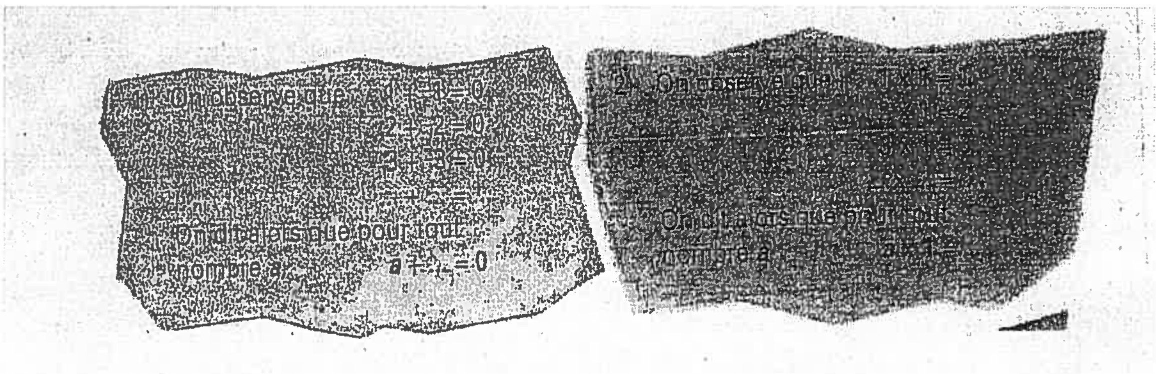
2

Nous identifions ici un premier phénomène didactique qui n'est pas spécifique d'un modèle algébrique, mais d'un modèle d'enseignement et d'apprentissage : le savoir est décortiqué en petits morceaux (pour « faciliter » l'apprentissage des élèves), dont le sens n'existe pas en soi ou est peu ou pas apparent (ou pour lesquels il faut « inventer » un sens), dont la « juxtaposition» ne permet pas de reconstruire le savoir en question. Plus encore, ce « découpage » du savoir provoque une arithmétisation des processus de modélisation algébrique: la modélisation ou la représentation algébrique des relations engagées dans un problème est transformé en un problème de « traduction » d'un langage à un autre.

Par la suite, l'auteur propose les expressions algébriques comme moyen de formulation :

« De temps en temps, on utilise les expressions algébriques pour formuler des ***faits*** *ou des* ***propriétés*** *mathématiques » (p. 175)*

Les activités dans ce contexte sont une « sténographie » du numérique. Les propriétés des opérations comme savoirs formels ne sont pas vues comme moyens de calcul dans le modèle algébrique, mais comme les objets sur lesquels on va appliquer la sténographie. Les expressions algébriques permettent d'exprimer la généralité de ces propriétés (les lettres ont donc le statut de variables), généralité qui semblerait surgir de l'observation de quelques cas particuliers, comme le montrent les activités suivantes.



Comme nous l'avons dit, ce qui est objet d'intérêt est « l'écriture » symbolique d'une propriété –la « traduction » d'un objet de l'arithmétique en un autre « langage » - et non la redéfinition d'une propriété dans un nouveau ensemble d'objets (les expressions algébriques). On pourrait penser que notre analyse n'est pas pertinente parce que l'auteur n'a pas l'intention, à ce moment-là, d'introduire les calculs algébriques. Pourtant, nous verrons par la suite que lorsque l'auteur introduit l'opératoire algébrique, il provoque un changement radical de contexte afin de donner du sens aux calculs (un nouveau « morceau » de savoir), sans que le fonctionnement des propriétés des opérations soit la référence fondamentale dans ledit contexte. Cette conception de l'algèbre comme un langage est explicité par l'auteur au cours d'une activité spécifique :

ACTIVITÉ 4 : Traduction algébrique !

L'algèbre est un langage. Une expression algébrique peut souvent être lue de plusieurs façons. Le tableau suivant en donne quelques-unes pour chaque opération.

Opération	Expression algébrique	Lecture
Addition	$n + 5$	n plus cinq la somme de n et 5 n augmenté de 5 5 de plus que n
Soustraction	$n - 5$	n moins cinq la différence de n et 5 n diminué de 5 5 de moins que n
Multiplication	$5n$	cinq n le produit de 5 et n 5 multiplié par n

Dans ce cadre, l'interprétation de l'expression « 5n » reste limitée à une lecture « linéaire » associée à l'écriture de résultats de calcul qui réduit, une fois de plus, la possibilité de « voir » ou d'exprimer des relations; on perd la richesse de la notion de « sens » introduite par Arzarello (1991), par exemple, le fait que « 5n » peut représenter les multiples de 5, une fonction linéaire, etc. Les consignes pour ces activités reflètent le phénomène de « découpage » du savoir dont nous avons parlé :

Activité 4 Traduction algébrique !

a) Donne l'expression algébrique décrite :

1) La somme de a et 10
2) Le quotient de 4 et y
………
10) Le double du cube de y
………..
16) Le carré de la différence de a et 2

On ne retrouve aucun problème dont la solution exige le recours à des expressions algébriques de certaines relations. On se contente de demander une écriture d'un calcul avec des lettres.

Pour mieux comprendre la différence entre « traduction » d'un langage en un autre et « représentation » algébrique de relations, nous analysons l'activité suivante extraite d'un document adressé aux enseignants, activité effectuée par Sessa, Barallobres, Itzcovich, Sadosky (2001, p. 71; traduction libre) :

« Le produit de deux nombres est 9876. Est-il possible de connaître le produit du double du premier par le triple du deuxième? Si la réponse est oui, explique quelle sera la valeur et comment tu le sais. Si la réponse est non, explique pourquoi. »

Le problème demande de trouver un « résultat » numérique d'une nouvelle multiplication, sans connaître chacun des facteurs; mais pour réussir, il ne sera pas suffisant de « faire un calcul ». La pratique arithmétique habituelle, dans laquelle un résultat d'une multiplication dépend toujours de la connaissance des facteurs engagés, entraîne chez les élèves une première réponse négative. Dans l'esprit des auteurs de cette activité, il était prévu que les interactions en classe pourraient permettre aux élèves d'évoluer vers la reconnaissance de l'indépendance du résultat de la nouvelle multiplication de chacun des nombres initiaux. La consigne du problème ne demandait pas « de traduire » les relations engagées : la représentation algébrique du problème[1]-et non la « traduction »- est un outil de la pensée pour produire une explication. L'explication de la dite indépendance exige d'établir un rapport entre les expressions a.b et 2a3b, à partir de la réalisation de certaines transformations.

Ces clarifications effectuées, nous poursuivons notre analyse du manuel, en abordant la problématique de la validation. Elle apparaît, pour une première fois, dans le cadre d'expression de propriétés numériques, cadre que nous avons examiné précédemment. Il est alors demandé aux élèves de se prononcer sur la vérité ou non de différentes propositions, par exemple:

---

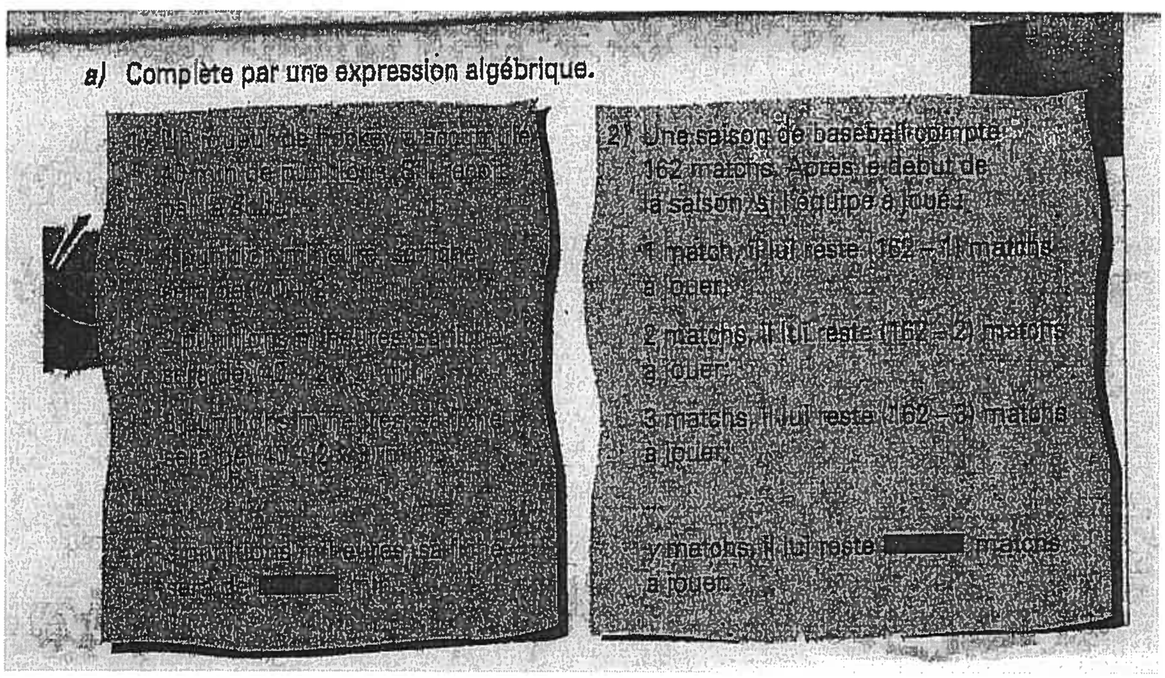
[1] Même si les élèves n'utilisent pas les lettres et travaillent sur un exemple générique (Balacheff, 1987), si les transformations des expressions sont basées sur les propriétés des opérations, nous pouvons parler de représentation algébrique du problème.

« Vrai au faux?

Pour tout nombre e, $e+3+e+5=2e+8$ *»*

En fonction des savoirs introduits dans le texte, pour prendre une telle décision, les élèves ne peuvent que recourir à une vérification dans certains cas particuliers; la dialectique avec le numérique est absente; les propriétés des opérations ne peuvent pas fonctionner comme moyen de validation.

Par la suite, lorsque les expressions algébriques sont présentées comme « des moyens de généraliser une situation », on retrouve la conception de l'algèbre dont nous avons déjà parlé : les expressions algébriques ne sont pas des moyens de généraliser, mais une « écriture » d'une structure générique anticipée (puis reconnue) par l'auteur (mais non par l'élève) dans la consigne (une écriture algébrique sur le numérique), sous le slogan « du particulier au général »:



L'activité suivante demande la production de formules; nous pouvons donc voir, par la première fois, une initiation au travail algébrique : identification de relations entre variable, expression algébrique des dites relations, etc. Mais le travail s'arrête à l'écriture de la formule : la question de l'équivalence des formules, ainsi que la problématique de la validation de la formule produite, sont absentes.

2.2. Les opérations sur des expressions algébriques

On tourne la page du manuel et on retrouve la section « Opérations sur les expressions algébriques ». D'une manière surprenante, tous les contextes présentés pour introduire les expressions algébriques disparaissent; les expressions algébriques sembleraient être maintenant des objets différents, dont la cohérence avec ceux définis antérieurement est absente. Voici le premier paragraphe de cette nouvelle section :

« Comme les expressions algébriques représentent des nombres, il est naturel d'effectuer des opérations sur les expressions algébriques » (Manuel Carrousel mathématique 2, p. 194).

Auparavant, l'auteur avait défini la notion de **variable,** puis la formation des expressions algébriques avec **des nombres** et **des variables**. Avec cette définition, les expressions algébriques ne représentent pas « des nombres », comme l'auteur le dit, mais « des ensembles de nombres » (selon la définition du concept de dénotation produite par Arzarello, 1991). Mais même s'il définit les expressions algébriques en termes de variables, dans la plupart du travail fait pour introduire les expressions algébriques – comme nous l'avons déjà vu- les lettres représentent des inconnues, en cohérence avec la présentation de cette introduction. Pourtant, la phrase « *comme les expressions algébriques représentent des nombres, il est naturel d'effectuer des opérations sur les expressions algébriques»* ne sert que pour justifier l'introduction des opérations sur ces nouveaux objets; instantanément, les lettres se transforment en « objets concrets » :

carreaux et jetons ! Les lettres ne sont plus des nombres et les opérations à réaliser ne se justifient pas dans le cadre des systèmes numériques que les expressions algébriques modélisent, mais dans la logique d'un nouveau contexte :

Opérations sur les expressions algébriques

Comme les expressions algébriques représentent des nombres, il est naturel d'effectuer des opérations sur les expressions algébriques.

ACTIVITÉ 1 : **Carreaux et jetons algébriques!**

a) Si ■ représente $1x$ ou x, alors ■ ■ doit représenter ____.

b) Si ■ ● représente $x + 1$, alors ■ ● ● doit représenter ____.

c) Si ■ ● représente $x + 1$, alors ■ ● ■ ● doit représenter ____.

d) Si ■ ■ ■ ● ● représente $3x + 2$, alors ■ ■ ● ● ● doit représenter ____.

e) Représente les expressions suivantes en utilisant les symboles précédents.

1) $4x + 3$ 2) $2x + 5$

f) Si l'on associe un jeton rouge ou une case rouge à l'idée de négatif, quelle expression algébrique pourrait bien correspondre aux représentations suivantes?

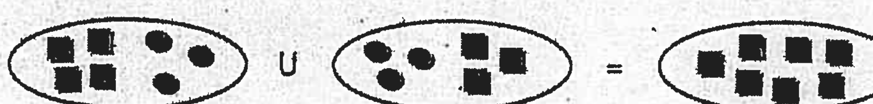
1) ■ ■ ● ● ● 2) ● ● ● ■ ■ ■ ■

g) Sachant qu'un bleu et un rouge se neutralisent, détermine le résultat si l'on réunit les ensembles suivants :

1)

$3x - 3$ + $2 - 2x$ = ____

2)



$4x + 3$ + $-3 + 3x$ = ____

3)

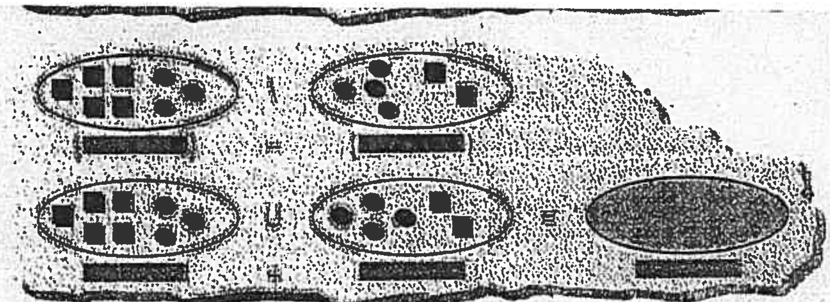
____ + ____ = ____

Les opérations sur des expressions algébriques se basent sur un ensemble de règles que nous résumons ainsi:

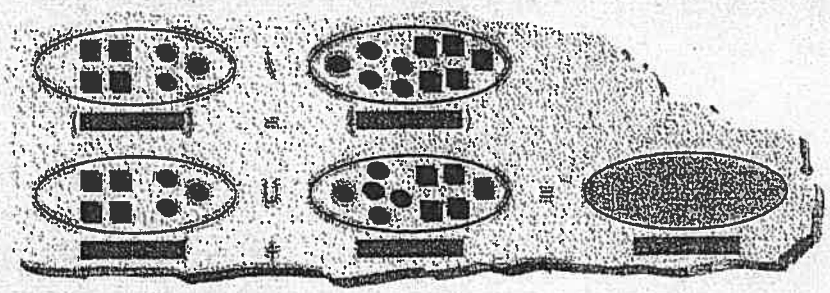
- les x sont représentés par des cases et les constantes par des jetons. La juxtaposition des objets d'une même couleur s'associe à l'addition.
- les jetons ou cases bleues s'associent à « l'idée » de positif tandis que les rouges à l' « idée » de négatif
- il faut « savoir » que le rouge et le bleu se neutralisant (sans aucune explication du « pourquoi »)

Il faut remarquer que, même si l'auteur dit que la couleur rouge est associée à l'idée de négatif, le rouge est vraiment associé à la notion de « soustraction » et non de négatif (exemple 1)): 3 cases bleus et 3 jetons rouges représentent 3x - 3 et pas 3x + (-3). La question de l'équivalence entre ces deux expressions ne peut pas être expliquée dans ce contexte, même si elle est nécessaire pour l'exemple 2) : si trois jetons rouges et trois cases bleus sont représentés par -3 + 3x et pas pour 3x -3, en f), deux cases bleus et trois jetons rouges devraient représenter 2x + (-3) et pas 2x - 3. Ces problèmes d'écriture deviennent plus complexes lorsque l'auteur introduit la soustraction d'expressions algébriques, en continuant avec un exposé de règles sans que ne leur soient associées des raisons mathématiques :

2)



3)



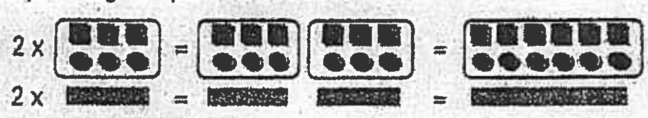
i) Si ■ ■ représente $2x$, représente alors $3 \cdot (2x)$ et trouve le résultat de cette multiplication.

j) Si ■ ■ ■ représente $-3x$, représente alors $2 \cdot (-3x)$ et trouve le résultat de cette multiplication.

k) Si ■ ■ ■ ■ ■ ■ représente $6x$, représente alors $6x \div 2$ et trouve le résultat de cette division.

l) Complète algébriquement ces modèles.

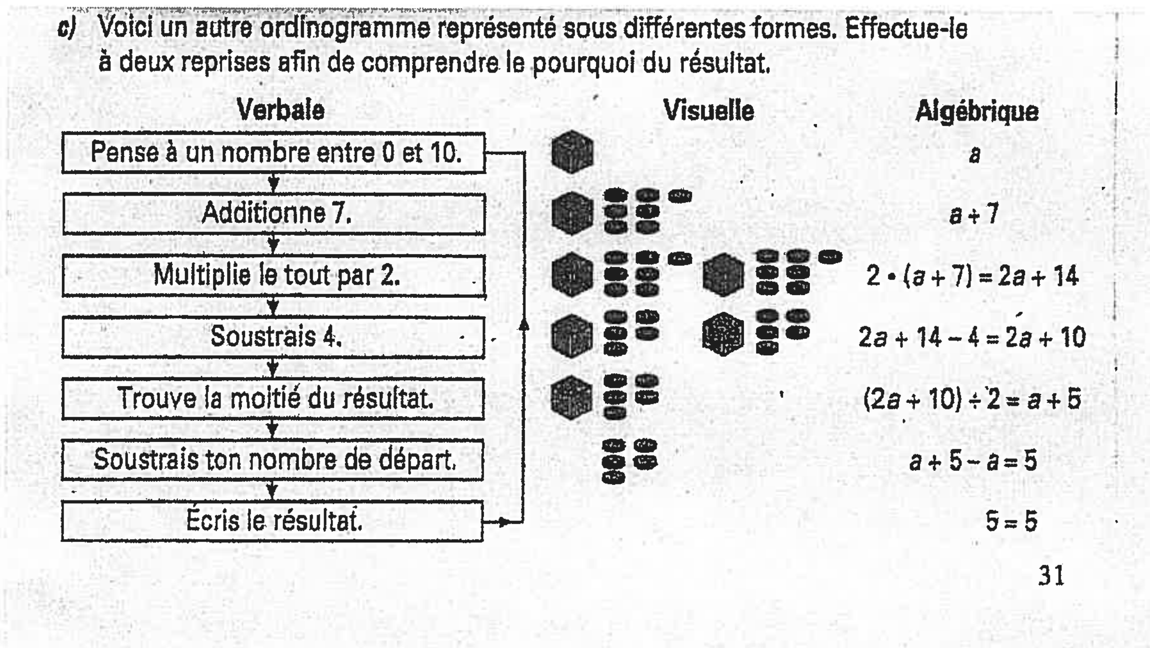
1)



2)

Nous retrouvons, dans cet exemple, une incarnation d'une conception de l'algèbre identifiée par Panizza et Drouhard (2003) dans les manuels d'Argentine et France: « un ensemble de règles d'action ». Dans notre cas, les règles sont contextualisées et élaborées, sans aucun type de justification. L'auteur n'a pas d'autres possibilités : il a éliminé le numérique comme système modélisé (il perd donc les propriétés des opérations pour justifier et donner du sens aux transformations algébriques) et choisi d'entrer dans un ensemble d'objets physiques, des « carrés » et des « jetons ». Dans ce nouveau système, les règles de fonctionnement sont une image des savoirs algébriques à élaborer : l'auteur définit les règles de manière à ce qu'elles soient en correspondance avec le fonctionnement des savoirs algébriques en question; il ne peut donc que les communiquer sans aucun type de justification. La validation est ainsi absolument contextuelle.

Dans une activité suivante, l'auteur essaie de montrer l'utilité des calculs algébriques pour l'explication de certains « trucs numériques» mais, comme nous le verrons, l'algèbre *n'est pas le moyen* qui permette de comprendre le fonctionnement du « truc », sinon une « image », une autre représentation de la méthode des carrés et jetons :



Les « égalités » dans chaque ligne ne sont pas des équivalences algébriques, mais des « résultats » des opérations faites avec les objets concrets. L'égalité 2(a+7) = 2a +14 est le résultat de « ajouter » deux carrés et les 14 jetons et non une équivalence algébrique justifié à partir de l'utilisation de la propriété distributive de la multiplication par rapport à l'addition.

Les opérations sont aussi définies dans le cadre de manipulation de suites (sans établir aucun type de lien avec le contexte des cases et jetons): 2n+n n'est pas 3n parce que 2n+n= (2+1)n, mais bien parce qu'on fait la somme pour certains nombres et qu'on découvre ainsi une nouvelle régularité dans la suite du « résultat » :

c) Quelle suite obtient-on dans chaque cas?

1) $2n$: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …
$+$ n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
[redacted]

2) n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
$\times$ 2 : 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, …
[redacted]

3) n : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …
$+$ $3n$: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
[redacted]

4) $2n$: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, …
$+$ $3n$: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …
[redacted]

5) $5n$: 0, 5, 10, 15, 20, 25, …
$+$ $6n$: 0, 6, 12, 18, 24, 30, …
[redacted]

6) $10n$: 0, 10, 20, 30, 40, 50, …
$-$ $3n$: 0, 3, 6, 9, 12, 15, …
[redacted]

7) $5n$: 0, 5, 10, 15, 20, 25, …
$+$ $8n$: 0, 8, 16, 24, 32, 40, …
[redacted]

8) $12n$: 0, 12, 24, 36, 48, 60, …
$+$ $8n$: 0, 8, 16, 24, 32, 40, …
[redacted]

Encore, ce ne sont pas les propriétés qui justifient l'opératoire; on évite l'entrée en algèbre en revenant sur le numérique et en s'appuyant sur la vérification de certains cas particuliers pour justifier un résultat générique. Enfin, en s'appuyant sur l'activité de manipulation de suites, l'auteur « valide » les règles de calcul, à partir de « l'observation » de certains cas particuliers.

Cette dernière activité confirme que :

1° **additionner un tout, c'est additionner chacune de ses parties;**

$$(2n + 1) + (4n + 7) = 2n + 1 + 4n + 7$$

2° **soustraire un tout, c'est soustraire chacune de ses parties;**

$$(8n + 7) - (5n + 3) = 8n + 7 - 5n - 3$$

3° **ces sommes ou différences peuvent être réduites en additionnant ou en soustrayant les termes semblables, c'est-à-dire les termes constants ensemble et les termes contenant la même variable ensemble.**

$$2n + 1 + 4n + 7 = 2n + 4n + 1 + 6 \qquad 8n + 7 - 5n - 3 = 8n - 5n + 7 - 3$$
$$= 6n + 7 \qquad\qquad = 3n + 4$$

L'activité sur les suites nous confirme également que :

1° multiplier un tout, c'est multiplier chacune de ses parties;

$$5(2n + 3) = 5 \cdot 2n + 5 \cdot 3 = 10n + 15$$

2° diviser un tout, c'est diviser chacune de ses parties.

$$(8n + 12) \div 4 = 8n \div 4 + 12 \div 4 = 2n + 3$$

L'explicitation de ces règles, qui prétendent être décontextualisées (même si elles ne le sont pas vraiment parce qu'on ne définit pas une règle pour opérer avec les termes semblables), permet à l'auteur de poursuivre le travail avec des expressions algébriques à coefficients entiers qui n'avaient pas de sens dans le contexte des cases et jetons. Du coup, dans les activités qui suivent cette explicitation, les expressions algébriques deviennent des objets sur lesquels on peut appliquer la propriété de distributivité.

Pour multiplier une expression algébrique par une constante, il suffit d'appliquer la propriété de distributivité. Encore là, ce travail s'effectue le plus souvent mentalement.

Détermine mentalement chaque produit.

a) $5(a + 2)$	b) $8(b - 9)$	c) $9(2x + 5)$	d) $8(2a + 9)$
e) $2(5 - 2a)$	f) $8(5a - 9)$	g) $-4(2b - 6)$	h) $-(x + 8)$
i) $9(5a - 2)$	j) $(2a + 3)5$	k) $(8b - 7b)2$	l) $(9a - 8)6$
m) [illegible]	n) $25(2a - 4)$	o) $-2(8 - 10a)$	p) $(4a - 5)(-2)$

Mais cette propriété ne peut être, selon le sens attribué par Panizza et Drouhard, qu'une règle de calcul parmi d'autres règles possibles; l'absence d'une dialectique avec le numérique empêche la construction de savoirs pour la validation en algèbre, de manière à ce que cette propriété puisse avoir un fonctionnement différent. Cela se reflète clairement dans la liste d'activités de la fin du chapitre. Après avoir demandé la réalisation de plusieurs calculs sur des expressions algébriques (soit 12 activités), les activités 13 et 15 demandent :

13 Applique la propriété de distributivité, puis réduis l'expression obtenue.

a) $2(a+3)+4(a-2)$
b) $3(a+b)-2(a-b)$
c) $4(x+5)+5(x-2)$
d) $(x+3)+2(x-3)$

On a appliqué la propriété de distributivité pour trouver le produit. Détermine les termes manquants.

a) $2(\blacksquare+\blacksquare)=4a+6$
b) $\blacksquare(2x+4)=6x+12$
c) $4(\blacksquare-\blacksquare)=8a-8$
d) $3(\blacksquare-4)=3a-\blacksquare$

15 Le produit a été obtenu par l'application de la propriété de distributivité. Retrouve deux facteurs possibles.

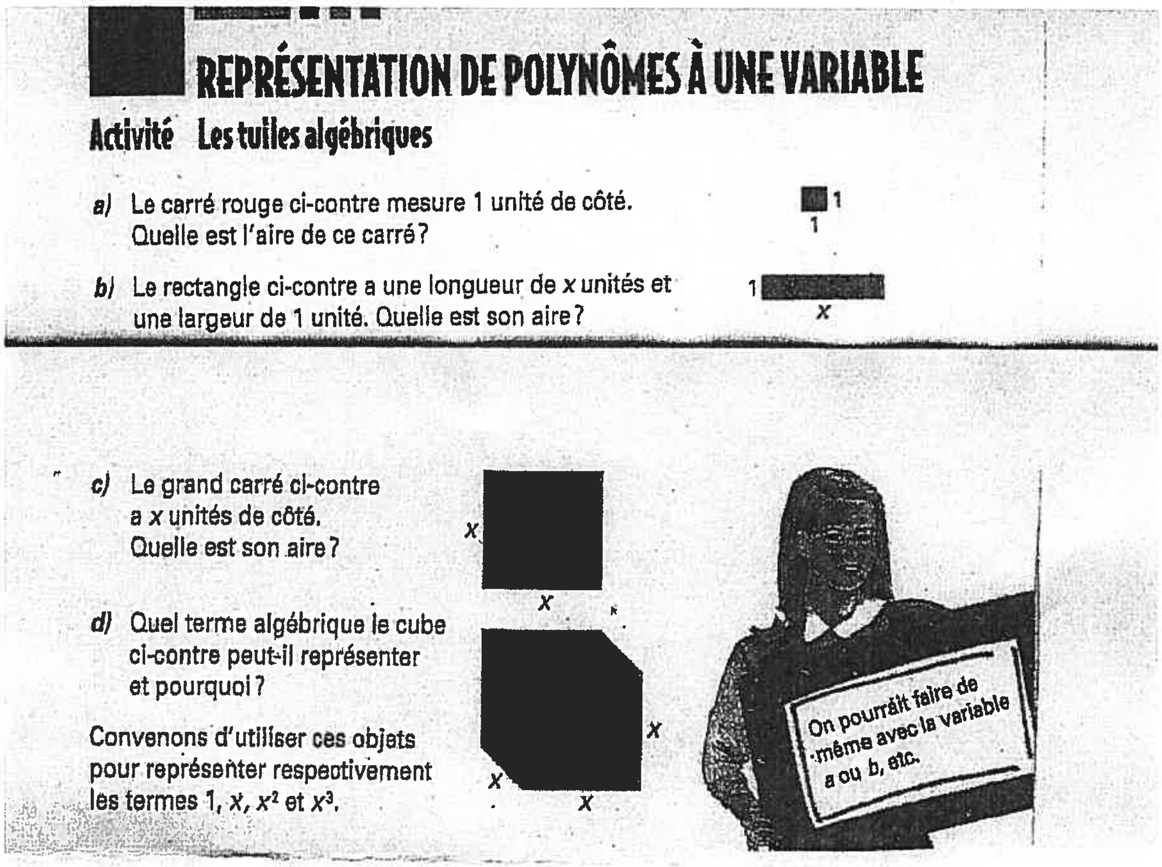
a) $\blacksquare(\blacksquare+\blacksquare)=4a+4$
b) $\blacksquare(\blacksquare+\blacksquare)=8a+4$
c) $\blacksquare(\blacksquare-\blacksquare)=12a-6$
d) $\blacksquare(\blacksquare+\blacksquare)=6+2y$

On peut voir que l'auteur demande explicitement l'utilisation de la propriété de distributivité pour la réalisation des calculs, puisque qu'ils pourraient être résolus sans appel à ladite propriété (en utilisant le modèle des jetons et carrés) La liste d'activités continue jusqu'à l'activité 60 : aucune référence n'est faite aux propriétés des opérations pour déterminer et justifier l'équivalence d'expressions. La notion d'expressions algébriques équivalentes est absente; dans le cadre du fonctionnement de la propriété distributive comme règle de calcul, le signe égal n'est pas celui de l'équivalence algébrique: il a le statut arithmétique (« résultat de »).

Le travail fait en 2ème secondaire se termine en proposant un chapitre sur les équations. Nous ne l'analyserons pas. Nous pouvons dire, globalement, que le traitement que l'auteur fait est tout à fait en cohérence avec une conception de l'algèbre comme un ensemble de règles de calcul.

2.3. Les polynômes et leurs opérations

Pour analyser l'articulation entre l'introduction aux expressions algébriques, l'opératoire et les polynômes, nous avons poursuivi notre examen jusqu'en troisième secondaire. On définit la notion de polynômes et on utilise les « tuiles algébriques » (un nouvel objet physique) comme moyen de représentation, sans aucune référence aux contextes introduits en 1ère et 2ème secondaire. Polynômes et expressions algébriques semblent être des objets différents:



REPRÉSENTATION DE POLYNÔMES À UNE VARIABLE

Activité Les tuiles algébriques

a) Le carré rouge ci-contre mesure 1 unité de côté. Quelle est l'aire de ce carré?

b) Le rectangle ci-contre a une longueur de *x* unités et une largeur de 1 unité. Quelle est son aire?

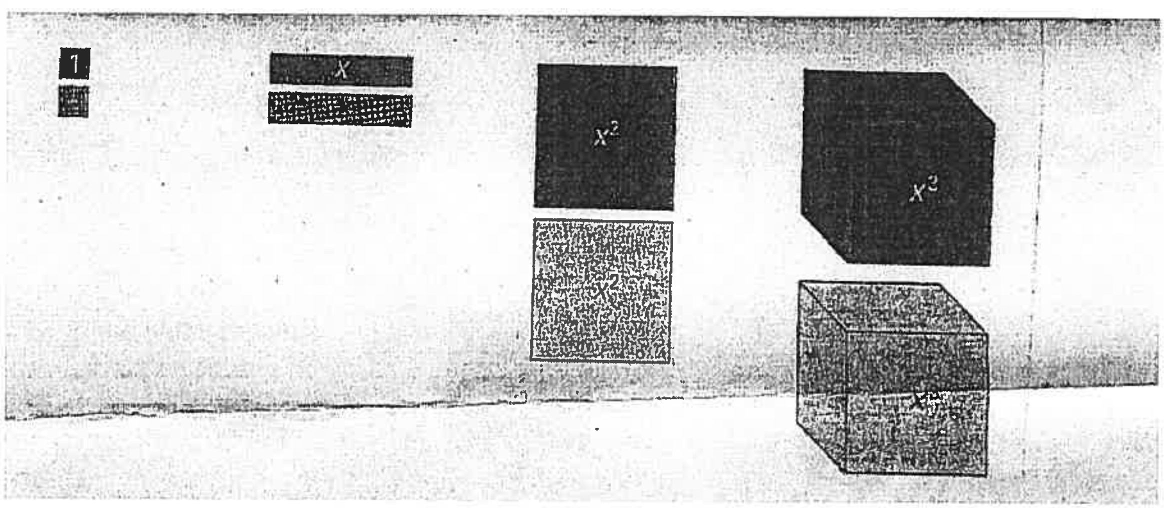
c) Le grand carré ci-contre a *x* unités de côté. Quelle est son aire?

d) Quel terme algébrique le cube ci-contre peut-il représenter et pourquoi?

Convenons d'utiliser ces objets pour représenter respectivement les termes 1, x, x^2 et x^3.

Comme dans le cas des expressions algébriques, les polynômes sont introduits à partir d'un ensemble de règles, pour pouvoir d'abord les représenter avec les tuiles et, ensuite, ces représentations comme contextes pour la définition des opérations. Mais les règles proposées ne sont pas suffisantes pour interpréter tous les polynômes introduits par l'auteur, même si cette insuffisance n'est pas reconnue. Par exemple, en appelant à la différenciation de couleurs, on obtient une représentation pour distinguer les termes à coefficients positifs et négatifs. Un carré de coté x de couleur rouge représente le terme x^2 et un carré identique de couleur gris représente $-x^2$; trois carrés rouges représentent $3x^2$, mais pourquoi trois carrés gris vont-ils représenter $-3x^2$, comme l'auteur le souhaite, et non $3(-x^2)$? Parmi « les règles » que l'auteur utilise pour introduire ce type de représentation, il n'y a aucune justification de l'équivalence $3(-x^2)=-3x^2$. De plus, les règles qui s'appuient sur la notion de « quantité » (trois carrés de côté x représente $3x^2$), perdent rapidement ce sens lorsque sont combinées des tuiles de différentes couleurs.

L'artificialité du contexte atteint son point maximal lorsque le zéro n'est pas représenté par l'absence de tuiles, mais par 2 tuiles de couleurs différentes! La prétention de trouver un modèle « réel » pour donner du sens à ces « objets abstraits » de l'algèbre va à l'encontre de l'intuition plus élémentaire qui associe au zéro l'absence d'objet :



Comme dans le cas des carrés et des jetons, on s'appuie sur les tuiles pour donner une règle qui permette de réduire des termes semblables et, de manière abrupte, la règle qui n'avait que du sens pour des coefficients entiers est élargie au cas des polynômes à coefficients rationnels! Ainsi, la somme des polynômes se définit dans le contexte des tuiles, en faisant appel a trois règles : « additionner un tout est additionner chacune de ses parties; seuls les termes semblables peuvent être additionnés ou réduits en un seul terme et deux tuiles du même type et de couleurs différentes s'annulent. » (Breton, 1995; p. 252). La validation des résultats est un mélange entre « le concret » et la vérification numérique, comme on peut le déduire de l'activité suivante :

2 Trouve la somme des polynômes suivants et vérifie ton résultat en remplaçant la variable par la valeur 1.

a) $(2x^2 + 3x + 4) + (x^2 + 3x + 2)$

b) $(5k^2 + 3k + 3) + (k^2 - 5k + 7)$

c) $(5d^2 - 8d + 4) + (d^2 + 3d + 2)$

d) $(8v^2 + 6v - 7) + (^-2v^2 + 3v - 2)$

e) $(2a^2 + 3a + 4) + (^-3a^2 - 8a + 2)$

f) $(9c^2 + 3c - 6) + (^-8c^2 - 7c + 8)$

g) $(^-3x^2 + 6x) + (^-2x^2 + 8x - 12)$

h) $(^-5y^2 - 9y + 4) + (y^2 - 8)$

i) $(8x^2 - 6x) + (^-x^2 + 8x + 7)$

j) $(6x^2 - 8x + 4) + (4x^2 + 8x)$

Le remplacement par une seule valeur confirme la validité de la procédure!

Les règles pour les autres opérations sur des polynômes se multiplient et la cohérence dans l'utilisation des contextes confirme l'analyse que nous avons déjà réalisée.

3. Synthèse

La prolifération d'artéfacts didactiques « porteurs de sens » est, à notre avis, un autre phénomène didactique lié au phénomène de découpage du savoir : déconnecté d'un contexte global (extra ou intramathématique) dans lequel il pourrait avoir un sens, chaque petit morceau ainsi introduit mène à une multiplication de sens, sens qui ne s'articulent pas nécessairement avec un contexte plus large où le travail algébrique pourrait acquérir sa vraie signification. Il importe ainsi de bien différencier les artéfacts didactiques et les modélisations extramathématiques.

Dans les modélisations, les outils algébriques permettent de résoudre des problèmes extramathématiques et le contexte peut fonctionner comme référence dans la construction même de connaissances en jeu; il y a alors une dialectique entre le contexte et les connaissances, dialectique constitutive des dites connaissances. En revanche, dans le cas des artéfacts didactiques, on invente un ensemble d'objets et on définit une série de règles qui déterminent leur fonctionnement, règles qui sont « puisées » du fonctionnement du savoir visé. Ces règles sont imposées aux élèves (comme dans le cas d'un jeu); elles ne s'appuient pas sur un contexte de référence à partir duquel les élèves pourraient les élaborer. L'absence d'un véritable processus de décontextualisation qui s'articule à un travail algébrique porteur d'un sens interne oblige l'élève à réinterpréter les expressions algébriques, selon le contexte où il se trouve; les expressions algébriques seront donc, soit un ensemble de jetons et de cases, soit un ensemble de tuiles, soit une suite, etc. Dans ce contexte, la conception dominante de la lettre est celle d'inconnue; la notion de variable apparaît cependant quelquefois, dans certaines activités, comme par exemple :

46 Détermine les énoncés vrais si $a \neq 0$.

A) $\dfrac{5+a}{8+a} = \dfrac{5}{8}$ B) $\dfrac{5-a}{8-a} = \dfrac{5}{8}$

C) $\dfrac{5 \cdot a}{8 \cdot a} = \dfrac{5}{8}$ D) $\dfrac{5 \div a}{8 \div a} = \dfrac{5}{8}$

Pour pouvoir parler « d'énoncé vrai », il faut supposer qu'il y a dans cette activité une quantification implicite. Il faut arriver à déterminer s'il est vrai que « pour n'importe quel a différent de zéro, (5+a)/(8+a) = 5/8 ». La lettre, qui jusqu'à maintenant avait le statut d'une inconnue, devient tout à coup une variable. La notion de contre-exemple est nécessaire pour pouvoir répondre à cette question, notion qui n'avait pas de sens dans le cadre dans lequel les expressions algébriques avaient été développées (les variables représentant alors des objets physiques!). Quelles connaissances pourraient permettre aux élèves résoudre le problème précédent?

La représentation de variables par des objets physiques, puis l'élimination de la dialectique numérique-algébrique, rendent impossibles les validations mathématiques (ou la construction de connaissances qui pourraient permettre la construction de normes de validation en algèbre). On ne fait jamais appel à la propriété distributive de la multiplication (à une connaissance mathématique) pour justifier l'équivalence 3n + 2n= 5n (ou pour obtenir des expressions équivalentes). S'agit-il d'une traduction en termes compatibles avec « l'épistémologie culturelle courante » (Gascon, 2001) ou d'une « héritage » (passé par le filtre de la transposition didactique) de l'ère des structures algébriques? Les deux interprétations peuvent être complémentaires. Notre intention n'est pas de les examiner, mais davantage d'évaluer les conséquences de ces choix didactiques.

Dans un tel contexte, certaines activités caractéristiques des pratiques algébriques n'ont pas de sens pour les élèves, par exemple : déterminer le domaine de validité d'une formule ou d'une propriété numérique; rechercher des contre-exemples. La notion de contre-exemple, qui suppose l'entrée dans une logique de prédicats demeure inaccessible, si la notion de variable est absente, ce qui est le cas dans les activités analysées dans lesquelles la notion d'inconnue prédomine.

La décontextualisation qui se produit (pour entrer dans le monde des calculs algébriques) n'a pas de support (de connaissances) pour le traitement des objets qui en résultent et n'a pas l'intention de produire un étude « mathématique » de ces objets (ce qui impliquerait d'aborder le problème de la validation des savoirs développés). Elle vise plutôt à fournir un ensemble « de règles » d'action (qu'il faut accepter sans comprendre les raisons mathématiques de leur fonctionnement) pour pouvoir pallier les limites de la contextualisation. L'algèbre est ainsi loin d'être un outil de modélisation.

Le manuel analysé est représentatif du travail fait, en général, par les autres manuels pour l'école secondaire québécoise. L'appel à des « modèles concrets » pour donner du sens aux opérations sur les expressions algébriques est la caractéristique fondamentale de tous les textes analysés. La validation est toujours liée au contexte de référence.

4. La nécessité de la construction d'une ingénierie

Comme nous venons de le décrire, dans les manuels actuels québécois, français et argentins (et possiblement, dans les manuels utilisés dans plusieurs pays), la dialectique numérique-algébrique a été remplacée pour une série d'artéfacts didactiques qui ne conduisent qu'à l'algorithmisation du savoir algébrique. Pour étudier la complexité de la reconstruction scolaire d'une pratique algébrique, nous devons donc construire un espace didactique perméable aux questionnements qui émanent des confrontations des analyses précédentes.

En ce sens nous devrons créer une niche expérimentale (Artigue, 2002), offrant un support pertinent, du point de vue du sens, à la production de pratiques algébriques dans lesquelles la validation occupe une place fondamentale, de manière à placer l'activité du couple enseignant-enseigné au centre des transformations. Il s'agit de construire un milieu à des fins expérimentales; l'analyse des possibilités de cet espace didactique pour l'introduction de l'algèbre, de ses bénéfices et de ses limites, sera un objectif important.

Gascon, Bosch et Bolea (2001) postulent, en effet, que la culture scolaire a un ensemble de notions (« résolution de problèmes », « traitement de la diversité », etc.) et un ensemble d'idées dominantes (« l'enseignement de la mathématique doit se centrer autour de la résolution de problèmes », « les outils informatiques sont efficaces pour améliorer l'enseignement de la mathématiques », etc.) qui déterminent fortement le type de questions qui peuvent être posée et les types de réponses acceptables (ou compréhensibles) au sein de l'institution scolaire. Le fait de considérer que le professeur sait ce qu'il doit enseigner, limite les questionnements qu'il peut se poser en évitant, habituellement, de se questionner par rapport à ce qu'est « faire de l'algèbre ». L'absence des questionnements épistémologiques conditionne les réponses que les enseignantes donnent à leurs questionnements habituels : qu'est-ce que je dois enseigner et comment je dois l'enseigner?

Même si, comme nous l'avons mentionné précédemment, nous souhaitons mener une étude balisée, nous entrevoyons aussi de commencer une analyse des conditions qui permettraient une ouverture des types de questions et de réponses qui dominent la scène scolaire actuellement, puis d'examiner les possibilités de transformations effectives et stables des pratiques algébriques établies.

5. La pertinence de notre recherche

Dans sa recherche concernant l'enseignement de l'algèbre au premier cycle du secondaire au Québec, Mary (1999) a montré l'absence de tâches de validations intellectuelles. Cette absence pose un problème didactique qu'il nous semble important d'étudier car nous pensons que les mathématiques enseignées à l'école ne peuvent ignorer certains aspects fondamentaux de la discipline de référence et notamment, le fait que la validation intellectuelle caractérise essentiellement cette science.

Notre travail permet donc d'ouvrir une discussion autour de la problématique de la rationalité intellectuelle dans le cadre de la construction de savoirs algébriques, d'étudier certains moyens didactiques visant à réduire l'écart entre le type de pratique scolaire et celui de la communauté de référence, en dépassant la question normative, et enfin de mieux comprendre l'activité des élèves et du professeur dans le cadre de ces pratiques.

D'un point de vue plus théorique, à l'instar de Margolinas (1993), nous jugeons que la pertinence d'un travail peut se mesurer aux questions qu'il permet de poser. C'est à l'intérieur d'une théorie qu'il est possible de distinguer ce qui est important de ce qui ne l'est pas. C'est dans cet esprit que Margolinas a identifié certaines questions à développer dans le cadre spécifique de la théorie des situations. Notre recherche prend appui sur ces questions. Nous les évoquons brièvement.

À propos d'une situation paradigmatique de la didactique, « la course à 20 » (Brousseau, 1978, 1998), Margolinas (1993) relève les difficultés importantes qui tiennent à la nature des situations de validation. Elle signale ainsi la difficulté de la définition d'un « milieu pour la validation » et la difficulté tout aussi importante, voire conséquente, de définir les rapports des élèves à ce milieu. Elle généralise les jugements précédents à toutes les situations de validation; il s'agit d'une hypothèse intéressante qui mérite examen. De cette manière, elle ouvre la porte à l'étude du rôle du professeur. Dans le domaine de l'algèbre, nous avons déjà fait référence aux analyses effectuées par Balacheff qui posent aussi explicitement le besoin d'avancer sur cette étude.

Notre recherche part donc de questions déjà posées à l'intérieur de la théorie des situations didactiques et reconnues par la communauté didactique. D'autres questions s'y greffant sont également proposées. La pertinence de notre recherche est en partie garantie par les reconnaissances et le statut que ces questions ont dans la didactique des mathématiques. La qualité des questions et des réponses possibles restera sous le contrôle de la communauté de référence.

Chapitre II

Cadre théorique

Chapitre II

Cadre théorique

Dans ce chapitre, nous présenterons certains concepts fondamentaux permettant de préciser, de prolonger notre problématique, et de mieux définir nos questions et objectifs de recherche. Pour y arriver, il nous faudra reformuler et réinterpréter certains concepts en fonction des caractéristiques spécifiques de notre problématique. Nous identifierons aussi certaines limites de la théorisation disponible, ce qui nous permettra une meilleure compréhension de nos choix quant à l'espace didactique à construire.

Nous étudierons ainsi la position de divers auteurs sur l'enseignement de l'algèbre, du point de vue de la validation des connaissances engagées. Nous identifierons des éléments fondamentaux de la rupture arithmétique-algèbre; nous étudierons la question de la validation dans l'enseignement des mathématiques, en faisant référence à divers travaux sur la preuve. Ce travail fait, nous inscrirons par la suite nos questions de recherche dans le cadre de la théorie de situations et dans la spécificité du domaine numérique-algébrique, ce qui nous conduira à introduire le concept de situation de preuve intellectuelle, à analyser les différents niveaux de connaissances en jeu, à étudier leurs rapports avec les situations de validation, et à réinterpréter certaines notions théoriques.

1. L'enseignement de l'algèbre et la validation

L'entrée en algèbre constitue un événement majeur pour les élèves et les enseignants du secondaire, pour les concepteurs des programmes d'études et les auteurs de manuels scolaires et, pour les chercheurs en didactique des mathématiques. Au cours des dernières décennies, le nombre d'études et de propositions sur l'enseignement de l'algèbre a été considérable. Parallèlement, on a assisté à des transformations des programmes d'études et des manuels scolaires. Mais, les problèmes épistémologiques et didactiques que soulève l'enseignement introductif de l'algèbre sont loin d'être résolus ou même de faire l'unanimité dans la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques.

Bednarz, Kieran et Lee (1996) décrivent diverses approches (voire diverses perspectives) pour l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre : généralisation de patterns numériques et géométriques et de lois relatives aux relations numériques, résolution de problèmes, résolution d'équations en utilisant des modèles concrets, introduction de situations fonctionnelles et modélisation de phénomènes physiques et mathématiques. Partageant les points de vue de Bell (1995) et de Vergnaud (1989), ces chercheurs signalent que seul un équilibre entre ces approches et les situations qui les rendent signifiantes pourra permettre aux élèves de comprendre la pertinence de l'algèbre et sa structure, de donner un sens aux concepts algébriques, et de construire des raisonnements algébriques.

Mais, en quoi consiste cet équilibre? Comment se nouent les significations construites dans différents contextes? Les significations construites à partir d'une entrée spécifique peuvent-elles servir de point d'appui pour avancer dans la construction d'autres connaissances algébriques ou y a-t-il toujours une rupture de significations?

Les questions précédentes évoquent une autre question fondamentale pour notre recherche: la validation des connaissances algébriques produites a-t-elle une place –ou pourrait-elle l'avoir- dans les différentes perspectives d'enseignement de l'algèbre? Quelle est la nature des validations considérées?

Il ne s'agit pas de faire synthèse des travaux sur l'enseignement de l'algèbre. Il ne s'agit pas non plus de questionner la conception de l'algèbre subjacente aux diverses propositions. Nous avons choisi d'examiner -en fonction des questions posées- quelques approches relevant de perspectives différentes, soit parce qu'elles ont eu une grande diffusion auprès de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques et ont marqué le système d'enseignement - du moins en Amérique du Nord, comme en font foi les programmes d'étude et les manuels scolaires-, soit parce qu'elles seront un point d'appui important pour le développement de notre travail.

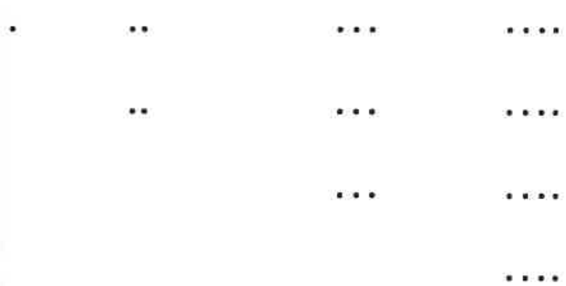
1.1. La généralisation de patterns numériques et géométriques

Depuis une dizaine d'années, plusieurs chercheurs se sont intéressés aux activités de généralisation de patterns, dans le cadre de la perspective de généralisation sur l'entrée en algèbre. Il s'agit d'une entrée en l'algèbre très diffusée au Québec, rencontrée dans la plupart des manuels scolaires.

Nous avons retenu les travaux bien documentés qui ont été réalisés par Lee (1996), Radford (1999, 2003a, 2003b) et le travail effectué par Mary (1999) sur l'analyse des manuels scolaires du Québec.

1.1.1. La généralisation de patterns et la question de la validation

Dans le cadre d'un enseignement expérimental, Lee (1996) examine deux types de problèmes. Le deuxième type concerne l'identification de patterns et l'utilisation du langage symbolique pour exprimer le terme général. Ainsi, dans un des problèmes, il est demandé aux élèves de trouver le nombre de points du rectangle succédant aux rectangles de la série ci-dessous, ainsi que le nombre de points pour un rectangle qui serait en position n dans cette série prolongée :



Lors de l'analyse des résultats, l'auteur écrit ce qui suit:

« In our original report and subsequent reports on the adults, I suggested that between 90 and 95 % of students saw a pattern in that they could produce the 5th dot rectangle. I now think that close to 100% saw patterns.
.... Our job is to get them to see mathematically acceptable patterns and from those to select the mathematically useful » (p. 101).

Mais comment définit-on un pattern « mathématiquement valide »? Est-ce celui que « voit » le professeur? Cette question soulève un problème sérieux de validité.

Selon Radford (1999), la validité d'un pattern semblerait être définie par l'invariance de la structure des termes donnés. Cela l'amène à formuler la question suivante : Comment un élève peut-il s'assurer que l'invariance qu'il a reconnue sera un argument acceptable? Ajoutons qu'il existe, du point de vue mathématique, une infinité d'invariances possiblement valides. On pourrait ainsi penser que les quatre premiers éléments du pattern précédent constituent un « premier élément » d'une série dont la régularité se modifie à chaque quatre éléments, et on peut ainsi définir le « deuxième élément » de cette série de multiples manières. La régularité suivante obtenue à partir des premiers 4 éléments donnés est absolument valide du point de vue mathématique :

Nous (et les élèves aussi) pourrions définir n'importe quel type de régularité. La validité d'un pattern, du point de vue mathématique, est donc liée à l'identification d'une certaine régularité et non de « la » régularité attendue par le professeur. Il n'est pas possible d'invalider la réponse d'un élève qui propose que tous les termes suivants de la série donnée soient composés d'un seul point (en inventant sa propre régularité), parce que la réponse attendue par le professeur est « une » des réponses valides et non « la » réponse valide.

Comme nous pouvons le voir dans le passage suivant, l'activité de généralisation de patterns est toujours pensée par Lee en fonction d'une réponse attendue, « du pattern correct » :

« *...Although generalizing is a basic human activity that we demonstrate when we formulate our first words, the type of generalizing activities suggested here are not easy. As we saw, there were obstacles at the perceptual level (seeing the intended pattern), at the verbalizing level (expressing the pattern clearly), and at the symbolization level (using n to represent the nth array or number and then expressing the number of dots in terms of this).* » (Lee, 1996, p.105)

Le fait de ne pas obtenir la réponse attendue est analysée par Lee en termes d'obstacles à un niveau perceptif. L'attente d'une réponse déterminée ignore le fait que différents observateurs, avec des connaissances différentes, peuvent « voir » différentes régularités. Un problème mathématique ayant une infinité de solutions est ainsi transformé en un « problème didactique » comportant une seule solution. La nécessité de cette transformation semblerait être liée au fait que si la réponse attendue par le professeur n'était pas « la » réponse valide, la symbolisation et éventuellement le travail sur l'équivalence des expressions algébriques produites deviendraient un obstacle au projet d'enseignement.

Mais pour continuer l'analyse, acceptons l'unicité de la réponse, c'est-à-dire, l'existence d'un seul pattern (le pattern attendu par le professeur). Dans ce contexte, comment l'élève peut-il valider l'expression produite? Comment sait-il que la formule produite correspond au terme général du pattern « attendu »?

Radford (1996) rappelle en ces termes l'importance du problème de la validation, dans ce contexte de généralisation:

«Generalization as a didactic device cannot avoid the problem of validity, and validity is in itself a very complex idea. This does not mean that generalization cannot be a useful bridge to algebra. I want to point out that using generalization supposes that we should be prepared to work with this additional (logical) element in the classroom.» (p. 45)

Nombre de chercheurs ont mis en évidence, dans le contexte de la reconnaissance d'une régularité numérique et donc, d'une généralisation, le fait que les élèves valident une proposition générale, dont le domaine de validité est infini, à partir de l'analyse de quelques cas particuliers. Par exemple, les élèves identifient, à partir de l'analyse de quelques cas particuliers, que la multiplication de deux nombres pairs est un nombre pair, en restant à ce niveau empirique par rapport à la validation. Dans ce cas, on peut observer dans les manuels scolaires, mais aussi chez les enseignants, une préoccupation d'aider l'élève à dépasser ce niveau de validation empirique. Pourquoi est-on alors préoccupé, dans ce dernier cas (une fois identifiée *une* régularité et non « la » régularité attendue), par le manque de validation théorique, et non dans le cas de la généralisation de patterns géométriques?

La question du contrôle des connaissances produites, ou plus encore de la construction de connaissances qui permettent aux élèves de contrôler leurs productions, n'est pas considérée explicitement, ni dans les recherches qui s'occupent de cette entrée en algèbre, ni dans les manuels scolaires. Dans les manuels, les niveaux de validation changent en fonction des objets spécifiques : lorsqu'il s'agit de valider « une proposition mathématique », on demande un niveau de validation théorique; lorsqu'il s'agit de valider « une formule », l'exigence de validation est plus faible.

Dans les activités sur les patterns, en prenant en compte l'infinité de solutions possibles, ce sera la définition de la régularité adoptée par les élèves qui servira de base à la construction d'une validation; la validation restera ainsi liée à la définition de la régularité établie : on pourra alors connaître avec certitude le cinquième terme ou le millième terme.

Dans sa thèse, Mary (1999) effectue une analyse très intéressante du problème de la validation dans les manuels, notamment dans les situations invitant les élèves à observer des régularités et à exprimer en langage symbolique « la » règle reliant un nombre et son rang dans une suite.

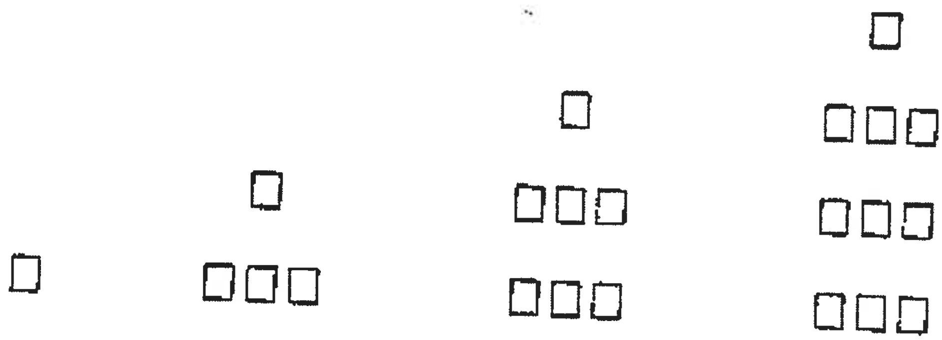
«... Il s'agit de construire des formules, ce qui apparaît une occasion privilégiée de validation : c'est vrai pour ce cas, mais est-ce toujours vrai? Pourquoi? Nous nous sommes donc penchées sur les sections portant sur les suites en cherchant ces deux questions ou une explication correspondant à une réponse à ces questions. Nous avons cherché aussi si les conditions permettant de répondre à ces questions étaient présentes, c'est-à-dire, les aspects des consignes sur lesquels l'élève pourrait s'appuyer pour construire et valider sa formule: formulation de la régularité, contexte, dessins... » (p. 63)

Ces observations rejoignent celles que nous avons faites antérieurement. Il est ainsi possible de reconnaître l'acceptation implicite de l'existence d'une seule réponse possible, d'une seule régularité, celle qui va permettre d'avancer dans le projet didactique prévu. En acceptant cet implicite, nous centrerons notre regard sur les analyses faites par Mary, dans le but de mieux comprendre l'absence d'un travail sur la validation dans les activités sur les patterns.

Mary remarque que la plupart des tâches proposées dans les manuels concernent des suites arithmétiques, les suites autres qu'arithmétiques ne sont utilisées que d'une façon marginale. De plus, si la construction de formules apparaît à un moment privilégié pour conduire les élèves vers une démarche de preuve qui supposerait une dialectique entre le modèle (la formule) et le réel (le pattern géométrique), en aucun cas, on ne trouve un embryon d'une telle préoccupation. Dans les manuels (et nous ajoutons dans certaines recherches en didactique des mathématiques), les contextes et les propriétés des figures engagées dans les patterns ne sont nullement utilisés, ni pour produire, ni pour valider la formule trouvée.

Mais analysons plus finement un des exemples donnés par Mary (1999, pp. 66)

« On construit cette suite avec des cubes



Voici le travail demandé :

1) *Dessiner les deux prochaines formes*
2) *Déterminer le nombre de cubes nécessaires pour la 6^{e} et la 7^{e} formes*
3)

Range de la forme	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	……	*n*
Nombre de cubes								

4) *Décrire en mots la régularité que l'on observe dans cette suite*
5) *Comment peut-on trouver chaque terme en utilisant le rang qu'il occupe dans la suite?*
6) *Déterminer le nombre de cubes nécessaires pour construire la 50^{e} forme*

Pour suivre le travail de l'auteur, il faut choisir une des régularités possibles (« l'attendue »), qui pourra être formulée de diverses manières, selon les propositions des élèves et le cadre (géométrique ou arithmétique) choisi. Dans le cadre géométrique, la régularité peut s'exprimer de la façon suivante: il s'agit d'une séquence où pour passer d'un terme au suivant, il faut ajouter 2 carrés à la base et 1 carré à la hauteur, c'est-à-dire, ajouter chaque fois 3 carrés.

Une fois définie cette régularité, on peut dire que la formule associée est 3n - 2. Mais comment les élèves peuvent-ils arriver à construire cette formule et à la valider? Mary dit que la démarche de preuve associée à la construction de formules supposerait une dialectique. En quoi consiste cette dialectique dans l'exemple présenté?

Pour pouvoir avancer, nous avons besoin de distinguer ce qui sera jugé valide -en fonction de la régularité définie- et ce qui sera le point d'appui pour valider la formule et éventuellement pour la construire[1].

Dans le cadre numérique, la régularité définie peut s'exprimer de la manière suivante :

Range de la forme	1	2	3	4	5	6
Nombre de cubes	1	4	7	10	13	16

+3 +3 +3 +3 +3

Mary explique que, dans certains manuels, pour trouver la relation entre le terme et son rang, on propose un tableau mettant en parallèle les suites de nombres et de rangs. Le passage d'une suite à l'autre se fait à l'aide d'opérateurs :

Rang	1	2	3	4
	↓x3-2	↓ x3-2	↓ x3-2	↓ x3-2
Terme	1	4	7	10

[1] Nous disons « éventuellement pour la construire » parce que les modes de production d'une formule peuvent être divers alors que la validation, du point de vue mathématique, doit respecter certaines normes.

Mais, aucun moyen n'est donné à l'élève pour pouvoir trouver ces opérateurs : le traitement fait par les manuels ressemble plus à une devinette qu'à autre chose, conclut l'auteur.

Mais quels sont les moyens dont pourrait disposer un élève pour sortir de la devinette? Même si l'élève résout la devinette, comment valide-t-il sa solution?

Dans le cas présenté, il s'agit d'une suite arithmétique du type

$A_1 \quad A_1+3 \quad A_1+2x3 \quad A_1+3x3 \ldots\ldots\ldots A_1+(n-1)x3 \qquad (*)$

Pour valider la généralité de « l'opérateur », (et éventuellement pour le trouver), il faudrait travailler avec l'expression du terme général :

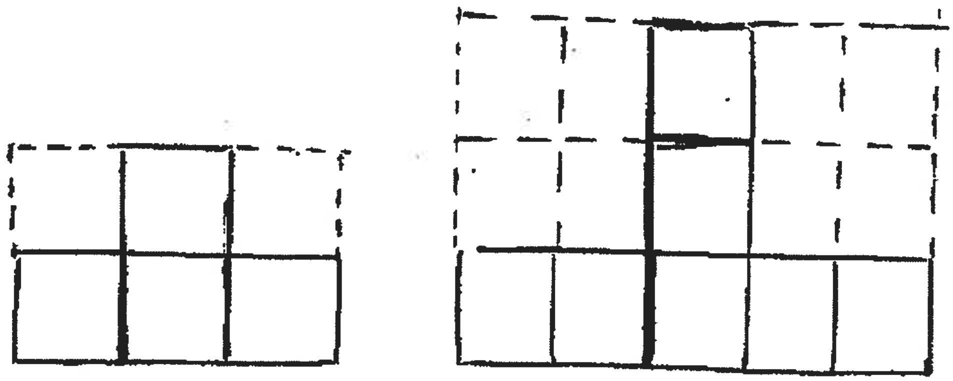
$$A_1 + (n-1)x3 = 3xn -(3-A_1)$$

De plus, comme le fait remarquer Radford (1999), la manière d'exprimer la suite (comme nous l'avons présentée dans (*)) n'est pas indépendante de l'objectif visé, requérant une certaine anticipation de l'objectif pouvant orienter les décisions relatives « aux aspects » de l'objet à retenir dans la représentation. Pourquoi ne tenons-nous pas compte de cette possibilité? Le niveau de complexité n'est-il pas pertinent pour l'initiation à l'algèbre ?

Ne pas considérer la question de la validation oblige à remettre à plus tard la compréhension des formules, comme le fait bien remarquer Mary, en s'appuyant sur un extrait d'un manuel:

*« **Pas de panique** : ces formules, ce n'est pas sorcier. Tout le mystère s'éclaircira avant la fin du secondaire....patience ! »* (Les mathématiques et la vie, secondaire I, p.59, cité par Mary).

Le cadre géométrique pourrait être un point d'appui, ajoute Mary. La régularité admise peut se réinterpréter de la façon suivante :



Le deuxième terme peut se penser comme un rectangle de 3 x 2 carrés auquel on a enlevé deux carrés de 1 x 1. Le fait d'ajouter deux carrés à la base et un à la hauteur, pour trouver le terme suivant, implique, dans la ligne de notre interprétation, la production d'un rectangle de 5 x 3 carrés auquel on a enlevé deux carrés de 2 x 2.

Mais pour exprimer la base du rectangle n, il faut résoudre un problème similaire à celui proposé dans le cadre numérique, c'est-à-dire, la recherche du terme général de la suite numérique 1,3,5,7.... Le rectangle de rang n sera un rectangle de (2n - 1)xn auquel on a enlevé deux carrés de (n - 1)x(n - 1).

Du point de vue géométrique, on peut trouver la formule (et la valider), en utilisant des connaissances sur les aires :

Nombre de carrés dans le rang n = $(2n - 1) \times n - 2 \times (n - 1) \times (n - 1) = 3n - 2$

L'analyse réalisée montre que « cette utilisation » du contexte géométrique exige un travail avec des expressions algébriques complexes, en plus d'avoir besoin de passer nécessairement par le cadre numérique pour exprimer un coté du rectangle en fonction du rang. D'autres structures géométriques « équivalentes » pourraient, bien sûr, être imaginées pour éviter la complexité algébrique ou possiblement pour résoudre la question de l'expression des bases des rectangles, mais cela impliquerait, soit une intervention spécifique du professeur, soit une anticipation additionnelle de la partie des élèves. Par exemple, on pourrait réinterpréter la série de la manière suivante :

□
□□□   □
□□□   □□□   □
□□□   □□□   □□□   □

De cette manière, on pourrait penser dans un rectangle où la hauteur coïncide avec le rang et la base est toujours 3. La quantité de carrés dans le rectangle complet est 3n, mais il faut toujours enlever 2 petits carrés; la formule pour la quantité de petits carrés est alors 3n - 2. Avec ce type de représentation, on pourrait aussi produire la formule suivante :

3 (n - 1)	+ 1
quantité de petits carrés dans le rectangle de base 3 et hauteur n-1	dernier petit carré

Pour arriver à la formule cherchée ou pour la valider, il faut restructurer la représentation géométrique ou proposer, dès le début de la situation, un type de représentation pour lequel la validation de la formule à produire soit possible pour les élèves, selon les connaissances dont ils disposent. De plus, le cadre géométrique peut être un point d'appui pour la validation; il sera cependant nécessaire de mettre en relation ce cadre avec le cadre numérique, si on veut construire un système de connaissances pour la validation en algèbre et non uniquement des validations locales.

Notre analyse ne doit pas être interprétée comme une remise en cause de l'intérêt du travail algébrique sur les patterns. Nous avons voulu simplement montrer, à partir d'un exemple caractéristique, quelques analyses nécessaires à réaliser, si nous voulons considérer en même temps le problème de la validation des connaissances développées.

L'activité de recherche de régularités est une activité très présente dans les mathématiques. Mais quand cette activité prend fin par la production d'une proposition générale ou d'une proposition avec un certain domaine de validité, le mathématicien reconnaîtra son caractère hypothétique, puis le besoin de chercher une preuve. Même si à l'école, lorsque les élèves sont en train de construire une rationalité liée à la validation, on peut accepter des validations provisoires, il sera toutefois nécessaire de bien distinguer les situations dans lesquelles il est suffisant de procéder à la vérification de certains cas, des autres situations où on ne peut se contenter d'un tel travail. Même dans cette construction provisoire, la distinction explicite entre vérification et preuve doit donc commencer à s'élaborer.

Un autre phénomène qu'on peut observer lorsqu'on analyse des manuels, mais aussi des programmes scolaires, est le manque d'articulation entre les types d'activités liés à l'entrée dans l'algèbre et ceux liés aux contenus algébriques du programme scolaire. On se rappelle des phrases populaires chez les professeurs qui ont été engagés dans la réforme des mathématiques modernes : *« j'ai fini le chapitre des ensembles, maintenant je commence avec les mathématiques »*. Dans le cas des patterns, l'équivalent serait : *« j'ai fini avec les patterns, maintenant je commence à faire de l'algèbre » (en associant à l'algèbre, les opérations avec des expressions algébriques, la résolution d'équations, etc.).* De manière surprenante, comme nous avons essayé de l'illustrer dans la problématique de notre recherche, les expressions algébriques qui avaient été introduites dans le contexte de patterns deviennent, tout de suite, une sorte de mélange de carrés et jetons, ou de tuiles, en perdant absolument la signification élaborée, non pas à la suite d'une décontextualisation conduisant à leur étude comme « objet », mais plutôt à la suite de l'ajout d'un autre contexte didactiquement « convenable ». La dialectique avec le numérique, qui pourrait être un fil conducteur des significations, reste également absente.

Ce phénomène de rupture de l'unité fonctionnelle de l'algébrique est étudié d'une manière plus générale par Gascon, Bosch et Bolea (2001); nous y reviendrons ultérieurement. Notons pour le moment que ces chercheurs parlent de l'absence d'articulation entre certaines entrées dans l'algèbre et le développement d'autres connaissances algébriques de base qui sont nécessaires pour avancer dans les processus d'algébrisation. Pour mieux comprendre cet événement, nous reviendrons sur les recherches liées aux patterns et analyserons la question du sens construit autour de la symbolisation des expressions algébriques à partir du travail sur les patterns et de son rapport avec le sens que ces expressions porteront dans d'autres contextes (équations, fonctions, etc.).

1.1.2. Les patterns et la question du sens des expressions symboliques associées

Selon Radford (1999), dans les perspectives cognitivistes issues de la théorie de l'information, les idées sont considérées comme le résultat de processus internes du cerveau et le signe est vu comme le moyen de communication, vêtement de ces idées, confiné à un rôle de peu d'importance épistémologique. Le signe est le moyen qui permet de « projeter » sur le monde extérieur les résultats des processus privés développés dans le cerveau. Il est aussi, selon Radford, le résultat de la contraction sémiotique d'actions réalisées par anticipation (pas nécessairement dans l'immédiat de la production du signe) dans le plan social. Il emprunte à Mikhailov l'idée suivante : *« Le sens réel du signe est déterminée par son emploi, par le rapport que la règle d'usage a avec les autres signes du système ».* (p.34) Dans cette perspective, les idées et les conceptualisations humaines sont le résultat d'une entreprise multi-individuelle dans laquelle la communication, le langage, les mots et les signes en général, acquièrent un rôle épistémologique très important.

Radford étudie la forme dans laquelle différents systèmes sémiotiques interviennent dans la formation de règles d'emploi de signes. Il s'intéresse à l'examen des usages des signes algébriques et du sens que les étudiants confèrent à ces signes; les usages renvoient alors à un processus qui est le résultat de la rencontre du langage naturel et écrit sur des actions qui se produisent dans le système sémiotique dans lequel les problèmes sont posés aux élèves. Le contexte dans lequel les élèves travaillent, et à partir duquel l'auteur construit sa théorisation, est celui du pattern : certains termes d'un pattern étant connus, il s'agit alors de produire une formule pour le terme général.

Dans le contexte de ce type d'activités, une des remarques fondamentales faite par Radford est que le « terme général » n'est pas un terme de la suite et qu'il n'est pas exprimable dans le système sémiotique dans lequel s'exprime la suite. Radford se préoccupe d'analyser la construction du nouvel objet et les ressources sémiotico-discursives qui se mettent en œuvre dans ce processus. À partir d'un dialogue entre élèves et professeur, il montre les difficultés des élèves dans l'attribution d'une signification à la tâche « déterminer la quantité de cercles dans la figure n » et les efforts déployés par le professeur pour leur faire comprendre la tâche, en recourant, notamment, à des expressions du type « n est n'importe quel nombre ». Il montre que les élèves comprennent l'expression « n'importe quel nombre » dans le système sémiotique de l'arithmétique, c'est-à-dire, comme un nombre choisi arbitrairement, mais concret. En interaction avec le professeur, ces élèves évoluent, selon l'auteur, vers la prise de conscience des actions réalisées dans un contexte de généralisation et vers une généralisation, en utilisant le langage naturel pour exprimer les actions faites sur chaque nombre pour obtenir le suivant.

Les interprétations précédentes sont intéressantes. L'analyse des difficultés des élèves semble toutefois faire abstraction de la nature de la situation proposée ou de la nature du « milieu ». Quelles connaissances les élèves avaient-ils pour interpréter la question relative au rang n, ces connaissances relevant certainement d'un autre registre sémiotique? Qu'attendait-on de ces élèves? Pourquoi le professeur n'avait-il pas prévu son action face à cet écart entre les registres sémiotiques? En partant de notre perspective, une autre question s'impose: est-il possible de construire un milieu qui permette une évolution vers la généralisation sans attendre que cette évolution dépende exclusivement de l'action du professeur?

L'intérêt de la recherche effectuée par Radford était d'étudier les emplois des signes algébriques et les sens que les étudiants leur donnent. L'auteur postule que la pensée algébrique est un type particulier de pensée mathématique liée à une nouvelle forme d'emploi des signes dont leurs signifiés sont élaborés par les élèves et le professeur pendant leur participation aux activités mathématiques. Mais, le signifié élaboré par les élèves n'est-il pas lié à la nature des activités proposées? Si le professeur joue un rôle fondamental dans la construction du sens (à cause du changement nécessaire de registre sémiotique), pourquoi son action semble-t-elle improvisée? Cette improvisation a, effectivement, une influence sur le sens construit. Si le professeur joue un rôle fondamental dans la construction du sens, il est absolument nécessaire, à notre avis, de connaître ses anticipations pour pouvoir interpréter les résultats obtenus.

Radford mentionne aussi que le professeur dirige la construction de l'objet dans une direction qui est interprétée par les élèves d'une façon inattendue. Quelle était la façon attendue, sachant que le changement de registre sémiotique et la généralisation ne seraient pas évidents pour les élèves? Quand certains élèves avancent vers la généralité, l'auteur attribue ce changement au fait que le professeur transforme son explication (au lieu de dire que n est « un nombre quelconque », il dit que n est « n'importe quel nombre ») et remet en question les réponses antérieures des élèves. Pourquoi l'auteur ne considère-t-il pas dans l'interprétation de ce changement toute une série de gestes dynamiques que le professeur fait avec ses mains (gestes explicités à la page 47), par exemple, «touchant un à un les termes de la suite, exprimant l'objet avec les mains, là où les mots déjà ne sont pas suffisants»? C'est ce processus qui est contenu implicitement, à notre avis, derrière les mots « n'importe quel nombre » utilisés par le professeur. Mais les élèves n'arrivent pas à lire dans ces mots l'intention du professeur. D'autres signes sont alors nécessaires pour décoder cette intention.

Dans un travail ultérieur, Radford (2003a) montre également que deux expressions symboliques pour un même pattern (« (n+1)+ n » et « (n+n)+1 ») sont jugées différentes par les élèves, parce que ces expressions objectivent un ensemble d'actions différentes. Dans chaque expression, les symboles n, 1, +, (,), ne sont pas liés de manière arbitraire.

Le signifié sémiotique de l'objectivation des actions « évoquées» dans les expressions algébriques reste lié à l'ordre de la séquence des actions numériques. Pour l'auteur, le signe « n » apparaît comme une abréviation du terme linguistique générique « la figure » engagé dans un niveau de discours antérieur, comme marquant un terme spécifique de l'activité discursive de l'élève, comme un index dans le sens de Peirce. Ces expressions symboliques héritent de la dimension spatio-temporelle du discours contextuel qui empêche la réalisation de calculs formels.

En se basant sur les travaux de Frege, Arzarello, Bazzini et Chiapppini (2001) distinguent sens et dénotation d'une expression algébrique. La dénotation est l'objet auquel l'expression réfère, le sens est la façon dans laquelle l'objet est perçu, c'est-à-dire la pensée exprimée par l'expression (aspects intentionnels). Par exemple, (n+1) + n et (n+n) +1 ont des sens différents, mais dénotent la même fonction. Dans le cas examiné précédemment par Radford, les élèves ne reconnaissent pas que ces deux expressions ont la même dénotation. Pour Arzarello, Bazzini et Chiapppini (2001), le sens d'une expression algébrique dépend du domaine de connaissances où elle habite (sens contextualisé). La potentialité de l'algèbre consiste dans les multiples sens qui sont incorporés par la même formule et/ou qui peuvent être obtenus par des manipulations syntaxiques. Le «drame » didactique réside, pour les auteurs, dans le déséquilibre entre sens, dénotation et expressions : le statut des signes algébriques devient obscur pour les étudiants (plus encore lorsque ce statut est changé selon une « convenance » didactique !). Dans l'enseignement actuel de l'algèbre, l'introduction d'artefacts didactiques pour « concrétiser » des objets mathématiques (tuiles, jetons, etc.) renforce ce déséquilibre: la notion de dénotation est pratiquement ignorée; les interactions entre sens et dénotation n'ont pas de sens dans ce cadre.

Radford (2003b) montre aussi comment un élève qui a produit l'expression «(x+2)+(x+5)+x » dans un contexte d'utilisation du langage algébrique pour représenter la relation entre certaines quantités, refuse le regroupement de termes similaires «3x+7 » produit par un autre élève qui arrive à 3x+7, parce que ce regroupement provoque une rupture avec le sens original.

« Il n'y a pas dans l'histoire originale de segment possible qui puisse correspondre au résultat du regroupement. Rien, en effet, dans l'histoire originale ne peut être corrélé à l'expression 3x+7 » (p.13).

Pour l'auteur, pour que le calcul formel ait lieu, il faut libérer le symbolique de ses attaches narratives, discursives. Et cela exige que le sens de l'expression symbolique soit transformé. Nous partageons l'analyse faite par Radford, mais nous ajoutons que la question de la reconnaissance de l'équivalence entre les deux expressions algébriques proposées n'a pas de sens pour l'élève dans le contexte des situations présentées. Il n'y a aucune question qui amène les élèves à se poser le problème de l'équivalence, qui permet de reconnaître l'avantage d'opérer à un niveau syntaxique pour obtenir de nouvelles informations à un niveau sémantique ou contextuel. De plus, le contexte n'évoque pas de connaissances qui permettraient de traiter le problème de l'équivalence (le problème des connaissances qui permettent de transformer une expression algébrique en une autre équivalente ou le problème de décider si deux expressions algébriques sont équivalentes). Il n'est ainsi pas étonnant que deux expressions équivalentes ne soient pas reconnues comme telles par les élèves, dans le cadre de l'activité proposée. Si le problème s'arrête à la production d'une écriture, il est raisonnable que les élèves restent attachés au contexte initial, qu'il n'existe pas une rupture de sens pour entrer dans la question syntaxique. Il faut rappeler que cette rupture de sens ne signifie pas une « élimination » du sens, mais la construction d'un autre sens. De cette manière, la transformation dont Radford fait état, suppose, à notre avis, la construction d'un sens « interne » dans le contexte duquel puisse s'insérer la question de l'équivalence des expressions algébriques, construction qui ne peut négliger la dialectique avec le numérique, selon le sens qui nous avons donné à cette dialectique dans le premier chapitre.

La question des transformations d'expressions algébriques (calcul formel) est fondamentale pour avancer dans la production de connaissances algébriques. Les difficultés remarquées par Radford mettent en évidence le manque d'études sur l'articulation entre le sens construit à partir des activités sur les patterns et le sens à construire pour pouvoir effectuer sur les expressions symboliques des traitements de type syntactico-formel.

Une question reste ouverte: le fait de construire un certain sens contextuel et d'opérer une suspension de ce sens pour la construction d'un sens spécifique dans un espace syntaxique est-il suffisant pour permettre aux élèves d'effectuer la même suspension, quel que soit le contexte en jeu, et de réutiliser la connaissance produite dans un plan syntaxique?

1.2. La construction de l'algébrique dans une dialectique avec le numérique

Afin de mieux lier forme et sens des écritures littérales, Lemoyne, Conne et Brun (1993) proposent une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre selon laquelle le traitement des écritures littérales, dans des situations appropriées, pourrait constituer un outil pour la construction de notions algébriques. Les auteurs proposent une interprétation différente de celles généralement avancées de certaines erreurs des élèves en algèbre; ils parlent ainsi "de lectures ostensives", "d'analyse syntaxique", "du peu de préoccupation (des élèves) pour les opérations en cause dans une expression", " du peu de préoccupation pour les informations portées par les expressions" (p. 346-347). Ils se demandent, donc, comment amener les élèves à traiter les informations et non uniquement les écritures, comment contraindre les élèves à un examen des informations ostensives et désignatives que véhiculent les écritures numériques et littérales.

Ces remarques montrent que la suspension d'un certain contexte pour entrer dans le traitement algébrique ne signifie pas la suspension du sens, mais la construction d'un autre sens: il faut construire le sens au niveau du symbolisme pour accéder à la manipulation algébrique et, s'il est nécessaire, retourner au contexte initial et réinterpréter les résultats obtenus.

Les auteurs proposent un enseignement visant une construction formelle des propriétés des opérations arithmétiques, en faisant intervenir l'algèbre à titre d'outil privilégié pour cette construction. Il ne s'agit pas d'une application de l'algébrique déjà construit, mais de la construction même de l'algébrique, dans une interaction dialectique avec le numérique. Dans leur étude, le langage symbolique (les écritures littérales de calcul) est considéré comme un "outil de pensée et d'action".

« *La langage algébrique montre les relations et permet d'opérer sur ces relations dépouillées de leurs attachements numériques. Il facilite aussi une réflexion sur les opérations et sur les relations entre les nombres (et non entre des nombres) et les systèmes. Le travail cognitif peut ainsi se dérouler plus librement dans un espace théorique ou dans un espace d'hypothèse et également, dans un espace expérientiel, le sujet pouvant toujours transformer les écritures littérales en écritures numériques. La coordination des informations dans les deux espaces peut alors faciliter la mise en forme d'un raisonnement formel et conséquemment, la construction algébrique des propriétés des opérations arithmétiques.* » (p.352)

Cette déclaration appelle quelques remarques. Le langage algébrique montre quelles relations, celles construites par qui? Face à une expression algébrique qui n'a pas été objet de construction par l'élève, suppose-t-on qu'il lira là des relations adéquates? Comme les auteurs l'ont déjà dit, il faut que l'élève apprenne qu'il est possible de lire l'information portée par une expression algébrique. Si l'expression algébrique a été construite par l'élève, elle va "montrer" les relations qu'il a déjà anticipées et donc, on se trouve avec un problème similaire à celui identifié par Radford : dans ce cas, l'importance sera du côté des transformations qui permettront d'obtenir de nouvelles informations. Construire un milieu où les transformations des expressions soient nécessaires est une tâche complexe, problématique.

De plus, si on accepte que dans le traitement symbolique, il n'y a pas de suspension de sens, mais la construction d'un nouveau sens pour doter de significations les transformations, pourquoi penser que le travail cognitif de l'élève puisse se dérouler

« plus librement » dans un espace théorique? Cette « liberté » ne dépendrait-elle pas de la maîtrise du domaine symbolique? Mais comment acquiert-on cette maîtrise?

Les auteurs affirment, à l'instar de Piaget, que le langage algébrique constitue un levier de la pensée formelle qui agit sur des transformations et des relations, libérée de supports concrets définis, tout en étant capable d'envisager les concrétisations possibles de ces transformations ou de ces relations. Mais à quel moment se produit, chez les élèves, cette « libération » de supports concrets définis et comment se produit-elle? Comment obtient-on cette « libération » sans perte de sens?

Dans la première situation de la séquence d'enseignement proposée par les auteurs, il y a une tâche principale et quelques tâches complémentaires :

« <u>Tâche principale</u> : La mesure du côté d'un carré est déterminée par l'application d'une séquence d'opérations arithmétiques à des nombres différentes. Les nombres sont identifiés par les lettres a,b,c, et d; les opérations sont :+,-,. Vous devez trouver la séquence permettant de produire la mesure maximale du côté d'un carré : le carré attendu est dessiné à l'écran. Attention, vous ne pouvez utiliser des nombres dans la séquence ; seules les lettres sont permises...*

<u>Tâches complémentaires</u> : 1- Vous avez proposé « b(d+c)-a »; croyez-vous que le résultat serait le même si je proposais « d(b+c)-a »?

2- Pouvez-vous m'expliquer avec des calculs sur les lettres pourquoi « b(d+c)-a » est plus grand que « d(b+c)-a »? »

Pour les auteurs, le rôle des tâches complémentaires est d'impliquer des connaissances algébriques sur les opérations. Ils supposent que la solution de la première tâche complémentaire puisse relever d'une vérification empirique des hypothèses et que la seconde, invite à une expression générale de ces hypothèses, expression algébrique. Mais pourquoi les élèves verraient-ils dans cette expression algébrique une représentation « générale » de leurs hypothèses? Selon les auteurs :

« Dire que les procédures font partie des objets des expressions littérales c'est en effet indiquer que ces objets portent une information sur leur construction, ce qui n'est pas le cas pour les objets de l'écriture numérique ». (p.343).

L'information que garde l'expression algébrique produite dans la deuxième tâche complémentaire est liée au contexte de construction. Ce contexte se rapporte à des lettres représentant des nombres spécifiques (inconnus mais spécifiques) et à des opérations avec ces nombres. Que signifie, donc, « représentation générale » de ses hypothèses? Pour nous, cette expression serait générale si les élèves pouvaient reconnaître que peu importe les nombres a,b,c et d, si on garde les relations d'ordre entre ces nombres, l'expression obtenue va permettre d'expliquer pourquoi b(d+c)-a est plus grand que d(b+c)-a. La possibilité d'arriver à cette généralisation exigerait des élèves qu'ils se détachent du contexte initial et dans ce cas, on pourrait pointer une différence fondamentale avec les situations liées aux patterns : l'objectif n'est pas l'écriture des relations mais la construction de connaissances sur le numérique, en faisant de la symbolisation une partie constitutive de ces connaissances.

Même si les élèves ont déjà établi des relations d'ordre entre chacune des lettres (ce qui leur permettra de trouver une réponse), le fait de baser le raisonnement sur la relation b>d, n'implique pas la reconnaissance de la validité de ce raisonnement pour tous les nombres b et d qui remplissent cette condition, parce que b et d ont une signification très spécifique, dans le contexte en jeu. Il n'y a aucune explicitation dans la présentation de la situation qui nous permet de reconnaître l'intention d'avancer vers ce type de généralisation –ce qui marquerait l'originalité de la proposition pour le traitement de la généralisation- mais il est possible trouver quelques indices dans d'autres parties du texte :

« Au cours de la première situation, les élèves en majorité construisent les connaissances suivantes sur la multiplication :

1) *si $a>b>c$, alors $a(b+c)>b(a+c)>c(a+b)$*
2) *si $a>b>c>d$, alors $a(b+c-d)<a(b+c)-d$*

3) si a>b>c, alors a(b+c)>ab+c et a(b+c)> ac+b » (p. 364)

«Nous retenons de cette première analyse le rôle déterminant des écritures littérales dans la coordination et l'élaboration des connaissances arithmétiques et algébriques. Ainsi, à la première situation, ces écritures ne sont pour les élèves qu'un masque superficiel des opérations arithmétiques et des connaissances numériques, masque mis en place par l'adulte pour « jouer à l'enseignant ». Elles perdent rapidement ce rôle de codage-traduction d'une réalité arithmétique pour devenir un support symbolique indispensable à la formulation et la validation d'hypothèses ; ces hypothèses concernent les nombres, les ensembles de nombres et les opérations.
En acceptant d'opérer sur ces écritures et de les comparer, dès les premières situations, certaines élèves semblent déjà conférer un statut algébrique à ces écritures. Ainsi, s'ils ont recours à leurs connaissances arithmétiques pour traduire ces écritures en écritures numériques, ils formulent les conclusions de leurs expériences numériques dans l'espace « algébrique ». Cet espace devient pour eux et pour certains autres élèves, dans les situations subséquentes, l'espace de raisonnement privilégié» (p. 371)

On peut voir clairement dans ces passages l'intentionnalité d'avancer vers le type de généralisation dont nous avons parlé. Mais comment les élèves dépouillent-ils « rapidement » les écritures de leur rôle de codage-traduction d'une réalité arithmétique (lié au contexte initial) pour devenir un support symbolique indispensable à la formulation et la validation d'hypothèses? Quels éléments pourraient expliquer ce dépouillement? Les réponses des auteurs à ces questions importantes ne sont pas claires. Il semblerait que les élèves cessent de « voir » les lettres comme des représentations de nombres spécifiques (quoique inconnus) et que dans le parcours de leur utilisation (« sa fonctionnalité ») pour étudier les opérations arithmétiques, ils commencent à les percevoir comme des « nombres génériques» (variables aussi?). Cette transformation est fondamentale pour arriver à une généralisation et pour doter de sens le travail syntaxique. Elle « marque » une différence entre cette entrée dans l'algèbre et celle reposant sur les patterns.

La réalisation effective de cette transformation permettrait de dire, en nous référant aux travaux réalisés par Balacheff (2001), que les situations proposées se placent plus du côté de l'algèbre numérique que de l'arithmétique symbolique. Même si les deux pratiques emploient un langage symbolique, on peut dire que dans l'arithmétique symbolique « le contrôle » reste dans le cadre du contexte initial du problème. Dans les situations analysées, on commence à construire un nouveau système de contrôle qui, tout en prenant appui sur le contexte initial, s'en détache ou le surpasse: on ne pense plus sur des nombres spécifiques, même inconnus, mais sur des nombres généralisés avec un système d'organisation et de contrôle qui lui appartient, qui est basé sur les propriétés des opérations.

Dans l'entrée proposée par les auteurs, un partie importante du « jeu » algébrique est développé dans une dialectique avec le numérique: la lecture des informations que peuvent porter les expressions algébriques est ainsi un enjeu fondamental. C'est cette dialectique –la richesse des situations- qui confère un sens au travail opératoire réalisé à un niveau syntaxique (en se détachant du contexte initial), même si les transformations sont davantage liées à une demande « externe » qu'à un besoin interne des situations. La validation (le système de contrôle) est une partie constitutive de l'algébrique et est aussi développée dans le cadre de la dialectique mentionnée. Ces situations sembleraient satisfaire certaines des conditions proposées par Arzarello (1993: voir Balacheff, 2001, p. 4), entre autres, que le contrôle se dégage du monde de référence du processus de modélisation :

« Il est possible de sortir de cette difficulté si on est capable de trouver des situations dans lesquelles les élèves doivent travailler dans un espace mental où les objets perdent leur référence extra-mathématique et leurs traces procédurales et doivent les traduire en expressions symboliques, très synthétiques, idéographiques et relationnelles ».

Pour expliquer pourquoi un élève adopterait un nouveau signifié résultant de la manipulation algébrique, en suspendant le signifié lié au monde de référence, Balacheff (2001) fait appel à un certain sens d'une économie de la pratique. C'est justement cette idée d'économie qui permet d'expliquer pourquoi les élèves, dans les situations définies par Lemoyne, Brun et Conne (1993), laissent de côté la signification initiale des expressions pour entrer dans le domaine syntaxique.

Si on considère l'algèbre comme un outil de modélisation (cela semblerait être le point de vue dominant chez les didacticiens), entre le processus de construction d'une représentation symbolique d'un problème et l'interprétation du résultat obtenu, il y a tout un processus syntaxique. Comme nous l'avons déjà exprimé, il faut construire une autre signification dans le cadre interne de ce processus syntaxique, ainsi qu'un système de validation qui règle ce processus. Le jeu dialectique entre le numérique et l'algébrique, dont nous avons parlé à propos des situations analysées dans ce paragraphe, semblerait être un point d'appui qui lie les significations internes et initiales. À notre avis, pour reconnaître la véritable indépendance du sens construit par rapport au contexte initial, il est nécessaire que l'élève puisse opérer cette suspension du sens initial quel que soit le contexte et réutiliser les connaissances algébriques construites - et construire aussi des nouvelles connaissances- pour réussir dans d'autres situations qui requièrent l'utilisation de l'algèbre.

Lorsque Drouhard (1992) définit la notion du sens d'une écriture symbolique, il fait référence au fait que, par exemple, les expressions $(x-1)^2$ et x^2-2x+1 ont la même dénotation, mais les informations données par les écritures sont différentes et en particulier, les transformations formelles qui leur sont applicables sont distinctes. Pour Drouhard, des expressions distinctes partageant une même dénotation sembleraient « avoir droit » à différentes transformations formelles.

On peut se demander pourquoi certaines transformations formelles réalisées sur une expression dans le cadre d'un contexte déterminé seraient reconnues par les élèves comme des transformations possibles à réaliser sur « la même expression » construite dans un autre contexte. Accepter une « suspension sémantique » (selon le sens attribué par Drouhard) pour devenir un « algébriste compétent », n'exige-t-il pas de comprendre que les transformations produites à un niveau purement syntaxique correspondent à des transformations « équivalentes » -c'est-à-dire, qui maintiennent toujours les relations initiales - dans le contexte en jeu, quel que soit ledit contexte ? Faut-il viser une telle compréhension?

Même si, en accord avec Balacheff, nous pensons que l'établissement d'une correspondance entre l'opératoire et le contexte peut rester dans l'arithmétique symbolique, nous proposons ici une généralisation de cette correspondance qui pourrait valider la démarche algébrique (suspension du sens initial, travail syntaxique, retour au contexte initial ou retour à un ensemble de contextes initiaux). Mais comment parvenir à cette généralisation? Plusieurs auteurs insistent sur la tendance des étudiants à retourner au monde de référence, soit pour valider la pertinence de leurs actions, soit pour valider leur solution. Mais pourquoi les élèves ne devraient-ils pas éprouver un tel besoin? Quelle garantie ont-ils que la suspension du sens initial pour entrer dans une démarche syntaxique permettra de trouver la réponse au problème en jeu?

Les analyses menées jusqu'à maintenant nous permettent de mieux saisir les difficultés inhérentes à une entrée dans l'algébrique, ainsi que les conditions minimales à mettre en place. Notre travail se placera dans le cadre de cette dialectique numérique-algébrique, en continuité avec le travail des auteurs cités, mais en mettant le problème du contrôle au premier plan, c'est-à-dire, en explicitant cette problématique qui est présente, mais implicite dans la proposition analysée. Plus encore, nous essayerons de placer la question des transformations des expressions algébriques (centrale pour l'articulation avec des autres contenus algébriques) dans le cadre d'un besoin interne des situations.

1.3. Perspective fonctionnelle dans la construction de l'algébrique

La perspective fonctionnelle dans la construction de l'algébrique, comme le soulignent Kieran, Boileau et Garançon (1996), ne commande pas nécessairement une étude des fonctions, mais elle impose l'emploi des lettres comme variables, par opposition aux lettres comme inconnues.

Les auteurs ont proposé différentes études – en utilisant un environnement informatique - pour développer divers aspects de cette approche; une de ces études est centrée sur les méthodes numériques utilisées par les étudiants lorsqu'un problème est représenté à l'aide d'une table de valeurs. Les résultats de cette étude montrent que lorsque les élèves font des calculs « à la main» pour aborder un problème, ils s'appuient sur l'information contextuelle. En revanche, lorsque les élèves travaillent avec un dispositif informatique, ils oublient l'information contextuelle et utilisent des stratégies basées sur des relations d'ordre et sur la reconnaissance de patterns numériques. Ces stratégies valorisées par les chercheurs témoignent, il nous semble, d'une intentionnalité similaire à celle que nous avons dégagée dans la section précédente, à savoir la suspension du contexte dans un travail plus formel sur les relations.

Les auteurs précisent quelques caractéristiques de cette approche à partir de l'analyse de l'exemple suivant :

« Karen works part-time after school selling magazine subscriptions. She receives $20 as a base salary per week, plus $4 for each subscription she sells. How much can she earn in a week? How many subscriptions must she sell to earn at least $50?» (p. 258)

Les auteurs font remarquer que dans l'approche fonctionnelle pour l'introduction à l'algèbre, des problèmes peuvent être résolus en interprétant les lettres comme des inconnues; ce travail peut être réalisé, de manière intentionnelle, du point de vue de la relation fonctionnelle sous-jacente, à travers l'attribution de quelques valeurs numériques à la fonction.

Dans l'environnement CARAPACE, la situation fonctionnelle est représentée par l'algorithme suivant (Kieran, Boileau et Garançon, 1996, p. 124):

<u>Program 1</u>

Request values for:

Number of subscriptions

Carry out these calculations:

Number of subscriptions x4 gives bonus

20 + bonus gives salary

Show values of:

salary

L'ordinateur calcule les essais numériques des étudiants, en représentant la relation fonctionnelle sous une forme algorithmique. Les élèves peuvent avoir accès au tableau suivant, pour chaque entrée d'une valeur :

Detailed calculations

Request values for:

Number of subscriptions

5

Carry out these calculations:

Number of subscriptions x4 gives bonus

5 x 4 gives 20

20 + bonus gives salary

20 + 20 gives 40

Show values of:

Salary

40

L'approche fonctionnelle favorise l'emploi de diverses représentations, par exemple la représentation tabulaire :

INPUTS	**OUTPUTS**
Number of subscriptions	salary
1	24
2	28
3	32
4	36
5	40
6	44
7	48
8	52
9	56
10	60

Les auteurs affirment que dans cet environnement, on produit une suspension du contexte initial et le travail se rapporte à d'autres contextes disponibles pour arriver à une réponse : la recherche de régularités numériques occupe un lieu central. Mais quelles sont alors les connaissances algébriques impliquées? Il ne faut pas oublier que l'approche fonctionnelle est présentée comme une manière d'introduire les élèves à l'algèbre.

Les mêmes auteurs reconnaissent enfin que l'environnement informatique, comme il a été utilisé, a remplacé l'activité algébrique :

«In effect, the computer tool CARAPACE had usurped the potential of algebra as a problem-solving tool» (p. 267).

Dans le contexte informatique, les connaissances nécessaires pour interpréter le problème sont des connaissances numériques de base : il n'y a pas de connaissances algébriques en jeu.

Même si dans le cadre de cette recherche, les auteurs proposent aussi un travail sur les expressions algébriques qui modélisent la situation proposée, ce travail n'est pas lié au travail fait dans le cadre de méthodes numériques, pour montrer, par exemple, que la connaissance des expressions peut fonctionner comme un moyen d'orienter les essais (et non seulement comme un moyen de résoudre le problème de manière traditionnelle, c'est-à-dire par résolution d'une équation) et ainsi, d'économiser du travail. Le travail sur la construction de formules apparaît alors dépourvu d'une finalité spécifique.

Le cadre numérique est un point d'appui important pour la construction de l'algébrique, même si cette construction exige une rupture. Les situations proposées par les auteurs précédents ne s'appuient pas sur une dialectique avec le numérique. Il y a une transformation du problème au plan exclusivement numérique. La question de la validation demeure aussi absente : l'outil CARAPACE ne prévoit pas une rétroaction par rapport à la validité des productions des élèves.

À notre avis, la potentialité de l'approche fonctionnelle pour construire des connaissances algébriques n'est pas limitée par l'environnement informatique, mais plutôt par le manque de situations qui pourraient tirer profit de cet environnement pour une entrée en algèbre.

Une entrée en algèbre qui considère quelques principes de l'approche fonctionnelle est proposée par Combier, Guillaume et Pressiat (1996). Dans cette perspective, les lettres revêtent le statut de variables dans le contexte de production et de mise en oeuvre de formules. La question de la validation est prise en compte explicitement, ce qui distingue cette proposition de celle que nous venons d'analyser, mais elle est rapportée au contexte -au moins au début- et il n'y a pas un développement spécifique pour la construction d'un système de contrôle dans le plane syntaxique. Les situations proposées sont choisies pour donner lieu à différentes méthodes de calcul et donc à une variété de formules, ce qui permettrait de donner sens à la réalisation de transformations algébriques visant à établir leur équivalence (problématique qui n'est pas abordée explicitement par les auteurs).

À partir du travail avec ce type de situations, les auteurs précisent leur intention de mettre en évidence les point suivants :

«- *une lettre remplace n'importe quelle valeur numérique*
- *des écritures pouvant apparaître différentes pour les élèves, du fait de l'emploi de lettres différentes, sont reconnues identiques puisqu'elles correspondent à une même méthode de calcul*
- *les formules écrites, tout en étant différentes, sont équivalentes. Lorsque dans chacune d'elles on remplace les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat.* » (p. 47)

Les auteurs définissent la notion d'expression équivalente à partir de la comparaison de différentes formules validées en fonction du contexte. L'introduction de la notion d'expressions algébriques équivalentes est un point d'appui pour donner sens aux transformations algébriques (même si les auteurs n'avancent pas dans cette direction). Le fait de savoir que les différentes formules sont valides, en se référant au contexte (différentes méthodes de calcul valides), permet de définir la notion d'équivalence dans le plan numérique-algébrique, pouvant ainsi donner du sens à la question des transformations dans le plan syntaxique. Dans ce contexte, il ne s'agit pas de n'importe quel type de transformations ou de l'obtention de l'expression algébrique « attendue » par le professeur – ou de celle qui est considérée « la plus synthétique » : il y a d'avance diverses expressions déjà validées et il s'agit de montrer qu'il est possible de passer de l'une à l'autre en mettant en œuvre des transformations syntaxiques. Les transformations ont une finalité spécifique et il est possible de connaître d'avance où on veut arriver. Les transformations syntaxiques peuvent devenir aussi un moyen de validation des nouvelles formules, sans qu'il soit nécessaire de faire appel aux méthodes de calcul (les auteurs ne font pas référence à ce type de validation).

Les règles syntaxiques à utiliser pour les transformations pourraient se construire dans une dialectique avec le numérique, en s'appuyant sur la définition d'équivalence proposée: maintenir l'équivalence des expressions peut fonctionner comme le contexte de référence, sur un plan syntaxique, pour définir les transformations valides.

Même si les auteurs ne centrent pas leur attention sur la question de l'équivalence des formules, nous pensons que c'est le point le plus important pour la suspension du contexte initial et l'entrée dans l'algébrique. Si l'on se contente de la production de la formule, on risque de se retrouver avec les problématiques déjà identifiées par Radford et de ne pas pouvoir avancer sur leur résolution. Une partie de notre travail prendra appui sur celui de Combier, Guillaume et Pressiat, mais il avancera sur la question de la validation en essayant de sortir du contexte initial pour entrer dans une validation interne et en centrant de plus l'attention sur la question syntaxique liée à l'équivalence des formules.

Dans le cadre de l'approche fonctionnelle, ce travail se distinguera des travaux précédents s'inscrivant dans cette approche par l'identification claire des connaissances algébriques à construire. L'entrée en algèbre ainsi proposée, de même que celle proposée par Lemoyne, Brun et Conne (1993), peuvent permettre de construire une « base » sur laquelle il soit possible de développer d'autres connaissances algébriques présentes dans le curriculum scolaire.

1.4. Éléments de la problématique de l'algèbre dans la théorie anthropologique du didactique

Dans la perspective anthropologique, comme Gascon, Bosch et Bolea (2001) l'expliquent, on postule que l'activité de modélisation mathématique est le noyau de l'activité mathématique. On parle d'une modélisation intra-mathématique dont une des caractéristiques fondamentales est le caractère « constitutif » des connaissances mathématiques, au lieu d'être une simple « application » de celles-ci. Par exemple, le calcul algébrique, comme activité mathématique, est un élément essentiel de la construction du numérique, et donc plus qu'un simple épiphénomène du numérique. Les auteurs proposent, à titre de question fondamentale, d'analyser la possibilité d'introduire l'algèbre élémentaire dans un cadre différent du cadre numérique habituel. Pour étudier cette problématique, la théorie anthropologique considère le Système d'Enseignement des Mathématiques comme un ensemble et met en évidence la relativité institutionnelle des connaissances mathématiques.« Connaître un concept », dans le sens scolaire, se rapporte toujours à une liste très concrète de ses emplois modélisateurs, conditionnés par la noosphère, la société et la culture.

En faisant une analyse de l'écologie de l'algébrique dans les systèmes didactiques, les auteurs identifient les différences suivantes entre le fonctionnement algébrique dans les institutions scolaires et dans les institutions productrices de connaissances mathématiques :

«- Dans les systèmes didactiques, il y a une forte autonomie et désintégration du corpus algébrique : on perd l'unité fonctionnelle de l'algébrique.
- Dans les équations et inéquations, les lettres apparaissent seulement comme inconnues, le statut de paramètres est absent. Les formules ne sont pas des modèles algébriques, elles sont juste des « règles » pour réaliser certains calculs.
- Les différents systèmes de nombres ne sont pas le fruit d'une construction algébrique.
- L'activité de nomination ou re-nomination est presque absente : par exemple, on n'utilise pas les changements de variables pour simplifier des expressions, ni pour résoudre des équations ou inéquations, ni pour représenter des fonctions dans des systèmes de références différents de ceux déterminés par les variables originales.
- Les travaux sur l'étude des objets algébriques sont presque absents : on manipule des objets algébriques (équations, expressions algébriques et fonctions) mais on ne les prend pas comme objets d'étude en soi.» (Gascon, Bosch et Bolea, 2001, p. 11)

Pour Chevallard (1989), cette désalgébrisation du curriculum scolaire répond à une posture idéologique selon laquelle « la pensée » est « dans la tête », s'exprime par la voix et les mots et se conserve à travers l'écriture; mais l'écriture est seulement une dégradation de la pensée ou, tout au plus, un produit secondaire. Cette posture ne reconnaît pas le rôle du formalisme écrit comme outil de la pensée scientifique.

Pour Gascon, Bosch et Bolea (2001), l'algèbre scolaire devrait apparaître, initialement, comme un « instrument algébrique » pour donner origine, progressivement, à des organisations mathématiques chaque fois plus algébrisées.

Quelques-uns des travaux déjà analysés, fondamentalement ceux qui proposent une véritable dialectique numérique-algébrique, comportent des éléments intéressants pour une construction signifiante de cet « instrument algébrique ». Les travaux réalisés par Gascon, Bosch et Bolea sont davantage préoccupés par la possibilité d'algébrisation d'une praxéologie mathématique, une fois disponibles chez les élèves certains instruments algébriques, que par la construction de ces instruments. Notre travail se place au niveau du développement de cet instrument algébrique, mais en considérant spécifiquement cet instrument comme une base sur laquelle il sera possible d'articuler des autres savoirs algébriques élémentaires.

À notre avis, c'est cette articulation entre les débuts de l'algèbre et les processus d'algébrisation de certaines organisations mathématiques scolaires qui est peu étudiée, même d'un point de vue théorique, sans entrer nécessairement dans la discussion de la possibilité d'intégrer dans le système scolaire le processus d'étude des praxéologiques algébrisées, c'est-à-dire, de considérer les contraintes écologiques et culturelles. Pourtant, nous pensons que l'étude de cette articulation est un élément important pour l'analyse de la compatibilité entre le contrat didactique situationnel (au niveau de la situation didactique) et le contrat didactique institutionnel dans le système d'enseignement courant, compatibilité qui permettrait, comme l'explicitent Gascon, Bosch et Bolea (2001), la stabilité des modifications des organisations mathématiques en question.

1.5 Bilan sur les entrées en algèbre

Le choix d'examiner des entrées largement diffusées dans le milieu scolaire a été fait dans l'intention de réfléchir sur les risques d'une transposition des connaissances du contexte de la recherche au contexte scolaire. Nous pensons que pour aborder cette transposition, il faut avoir un regard sur le curriculum dans sa totalité et non comme un ensemble de parties, chacune de ses parties étant alors liée à une recherche particulière. Dans cette optique, les analyses que nous avons menées n'avaient pas pour objectif de critiquer les recherches effectuées, sachant bien que, dans toute recherche, il faut faire un « découpage » pour définir son objet. Nos analyses permettent par ailleurs de porter à l'attention certaines limites de ces recherches, dans la perspective d'une définition d'un projet de recherche qui reprenne les travaux analysés et incorpore certaines des questions absentes, identifiées dans l'analyse réalisée.

La problématique de la validation ne peut demeurer absente d'un travail de définition d'un curriculum algébrique. Mais elle doit traverser tous les contenus, c'est-à-dire faire partie de la construction même des connaissances et non être considérée comme une question isolée. Dans ce sens, même si les recherches ne la considèrent pas parce que cette problématique n'est pas critique pour leur objet de recherche, lorsque par la suite les chercheurs traitent de la transposition de leurs résultats au système scolaire, il ne leur est plus possible de négliger cette problématique. Considérer les patterns pour étudier les emplois des signes algébriques et le sens que les étudiants leur donnent (comme le fait Radford) n'exige pas nécessairement de se poser la question de la validation, mais cette question ne peut pas être ignorée lorsqu'il s'agit de proposer les patterns comme une entrée en algèbre dans l'école secondaire. Dans ce dernier cas, on ne peut faire l'économie d'une analyse de l'articulation entre les sens construits avec cette entrée et leurs rapports avec les autres contenus algébriques à construire. Dans ce sens, notre analyse montre la complexité de la première question et le manque d'études relatives à la seconde.

Dans cette étude des propositions d'entrée en algèbre, même si le travail effectué par Lemoyne, Brun et Conne (1993) marque une évolution, puisqu'il vise la construction d'un système de contrôle de la construction de connaissances algébriques, l'analyse des transformations de sens dans différents contextes et l'articulation avec d'autres contenus demeurent à faire.

L'approche fonctionnelle peut être une base pour la construction de connaissances algébriques identifiées dans le curriculum, mais les deux questions que nous avons déjà posées pour les patterns doivent être traitées. Il est possible qu'une analyse de la validation, comme celle qui a été faite pour les patterns, montre le besoin de définir clairement les connaissances algébriques nécessaires à ladite validation. Une étude sur une combinaison adéquate de cette approche et de la perspective de la généralisation s'avère alors nécessaire.

L'équilibre entre les différentes approches pour l'entrée en algèbre (pour permettre aux élèves de comprendre la pertinence de l'algèbre et sa structure) auquel Bednarz, Kieran et Lee (1996) font référence ne va pas de soi. Notre analyse essaie de montrer que cet équilibre ne peut être trouvé par une juxtaposition de ces approches, mais plutôt par une articulation des sens construits avec ces diverses approches. Nous essayons aussi de faire ressortir les risques encourus, en termes de perte du sens, lorsqu'un problème mathématique se transforme en un problème didactique. Dans l'enseignement de l'algèbre, tout autant que dans l'enseignement d'autres objets de savoir, le travail de transposition didactique est crucial (Chevallard, 1991).

2. La validation dans l'enseignement des mathématiques

Dès que l'on souhaite parler de validation dans la classe de mathématiques, certains mots sont toujours présents: preuve, démonstration, argumentation. Il importe donc de préciser d'abord le sens attribué à chacun de ces mots. Ces précisions nous permettront de mieux expliquer pourquoi la notion de preuves intellectuelles est retenue dans notre recherche.

2.1. Démonstration, preuve et argumentation

Les travaux réalisés par Balacheff (1987) ont permis de mieux clarifier les notions de démonstration, d'explication, de preuve et d'argumentation. Nous référons donc aux définitions proposées par ce chercheur:

« - *démonstration : une suite d'énoncés telle que tout énoncé est soit une hypothèse, soit un énoncé dont la validité est par ailleurs déjà établie (théorème) ou admise (axiome), soit un énoncé déduit d'énoncés qui le précèdent selon une règle explicite et convenue.*
- *explication : un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis par le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat.*

- preuve : une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs. » (p.147-148)

Dans un travail postérieur, Balacheff (1999) parle de l'argumentation comme d'un discours avec un double mouvement de persuasion et de preuve. L'auteur déclare que même si l'objet de l'argumentation est de déterminer la validité d'un énoncé, les formes de compétences argumentatives se trouvent dans la langue naturelle et dans les pratiques où les règles sont d'habitude d'une nature profondément différente de celles que requièrent les mathématiques. Il arrive à la conclusion qu'il n'y a pas d'argumentation mathématique, dans le sens habituellement proposé, qui soit libérée de quelques-unes des restrictions qui portent sur la démonstration. Cela ne signifie pas, dit Balacheff, que tout discours mathématique qui cherche à établir la vérité d'un énoncé ait toujours eu et puisse toujours avoir les caractéristiques d'une démonstration. Il distingue donc preuve et démonstration, la première étant liée à la construction d'une oeuvre de connaissances et sans les exigences formelles de la démonstration.

La preuve se trouve donc au centre des processus de construction des connaissances et n'est pas l'application d'un système réglé et défini hors de la communauté en question; la preuve n'a pas ainsi les exigences formelles de la démonstration.

Toujours selon Balacheff, nous appellerons *preuve* un discours visant à rendre intelligible le caractère de vérité, acquis par le locuteur, d'une proposition ou d'un résultat et/ou à déterminer son caractère de vérité, discours accepté par une communauté donnée à un moment donné. Mais ce discours est l'aboutissement d'un processus de construction qui prend sa source dans des moyens de représentation non exclusivement langagiers. Cette caractérisation de la notion de preuve nous amène maintenant à distinguer les preuves pragmatiques et intellectuelles.

Les *preuves pragmatiques* sont fondées sur l'action effective mise en œuvre sur des représentations d'objets mathématiques. Les *preuves intellectuelles* sont détachées de l'action; elles sont inscrites dans des conduites langagières exprimant les objets et leurs propriétés, calculant leurs relations. Elles incluent par ailleurs quelques-unes des restrictions qui portent sur la démonstration.

Les preuves pragmatiques sont hypothétiques par la singularité de l'événement qui les constitue; elles également sont tributaires d'un contingent matériel (outils imprécis, par exemple). Elles se fondent sur des théorèmes en acte qui n'ont pas été prouvés, mais éprouvés par la pratique, et leur communication se fait par ostension. Cela ne signifie pas l'absence de tout langage, mais ce n'est pas l'outil fondamental d'expression des connaissances (attestée par l'action et non pas par le discours). Du côté de la nature et du statut de la connaissance, les preuves pragmatiques s'appuient sur des savoirs pratiques essentiellement engagées dans l'action.

Les preuves intellectuelles exigent un changement de position : le locuteur doit se distancer de l'action et du processus effectif de résolution du problème. La connaissance, jusque-là agie, devient objet de réflexion, de discours, de débat. Ici, le langage naturel est insuffisant; il faut un langage fonctionnel qui ne soit pas seulement un moyen de description des actions ou des opérations, mais un véritable outil de calcul intellectuel. Il est important de dire que, même si les langages fonctionnels se caractérisent par l'introduction du symbolisme, ceci n'est pas la caractéristique la plus importante à retenir dans notre travail : ce sont la fonctionnalité, la représentativité d'une classe d'objets indépendamment des circonstances de son apparition, la dépersonnalisation et la détemporalisation que nous prendrons comme caractéristiques essentielles.

Pour Balacheff, et pour nous aussi, le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles pourrait se faire par la prise de conscience du caractère générique de la situation envisagée. Ce passage repose sur le pôle des connaissances (nature des connaissances), sur le pôle langagier et sur le pôle de la validation ou des types de rationalité qui sous-tendent les preuves produites.

Nous pouvons préciser maintenant les différences entre démonstration et preuve : ces différences peuvent se situer au niveau de la formalisation et, plus fondamentalement encore, relever du statut particulier des connaissances. Dans la démonstration, il y a un corps de connaissances fortement organisées dans le cadre d'une théorie axiomatique. Dans la preuve intellectuelle à l'école, l'idée de la structure déductive est maintenue, mais il n'y a pas d'exigence très rigide sur le statut des énoncés sur lesquels s'appuie la déduction : par exemple, il est possible qu'une preuve intellectuelle s'appuie sur des connaissances validées empiriquement. Dans notre travail, nous parlerons de preuve intellectuelle, parce que notre recherche se place au centre du développement d'une nouvelle pratique.

Avant de fermer, du moins temporairement, cette fenêtre sur les notions de preuve et de validation, il nous semble important d'examiner de plus près la question de l'argumentation en mathématiques que nous avons laissée un peu de côté jusqu'à maintenant. Duval (1999) affirme qu'en mathématiques le contexte de production d'arguments est radicalement différent de celui d'autres contextes d'activité sociale où l'on produit des arguments. En mathématiques, le motif et l'enjeu dans l'argumentation sont les restrictions propres au problème à résoudre : ce sont les restrictions du problème qui déterminent le choix des arguments et non les croyances du destinataire. La force d'un argument dépendra davantage de son adaptation à la situation que de sa résonance dans l'univers de l'interlocuteur. Duval parle, dans ce cas, d'argumentation heuristique en opposition à l'argumentation rhétorique qui a pour but de convaincre quelqu'un de prendre une décision pour résoudre un conflit d'intérêts ou pour obtenir un consensus sur un sujet et qui prend appui sur les convictions de l'interlocuteur. L'argumentation heuristique se développe dans les phases de recherche à l'intérieur d'un champ de connaissances particulier, pour progresser vers un problème posé et mettre en fonctionnement diverses formes de discours et pas seulement celle du raisonnement (description du fonctionnement d'un système, à partir de son étude dans des cas particuliers, par exemple).

Dans notre recherche, nous retenons cette distinction sur l'argumentation en mathématiques, mais nous ne la lierons pas seulement au processus de construction de conjectures; nous analyserons également son rôle dans le processus de validation. En ce sens, nous ne trouvons pas de différence entre la notion d'argumentation heuristique donnée par Duval et celle de preuve définie par Balacheff. Il nous apparaît suffisant de conserver la distinction entre preuve et démonstration, ainsi que la classification des preuves en pragmatiques et intellectuelles.

2.2. Les fonctions des preuves

La preuve à l'école secondaire est souvent enseignée comme une méthode à suivre, détachée de toute signification pour l'élève. Il s'agit d'un constat partagé par un grand nombre de chercheurs en didactique. La démonstration, lorsqu'elle apparaît, reste très algorithmisée: l'accent est mis sur l'aspect *calcul logique*; elle reste donc déconnectée des nécessités de la validation.

Plusieurs travaux ont été faits, fondamentalement en géométrie, en cherchant des moyens de transformer cette situation, de restituer à la preuve son caractère d'outil de validation (Balacheff, 1987; Arsac, 1992; Margolinas, 1993; Brousseau, 1998; de Villiers, 1993; Hanna, 1990; etc.). Dans quelques-uns de ces travaux, la dimension sociale de la preuve est reconnue :

-« *La mise en débat des décisions, l'injonction de garantir leur validité ou de la dénoncer permet de transformer la situation de décision en une situation de validation* ». (Balacheff, 1987, p.153)

-« *Le projet de preuve prend place dans un débat (éventuellement intérieur ou évoqué). On pourrait dire aussi que le projet de preuve présente une part publique importante* » (Margolinas, 1993, p.165).

-« *Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produit* *d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs sont alternativement un « proposant » et un « opposant »; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple « milieu/message »* (Brousseau, 1998, p. 48).

Dans ce contexte, et mettant en évidence le rôle fondamental de la situation pour l'engagement de l'élève dans un processus de validation, Balacheff (1987) distingue différentes fonctions des preuves qui caractérisent les situations qui appellent des processus de validation : preuve pour décider, preuve pour convaincre et preuve pour comprendre ou savoir.

Les preuves pour décider mobilisent des moyens de validation, mais pas de façon nécessairement explicite; elles s'insèrent dans l'action. Dans ce cas, il y a un doute et le désir de le lever. Dans les preuves pour convaincre, les plus travaillées par les didacticiens, il faut proposer une argumentation que le locuteur ne peut remettre en cause. Il s'agit de convaincre un autre, ou éventuellement soi-même, de la vérité d'une proposition. Mais déterminer la vérité d'une proposition n'implique pas le fait de savoir pourquoi elle est vraie, même si on a fait une démonstration. Les preuves pour comprendre, qui sont plutôt du côté du fonctionnement théorique, ont pour fonction de répondre à la question de savoir pourquoi une proposition est vraie. Dans ce cas, on connaît la réponse mais on en cherche le fondement.

Même s'il est vrai que la fonction de compréhension est ou a été privilégiée dans l'enseignement, la question du « pourquoi » a toujours été une question externe aux élèves, imposée par le professeur. Dans cette recherche, nous nous intéresserons à cette fonction de la preuve, en construisant un milieu dans lequel une partie de l'enjeu sera de gérer le besoin de compréhension.

En réponse à la question « pourquoi vouloir démontrer? », Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard, et Mante (1992) identifient deux fonctions de la démonstration : convaincre et comprendre; ils étudient des situations didactiques qui s'inscrivent dans la première de ces fonctions. De son côté, de Villiers (1993) reconnaît cinq fonctions à la preuve qui, selon lui, pourraient être utilisées avec profit dans les classes: a) vérification (concernant la vérité d'une proposition); b) explication (pourquoi une proposition est-elle vraie); c) systématisation (organisation de résultats dans un système d'axiomes, de concepts et théorèmes), d) découverte (découverte ou invention de nouveaux résultats); e) communication (transmission de connaissances mathématiques). Ce chercheur fait remarquer l'omniprésence de la fonction de vérification dans l'enseignement et propose, pour les niveaux élémentaires, l'introduction des fonctions d'explication et de découverte de la preuve. D'un point de vue épistémologique, il porte à notre attention le fait que si la démonstration n'est pas nécessaire pour convaincre, il faut avoir atteint un certain niveau de conviction pour entrer dans le jeu de la démonstration. De plus, il affirme que la certitude absolue n'existe pas en mathématique et que la conviction personnelle dépend habituellement d'une combinaison d'intuition, de vérification quasi-empirique et de démonstration logique non nécessairement rigoureuse.

Pour Ajdukiewicz (cité par Sierpinska, 1995) l'inférence est le processus mental par lequel, en vertu de l'acceptation plus ou moins catégorique de prémisses, on arrive à l'acceptation d'une conclusion qu'on rejetait jusque-là ou qu'on acceptait de façon moins absolue. L'élément central de l'inférence est l' « acceptation » de quelque chose : ce processus a pour but d'accroître la certitude ou de réduire le doute. La déduction conduit de « raisons » (hypothétiquement) admises à des conséquences, celles-ci étant impliquées par les raisons en vertu de règles bien définies, sur la base d'un ensemble d'énoncés tenus par vrais. L'explication est un raisonnement déductif qui répond à la question : pourquoi?; ce qu'on cherche à expliquer est connu à l'avance et n'a pas à être justifié. En revanche, ce qu'on cherche à prouver n'est pas déjà connu, le processus de démonstration consistant justement à fournir de preuves. La déduction n'est pas à la base du fait qu'on accepte avec plus de certitude l'énoncé dérivé. Lorsqu'on explique une conséquence X en s'appuyant sur une raison Y, alors Y implique X mais X n'est pas inféré de Y.

Pour l'enseignement, Hanna (1990) trouve pertinent de distinguer « preuves qui prouvent » (elles montrent seulement qu'un théorème est vrai) et « preuves qui expliquent » (elles montrent la vérité d'un théorème et le pourquoi de sa vérité). Les preuves qui prouvent peuvent se baser sur l'induction mathématique, voire sur des considérations syntaxiques, tandis que les preuves qui expliquent doivent supporter rationnellement les idées mathématiques engagées, les propriétés mathématiques qui garantissent la vérité du théorème en question. Ces distinctions prolongent les représentations précédentes de la preuve et portent à notre attention la tension didactique constante entre les aspects *syntaxiques et sémantiques* de l'acte de prouver.

Les travaux précédents montrent que les questions de validation et de preuve, au sein de la communauté des chercheurs en didactique, sont loin d'être fermées. Dans notre étude, nous formulons la conjecture suivante :

> *C1 : «Ce sera dans le contexte de la recherche de raisons et d'explications, selon le sens donné à ce dernier terme par Hanna, que les preuves intellectuelles en algèbre et les connaissances engagées pour leur élaboration surgiront, et que les preuves pragmatiques deviendront limitées »*

Certaines des études sur lesquelles s'appuie cette conjecture, ainsi que nos conceptions sur l'enseignement et l'apprentissage, nous obligent à nous poser les questions suivantes :

- Le caractère explicatif d'une preuve n'est pas indépendant du sujet à qui elle est destinée. Dans les analyses épistémologiques, ce qui est considéré « explicatif » est-il reconnu comme tel par les élèves?
- Dans quelles conditions les élèves auront-ils besoin de produire des explications? Est-il suffisant de demander aux élèves « pourquoi » une proposition déterminée est vraie pour les faire entrer dans le jeu de la preuve?
- Quels sont les critères qui permettront de décider du caractère explicatif ou non d'une preuve dans la classe de mathématiques? Comment se négocient-ils dans la classe?

La double fonction d'«expliquer » et de « prouver » des preuves explicatives identifiée par Hanna (1990) nous conduit à la formulation d'une seconde conjecture :

C2 : « La seule élaboration d'une preuve intellectuelle produite dans le cadre d'une explication n'implique pas une remise en cause des processus de validation que l'élève emploie pour arriver à la valeur de vérité de la proposition concernée. Une preuve qui explique n'est pas nécessairement reconnue par les élèves comme une preuve qui "augmente" le degré de certitude de la vérité d'une proposition.»

Le travail sur le vraisemblable et le vrai, comme le souligne Margolinas (1993), fait partie de la construction de la rationalité mathématique chez les élèves. Cette distinction n'est pas indépendante de la spécificité des objets mathématiques engagés. La construction de la rationalité mathématique ne peut être isolée de la construction de connaissances mathématiques spécifiques. Elle ne peut non plus être considérée comme une condition pour entrer dans un processus de preuve. La distinction entre vraisemblable et vrai est, à notre avis, la conséquence d'une interaction continue avec un milieu mathématique qui permette de construire, dans le temps, ce que nous appellerons une « doute intellectuel ». En mathématiques, cette construction fait appel à un jeu délicat entre démonstration et construction de contre-exemples, comme l'exprime de Villers (1993, p.20):

«Quand les mathématiciens cherchent la vérité d'une conjecture inconnue, ils ne cherchent (ou ne devraient pas chercher) juste la démonstration mais ils essaient de construire, en même temps, des contre-exemples, à travers de preuves quasi-empiriques, puisque ces preuves peuvent faire sortir des contradictions cachées, des erreurs ou des supposés non explicités.

[...] La certitude personnelle dépend aussi de l'absence continue de contre-exemples face à l'évaluation quasi-empirique. Pour l'obtention d'une conviction, le processus quasi-empirique de falsification joue un rôle aussi important que la justification déductive.

Bien sûr, à la vue des limitations bien connues de l'intuition et des méthodes quasi-empiriques, les considérations antérieures ne peuvent pas, d'aucune manière, éliminer l'importance de la démonstration comme moyen très utile de vérification, en particulier *dans les cas de résultats non intuitifs ou qui présentent des doutes. On a essayé de situer la démonstration dans une perspective plus adéquate, substituant la présente idolâtrie de la démonstration comme le seul (et absolu) moyen de vérification/conviction ».*

On peut observer qu'il y a un double jeu de confiance et de méfiance vis-à-vis de la démonstration (comme moyen de vérification/conviction) chez les mathématiciens, jeu qui requiert un certain niveau de rationalité mathématique, conséquence d'une pratique soutenue dans le temps. L'entrée des élèves dans ce jeu n'est pas évidente; plus encore, elle est très limitée en raison des contraintes scolaires et de la nature des objets mathématiques enseignés au niveau élémentaire.

Selon notre seconde conjecture, un élève peut produire une preuve intellectuelle pour donner des raisons du pourquoi de la vérité d'une proposition, sans avoir besoin de produire la preuve intellectuelle pour déterminer sa vérité, pour se convaincre lui-même de la vérité de la proposition en question. Nous ne disons pas que l'élève qui produit une preuve intellectuelle dans le contexte de la recherche de raisons, ne puisse reconnaître que cette preuve permet, en plus, de déterminer la valeur de vérité de la proposition mais que, même s'il est en condition de produire ce type de preuve, il ne le fera pas nécessairement face à un contexte où l'enjeu est exclusivement de déterminer la vérité d'une proposition. Brousseau (1998, p.39) dit à ce propos:

« En mathématique, le "pourquoi" ne peut pas être appris seulement par référence à l'autorité de l'adulte. La vérité ne peut pas être la conformité à la règle, à la convention sociale comme le « beau » ou le « bon ». Elle exige une adhésion, une conviction personnelle, une intériorisation qui par essence ne peut être reçue d'autre sans perdre justement sa valeur. Nous pensons qu'elle commence à se construire dans une genèse dont Piaget a montré l'essentiel mais qui implique aussi des relations spécifiques avec le milieu, en particulier lors de la scolarité. Nous considérons donc que faire des mathématiques est d'abord pour l'enfant une activité sociale et non pas seulement individuelle. »

La conviction personnelle, l'intériorisation de la vérité en mathématiques, ne sont pas une conséquence directe de la présence de la preuve intellectuelle dans la classe (même en reconnaissant les limites de l'«empirisme naïf » pour donner des raisons de la vérité d'une proposition, quelques élèves emploient ce type de preuve pour décider que la proposition *est* vraie). Nous pensons qu'il faut faire un travail spécifique pour que la preuve intellectuelle, produite dans n'importe quel contexte, devienne un outil de conviction personnelle pour l'élève (et pas « le seul outil ») –qui permette de transformer la « certitude relative » en certitude et donc, de réduire le doute-, un moyen choisi explicitement par l'élève pour décider de la vérité dans la classe de mathématiques. Pour que la preuve intellectuelle puisse être considérée comme un outil de validation, il faut qu'elle soit r*econnue* par l'élève comme un moyen d'arriver et de s'assurer de la vérité, comme un moyen qui permette aussi d'arriver aux raisons de la dite vérité. La preuve intellectuelle doit donc devenir, un objet de réflexion, non pas d'un point de vue exclusivement logique, mais selon un point de vue fonctionnel comme moyen de conviction. Nous ne voulons pas faire de la preuve intellectuelle le seul moyen de vérification; nous ne voulons pas non plus ignorer sa place dans le cadre de cette problématique.

La question des limites des preuves intellectuelles comme moyen de conviction (par exemple, par les difficultés de contrôler leur rigueur (de Villers, 1993; Arsac, 1997) est, à notre avis, difficile à traiter à l'école élémentaire, fondamentalement à cause de la nature des savoirs en jeu.

2.3 Les preuves et les élèves

Nous avons déjà parlé de la recherche effectuée par Balacheff (1987) et qui a permis la classification en preuves pragmatiques et intellectuelles des validations produites par les élèves dans une situation de résolution de problèmes. Maintenant, nous présenterons quelques preuves particulières, parmi les preuves produites par les élèves, qui seront des outils pour notre travail.

Parmi les preuves pragmatiques, on trouve *l'empirisme naïf et l'expérience cruciale.* Le premier type de preuve consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion. Le second type de preuve consiste dans la vérification sur un exemple le moins particulier possible: ici l'individu se pose explicitement le problème de la généralisation.

D'autres types de preuves marquent une rupture fondamentale avec les types de preuves précédentes; il s'agit de l'exemple générique et de l'expérience mentale (Balacheff, 1987). Dans ces preuves, il ne s'agit pas de « montrer » qu'un énoncé est vrai parce que « cela marche », mais d'établir le caractère nécessaire de sa vérité en dégageant des raisons. L'exemple générique consiste dans l'explicitation de raisons de la vérité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet examiné non pas pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle est marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique.

L'expérience mentale marque ainsi le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles : ce ne sont plus des actions effectives mais des actions intériorisées qui sont mises en œuvre (Balacheff, 1987). Par ailleurs, l'exemple générique peut être considéré, soit du côté des preuves pragmatiques, soit du côté des preuves intellectuelles : cela dépend des processus de production de la preuve et du statut opératoire de l'exemple utilisé. Si l'exemple est un moyen d'expression de l'action pour le locuteur -et non pas le lieu de réalisation effective des opérations qui assurent la vérité d'un énoncé- nous le considérons du côté des preuves intellectuelles. Le passage de l'exemple générique à l'expérience mentale marque enfin une étape vers la décontextualisation.

Cette catégorisation proposée par Balacheff n'est pas exhaustive et peut être liée au domaine de travail (la géométrie, par exemple), comme l'a indiqué Arsac (1993). D'autres chercheurs emploient ainsi des catégories différentes pour classer les types de preuves : Sowder et Harel (1998) proposent trois catégories avec des sous-catégories pour chacune : « externally based proof schemes, empirical proof schemes et analytic proof schemes »; Tall (1998) et Simon (1996) proposent respectivement d'autres catégories : « enactive, visual, numeric, formal » et « different proof schemes-transformational ». Mais ce n'est pas l'objet de notre travail de faire une analyse comparative des différentes catégories proposées par chaque auteur. Les études faites sur les types de preuves en algèbre que nous présenterons par la suite nous permettent d'affirmer que les catégories proposées par Balacheff sont un point de départ intéressant pour analyser notre problématique.

Dans le domaine de l'algèbre, Healy et Hoyles (2000) étudient les conceptions sur les preuves des élèves de 14-15 ans et identifient quelques éléments intéressants : face à différents arguments pour décider de la vérité d'une proposition ou face à la tâche de produire des arguments pour valider une proposition, la plupart des élèves choisissent des arguments empiriques (preuves pragmatiques) ou narratifs (arguments où les raisons et les explications sont produites dans le langage naturel sans une structure déductive). Plus encore, les auteurs disent trouver une transposition des raisonnements concernés au moment de produire une conjecture aux démarches de sa validation : lorsque la conjecture à prouver est « familière », les élèves produisent de « meilleurs » arguments que lorsque la conjecture n'est pas « familière ». Ces auteurs considèrent « meilleurs » les arguments plus proches des preuves intellectuelles. Nous supposons aussi, en nous appuyant sur les études effectuées par Ballacheff (1987), qu'en parlant de « familière » ou «non familière », les auteurs font une référence implicite à la maîtrise par les élèves des connaissances mises en jeu dans une preuve ainsi qu'aux connaissances sur la rationalité.

Dans nos travaux exploratoires, nous avons également fait une constatation qui rejoint celles effectuées par les chercheurs précédents. Nous avons ainsi pu voir que, même si certains élèves produisent des preuves pragmatiques, ils ne sont pas nécessairement satisfaits de cette production. La production d'une preuve pragmatique n'implique pas nécessairement que les élèves la choisissent explicitement comme moyen de validation; elle peut aussi signifier, plus fondamentalement, que les élèves ne disposent pas de connaissances pour produire un autre type de preuve. Il nous semble ainsi impossible de séparer le type de preuves et le niveau de connaissances du domaine de référence.

Il est évident que si, comme le montrent plusieurs travaux, les élèves ne dépassent pas le niveau des preuves pragmatiques, c'est un défi intéressant pour la didactique d'aborder cette problématique, notamment dans un domaine peu exploré comme celui de l'algèbre. Pour Balacheff (1987), le problème du passage de preuves pragmatiques à des preuves intellectuelles ne peut pas se poser uniquement en termes de contrat didactique, d'une « bonne » négociation ou d'analyse de la situation : il s'agit d'une construction cognitive sur le terrain à la fois des connaissances et de la rationalité.

2.4. L'évolution de la rationalité mathématique en classe de mathématiques

Dans la classe de mathématiques, faut-il faire un travail spécifique pour faciliter l'évolution de la rationalité mathématique chez les élèves? Comment aborder cette évolution avec du « sens » pour les élèves? Est-il possible de le faire?

Pour mieux étudier ces questions, pour préciser également notre position, nous présentons quelques travaux portant à notre attention divers dispositifs didactiques.

2.4.1. Les règles du débat mathématique

Arsac et les chercheurs de son équipe (Arsac, et al., 1992) proposent quelques situations dont l'enjeu est ce qu'il appelle « les règles du débat mathématique » :

« .....*Mais le choix final des règles du raisonnement mathématique sur lesquelles nous avons finalement décidé de travailler est aussi d'origine pragmatique : il s'agit de règles dont on sait, à la fois par des recherches antérieures et par l'expérience des enseignants, qu'elles sont à l'origine des difficultés pour les élèves, tout en ne faisant pas toujours l'objet d'un enseignement explicite...* » (Arsac, et al., 1992, p. 22)

Ces auteurs font référence à « la logique naturelle » -employée d'habitude par les élèves placés devant une conjecture à valider- et à sa différence avec la logique employée en mathématiques. Ils identifient un certain nombre de règles de la logique mathématique qui sont en rupture avec les règles utilisées spontanément par les élèves et se proposent comme objectif « *que les élèves se les approprient, c'est-à-dire sachent les utiliser en mathématiques » (ibid.)*

Même si le texte date de 1992, nous trouvons important de discuter de son contenu parce qu'il constitue toujours une référence (par exemple, dans la récente publication du texte « Vrai? Faux?... » du groupe ERMEL, 1999).

On retrouve ainsi dans leur objectif et dans le développement du travail quelques éléments pour ouvrir un débat :

- pour eux, le fait que les élèves s'approprient les normes semble signifier qu'ils savent les utiliser en mathématiques. Dans cette perspective, il n'y a pas de préoccupation pour la signification épistémologique des normes, seulement pour leur bonne utilisation. Mais, la situation n'est pas aussi facile à trancher. En effet, ces chercheurs proposent par la suite une série de situations où l'enjeu est de montrer les limites de la pensée naturelle et le besoin d'un autre type de « normes », situations à partir desquelles on institutionnalise les « règles du débat mathématique ».

Dans ce contexte, même s'il est possible de percevoir l'intention de donner quelque signification aux « règles du débat mathématique », nous nous posons la question suivante : est-il possible de donner du sens et d'institutionnaliser une règle de cette nature à partir d'*une* situation?

- Les auteurs pensent que, « *pour que l'élève donne du sens à la démonstration comme outil de preuve, il est nécessaire qu'elle apparaisse pour lui comme un outil plus performant que les autres outils de preuve dont il dispose. Cela suppose donc, dans un premier temps, que l'élève prenne conscience de l'insuffisance des preuves pragmatiques qu'il produit et qu'il s'approprie des règles du débat mathématique* » (ibid., p. 16).

Nous formulons alors la question suivante: faut-il faire un travail sur « les règles » *avant* de poser aux élèves le problème de la validation intellectuelle, en particulier de la démonstration, ou bien les élèves peuvent-ils s'approprier ces règles *dans* les travaux sur la validation intellectuelle?

Pour institutionnaliser les règles, « un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux » et « en mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai». Arsac, Chapiron, Colonna, Germain, Guichard, et Mante (1992, p. 48) proposent la situation suivante :

« *Dans l'expression* $n \times n - n + 11$*, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs?* »

Pour n=0, 1, 2..,10, la formule fonctionne bien, mais pour n = 11, elle ne marche pas. Les élèves travaillent avec la situation en équipes et après le débat, on institutionnalise les règles déjà énoncées. Examinons de plus près le travail d'institutionnalisation dans cette situation.

Penser à la possibilité d'institutionnaliser le rôle du contre-exemple en mathématiques à partir de cette situation revient à simplifier la complexité du problème de la contradiction, et du traitement du contre-exemple par les élèves, problématiques de manière très précise par Balacheff (1987, 1991). L'autre règle à institutionnaliser est relative aux limites des preuves pragmatiques et fait appel, implicitement, à la question de la conviction (de s'assurer) pour lui donner de la signification, en supposant que si on montre un cas où la proposition n'est pas vraie, l'élève se convaincra qu'il ne peut pas « être sûr de la vérité d'une proposition générale» en essayant avec quelques exemples particuliers et qu'il faut faire alors un autre type de preuve. Cette supposition, qui met en cause la notion de preuve chez les élèves ne le fait pas avec la notion de « généralité » : l'acceptation des limites des preuves pragmatiques est en lien avec le traitement du « général » en mathématique. Sans un travail explicite autour de ce traitement, ces limites pourraient ne pas être reconnues.

On sait que les élèves arrivent à se convaincre de la vérité d'une proposition à partir de la vérification de quelques cas particuliers. Mais la pratique mathématique fait appel à une activité de vérification avant de s'engager dans le chemin laborieux de la démonstration; il existe toutefois une différence fondamentale entre le travail des élèves et celui du mathématicien. Le mathématicien, avec une rationalité scientifique déjà construite, sait qu'après s'être convaincu (par n'importe quel moyen) de la vérité d'une proposition, il faut faire une démonstration pour déterminer sa vérité; l'élève d'habitude reste sur un plan empirique.

Pour de Villiers (1993), la démonstration n'est pas une condition pour la conviction; au contraire la conviction est probablement une condition assez fréquente pour la recherche d'une démonstration. Du côté de l'élève, Margolinas (1993) parle aussi du niveau de certitude nécessaire pour s'engager dans un projet de preuve. Lorsque les mathématiciens cherchent la vérité d'une conjecture inconnue, selon de Villiers, ils ne cherchent pas seulement la démonstration mais essaient de construire à la fois des contre-exemples. La certitude personnelle dépend aussi de l'absence de contre-exemples et non seulement de la démonstration.

Il est possible d'observer ici le développement d'un processus pour arriver à la certitude. Ces analyses nous font penser que l'appel à la conviction pour institutionnaliser, à partir d'une situation, une règle qui limite l'empirisme naïf est insuffisant et, plus encore, si la conviction est le résultat d'une interaction soutenue dans le temps. Nous formulons l'hypothèse suivante :

- La construction de connaissances de la rationalité mathématique requiert un travail complexe, imbriqué avec les connaissances mathématiques, qui ne peut se réduire à un ensemble de situations isolées. Il s'agit d'un travail coopératif avec le professeur où l'enjeu est autant les connaissances algébriques que les connaissances sur la rationalité.

Les situations que nous envisageons, dans notre recherche, ne seront pas le lieu d'application d'une rationalité préétablie, mais le lieu pour la construction, et la signification, de cette rationalité. Les situations et le contrat didactique seront régulateurs des normes nécessaires à l'activité mathématique dans la classe, en particulier des normes de validation; il s'agit d'un jeu délicat d'« interaction avec le milieu » et de « contrat didactique» réglé par la notion d'adidacticité et l'action du professeur. Notre travail expérimental apportera des éléments pour appuyer notre position qui est la suivante : il est possible pour l'élève de construire, dans l'action, des preuves intellectuelles et de cerner certaines limites des preuves pragmatiques, sans avoir explicité d'avance « les règles du débat mathématique ».

2.4.2. Le débat scientifique

Dans ses études sur le débat scientifique, Legrand (1988) suppose que la communauté scientifique a repris à son compte et, à titre institutionnel, l'ensemble des techniques de pensée construites en vue d'une appréhension et d'un traitement rationnel de la "réalité".

« ...Par cette naturalisation hégémonique de la démarche scientifique, il n y a plus de place pour différents traitements rationnels d'un domaine de réalité, traitements dépendant tout autant des problématiques que de la culture des individus qui les mettent en oeuvre, mais il y a un unique traitement rationnel, le traitement scientifique, une seule

logique, la logique mathématique, un bon sens, une évidence: ceux de l'institution dominante! » (Legrand, 1988, p.371)

À titre d'exemple, Legrand analyse la signification du vrai et du faux en mathématiques; il constate que cette signification est parfaitement naturelle et allant de soi, pour la communauté des mathématiciens. Elle est peu problématisée dans l'enseignement :

« ...l'élève est censé pouvoir ajuster son rapport personnel à cette signification en regardant comment les mathématiciens se persuadent du vrai ou du faux et en tenant compte des appréciations qui seront portées sur ses propres productions mathématiques » (Legrand, 1988, p. 371).

Cette naturalisation crée l'illusion de l'obtention -"à peu de frais"- d'une conformité de façade du rapport personnel de l'élève au rapport officiel: l'élève supporte un discours dont le sens profond lui échappe. Legrand croit donc nécessaire d'étudier la façon dont le mécanisme de transposition didactique peut réinstitutionnaliser ces éléments de savoir fondamentaux que les communautés scientifiques ont désinstituionnalisés par une naturalisation indispensable à l'économie de leur fonctionnement interne. Et il émet l'hypothèse suivante:

« ...dans les processus de transposition didactique, la (dé)naturalisation plus ou moins grande de la problématique scientifique et de la logique qui la sous-tend (c'est-à-dire la mise en place de situations permettant leur institutionnalisation plus ou moins explicite) est un paramètre didactique qui peut être exploité de façon déterminante pour permettre à ceux qui en sont culturellement éloignées d'entrer dans cette problématique » (Legrand, 1988, p.372)

Nous pouvons identifier une proposition explicite faite par Legrand sur le besoin de faire un travail pour l'entrée des élèves dans une rationalité scientifique. À partir d'une conclusion émise par Balacheff où s'établissent les limites de la dialectique de la validation pour permettre une évolution des processus de preuve (il faut une problématisation du sens de la contradiction, d'une réorganisation des conceptions des élèves), Legrand propose d'organiser *en début d'année* des séquences spéciales méta-mathématiques qui ont pour fonction d'institutionnaliser dans la classe les règles du débat mathématique.

Même si la nature des situations est différente de celle des situations proposées par Arsac et les chercheurs de son équipe, les auteurs s'accordent sur l'idée d'une institutionnalisation des règles à partir de quelques situations et sur le fait que ces règles sont le point de départ pour commencer à débattre dans la classe. Nous avons déjà émis quelques réserves à propos de cette idée. Legrand lui-même dit que la rationalité mathématique s'est construite par tâtonnements, par essais, par erreurs et choix donnant lieu à des confrontations polémiques à l'intérieur et entre communautés qui se sont spécifiées autour de convergences épistémologiques. En plus, il parle de la nature particulière des objets mathématiques et de la spécificité des critères de validation adaptés à ces objets. Tout cela montre la complexité de cette construction. Comment est-il possible alors de penser que l'élève puisse avoir accès à cette rationalité simplement à partir de quelques situations isolées?

À notre avis, il n'est pas possible de réduire la complexité du processus de construction des normes qui règlent le travail mathématique dans la classe à la communication, à partir d'un ensemble de situations, d'une rationalité scientifique déjà construite. Pour Legrand, il s'agit de faire comprendre le jeu qui se joue dans les institutions scientifiques. Cette "compréhension" implique l'acceptation de certaines règles du jeu que l'auteur essaie de communiquer en leur donnant de la signification. Mais comme il dit, cette signification a ses racines dans la nature des objets mathématiques et dans le caractère tellement modélisé de cette discipline. Mais l'accès des élèves aux caractéristiques fondamentales d'une discipline scientifique ne va pas de soi. C'est pour cette raison que la même illusion d'obtention d'une conformité de façade du rapport personnel de l'élève au rapport officiel que Legrand avait déjà identifiée dans l'enseignement habituel pourrait rester cachée dans sa proposition.

2.4.3. La construction des normes sociomathématiques

Pour Cobb et Yackel (1996), l'apprentissage des mathématiques est un processus de construction individuel et d'acculturation vers les pratiques mathématiques. Dans leurs travaux, ils analysent les processus par lesquels le professeur initie et guide le déroulement des normes sociales qui soutiennent les classes caractérisées par l'explication, la justification et l'argumentation. En particulier, ils étudient les aspects normatifs des discussions des élèves produites à l'intérieur des activités mathématiques; dans ce dernier cas, ils parlent de normes sociomathématiques. Par exemple, ce qui est considéré une explication ou une justification mathématique acceptable, est, pour les auteurs, une norme sociomathématique. Cobb et Yackel affirment que les normes sociomathématiques règlent l'argumentation mathématique dans la classe et que ces normes surgissent des interactions entre le professeur et les élèves, le professeur étant vu comme un représentant de la communauté mathématique. Les auteurs lient ces normes à une conception particulière de l'enseignement des mathématiques et mettent en évidence leur composante sociale importante:

« Because teachers with whom we collaborated were attempting to establish <u>inquiry mathematics traditions</u> in the classrooms, acceptable explanations and justifications had to involve described actions on mathematical objects rather than procedural instructions….
... Crucially, to be acceptable, other students had to be able to interpret the explanation in terms of actions on mathematical objects that were experientially real to them. Thus, the currently taken-as-shared basis for mathematical communication served as the backdrop against which students explained and justified their thinking..» (Cobb et Yackel, 1996, p. 465; c'est nous qui soulignons)

À notre avis, dans l'argumentation des auteurs, il n'y a aucune référence à la nature des objets mathématiques concernés dans l'argumentation, ni à la pratique mathématique (réflexion épistémologique) comme régulatrice de ce qu'on produit dans la classe. Le professeur est-il, donc, un représentant de la communauté mathématique ou un représentant des professeurs de mathématiques associés au courant nommé « inquiry mathematics traditions »? Même si les auteurs postulent ensuite que les normes sociomathématiques sont établies dans toutes les classes, de manière indépendante de la « instructional traditional », on ne peut savoir si ces normes sont partagées par toute la classe.

Selon Cobb et Yackel, les élèves vont construire les normes du travail mathématique à partir du fait d'être dans une institution, de percevoir ce que le professeur valorise ou non, ce qu'il considère pertinent ou non, etc. Mais il semblerait ne pas exister une discussion explicite sur ces normes qui sont en train d'être construites dans l'action.

Nous avons déjà parlé de la position des auteurs face à l'apprentissage des mathématiques. Il semblerait que les processus de construction individuels ne soient pas importants lorsqu'il s'agit de la construction de normes sociomathématiques; ce sont les processus d'acculturation qui prennent de l'importance dans ce cas. Ces processus d'acculturation mettent l'accent sur « le social », par exemple sur l'exigence de produire des explications pour les autres, mais cette exigence n'est pas suffisante pour produire des explications acceptées en mathématiques : l'action du maître est fondamentale. Mais comment le maître règle-t-il ce qui est pertinent ou non? Ce qui, à notre avis, est crucial pour comprendre l'évolution possible des élèves vers une rationalité mathématique n'est pas clairement défini : sur quels éléments le professeur s'appuie-t-il pour favoriser cette évolution?

Pour Cobb et Yackel, les connaissances sur la rationalité se construisent dans l'interaction avec le professeur, tout au long de la construction de connaissances mathématiques, et non pas dans des situations spécifiques construites à cette fin. Nous retiendrons cette idée de construction à long terme, mais nous ne mettrons pas toute l'attention sur « le social » : la nature des objets impliqués et le type de pratiques qui y sont associées seront des facteurs déterminants dans notre analyse. En nous référant aux travaux de Cobb et Yackel, lorqu'il faut statuer, par exemple, sur la pertinence mathématique d'une argumentation, le professeur, représentant de la communauté mathématique, n'a pas d'autre choix que celui d'en appeler à une convention déjà établie, sans pouvoir la doter de signification. Sans nier la nécessité d'en appeler dans certaines occasions à des conventions relevant d'une pratique de la communauté de référence, il nous semble important que le sens de ces conventions se rattache à la nature des objets impliqués. Voilà ce qui distingue essentiellement notre position de celle de Yackel et Cobb.

2.4.4. Argumentation et démonstration: continuité ou rupture?

Duval (1992) s'interroge sur les conditions, qui rendraient possible, en mathématiques, un passage de l'argumentation au raisonnement et particulièrement, à la démonstration. Pour aborder cette question, l'auteur propose de comparer le fonctionnement cognitif d'une argumentation et celui d'une démonstration. Duval trouve nécessaire d'élargir la comparaison à l'explication, pour les raisons suivantes :

« *...étant donné que l'argumentation trouve ses racines dans l'exigence de justification et qu'il n'est pas possible de convaincre sans donner à comprendre, nous allons également élargir la perspective de notre comparaison à l'explication. L'explication est une activité importante qui apparaît étroitement liée au raisonnement. Malheureusement, si elle a déjà donné lieu à beaucoup de commentaires d'ordre épistémologique, elle a en revanche peu donné lieu à des investigations d'ordre cognitif ou psychologique...* » (Duval, 1992, p. 121)

Dans la production d'argumentations, Duval identifie deux opérations : la production de raisons ou d'arguments (manifestée par les questions du type « pourquoi ») et l'examen d'acceptabilité des arguments produits; il identifie des critères pour la réalisation de ces opérations. Il affirme aussi que les deux démarches sont radicalement différentes, indépendantes l'une de l'autre, en basant cette affirmation sur une séparation de facto et une différence dans leur fonctionnement cognitif : la première relève de l'explication et la seconde du raisonnement. L'explication et le raisonnement n'ont pas du tout, pour Duval, ni le même objectif, ni le même type de fonctionnement : le raisonnement a pour but la modification de la valeur épistémique[2] d'un énoncé-cible et la détermination de sa valeur de vérité lorsque certaines conditions particulières d'organisation sont remplies; l'explication n'a pas pour but la modification de la valeur épistémique d'un énoncé-cible et ne s'appuie pas du tout sur les valeurs épistémiques des propositions mobilisées, mais seulement sur leur contenu. Une explication donne une ou plusieurs raisons pour rendre compréhensible une donnée (un phénomène, un résultat,...) et ces raisons ont une fonction quasi descriptive. Et, comme dans toute description, continue l'auteur, la valeur épistémique des raisons énoncées ne joue aucun rôle. Le raisonnement avance aussi une ou plusieurs raisons, mais le rôle des raisons avancées y est fort différent : il est de « communiquer » aux affirmations qui sont à justifier leur force d'argument. La valeur épistémique des arguments joue un rôle essentiel dans ce cas : les thèses discutées et les conclusions acquièrent, dans le raisonnement, une valeur épistémique nouvelle qui efface la valeur épistémique qu'elles pouvaient avoir avant le raisonnement. Pour Duval, il est important de ne pas confondre les marques discursives dans les explications, argumentations ou démonstrations, avec les fonctionnements cognitifs qui les sous-tendent.

L'argumentation apparaît ainsi plus apparentée à une démonstration qu'à une explication; l'auteur précise toutefois que même s'il y a une « distance discursive » très faible entre l'argumentation et la démonstration, la « distance cognitive » est grande. Pour préciser cette idée de « distance cognitive », Duval analyse le prototype de raisonnement valide, le raisonnement déductif : un pas de déduction s'organise en fonction du statut opératoire des propositions qu'il comporte nécessairement, statut qui ne dépend pas du contenu des propositions mais du statut théorique qui leur est préalablement fixé : hypothèse, théorème, définition, etc. Dans une argumentation, la déduction ne s'organise pas exclusivement en fonction du statut théorique des

[2] La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attachée à une proposition. (Duval, 1991)

propositions, mais aussi en fonction du contenu des propositions : la valeur épistémique des propositions est liée à la compréhension de leur contenu.

Le passage de l'argumentation à un raisonnement valide implique, pour l'auteur, une décentration spécifique qui n'est pas favorisée par la discussion ou par l'intériorisation d'une discussion. Le développement de l'argumentation, même dans ses formes les plus élaborées, n'ouvre pas de voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif; dans cet apprentissage, il est fondamental de prendre conscience de la différence entre raisonnement déductif et argumentation, à partir d'un travail qui dissocie la production de l'organisation déductive des propositions et la production linguistique d'un texte.

Pour nous, le rôle des connaissances concernées dans la proposition de Duval n'est pas clair. L'organisation de son argumentation est similaire dans les articles que nous avons lus : il y a d'abord une analyse générale du fonctionnement du discours et après une « application » de cette analyse à la géométrie. Même si cette position s'oppose à celles avancées dans les travaux que nous avons déjà discutés, elle a une certaine ressemblance avec ces dernières positions. Pour entrer dans le jeu de la démonstration, il faut : a) selon Duval, connaître (ou faire connaître aux élèves) la structure d'un système axiomatique; b) selon Arsac, connaître (ou faire connaître aux élèves) « les règles du débat mathématique »; c) selon Legrand, connaître (ou faire connaître aux élèves) « les règles du débat scientifique ».

Est-il possible de poser la problématique de l'évolution de la rationalité mathématique chez les élèves en termes de compréhension du fonctionnement d'un système ?

Dans ses études, Duval déclare également que dans le raisonnement, et non pas dans l'argumentation, l'objectif est de modifier la valeur épistémique :

« ...Et au terme d'un pas de déduction ou d'un enchaînement de pas, les propositions qui ont le statut opératoire de conclusion acquièrent immédiatement la valeur épistémique

d'apodicticité. C'est ce transfert de la valeur épistémique, du contenu vers le statut opératoire qui permet de voir ce que la démonstration apporte de nouveau : la modification de la valeur épistémique dans le sens de l'apodicticité » (Duval, 1991, p. 243).

Mais comment expliquer cette acquisition quasi magique, chez *les élèves,* du caractère apodictique des propositions? Il semblerait que « ces pouvoirs magiques » de la déduction soient reconnus par n'importe quel sujet, indépendamment de sa rationalité et de ses connaissances du domaine sur lequel porte le raisonnement. En revanche, les travaux du groupe Cesame (1997) montrent, au contraire, la complexité de la problématique de *la nécessité* chez les élèves.

3. La validation intellectuelle en algèbre dans le cadre de la théorie des situations

Pour la construction d'un espace didactique qui permette aux élèves et au professeur d'effectuer le passage de la validation empirique à la validation intellectuelle dans le sein de la rupture artihmétique-algèbre, et en partageant des responsabilités pour la négociation d'un contrat didactique, nous ferons appel à la théorie de situations. Cela suppose d'identifier effectivement ce qui sera à la charge de chacun des partenaires. Pour cette raison nous étudierons la notion d'adidacticité et essayerons d'identifier la particularité qu'elle prend dans le cadre de notre recherche. Nous analyserons les situations de validation, du point de vue des connaissances en jeu et du partage de responsabilités, ce qui nous conduira à une meilleure compréhension des niveaux adidactiques et didactiques dans ce type de situations.

3.1. Modélisation de la connaissance dans la Théorie des Situations

Dans la théorie de situations, chaque connaissance mathématique spécifique se modélise par une « situation » :

« Une situation est donnée par un ensemble d'états possibles d'un « milieu », parmi lesquels un actant choisit à chacune de ses décisions un nouvel état parmi ceux qui lui sont permis à ce moment là par les règles qui lui ont été proposées. L'actant cherche à mener le milieu à un état final déclaré gagnant et à éviter les états « perdants ». Une connaissance est un moyen de choisir une stratégie ou d'en écarter certaines autres. La connaissance déterminée par une situation est celle qu'engendra sa stratégie optimale. On suppose que l'actant cherche à obtenir « le meilleur résultat au meilleur prix » » (Brousseau, 1999, p. 28)

Une situation est ainsi un modèle des relations et des interactions des acteurs avec un milieu. Les connaissances *pertinentes* dans une situation sont celles qui permettent de mettre en jeu une stratégie, dans le cadre des choix permis à chaque moment. Parmi les connaissances pertinentes, certaines sont *adéquates,* car elles permettent d'atteindre l'état final du jeu et, parmi ces dernières, certaines sont plus efficaces, plus économiques que d'autres.

Pour Brousseau, ce modèle permet d'identifier certaines connaissances d'un sujet, au moins celles qui se manifestent dans ses comportements; il s'agit alors d'identifier les connaissances «les plus simples » qui engendrent la stratégie « la plus simple » qui coïncide avec les séries de décisions observées. Il est ensuite possible de les comparer avec d'autres connaissances pertinentes, en particulier avec les connaissances optimales dans la situation.

Gascon, Bosch et Bolea (2001) précisent que c'est justement ce caractère optimal de la résolution qui intervient dans la modélisation d'une connaissance mathématique spécifique et qui agrandit la classification dichotomique entre « résolution correcte/résolution incorrecte », qui permet de mettre au premier plan *les propriétés ergonomiques des connaissances*, tant dans l'explication que dans la prévision des phénomènes didactiques. Mais comment Brousseau définit-il ce caractère « optimal» d'une stratégie?

Dans l'ouvrage rédigé en 1998, Brousseau expose certains éléments à considérer:

« Le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale :
-est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre?
-pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle-là?
-quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration?
-telle raison de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus accessible ou plus efficace que telle autre?
Ce genre de questions peut être posé a priori. Dans un premier temps, les réponses peuvent être puisées dans la logique du jeu, dans l'histoire des sciences ou dans l'analyse mathématique ou didactique : le jeu spécifique d'un savoir doit en justifier l'emploi ou l'apparition, conformément à la didactique théorique » (p. 80-81)

Mais, lorsqu'il s'agit de connaissances liées à la validation, connaissances qui concernent davantage notre recherche sur la validation intellectuelle en algèbre, comment définit-on ou juge-t-on du caractère optimal d'une stratégie? Est-il possible de maintenir un modèle basé sur des propriétés ergonomiques des connaissances lorsqu'il s'agit du développement de nouvelles pratiques ?

Pour mieux comprendre ces questions, nous commencerons par l'étude les situations de validation, des connaissances en jeu et des responsabilités partagées par des partenaires dans ce type de situations. Cela nous conduit, d'abord, à l'analyse du concept d'adidacticité et la particularité qu'il prend dans le cadre des situations de validation et de validation intellectuelle.

3.2.La notion d'adidacticité

Saisir la notion d'adidacticité n'est pas simple. Il nous semble ainsi important de reproduire des extraits des propos de Brousseau.

« La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux des « problèmes » qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème ait été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation adidactique » (Brousseau, 1998, p. 59)

[...] «L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence adidactique et ce qui est d'origine didactique. La situation adidactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais, dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger: l'enseignement doit sans cesse aider l'élève à dépouiller, dès que possible, la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective.» (Brousseau, 1998, p.60)

Pour Margolinas (1993), une situation adidactique est une situation qui peut être vécue par l'élève en tant que chercheur d'un problème mathématique, indépendant en ce sens du système enseignant. Dans le même texte, l'auteur introduit la notion de phase de validation (quand l'élève décide lui-même de la validité de son travail) et établit une exigence plus forte : *une condition nécessaire pour qu'une situation permette un jeu adidactique est de comporter un milieu qui permette une phase de validation* (pp.39). L'auteur manifeste que cette exigence est présente en d'autres termes chez Brousseau (1986) et Ratsimba-Rajohn (1981).

Pourtant, cette exigence ne semble pas être reprise, au moins explicitement, dans des travaux postérieurs qui reconnaissent l'importance de la notion d'adidacticité. Pour Mercier (1998, p. 293),

« l'observation biographique ne garde jamais de la théorie des situations qu'une seule idée fondamentale : tout apprentissage observé signe une dimension adidactique efficace, puisqu'un élève a rencontré de l'ignorance et les moyens de la dépasser »

Mais il n'est pas clair si le milieu associé à la dimension adidactique des épisodes didactiques doit comporter une organisation qui permette le développement d'une phase de validation, pour pouvoir vraiment parler de dimension adidactique. Rencontrer les moyens de dépasser l'ignorance implique-t-elle une validation autonome des connaissances produites?

À notre avis, même la définition d'adidacticité (l'élève vit la situation en tant que chercheur d'un problème mathématique) contient implicitement, comme le propose Margolinas, une exigence: se positionner comme un « chercheur d'un problème mathématique » implique un certain niveau de contrôle sur la production réalisée, ce qui ne signifie pas avoir une certitude absolue (nous avons déjà fait référence à la position de Villers par rapport à cette question). Dans ce sens, nous pensons que pour pouvoir parler d'adidacticité, l'exigence d'une phase de validation (de certain niveau de validation) est tout à fait pertinente mais appelle certaines remarques :

- l'analyse de Margolinas porte explicitement sur des moments publics de validation liés à la nécessité de conclusion pour toute la classe, de « fermeture » de la situation, d'où le rôle fondamental du professeur. Il nous semble important de différencier l'adidacticité d'une situation de ses phases adidactiques dans lesquelles la validation peut rester à un niveau privé et, donc, avec des exigences de nature différente de celles recontrées à un niveau public. Il nous semble donc pertinent de distinguer de phases de validation privées (où des validations peuvent être implicites ou explicites) et publiques ainsi que d'identifier les exigences que comporte chacune d'elles.
- la notion d'adidacticité à laquelle fait référence Mercier semblerait être aussi davantage liée au travail privé des élèves. Dans ce cas, il faudra analyser les rétroactions nécessaires à ces phases de validation, même implicites.
- comment s'articulent les validations privées et publiques? Comment les validations privées évoluent-elles vers validations publiques conformes aux exigences institutionnelles? Sur quelles connaissances se basent ces évolutions? Comment s'élaborent ces connaissances?

Les réponses à ces questions ne sont indépendantes ni des objets de savoirs en jeu, ni de leur fonctionnement : valider une méthode, valider « la mise en équation » d'un problème ou la modélisation algébrique d'un problème, ou valider une preuve, implique des connaissances absolument différentes.

Notre objet d'étude nous amène à analyser le rapport entre les validations publiques et privées dans les situations de validation. Mais avant d'entrer dans cette étude, il nous semble important d'examiner davantage la nature des milieux et la question de l'adidacticité, ou plus encore, l'existence ou non d'un milieu matériel dans les situations considérées : l'interprétation de la rétroaction du milieu en termes de validation peut être triviale lorsqu'il y a un milieu extérieur, ce qui n'est pas le cas lorsqu'un tel milieu n'existe pas. Dans le cas de la course à 20 (Brousseau, 1998), l'interprétation de l'élève se rapporte à la reconnaissance d'avoir gagné ou non dans le jeu. Dans le jeu de communication faisant partie de la situation comportant une tâche d'agrandissement d'une figure (Optimist : voir N. et G. Brousseau, 1987), les élèves peuvent confronter les figures qu'ils ont produites à celle attendue et cette confrontation ne nécessite qu'une correspondance entre les parties de leurs figures et celles de la figure attendue, chacune de ces parties étant identifiée par une lettre. Mais lorsqu'il n'existe pas un tel milieu matériel, lorsque la validation repose sur des critères de validité (Margolinas, 1993), c'est-à-dire sur des connaissances mathématiques, le professeur est toujours présent et son silence ne signifie pas nécessairement une non-intervention.

«Les phases de validation, quand elles reposent sur des connaissances récemment apprises, offrent peu de garanties au maître sur leur bon fonctionnement. Le plus souvent, dans les descriptions des séquences, dès que les situations comportent un milieu en partie intérieur à l'élève, les phases de validation ont lieu sous forme d'un débat collectif.

[...] Chez Grenier, le rôle de l'enseignant dans ces phases est un peu flou...

[...] Chez Brousseau, au contraire, à plusieurs reprises, le rôle de l'enseignant est strictement réduit à l'organisation de ces phases, toute intervention sur la validité des stratégies et des méthodes lui étant "interdite". L'analyse que nous avons faite précédemment nous montre que cette attitude du maître a été rendue possible par une articulation des phases de validation sur des connaissances établies dans la séquence.» (Margolinas, 1993, p. 131)

Le fait de renvoyer la phase de validation à un débat collectif répond, comme Margolinas l'a bien souligné, à l'absence de garanties sur le bon fonctionnement des critères de validité (récemment construits):

«Cela permet au maître de se tenir prêt à organiser une phase d'évaluation au cas où la phase de validation ne présenterait pas les caractéristiques que doit revêtir pour lui une phase de conclusion.

Dans le cas où la phase de validation est censée se dérouler grâce à des critères de validité internes aux élèves, elle ne présente plus suffisamment de garantie de fonctionnement pour se passer entièrement de façon privée. En la faisant se tenir publiquement, le maître se donne de grandes chances de voir les phases de bilan *fonctionner effectivement comme phases de validation. Mais il se réserve, en dernier recours, la possibilité d'intervenir»* (Margolinas, 1993, p. 131)

Cette argumentation mérite d'être examinée davantage. Selon Margolinas, l'attitude du maître chez Brousseau est rendue possible par une articulation des phases de validation sur des connaissances établies dans la séquence, connaissances jugées établies chez la majorité des élèves. Le maître n'a pas alors éprouvé la nécessité d'intervenir. Cette non intervention est éloquente: elle garantit implicitement que ce qui a été produit dans la classe est valide du point de vue mathématique. Le silence du maître valide implicitement la production des élèves. Dans le cas contraire, le maître aura l'obligation d'intervenir.

La nature des phases de validation et de conclusion nous semble ainsi déterminée par la présence ou non d'un milieu matériel. Dans le premier cas, l'élève peut ne pas avoir besoin de la présence du maître pour interpréter les rétroactions (par exemple, lorsque cette interprétation exige des connaissances qui sont bien maîtrisées par l'élève). Dans le second cas, lorsque la validation s'appuie sur l'emploi de connaissances mathématiques, soit récemment construites, soit non disponibles à l'élève, l'interprétation des rétroactions doit informer l'élève sur l'adéquation et la bonne utilisation des connaissances qu'il a mises en jeu peut lui être inaccessible. C'est alors le maître qui assumera la rétroaction soit par son intervention, soit par son silence. « Le silence » du maître, dans une phase de conclusion, ne peut donc pas être ignoré.

À notre avis, c'est la maîtrise, chez les élèves, des connaissances mathématiques qui ont le statut de critères de validité (la stabilité de ces connaissances, leur fonctionnement), qui va permettre le développement des phases adidactiques. Dans ces cas, le silence du professeur aura un statut différent.

Ces considérations nous permettent de mieux comprendre le point de vue de Margolinas, par rapport au rôle du professeur au niveau adidactique. Du point de vue du constructeur de situations, la considération du professeur comme observateur dans les phases adidactiques nous oblige à préciser l'étude des critères de validité (leur stabilité, le travail à faire pour qu'ils deviennent stables, etc.).

Nous avons déjà vu que Brousseau caractérise la situation adidactique comme la situation finale, de référence, celle qui caractérise le savoir, qui peut être étudiée de façon théorique, mais que dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, *elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger.* Pour atteindre cet idéal, il ne suffit pas que l'enseignant « dépouille bien » la situation de tous ses artifices didactiques. Lorsque la situation ne peut prendre appui sur un milieu matériel, il faut que l'élève ait certaines connaissances mathématiques et ces connaissances ne sont pas toujours disponibles. Dans ce sens, l'adidacticité, comme élément caractéristique d'un *processus* de développement de connaissances, est un but à atteindre et non une condition d'apprentissage.

Pour conclure cette section, nous voulons faire référence au travail de Perrin-Glorian (1999) qui analyse les rapports entre le modèle théorique et la situation réalisée. L'auteur insiste, comme nous l'avons fait, sur la nécessité de ne pas confondre le modèle et la situation réalisée. Elle pose la nécessité de complexifier le modèle de structuration du milieu, sans le dénaturer, pour prendre en compte, dans l'analyse a priori, les différences entre les élèves et ainsi mieux pouvoir utiliser ce modèle dans l'analyse a posteriori. Elle pose la possibilité de prévoir que certaines connaissances supposées présentes dans le milieu institutionnel ne seront pas disponibles pour tous les élèves et, ainsi, de distinguer des situations différentes selon les groupes d'élèves, ce qui supposera des apprentissages différents.

À notre avis, la spécification de différents milieux cognitifs potentiels (ensemble d'objets pour lesquels le rapport personnel est stable et conforme au rapport institutionnel) pourrait permettre de mieux caractériser le rôle du professeur dans le cadre de la dévolution. Il nous semble que le fait de penser les interventions du professeur, possiblement à la demande des élèves, pour activer des éléments du milieu potentiel -outil pour la situation- pourrait se lier à l'idée de co-construction du milieu définie par Mercier (1998) - bien sur, du point de vue de la situation réalisée-. Dans ce sens, l'analyse de l'absence de certains objets qui n'étaient pas prévus, analyse effectuée par Perrin-Glorian (1999) à travers la distinction entre milieu cognitif potentiel et milieu cognitif activé, pourrait être un point d'appui intéressant pour la dévolution.

3.3. Situations de validation : connaissances en jeu, adidacticité

Une des premiers résultats de la théorie des situations a été l'établissement d'une correspondance entre :

1) Trois formes de connaissances mathématiques :
   a) modèle implicite
   b) langage
   c) théorie
2) Trois fonctionnements de ces connaissances :
   a) un modèle implicite suggère une décision ou un algorithme
   b) un langage permet la production d'un message
   c) une théorie permet de construire des propositions et des jugements
3) Trois types d'interaction de l'élève avec le milieu.

L'évolution des formes de connaissances mathématiques et de leur fonctionnement est l'image, la trace ou même la cause de l'évolution de l'apprentissage du sujet. Cette évolution permet de mettre en évidence des types d'interaction de l'élève avec le milieu :

a) les échanges d'informations non codées : actions (décisions, choix) sur le milieu

b) les échanges d'informations codées dans un langage : le joueur agit en émettant un message à l'intention du milieu antagoniste, sans que ce message porte l'intention d'émettre un jugement.

c) les échanges de jugements : échanges d'assertions, de théorèmes, de démonstrations, émis et reçus comme tels.

Ces différenciations conduisent à considérer trois types de situations (interactions possibles jeu-joueur / connaissance C): situations d'action, de formulation et de validation. L'analyse des situations de validation (Brousseau,1998) devient fondamentale dans le cadre de notre projet. Brousseau définit ainsi ces situations :

« Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produit d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs sont alternativement un « proposant » et un « opposant » ; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple « milieu/message » (Brousseau, 1998, p.109).

Les déclarations faites par le proposant doivent être soumises à un jugement de la part de l'interlocuteur qui ne peut pas être, comme dans les situations de formulation, un simple récepteur. Cela veut dire que cet interlocuteur doit pouvoir exercer des rétroactions : refuser une raison qu'il juge fausse, réfuter, prouver à son tour. Proposant et opposant doivent être tous les deux dans des positions a priori symétriques, tant du point de vue de l'information qu'ils détiennent que des moyens de rétroaction.

Brousseau mentionne que le schéma didactique de la validation motive les élèves à discuter et favorise la formulation de leurs validations implicites, mais souvent leurs raisonnements sont encore insuffisants, incorrects, maladroits. La situation didactique doit les conduire à évoluer, à réviser leur opinion, à remplacer leur théorie fausse par une théorie vraie. Mais dans quelles conditions se produit cette évolution? A-t-elle lieu dans le cadre strictement didactique? Comment évoluer vers la validation intellectuelle? Pour proposer des éléments de réponse, il faut analyser les caractéristiques du fonctionnement adidactique d'une situation de validation.

Pour Orus (1992), le raisonnement a un rôle spécifique dans les situations de validation, celui d'assurer la validité d'une proposition. Elle distingue le raisonnement établi individuellement (élaboration individuelle de preuve) et collectivement (moment de confrontation collective). Elle affirme que ce processus de validation collective se déroule dans des situations didactiques qui débordent du cadre du fonctionnement adidactique. Au niveau adidactique du fonctionnement des situations de validation, elle signale que les élèves produisent des raisonnements personnels : le sujet engage des raisonnements personnels au niveau de l'action, mais il réalise aussi un travail réflexif sur cette action, en essayant de valider la solution trouvée. Les raisonnements mobilisés restent au niveau privé. Au niveau didactique du fonctionnement des situations de validation, poursuit Orus, les raisonnements perdront leur caractère privé et devront être confrontés aux raisonnements officiels que l'enseignant a l'obligation d'enseigner. Le raisonnement-validation produit au niveau adidactique se manifestera publiquement dans la situation didactique, au sein d'une certaine communauté scientifique (la classe de mathématiques) qui a ses propres règles d'acceptation ou de rejet des raisonnements produits, en fonction de son histoire commune : les types de preuves permises et reconnues suffisantes dans cette communauté de référence pour établir la validité des raisonnements produits (preuves pragmatiques, preuves sémantiques, preuves syntaxiques, etc.).

L'analyse faite par Orus soulève plusieurs questions :

- Orus différencie les étapes privées et les étapes publiques dans les situations de validation. Pour Brousseau, les situations de validation se développent toujours dans un débat entre un proposant et un opposant, ce qui ne signifie pas nécessairement, dans une instance publique. On pourrait interpréter les instances privées d'une situation de validation, soit comme un débat à l'intérieur d'un groupe, soit comme un débat entre l'élève et lui-même ou avec un interlocuteur imaginaire (représentation du futur interlocuteur public). L'identification des étapes privées et publiques dans les situations de validation nous renvoie à la différenciation déjà faite des phases de validation dans chacune de ces étapes.

- La notion d'adidacticité nous semble exiger plus que la seule production de raisonnements individuels des élèves; elle exige un milieu pour la validation (même si au niveau privé, les exigences seront différentes de celles rencontrées au niveau public). Quelles sont donc les rétroactions sur les raisonnements produits dans cette étape qui permettent de parler d'adidacticité? Peut-on considérer un niveau adidactique de fonctionnement uniquement parce que l'élève travaille sans l'intervention du maître, même s'il n'y a aucun type de rétroaction du milieu?

- Comment (dans quel milieu) la communauté scientifique formée par la classe a-t-elle construit les règles d'acceptation ou de rejet auxquelles Orus fait référence?

Analysant la situation de validation de « la course à 20 », situation paradigmatique de la théorie des situations, Margolinas (1993) signale que la construction d'un milieu pour la validation est une tâche très importante, mais difficile, qui tient à la nature de ce type de situations. Elle s'intéresse d'abord à l'entrée dans une phase de validation. À l'École Michelet, écrit-elle, c'est très souvent la maîtresse qui suggère aux élèves d'aller jouer contre un membre de l'équipe adverse pour défendre une proposition. Elle intervient donc directement dans la relation des élèves avec le milieu pour la validation, ce qui est contradictoire avec l'ambition de réaliser une situation adidactique de validation, conclut l'auteur. Cette conclusion se rapporte à la *réalisation* de la situation dans une classe, c'est-à-dire, au niveau de la réalité et non du modèle. Dans le cas de « la course à 20 », le milieu pour la validation est fonctionnel pour les validations pragmatiques (on joue en utilisant la stratégie qu'on veut prouver et on voit si ça marche ou non). De plus, comme la rétroaction « plus évidente » vient justement de la vérification à partir du jeu (par les connaissances nécessaires pour lire les rétroactions ainsi que par la garantie que le milieu donne au professeur sur le bon fonctionnement de la validation), les professeurs des classes analysées par Margolinas choisissent toujours d'envoyer les élèves jouer le jeu, favorisant de cette manière la production de preuves pragmatiques. Mais le milieu permet-il la production de preuves intellectuelles? Y-a-t-il des rétroactions prévues si une validation intellectuelle est proposée aux élèves?

Selon Margolinas, pour que le problème puisse conduire les élèves vers des preuves intellectuelles, il est nécessaire qu'ils ne puissent pas trouver directement une réponse à la validité de leurs assertions dans un milieu déjà organisé. Ils doivent convenir entre eux des règles du débat de preuve, en faisant de ces règles l'enjeu de l'apprentissage dans les situations de validation. La situation de validation de « la course à 20 » n'empêche pas la production de preuves intellectuelles, mais le milieu n'est pas organisé pour rendre nécessaire une telle production. Les preuves intellectuelles exigent un milieu non matériel. En l'absence d'un milieu matériel, la question de l'adidacticité demandera une analyse plus fine, ainsi que l'identification des critères de validité sur lesquels elle s'appuiera. Nous préciserons cette analyse au moment de la présentation de nos situations spécifiques. Mais, pour le moment, nous formulons quelques questions : si les règles du débat de preuve sont l'enjeu de l'apprentissage et si dans le modèle de structuration du milieu, la situation d'apprentissage est caractérisée par la situation adidactique, pour pouvoir décrire l'élaboration et le fonctionnement de ces règles avec ce modèle, il faut accepter l'existence de phases adidactiques dans les situations de validation. Quelles caractéristiques doit avoir le milieu pour la validation dans ce cas? Quelle nature spécifique auront les critères de validité lorsqu'il s'agit de valider une « règle du débat »? S'il n'est pas possible de trouver un milieu adidactique pour la construction de ces « règles », quelle modélisation permettra de décrire leur apprentissage?

Nous sommes intéressé par la production de preuves intellectuelles, d'où le besoin de considérer des milieux non matériels. Margolinas définit les critères de validité à partir de l'identification de l'impossibilité de faire dépendre la conclusion d'un milieu extérieur à l'élève. Ces critères permettent aux élèves de valider leurs productions lorsqu'il n'existe pas un milieu extérieur qui fournisse une rétroaction immédiatement interprétable en terme de validation : le milieu extérieur à l'élève devient intériorisé. Les critères permettent ainsi l'autonomie des élèves en phases de validation :

« Nous appellerons critère de validité une connaissance donnée quand elle sert à l'élève pour la validation dans une phase de conclusion ». (Margolinas, 1993, p. 130)

Dans la description des séquences sur les décimaux (N. et G. Brousseau, 1987) analysées par Margolinas, dès que les situations comportent un milieu en partie intérieur à l'élève, les phases de validation ont lieu sous la forme d'un débat collectif. Le maître organise ces phases sans intervenir sur la validité des stratégies et des méthodes. L'analyse de Margolinas montre que cette attitude du maître a été rendue possible par une articulation des phases de validation sur des connaissances établies dans la séquence.

La définition et le fonctionnement des critères de validité dans le travail effectué par Margolinas sont liés à la séquence sur les décimaux. Dans le module 1 de la séquence (N. et G. Brousseau, 1987, p. 139-140), il s'agit de « comparer des épaisseurs de feuilles ». D'abord, les élèves produisent une méthode pragmatique (liée à la mesure) et la validation de la méthode est caractérisée par la présence d'un milieu matériel. La méthode évolue vers une méthode « intellectuelle » (basée implicitement sur la proportionnalité). Pour la validité de cette méthode intellectuelle, le professeur s'appuie, d'abord, sur le milieu matériel (invitant les élèves à jouer pour prouver la méthode), puis sur les argumentations, sans que le maître intervienne sur la nature des arguments proposés. Dans la troisième activité du module 1, il n'y a plus de validation via le milieu matériel.

Nous remarquons qu'il y a ici une évolution de la méthode qui permet de trouver les réponses et que les connaissances implicites sur lesquelles s'appuie cette évolution (la proportionnalité) sont les mêmes connaissances (mais maintenant explicitées) qui permettront une évolution du type de validation. Même si l'épisode n'est pas explicité par Margolinas, il semblerait que l'élève qui suggère que *4 feuilles pour 1mm* aurait dû faire *8 feuilles pour 2 mm*, utilise, dans la construction de la méthode, un raisonnement qui sera par la suite à la base de la validation. Le raisonnement utilisé pour l'élaboration de la méthode intellectuelle contient implicitement sa validation.

Ce n'est toutefois pas uniquement le fait que les connaissances sur la proportionnalité aient déjà été institutionnalisées dans la classe qui permet d'arriver à une validation intellectuelle, mais également le fait que ces connaissances soient invoquées par les élèves pendant le processus de production de la méthode. Les connaissances identifiées comme critères de validité par Margolinas ont des caractéristiques spécifiques dans le contexte de la situation dans laquelle elles sont élaborées. La décontextualisation, à laquelle Margolinas fait référence lorsqu'elle parle du retrait du milieu matériel, nous semble ainsi partielle.

Un autre exemple permettra d'éclairer notre position. Nous avons ainsi proposé un jeu aux élèves de première secondaire (13 ans) dans lequel ils devaient trouver la somme de 10 nombres consécutifs choisis arbitrairement par le professeur (la calculatrice était interdite). L'équipe qui parvenait à trouver cette somme le plus vite possible était déclarée gagnante. La situation a été organisée afin d'aménager une évolution vers la production d'une formule permettant de trouver la somme de n'importe quelles séries de 10 nombres consécutifs. Analysons deux productions de la classe:

• « multiplier le premier nombre par 10 et additionner 45 ». Pour arriver à cette formule, les élèves ont identifié les relations entre chaque nombre de la série et le premier nombre de cette série.

• « ajouter le chiffre 5 à l'écriture du cinquième nombre de la série ». Par exemple, si la série est 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43, la somme est 385. Dans ce cas, les élèves sont arrivés à cette formule à travers des observations de régularités sur diverses sommes.

Dans l'étape de validation des formules proposées, le premier groupe a pu construire une validation intellectuelle tandis que le deuxième n'a pas pu dépasser l'empirisme naïf. Le premier groupe avait construit, pendant le processus d'élaboration de la formule, des connaissances qui ont pu fonctionner par la suite comme critères de validité. Les connaissances construites par le deuxième groupe n'ont pas eu ce statut. Nous ne pouvons pas dire que les élèves du deuxième groupe ne disposaient pas des connaissances qui ont fonctionné comme critères de validité chez les élèves de l'autre groupe. Tout ce que nous pouvons dire est que ces connaissances n'ont pas été mises en jeu dans la situation. Dans ce sens, on pourrait dire qu'une connaissance déjà institutionnalisée n'a pas nécessairement le statut d'un critère de validité, tant qu'elle n'est pas appelée par l'élève dans le contexte de la situation dans laquelle il se trouve. Notre analyse n'est pas contradictoire avec celle de Margolinas. Elle profite de cette analyse pour prolonger la réflexion sur le niveau de contextualisation des critères de validité.

On pourrait penser que la situation présentée « n'est pas pertinente » parce qu'elle ne conduit pas les élèves à recourir aux critères de validité nécessaires pour produire une validation intellectuelle. Mais s'il existe un milieu construit intentionnellement pour provoquer ce recours, on restera toujours dans une décontextualisation partielle.

Dans la situation précédente, la confrontation entre les deux types de validation a permis de mettre en place, de faire jouer « les règles du débat » auxquelles Margolinas faisait référence.

Une réflexion spécifique autour des «règles du débat » permettrait, à notre avis, d'avancer vers un niveau de décontextualisation plus grand: la production d'une preuve intellectuelle ne serait pas seulement conditionnée par l'apparition ou non de certains critères de validité (dans le contexte particulier), mais également par l'acceptation d'un certain fonctionnement de la validation dans une communauté. Cette acceptation pourrait commander la recherche de critères de validité nécessaires à la production de la preuve.

Les critères de validité liés aux connaissances spécifiques en jeu permettent la production de la preuve intellectuelle : à un niveau privé, ils pourraient garantir la validité des preuves produites (généralement de manière implicite). Mais dans l'étape de confrontation publique des validations de nature différente, lorsqu'il s'agit de discuter « des règles du débat », les critères de validité jouent-ils encore? Si oui, quelles caractéristiques ces critères ont-ils? Est-il possible d'envisager des niveaux adidactiques dans une phase de débat public, où l'enjeu est constitué « des règles du débat »? En principe, on fait l'hypothèse que si ces critères existent, ils sont différents de ceux identifiés par Margolinas dans la séquence sur les décimaux (N. et G. Brousseau, 1987) et utilisés par les élèves dans les validations privées.

Dans les situations de validation que nous avons pu analyser, qui ont été produites dans le cadre de la théorie des situations, les phases adidactiques sont celles dans lesquelles les élèves construisent les conjectures sur lesquelles portera la validation; par ailleurs, une fois la conjecture construite, le problème de sa validation semble relégué à une phase didactique. Les étapes de construction d'une conjecture peuvent se représenter plus en termes d'action et de formulation que de validation. Par exemple, dans leur thèse, Berthelot et Salin (1992, p. 78) analysent une situation proposée par Brousseau en 1983, soit la situation des médiatrices :

« Le problème est d'abord posé au niveau du « milieu » (l'espace de la feuille), l'élève dans ses essais pour agrandir le triangle développe des connaissances sur ce milieu.
[...] La situation comporte donc une phase adidactique essentielle pour la suite : si les élèves n'ont pas expérimenté l'impossibilité d'agrandir le triangle, comment l'enseignant pourrait-il les intéresser à la recherche d'une explication de cette « expérience graphique »?

Dans un deuxième temps, le professeur assume explicitement sa responsabilité didactique en introduisant un débat entre les élèves à propos des explications possibles de ce phénomène »

Le caractère adidactique de cette situation se rapporte à l'expérimentation de l'impossibilité d'agrandir le triangle, à la formulation d'une proposition sur laquelle se développera ultérieurement la validation. Mais cette validation, renvoyée à un débat public, a des caractéristiques didactiques. Il n'y a pas une identification précise des phases adidactiques dans l'étape spécifique de validation, ni une distinction entre moments privés et publics.

Dans ce travail, nous défendrons l'idée que certaines des règles du débat peuvent surgir en contexte, avec une certaine signification intrinsèque aux connaissances en jeu (et non uniquement selon une norme externe, ce qui différencie notre travail de celui de Cobb et Yackel sur les « normes sociomathématiques » (Cobb et Yackel, 1996, voir antérieurement). Cependant, les connaissances qui vont permettre leur acceptation ou non sont de nature différente de celles qui règlent la production d'une preuve. Par exemple, les connaissances pour pouvoir décider si une preuve « est explicative ou non » ou si « plusieurs exemples sont ou non suffisants pour valider une proposition générale (Arsac, 1992) » sont de nature différente des connaissances nécessaires à la production d'une preuve. Dans une situation de validation, des connaissances de niveaux différents sont en jeu: celles liées à l'adoption de certaines règles, celles liées à la production d'une preuve, celles liées à la validation des preuves produites. Par rapport à ces dernières, Arsac (1996) montre que, dans l'activité mathématique, aucune démonstration n'est jamais conforme à *toutes les* règles qui déterminent la validité du raisonnement, pour des raisons variées : l'analyse des démonstrations fait apparaître des lacunes du point de vue de la structure déductive; il y a des implicites, des « lemmes cachés » (Lakatos, 1976). À une époque donnée, il existe des conventions qui règnent chez les mathématiciens en ce qui a trait au niveau d'explicitation nécessaire à une démonstration. De cette manière, même s'il existe des règles théoriques pour la démonstration, la vérification de la conformité à toutes ces règles relève toujours d'un débat entre mathématiciens. Selon Arsac, ceci signifie que dans l'enseignement, des questions analogues soulèveront des problèmes de contrat didactique.

Pour conclure cette section, nous revenons sur la question de la modélisation de connaissances dont l'apprentissage semblerait ne pas pouvoir se modéliser par un jeu adidactique. Soury-Lavergne (2003) emprunte à Bruner la notion d'étayage pour modéliser, dans le champ spécifique des apprentissages mathématiques, les interventions de l'enseignant dans le cadre de séances de tutelle. Elle s'intéresse à la relation milieu-élève, aux interventions qui préservent le sens de l'activité de l'élève. La notion d'étayage permet d'établir un lien entre les phases adidactiques et les phases didactiques, de modéliser les interventions nécessaires de l'enseignant dans des cas - comme dans le nôtre - où il est nécessaire de communiquer une certaine normative caractéristique du rapport officiel au savoir. Mais comment est-il possible de rendre compte de la préservation du sens?

3.4. Situation de preuve intellectuelle

Dans les situations de validation, il s'agit de formuler des propositions et de les valider, en rentrant dans un processus de preuve. Brousseau formule le jeu de la situation de validation en termes de proposant et d'opposant : le proposant défend la vérité d'une proposition face à l'opposant; il essaie de le convaincre par différents moyens. Mais les contraintes de ces situations n'exigent pas que ces moyens soient nécessairement des preuves intellectuelles. Brousseau établit explicitement qu'un des joueurs ne doit pas avoir la possibilité d'obtenir l'accord de l'autre par des moyens « illégitimes » tels que l'autorité, la séduction, la force, etc. Mais quelles sont les variables de la situation de validation qui permettent de rejeter tous moyens rhétoriques d'emporter la conviction de l'autre?

Selon plusieurs travaux, la conviction personnelle (d'un élève en train de construire une rationalité mathématique) sur la vérité d'une proposition ne requiert pas la production de validations intellectuelles; plus encore, la conviction de l'autre peut être obtenue par des moyens qui n'impliquent pas la production de connaissances mathématiques.

Pour notre cas spécifique, nous proposons un modèle où l'enjeu ne soit pas la détermination de la vérité d'une proposition, mais la recherche d'une explication (pour soi et pour autrui) des raisons de cette vérité; nous nous centrerons sur la fonction explicative de la preuve. Nous faisons l'hypothèse que la recherche de raisons permet de réduire l'impact de quelques phénomènes sociaux identifiés par Margolinas dans les situations de validation, par exemple : le recours à l'autorité ou à la séduction pour convaincre. Lorsqu'il s'agit de chercher des raisons, les raisonnements personnels des élèves font appel à d'autres types de ressources. Cette hypothèse s'appuie sur le travail de Duval (1992, p. 45) que nous avons déjà cité :

« En mathématiques, le motif et l'enjeu dans l'argumentation sont les restrictions propres au problème à résoudre : ce sont les restrictions du problème qui déterminent le choix des arguments et non pas les croyances du destinataire. La force d'un argument dépendra davantage de son adaptation à la situation que de sa résonance dans l'univers de l'interlocuteur »

Dans une des situations que nous proposons, la recherche de raisons sera associée à la résolution d'une contradiction. Nous analyserons les ressources personnelles des élèves dans le cadre de cette problématique. Dans notre modèle, nous proposons de définir la notion de stratégie « optimale » en termes de degrés d'algébrisation (Gascon, 2001). De cette façon, être optimal n'est plus lié à «être le plus économique » (en termes de temps, d'effort, de coût d'apprentissage), mais à « être le plus algébrisé » (dans le sens d'une plus grande explicitation des relations impliquées, d'une modélisation algébrique). Pour Bosch, Gascon et Bolea (2001), un plus grand degré d'algébrisation implique un plus grand niveau d'explication. Pour nous, ce plus grand niveau d'explication signifie aussi un plus grand niveau de compréhension des raisons de la vérité d'une proposition relative à une organisation mathématique.

Orus (1992) fait remarquer la distance entre les raisonnements personnels des élèves dans la situation adidactique de validation et les raisonnements mathématiques, ainsi que les conflits générés par le contrat didactique, lorsque la finalité est d'assurer la vérité d'une proposition. Notre hypothèse nous conduit à considérer que les problèmes de contrat didactique sont de nature différente lorsque la finalité est la recherche de raisons. La gestion d'un contrat didactique pour l'acceptation d'un raisonnement algébrique comme moyen de fonder la vérité d'une proposition est moins coûteuse que dans le cas où l'enjeu serait la conviction. Pour Piaget, la compréhension est du domaine de la raison : elle doit se baser sur la conceptualisation et sur les liaisons entre les conceptualisations qui soient de nature implicative et non causale. La compréhension ne se centre ni sur les objectifs visés dans l'action, ni sur les moyens de les atteindre. La compréhension ne produit pas un résultat; elle permet de rétablir des équilibres (Piaget, 1974). Nous supposons donc que l'écart signalé par Orus entre les raisonnements personnels et les raisonnements officiels peut être amenuisé lorsque l'élève cherche à comprendre plutôt qu'à convaincre. Il ne s'agit pas d'éviter (ou de cacher) la confrontation entre les deux types raisonnements, eu égard à la conviction. Nous pensons plutôt que lorsque les raisonnements algébriques ont fonctionné dans la classe, les élèves sont dans de meilleures conditions (du point de vue de leurs connaissances) pour aborder cette confrontation.

La réduction de l'impact des phénomènes sociaux auxquels nous avons fait référence ne dépend pas seulement de la nature de l'enjeu dans la situation, mais aussi de l'engagement de l'élève, du projet de l'élève : l'entrée des élèves dans le jeu rationnel de « la recherche de raisons » (ainsi que dans le jeu de la conviction) est nécessaire. Le modèle envisagé devra inclure des contraintes pour engendrer le besoin d'une explication (de la compréhension), par exemple, résoudre une contradiction. Dans la résolution d'une contradiction, d'abord comme une problématique privée, les questions d'autorité, de force, de séduction, ne font plus sens. Ce rapport privé à la contradiction permettra aux élèves de se placer de manière différente dans l'étape de débat collectif.

Pour « comprendre », pour rétablir le déséquilibre provoqué par la contradiction, l'empirisme naïf deviendra limité parce qu'il ne s'appuie pas sur des conceptualisations; il établit un résultat (« ça marche », « ça ne marche pas »). Il faudra produire un autre type de validation. Peut-on inscrire ce type de validation dans des phases adidactiques?

La question de l'adidacticité nous renvoie toujours à la question de l'existence d'un milieu pour la validation (Margolinas, 1993). Comme il n'y a pas un milieu matériel, dans notre travail, il faut identifier les critères de validité sur lesquels l'élève peut s'appuyer pour valider ce qui a été produit, pour résoudre une contradiction, ainsi que pour attester de niveau de stabilité. Il y a, au moins, deux niveaux de connaissances qui devraient fonctionner comme critères de validité : les connaissances pour décider si la validation produite permet de dépasser la contradiction (critères pour décider ce qui sera considéré explicatif ou non dans la classe); les connaissances pour décider si la validation produite est valide du point de vue mathématique. Mais certains de ces critères sont justement en train de s'élaborer, du moins implicitement. Cette élaboration ne peut pas rester à un niveau privé : il est nécessaire de la rendre publique, de la confronter avec celles des autres, sous le contrôle du savoir officiel de référence. Le rôle du professeur sera une variable didactique fondamentale :

- la manière selon laquelle le professeur utilise ce savoir officiel (le transforme en connaissances pour l'injecter dans le milieu) sera déterminante pour l'élaboration du sens de ces critères.
- la façon de gérer les connaissances privées, qui ne seront pas nécessairement sous le contrôle du savoir officiel, sera tout aussi importante.

Nous montrerons que, dans le cas des pratiques algébriques, les critères pour statuer sur le caractère explicatif d'une preuve sont liés à la construction de connaissances relatives à une pratique spécifique et elles ne sont pas seulement des connaissances à un niveau syntaxique; on peut les exprimer ainsi : une expression algébrique est porteuse d'information; transformer une expression algébrique en une autre équivalente peut nous procurer plus d'information que ce qui était disponible avant d'effectuer la transformation, etc. Il s'agit de connaissances liées à un *type de pratique algébrique* qui n'est pas d'habitude objet d'enseignement à l'école.

Alors, c'est en ce sens que nous parlons d'adidacticité comme d'un processus, lorsqu'il s'agit de construire des connaissances sur la validation dans un espace arithmétique-algébrique. Il n'est pas possible de penser ces critères comme des connaissances institutionnalisées à partir d'*une* situation « antérieure »; ces critères se développent dans le cadre d'une pratique à long terme.

Les analyses effectuées par Bosch, Gascon et Chevallard (1997, 2001) sont produites du côté du savoir. Dans quelle mesure et sous quelles conditions « le plus algébrisé » peut signifier le plus explicatif pour un certain système cognitif, c'est-à-dire, dans quelle mesure le modèle peut être intéressant pour l'explication et la prévision de phénomènes didactiques? Du coté des élèves, nous avons déjà analysé (pré-expérimentations) le rôle des exemples dans les étapes de production et de validation de connaissances, dans le contexte d'une situation d'introduction de l'algèbre. Nous avons mis en évidence la reconnaissance par les élèves, fondamentalement dans les étapes de confrontation, du caractère explicatif de ce qui est plus près de la modélisation algébrique (par rapport à des pratiques empiriques). Notre intention dans cette recherche est de mettre à l'épreuve ce modèle, d'apporter plus d'éléments pour en analyser la pertinence.

4. Précision des questions de recherche

Comme dans tout travail théorique, nous avons ouvert plusieurs questions et formulé certaines hypothèses. Évidement, nous ne pourrons pas traiter de l'ensemble de ces questions et hypothèses. Cette étude approfondie nous permet toutefois de formuler plus clairement nos questions de recherche et de choisir celles qu'il nous semble possible de traiter.

Nous avons antérieurement précisé l'objectif global de notre recherche, soit : l'étude du développement de pratiques algébriques scolaires dans lesquelles la construction d'un système de validation interne -qui règle leur fonctionnement- occupe un lieu central. Des analyses théoriques réalisées nous retenons :

- l'impossibilité d'ignorer la dialectique numérique-algébrique et, plus encore, le besoin d'étudier les conditions didactiques pour faire vivre une dialectique à la base d'une reconstruction scolaire des pratiques algébriques. Nous pensons que cette dialectique doit prévoir un fonctionnement du numérique qui dépasse l'efficacité désignative et qui permet d'exprimer des relations, tout en conservant l'information monstrative.

- la complexité de l'entrée dans des pratiques de validation intellectuelle et les difficultés que cette complexité pose à la théorie des situations didactiques et aux ingénieries didactiques arrimées à cette théorie : rapport et articulation entre validations privées, publiques et officielles, construction de connaissances permettant de réguler le fonctionnement des pratiques de validation dans la classe de mathématiques (critères de validité), adidacticité et milieu non matériel.
- l'étude des conditions de l'évolution des pratiques des élèves en « classe de mathématiques » ne peut pas négliger la problématisation du rôle du professeur, que ce professeur soit le titulaire de la classe (classes en Argentine) ou le chercheur (classes au Québec). De plus, Mercier (1998) a montré que les élèves participent aussi à l'établissement des conditions d'enseignement. Dans ce sens, l'étude des conditions de l'évolution des pratiques des élèves en classe implique l'analyse de l'activité du professeur et des élèves dans le cadre d'un milieu de référence.

La complexité de la problématique dans laquelle s'insère notre travail, comme nous l'avons montrée, ne fait pas de doute. Il serait illusoire de prétendre l'aborder à partir de notre recherche doctorale. Ce traitement ne peut en effet faire abstraction des composantes « macrodidactiques » et « microdidactiques ». Un changement de pratique implique non seulement l'élaboration d'un nouveau contrat (problème de « macrodidactique »), mais également l'étude des caractéristiques spécifiques de ce contrat qui appelle à des analyses plus « locales » (problème de microdidactique). C'est dans ce contexte microdidactique que nous inscrivons nos questions de recherche :

1- Quelles situations didactiques exigeraient un fonctionnement du numérique qui dépasse l'efficacité désignative et qui permet d'exprimer des relations, tout en conservant l'information *monstrative*, de manière à élaborer des connaissances sur lesquelles reconstruire, avec sens, les pratiques algébriques (d'aider les élèves à effectuer le saut entre le fonctionnement arithmétique et le fonctionnement algébrique du numérique que, selon Chevallard (1987), aucun processus d'abstraction ne peut combler)?

2- La recherche de raisons et d'explications relatives à certains phénomènes numériques (liés à *l'arithmétique « propre aux philosophes »,* dans le sens des Grecs), permet-elle de mettre au premier plan une dialectique entre le numérique et l'algébrique, en aménageant le développement, dans les classes concernées par notre projet, de nouvelles pratiques et de nouveaux modes de validation, tout en dépassant le niveau empirique pour entrer dans un jeu intellectuel? Quelles conditions didactiques permettraient d'engager les élèves dans la recherche d'une explication, dans la recherche de la compréhension?

3- Quelles caractéristiques particulières prend la dialectique numérique-algébrique dans le contexte de la recherche d'explications (à quelles connaissances arithmétiques et à quel fonctionnement de ces connaissances les élèves font-ils appel, quel type d'explications produisent-ils, etc.)?

4- Quels rapports peut-on identifier entre les validations privées et publiques? Sur quelles connaissances s'appuient ces validations et quelles nouvelles connaissances leur évolution exige-t-elle? Quels rapports est-il possible d'identifier entre les niveaux de généralisation, les niveaux de rationalité et les niveaux de connaissances algébriques? Comment et dans quels contextes les processus de validation personnels s'articulent-ils avec ceux construits par le collectif « classe » et avec les processus de validation institutionnels visés?

5- Comment le professeur et les élèves participent-ils à l'établissement des conditions d'enseignement, dans le cadre des milieux spécifiques?

6- Quelles contraintes imposent au professeur la gestion de ces situations? À quelles connaissances fait appel le professeur pour conduire les situations? Quelles sont les effets des interventions des élèves sur le projet du professeur?

7- Quelles sont les rapports entre les contraintes des situations, les actions des élèves et de l'enseignant et les conditions effectivement observées d'adidacticité (identification du partage de responsabilités entre le professeur et les élèves dans l'établissement de conditions pour l'apprentissage), tant à un niveau privé qu'à un niveau public?

Comme nous l'avons dit, un changement de pratiques implique, entre autres, l'étude locale des caractéristiques spécifiques d'un contrat didactique. Mais cette étude ne peut pas se faire en négligeant le contrat existant dans une certaine institution. Dans ce sens, les questions 4,5, 6 et 7 doivent être analysées à la lumière de certaines caractéristiques des contrats spécifiques de chaque classe. Avec l'objet d'enrichir ces analyses, nous avons choisi trois types de classes:

- le premier dans lequel une « culture » de production, de débat et de validation est promue au niveau de l'institution scolaire, dans toutes les classes de mathématiques (classe A, Argentine).
- le deuxième dans lequel la « culture » précédente commence à être promue dans une classe particulière, mais non pas au niveau de toute l'institution scolaire (classe B, Argentine).
- enfin, le troisième incluant des classes plus « ordinaires » dans lesquelles le professeur effectue un exposé des savoirs, explique les solutions à des problèmes impliquant ces savoirs et invite, par la suite, les élèves à effectuer diverses tâches provenant des manuels en usage (Classes C et D, Québec).

Dans les deux premiers cas, en Argentine, les professeurs sont les titulaires des cours et ils participent activement aux activités des groupes de recherche en didactique de mathématiques (un groupe sur la didactique de l'algèbre et un groupe qui a travaillé sur la construction du système de numération au primaire). Dans le troisième cas, au Québec, les professeurs ne font pas partie de groupes de recherche ou n'ont pas entamé de collaborations avec les chercheurs. Dans ce dernier cas, nous avons pris en charge la gestion des situations.

Il importe toutefois de mentionner que certaines des conditions institutionnelles (programmes, manuels) sont comparables dans les deux pays. Notre examen des interactions en classe prendra davantage en compte les différences définies précédemment.

Chapitre III

Méthodologie

Chapitre III

Méthodologie

Les analyses que nous avons réalisées aux chapitres précédents ont mis en évidence le rôle fondamental que revêt la construction d'un milieu pour l'entrée des élèves de la 2e année de l'enseignement secondaire dans des pratiques algébriques. Nous pourrions ainsi dire que notre recherche se place dans le cadre de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988, 2002). Toutefois, les caractéristiques de notre travail nous obligent à effectuer des précisions, à spécifier l'emploi particulier que nous faisons de cette méthodologie ou, plus encore, les aspects que nous privilégions.

Nous présentons donc, dans un premier temps, les éléments de la méthodologie de l'ingénierie didactique que nous avons retenus, en fonction des objectifs de notre recherche. Cet exposé est suivi de la description et de l'analyse des situations didactiques élaborées pour notre étude. Puis, nous présentons les diverses classes d'élèves dans lesquelles les situations ont été mises à l'épreuve et décrivons brièvement le déroulement de ces expériences. Nous complétons la présentation de notre méthodologie en donnant un bref aperçu des données qui seront constituées et du traitement prévu de ces données, en fonction des objectifs poursuivis.

1. Orientations et adaptations de la méthodologie de l'ingénierie didactique en regard des objectifs de notre recherche

La méthodologie de l'ingénierie didactique est un produit original émanant de la théorie des situations didactiques élaborée par Brousseau (1998). Dans notre recherche, les questions soulevées par cette méthodologie, en regard des objectifs que nous poursuivons, nous ont amené à effectuer des adaptations. Il nous apparaît donc essentiel de rendre compte des questionnements à la base de ces adaptations.

Selon les analyses effectuées par Artigue (2002), pour apprécier l'importance de la méthodologie de l'ingénierie didactique, il faut comprendre son élaboration en cohérence avec la théorisation des situations didactiques (Brousseau, 1998). L'auteur fait remarquer la richesse de cette méthodologie dans les études didactiques réalisées à l'école primaire; elle ajoute également les difficultés qui commencent à apparaître à partir du développement de la recherche didactique aux niveaux du lycée et l'université. Elle relève quelques difficultés, qu'il nous semble important de résumer:

1- Le questionnement de l'existence de situations fondamentales, c'est à dire d'une situation caractéristique du savoir en jeu au sens où elle y est optimale.

2- Les contraintes liées à l'insuffisance des interactions avec le milieu : même dans le cas où une situation fondamentale semble exister, l'économie du travail universitaire n'est pas forcément compatible avec le type de rencontre a-didactique que l'on souhaiterait lui associer. Le chercheur doit organiser, dans le cadres des contraintes existantes, des médiations de l'enseignant de manière à ce que, dans la résolution du problème posé, la répartition des responsabilités entre enseignant et étudiants soit optimisée : on n'a plus affaire à une situation unique mais à une succession de situations, chaque médiation de l'enseignant se traduit par une évolution sinon du problème à résoudre, au moins du milieu a-didactique ou des interactions possibles avec ce milieu. Elle peut aussi modifier l'équilibre existant entre les processus d'adaptation a-didactique et didactique et oblige donc à repenser les interprétations des comportements observés. Ceci accroît la complexité des analyses a priori et pose, de façon sensiblement renouvelée, la question de la prise en compte de l'enseignant dans ces analyses.

3- Les difficultés de contrôle et de diffusion des produits d'ingénierie issus des recherches, une fois ceux-ci expérimentalement validés.

4- La viabilité des ingénieries didactiques : la recherche sur le rôle de l'enseignant a aidé les chercheurs à prendre conscience de la complexité du travail de l'enseignant, de la diversité et de la force des contraintes qui s'exercent sur ce travail, de la cohérence des pratiques observées chez les enseignants experts, mais aussi de la distance existant entre ces pratiques et les modes de prise d'information et de décision qui les sous-tendent d'une part, et les constructions proposées par les ingénieries didactiques d'autre part (Roditi, 2001, cité par Artigue). Le développement des ingénieries didactiques à des niveaux avancés d'enseignement conduit à une complexification de la modélisation des diverses interactions avec l'enseignant et avec le milieu, mais les ingénieries restent cependant des objets le plus souvent trop éloignées du quotidien des classes pour pouvoir s'y intégrer sans difficultés.

À notre avis, les remarques 1 et 2 effectuées par Artigue sont liées aux limites de la théorie de situations, limites qui ont certains impacts sur l'ingénierie didactique (puisque cette méthodologie naît au sein de cette théorisation), mais qui ne remettent pas en cause un principe fondamental de l'ingénierie didactique comme méthodologie de recherche, à savoir : la prise en compte de la complexité de la classe. L'évolution de la théorisation didactique impliquera une évolution de la notion de l'ingénierie, voire même une reformulation, mais ce ne signifie pas, comme le signale bien l'auteur, qu'il s'agisse d'une méthodologie dépassée.

Les points 3 et 4 nous semblent davantage liés à la question du rapport entre la recherche et l'action sur le système d'enseignement, ce qui questionne un de ses aspects, mais non l'ingénierie vue comme méthodologie de recherche. Il est possible de penser à des ingénieries dont les objets d'études sont théoriques et qui n'ont pas une intention d'agir sur le système d'enseignement. Un cas paradigmatique a été l'ingénierie « La couse à 20 », autour de laquelle plusieurs concepts de la théorie de situations sont nés (Brousseau, 1998). À notre avis, le rapport entre les contraintes institutionnelles et la recherche en didactique est complexe; le besoin de réalisations expérimentales dans des classes exige du chercheur la prise en compte de certaines contraintes mais, en même temps, une certaine vigilance pour que ces contraintes ne déterminent pas « toutes » les questions qui peuvent être formulées: la préservation d'un espace pour l'examen des contraintes institutionnelles – sur la base de fondements théoriques et empiriques - reste fondamentale pour la didactique, ce qui exige des conditions d'expérimentation « plus libres ».

Artigue (2002) lie la problématique de l'insuffisance des interactions avec le milieu à l'économie du travail universitaire. Comme nous l'avons montré au deuxième chapitre, un changement de pratiques - impliquant un changement de contrat- est soumis au même type de contraintes auxquelles Artigue fait référence. Ces limites avaient été déjà identifiées à l'intérieur même de la théorie de situations, par exemple dans la thèse de Fregona (1995) à propos des situations de formulation. Ce qui nous semble important est, par ailleurs, de caractériser ces limites en fonction de la spécificité des connaissances en jeu. Les difficultés relevées par Fregona ne sont pas de même nature que celles que nous avons identifiées par rapport à la validation. Dans chaque cas, les médiations pour l'optimisation des responsabilités entre enseignants et étudiants auront des caractéristiques particulières. Notre travail cherche à étudier quelles formes ces médiations peuvent prendre dans le cadre des changements de pratiques que nous voulons introduire dans les classes.

Nous nous intéresserons à l'ingénierie didactique, en la considérant comme une méthodologie nécessaire pour notre travail, lequel requiert des constructions didactiques impossibles à observer sans perturber sciemment le fonctionnement du système usuel. Selon les termes utilisés par Artigue (2002), nous envisageons une ingénierie dont la fonction première sera une fonction d'exploration et de diagnostic. Dans ce cadre, il faut repenser les rapports entre les analyses a priori et a posteriori, et analyser plus finement en quoi consiste la prise en compte de l'enseignant dans l'analyse a priori.

La complexité du travail du professeur, à laquelle Artigue fait référence (point 4), ne pose pas uniquement des problèmes au niveau de « la viabilité des ingénieries didactiques dans les classes », mais aussi dans le cadre d'une ingénierie dont les objectifs sont strictement théoriques. On ne peut pas penser que, dans le travail de collaboration entre chercheur et enseignant, il soit possible de tout prévoir (si on pense que le professeur n'est pas celui qui se contente de « jouer » une pièce écrite par d'autres). Les travaux de recherche sur les enseignants montrent qu'il y a toujours une série de décisions instantanées que le professeur devra prendre dans l'interaction, décisions impossible à prévoir. Plus encore, les difficultés liées à l'insuffisance des interactions avec le milieu (point 2), insuffisances reconnues dans plusieurs recherches, mettent le travail de l'enseignant au centre des préoccupations des didacticiens. Même si Artigue (2002) considère que l'enseignant a été un partenaire du chercheur dans la conception et l'expérimentation d'ingénieries didactiques, les recherches réalisées dans ce cadre ne montrent pas, en général, les caractéristiques du développement de ce processus de collaboration. S'agissait-t-il vraiment d'un processus de co-construction du milieu entre enseignant et chercheur? S'agissait-il plutôt d'un processus dans lequel l'enseignant était invité à apprendre ce qu'il devait faire en fonction des analyses réalisées par le chercheur, de manière à éviter la dénaturalisation de son projet de recherche?

Nous retendrions de l'ingénierie didactique, plus strictement, son volet « méthodologie d'investigation », sans nous préoccuper, pour le moment, des problèmes de reproductibilité ou de viabilité. Les situations élaborées seront le cadre de référence à l'intérieur duquel nous analyserons les processus de transformation et de production de connaissances numériques-algébriques. Nous cherchons à analyser le rapport entre les connaissances qui émergent dans les classes, les savoirs en question et les problématiques qui sont au centre des situations choisies. Mais le caractère exploratoire de notre travail exige que nous soyons attentif à des évènements qui sont au cœur des pratiques algébriques scolaires, mais qui ne sont pas nécessairement spécifiques de ces pratiques.

Dans ce contexte, l'analyse a priori des situations revêt deux fonctions élémentaires. Elle permet premièrement de préciser les conditions d'expérimentation, en encadrant les interactions élèves-milieu-enseignant autour des savoirs en question (relations entre un système de connaissances, un problème mathématique et des connaissances à produire), de manière à pouvoir définir des observables liés aux questions de recherche. Elle constitue également un outil privilégié pour communiquer avec le professeur responsable de l'expérimentation : identification des étapes dans lesquelles l'action du professeur sera fondamentale, des médiations possibles ou nécessaires de l'enseignant pour l'optimisation des responsabilités de chaque acteur; l'activité conjointe des élèves et du professeur pour l'établissement des conditions d'enseignement (Mercier,1998), dans le cadre des milieux spécifiques, constituera alors un observable. De la même manière que l'élève ne peut pas agir seulement en fonction du contrat didactique, le professeur ne peut pas agir seulement en fonction d'un contrat de recherche rigide qui ne lui permet pas de développer son activité. Le professeur doit rentrer dans la situation et la conduire en engageant ses connaissances : les attentes du chercheur devraient perturber le moins possible l'action didactique du professeur.

2. Description et analyse des situations initiales

Nous avons choisi intentionnellement deux situations qui nous permettent d'analyser le fonctionnement du numérique pour la construction de l'algébrique et le développement des connaissances pour leur validation, dans le cadre de problématiques caractéristiques des pratiques en question: l'explication d'une contradiction (situation 1), la validation de la généralité d'une propriété avec un domaine de validité infini et la validation d'écritures différentes pour la même expression algébrique (équivalence d'expressions - situation 2).

2.1 Description de la première situation

Nous présentons d'abord les diverses parties et tâches que comporte cette situation.

2.1.1 Diverses parties et tâches

• **Première partie**

Il s'agit d'un jeu auquel participent des équipes de 4 élèves au maximum. Chaque équipe doit choisir deux nombres naturels, le second étant plus petit que 3000, et faire les calculs suivants :

1) Faire le produit des nombres choisis
2) Ajouter 7 au premier nombre choisi et multiplier ce résultat par le second nombre choisi
3) Enlever au résultat obtenu en 2) le résultat obtenu en 1).

L'équipe gagnante sera celle qui obtient comme résultat final le nombre le plus grand.

Organisation de la classe

Les équipes disposent d'une période de temps pour choisir les deux nombres. Ce choix fait, elles doivent écrire les nombres sur un petit papier et donner ce papier au professeur, qui écrira les nombres de chaque équipe au tableau et entamera un débat pour décider du groupe gagnant.

- **Deuxième partie**

On propose aux différentes équipes de trouver et formuler une stratégie pour gagner à toutes les parties. On leur demande aussi de formuler les raisons qui permettent d'affirmer que la stratégie proposée sera toujours gagnante.

- **Troisième partie**

Au cours de la seconde partie, les élèves auront pu prendre acte de l'existence d'une infinité de solutions gagnantes. À la troisième partie, la question suivante leur est adressée : Comment expliquez-vous l'existence d'une infinité de solutions ? Comment pouvez-vous vous assurer qu'il n'y ait pas d'autres choix possibles de nombres pour gagner, que tout autre choix de nombres produira un résultat plus petit?

2.1.2. Analyse a priori

Notre analyse a priori tient compte des variables relatives à la contradiction et à la nécessité de la recherche de raisons, des connaissances des élèves et de leur évolution face à la contradiction, des variables relatives à la gestion du professeur.

2.1.2.1 Variables relatives à la contradiction et la nécessité de la recherche de raisons

L'exigence de choisir deux nombres, l'un de ces nombres parmi une infinité de nombres naturels, oblige à un choix qui peut s'appuyer:

D1-Sur des hypothèses construites à partir des observations relevées au cours de l'application de l'algorithme proposé à certaines valeurs particulières (identification de régularités, généralisation par induction).

D2- Sur des hypothèses construites à partir de l'analyse de la relation M-N=P. Dans ce problème, M représente (a+7) x b (a étant le premier nombre choisi et b le second nombre); N représente le produit a x b; P représente le résultat final. Une conception minimale de la relation commande le choix suivant : pour que la différence soit la plus grande possible, il faut que M soit le plus grand nombre possible (en supposant implicitement que N est fixé) ». Dans ce cas, a et b devraient être les plus grands nombres possibles (parce qu'il y a une multiplication).

Dans les deux cas, pour pouvoir dire qu'on fait de l'algèbre, le contrôle sur les connaissances produites ne devrait pas rester dans le plan pragmatique (Balacheff, 2001).

Nous formulons l'hypothèse que les contrôles sur les réponses produites dans l'action resteront sur le plan pragmatique. Le besoin de passer au plan intellectuel sera commandé par la contradiction au niveau des processus engagés pour obtenir le résultat, et non par une contradiction au niveau des résultats obtenus : sur la base d'hypothèses différentes sur les processus de production des résultats, les équipes obtiendront des résultats gagnants. Lever la contradiction ainsi générée impliquera la mise en œuvre de raisonnements algébriques. Il y aura une suspension du contexte initial du jeu (commandé par les contraintes du milieu) et l'entrée dans un espace syntaxique pour prendre l'algorithme en question comme objet d'étude : l'analyse et les transformations des écritures produites ont une finalité spécifique.

Les variables suivantes sont essentielles pour engendrer la contradiction et permettre aux élèves d'entrer dans un jeu intellectuel:

1: la limite imposée au choix du deuxième nombre pour garantir l'existence d'une valeur maximale. Puisque (a+7)xb - axb= 7b et que b est plus petit que 3 000, le résultat maximal sera 7x2999.

2 : l'indépendance du résultat final d'une des variables engagées pour l'obtenir, en considérant que dans les pratiques arithmétiques un résultat est en général dépendant de l'ensemble des données du problème.

3: L'existence d'une infinité de solutions au problème posé initialement. Nous faisons l'hypothèse que les élèves supposent implicitement l'unicité de la solution, supposition liée aussi aux caractéristiques des pratiques arithmétiques.

La résolution de la contradiction exigera une prise de conscience des relations qui portent sur le processus engagé dans l'obtention des solutions : ce processus, lié à l'algorithme proposé dans l'énoncé de la situation, devient objet de réflexion. Comme l'a déjà identifié Balacheff (1991), une contradiction au niveau des résultats n'engage pas nécessairement les élèves à questionner la méthode utilisée, mais à produire un nouveau résultat. Pour qu'un processus de validation progresse, les contradictions doivent provoquer un changement de l'objet d'étude : on n'étudie plus principalement la situation que l'on s'efforce de contrôler par une stratégie, mais on se centre plutôt sur la stratégie, en considérant sa véritable signification, c'est-à-dire, en étudiant la raison de son choix parmi d'autres actions possibles qui ont été rejetées (Ratsimba-Rajohn, 1992). Dans ce cas, la contradiction n'atteint pas les résultats, mais questionne la supposition d'unicité de la solution et donc, met en cause les processus sur lesquels on a fondé la dite supposition. L'indépendance du résultat d'un des nombres proposés et les raisons de ladite indépendance sont des facteurs relevant du déséquilibre. Dans ce contexte, le besoin de dépasser la contradiction conduit l'élève à rechercher « de nouvelles informations » lui permettant de rétablir l'équilibre. De telles informations ne peuvent être obtenues dans le contexte d'une explication basée sur l'empirisme naïf. La recherche d'une explication est donc un besoin qui émerge de la situation, et non seulement une question de contrat.

Les élèves, après la première partie, savent empiriquement que faire tous les calculs indiqués dans l'algorithme et faire 7x2999 produisent le même résultat. L'algorithme de production a la même dénotation que 7x2999, selon le sens attribué par Arzarello (1993). Résoudre la contradiction place les élèves face au problème syntaxique de montrer pourquoi ces deux expressions ont la même dénotation. La connaissance du résultat à résultat à atteindre (exprimer l'algorithme comme 7x2999) permettra aux élèves d'anticiper les transformations nécessaires à réaliser.

Ce changement de problème oblige les élèves à sortir des pratiques arithmétiques et à entrer dans un traitement algébrique du numérique (Chevallard, 1989); il leur permet aussi d'entrer implicitement dans la question syntaxique de l'équivalence des expressions.

Dépendante du contrat, l'explication attendue est difficilement généralisable, demeurant locale et ne disant rien à l'élève sur les normes de fonctionnement de la validation et de l'explication en mathématiques.

2.1.2.2. Les connaissances des élèves et leur évolution face à la contradiction

Pour que les élèves puissent effectuer des anticipations (existence d'un attendu sur lequel se produira la contradiction), il faut que leurs connaissances permettent un contrôle a priori de la situation dans laquelle ils se trouvent. Nous avons choisi de manière intentionnelle un domaine sur lequel les élèves ont travaillé pendant toute leur scolarité : les nombres naturels, les opérations sur ces nombres et leurs propriétés. Les connaissances sur les opérations sur les nombres naturels leur permettront de produire une stratégie de base: la stratégie minimale est celle qui consiste à choisir au hasard différentes paires de nombres naturels, à effectuer les calculs indiqués et à comparer les résultats obtenus. Comme nous avons déjà dit, cette stratégie évoluera rapidement, à mesure que les élèves avancent dans le jeu : les différents essais leur permettront de construire des hypothèses sur lesquelles appuyer leurs prochains choix.

À un niveau privé, deux éléments seront fondamentaux pour l'évolution des élèves:

- le rapport des élèves à la contradiction
- les interactions entre les élèves du groupe (compréhension ou non d'une explication déterminée, acceptation ou non du caractère explicatif)

La résolution de la contradiction va demander l'analyse des relations impliquées dans l'algorithme donné. Comme il s'agit de l'entrée en algèbre (les lettres ne sont pas encore disponibles pour représenter les relations impliquées), cette analyse va exiger:

- de garder traces des opérations faites sur les nombres choisis (nombres spécifiques)
- de lire des informations dans les écritures produites
- d'opérer sur ces écritures (en évitant de perdre la trace) pour produire de nouvelles informations, ce qui demandera des connaissances sur les opérations sur les nombres naturels et leurs propriétés, principalement sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Le dépassement de la contradiction va exiger un changement de pratique. Même en l'absence de lettres, le travail à faire avec les nombres n'est pas un travail arithmétique : on ne s'intéresse pas aux résultats des opérations, mais aux traces des opérations qui ont permis d'obtenir ces résultats. La production d'une explication exigera aussi la reconnaissance du caractère générique des relations identifiées : les exemples proposés devront prendre le statut d'exemples génériques.

Ces connaissances caractéristiques de pratiques algébriques sont des connaissances mises en jeu dans l'action dans cette situation. C'est dans le contexte de l'expression et de la manipulation de relations pour la production d'une explication que ces connaissances algébriques acquièrent une signification. La validation de ces connaissances caractéristiques des pratiques algébriques (outils des calculs intellectuels) dépend de leur efficacité dans la résolution de différents types de problèmes et non d'une « démonstration » dans le cadre d'un système axiomatique. D'où la nécessité d'inscrire le travail dans un «milieu horizontal», selon le sens donné à ce milieu par Perrin-Glorian (1999).

Ce changement de pratique va exiger de l'accompagnement de l'enseignant (nous décrirons postérieurement les instances possibles d'intervention, pendant l'analyse des variables relatives à la gestion du professeur). Son action sera un observable : l'analyse a posteriori nous permettra de la caractériser.

Les connaissances des opérations sur les naturels et leurs propriétés seront des critères de validité sur lesquels les élèves pourront construire et valider les explications produites. C'est dans la production de ces explications que des critères communs à la classe commencent à se construire, critères en rapport à ce qui sera considéré comme une explication acceptable. Mais l'élaboration de ces critères ne peut rester au niveau privé; il faut soumettre ces critères à la classe et à l'enseignant. En ce sens, cette situation ne comporte pas un milieu pour la validation, selon le sens attribué à un tel milieu par Margolinas (Margolinas, 1993). Les critères de validité, nécessaires en raison de l'inexistence d'un milieu matériel, sont en train de se construire. La décision de la validité du résultat produit dépend de connaissances algébriques spécifiques, mais aussi de certaines normes qui commencent à se construire.

On commence de cette manière à préciser, dans un contexte spécifique et de manière implicite, certaines caractéristiques de ce qui sera considéré une explication en algèbre : une explication met en évidence de manière explicite les relations engagées; ces relations se transforment en relations équivalentes pour expliciter d'autres informations (en fonction du problème en question); ces relations ne sont pas spécifiques des exemples utilisés, mais elles caractérisent le classe d'objets en question (caractère général). Ces critères fonctionnent à la fois comme éléments de contrôle et outils pour la recherche de l'explication. L'expression écrite des relations engagées devient un outil fondamental de la pensée, même sans la présence des lettres.

Dans cette première situation, pour « comprendre » ce qui se passe, l'écriture des relations engagées et la manipulation de ces écritures deviennent fondamentales. Même sans utiliser des lettres, on arrive à expliquer et à être compris par les autres lorsqu'on parvient à écrire et à transformer les relations en question: il s'agit de l'algèbre sur le numérique. La validation ne dépend pas du contexte de référence, elle est interne.

En fonction des connaissances des élèves (les nombres naturels, les opérations et leurs propriétés), nous anticipons au moins deux types de comportements :

C1 : ceux liés à l'impossibilité de dépasser la pratique arithmétique

C2 : ceux liées au changement de pratique

Les comportements C1 peuvent se manifester soit par l'explicitation de l'impossibilité de produire un raisonnement pour dépasser la contradiction, soit par l'utilisation de l'empirisme naïf comme moyen d'explication (vérification du résultat par la réalisation effective de calculs sur des exemples particuliers). Les comportements C2 sont caractérisés par l'identification de relations et la possibilité d'opérer sur ces relations, de réaliser des transformations, en articulant les données (l'algorithme) et la réponse déjà connue. Les différents niveaux de C2 seront marqués par la nature du langage utilisé : on pourra trouver ici des explications orales, l'exemple générique, la preuve intellectuelle.

Les catégories C1 et C2 nous permettent aussi de caractériser les niveaux de validation privés : empirisme naïf ou impossibilité de trouver une explication (C1), exemple générique-preuve intellectuelle ou démonstration (C2). En fonction des connaissances des élèves, les validations liées à C1 auront des statuts différents; la production de l'empirisme naïf ne signifie pas nécessairement une reconnaissance de sa puissance explicative : elle peut signifier l'impossibilité de produire un autre type d'explication. La reconnaissance explicite de cette impossibilité (à un niveau individuel ou pour des exigences à l'intérieur des groupes) marquera une évolution des niveaux de validation. La possibilité d'interaction des explications liées à des catégories C1 et C2 fonctionnera comme rétroaction pour déterminer le caractère explicatif d'un raisonnement.

2.1.2.3. Variables relatives à la gestion du professeur

Les variables relatives à la gestion de la situation par le professeur concernent le déroulement des phases privées et publiques.

- **Sur le déroulement des phases privées**

La situation permet de montrer l'insuffisance des pratiques arithmétiques pour arriver à la réponse et exige, du moins implicitement, une évolution vers des pratiques algébriques. Le rôle du professeur dans les phases de recherche dépendra de différentes issues :

1- l'impossibilité de dépasser les pratiques arithmétiques (injection de connaissances dans le milieu)

2- la production d'explications basées sur les opérations et leurs propriétés qui ne dépassent pas le niveau de l'oralité (injection de connaissances dans le milieu, intervention au niveau de l'écriture des relations engagées)

3- l'utilisation d'exemples génériques comme moyen pour exprimer et analyser les relations engagées dans l'algorithme à étudier (rétroaction, implicite ou explicite, sur le caractère explicatif de la validation pour le dépassement ou non de la contradiction)

Les interventions du professeur seront des observables. Nous avons l'intention de les analyser en fonction de l'effet qu'elles peuvent avoir sur le milieu des élèves; les interventions ne seront pas des objets d'analyse en soi, mais en rapport à leurs effets sur le milieu des élèves (Bloch, 1999).

- **Sur le déroulement des phases publiques**

Dans le débat public, le professeur se réserve toujours le droit d'intervenir. Même s'il peut y avoir des élèves qui arrivent à produire seuls un raisonnement algébrique comme moyen d'explication, dans cette étape, ces raisonnements apparaissent dans l'action et ne sont pas objet de réflexion. Ces élèves sont toutefois en interaction avec les élèves des autres groupes et avec l'enseignant; par le biais de ces interactions, ils pourront construire certaines des connaissances qui vont régler ce qui sera accepté ou non comme une explication dans la classe de mathématiques. Le professeur a des moyens pour s'appuyer sur certaines caractéristiques de la situation, en particulier sur la spécificité des connaissances en jeu, pour identifier les limites des explications produites par rapport :

1- au traitement de la généralité

2- à l'articulation de raisons fondées sur des savoirs (sur des connaissances déjà acceptées comme valides et institutionnalisées).

Le professeur agit comme représentant de la communauté des mathématiciens, mais il n'impose pas « des règles » du fonctionnement de la mathématique par le seul fait d'être dans la classe de mathématiques. Les « règles » élaborées doivent faire sens par rapport au problème spécifique en question.

Voici les variables didactiques dans cette étape :

- choix de l'ordre de présentation des productions (quels élèves, dans quel moment)
- choix des questions à travailler : par rapport au dépassement de la contradiction (opposition entre l'analyse exhaustive de chaque cas particulier et le traitement de la généralité par rapport à une proposition où le domaine de validité est infini); par rapport au caractère explicatif (identification des caractéristiques des explications, confrontation de différents types d'explications par rapport à l'objectif du problème)
- choix des interventions par rapport à la validation (nature des explications à accepter)
- choix des connaissances à expliciter et à institutionnaliser.

L'entrée dans une culture mathématique de la validation, en principe externe au sujet, va contraindre à renoncer à des constructions personnelles au profit de constructions culturelles. Ce renoncement fait partie de la négociation qui doit être menée dans l'espace didactique créé à cette fin. Il s'agit d'un processus d'adaptation sociale parce qu'il faut s'adapter à une exigence émanant d'une certaine culture (jouer le jeu établi).

Il ne s'agit pas d'institutionnaliser ces connaissances sur la validation à partir *d'une situation,* mais de construire un espace où ces connaissances peuvent commencer à fonctionner. Ce sera dans le cadre d'un projet plus vaste sur l'entrée dans la culture algébrique et la validation qu'il sera nécessaire d'étudier le problème de l'institutionnalisation de ce type de connaissances.

2.1.2.4. Le traitement de la certitude

La dernière étape comporte une partie privée et une partie publique. Nous formulons l'hypothèse qu'une fois les raisonnements algébriques présentés dans la classe (comme moyen d'explication), une confrontation entre ce type de raisonnements et les raisonnements employés par les élèves (dans les premières étapes) pour déterminer la vérité de la proposition (en général empiriques) permettra de mettre en évidence les limites des raisonnements empiriques par rapport à la question de la conviction et les avantages des raisonnements algébriques pour le traitement de la généralité (la certitude de l'absence de contre-exemples).

Notre analyse théorique montre les différents niveaux de connaissances présents dans une situation qui a pour finalité de mettre en place des conditions didactiques pour favoriser un changement de pratiques. Mais comme Panizza et Drouhard (2003) l'établissent, les connaissances de niveau II (liées à la validation, dans notre cas) requièrent un traitement dans le sein même de l'activité mathématique, à long terme et de manière transversale aux connaissances de niveau I. Pour les auteurs, les connaissances de niveau II ne s'enseignent pas « en les montrant », avec le caractère de recommandation ou de règles à respecter, à apprendre et à appliquer quand on fait mathématique. Notre situation est un premier pas dans la recherche de conditions pour le traitement de ce type de connaissances. Notre modèle établit des conditions pour la mise en action de certaines connaissances de niveau II. C'est dans l'interaction entre ces connaissances et les connaissances de niveau I que nous essayons de commencer à leur donner de sens.

2.2 Description de la version papier-crayon de la deuxième situation

Deux versions de la deuxième situation existent. Une première version papier-crayon a été mise à l'essai dans des classes en Argentine. Une seconde version informatique a été construite à la suite de l'analyse de cette première mise à l'essai et a été mise à l'essai dans des classes du Québec. Nous présentons d'abord la version papier-crayon.

2.2.1. Diverses parties et tâches

Première étape

Il s'agit d'un jeu pour lequel la classe s'organise en équipes de 3 ou 4 élèves.

Le professeur écrit 10 nombres naturels consécutifs au tableau et l'équipe gagnante est celle qui parvient à donner la somme de ces nombres.

Pour le premier jeu, le professeur propose:
19, 20, 21, 22, 23, 24,25,26,27,28.

Pour le second jeu, il propose :
783, 784, 785, 786,787,788,789,790,791,792

Dans cette partie du jeu, l'équipe qui a trouvé une réponse la propose à la classe et le professeur (qui connaît déjà le résultat) détermine si est correcte ou non. Après, le professeur invite la classe à vérifier la réponse (avec la calculatrice, si c'est nécessaire). Si la réponse est incorrecte, le jeu continue.

Dans cette étape, l'objectif est que les élèves comprennent les règles et qu'ils commencent à reconnaître les limites de certaines stratégies (les nombres choisis par le professeur sont, dans chaque nouveau jeu, plus grands) et donc le besoin d'en chercher d'autres.

Deuxième étape

On propose aux élèves un temps de réflexion avant de continuer le jeu. La consigne demeure la même. Les élèves devront penser à un moyen de trouver la réponse le plus vite possible, quels que soient les nombres proposés par le professeur.

Après ce temps, le jeu recommence avec des séries de nombres plus grands que dans la première étape, par exemple des séries commençant par 287563 ou 6432987, etc.

Troisième étape

On demande aux élèves d'écrire la méthode trouvée sous la forme d'une formule et de chercher les raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la formule trouvée fonctionne pour toutes séries de 10 nombres naturels consécutifs. Un bilan des formules est réalisé et chaque équipe est invitée à présenter le résultat de son travail.

L'enseignant spécifie que la formule à produire doit servir pour n'importe quelle série de 10 nombres naturels consécutifs et qu'elle devra permettre d'obtenir la somme des 10 nombres sans qu'il soit nécessaire de faire toutes les additions. L'enseignant devra possiblement expliciter ce qui va être considéré comme « une formule ».

2.2.2. Analyse à priori

L'activité de production de formules, comme nous l'avons déjà vu, est une des entrées possibles en algèbre; elle demande aux élèves de se centrer sur les relations engagées entre les données, dans notre cas, les séquences de dix nombres consécutifs, puis de généraliser l'invariance des relations identifiées. Dernièrement, cette entrée en algèbre a été exploitée par les auteurs de manuels scolaires, mais la question de la validation de la formule produite n'a pas été abordée: il n'y a pas de distinction explicite entre modes de production et modes de validation.

La situation que nous avons construit s'appuie sur la situation des « carreaux hachurés » (Combier, Guillaume et Pressiat, 1996)[1], mais elle s'en distingue fondamentalement par la validation. Dans la situation des carreaux hachurés, les formules produites sont validées dans le cadre du contexte : si les élèves produisent différentes formules, c'est la façon de calculer qui permettra de valider chacune de ces formules et puis, d'établir leur équivalence. Il n'y a pas un travail explicite dans un plan syntaxique, pour montrer l'équivalence à partir des transformations des expressions produites. Notre situation porte une attention particulière à la mise en place d'un tel travail.

Nous avons choisi intentionnellement de partir d'un contexte numérique (et non géométrique, comme dans la situation des carrés hachurés) pour nous centrer sur la dialectique numérique-algébrique. L'élaboration du sens du travail syntaxique prend lieu dans le cadre de cette dialectique. L'activité qui commandera la suspension du contexte initial et l'entrée dans le monde syntaxique ne sera pas la résolution d'une contradiction comme dans la première situation, mais :

- l'exigence de validation de la généralité de la formule trouvée (le travail sur la distinction entre modes de production et modes de validation d'une propriété dont le domaine de validité est infini)
- la confrontation de formules qui « semblent différentes » -ou qui sont différentes pour les élèves- mais qui sont des écritures différentes du même objet mathématique. Chacune de ces formules peut être validée en fonction du contexte, mais le fait qu'elles permettent toutes de calculer la somme des nombres proposés, quelle que soit ladite somme, conférera un sens à la question de l'équivalence syntaxique. La question de l'analyse de deux expressions équivalentes, vues par les élèves comme différentes dans

---

[1] Le problème consiste à établir une formule qui permette de calculer le nombre de carrés hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.
(dessin)

certains contextes (comme l'avait remarqué Radford) sera, donc, un objet spécifique de réflexion.

2.2.2.1. Variables liées à la production des méthodes de calcul et des stratégies possibles

La première partie du jeu a comme objectif de familiariser les élèves avec ses règles et, à partir de l'interaction avec les différentes équipes, de faire entrer dans le milieu implicitement une connaissance fondamentale pour commander la deuxième étape : il y a des méthodes plus efficaces que celle de faire tous les calculs. En effet, l'envie de gagner au jeu, le fait que certains groupes donnent le résultat plus rapidement que d'autres, et le changement de la taille des nombres, commanderont l'évolution des stratégies de ceux qui n'ont pas réussi.

Dans la deuxième étape, les élèves auront un temps pour la recherche de stratégies plus raffinées. Le milieu se verra maintenant enrichi par les jeux déjà faits, c'est à dire par les connaissances élaborées dans la première partie. Il s'agit maintenant de chercher une stratégie qui permet de gagner le plus vite possible.

Nous grouperons les stratégies possibles de la première partie dans trois catégories :

P1: les stratégies liées au calcul mental, par exemple, choisir en fonction des derniers chiffres les nombres qui donnent 10 (par exemple dans la première partie, additionner 19 avec 21, 22 avec 28, etc.) ou utiliser la multiplication pour calculer la somme des chiffres qui se répètent (par exemple, dans la deuxième partie, 7x10, 8x7, 9x3,..), etc.

P2: les stratégies liées à la recherche de régularités basées sur des raisonnements inductifs.

P3: les stratégies liées à la recherche de régularités basées sur des raisonnements déductifs.

L'évolution de P1 à P2 ou P3 pose des limites à des traitements arithmétiques et exige le passage à des pratiques algébriques : identification de relations sur le numérique, travail sur ces relations pour l'élaboration de stratégies plus économiques. La validation des stratégies produites reste dans le plan empirique et, dans cette étape, à un niveau implicite: c'est l'efficacité de la stratégie pour gagner ou non au jeu qui détermine sa validité. Il y a un milieu pour la validation empirique. Quels sont les scénarios possibles?

E1.1 : Production dans la classe de stratégies du type P1.

Dans ce cas, l'équipe gagnante sera celle qui dispose de la manière la plus rapide de calculer. Pour faire évoluer ce type de stratégies, l'enseignant pourra répéter le jeu en considérant des séquences de nombres naturels, mais ceci ne garantit qu'un raffinement des stratégies de calcul mental. Il sera nécessaire d'avancer jusqu'à l'étape 3 pour pouvoir justifier théoriquement, en termes de contraintes, les limites de ces stratégies et le besoin d'autres stratégies; l'écart entre les connaissances produites et les connaissances nécessaires pour réussir dans la troisième étape sera trop grand.

Dans ce contexte et avant d'entrer dans l'étape 2, l'enseignant pourra ajouter certaines modifications, par exemple, proposer de jouer contre lui pour mettre en évidence la limite des procédures élaborées par les élèves; de cette manière, il ajoutera dans le milieu une connaissance fondamentale pour la prochaine étape : il y a des stratégies plus économiques.

E1.2: Production dans la classe des stratégies du type P1 et P2, P1 et P3 , P2 et P 3 o P1,P2 et P3.

Ceux qui produisent des procédures de types P2 et P3, gagneront plus vite que ceux qui emploient des procédures de type P1. Ces derniers reconnaîtront les limites de leurs stratégies et devront en chercher d'autres. Il est important de rappeler que dans cette étape, les stratégies ne seront pas explicitées, elles sont mises en oeuvre dans chaque jeu. Le fait de ne pas les expliciter permet à ceux qui sont dans le cadre de P1 de disposer de temps pour continuer la recherche. Pourtant, la rétroaction du milieu, tant dans le cas E.1.1 que dans le cas E1.2, est en termes de « gagner » ou « perdre » : l'information provenant du milieu est « faible » par rapport à l'élaboration de nouvelles stratégies. L'évolution de P1 à P2 ou P3 n'est pas évidente. L'enseignant devra injecter des connaissances dans le milieu pour que la deuxième étape puisse faire sens pour ceux qui ne peuvent pas dépasser P1 et, puis, pour réduire l'écart avec la troisième étape.

2.2.2.2. L'exigence de production d'une formule et la validation

Dans la première partie de la troisième étape, il faut écrire les méthodes trouvées sous la forme d'une formule. Nous analyserons des évolutions possibles en fonction des connaissances élaborées dans les étapes 1 et 2.

<u>E.2.1. Évolution des connaissances des groupes qui ont produit des stratégies de type P1.</u>

L'évolution de ces groupes dépendra des connaissances injectées par l'enseignant dans les étapes antérieures. La demande d'écrire une formule va exiger, à ceux qui sont restés dans le cadre de P1, un changement de pratiques: les stratégies de calcul mental engagent, généralement, la recherche de régularités à travers la décomposition des nombres données, dont les caractéristiques varieront selon la particularité de la série considérée, ce qui provoque des difficultés de généralisation. La recherche d'autres types de relations devient nécessaire et le travail sur des écritures peut être un moyen pour aider les élèves à s'engager dans une telle recherche et non simplement comme un moyen d'expression d'une régularité déjà identifiée. L'identification de certaines relations communes à toutes les séquences de nombres de 10 consécutifs rendra possible l'évolution:

- chaque nombre de la série peut s'exprimer, par exemple, comme le nombre précédant plus 1

- la somme du premier nombre et du dixième, du deuxième et du neuvième, etc. est constante.
- Etc.

C'est donc la recherche de régularités qui ne dépend pas des caractéristiques particulières de la série de nombres considérée, qui va permettre aux élèves d'entrer dans la problématique posée dans cette étape. La question de la recherche d'une formule n'est pas un problème de « traduction » d'un langage à un autre : ceci supposerait une conception du langage formel restreinte à sa fonction désignative (le signe serait ici vu comme un moyen de communication, vêtement des idées considérées comme le résultat de processus internes du cerveau, (Radford, 1999)) et non comme un vrai outil de calcul intellectuel.

Les différentes étapes de la situation exigent des élèves qu'ils développent des pratiques algébriques (possiblement de différentes natures, selon les contraintes dans chaque étape). Ce changement de pratiques par rapport à l'histoire des élèves ne va pas de soit et requerra des interventions de l'enseignant.

Nous analyserons la nature de ces interventions en essayant d'identifier celles qui permettront aux élèves de continuer dans des phases a-didactiques. Comme Bloch (1999, pp. 138) le propose:

« ...le milieu s'est trouvé enrichi par les apports des élèves et les réactions du professeur. Ce que l'on observe alors, c'est bien une interaction, une activité mathématique conjointe de l'élève et du professeur: autrement dit, l'activité mathématique de l'élève et celle du professeur doivent être étudiées ensemble si l'on veut comprendre le fonctionnement de la situation. Dans la mesure où le milieu de la situation n'assure pas de façon suffisamment a-didactique la production de connaissances, nous nous tournons vers l'activité du professeur et les connaissances qu'il met en oeuvre, pour comprendre le fonctionnement de la situation pour l'élève ».

Analyser l'activité du professeur est toujours importante même lorsque la situation « assure » un fonctionnement a-didactique: le modèle théorique qui permet de garantir l'adidacticité ne peut être actualisé dans la réalisation effective de n'importe quelle situation réelle. Dans ce sens, l'activité effective d'un professeur est toujours importante.

Nous sommes intéressé à analyser cette activité du point de vue:

- des possibilités de gérer les relations effectives avec le milieu
- des possibilités de maintenir ou de redéfinir les phases a-didactiques

E.2.2 Évolution de connaissances des groupes qui on produit des stratégies du type P2 et P3.

La demande de production de formules va exiger un changement fondamental de pratique: « une stratégie composée de différentes étapes peut être représentée par une seule expression » ou « il est possible d'écrire différentes étapes d'une stratégie par un seule expression composée de calculs différents ». En arithmétique, les chaînes de nombres et d'opérations ne sont pas considérées comme des objets, mais comme des procédures pour produire une réponse. Dans les pratiques algébriques, les symboles écrits font sens, indépendamment des procédures qu'ils représentent dans la résolution de problèmes. L'algèbre s'oppose à l'arithmétique dans laquelle une loi de simplification s'impose pour finir les calculs (Chevallard, 1989).

Même dans les cas P2 et P3 où les élèves ont déjà trouvé une certaine régularité généralisable et indépendante de la particularité des nombres qui composent la série, la question d'écrire une formule pour représenter la méthode de calcul n'est pas un problème de « traduction » d'un langage à un autre. L'identification de la régularité est une condition nécessaire, mais elle n'est pas suffisante : il faudra exprimer la régularité trouvée en fonction des données du problème; ces relations ne sont pas nécessairement explicites dans les régularités identifiées (moins encore dans le cas de P2).

Les élèves auront besoin de travailler sur des écritures, possiblement sur des expressions numériques : les exemples génériques pourront être un moyen pour arriver à des écritures plus formelles, c'est à dire, un point d'articulation entre deux systèmes sémiotiques différents. Nous avons déjà rappelé, au chapitre précédent, la remarque faite par Radford par rapport à l'écriture du terme général d'un pattern, à savoir que ce terme n'est pas exprimable dans le même système sémiotique dans lequel s'exprime la suite. Nous pensons qu'un traitement algébrique du numérique (en étant un exemple générique, un moyen pour le dit traitement) peut permettre aux élèves de lier les systèmes sémiotiques en question, au moins dans notre situation spécifique. Dans ce traitement algébrique du numérique, les écritures sont plus que moyens de désignation : elles sont des outils de calcul intellectuel. Dans ce changement de pratiques, l'enseignant aura un rôle fondamental.

Dans la deuxième partie de l'étape 3, on demande aux élèves de discuter et de confronter les raisons qui justifient la validité et la généralité de chaque formule. Nous formulons l'hypothèse que ces raisons se différencieront selon les raisonnements utilisés dans les étapes de recherche de la formule. L'efficacité d'une formule, le fait de « fonctionner » pour certaines séquences particulières (empirisme naïf), peut être un moyen de validation suffisante pour des élèves. Nous supposons que ceux qui ont évolué de P1 à P2, de même que ceux qui ont utilisé des procédures P2 dans l'étape de production des formules, vont faire usage de l'empirisme naïf comme moyen d'explication. En revanche, ceux qui ont utilisé des procédures P3 seront dans de meilleures conditions pour produire de preuves intellectuelles.

Ce sera la confrontation de différents types de preuves produites, par rapport à ce qui sera considéré « explicatif » dans la classe, qui permettra de remettre en question l'empirisme naïf et de poser la question de l'évolution vers des preuves intellectuelles. La question de la validation, par rapport à la généralité, sera aussi une conséquence de la confrontation de différents types de preuves, dès que les preuves intellectuelles aient pu « entrer » dans les classes comme moyen d'explication.

La rétroaction, à un niveau privé, relative à ce qui sera considéré explicatif ou non, peut être commandée par des exigences à l'intérieur des groupes; mais c'est sur le débat public que nous appuierons explicitement pour faire évoluer le type de validations. Comme nous l'avons déjà explicité dans la première situation, la confrontation entre les raisonnements du point de vue de leur caractère explicatif ne met pas nécessairement en question la problématique de la certitude acquise dans le cadre de validations empiriques. L'enseignant pourra commencer à travailler les différences entre les modes de production et les modes de validation, mais le seul discours ne sera pas suffisant. Comme nous l'avons exprimé au chapitre 2, la construction d'un doute « intellectuel » requiert un jeu dialectique entre exemples et contre-exemples, entre des raisonnements valides et des raisonnements invalides, etc, ce qui n'est pas évident à l'école secondaire.

Chacune des formules produites peut être validée et expliquée en fonction du contexte particulier d'obtention. La variété de formules (produites par les élèves ou proposées par l'enseignant) sera une occasion pour poser la question de l'équivalence syntaxique; même si chaque expression montre un ensemble d'actions différentes, toutes les expressions ont une fonctionnalité commune: chacune d'elles donne la somme de 10 nombres consécutifs. Nous formulons l'hypothèse que cette fonctionnalité commune permettra de définir la notion d'expressions algébriques équivalentes et de poser le problème de l'équivalence à un niveau syntaxique. L'équivalence des expressions, obtenue par des moyens syntaxiques, permettra de valider des formules sans qu'il soit nécessaire de faire appel à leur contexte d'obtention. L'économie de ce processus conférera un sens au travail à un niveau syntaxique, puis à une suspension du contexte initial.

2 3.Description de la version informatique de la deuxième situation

Les pré-expérimentations des situations précédentes réalisées en Argentine nous ont permis de confirmer certaines potentialités de ces situations; elles nous ont aussi aidé à identifier certaines difficultés. Nous avons pu aussi mieux comprendre la complexité du travail de l'enseignant. Ce travail nous a conduit, finalement, à reformuler la deuxième situation; pour cela, nous avons construit un environnement informatique. Cette reformulation a été commandée par :

- la nécessité d'optimiser les rétroactions du milieu (les temps de rétroaction, les types d'information à injecter)
- la possibilité de généralisation de la situation (puis, l'élaboration d'une stratégie pour aborder une famille de problèmes).
- l'élaboration d'un environnement plus ouvert (que celui de la situation initiale) qui donne un espace plus large aux décisions du professeur et encadre les interactions professeur-chercheur dans le processus de co-construction du milieu.

2.3.1. Description du jeu des suites

Ce jeu est présenté sur le site du GRICEA suivant : www.gricea.umontreal.ca/didactic/suites. Il prend appui sur la situation 2 déjà analysée. Les élèves verront défiler à l'écran, du haut jusqu'en bas, une suite de nombres consécutifs. Ils devront inscrire la somme de ces nombres le plus rapidement possible, avant que la suite ne parvienne au bas de l'écran. S'ils réussissent, le bloc qui porte la série disparaît; dans le cas contraire, le réponse correcte est donnée et le bloc reste dans la partie inférieure de l'écran, ce qui réduit le temps pour les séries suivantes. Les élèves peuvent disposer d'une calculatrice pour réaliser les calculs qu'ils jugent nécessaires.

Dans la première partie du jeu, on joue avec des séries de 10 nombres naturels consécutifs. Chacune des séries, ainsi que le temps requis pour parvenir au bas de l'écran, sont des paramètres que le professeur peut définir. Voici la page qui est réservée au professeur et qui lui permet de définir les paramètres :

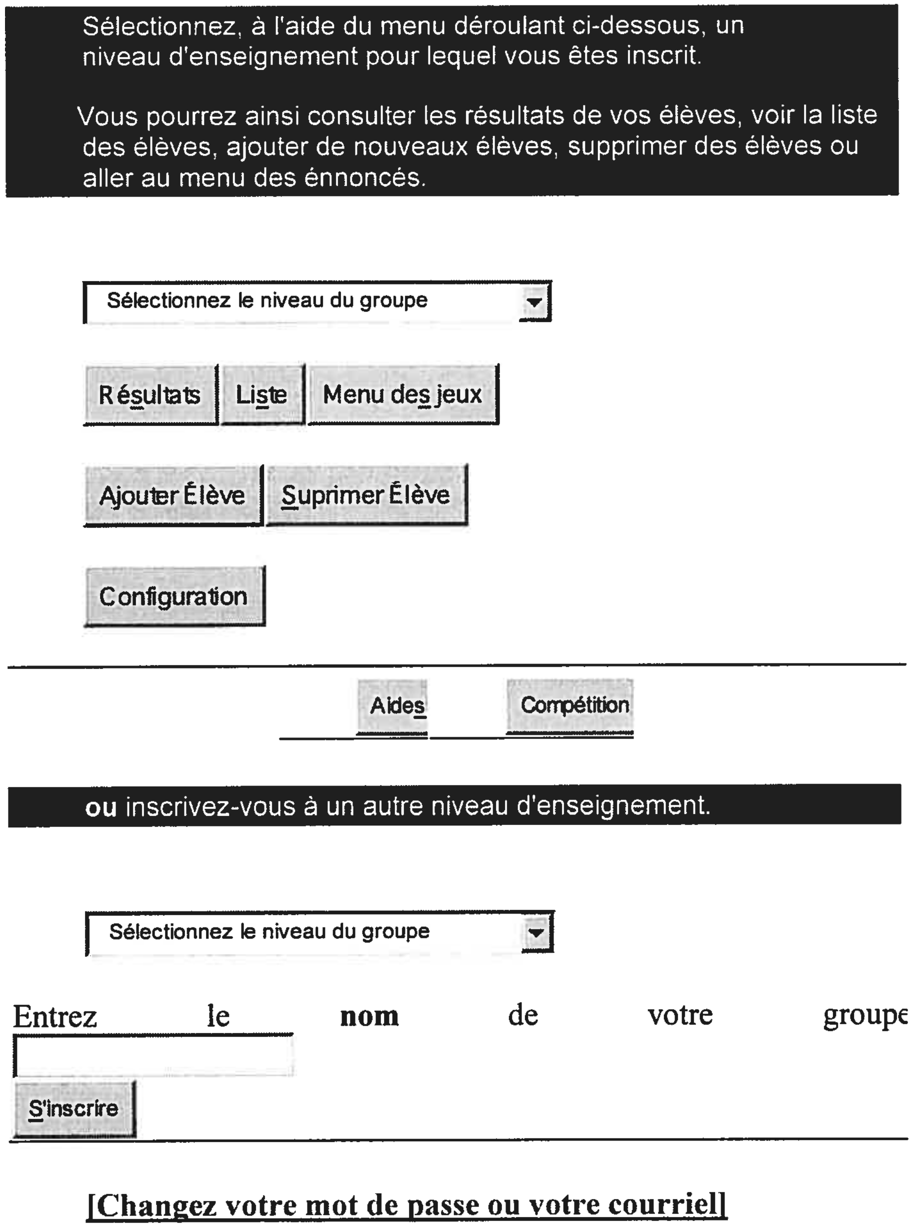


Figure 1

Menu de jeux

En ouvrant la section « menu de jeux » l'enseignant rencontrera l'écran suivant :

Ajoutez un nouveau tableau

PROBLÈMES ENREGISTRÉS * Niveau 1 *	ACTION
Aucun énoncé enregistré pour le niveau 1	

PROBLÈMES ENREGISTRÉS * Niveau 2 *	ACTION
Aucun énoncé enregistré pour le niveau 2	

PROBLÈMES ENREGISTRÉS * Niveau 3 *	ACTION
Aucun énoncé enregistré pour le niveau 3	

Figure 2

Pour chacun des tableaux, l'enseignant devra entrer les séries correspondantes. Dans le premier tableau, il est obligatoire d'introduire des séries de 10 nombres consécutifs; dans les tableaux suivants, la quantité de nombres que comportent les séries peut être choisie par l'enseignant. En ouvrant la fenêtre « Ajoutez une nouvelle série » on retrouve :

Enregistrement d'une suite

Nombre de termes:	
Premier terme:	
Croissant:	Oui
Consécutif/pair/impai	consécutif
Niveau:	1

Enregistrer

FIGURE 3

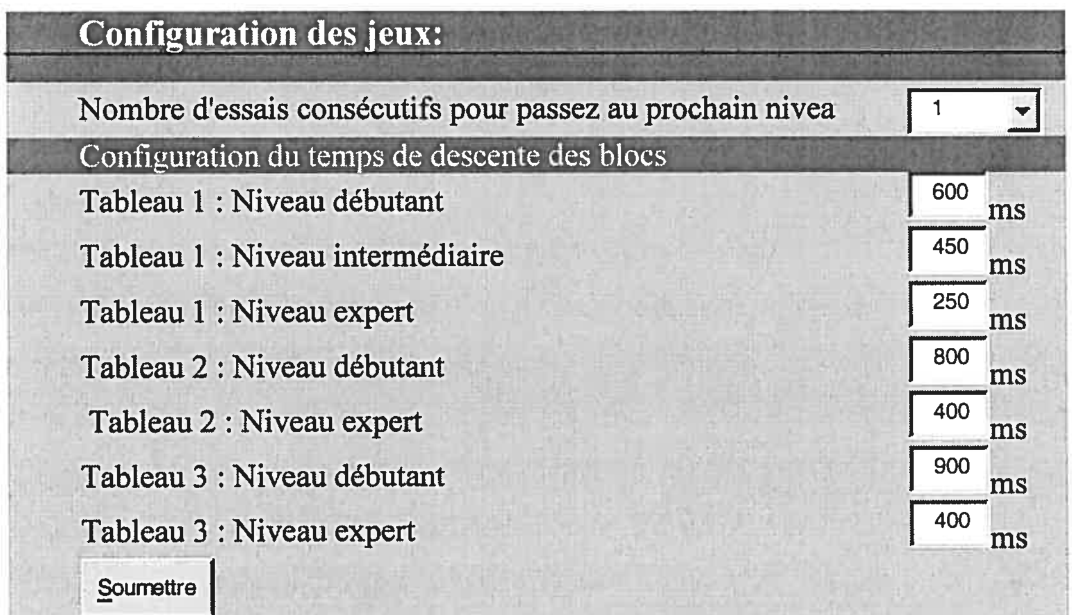
Ajouter ou supprimer élèves/ Liste

L'option *ajouter élèves* permet à l'enseignant d'introduire les noms des élèves ou des équipes, en assignant à chacun un nom d'usager et un mot de pas. L'option *supprimer élèves* a la fonction contraire. Dans l'option liste, on retrouve tous les élèves incorporés.

L'option « résultats » permet à l'enseignant d'avoir accès à tous les essais de chacun des élèves.

Configuration

À l'intérieur du premier tableau, il y a trois niveaux de difficulté (débutant, intermédiaire et expert). Pour passer d'un niveau à un autre, il faut que l'élève réussisse à trouver un certain nombre de réponses justes et produites consécutivement; le nombre d'essais consécutifs corrects et le temps de descente des blocs (contenant les séries) sont aussi des variables que l'enseignant pourra déterminer. Le degré de difficulté pour chaque niveau pourra dépendre, soit de la taille des nombres choisis, soit du temps de descente des blocs. Voilà la fenêtre qui apparaît lorsque le professeur entre dans une « configuration » (figure 1) :



Base de données

Figure 4

Les blocs accumulés à l'écran, à chaque niveau, s'effacent lorsqu'on change de niveau. La quantité de séries introduites par l'enseignant dans chaque tableau est limitée; le rapport entre cette quantité et les échecs possibles des élèves pourrait nous conduire à un manque de séries pour continuer le jeu. Pour éviter ce problème, nous avons créé une base de données (figure 4), de manière à ce que lorsque toutes les séries introduites par le données (figure 4), de manière à ce que lorsque toutes les séries introduites par le professeur ont été utilisées, cette base s'active en produisant des séries aléatoires avec la quantité de nombres consécutifs correspondants.

Aides

Deux options d'activation de ce système sont envisagées : a) activation sous le contrôle de l'élève, au moment qu'il le juge opportun; b) activation sous le contrôle du professeur : au bas de l'écran du jeu de l'élève, un bouton « prof » est inscrit et, lorsque le professeur le juge à propos, il entre un mot de passe qui permet alors à l'élève d'accéder au système d'aides.

Compétition

Le jeu comporte aussi une option « compétition » (figure 1). Cela donne aux enseignants la possibilité d'organiser une compétition dans la classe: tous les élèves joueront, en même temps, et avec les mêmes séries. À l'écran de chacun des élèves, on pourra voir l'état du jeu des autres participants. La possibilité de faire une compétition entre différents groupes est une variable additionnelle qui pourrait permettre d'injecter de connaissances sur le milieu : s'il y a des groupes qui gagnent, cela informe les autres groupes qu'il y a des stratégies rapides pour trouver la réponse. La compétition est un défi pour trouver lesdites stratégies. Il s'agit d'une option qui pourrait être utilisée avant d'aller vers le système d'aides, mais elle serait liée aux décisions de l'enseignant.

Développement du jeu

Si l'élève réussit aux trois niveaux du Tableau 1 (séries de 10 nombres consécutifs), il passe automatiquement au Tableau 2. À l'intérieur de ce tableau, le passage d'un niveau à l'autre est similaire à celui du Tableau 1; à la fin du Tableau 2, le jeu exige l'écriture d'une formule pour la somme de nombres consécutifs impliqués dans les séries.

Du coté des élèves, qu'ils aient ou non réussi à trouver la somme d'une série, ils peuvent décider du moment de continuer le jeu, de manière à avoir du temps pour réfléchir. De plus, les élèves peuvent consulter chacun de leurs essais à tout moment. Les élèves pourront aussi compter sur le système d'aides conçu par le professeur dont nous avons déjà parlé.

2.3.2.Organisation de la situation autour du jeu

L'organisation du jeu dans cette situation tient compte des transformations du dispositif de la situation initiale correspondante. Nous en présentons les grandes lignes.

2.3.2.1 Situation 2' : description

Première étape

Des équipes comportant 2 ou 3 élèves effectuent les tâches présentées sur les tableaux 1 et 2 et les tâches additionnelles.

Si l'enseignant le juge nécessaire, l'option *« compétition »* pourra être utilisée.

Deuxième partie

Dans cette partie de la situation, il s'agit de faire un bilan des résultats, d'effectuer une comparaison de formules. L'enseignant demandera aux élèves de produire l'écriture d'une formule pour trouver la somme des séries du tableau 1.

Troisième partie

Au cours de la troisième partie, il sera demandé aux élèves de chercher les raisons qui permettent d'expliquer pourquoi les formules trouvées fonctionnent pour toutes séries de nombres naturels consécutifs considérés précédemment. Un bilan des explications sur toutes les tâches réalisées sera réalisé et chaque équipe sera invitée à présenter le résultat de son travail.

2.3.2.2.Les différences avec la situation 2

La situation 2' introduit, par rapport à la situation 2 présentée initialement, la généralisation du jeu et la problématique de l'équivalence de formules. De fait, le deuxième niveau du jeu incorpore des séries de 8 nombres consécutifs et, postérieurement au troisième niveau, des séries de différentes quantités de nombres consécutifs. En particulier, à la septième étape, nous proposons une discussion autour de formules équivalentes à celles déjà trouvées dans les étapes précédentes.

Nous avons choisi deux types de formulations. La première contient la trace d'un calcul qui pourrait avoir été exprimé avec un seul nombre : il s'agit d'une variable didactique qui pourrait permettre aux élèves d'évoquer les stratégies engagées dans l'obtention de la formule déjà trouvée; dans ce cas, on attend une validation qui, tout en étant intellectuelle, contiendrait la trace des raisonnements impliqués dans les étapes de production de la formule. La deuxième formule proposée ne garde aucune trace de son processus de production; plus encore, elle a été construite par des manipulations des écritures, en produisant des expressions syntaxiquement (et non sémantiquement) équivalentes. L'objectif recherché est de provoquer une rupture par rapport aux validations contextuelles, de manière à faire entrer les élèves dans un problème purement syntaxique : pour justifier la validité de la formule (et une explication du *pourquoi la formule est valide* pour n'importe quelle série de 10 consécutifs), il faudra montrer qu'elle est équivalente à 10n+45, à travers la réalisation de transformations syntaxiques.

3. Descriptions des échantillons expérimentaux

Les expérimentations des situations ont été réalisées dans deux classes d'Argentine et dans deux classes du Québec[2]. Les expérimentations qui ont été effectuées au Québec ont pris appui sur les mises à l'épreuve des situations 1 et 2 que nous avons réalisées en Argentine. Seulement une partie des données des expérimentations de la première situation dans une des classes d'Argentine a été publiée (Barallobres, 2004). La réunion de ces données et de celles qui résultent des expérimentations effectuées au Québec est un atout

[2] . Nous tenons à remercier les élèves et les professeurs de l'Argentine et du Québec qui ont participé à ces expérimentations.

précieux dans l'étude des questions de notre recherche, ainsi que dans l'interprétation des résultats de notre recherche en regard des objectifs généraux et spécifiques poursuivis.

3.1.Les expérimentations réalisées en Argentine

Les situations 1 et 2 (version papier-crayon) ont été expérimentées en Argentine, dans deux classes différentes, correspondant à la 1^{e} année de l'enseignement secondaire au Québec. Dans les programmes de 7ème année (programme équivalent à ceux de la première année de l'enseignement secondaire au Québec), l'algèbre n'est pas un contenu à enseigner. Pourtant, il existe une pratique sociale bien installée dans les classes et qui consiste à initier les élèves au travail avec les équations pour « les préparer » à l'entrée au secondaire (les pratiques algébriques sont ainsi associées à la résolution d'équations). Les deux classes observées sont une exception, par rapport à ce type de pratiques (possiblement, parce que les deux professeurs impliqués sont liés aux équipes de recherches). Dans ce sens, les élèves n'ont pas réalisé, explicitement, un travail algébrique avant la présentation des situations.

Les expérimentations dans ces classes (classe A1 et classe A2) ont été réalisées pendant l'année 2001; ces classes se retrouvent dans deux institutions privées d'enseignement. Les enseignants qui ont participé à ces expérimentations sont des enseignants qui travaillent d'habitude avec des chercheurs et avec qui nous partageons, en général, des conceptions de l'enseignement et de l'apprentissage et des conceptions sur les pratiques algébriques à développer.

Pendant la première rencontre (d'une durée d'environ 1h30) avec les enseignants, nous leur avons présenté les consignes de chacune des situations et les grandes lignes de l'analyse a priori (nous n'avons pas présenté l'analyse détaillée avec les développements possibles des situations). Nous avons demandé aux enseignants d'imaginer le fonctionnement de la situation, en fonction des connaissances qu'ils avaient des élèves et des fonctionnements des classes. Deux semaines plus tard, nous avons eu une deuxième rencontre (également d'une durée d'environ 1h30) avec chacun des enseignants pour analyser les situations et leurs propositions. Les enseignants nous ont fait part de leurs doutes et ont formulé des questions liées aux développements possibles des situations. Après ces rencontres, les diverses situations ont été réalisées dans chacune des classes.

Dans les deux premières classes (A1 et A2), deux observateurs ont enregistré le travail de deux groupes d'élèves (enregistrement audio). Le choix des groupes a été fait en fonction de la diversité des niveaux identifiés par le professeur titulaire (élèves plus faibles, élèves moyens/forts). Un troisième observateur (l'auteur de cette thèse) circulait parmi les différentes équipes en enregistrant des moments qu'il trouvait importants, ainsi que les échanges lors des bilans et débats collectifs. Les productions écrites de tous les groupes (qui, selon la consigne donnée par les professeurs, ont utilisé leur cahier habituel de travail pour effectuer les tâches que comportaient ces situations) ont été photocopiées.

La classe A1 était formée de 25 élèves et la classe A2, de 19 élèves. Voilà le temps consacré à chacune des situations :

	Classe A1	Classe A2
Situation 1	Deux périodes de 80 minutes chacun	Une période de 80 minutes et une partie d'une autre période (50 minutes)
Situation 2	Un période de 80 minutes et une période de 40 minutes	Une période de 80 minutes et une période de 40 minutes

Notons enfin que les élèves qui ont participé à ce projet provenaient de différents milieux socio-économiques; il s'agissait de milieux socio-économiques moyennement favorisés ou très favorisés.

3.2.Les expérimentations réalisées au Québec

Nous avons travaillé au Québec avec deux classes de la 2^{e} secondaire d'une école publique qui offre, en plus de l'enseignement usuel des différentes disciplines scolaires, un classe Q2, on retrouve un nombre important d'élèves inscrits au programme de formation musicale; les résultats scolaires de ces élèves sont généralement fort satisfaisants, ces élèves devant obtenir de bons résultats scolaires pour bénéficier de ce programme.

La complexité de la gestion de situations auxquelles les professeurs des classes n'étaient pas habitués nous a conduit (en accord avec les professeurs titulaires) à prendre la décision de piloter nous-mêmes les situations. Cette décision entraîne certaines conséquences: chercheur et élèves ne partagent pas une histoire commune; le contrat de recherche est un contrat didactique local, provisoire et fragile, ce qui rend plus complexe le processus de dévolution.

Pour la première situation, trois magnétophones ont été placés dans trois groupes choisis par les professeurs titulaires, selon les mêmes critères que ceux qui ont été suivis en Argentine, de manière à pourvoir avoir accès au travail privé des équipes. Un observateur (la directrice de recherche) disposait d'un autre magnétophone, afin d'enregistrer certains événements importants, ainsi que les échanges lors des bilans et des discussions collectives. La première partie de la deuxième situation (situation informatisée : modification de la situation 2 originale) s'est développée au laboratoire d'informatique et les données des équipes ont été enregistrées par le dispositif expérimental. Deux magnétophones ont été placés dans deux équipes formées d'élèves moyens et d'élèves moyens-faibles (selon les indications de l'enseignant); un dernier magnétophone a été placé sur la table mise à la disposition du chercheur. Pour les deux situations, les productions écrites des élèves ont été recueillies.

Une des classes (classe Q1) était formée de 32 élèves et l'autre classe (classe Q2), de 28 élèves. Voilà le temps destiné à chacune des situations :

	Classe Q1	Classe Q2
Situation 1	Une période de 70 minutes et la moitié d'une deuxième	Deux périodes de 70 minutes

	Classe Q1	Classe Q2
Situation 1	Une période de 70 minutes et la moitié d'une deuxième période similaire	Deux périodes de 70 minutes
Situation 2	Deux périodes de 70 minutes	Deux périodes de 70 minutes

4. Définition des observables

Les questions et objectifs de notre recherche et les analyses des situations nous permettent d'identifier les observables suivants qui seront pertinents à l'interprétation de l'ensemble des données de notre recherche :

A- Le fonctionnement des connaissances arithmétiques dans les étapes de production de résultats et d'explications des résultats produits : désignatif (lié à l'obtention d'un résultat); monstratif (équivalence d'expressions)

B- Les explications produites par les élèves (aux niveaux privé et public):

- Preuves empiriques
- Preuves intellectuelles : caractéristiques, niveau de généralité (étapes vers la généralisation, rapports entre les niveaux de généralisation, les niveaux de rationalité et les niveaux de connaissances arithmétiques), registres de représentation (oral, écrit, types d'écritures); connaissances évoquées et connaissances élaborées; rapport entre les modes de production et de validation.
- Rapports entre les validations privées et publiques : développement du processus d'articulation entre les validations personnelles, les validations construites par le collectif « classe » et les validations institutionnelles visées

C- Les conditions de production des connaissances

- l'effet des variables didactiques sur le comportement des élèves (connaissances mobilisées, rapport avec les savoirs à construire)
- le rôle des interactions avec d'autres élèves, comme rétroactions du milieu (par rapport aux caractères explicatifs ou non des productions, mais aussi par rapport à la nature et à la validité des productions)
- le rôle des confrontations de différents types d'explications; le rôle des écritures dans la production de nouvelles connaissances.
- les contraintes de la situation, les actions des élèves et les actions des enseignants pour l'établissement de phases a-didactiques
- les interventions locales de l'enseignant sur les interactions milieu-élève (à un niveau privé ou public) : en fonction de quoi l'enseignant intervient-il ? (en fonction de son projet d'enseignement; en fonction de la demande des élèves (Bloch, 1992)); connaissances ou savoirs injectés, raisons de cette injection; effets de ces interventions.

5. Analyse des données

Comme nous l'avons déjà explicité, notre travail de recherche est fondé sur une méthodologie qualitative. Conformément aux principes de l'ingénierie didactique, nous réaliserons des études de cas; le traitement des données fera alors appel à l'analyse de protocoles didactiques. La segmentation du texte des protocoles en épisodes (Brun et Conne, 1990) sera faite selon les grandes lignes marquées par les observables déjà définis : interactions et fonctionnement des connaissances à l'intérieur des groupes (production et validation); interactions et fonctionnement des connaissances à un niveau public. Le découpage plus fin en sous-épisodes tiendra compte du fonctionnement des connaissances arithmétiques dans les étapes de production et validation. L'analyse des protocoles devra nous permettre :

-d'identifier des comportements des élèves jugés signifiants (par rapport à nos objets de recherche), de les associer à des connaissances (en lien avec notre analyse a priori)

-de valider l'association à des connaissances, par la recherche d'indices de cohérence interne à un même protocole (comparaisons de comportements lors de divers épisodes ou sous-épisodes) et par la recherche d'indices de cohérence externe (contraintes de la situation, analyse a priori), tout étant attentif aux effets possibles du contrat didactique.

Chapitre IV

Analyse des résultats

Chapitre IV

Analyse des résultats

Dans ce chapitre, nous effectuons une analyse des données issues de chacune des situations et ce, dans chacune des classes d'élèves argentins et québécois. Les résultats ainsi obtenus sont alors examinés en regard des questions principales de notre recherche.

Comme nous l'avons indiqué antérieurement, chacune des situations a été expérimentée dans deux classes de l'enseignement secondaire en Argentine, puis au Québec. Notre analyse s'intéresse aux interactions didactiques et au fonctionnement des connaissances lors de la réalisation des diverses tâches que comporte chacune des situations. Dans la première situation, nous porterons une attention spéciale au rôle que la contradiction joue dans l'entrée des élèves dans le « jeu » de la preuve intellectuelle, en particulier aux caractéristiques des interactions didactiques dans le traitement de cette contradiction. Dans la seconde situation, c'est le rapport entre les interactions aux niveaux adidactique et didactique que nous essaierons de repérer.

1. Analyse des données de la Situation 1

La situation 1 comporte différentes parties. Pour faciliter la lecture des données de notre recherche, nous reproduisons le texte présenté au chapitre précédent, faisant état des différentes parties.

- **Première partie**

Il s'agit d'un jeu auquel participent des équipes de 4 élèves au maximum. Chaque équipe doit choisir deux nombres naturels, le second étant plus petit que 3000, et faire les calculs suivants :

1) Faire le produit des nombres choisis
2) Ajouter 7 au premier nombre choisi et multiplier ce résultat par le second nombre choisi

3) Enlever au résultat obtenu en 2) le résultat obtenu en 1).

L'équipe gagnante sera celle qui obtient comme résultat final le nombre le plus grand.

• **Deuxième partie**

On propose aux différentes équipes de trouver et formuler une stratégie pour gagner à toutes les parties. On leur demande aussi de formuler les raisons qui permettent d'affirmer que la stratégie proposée sera toujours gagnante.

• **Troisième partie**

À la troisième partie, la question suivante est adressée aux élèves : Comment expliquez-vous l'existence d'une infinité de solutions? Comment pouvez-vous vous assurer qu'il n'y ait pas d'autres choix possibles de nombres pour gagner, que tout autre choix de nombres produira un résultat plus petit?

1. 1. Interactions et fonctionnement des connaissances à l'intérieur des groupes, lors du choix des nombres (première partie)

Au cours de la première partie de la situation 1, les élèves doivent choisir des nombres de manière à obtenir le plus grand résultat. Deux grand types de stratégies guident le choix des nombres: a) celles dont la supposition (implicitement ou explicitement) de l'existence d'une seule solution a une influence remarquable ; b) celles dont les essais avec différents exemples ont un rôle fondamental.

Dans le premier cas, les suppositions qui sont à la base de la recherche des nombres sont différentes :

-« les deux nombres le plus grand possible » (comme il y a une multiplication, pour que le résultat soit le plus grand possible, il faut que chaque facteur soit le plus grand possible) ;

-« le premier nombre le plus petit possible et le deuxième le plus grand possible » (il faut faire une soustraction et pour que le résultat de la soustraction soit « le plus grand possible », il faut enlever « le moins possible » au plus grand nombre). Pour les élèves, comme les deux nombres interviennent dans les deux termes de la soustraction, un de ces nombres doit être le plus grand possible et l'autre, le plus petit, afin de « compenser ». Leur choix semble lié au fait que le deuxième nombre est le seul qui comporte une borne supérieure, le premier ne comportant qu'une borne inférieure.

Par rapport au premier choix (les deux nombres le plus grand possible), le fait que l'on puisse choisir n'importe quel nombre ne pose aucun problème aux élèves; le plus grand nombre étant pour les élèves celui avec lequel on peut faire les calculs à la main ou avec la calculatrice ou encore, le plus grand nombre que personne ne va choisir à cause du coût des calculs à faire. La supposition de l'existence d'une seule solution engage les élèves dans un processus de recherche de « la solution » et nous renvoie au premier bilan des résultats, moment où une contradiction aura lieu et commandera le développement postérieur de la situation.

Dans le deuxième type de stratégies, l'engagement dans un processus expérimental confronte explicitement quelques élèves à la question de l'indépendance du résultat final de certains choix des nombres, ce qui positionne les élèves de manière différente pendant le premier bilan de résultats.

Cette classification des stratégies n'est pas disjointe, elle marque surtout les hypothèses qui commandent le début des interactions des élèves avec la situation.

Nous analysons maintenant certaines particularités des interactions dans chacune des classes de l'Argentine (classes identifiées par les lettres A1, A2) et du Québec (classes identifiées par les lettres Q1 et Q2), en nous référant à ces deux grands types de stratégies. Il convient de noter que des résultats partiels provenant d'une des classes en Argentine, soit la classe A1, ont été déjà publiés (Barallobres, 2004) ; il nous est toutefois apparu important de rappeler et compléter les analyses effectuées.

Nous organiserons les données de la manière suivante : nous suivrons d'abord l'évolution des classes A1 et A2 d'Argentine, de manière à faire une description plus fine de l'ensemble des interactions et, par la suite, nous nous intéresserons à l'évolution des classes Q1 et Q2 du Québec, ce qui nous permettra de compléter l'analyse effectuée et de mieux apprécier l'impact des cultures et des institutions scolaires de ces différentes classes sur les productions des élèves et les interactions didactiques. Rappelons que, dans la réalisation de cette première partie de la situation 1, les élèves sont invités à former des groupes d'au plus 4 élèves.

Il importe de mentionner également que dans toutes les analyses, les élèves sont identifiés de la façon suivante : a) classes d'Argentine : 1) élèves de la classe A1, désigné par le sigle EA1n – E pour élève; A1 pour la classe A1; n étant un nombre associé à un élève; 2) élèves de la classe A2, désigné par le sigle EA2n – E pour élève; A2 pour la classe A2; n étant un nombre associé à un élève; b) a) classes du Québec : 1) élèves de la classe Q1, désigné par le sigle EQ1n – E pour élève; Q1 pour la classe Q1; n étant un nombre associé à un élève; 2) élèves de la classe Q2, désigné par le sigle EQ2n – E pour élève; Q2 pour la classe Q2; n étant un nombre associé à un élève. Il faut également noter que les interactions langagières dans les classes A1 et A2 ont été traduites en français; il s'agit d'une traduction libre.

Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A

Les interactions dans ce groupe se caractérisent par un jeu entre « les exemples proposés» et « la formulation d'hypothèses »; de fait, on peut voir que l'élève EA11 commence en essayant avec un exemple et, en faisant les calculs, puis elle formule des hypothèses pour les prochains choix :

Groupe 1

EA11 : on va choisir 3 200 pour le premier nombre et 1 500 pour le deuxième.
[les élèves font les calculs et obtiennent 10 500]

E A11 : Mais si le premier est plus grand, nous obtiendrons un résultat beaucoup plus grand!
EA12 : ok, si le premier est plus grand, c'est vrai que tu obtiendras un résultat beaucoup plus grand (l'élève fait référence au premier pas) mais, dans le second pas, on va aussi donner un résultat beaucoup plus grand parce qu'on doit ajouter 7 et on doit multiplier par le deuxième ; après il faut faire la différence entre ces deux résultats qui sont très semblables et donc on ça va donner… je ne sais pas....
EA11 : Regarde! On va travailler avec 1 000 000 et 1500. Si à
1 000 000 on ajoute 7, ça va donner 1 000 007 et maintenant tu le multiplies par 1500. Ok, il va rester un nombre plus grand que celui-là (il fait référence sur son cahier au résultat du pas 1) et après tu fais la différence et c'est évident qu'il va rester un nombre plus grand que 10 500, tu me comprends ?
EA12 : J'ai déjà un nombre plus grand (fait référence au 10 500), j'ai déjà essayé avec d'autres nombres et ça m'a donné plus grand (EA12 a réalisé un calcul avec le deuxième plus grand)
EA11 :_Vois-tu ? ... regarde! ... nous essayons... (elle explique à un autre élève du groupe, pas à EA12) au lieu de 3200, nous essayons avec 1 000 000 et 1500 pour le second nombre.
EA12 : 1 000 000 fois 1500 c'est 1 500 000 000
EA11 : Attends!
EA12: on a 1 500 000 000
EA11 : Ah, ok, que je suis stupide! Ok,.. ajoutons 7 et donc nous obtiendrons 1 000 007 par…
EA12 : oui, fais 1 000 007 fois 1500
EA11 : oui, ça donne …
EA12 : regarde! Ça va donner 10 500 mais parce que nous n'avons changé que le deuxième nombre. Si nous mettons, je ne sais pas, 2 990, ça va changer le nombre final, donc nous devons changer ce nombre et ça va changer le résultat final, il me semble.

Les élèves poursuivent avec quelques exemples et concluent en déclarant que le premier peut être n'importe quel nombre et que le deuxième doit être 2 999 :

EA11 : dernière preuve... mets… je sais pas… par exemple 2 000 fois 2 999, donc ceci nous donnera une hypothèse : le nombre change [elle fait référence au résultat final] si on change le deuxième nombre. Nous devons la confirmer, on comprend ?
Donc, 2 000x2 999 ... [elle fait tous les calculs]
Professeur : allez on finit...
EA11 : attends... attends! il faut faire 2 007 fois 2 999... écrit 5 998 000... et 2 007 fois 2 999 ce qui donne 6 018 993 ah.. je suis perdue...
EA12_: maintenant fais la différence
EA11 : 20 993
EA12 : cela donne le même qu'avant!
[note : les élèves avaient déjà essayé avec 3 000 et 2 999]
EA11 : Ah! Très bien!
EA12 : parce que nous l'avons fait avec le même nombre
EA11 : le deuxième nombre est le même dans les deux cas, c'est le plus grand
EA12 : c'est-à-dire, le maximum qu'il est possible d'obtenir est...
EA11 : 20 993... Oui, très bien, mais pourquoi ?

Ce groupe arrive à une conjecture et se pose la question du pourquoi de l'indépendance du résultat par rapport au premier nombre, avant la confrontation avec les autres groupes : le fait d'essayer avec des exemples différents et d'obtenir plus d'un résultat gagnant les confronte avec la question de l'unicité dans l'étape de production de la solution. Même s'ils acceptent qu'il y ait plusieurs paires de nombres gagnants, ce résultat leur semble étonnant : immédiatement, après être parvenus à la conclusion, ils se posent eux-mêmes la question du « pourquoi ? ». Ils laissent fixe le premier nombre et font varier l'autre ; postérieurement, en suivant la même stratégie, ils fixent le deuxième nombre et font varier le premier. La confrontation entre la variation du premier résultat et l'absence de variation dans le deuxième cas amène les élèves à chercher une explication.

Le groupe 2 part de l'hypothèse (proposée par l'élève EA13), à savoir que la différence entre les nombres doit être significative :

Groupe 2

EA14 : 36 et 2100
EA15: mais… on peut avoir plus de différence entre les deux, met par exemple 2500
EA16: ok, mettons 2500 pour le deuxième….
(EA13 fait, avec la calculatrice, 36x2500)
EA13 : 90000
EA14 : maintenant, ajoute 7 …multiplie…
EA15: 10750
EA13: il reste 17500
EA16 : mais l'on pourrait faire plus grand, encore…
EA13 (fait des calculs avec la calculatrice) : le deuxième doit être le plus grand possible….mettons 2999
(EA15 et EA13 essayent avec différentes valeurs pour le premier nombre, en gardant toujours 2999 pour le deuxième)
EA15 : mettons 10 et 2999
EA13: non ! 2 et 2999
EA16: non ! 2 et 2999
EA15 : avec 10 il sera mieux
EA14 : avec 10 ou avec 2 ?
EA13: avec 10
EA16 : ok, ça donne 20993
EA13 : c'est ce que ça doit donner
EA15 : regarde EA13 ! Avec 500 et 2999 ça donne la même valeur !
EA13 : il faut que la différence soit importante
EA15 : c'est pas vrai, regarde, on obtient la même chose !
(EA15 essaie avec des autres valeurs, en laissant toujours pour le deuxième 2999)
EA15 : oh ! Encore 20993 !
EA13 : c'est pas possible !
(EA15 continue en essayant)
EA15 : avec tous les multiples de 3 on obtient toujours le même résultat
(le professeur A s'approche à ce groupe)
EA15 : regardez ! On obtient toujours le même résultat !
Professeur A : elle doit mal fonctionner ta calculatrice…
EA15 : non ! Avec les multiples de 10 c'est la même chose !
(le professeur part sans dire plus)

L'élève EA15 évolue, à partir des essais successifs. Il semblerait que l'élève EA13 ne veut pas accepter la découverte de l'élève EA15 qui questionne l'hypothèse initiale. Pourtant, l'analyse globale du protocole nous permet d'affirmer que ce rejet est davantage lié à l'impossibilité d'accepter la confrontation avec son collègue qu'à l'information objective que ces données pourraient porter. De fait, pendant le premier bilan, le professeur désigne l'élève EA13 comme porte-parole du groupe : l'élève EA13 annonce à la classe que le résultat ne dépend pas du premier nombre.

Ce passage nous permet de réfléchir sur la nature de certaines interactions à un niveau privé: l'information qui contredit l'hypothèse de l'élève EA13 a été reprise par lui (et re-confirmée par lui-même, à partir des essais différents) ; elle a fonctionnée comme une rétroaction du milieu « à un niveau individuel », mais ce fonctionnement n'est visible qu'au niveau du travail privé de l'élève et du bilan. Il a fallu attendre le premier bilan pour que l'élève EA13 puisse reconnaître officiellement, sous le regard de l'institution classe, l'information donnée par son collègue. Le « regard » des autres et aussi du professeur, représentant institutionnel du savoir, semblerait aider l'élève EA13 dans la dépersonnalisation des connaissances impliquées. À l'intérieur d'un groupe, des relations autres que celles basées sur des connaissances mathématiques peuvent commander les interactions. La présence d'un milieu qui effectue des rétroactions en termes de connaissances est un élément nécessaire pour encadrer les interactions dans les voies de la connaissance, mais l'effet des rétroactions peut être différent lorsque la rétroaction vient des autres sujets qui font partie du milieu. L'institution professeur ou l'institution classe (pendant le bilan) sembleraient collaborer pour que les rétroactions soient « lues » en termes de connaissances.

La stratégie qui implique le choix de deux nombres le plus grand possible pose, à certains groupes, un problème de calcul :

Groupe 3

EA17 : met pour le premier 9999999 puissance 9
EA18 : tu ne mets que sept « neufs » ? Ma calculatrice a plus de chiffres
EA17: ahhh, elle donne erreur !
EA19: fait-le en papier… ainsi cela te donnera
EA17 : non, on va perdre beaucoup de temps ! Professeur… professeur….

En entrevoyant la possibilité d'une bifurcation de la situation (Margolinas, 2004), le professeur essaie de ramener les élèves à la branche principale de la situation :

Professeur : mais pensez-vous que le 9999999 puissance 9 c'est le plus grand possible ?
EA17 : non
Professeur : donc…
EA17 : mais c'est le plus grand que nous pouvons mettre dans la calculatrice
Professeur : mais les autres pourront gagner !
EA17 : bah…. Qui va accepter le travail de faire les calculs avec ces nombres ! Personne !
Professeur : donc, pourquoi ne pas choisir un nombre aussi grand, mais de manière à pouvoir faire les calculs à la main, de manière plus facile ? Vous devez faire des multiplications…. Quels nombres sont-ils plus faciles à multiplier rapidement ?
EA18 : on peut mettre 10000000
EA17 : plus grand, 10000000000. Ce sera suffisant !

Même si les élèves essaient d'activer des connaissances sur la notation scientifique, ces connaissances ne paraissent pas être suffisamment stables. Le professeur a compris très vite que la situation pourrait bifurquer, puis il a décidé explicitement de recadrer la discussion et de s'appuyer sur des connaissances plus stabilisées qui permettent aux élèves de demeurer dans la branche principale de la situation. Tout le travail postérieur des élèves se limite aux calculs avec 10000000000 et 2999 pour obtenir le résultat gagnant.

Avant d'arriver à la première confrontation publique, certains groupes qui avaient déjà été confrontés à l'indépendance et à la non unicité du résultat, s'engagent dans la recherche d'explications :

Groupe 1

EA11 : il faut y penser, cela ne doit pas être difficile
(les élèves y pensent individuellement)
EA12 : je ne sais pas pourquoi
(les élèves poursuivent individuellement le travail de réflexion)
EA11 : je ne comprends pas, lequel a été le calcul que nous avons fait ici ? (en référence à l'exemple proposé)
EA12 : ah! Je sais déjà parce que... avec 10 000 et...
EA11 : mais il faut choisir des nombres plus petits sinon on va se tromper...

Voilà une première stratégie en vue de produire une explication : choisir nombres plus petits afin d'éviter des erreurs de calcul. Par la suite, on verra une évolution de cette stratégie, face à l'incompréhension d'un des élèves de l'équipe : en plus de choisir des nombres petits, il faudrait choisir certains nombres particuliers qui permettent de « voir » les relations engagées. Même le premier choix fait par l'élève EA12 a implicitement cet objectif :

EA12 : ok, c'est bien, le premier est 2 000 et le deuxième est 2 999, donc quand tu fais ça par ça [en référence à chaque nombre choisi], cela te donnera un résultat… je ne me rappelle pas quel résultat c'était...
EA11 : x, mets x
EA12 : oui x [elles symbolisent le résultat]. Donc, après tu fais 2 007 par 2 999 parce que….
[EA12 explique à EA11]
EA11 : oui, oui, oui...
EA12 : et après ce résultat qui est la même chose que faire 2000 fois 2999 et 7 fois 2999...et comme tu sors 2 000 fois 2999 quand on fait la différence...donc il va rester 7 fois 2999
EA10 : je ne comprends rien
EA11 : j'ai compris! ... 7 il faut ajouter toujours au nombre que... il doit être plus petit que 3000, non ?
EA12 : non
EA11 : non, au premier nombre. Donc 7 cela va être.... ah! ... je ne sais pas comment l'expliquer... 2999 ça va être le plus grand des nombres possibles ....le deuxième ou le premier ?
EA12: le deuxième nombre doit être plus petit que 3000. Donc tu le multiplies par le premier que tu as choisi et tu obtiendras un résultat x. Le deuxième pas, tu dois faire 2 007 fois 2999. Donc ce qui tu as fait c'est le calcul ainsi : 2 000 fois 2999 et 7 fois 2999.
2007 fois 2999 est égal à 2 000 fois 2999 plus 7 fois 2999 et quand on fait la différence, tu obtiens 7 fois 2999.

Le professeur intervient (à la demande du chercheur) pour comprendre le choix fait par l'élève EA12 :

Professeur : pourquoi as-tu choisi 2000 et non 1998, 1998 étant plus petit que 2000 ? EA11 avait dit de choisir des nombres plus petits!
EA12 : non… mais… c'est plus facile de faire des calculs avec
2000… de plus… avec 2000 je peux voir ce qui se passe quand j'ajoute 7.
Professeur : ok, et toi EA10, tu comprends ?

On peut noter que l'élève EA12 a considéré la suggestion de l'élève EA11, mais elle a ajouté d'autres conditions en fonction de son objectif : comprendre ce qui se passe quand on fait des calculs avec les nombres choisis. Le professeur, en plus, fait entrer dans la discussion une élève de l'équipe qui ne participait pas.

EA10 : je ne comprends rien
EA11 : regarde, la différence de ce calcul avec ce calcul c'est "un par 7 plus", tu comprends ?
EA10 : j'ai compris qu'il faut le faire séparément mais...
EA11 : regarde avec des nombres plus petits : 10 et 8
EA12 : 10 c'est le premier nombre
EA11 : 10×8 = 80
Maintenant fais 17x8 qui est 136
Si tu fais 80×7, tu obtiendras 56, non ? ....ah....non......impossible...
EA12 : Non, regarde. D'abord il faut séparer le 17 comme 10+7
Donc, fais 10×8 et 7×8. Le premier donne 80 et le deuxième donne 56. On fait l'addition et on obtient 136
Dans le premier calcul tu as fait 10×8 = 80
Donc, dans le deuxième calcul 10×8 et 7×8, c'est 17×8 et qui donne 136.
Après il faut faire la différence entre ce résultat 136 et 80 ce qui te donne 56.
Donc ce que tu fais directement c'est faire 10x8-10x8 qui te donne 0, alors il reste 7×8=56
As-tu compris ?
EA10 : un peu, laisse-moi penser...
EA11 : laisse-moi prouver quelque chose...
8 × 10 = 80
8 × 17= 136
136 – 80 = 56 oui.... c'est bien....

Dans ce passage, c'est l'élève EA11 qui a pris l'idée de l'élève EA12 (elle choisit des nombres petits, mais le premier se terminant par 0) et essayé d'expliquer à l'élève EA10 ; mais elle se trompe et l'élève EA12 prend la parole. Même à la fin de l'épisode, on peut voir la nécessité pour l'élève EA11 de revenir sur les calculs pour « vérifier ». Ce sera par l'effort déployé pour faire comprendre à l'élève EA10 ce qu'il en est, que l'élève EA11 arrivera à la compréhension et que l'élève EA12 pourra préciser ses explications. Pour l'élève EA10, la confrontation publique sera nécessaire pour qu'elle puisse comprendre ce que les élèves EA12 et EA11 avaient élaboré dans cette étape.

Il faut remarquer l'évolution de l'élève EA11 : d'abord, sa stratégie consistait à choisir des nombres petits, puis, elle a choisi des nombres petits, mais le premier se terminant par 0. On peut aussi reconnaître une utilisation particulière des nombres retenus, marquant une étape vers la généralisation : dans son projet, le deuxième nombre importe peu ; elle ne retient plus le nombre 2999, parce que ce qui est maintenant important est de voir ce que se passe avec le résultat lorsqu'on ajoute 7 au premier nombre. L'élève EA11 utilise les exemples d'une manière différente de celle qui prévalait à l'étape exploratoire : la production d'un résultat et l'explication du résultat obtenu exigent de l'élève EA11 la mise en jeu de connaissances différentes et un changement de statut des connaissances arithmétiques.

L'élève EA12 manifeste son apprentissage pendant les multiples interactions avec les élèves EA10 et EA11, en explicitant les relations trouvées et en essayant de les préciser pour que les élèves du groupe puissent reconnaître ces relations. L'élève EA12 n'a pas eu besoin de la validation du professeur : les relations découvertes et ses connaissances sur les opérations sur les naturels et leurs propriétés ont été suffisantes pour garantir la validité de sa production. Les connaissances sur les nombres naturels et leurs propriétés, bien maîtrisées par l'élève EA12, ont fonctionné comme critères de validité : elle les utilise pour la validation du résultat obtenu mais, en plus, elle fait confiance à son raisonnement pour la validation qui utilise ses connaissances. Nous ne pouvons pas dire que l'élève EA11 ne maîtrise pas les connaissances sur les nombres naturels et leurs opérations, puisqu'elle les utilise sur l'exemple générique qu'elle propose pour l'explication. Pourtant, l'élève EA11 doute que le raisonnement réalisé valide le résultat obtenu et elle a besoin de « prouver » avec certains nombres pour se rassurer. La seule « maîtrise » des connaissances ne garantit pas leur fonctionnement comme critères de validité : c'est dans ce fonctionnement et dans l'explicitation de ce fonctionnement que ces connaissances commencent à avoir un statut différent. Jusqu'à là, elles étaient des moyens pour résoudre des problèmes et pas des moyens pour valider d'autres connaissances.

Le manque de compréhension de l'élève EA10 n'a pas mis en cause la structure de l'explication proposée : l'élève EA11 a essayé de changer les nombres (pour que l'élève EA10 « puisse voir » ce qu'elle voulait lui montrer), mais non la structure implicite. L'interaction sociale avec les autres, en particulier avec ceux qui ne comprenaient pas, a exigé de l'élève EA12 qu'elle trouve des moyens pour être plus explicite, mais n'a pas transformé la structure de l'explication produite. Il semble que la reconnaissance implicite de l'équivalence entre 17×2999 et 10×2999 + 7×2999, basée sur la définition de la multiplication sur les nombres naturels (quelques-uns des élèves ont interprété 17x2999 comme un ajout de 2999, 17 fois, ou comme une addition, 17 fois répétée, du nombre 2999) ou sur l'utilisation de la distributivité de la multiplication sur l'addition (et aussi entre 17×2999 - 10×2999 et 7×2999), soit suffisante pour garantir la validité de la production, mais aussi son caractère explicatif (à un niveau personnel). Ces connaissances permettent à l'élève EA12 de construire une preuve intellectuelle et valident, implicitement, le travail produit. La recherche de différentes façons d'écrire la même expression (travail non habituel en arithmétique), façons exprimées par des phrases du type « faire 17×2999 est la même chose que faire 10×2999 plus 7×2999 », est fondamentale ici pour arriver à la compréhension. On met en acte de nouvelles connaissances et, comme on l'a déjà dit, un fonctionnement différent des connaissances anciennes : si l'on exprime de manière différente une expression numérique, on peut obtenir des informations différentes (du désignatif au monstratif); un raisonnement qui exprime les relations entre les données d'un problème, et qui transforme ces relations en relations équivalentes pour arriver au résultat attendu, permet la compréhension (au moins à un niveau privé). Est-il possible d'expliciter ces types de connaissances ? Est-il possible de les enseigner ?

Les élèves EA12 et EA11 nous semblent entretenir un rapport adidactique avec la situation : elles acceptent et partagent leur ignorance (Mercier, 1998), elles s'engagent à la dépasser ; elles ont un projet d'apprentissage (projet fondamental pour. l'engagement dans une relation adidactique). La situation a permis à ces élèves d'entrer dans ce projet de dépasser l'ignorance. On ne peut pas établir une relation causale entre les contraintes de la situation et le projet d'apprentissage. On peut cependant dire que les contraintes de la situation ont permis de donner sens aux validations intellectuelles pour les élèves qui ont pu entrer « dans le jeu », parce qu'ils pouvaient mettre en œuvre leurs connaissances sur la distributivité de la multiplication dans le cadre d'un traitement algébrique implicite. Ces élèves font eux-mêmes appel à ces connaissances dans le cadre de la recherche de nombres particuliers qui permettaient d'exprimer les relations engagées dans les écritures retenues (en fonction des propriétés du système de numération). La possibilité de réaliser un traitement algébrique du numérique, par la décomposition d'un des nombres pour « voir » dans l'expression numérique plus d'information que celles dont elles disposaient avant cette décomposition et par le traitement des expressions numériques pour obtenir d'autres expressions équivalentes, a été fondamentale dans la production de l'explication.

Par ailleurs, il ne faut pas négliger le rôle des contraintes de la situation sur la négociation par le professeur d'une entrée dans la validation. Ainsi, l'intervention du professeur a conduit l'élève EA10 à prendre une position plus active dans le groupe. L'élève EA10 a ainsi été un bon « moteur » pour les autres élèves du groupe, pour préciser les explications qu'ils avaient élaborées. Mais elle a eu besoin du débat public, au cours duquel le professeur lui a donné une place différente, où elle a pu exprimer ses idées et ses doutes afin d'avancer dans la compréhension.

Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B

Les hypothèses qui commandent le choix des stratégies dans la classe A2 sont similaires à celles que nous avons identifiées dans la classe A1, la différence se situe au niveau des justifications impliquées :

Groupe 4 :

EA21 : le deuxième nombre doit être plus petit que 3000 mais pour le premier on ne dit rien...alors il pourrait être n'importe quel nombre, 1 million ... si on choisit le premier le plus grand possible, on obtiendra le plus grand...
EA22 : le deuxième peut être, par exemple, 2500
EA21 : mais si le premier est très grand...non, si le deuxième est très grand...quand tu multiplies par le premier additionné avec 7, tu le multiplies aussi par 7, donc ça va te donner un nombre plus grand encore et quand tu fais la soustraction, ce 7 par le deuxième nombre va être le résultat qui sera le plus grand, puis il faut choisir le deuxième très grand.
EA22 : je ne comprends pas
EA21 : si tu fais 1 million fois 2500, au deuxième pas tu fais 1 million fois 2500 plus 7 fois 2500...quand tu ajoutes le 7 à 1 million, comprends-tu ? Puis quand tu fais la différence, ce qui reste est 7 fois 2500.
(l'enseignant était présent dans la discussion)
Professeur B : c'est-à-dire, celui-ci (indique le premier nombre choisi) n'importe pas beaucoup
EA21 : c'est vrai, le plus important est le deuxième nombre, quand il est plus grand, ça sera mieux.
Professeur B : peut-il être 60 000 ou 6 millions ?
EA21 : non, parce que s'il est très grand, il ne sera pas suffisant pour la soustraction, pour qui reste....
EA22 : si, si
Professeur B : y a-t-il des conditions sur le choix du deuxième nombre? ...Regardez l'énoncé ...
EA21 : ah... le deuxième doit être plus petit que 3000, pas le premier !
EA22 : ah !...maintenant je comprends
(le professeur part)

L'élève EA21 choisit les nombres à partir d'une hypothèse d'indépendance du résultat du premier nombre, mais cette hypothèse semblerait être peu stable. Du fait, lorsque le professeur demande si le premier nombre peut être 6 millions, l'élève EA21 doute : un nombre si grand semblerait déstabiliser son raisonnement. Mais le professeur ne se préoccupe pas de fermer le problème: il accepte des résultats provisoires pour cette étape de la situation -résultats qui, quand même, vont permettre aux élèves de réussir même s'ils sont soutenus par des connaissances erronées- parce qu'ils sont suffisants pour avancer et parce qu'il « fait confiance » au milieu : des rétroactions qui remettront en question ces implicites sont prévues dans des autres étapes de la situation.

L'instabilité des fondements de l'hypothèse de l'élève EA21 se manifeste aussi par le fait que l'élève ne l'utilise que partiellement pour convaincre les autres :

EA21 : ok, 66 pour le premier et 2999 pour le deuxième
(ils font les calculs en arrivant à 20993)
EA22 : est-ce qu'on reste avec ce nombre ou on continue à prouver ?
EA21 : non, c'est le maximum qu'on peut obtenir, sinon tu vas obtenir toujours le même nombre….si tu veux, prouve !
EA22 : on verra….donne-moi la calculatrice…
EA21 : allons, changeons le nombre… pour voir ce qui se passe…
Professeur : c'est fini ?
EA21 : on prouve des autres choses…
EA22 : on prouve avec un nombre plus grand que 66. Si ça donne plus petit, on prouvera avec un nombre plus petit que 66…
(ils font les calculs et obtiennent un nombre plus petit…ils doutent du résultat…ils recommencent avec 70 et ils obtiennent 20993).
EA22 : ok, on laisse 66 qui est notre nombre de la chance!
Professeur : Qu'est-ce que vous faites ?
EA21 : on prouve si ma théorie est bonne.
Professeur : comment prouvez-vous ?
EA22: en prouvant avec des autres nombres….en faisant les calculs et en vérifiant les résultats…
Professeur : ah !

Les raisons qui justifient l'indépendance du résultat final du premier nombre et l'impossibilité d'obtenir un résultat plus grand que 20993 sont encore implicites. Il y a un jeu d'anticipations et de calculs et une utilisation, déjà à cette étape, de l'exemple générique, au moins par l'élève EA21 : même s'il propose d'essayer avec des autres nombres pour convaincre les autres, il n'a pas besoin de le faire pour lui-même. À un moment donné, il dit : « pourquoi faire tous ces calculs si on obtient toujours le même résultat ? ». La validation des connaissances produites à ce niveau-là est différente pour chacun des élèves : « la théorie » de l'élève EA21 est un moyen de production du résultat, mais aussi de validation ; l'élève EA22 a besoin de « vérifier » les arguments de son collègue par d'autres nombres. Les relations identifiées par l'élève EA21 ne sont pas encore visibles pour l'élève EA22. L'étape explicite de validation permettra revenir sur cette question.

Extraits des interactions dans la Classe Q1, Professeur D (auteur de la thèse)

Dans une des classes au Québec (dans laquelle nous avons assumé le rôle d'enseignant), la stratégie dominante est celle de chercher les deux nombres les plus grands possibles. Dans un des groupes, ce choix est un effet du contrat didactique ; en effet, c'est l'enseignant titulaire de la classe qui a dit explicitement aux élèves « si vous devez obtenir le résultat le plus grand, mettez le plus grand pour chaque nombre». Il nous semble important de remarquer que la résonance d'un effet de contrat semblerait être plus forte chez les élèves plus faibles ; suivant la suggestion du professeur, ces élèves choisissent 333444814x10^{96} pour le premier nombre et 2999 pour le deuxième. Par la suite, tout le travail de ces élèves se centre sur un problème de calcul : ils n'arrivent pas à maîtriser la notation scientifique (ni la calculatrice) pour réaliser les calculs proposés. Le milieu, n'étant pas construit pour accueillir ce type de bifurcation, ne peut pas envisager des rétroactions pertinentes pendant cette étape de production des résultats.

D'autres groupes font des hypothèses similaires à celles que nous avons décrites dans les analyses antérieures (l'étude de cas particuliers, etc.). Une des stratégies qui se répète est celle d'essayer avec plusieurs cas particuliers ; toutefois ces essais sont organisés de manière différente par certains groupes ; à titre d'exemple, voici quelques extraits des analyses conduites par le groupe 1 :

Groupe 1

EQ114 : il faut trouver deux nombres *intelligemment choisis*…alors….un plus petit que 1000 et un autre plus gros que 1000…
EQ111 : ok
EQ114 : on prend 2999 pour le deuxième….
EQ111 : attend…le premier c'est 2999…
EQ114 : le deuxième…deuxième….pour le premier 150
EQ113 : 850….
EQ115 : le premier est n'importe quel?
EQ114 : oui…il faut faire les calculs….
(font les calculs 850x2999 …..857x2999 et la différence)
EQ114 : on prend maintenant….50000 et 2999 (ils font les calculs et obtiennent la même différence)
EQ113 : eh! C'est quoi ça?
EQ114 : la différence est la même….
EQ113 : si on prend le deuxième plus grand …
EQ114 : on peut pas… le deuxième a une limite…
Prof : le premier peut être n'importe quel, le deuxième doit être plus petit que 3000…
EQ115 : prend 41 pour le premier… le premier on a pas de limites… n'est-ce pas?
EQ114 : 41 et l'autre quoi?
EQ115 : 2999
(EQ114 fait les calculs et obtient la même valeur)
EQ114 : on obtient toujours la même valeur !
EQ114 : prenons 180 et 2999 (il fait les calculs et obtient 20993) encore! Ça donne tout le temps la même chose! 20993 tout le temps!
EQ115 : oui toujours la même valeur
Prof : c'est le plus grand qu'on peut obtenir?
EQ114 : oui 20993
EQ112 : le premier nombre peut être ce que tu veux mais le deuxième doit être 2999
EQ114 : mais il faut que le premier nombre ne soit pas plus petit que 40
EQ112 : mais non, ça marche avec 1 aussi, regarde (il fait les calculs et montre le résultat)
1x2999=2999 8x2999=23992 alors la différence est 20993
EQ114 : et même si tu mets 2999 et 2999 ça fait le même résultat
EQ114 : 2999 pour le deuxième et le premier n'importe quel nombre…le premier disons…1… quelque soit le premier, si le deuxième est 2999 ça fait tout le temps la même affaire, as-tu compris?

Les élèves ne produisent pas n'importe quel type d'essais; le fait d'obtenir le même résultat pour les deux premiers choix conduit les élèves à maintenir le deuxième nombre fixe et à varier le premier. Il semblerait que dès le premier choix, ils font implicitement l'hypothèse que pour obtenir le plus grand possible, il faut que le deuxième soit le plus grand possible et le premier « plus petit que le deuxième ». Cette hypothèse est remise en question à mesure que le milieu s'enrichit. Pourtant, ils ne questionnent pas le deuxième nombre : ils ne vérifient pas avec des valeurs plus petites que 2999.

Extraits des interactions dans la Classe Q2, Professeur D (auteur de la thèse)

Dans cette seconde classe du Québec, pour le choix des nombres, on rencontre des stratégies similaires à celles identifiées dans la classe A1 de l'Argentine, à l'exception d'un des groupes qui produit une stratégie plus systématique pour trouver choisir les nombres:

Groupe 7

EQ271 : mettons 1 000 000 et 1
(ils font les calculs)
EQ273 : regarde, lorsqu'on ajoute 7 à 1 000 000 on reste un 7 à la fin et en enlevant le deuxième, on a 7
EQ271 : cela devrait être la même chose si on change le premier, parce que le deuxième est toujours 1 et le premier est 7 plus, alors la différence sera 7
EQ272 : ah oui, peu importe le premier, on obtiendra toujours 7 si le deuxième est 1
EQ273 : alors, pour obtenir un résultat plus grand il faut que le deuxième soit le plus grand et le premier le plus petit.
EQ272 : met 1 et 2 999
EQ273 : ça fait 20 993 … et si on fait 0 et 2999…
(ils font les calculs et obtiennent 20 993)
EQ271 : ah oui, regarde, c'est comme dans le premier cas (en référence à 1 000 000 et 1), si tu changes le premier et tu laisses le deuxième 2 999, ça fait toujours 20 993.
EQ272 : mettons 1 000 000 et 2 999
(font les calculs et obtiennent 20 993)
EQ273 : peu importe le premier, si le deuxième est 2999, ça ne peut que faire 20 993.

Le choix de « 1 » pour le deuxième nombre leur permet d'identifier facilement le résultat de la différence entre le premier et le deuxième pas des calculs et l'invariance de cette différence face au changement du premier nombre. C'est à partir de l'analyse de ce cas, et en considérant toujours la différence comme l'opération fondamentale, qu'ils effectuent les choix suivants.

1.2. Mise en commun : gestation et traitement de la contradiction, interactions didactiques et connaissances impliquées

Nous avons vu précédemment que dans certains groupes, dès la première partie de la situation, les élèves font face à des contradictions et à une confrontation des nombres choisis, des hypothèses ou points de vue sur le choix des nombres. Dans plusieurs groupes, il faut attendre la seconde partie de la situation, partie consacrée à la mise en commun des solutions, pour qu'une contradiction apparaisse et qu'une confrontation s'installe. Analysons une confrontation représentative de celles menées dans les classes où a eu lieu l'expérience :

Choix des nombres dans la Classe A1, Professeur A

Groupe 1 : (2 000, 2 999) Résultat 20 993
Groupe 2 : (10, 2 999) Résultat 2 0 993
Groupe 3 : (10 000 000, 2 999) Résultat 2 0 993
Groupe 4 : (1 000, 2 500) Résultat 17 500
Groupe 5 : (13 000) (avant que les élèves proposent le résultat le professeur dit : ça marche pas.... Le deuxième ne peut pas être plus grand que 3000 !)

La présence de paires différentes de nombres qui produisent le même résultat étonne les élèves, mais le déséquilibre profond se produit au moment de l'opposition entre les anticipations qui ont présidé à la recherche des nombres, notamment, à la recherche du premier nombre, certains déclarant qu'il doit être le plus petit possible et d'autres, au contraire, déclarant qu'il doit être le plus grand possible. Ce déséquilibre renvoie à une situation d'action : les élèves ont besoin d'essayer avec d'autres exemples pour sortir de l'étonnement.

Dans toutes les classes observées, le développement de la situation se poursuit, tel que prévu dans l'analyse a priori, autour du déséquilibre produit, avec des niveaux différents de réactions : dès la production de nouveaux exemples (au niveau de la conviction) jusqu'à la production d'une explication (ceux qui étaient déjà convaincus du résultat étonnant).

Les épisodes suivants illustrent les caractéristiques particulières des interactions, dans la classe A1 ; ils permettent de mettre en évidence les raisonnements personnels qui émergent pendant le traitement de la contradiction et leur évolution :

Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A

Professeur : quels commentaires?
EA12 (du groupe 1) : si tu mets 2999 fois n'importe quel autre nombre, tu obtiendras toujours 20993
Élève (non identifié) : le premier nombre importe pas
EA11 : il peut être 1, 1 million ou 9, peu importe
Élève (groupe 4) : si tu mets 2 500 toujours tu obtiendras 17 500…nous avons fait 46x2500 et nous avons obtenu aussi 17 500
Élève : le premier nombre importe pas, le deuxième oui
Professeur : ce n'est pas possible. Comment est-il possible? Des fois cela donne toujours 20 993, Des fois cela donne toujours 17500, c'est quoi ça?
EA110 : mais aussi il dépend du premier nombre…
Professeur : c'est ce que je dis
EA110 : EA111 a choisi un plus grand qu'elle pour le premier nombre et il a obtenu plus grand!
Professeur : certainement!
EA11: mais professeur, comparez ce que EA110 a proposé et ce que EA14 a proposé (il s'agit de deux cas où le deuxième nombre est 2999 et le premier nombre change) : le premier nombre est plus grand chez EA14 et le résultat final est le même!
Professeur : mais je ne comprends pas ce qu'on est en train de discuter
Élève : on discute sur le premier nombre, on a dit que le premier nombre n'importe pas
EA110 : oui, il importe… pour moi, 2999 est un cas particulier où le premier nombre n'importe pas…mais pour les autres, oui, il importe.

…..

(le professeur continue en gérant l'incertitude pour faire entrer les élèves dans une étape de recherche d'arguments plus stables, plus solides)

EA111 : si tu multiplies axb (a le premier nombre, b le deuxième nombre) et après tu soustrais a, tu obtiendras toujours la même valeur **….** axb moins ça va te donner toujours b.
Élève : mais il faut ajouter 7…il faut l'ajouter aux deux nombres?
Professeur : non, au premier
EA11 : on additionne 7 au premier, puis après on multiplie le premier par le deuxième.
Professeur : mais tu multiplies le premier par le deuxième ou le premier plus le 7 par le deuxième….parce qu'au premier tu as ajouté 7!
EA11 : oui, oui, à ce résultat ….non….au contraire….d'abord il faut faire 10x2999 et après 17x2999
Professeur : voulez-vous que j'écrive ce que EA11 dit?
(il écrit :

```
   2999
   x 10
-----------
  29990  )
```

Comme ça?
EA11 : oui
Professeur : donc?

EA11 : au deuxième pas, il faut faire 17x2999
Professeur : comment l'écrit?

2999
x17

50983

Comme ça?
EA11 : oui, après on fait 50 983-29 990 et le résultat est 7x2999
Professeur : comprenez-vous?
La classe : silence

(Quelques élèves essayent d'expliquer leur raisonnement mais la séance est presque terminée…)

EA12: dans le deuxième pas, tu fais 2999 fois 17. Ce que nous avons fait, est de diviser la multiplication, d'abord 2999x10 et après 2999x7.
Donc, dans le premier pas, tu avais déjà fait 2999x10, puis quand tu fais la différence dans le deuxième pas, tu obtiens 0. Alors, ce qui reste est 2999x7, comprenez-vous?

Professeur : je continue sans comprendre le fait que EA110 et EA14 aient mis des nombres différents et ils arrivent, tous les deux, au même résultat.
(la séance est presque finie)
Je vous laisse une question pour la prochaine séance : est-ce qu'on pourra de trouver une paire de nombres
pour gagner toujours?

(EA12 explique au chercheur : nous avons choisi 10 pour le premier nombre parce que, quand tu fais la différence, on soustrait la même quantité, donc, on n'a pas besoin que le premier soit grand. Nous avons choisi 10 pour que les calculs soient plus faciles)

Dans cette classe, lors de la première partie de la situation, il a eu des groupes qui n'avaient produit que les nombres demandés et d'autres, qui avaient déjà produit des explications, mais leurs explications n'étaient pas encore solides. Le professeur joue avec l'incertitude, en jouant sur les imprécisions, en aidant les élèves à rentrer dans un processus de recherche des arguments, selon le cas. Le professeur n'exige pas de précisions sur les explications produites, au contraire, il ouvre des questions, il agit en posant de doutes. Même lorsque l'élève EA12 propose une explication (correcte), le professeur fait comme s'il ne la comprenait pas. Il ne s'appuie pas sur le travail d'un élève pour institutionnaliser, tout de suite, un modèle standard d'explication, stratégie habituelle pour faire avancer le temps didactique. Le professeur fait confiance au milieu, mais il faut préciser qu'il peut le faire parce qu'un contrat didactique est déjà installé dans cette classe au moment de notre expérimentation : le débat autour de la validation des connaissances produites dans la classe est une partie fondamentale de ce contrat, de la mémoire de cette classe.

Ce premier bilan n'a pas pour but de fermer le problème; au contraire, il s'agit d'un débat pour construire un autre problème, pour nourrir le besoin de la recherche d'une explication. La position du professeur est ici fondamentale. Il n'évite pas l'apparition d'explications correctes; il les laisse émerger et les questionne, de manière à ce qu'elles deviennent l'objet central de réflexion à l'étape suivante.

Dans la classe A2, plusieurs élèves s'aperçoivent de l'indépendance du premier nombre au moment de confronter les résultats. L'enseignant B, qui connaissait bien le travail de chaque groupe, agit aussi, comme le fait l'enseignant A, pour gérer l'incertitude :

Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B

Professeur B : même en changeant le premier nombre, on obtient toujours le même? Comment ça? Pour 66, 3500, 1000 et 1 000 000 on change pas le résultat final?
Élève : mais la différence est toujours la même...
EA22 : nous avons prouvé avec 1000
Professeur : (qui connaissait le travail du groupe) et après vous avez essayé avec des nombres plus grands et qu'est-ce qui est arrivé?
EA22 : on n'a pas obtenu plus grand
Professeur : vous aussi? (à un autre groupe). Ils ont essayé d'abord avec un nombre, puis avec un autre plus grand et rien! C'est quoi ça? C'est de la magie?
La classe : oui!
Professeur : EA21, qu'est-ce que tu dis? (Le professeur savait que EA21 avait une explication)
EA21 : je sais que 20993 est 7x2999 parce que lorsque vous ajoutez 7 au premier nombre et le multipliez par le deuxième, le résultat...il est comme si on a deux multiplications, le premier est multiplié par 2999 et donc, lorsque tu fais la différence, il reste 7x2999
Professeur : comprenez-vous? EA23? EA24? Comprenez-vous?
(silence)
Élève : il a expliqué trop vite...
Professeur : quelqu'un peut répéter ce que EA21 a dit?
(silence)

(Comme dans la classe A1, l'explication de EA21 n'est pas claire pour la classe, ce qui permet au professeur de renvoyer les élèves à une phase privée)

Professeur : ce n'est pas claire, n'est-ce pas? Il faut, donc, penser... la première question à penser : pourquoi si on change le premier nombre, on obtient toujours 20993? Observez qu'il y a toute sorte de nombres, 66, 100000, etc. ...
La deuxième question : est-ce qu'il y a pas un autre calcul qui donne un résultat plus grand? Est-ce qu'il pourra venir quelqu'un et nous dire : j'ai trouvé deux nombres et j'ai obtenu 50000?
Travaillez en groupes en essayant de répondre à ces questions.

Avec une modalité différente de celle du professeur A, le professeur B essaie de jouer avec l'incertitude comme moyen de soutenir la dévolution. Même si le professeur B fait confiance au milieu, il n'a pas installé dans cette classe un contrat similaire à celui de la classe A1. Le professeur donne la parole à l'élève EA21, un des meilleurs élèves de la classe, en sachant qu'il avait produit une explication *incomplète* mais, à la différence du professeur A, il ne questionne pas l'explication produite : il la soumet seulement à l'évaluation des autres élèves. Il s'agit d'une manière d'injecter des connaissances sur le milieu.

Cette injection de connaissances nous fait poser les questions suivantes : est-ce que des élèves qui n'ont pas produit des explications peuvent se décentrer de leurs productions et s'appuyer sur ce que l'élève EA21 a proposé? Est-ce qu'ils peuvent articuler leur travail avec celui de l'élève EA21?

Le professeur s'appuie sur le travail de cet élève pour redéfinir les questions de l'étape suivante, mais cette redéfinition ne porte pas sur le travail particulier de cet élève : l'objet de l'étape suivante n'est pas la clarification de l'explication de l'élève EA21.

<u>Extraits des interactions dans la Classe Q1(professeur D)</u>

Équipe 1 :	1	2999	20993
Équipe 2 :	9999	2999	20993
Équipe 3 :	900000	2999	269817994
Équipe 4 :	3400000	2999	20990
Équipe 5 :	999999	2999	20993
Équipe 6 :	333444815×10^{96}	2999	$7 \times 1000 \times 10^{96}$

Élève : ça donne toujours le même nombre
Prof : il dit que ça donne toujours le même nombre mais je ne vois pas ici toujours le même nombre comme résultat…je vois certains nombres qui se répètent mais pas toujours le même nombre…
Élève : ils ont mal calculé
Prof : qui?
Élève : les équipes 3 et 4
Professeur : il dit que pour ces équipes (en référence aux équipes 3 et 4) il y a des erreurs de calculs…ça c'est vrai? On devrait contrôler….il y a quelqu'un qui peut faire les calculs avec la calculatrice …
(les élèves font les calculs et arrivent à déceler des erreurs de calculs, dans le cas de l' équipe3)
Professeur : est-ce qu'il aurait aussi une erreur de calcul ici (en référence à l'équipe 4 et à l'équipe 6)
É14 : oui (il répond sans faire aucun type de calcul)
Plusieurs élèves : oui
(Les élèves de l'équipe 6 doutent. Ils essayent avec des exemples, de façon à ce que les calculs soient plus faciles, et ils obtiennent toujours 20993)
E14 : à toutes les fois qui c'est 2999 comme deuxième chiffre, ça fait le même résultat
N'importe quel nombre qu'on prenne comme premier chiffre, ça va faire le même résultat si on prend comme deuxième 2999

Professeur : les autres….Avez-vous écouté ce qu'il dit?
Élève : c'est pas vrai
Professeur c'est pas vrai?
(il y a des élèves qui commencent à faire des calculs)
Élève : j'ai choisi 5 et 2999 … (font les calculs et obtiennent encore 20993)
Élève : monsieur, pourquoi ces phénomènes là?
Professeur : c'est ça la question autour de laquelle il faut travailler maintenant. Pourquoi on obtient toujours 20993; est-il vrai que si le deuxième est 2999, on obtient toujours 20993? Pourquoi? Demain on recommence avec cette question.
E14 : parce que 7x2999 ça fait 20993….comme tu rajoutes 7 au nombre ça va être 7 fois plus grand …quand tu rajoutes 7 au nombre ok, après ça il faut que tu fasses la multiplication de 2999 ça va faire 7x2999 de plus et 7x2999 ça fait 20993.
(la cloche sonne)

On retrouve ici les choix des autres classes, mais les interactions montrent différents états de connaissances : des groupes qui ont des hypothèses moyennement consolidées (ceux qui donnent des réponses sans besoin de faire des calculs), des groupes pour lesquelles la confrontation publique met en cause leurs hypothèses (groupe 6). Certains groupes ont encore besoin d'essayer avec des valeurs additionnelles. Le bilan permet d'introduire des connaissances dans le milieu pour la plupart des élèves. Pour ceux qui ont déjà commencé à produire des explications (le groupe 1), le temps n'a permis que de présenter quelques idées. Le professeur pose la question du pourquoi à toute la classe, mais elle ne peut qu'être reprise la session suivante.

<u>Extraits des interactions dans la Classe Q2, Professeur D</u>

Voici la proposition de chacune des 8 équipes, au moment du bilan :

Eq.1 : 1000000	2999	20993
Eq.2 : 10 (ou 9 ou 8)	2999	20993
Eq. 3 : 1	2999	20993
Éq. 4 : 1	2999	20993
Éq.5 : 99999	2999	20993
Éq.6 : 92	2999	20993
Éq. 7 : 1000	2999	20993
Éq. 8 : 0	2999	20993

Prof : comment est-ce possible qu'avec des choix si différents on obtienne toujours 20993?
(Silence)
Prof : peut-on obtenir plus grand que ça?
Certains élèves : non
Prof : on peut choisir les nombres d'une autre manière pour obtenir plus grand que ça?
Élève : 2999x2999
Plusieurs élèves : mais non… cela donnera 20993
Élève : c'est la limite, on peut pas plus grand
Élève :

0x2999
7x2999 –0x2999= 7x2999
C'est à dire, au troisième pas, tu enlèves 0, alors il reste 7x2999
Prof : qu'est-ce que les autres pensent de cette explication?
(silence)
Prof : comprenez-vous ce qu'il explique?
Élèves : oui…
Prof : ah, mais ça c'est très facile parce qu'on enlève 0 mais …on n'enlève pas toujours 0…

Plusieurs élèves discutent entre eux

Prof : on va faire le suivant. On vous laisse travailler en groupe pour expliquer pourquoi on obtient toujours 20993 et pourquoi on ne peut pas obtenir plus que ça.
Dans ce cas c'est clair parce qu'on enlève 0, mais comment je sais que ça se passe pour n'importe quel nombre? Alors, il faut discuter en groupe et essayer d'écrire une explication.

Dans ce cas, on retrouve certains choix particuliers déjà vus: certains nombres permettent de mieux « voir » ce qui se passe lorsqu'on ajoute le 7 au deuxième pas : les choix 10,1000, 1, 0 pour le premier nombre ne sont pas arbitraires.

1.3. Interactions didactiques et fonctionnement des connaissances à l'intérieur des groupes (la recherche d'explications)

Dans la classe A1, le deuxième cours démarre avec un rappel du professeur sur l'état de la discussion. Durant le cours précédent, certains élèves avaient proposé une explication publique qui n'avait pas été comprise par tous. Le professeur donne, alors, un temps aux groupes pour qu'ils puissent mettre au point leurs explications, avant d'initier un nouveau débat.

Extraits des interactions dans la Classe A 1, Professeur A

Groupe 1

EA12 : le deuxième doit être le plus grand possible

EA11 : tu as choisi 2999 et 10
2999x10 donne 29990, après il faut ajouter 7 et faire 2999x17, cela donne 50983. Quand on fait la différence on obtient 20993. Maintenant si tu fais le calcul 7x2999, cela donne 20993. Pourquoi la différence entre le premier et le deuxième pas est toujours « fois 7 » ? D'abord on a fait fois 10 et après fois 17 (elle insiste oralement sur les mots dix et sept). Tu as un « fois 7 » de différence !
EA10 : je ne comprends pas pourquoi le premier nombre n'importe pas et on obtient toujours « le deuxième » fois 7

EA12: et si on fait les calculs du premier pas, du deuxième pas, du troisième pas et on divise après le 17 (en référence à penser le 17 comme 10 +7) ?
EA11 (cherche dans le cahier où elle avait écrit) :

2999		2999	
x10		x17	
29990	(2)	50983	(3)

On l'a écrit ici, comprends-tu ? Là tu peux voir la différence ! Entre le premier calcul et le deuxième calcul il y a un « fois 7 » de différence ! Dans le deuxième calcul il est « fois 17 » qui est 10+7. Tu fais 2999 fois 7 qui était le facteur dans le calcul 2 et qu'il ne change pas dans le calcul 3. Comprends-tu ? Oui ?
EA12 : dans le pas 2, il faut le séparer pour qu'on comprenne un peu plus

Elle écrit :

2999
x17
2999x10 2999x7

EA11: écrivons, il faut écrire pourquoi
EA12: ok, par exemple…
EA11 : non, non… il ne faut pas donner un exemple, il faut dire pourquoi !
EA12 : mais on ne sait pas bien pourquoi…
EA11 : écrivons les calculs… (en référence aux calculs (2) et (3))
EA12: en plus on mettra comme ça :

2999		
x17	10+7	2999x10=29990 (4)
		2999x7 =20993

Donc, ce calcul (en référence à (2) et ce calcul (en référence à (4)) cela s'annule parce qu'on soustrait. Écrivons : quand on fait la différence ….je sais pas comment le dire…..s'annulent ….mais je ne sais pas comment l'écrire…parce que dans le deuxième pas on a « fois10 » et « fois 7 », puis quand on soustrait, le « fois 10 » s'en va et il reste « fois 7 » mais…. Je ne sais pas comment l'écrire
EA11 : beh…. La différence entre les calculs….. ah…. je ne sais pas….Comment le met-on ?
EA10: je ne comprends pas…
EA11 : Veux-tu que je t'explique avec des nombres plus petits….avec 3 ou 4 ?
EA10 : non, non….

(le professeur demande de finir pour faire un bilan)

Les élèves essayent de préciser ce qui avait été présenté pendant le bilan. L'élaboration d'une explication exige une utilisation différente des connaissances arithmétiques, des opérations sur les nombres naturels et leurs propriétés : ils ne sont plus de moyens pour obtenir un résultat (comme dans le cadre habituel des pratiques arithmétiques) mais des explicitations des relations engagées dans le calcul effectué, explicitations qui deviennent nécessaires pour expliquer le pourquoi du résultat obtenu (et pas pour l'obtenir). Pour l'explicitation de ces relations, l'équivalence implicite entre des expressions numériques établies est impliquée : on ne compare plus des résultats mais des expressions. Pour la détermination de cette équivalence numérique, la propriété distributive a la fonction qu'elle a dans l'algèbre.

Un travail important de calcul mental basé sur les propriétés des opérations sur les naturels avait été développé dans la classe A1. Même si les élèves devaient expliciter les démarches impliquées dans les calculs, cette explicitation restait plus dans un cadre « descriptif » de la démarche (la validation étant donnée par la confrontation des résultats des calculs). De cette manière, les propriétés des opérations avaient davantage la fonction de produire des stratégies différentes de calculs que de valider les dites stratégies.

Dans notre cas, la situation n'exige pas de passer par ce type de démarche pour obtenir la réponse à la première partie de la situation; la reconstruction d'une démarche de cette nature (qui implique l'utilisation des propriétés des opérations) est motivée par la demande de produire une explication. On peut reconnaître, dans la production du groupe 1, des traces des connaissances arithmétiques sur les propriétés des opérations des nombres naturels, mais aussi la manque d'une écriture qui appuie les raisonnements impliqués. Les connaissances arithmétiques disponibles sont alors utilisées dans un contexte différent, ce qui permet leur reconceptualisation à travers la construction d'un nouveau sens. L'introduction d'une écriture qui permet d'expliciter des relations qui mettent en « évidence » les raisons cherchées et qui permet d'opérer avec ces relations sera la trace de l'élaboration des nouvelles connaissances, à notre avis, des connaissances algébriques. Dans ce contexte, l'algèbre n'est pas seulement un moyen d'exprimer une généralisation: l'algèbre est un instrument pour opérer avec cette généralisation.

Le niveau de généralisation de l'explication produite est implicite : l'exemple choisi fonctionne bien comme un exemple générique. On verra postérieurement que le débat public pose explicitement la question de la généralisation de l'explication produite: pour ce groupe, ce sera ce niveau d'explicitation qui marquera la différence fondamentale entre la validation privée et publique.

Dans ce type de contrat, où le professeur est capable de jouer avec l'incertitude en co-construisant avec les élèves cet espace d'interaction, il est toujours un observateur du travail des élèves (Margolinas (2004)), ce qui ne veut pas dire qu'il n'agisse pas. S'il le fait, il le fait en prenant en compte fondamentalement le projet des élèves et pas seulement son projet d'enseignement. C'est l'instance dans laquelle le professeur « se nourrit » du travail des élèves, s'informe de l'état de connaissances des élèves pour réinterpréter (et possiblement redéfinir) les variables de la situation (en particulier, les moments de débat public).

En se positionnant du point de vue du projet des élèves, le professeur doit mettre en jeu des connaissances mathématiques pour interpréter leur travail, il apprend des mathématiques (Bloch, 1999)

Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A

Groupe 2

EA15 : regarde, tu multiplies 2999x10, puis tu multiplies par 17, après tu soustrais le résultat obtenu avec le 17 moins le résultat obtenu avec le 10....ce qui va rester c'est le 7 et là le résultat serait 7x2999
Professeur : je ne comprends pas...
EA15 : regardez (il écrit :

$$\begin{array}{cccc} & a & b & \\ & 2999 & 1 & \\ \text{x17}\downarrow & & & \downarrow\text{x17} \\ & 50993 & 17 & \end{array}$$

EA14: mais tu ne dois pas multiplier le deuxième nombre par 17 ! (pour EA14, a représente le premier nombre et b le deuxième, parce que était comme cela qu'avaient été nommé les nombres)
EA15 : mais b n'est pas la valeur de b
Professeur : je ne comprends pas, b n'est pas la valeur de b ? C'est quoi cela ?
EA15 : non, je veux dire que b n'est pas le deuxième nombre, b est....b est ce qui multiplies par 2999...mais attend, laisse moi t'expliquer...

$$\begin{array}{cccccc} & & a & b & & \\ & & 2999 & 1 & & \\ & \text{x17}\downarrow & & & \downarrow\text{x17} & \\ & & 50993 & 17 & & \\ & & - & - & & \\ \text{2999 fois 10} \rightarrow & & 29990 & 10 & \leftarrow & \text{1x10} \\ & & 20993 & 7 & & \end{array}$$

EA15 : vois-tu ? C'est la même chose de faire fois 7 que de faire tous les pas ! Parce qu'à la fin, tu finis en faisant la même chose, parce que tu soustrais 17 moins 10, mais tu enlèves 10, tu enlèves 29990, tu enlèves « fois 10 »
Professeur : on va voir si je comprends... tu dis...b est....b c'est par qui tu multiplies le deuxième en

chaque pas, n'est-ce pas ?
EA15 : oui, c'est ça !
Professeur : et dans la première colonne, tu as les résultats de chaque pas, n'est-ce pas ?
EA15 : oui
Professeur : et le 1, c'est quoi le 1 ?
EA15 : beh…c'est pour commencer
Professeur : donc tu dis que pour obtenir 20993, il faut multiplier le premier par 7
EA15 : oui
Professeur : ok, on verra ce qu'en disent tes copains

Le travail du professeur ici est de comprendre le raisonnement fait pour l'élève EA15 et non de le juger. Il renvoie la validation au débat collectif : il ne voit pas à l'intérieur du groupe les rétroactions nécessaires à la validation et à cette étape du travail, il n'assume qu'une position « de distance » par rapport à la validation. Le professeur essaie de mettre en évidence que dans la deuxième colonne, ce n'est pas b qui est représenté. L'élève EA15, tout de suite, exprime que le « 1 » est une référence « pour commencer ». Pour montrer qu'il reste « 7 fois » le premier, il a besoin de commencer avec le 1 et de répéter les mêmes opérations sur le 2999.

Les difficultés d'évolution de certains groupes, même en interaction avec le professeur, l'ont forcé à prendre certaines décisions : il a appelé à la réalisation d'un petit bilan de résultat, de manière à « injecter » dans le milieu « de la classe » les connaissances produites dans les groupes. Le professeur n'a pas ouvert une discussion sur la validité des productions, il n'a fait que faire connaître aux élèves d'autres productions et il a encore joué avec l'incertitude. À ce moment là, un seul groupe a fait appel à l'empirisme naïf comme mode d'explication :

<u>Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A</u>

<u>Groupe 4</u>

EA110 : le deuxième nombre doit être 2999 et le premier n'importe quel
Professeur : (écrit sur le tableau) le deuxième 2999 et le premier n'importe quel. Comme ça je l'écris ?
EA110 : oui
Professeur : pourquoi ?
EA110 : parce que nous avons prouvé avec des nombres pairs et impairs et toujours cela nous a donné comme ça
Professeur : nombres pairs et nombres impairs….
EA110 : oui, avec 1,2,3,5,7….
Professeur : (écrit) Premier nombre : 1,2,3,5,7,…
EA110 : et on a essayé …avec chacun nous avons « fait toute la formule »
Professeur : oui, bien sûr

EA111(d'un autre groupe) : et comment tu sais que cela te donne le plus grand ?

(Silence)
Professeur : ok, cela est l'explication proposée par le groupe 4, il faut voir les autres groupes....

Tous les autres groupes ont produit des argumentations, la plus grande partie, en langage naturel et avec plusieurs implicites. Les interventions du professeur se sont centrées sur la mise en évidence de ce manque d'explicitation, en jouant encore avec l'incertitude :

Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A

Groupe 5

EA112 : faire les pas 1,2 et 3 est la même chose que faire 7xb (ce groupe a appelé « a » le premier nombre et « b » le deuxième nombre)....fait 7x2999 ce qui est 20993.
EA112 : n'importe quel nombre que ce soit pour b
Professeur : le a
EA112: oui, oui, le a
Professeur : mais je ne comprends pas pourquoi lorsqu'on fait le pas 1, le pas 2 et le pas 3, tout cela est la même chose que 7x2999...
EA112: le pas 1 est la même chose qui faire axb
Professeur : Qu'est-ce que j'écris? Comment je l'écris?
EA13 : axb et faire tous les calculs est la même chose que 7xb...le deuxième pas est ax7 ....non....a plus 7 fois b (oralement)
Professeur : comment écrit-on cela? Je l'écris au-dessus?
(Écrit : axb
(a+7)xb
EA13 : après tu soustrais le deuxième pas moins le premier
Professeur : comment l'écrit-on?
EA111 : pas 2 moins pas 1
Professeur : l'écrit-on comme cela : pas 2
-pas1? (1)

EA111 : oui, si tu as choisi 2999....
EA13: ça donne 7
Professeur : ici je mets 7? (en signalant le résultat dans le calcul (1))
EA111 : non, 7x2999
EA13 : bien sur, 7xb
Professeur : je vais revoir ce que EA13 vient de dire pour voir si vous êtes d'accord. Si c'est pas comme ça, EA13 , tu m'arrêtes, ok?
Le nombre b est 2999 et le nombre a est n'importe quel nombre. Et, il est n'importe quel nombre parce que...... pourquoi?
(Silence)
Professeur : ok, on s'arrête par ici parce que je ne vois pas un 7xb ....je ne le vois pas.... Le nombre a on le multiplie par b, je ne comprends pas.... C'est bizarre.....ici j'ai le 7xb.....ici j'ai le « a » mais après le « a » après ce n'est pas plus....je n'ai rien compris ....

Après le petit bilan, les groupes ont recommencé leur travail privé. Les élèves du groupe qui avait produit une explication relevant d'un empirisme naïf reconnaissent certaines limites à leur explication, mais ils ne peuvent s'approprier aucune des connaissances injectées pendant le bilan. Cette reconnaissance n'a pas été suffisante pour leur permettre d'avancer dans la production d'un autre type d'explication. Les autres groupes ont profité du bilan: le fait de partager des argumentations similaires avec des implicites différents leur a permis de revenir sur leurs propres productions avec des informations différentes. Pendant le débat public, on observera l'évolution de ces groupes et l'accord collectif sur les explications à retenir.

Dans la classe A2, quelques groupes se sont rendu compte de l'indépendance du premier nombre au moment du premier bilan, d'autres l'avaient déjà reconnue pendant l'étape exploratoire. La classe A1 et le professeur A, dans le cadre d'une institution particulière, partageaient un contrat didactique dans lequel il était toujours nécessaire d'expliquer le pourquoi des résultats obtenus pour qu'ils soient acceptés par la classe. La classe A2 avait commencé à construire un contrat de cette nature avec le professeur B, mais l'histoire institutionnelle était bien différente : jusqu'à ce moment, le travail des élèves était plus centré sur la production de résultats que sur leur validation. Cette différence implique un processus de dévolution différent : le professeur B a dû faire un effort permanent pour que les élèves acceptent d'examiner la question de la construction d'une explication, pour qu'ils s'engagent dans cette étape de la situation. La situation est un cadre de travail pour les élèves, mais aussi pour le professeur, pour l'élaboration d'un contrat spécifique. Margolinas (2004) montre, à propos des phases de validation, que le travail du professeur est conditionné par les propriétés de la situation : ce sont les contraintes de la situation qui permettent le développement (ou non) des phases de validation (existence de critères de validité) et pas seulement « la décision » du professeur. Margolinas suppose, dans son analyse, un sujet mathématique, modélisation qui lui a été fortement utile pour sa découverte.

Accepter de rentrer dans un jeu mathématique (se comporter comme « un sujet mathématique », c'est-à-dire en acceptant la responsabilité de s'engager dans le problème et d'utiliser des connaissances mathématiques pour le résoudre) et avoir des conditions dans la situation pour une phase de validation (existence de critères de validité) n'est pas suffisant pour que des connaissances *s'activent et fonctionnent* comme critères de validité. Nous avons déjà observé que, dans le cadre du développement de pratiques algébriques, la mise en jeu des connaissances anciennes comme critère de validité implique plus que la maîtrise des dites connaissances : elle implique un fonctionnement différent de ces connaissances. C'est au cœur d'une dialectique ancien-nouveau que ces connaissances peuvent s'activer et fonctionner de manière différente. L'action du professeur, pour faire vivre cette dialectique, peut être nécessaire et/ou fondamentale.

Dans toutes les classes observées, le processus de dévolution a pris des caractéristiques particulières selon chaque groupe et chaque professeur : le professeur A a joué plus avec l'incertitude (il s'est appuyé sur un contrat institutionnel assez solide) et les interactions entre les groupes ; le professeur B a varié ses stratégies en fonction de chaque équipe : en injectant des connaissances pour ceux qui avaient de la difficulté à évoluer (la plupart des groupes) ou en demandant des précisions et des explicitations pour ceux qui ont pu élaborer certaines explications. Dans tous les cas, ils ont agi sur des « variables générales » et la validation des productions a été renvoyée au débat collectif.

La plupart des groupes qui ont évolué vers la production d'une explication ont éprouvé des difficultés à exprimer leurs raisonnements (groupe 1, classe A). Dans la classe A2, on se retrouve avec des difficultés similaires. Le manque de compréhension d'un des élèves du groupe commande des efforts d'explicitation :

<u>Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B</u>

<u>Groupe 4</u>

EA21 : (oralement) dans un moment déterminé, tu fais 66x2999 et dans un autre moment, tu fais 66 plus 7 et le résultat tu le multiplies par 2999....après tu soustrais et il y a quelque chose qui s'en va...
EA22 : attends, comment ?
EA21 : (oralement) tu soustrais le résultat de 73x66 moins le résultat 1, le résultat est la différence entre 73 et 66 mais aussi tu multiplies par 2999, le résultat va être ce que le premier avait de plus par rapport au deuxième....c'est comme si tu soustrayais 66 plus 7 moins 66 et le 7.....il écrit :

66+7= 73
-66
7 ------» 7x2999

Comprends-tu ?
EA22 : non
EA25 : nous ne comprenons que si tu écris !
EA21 : écrit :

73x2999=218927
66x2999=197934
soustraire
218927 ---» cela il serait 73x2999
-
197934 ----» cela il serait 66x2999
cela donne
20993 ----» ce résultat est ce que le premier a de plus par rapport au deuxième…

EA25: quand tu soustrais, c'est la même chose de soustraire ici (elle marque avec la main la partie du texte où est le calcul 73x2999 et 66x2999)
EA21 : ici tu as les nombres que tu vas multiplier (il marque avec la main la deuxième colonne du texte, c'est- à-dire, le calcul 73x2999 et 66x2999) et là (en référence à la première colonne, 218917 - 197934), tu as les multiplications déjà faites. Donc la différence ici (marque la première colonne) doit être la même que la différence ici (en référence à la deuxième colonne). Il écrit :

	218927	73x2999
-		
	197934	66x2999
	20993 ----»	le même résultat

Le résultat va être le même que si tu fais 66+7, qui est 73, moins 66 et ce résultat fois 2999, le deuxième nombre. Toujours ça donne ça.
EA22 : c'est toi qui va l'expliquer (en donnant à comprendre qu'il comprend mais qu'il ne peut pas reproduire l'explication)
EA25 : je ne comprends pas
EA22: regardes, tu as 66x2999 et 73, qui est 66+7, fois 2999. Donc, tu dois faire (il écrit) 73x2999-66x2999 , comprends-tu ?
EA25 : ah
EA21 : je ne suis pas bon pour expliquer… comment dire….regardes, 73 est 66+7 et les deux multipliés par 2999, quand tu fais la différence de chaque nombre fois 2999, quand tu soustrais les résultats, ….le résultat de 73x2999- 66x2999….
EA25: attends, attends…
EA21: quand tu fais la différence….tu peux faire directement 73-66 et le résultat qui est 7 fois 2999, parce que….la différence est 7…. Comprends-tu ?
EA25: oui, j'ai compris

Les élèves du groupe exigent que l'élève EA21 écrive ce qu'il dit oralement: l'écriture exige des précisions en même temps qu'elle objectivise des relations sur lesquelles les autres élèves peuvent réfléchir. Pour montrer « par écrit » les relations implicites qui vont permettre d'arriver à une justification, l'élève EA21 se voit obliger de travailler avec deux types d'écriture : une écriture arithmétique (première colonne) et une écriture « plus algébrique » qui lui permet d'expliciter la trace des résultats obtenus dans la première colonne. Mais cette écriture n'est pas encore opérationnelle : l'élève EA21 écrit 73x2999-66x2999 et il ne réalise pas chaque multiplication -parce qu'il est intéressé à en garder la trace-, mais il ne peut non plus produire une écriture équivalente qui montre et exprime la relation cherchée. L'écriture n'est pas encore un outil de calcul, mais elle est un outil pour réfléchir.

La recherche d'une explication exige de l'élève EA21 (qui se comporte comme un sujet mathématique, dans le sens dont nous avons déjà parlé) la mise en jeu d'un fonctionnement différent de ses connaissances arithmétiques : exprimer les calculs faits et « regarder » ces écritures pour elles-mêmes (et non pour leurs résultats) sont de nouvelles connaissances qui commencent à se développer. La propriété distributive est connue des élèves, mais toujours dans le cadre arithmétique (obtention d'un résultat, calcul mental). Pourtant, cette connaissance n'est activée explicitement par aucun élève pour obtenir une expression équivalente à 73x2999-66x2999. La propriété distributive est utilisée implicitement par certains élèves lorsqu'ils expriment (66+7)x2999. Cette « forme » d'écriture est associée à l'utilisation d'un geste. Dans presque toutes les classes observées, l'élève EA21 est le seul élève qui peut reconnaître implicitement cette propriété sur l'expression 73x2999-66x2999 ((73-66)x2999).

Il y a des connaissances caractéristiques des nouvelles pratiques à introduire que le professeur devra injecter dans le milieu; un nouveau sens des connaissances anciennes doit maintenant être élaboré. La situation permet de donner du sens à des écritures numériques absentes (et possiblement pas nécessaires) jusque là. Mais ce sens peut-il être reconnu par les autres élèves à partir de cette injection ? L'analyse globale du protocole nous montre que cela n'est pas évident pour la plupart des élèves de la classe A2 qui n'avaient pas réalisé, comme les élèves de la classe A1, un travail sur le calcul mental qui portait aussi sur des écritures qui explicitaient les relations engagées dans les dits calculs.

Les interactions à l'intérieur du groupe montrent que, dans certains cas, les élèves participent activement dans le processus de dévolution de la situation : le processus de dévolution n'est pas seulement caractérisé par l'action du professeur. Mais nous observons qu'à l'intérieur des groupes, les élèves se positionnent de manière différente : il y a les « producteurs » (des explications, dans ce cas) et les élèves dont le rôle est d'attendre la production des autres et de « comprendre » ce qu'ils produisent. Ces derniers élèves exigent des précisions aux « producteurs », et les producteurs exigent, implicitement avec leurs productions, la mobilisation des connaissances des autres élèves (qui ont besoin de comprendre). Les deux types d'élèves sont engagés dans la situation, mais chacun avec des finalités différentes. Mobilisant-ils les mêmes connaissances? Ces positionnements des élèves, ont-ils des impacts différents sur les apprentissages?

Enfin, les relations impliquées dans l'explication que ce groupe essaie de produire avaient déjà commandé, implicitement, le choix des nombres dans la première étape de la situation : on retrouve un rapport entre les connaissances mobilisées dans les étapes de production et la possibilité d'élaboration d'une validation.

Dans la même classe A2, il y a des groupes qui sont encore dans une étape d'élaboration de la conjecture:

<u>Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B</u>

<u>Groupe 1</u>

EA26 : le nombre 20993 tu le laisses comme ça mais c'est l'autre nombre que tu dois faire plus petit…par exemple, le groupe 2 a fait plus petit le nombre, ils ont mis 14, et donc, le 20993 il sera plus grand…
Professeur : quel nombre veux-tu changer, le premier ou le deuxième ?
EA26 : le deuxième….mais à dire vrai….
Professeur : plus grand ou plus petit ?
EA26 : je ne sais pas…pas plus grand…
Professeur : pourquoi pas ?
EA26 : parce qu'on ne peut pas
Professeur : ok, parce qu'on ne peut pas….ok, et si on met plus petit ?
EA26 : nous avons obtenu plus petit….mais on pourrait essayer avec 100, 1000…je ne sais pas….
EA27: et si on met deux nombres égaux ?
EA26 : si tu mets 2999 fois 2999 ça marche pas… beh…je ne suis pas sûr…
EA27: met 2000 fois 2000 …mais non….cela donne 20000…
EA26 : l'autre fois qu'est-ce qu'on a fait, on a mis le premier plus petit ou le deuxième ?
EA27 : le deuxième….je ne sais pas pourquoi on n'a pas essayé de mettre le premier plus petit…
EA26 : essayons
EA27 : Je sais pourquoi ça donne toujours le même nombre lorsqu'on multiplie par 2…..
EA28 : parce que lorsqu'on multiplie 1000000x2 on obtient un nombre et lorsqu'on multiplie 1000007 fois 2, à la fin tu obtiens toujours 14 !
EA27 : et avec ça qu'est-ce qu'on fait ?
EA28 : je soupçonne que la question vient par là… parce que là tu obtiens toujours le même nombre…
EA26: on ne sera pas lié à cette question du « plus » et du « moins » dans la soustraction et l'addition ? (il fait référence à l'explication donnée par Ale pendant le premier bilan)

Le groupe n'a pas une conjecture construite ; les élèves doutent, proposent d'autres exemples mais, en même temps, ils essayent de comprendre les relations implicites:

[..........]

EA26 : attendez....je ne me comprends pas moi-même mais à l'intérieur, oui, je me comprends...
EA27 : explique-moi
EA26 : d'abord j'ai besoin de comprendre moi-même avant de pouvoir t'expliquer quelque chose....je ne peux pas....d'où vient ce 7 ? (en référence à 7x2999)... je ne sais pas....d'où vient....je ne comprends pas !
EA28 : écoute...ici on a presque le même calcul (en référence à 1000007x2999 et 1000000x2999) sauf que tu es en train de multiplier un 7 plus...
EA26 : oui, attends....si tu as mis7 ici (en référence au 7 de 1000007), ce 7 est comme un obstacle pour éviter de changer le nombre....c'est comme s'ils te mettent un obstacle pour que tu ne puisses pas suivre avec les autres nombres....

(il écrit :

$$\begin{array}{r} 1000000\underline{7} \\ \times 2 \\ \hline 200000\underline{14} \end{array}$$

en soulignant le 7 et le 14)

Donc....si tu mets n'importe quel nombre....par exemple 3500

(il écrit :

3500   3507
x2999   x2999 ce calcul est le même que l'autre mais avec le 7....et comme je t'ai dit, le 7 est un obstacle pour que le nombre ne change pas....si tu enlèves le 7, donc il ne te fait plus obstacle...si tu le mets...tu obtiendras toujours le même résultat... celui qui a inventé le problème a mis le 7 comme un obstacle.... c'est l'obstacle qu'il a mis....Professeur ! (il appelle le professeur)

Les élèves acceptent, probablement de manière provisoire (ils doutent, par exemple, que cela soit valide si on choisit 2999 pour le premier nombre et 2999 pour le deuxième nombre), que le résultat soit 7x2999 et ils se questionnent sur le rapport entre ce « 7 » qui apparaît à la fin et le « 7 » qui est donné dans l'énoncé du problème. On revient sur la stratégie de choisir des nombres particuliers (les deux exemples finissent par des « zéros ») de manière à « voir » l'influence du « plus 7 » sur les résultats. Mais en même temps, les élèves changent aussi le deuxième nombre (ils mettent « 2 » au lieu de « 2999 ») pour que « les effets » sur le résultat lors la multiplication soient plus visibles.

Pour ce groupe, l'explication ne sera pas seulement un moyen de comprendre « le pourquoi », mais aussi pour accepter définitivement la conjecture. L'écriture et le choix de certains nombres particuliers qui permettent de visualiser l'effet du « fois 7 » sur le résultat jouent, alors, un rôle fondamental : ils permettent de formuler des hypothèses autour des relations impliquées et ils sont un appui pour une première étape de généralisation. Cette position est différente de celles des autres groupes qui, en général, s'engagent dans la production d'une explication une fois convaincus de la validité de la conjecture.

Nous ne connaissons pas les raisons pour lesquelles les élèves construisent ce rapport à la situation (contrat didactique, statut spécial de certains élèves du groupe, etc.), mais l'acceptation de cette entrée dans le jeu leur permet d'évoluer :

[...........]

EA27: la question est de savoir pourquoi le 7 est là
EA26 : parce que c'est l'obstacle ! Si on avait mis le 8, cela aurait été le 8 qui resterait...
EA27 : professeur ! (appelle le professeur)
EA26 (il explique au professeur) : regarde, 7x2999 est 20993...donc ce qu'il faut faire....comme le 7 tu l'utilises toujours (il fait référence à l'énoncé du problème, le premier et le deuxième nombre sont des variables mais le 7 est constant) ...le 7 est comme l'obstacle qu'ils te mettent...si tu ne mets pas le 7 donc, tu auras celui (il indique le 3500 sur le dernier calcul) fois celui (il indique le 2999) deux fois....
EA27: et lorsque tu soustrais, tu obtiendras 0...
EA26 : ahhh....attendez....attendez.... c'est ce résultat fois 2....
Professeur : oui, mais....d'où sort ce 2 ?
EA26 : sans le 7 (il dit que sans le 7, on *aura deux fois* la multiplication 3500x2999)
Professeur : ok mais d'où sort le 2 ?
EA26 : ici et ici deux fois (indique les calculs antérieurs avec le 3500, en couvrant le 7 du 3507 avec un doigt)
Professeur : oui, mais le problème dit que tu dois le soustraire, pas les additionner...à ce calcul (en référence à 3507x2999) il faut le soustraire le premier calcul....pas inventer d'autres calculs...
EA26 : ah...
Professeur : tu me dis que si tu ne mets pas le 7, tu fais le même calcul, mais si tu fais la différence, cela te donne combien ?
Tous les élèves du groupe : 0
Professeur : tu as l'obligation de respecter les calculs de l'énoncé ...tu ne peux pas changer les calculs que le problème te donne...Tu ne peux pas te débarrasser du 7 !
EA27 : EA26 dit que le 7 est la clé de la question.
EA28 : bien sûr, s'il faut toujours ajouter le 7, tu obtiendras le deuxième nombre fois 7 ...
Professeur : ajoutes-tu le 7 ?
EA26 : non, tu dois multiplier par 7
EA28 : lorsque tu multiplies le nombre obtenu dans le deuxième pas, le deuxième nombre sera multiplié aussi par 7
Professeur : ah
EA28 : pour cela le résultat sera toujours « fois 7 »
Professeur : tu veux dire que ce nombre (en référence à 3507) est 7 de plus que celui-ci (en indiquant le 3500) et que lorsque l'on multiplie....tu dis qu'on obtiendra......c'est justement cette partie que je ne comprends pas...
EA28 : que le résultat devra être 7 fois ce nombre...
Professeur : le deuxième nombre ? Pourquoi ? ... Tu me dis que la différence est de 7 et qu'ici la différence est de 14 (maintenant le professeur fait référence à l'exemple dont le premier nombre était 1000000 et le deuxième 2)
EA28 : je dis qu'ici tu multiplies par 7 (en référence au 2 qui est le deuxième nombre choisi et au 7 qui est l'unité de 1000007)

(Il écrit :

1000007
x2
........14)

Professeur : oui, mais dans cet exemple là tu as plusieurs zéros.... Mais s'il n'était pas comme cela ? Je pense que dans ce cas, cette partie finale de ce calcul (elle indique le 14) va changer plus....Avec tous ces zéros c'est très facile...tu as le 7 « tout seul» ...tu as le 14 « tout seul » ....cela semble très clair....mais....je crois que si on ne met pas ces zéros, cela ne marchera pas....
EA26 : regardons....si nous mettons....
Professeur : oui, bien sûr, pensez à ce qui se passe avec d'autres nombres....

(le cours s'est terminé ainsi)

L'impossibilité de produire une « écriture » plus algébrique semblerait empêcher les élèves d'expliciter les relations identifiées et les précisions que le professeur leur demande. Les élèves trouvent encore une solution provisoire : construire une écriture sur des nombres particuliers qui permettent de « voir » les relations engagées ; il s'agit d'une écriture liée aux habitudes arithmétiques, mais qui « dénonce » le besoin de « refléter » les relations. Pour que cette écriture devienne opérationnelle et, alors, « générale », elle devra évoluer.

Les interventions du professeur ont, d'abord, l'intentionnalité de reconduire les élèves vers le problème en question (à travers l'accomplissement des conditions), puis, de maintenir une certaine incertitude: le professeur reconnaît un certain niveau de généralité, mais son projet exige d'aller plus loin. À la différence du professeur A, le professeur B n'organise pas un petit bilan même s'il se trouve avec le même type de différences entre les productions des groupes : il connaissait très bien les productions de chaque groupe et il décide d'injecter les connaissances à l'intérieur des groupes qui avaient plus de difficultés.

<u>Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B</u> (à l'intérieur d'un groupe en difficulté)

Professeur : mais....je sais que cela donne 20993 mais je continue sans comprendre pourquoi on obtient toujours la même valeur...
(Silence)
Professeur : EA29? EA210?
(Silence)
EA29 : mais je ne sais pas.....je...
Professeur : pourquoi on ne prend pas un exemple facile, par exemple 10 et 2999
EA210 : mais on fait quoi?
Professeur : on fait les calculs et on essaie de « regarder » (prononciation plus forte) ce qui se passe, à mesure que vous faites les calculs....

Le professeur propose une stratégie sans spécifier qu'elle a été produite par d'autres élèves de la classe, mais la seule demande de « regarder » pas à pas les calculs faits n'a pas été suffisante pour faire évoluer les élèves; le temps a été aussi une limite importante : le débat collectif a été démarré 5 minutes après cette intervention, parce que plusieurs groupes étaient déjà suffisamment avancés. De plus, comme on vient de voir, les élèves qui partent de « plus loin » ont peut-être besoin de passer par des écritures « plus arithmétiques » (en choisissant par exemple 10000 et 2), avant de pouvoir reconnaître ce qui est subjacent à une écriture plus algébrique? Si oui, l'intervention du professeur devrait être plus précise. L'intervention du professeur n'a pas pour objet d'activer des connaissances : « le regarder » ce qui se passe implique un changement du fonctionnement des connaissances arithmétiques (dans le cadre de nouvelles pratiques) auquel il est impossible d'accéder à partir d'une telle indication.

<u>Extraits des interactions dans la Classe Q1, Professeur D</u>

Dans le passage suivant, le professeur essaie d'injecter des connaissances dans le milieu, mais ces connaissances ne sont pas articulées avec les productions des élèves : il s'agit d'une intervention prévue d'un point de « vue » générique. Les élèves discutaient fortement sur leurs propres productions et cette intervention exige un changement de perspective que les élèves n'acceptent pas. Ils ignorent l'intervention du professeur et poursuivent leur travail :

<u>Équipe 5</u>

Prof : si toujours cela donne le même nombre....il faut expliquer pourquoi c'est comme ça
EQ151 : oui, ça donne tout le temps le même nombre,. 20993 à cause du 2999
Prof : pourquoi?
EQ152 : essaie avec 2998
EQ151 : mettons 2998 aussi pour le premier nombre...
EQ153 : non...mets 2000
(font les calculs et obtiennent 20986)
EQ151 : ...essaie quelque chose d'autre....essaie 2997..regarde...
EQ153 : attends
EQ151 : la dernière fois ici il y avait 9 et ici 3 (en référence aux deux derniers chiffres de 20993)...le trois a doublé et ça c'est un de moins (en référence aux deux derniers chiffres du résultat 20986)... si tu mets 2997...tu penses que ça va faire ici 20979? (le chiffre des unités est trois fois le chiffre des unités de 20993, le chiffre des décennies est 2 de moins)
(il fait les calculs et vérifie que le résultat coïncide avec son hypothèse)
Oh j'ai raison!
EQ153 : oui, c'est vrai!

EQ154 : écoute un peu! Il faut prouver que si tu multiplies 2999 par n'importe quel nombre toujours on va obtenir 20993....c'est ça ce qu'il faut faire...mets 3000 pour le premier
(EQ154 fait les calculs avec 3000 et 2999)...
EQ154 : mais qu'est-ce qu'il faut faire....
Prof : expliquer pourquoi si tu changes le premier et tu laisses toujours le deuxième qui est 2999, tu obtiens toujours la même valeur.
EQ154 : ah oui, oui, ok
EQ151 : il faut trouver un rapport avec le 7...
EQ154 : attends
EQ153 : ah....je sais....parce que tous les nombres ont le même rapport entre le premier nombre et 2999...
EQ151 : non, c'est pas juste 2999...ici le 7! .....il faut trouver le rapport avec le 7!
EQ153 : le rapport entre le premier nombre et le deuxième nombre ça va être quelque chose et quand on ajoute 7 ça va être toujours le même rapport.
EQ151 : ... fait 2000 x2999 (font les calculs et obtiennent 20993)....divise par 2999 ah! le 7! (il a fait 20993 :2999). Tu veux c'est le 7! C'est comme je disais!
EQ153 : c'est pas le 7! Je sais pourquoi c'est pas le 7, parce que si tu fais ....

Une première intervention du professeur répond au besoin de l'élève EQ154, mais aussi à son projet d'enseignement : la découverte de l'élève EQ151 n'est pas considérée parce que le professeur n'est pas capable d'interpréter « à chaud », puis d'intervenir (nous pouvons affirmer cela parce que, il faut le rappeler, le professeur du cours a été l'auteur de la thèse). La connaissance profonde de la situation que nous avions n'a pas été suffisante : il y a de contraintes internes (dans le sens de Coulange, 2001) qui conditionnent le travail de n'importe quel enseignant. Plus encore, ces contraintes sembleraient nous faire agir d'une manière pas trop différente de celle que les chercheurs ont relevés dans les classes ordinaires, la différence étant fondamentalement autour de la nature des interventions : dans les classes ordinaires, les interventions ne sont pas nécessairement prévues tandis que dans les ingénieries, on a une série des interventions possibles. Pourtant, les effets de ces interventions sembleraient ne pas être trop différents.

Nous pouvons voir maintenant que « la découverte » de l'élève n'est pas loin d'une articulation avec l'objet de cette étape de la situation : le rapport trouvé indique la différence entre chaque résultat, soit 20993-20986 = 7, et elle est exprimée par l'élève en termes d'ajouter 3 et enlever 10.

[..........]

Prof : je veux vous aider un peu....qu'est-ce que vous voulez expliquer...
EQ151 : que c'est à cause du 7 qui ça donne tout le temps la même chose
EQ153 : non. non.... Je veux expliquer pourquoi toujours ça donne toujours 20993 avec le 2999

Prof : c'est-à-dire, il faut expliquer pourquoi si on change le premier et le deuxième c'est toujours 2999, on obtient toujours 20993.. je vous suggère...on peut voir sur le tableau que la premier équipe a choisi 1 et 2999. Je vous propose de faire écrire tous les pas qu'il faut faire avec ces nombres mais faire le calculs, en laissant écrit chacun des pas ...par exemple, 1x2999 , j'écris ça sans écrire le résultat... la même chose après
Les élèves écrivent 1+7x2999
Prof : Qu'est-ce qu'il faut multiplier par 2999, le 7 ou tout le résultat de...?
EQ153 : tout le résultat...
Prof : qu'est-ce qu'il faut faire pour indiquer cela?
EQ151 : une parenthèse
Les élèves écrivent (1+7)x2999
Prof : enfin... il faut faire (1+7)x2999-1x2999
Maintenant, je vous demande de travailler avec ça ...si le fait d'avoir écrit comme cela, sans mettre le résultat dans chaque pas, vous permet de voir quelque chose ici qui vous permettra de conclure que cela va donner toujours 20993
EQ153 : ok
EQ151 : si on change un peu l'équation...ça va donner quelque chose
EQ153 : on peut pas changer l'équation....
EQ151 : oui...je sais...je sais...
EQ153 : le problème est avec le 7....
EQ151 : c'est pas juste ça eh...
(Les élèves ne font pas attention à la suggestion proposée par le professeur)
EQ153 : oui, si ...
EQ151 : si on change le 7, ça donnera tout le temps la même chose
EQ153 : non
EQ151 : ça va faire la même chose....
(Plusieurs fois le professeur est venu expliquer ce qu'il faut faire. Les élèves se perdaient)...
EQ151 : il doit y avoir une règle...il faut trouver la règle... pourquoi...pourquoi le 7?
EQ153 : mais si tu changes le 7, ça va donner une autre chose
EQ151 : oui, mais si tu changes par le 9, tu obtiendras tout le temps le même nombre!
Si on utilise le 8 à la place de 7, on va obtenir toujours le même nombre, regarde! (il fait certains calculs en ajoutant 8 à la place de 7) Si on utilise le 7. on va faire toujours moins 1 et plus 3 (en référence aux derniers chiffres de 20993) pourquoi? Pourquoi?
EQ153 : monsieur (au professeur), on sait que c'est le 7 mais on sait pas comment expliquer
EQ151 : on sait que c'est à cause du 7...mais ....regarde on a changé un nombre, on a mis 8 à la place de 7... avec le 7 on obtient toujours 20993...on a mis à la place 8....
EQ152 : c'est pas juste le 7, c'est ce nombre (en référence à 2999) et le 7!... comment le prouver? Ça m'énerve!
EQ151 : ah oui...le deuxième nombre et le 7...

L'intervention de l'enseignant n'a pas modifié le milieu des élèves : les élèves identifient certaines relations, mais ne peuvent les articuler. Cette intervention, sur un type d'écriture qui pourrait les aider à organiser les informations, ne porte pas sur les productions des élèves, mais sur un modèle préétabli d'explication possible : elle est basée sur des actions qui ne sont pas les actions qui sont à la base de la production des conjectures proposées par les élèves. Ce paragraphe nous fait réfléchir sur l'articulation entre certaines interventions imaginées a priori et les actions nécessaires sur lesquelles l'écriture devrait s'appuyer pour que la signification qu'elles portent puisse être reconnue par les élèves.

Les interactions à l'intérieur de certains groupes, par rapport au caractère explicatif ou non des justifications proposées, aident au processus de dévolution, mais elles ne sont pas suffisantes pour faire évoluer les élèves :

Équipe 1

EQ114 : on peut dire comme ça : si on multiplie le nombre a par 2999 on obtient ....on obtient x.
EQ112 : et après si on ajoute 7 on obtient x plus 20993
EQ114 : si on ajoute 7 à « a », il faut dire...si on fait le même calcul mais avant on ajoute 7 à « a »....
Prof : avez vous trouvé qu'on obtient toujours le même nombre?
EQ114 : oui, parce que si l'on ajoute 7 au premier nombre...la différence entre la multiplication numéro 1 et la multiplication numéro 2 est 7 fois le deuxième nombre...
Prof : as-tu un moyen de l'écrire, de trouver une écriture mathématique qui le montre?
EQ114 : ah...mathématique! Écrivons... si on additionne 7 à « a » et qu'on fait la multiplication par le deuxième nombre...
EQ112 : par ou avec
EQ114 : par ou avec....c'est la même chose...par 2999 on obtiendra « y ».
Après il faut écrire : si...si on fait
EQ115 : mais ça n'explique pas pourquoi ça te donne toujours le même nombre.
EQ114 : oui, ...c'est ça.... Parce que....il faut l'écrire avec une formule qui marche pour tous les nombres qu'on peut trouver, c'est ça...
EQ115 : mais je comprends pas pourquoi cela t'explique...
EQ114 : explique-toi, alors!
EQ115 : je sais pas...
EQ112 : ensuite...on doit faire y-x que ça donne 20993...
EQ114 : mets entre parenthèse : ou 7x2999
EQ115 : écrit le texte et continue:

Formule
29999a=x
2999 (a+7)=y
y-x=20993

EQ114 : on peut mettre x égal... x égal....y=x+20993 .... Non....x+7 fois 2999...
Prof : tu vois ici (en indiquant le troisième pas du calcul) que la différence donne 20993?
EQ114 : oui, à cause qu'il y a un 7 de plus que dans le premier...ça veut dire que sur le premier nombre que tu multiplies, tu vas toujours avoir un 7 de plus...donc 7 fois le deuxième nombre...
Prof : mets cela avec une écriture...
EQ114 : y=x+7.2999...égal à 20993
EQ115 : mais non, « y » n'est pas égal à 20993

L'expression « écriture mathématique » évoque, chez les élèves, une écriture avec des lettres. Mais on peut voir qu'ils restent dans le domaine arithmétique en « remplaçant » les résultats des calculs par des lettres. L'intentionnalité de l'enseignant est liée à un fonctionnement des connaissances arithmétiques que les élèves ne peuvent pas reconnaître: son intervention ne change pas les contraintes du milieu pour exiger cette production et n'injecte pas de connaissances qui puissent fonctionner comme des rétroactions. Il s'agit d'une intervention intéressante pour le professeur qui peut avoir accès à ce que les élèves comprennent comme « écriture mathématique explicative », puis

Les interactions à l'intérieur de certains groupes, par rapport au caractère explicatif ou non des justifications proposées, aident au processus de dévolution, mais elles ne sont pas suffisantes pour faire évoluer les élèves :

Équipe 1

EQ114 : on peut dire comme ça : si on multiplie le nombre a par 2999 on obtient ....on obtient x.
EQ112 : et après si on ajoute 7 on obtient x plus 20993
EQ114 : si on ajoute 7 à « a », il faut dire...si on fait le même calcul mais avant on ajoute 7 à « a »....
Prof : avez vous trouvé qu'on obtient toujours le même nombre?
EQ114 : oui, parce que si l'on ajoute 7 au premier nombre...la différence entre la multiplication numéro 1 et la multiplication numéro 2 est 7 fois le deuxième nombre...
Prof : as-tu un moyen de l'écrire, de trouver une écriture mathématique qui le montre?
EQ114 : ah...mathématique! Écrivons... si on additionne 7 à « a » et qu'on fait la multiplication par le deuxième nombre...
EQ112 : par ou avec
EQ114 : par ou avec....c'est la même chose...par 2999 on obtiendra « y ».
Après il faut écrire : si...si on fait
EQ115 : mais ça n'explique pas pourquoi ça te donne toujours le même nombre.
EQ114 : oui, ...c'est ça.... Parce que....il faut l'écrire avec une formule qui marche pour tous les nombres qu'on peut trouver, c'est ça...
EQ115 : mais je comprends pas pourquoi cela t'explique...
EQ114 : explique-toi, alors!
EQ115 : je sais pas...
EQ112 : ensuite...on doit faire y-x que ça donne 20993...
EQ114 : mets entre parenthèse : ou 7x2999
EQ115 : écrit le texte et continue:

Formule
29999a=x
2999 (a+7)=y
y-x=20993

EQ114 : on peut mettre x égal... x égal....y=x+20993 .... Non....x+7 fois 2999...
Prof : tu vois ici (en indiquant le troisième pas du calcul) que la différence donne 20993?
EQ114 : oui, à cause qu'il y a un 7 de plus que dans le premier...ça veut dire que sur le premier nombre que tu multiplies, tu vas toujours avoir un 7 de plus...donc 7 fois le deuxième nombre...
Prof : mets cela avec une écriture...
EQ114 : y=x+7.2999...égal à 20993
EQ115 : mais non, « y » n'est pas égal à 20993

L'expression « écriture mathématique » évoque, chez les élèves, une écriture avec des lettres. Mais on peut voir qu'ils restent dans le domaine arithmétique en « remplaçant » les résultats des calculs par des lettres. L'intentionnalité de l'enseignant est liée à un fonctionnement des connaissances arithmétiques que les élèves ne peuvent pas reconnaître: son intervention ne change pas les contraintes du milieu pour exiger cette production et n'injecte pas de connaissances qui puissent fonctionner comme des rétroactions. Il s'agit d'une intervention intéressante pour le professeur qui peut avoir accès à ce que les élèves comprennent comme « écriture mathématique explicative », puis interagir en fonction de ces connaissances, mais il faudrait repenser ces interventions pour permettre l'évolution de la situation. Pour les élèves EQ115 et EQ114, l'écriture produite montre que la différence est 20993 : habitués à une pratique dans laquelle l'écriture est l'expression de la pensée et non pas un outil *pour* penser, ils traduisent par cette écriture des relations préalablement identifiées, sans identifier des nouvelles relations, à partir d'opérations sur les écritures mêmes.

Certaines interactions de l'équipe 6 que nous montrerons par la suite montrent clairement un fonctionnement typiquement arithmétique des écritures produites, comme nous venons de le voir dans l'épisode de l'équipe 1 :

<u>Équipe 6</u>

EQ161 : j'ai trouvé la logique… parce qu'on additionne 7 et en additionnant n'importe quel nombre à ton nombre et si on soustrait un 7 de plus à ton nombre, tu as 7 fois le premier nombre… le deuxième nombre…
Prof : peux-tu trouver une manière d'écrire ça? Une manière mathématique qui permet d'expliquer que tout ce calcul donne 7 fois 2999
EQ161 : regardez…si tu mets 1x2999 =2999
1+7
8 x2999-2999
23992-2999 = 20993

et c'est la même chose que le premier nombre fois 7

Mets x.y=a
(x+7)y=ax7=20993

Les relations sont identifiées (soit à partir d'analyses comme celles faites par l'élève EQ161, soit à partir de l'analyse d'une série de cas particuliers pendant l'étape de production de la conjecture), puis après elles sont écrites : pendant la première étape de la situation, les élèves arrivent à la conclusion que le calcul donne toujours 20993; ensuite, ils identifient que ce résultat est toujours 7 fois le premier nombre (en s'appuyant sur des argumentations qui ne sont pas très explicites); enfin, ils écrivent une chaîne de relations qui expriment les résultats trouvés, mais qui n'explicitent pas les raisons de l'équivalence de chaque « morceau » de cette chaîne. L'écriture est clairement un moyen d'expression de la pensée. Dans les équivalences exprimées par l'élève EQ161, ax7 (x n'étant pas une variable mais le symbole de la multiplication) n'est pas une transformation « équivalente » de l'expression (x+7)y (du point de vue syntaxique); elle est plus une équivalence sémantique entre ces deux expressions (qui pourrait avoir une origine dans l'observation d'une régularité de certains cas particuliers, et non pas dans l'analyse du calcul impliqué dans la partie de gauche de l'équivalence) . Les raisons de cette équivalence ne sont pas explicitées dans l'écriture. On pourra voir dans la suite du protocole, que l'élève EQ161 a identifié les relations à la base de cette équivalence, mais il ne les exprime pas dans l'écriture :

[..........]

EQ164 : attends, attends, je comprends pas ça, pourquoi tu fais ax7?
EQ161 : parce que regarde.... le 7 quand tu l'additionnes à x ...ça va te donner toujours a...il te manque le 7....tu peux pas ajouter 7.... Il faut faire fois 7...
Attends je veux t'expliquer mieux : 1x2999 ok, ça te donne 2999, la deuxième étape tu dois rajouter 7...
EQ164 : 7 à 1
EQ161 : ok mais...1+7 fois 2999 ça va te donner,...23992...la différence est 20993
Si tu ajoutes le 7 à 1, quand tu multiplies, tu multiplies tout ...le 7 et le 1...je sais pas comment le dire...pour ça il faut faire fois 7

(yxz)-(y+7)xz = ax7 =20993=7x20993

EQ164 : je comprends pas pourquoi tu mets ax7....c'est plus 7 le premier...mais fois...
EQ161 : j'ai appris ça l'année passée...
EQ164 : l'algèbre?
EQ161 : c'est pas l'algèbre, c'est quelque chose qui nous préparés à l'algèbre...mais je sais pas comment l'utiliser là...
(....)
EQ164 : tu dois pas multiplier par 7....la règle dit ajouter 7 au premier nombre et multiplier ce résultat par le deuxième nombre. Par exemple...
EQ163 : check....check...quand tu fais 1+7 fois 2999, tu fais 8x2999 et quand tu soustrais le premier, tu soustrais une fois 2999, tu soustrais une fois le nombre...pour ça reste 7 fois le nombre...
EQ161 : non...mais je pense que je l'ai...le premier total est 20993 ....ça c'est la vraie réponse...si tu as la réponse final....tu divises par le deuxième nombre...2999 ça va te donner 7....quand tu fais ça....ça c'est y ....
EQ163 : mais écoute, parce qu'on a déjà fait 1 fois le 2999 ... on doit le supprimer et pour cela, il reste 7 fois 2999.
EQ161 : oui, je sais
EQ163 : c'est juste le 7x2999 qui reste...
EQ161 : y.z après....
EQ163 : pas besoin de mettre z, mets 1
EQ161 : mais 1 ça va être un différent nombre que z
EQ163 : ça va donner égal parce que n'importe quel nombre, si tu mets 2999 tu obtiens toujours 20993. Donc tu mets 1. On a pas mis de chiffres...c' est le rapport qui intéresse...
(...)

On peut voir, dans cet extrait, que l'élève peut identifier les relations qui justifient la différence entre « ajouter 7 » au premier nombre et multiplier par 7 le deuxième, comme « équivalentes » à faire tous les calculs. Par un effet de contrat (« il faut utiliser l'algèbre, ce que nous avons appris l'année passée »), trouver une explication ou un écriture mathématique pour expliquer est compris par les élèves comme « écrire avec des lettres ». L'écriture « avec des lettres » est encore l'expression des relations déjà identifiées. Chaque élève semblerait être centré sur sa production : les élèves ne produisent pas une explication commune, ce qui caractérise les interactions à l'intérieur l'analyse du calcul impliqué dans la partie de gauche de l'équivalence) . Les raisons de cette équivalence ne sont pas explicitées dans l'écriture. On pourra voir dans la suite du protocole, que l'élève EQ161 a identifié les relations à la base de cette équivalence, mais il ne les exprime pas dans l'écriture :

[..........]

EQ164 : attends, attends, je comprends pas ça, pourquoi tu fais ax7?
EQ161 : parce que regarde.... le 7 quand tu l'additionnes à x ...ça va te donner toujours a...il te manque le 7....tu peux pas ajouter 7.... Il faut faire fois 7...
Attends je veux t'expliquer mieux : 1x2999 ok, ça te donne 2999, la deuxième étape tu dois rajouter 7...
EQ164 : 7 à 1
EQ161 : ok mais... 1+7 fois 2999 ça va te donner,...23992...la différence est 20993
Si tu ajoutes le 7 à 1, quand tu multiplies, tu multiplies tout ...le 7 et le 1...je sais pas comment le dire...pour ça il faut faire fois 7

(yxz)-(y+7)xz = ax7 =20993=7x20993

EQ164 : je comprends pas pourquoi tu mets ax7....c'est plus 7 le premier...mais fois...
EQ161 : j'ai appris ça l'année passée...
EQ164 : l'algèbre?
EQ161 : c'est pas l'algèbre, c'est quelque chose qui nous préparés à l'algèbre...mais je sais pas comment l'utiliser là...
(....)
EQ164 : tu dois pas multiplier par 7....la règle dit ajouter 7 au premier nombre et multiplier ce résultat par le deuxième nombre. Par exemple...
EQ163 : check....check...quand tu fais 1+7 fois 2999, tu fais 8x2999 et quand tu soustrais le premier, tu soustrais une fois 2999, tu soustrais une fois le nombre...pour ça reste 7 fois le nombre...
EQ161 : non...mais je pense que je l'ai...le premier total est 20993 ....ça c'est la vraie réponse...si tu as la réponse final....tu divises par le deuxième nombre...2999 ça va te donner 7....quand tu fais ça....ça c'est y ....
EQ163 : mais écoute, parce qu'on a déjà fait 1 fois le 2999 ... on doit le supprimer et pour cela, il reste 7 fois 2999.
EQ161 : oui, je sais
EQ163 : c'est juste le 7x2999 qui reste...
EQ161 : y.z après....
EQ163 : pas besoin de mettre z, mets 1
EQ161 : mais 1 ça va être un différent nombre que z
EQ163 : ça va donner égal parce que n'importe quel nombre, si tu mets 2999 tu obtiens toujours 20993. Donc tu mets 1. On a pas mis de chiffres...c' est le rapport qui intéresse...
(...)

On peut voir, dans cet extrait, que l'élève peut identifier les relations qui justifient la différence entre « ajouter 7 » au premier nombre et multiplier par 7 le deuxième, comme « équivalentes » à faire tous les calculs. Pour un effet de contrat (« il faut utiliser l'algèbre, ce que nous avons appris l'année passée »), trouver une explication ou un écriture mathématique pour expliquer est compris par les élèves comme « écrire avec des lettres ». L'écriture « avec des lettres » est encore l'expression des relations déjà identifiées. Chaque élève semblerait être centré sur sa production : les élèves ne produisent pas une explication commune, ce qui caractérise les interactions à l'intérieur du groupe. Il y a certains élèves qui cherchent des explications et d'autres qui collaborant en demandant des précisions, etc. On peut voir que pour l'élève EQ163, l'exemple générique est suffisant (demande de travailler avec 1 et non pas avec z), mais l'effet de contrat semblerait être plus fort :

[..........]

EQ161 : mais mets z parce que le z signifie un nombre entier…
EQ163 : mais ça c'est une autre affaire…
Prof : pourquoi avez vous choisi de mettre z et y?
EQ161 : pour simplifier les calculs, sinon ça va être très long..
Prof : x c'est qui?
EQ161 : il y a pas de x là!
Prof : c'est y, c'est le premier nombre?
EQ161 : on a fait (y+7)xz-(yz)= z7
z 7 + y z - (yz) = z7

(7 +3)x8- (3x8) = 8x7
8x7+3x8-3x8
Prof : pourquoi tout ce calcul donne z7? Je ne vois pas pourquoi tout ce calcul c'est la même chose que z7
EQ161 : on a pas fini encore notre affaire…
EQ163 : mais il faut dire pourquoi!
Q1E61 : je sais, je sais….

En plus de se conformer à l'exemple générique, pour l'élève EQ163, l'écriture produite n'explique plus que sa propre explication. Au contraire, il exige à tout moment des précisions à l'élève EQ161 en lui marquant le manque d'explicitation des relations cherchées. L'élève EQ161 reconnaît que ses écritures n'explicitent pas les relations impliquées.

De la même manière que dans les classes en Argentine, il y a eu des équipes qui ont travaillé sur des exemples génériques, en choisissant les exemples de manière à « voir » les effets des opérations réalisées sur les résultats obtenus. Ce choix empêche les élèves d'évoluer vers un autre type d'écriture, puis vers la généralisation du problème. Nous montrons un moment de l'interaction, lorsqu'un élève de l'équipe 4 montre sa production au professeur :

EQ144: mettons 900000 et 2999 . (L'élève produit l'écriture suivante)

900000 et 2999 ça fait 2699100000
+7
900007 x 2999 ça fait 2699120993)

(l'élève marque le 20993 et il remarque que les 5 premiers chiffres sont égaux, donc, que la différence est 0 pour les 5 premiers chiffres et 20993 pour ce qui reste)

Prof : ok, et cela explique pour toi pourquoi on obtient toujours 20993?
EQ144 : oui
Prof : ok, on verra qu'est–ce que les autres dissent, au moment du débat

Les élèves de ce groupe expriment oralement que le 20993 est lié « au 7 » qu'on ajoute dans le deuxième pas. Le type d'écriture a été choisi « pour expliquer » aux autres, mais ils ne reconnaissent encore dans l'écriture de la gauche les relations impliquées : ils doivent passer par les résultats pour montrer qu'on obtient 20993; ils n'associent pas non plus le 20993 et le 7x2999. Le fait de pouvoir « passer » aux résultats (parce qu'ils travaillent avec des nombres spécifiques, même possiblement génériques) ne contraint pas les élèves à se centrer sur les relations impliquées. Le professeur avait pensé que la question de la généralisation était un instrument pour exiger un autre type d'écriture, puis l'identification des relations implicites et a laissé cette problématique au moment de débat public, mais ce moment n'a pas existé. Des contraintes liées à cette classe particulière ont empêché de faire une discussion avec l'ensemble de la classe.

<u>Extraits des interactions dans la Classe Q2, Professeur D</u>

Dans cette classe considérée comme une classe d'élèves forts, nous rencontrons différents niveaux de généralisation :

<u>Équipe 7</u>

EQ271 : on peut mettre n pour le premier
EQ272 : oui, on fait une formule…
EQ271 : comme il faut faire le numéro 2 (en référence au pas 2) moins le numéro 1, mets 7 plus n fois 2999 moins…
EQ272 écrit : (7+n)x2999 – nx2999
EQ271 : et (7+n)x2999 est 7x2999+nx2999
EQ272 écrit : 7x2999+nx2999-nx2999
EQ271 : ici c'est la même affaire (en référence à nx2999) alors, ça s'annule et reste 7x2999
EQ272 écrit : 7x2999+nx2999-nx2999=20993 soit n n'importe quel nombre naturel
EQ273 : je comprends pas pourquoi ça
EQ271 : c'est quoi que tu comprends pas?
EQ273 : pourquoi il reste 20993?
EQ271 : parce que le premier pas est nx2999, le deuxième pas est (n+7)x2999 et le troisième pas est (n+7)x2999 – nx2999, mais la première multiplication est nx2999+7x2999 et quand tu enlèves le premier pas, on a nx2999 qui est pareil alors quand tu enlèves la même chose ce qui reste est 7x2999 et 7x2999 est 20993

EQ273 : ah…je comprends!
EQ272 : n'importe quoi tu mets comme premier nombre, tu auras toujours la même réponse.
La formule est le 7, fois le deuxième nombre.
Professeur : est-ce que ce que vous avez fait est plus convaincant que ce qui avait été écrit au tableau?
EQ271 : mais oui, parce que n … vous avez une variable….est n'importe quel nombre…

Le professeur se réfère au premier bilan dans lequel l'explication produite a été basée sur un exemple (0 et 2999) : les élèves identifient une différence principalement par rapport au niveau de généralisation. Nous identifions d'autres différences : les écritures algébriques sont porteuses d'information (expriment des relations) et elles sont des outils de calcul pour obtenir d'autres relations ou pour rendre visibles des relations implicites dans les expressions originales.

D'autres groupes produisent des écritures moins explicites ou dans lesquelles les calculs ne respectent pas les règles de transformation. La validation sur les productions des élèves et la comparaison des différentes écritures sera réalisée pendant le débat collectif.

1.4 Débat collectif : production d'explications, interactions et connaissances impliquées.

Lors du débat public, le professeur A fait un bilan des explications produites par les groupes et donne d'abord la parole aux groupes qui, durant l'étape du travail privé, avaient eu plus de difficultés pour exprimer les explications produites :

<u>Extraits des interactions dans la Classe A, Professeur A</u>

Professeur (écrit sur le tableau)

Explication 1 (groupe 4)

Premier nombre 1,2,3,…. Deuxième nombre : 2999
On obtient toujours 20993 parce qu'on a prouvé avec des valeurs différentes et toujours on a obtenu cela.

Explication 2 (groupe 3)

10 et 2999

2999	2999	2999
x10	x17	x17
29990	50983	x10 x7

  50983
- 29990

20993 cela est 2999x7

Explication 3 (groupe 5)

7x2999+20993

Pas 1 : axb
Pas 2 : (a+7)xb

Pas 3 : pas 2
- pas 1

7xb Tout cela donne 7xb

Explication 4 (groupe 2)

	A	b	
	2999	1	
x17 ↓		↓	x17
	50993	17	
2999 fois 10 →	- 29990	- 10	→ 1 fois 10
	20993	7	

Explication 5 (groupe 1)

2999 et 10

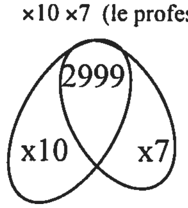
2999	2999	2999
x10	x17	x17
29990 (2)	50983 (3)	2999x10 2999x7

Le professeur rappelle les explications des groupes, en écrivant d'abord celles qui avaient été produites par les élèves qui n'avaient pas eu une participation active dans les bilans antérieurs.

Cette étape de la situation exige du professeur qu'il prenne une position plus active par rapport à la nature des explications produites. Les connaissances qui pourraient fonctionner comme critères de validité pour la validation sont en train de se construire. Les niveaux provisoires d'explicitation, nécessaires pour considérer (dans la communauté classe) qu'un raisonnement peut être une preuve qui « prouve », mais aussi qui « explique », sont en train de se définir. À cette étape, on peut identifier trois moments qui commandent l'action du professeur A : la recherche d'une explication commune pour toute la classe, la confrontation de cette explication avec celles produites à l'intérieur des groupes et l'introduction d'un langage pour la formalisation.

Recherche d'une explication commune dans la classe A1, Professeur A

Professeur : je n'ai pas fini pas de me convaincre… parce que finalement, vous dites que faire tous les calculs est la même chose que faire 7 fois le deuxième nombre, mais la façon avec laquelle e vous l'expliquez…je ne comprends pas…
EA110 : peut être qui c'est une coïncidence….peut être que non…mais toujours on obtient le même résultat (Lucas avait utilisé l'empirisme naïf comme explication)
Plusieurs élèves : ce n'est pas par coïncidence!
……
EA17 : Nous pensons aussi que faire tout ça [en référence à l'algorithme donné] c'est la même chose que faire 7×2 999.
Nous avons posé un exemple pour expliquer :
Si je fais 2 999×10 et après je fais 2999×17 et après je fais la différence, dans cette différence... c'est comme si on perd le "par 10"
Professeur : c'est comme si on perd le "par 10" a dit EA17...
Silence dans la classe...
EA17 : Suppose que le 2 999×17 on le sépare en "×10" d'un côté et "×7" de l'autre.
Professeur : on va voir... je vais écrire cette multiplication que EA17 est en train de dire, je pense qu'elle est comme ça... celle que EA17 pense faire :
2999
× 17
×10 ×7
EA17 : et après on fait la différence de la multiplication par 10
Professeur : EA17 dit : nous faisons la différence entre cette multiplication par 10 et la multiplication par 10 du premier pas
2999
× 17
×10 ×7 (le professeur encercle, de la façon suivante, 2 999x10, puis 2 999x7



EA17 : et comme ce résultat c'est 0, donc il est annulé. Quand on fait la différence il reste 2 999x7.
Professeur : Avez-vous compris ce que EA17 a expliqué ?

EA17 : Quelqu'un veut que j'explique encore ?
Éleve : oui, moi
[EA17 explique à nouveau mais ne dit rien de différent. Les autres élèves ne disent rien, mais ils s'engagent peu dans l'explication donnée.]

L'élève EA17 ne peut utiliser un langage fonctionnel pour exprimer les relations identifiées. Elle utilise la structure traditionnelle de la multiplication et des traces pour mettre en évidence les relations qu'elle veut identifier. La plupart des élèves n'arrivent pas à comprendre son explication. Le professeur attend la réaction des autres en jouant encore sur l'incertitude :

Professeur : je ne suis pas convaincu encore qu'il reste 7 fois le deuxième, je ne comprends pas encore pourquoi.... vous ?
La classe : oui, il reste 7 fois le deuxième mais pourquoi ?

Encore une fois, la classe ne doute pas de la vérité de la proposition en jeu (même si le professeur essaie de « jouer » avec la question du doute), le problème est toujours de trouver (de montrer) les raisons de ladite vérité. Le professeur sait qu'il y a des groupes qui peuvent l'aider (par exemple le groupe composé des élèves EA11 et EA12 qui avaient produit des explications assez explicites) dans la discussion et il organise la participation de ces groupes comme rétroactions du milieu, en fonction du déroulement de la discussion. La participation des élèves dans l'établissement des conditions d'enseignement (Mercier, 1998) pendant le débat public est réglée par le professeur.

Le professeur permet alors au groupe de l'élève EA12 d'intervenir :

EA12 : J'ai une façon qu'il est plus claire, je crois (indique au professeur d'écrire)
Pas 1 : 2×2999
Pas 2 : 2×2999 7×2999 qui est égal....
Professeur : comment je l'écris, 2×2999 et 7×2999 ?
EA12 : avec un "+", efface le "et"
Professeur écrit : 2×2999+7×2999
EA12 : donc le calcul 2×2999 on annule quand on fait la différence et il reste l'autre calcul
EA11 (du même groupe que EA12) : bien sûr, le pas 3 c'est la différence entre le pas 2 et le pas 1
Professeur : Y a-t-il quelqu'un qui comprend ce que EA12 est en train de dire ?
EA113 : je ne comprends pas quelque chose. Là c'est 9×2999 (en indiquant le deuxième pas). Ce 9 est parce qu'on fait 2+7. Pourquoi le résultat n'est pas, donc, le deuxième plus 7, au lieu du deuxième nombre fois 7 ?
Professeur : je suis perdu...
EA113: là où vous avez le doigt (en indiquant le deuxième pas dicté par EA12) on aurait 9×2999, le premier 9 c'est parce que tu as additionné 2 + 7, donc voilà pourquoi en définitive il ne reste pas le deuxième plus 7 ?
Professeur : Est-ce que quelqu'un peut expliquer à EA113 pourquoi ce nombre 9 après on le transforme en 7 ?

EA17: parce qu'après tu multiplies et c'est comme que...
EA114 : à mon avis, ce que EA12 a expliqué c'est la meilleure explication parce que si après il faut faire la différence entre le pas 2 et le pas 1, je fais 9×2 999 – 2×2 999 et il reste le 7×2999 et ici le 7 est multiplié et pas additionné.
EA113 : mais le 7 je suis en train de l'additionner ici [en indiquant le deuxième pas]
EA114 : mais au 2 et pas au deuxième nombre
Professeur : EA113 ?
EA113 : je comprends pas
Professeur : Je vais te proposer une explication que les élèves d'une classe ont donnée, pour voir si tu comprends.
Ils disent...supposons qu'ils avaient mis pour le premier 10, comme l'a proposé le groupe de EA110. Ils disent…

2999
×17
mais faire ça c'est la même chose que 2999 +2999+2999 +........17 fois
et 2999
×10
c'est la même chose que 2 999+2 999+----------10 fois
et ils disent que lorsqu'ils font la différence, ils perçoivent qu'il reste 7 fois 299.
EA11 : on annule
EA113 : ah!
EA17 : on annule parce que c'est le même 10 qui est dans l'addition ici, c'est-à-dire qui est dans la multiplication [en référence au pas 1] ; comme 10 c'est le premier nombre, quand on multiplie par le deuxième nombre c'est exactement le même 10 parce qu'après il faut faire la différence… c'est comme ça qu'on annule.
EA11 a raison parce que c'est le même 10 avec lequel après il faut faire la différence… il restera 7.
EA113 : quand on fait la différence il reste le 2999 sommé 7 fois, c'est pour ça qu'on disait avant 7×2999 ?
Professeur : oui, as-tu compris ?
EA113 : oui
Professeur : [à la classe] je vous demande maintenant s'il y a une relation entre cette explication et celle de EA12
[on discute de cette question, en arrivant à un accord : les deux explications sont semblables]

On peut voir que l'élève EA12 n'emploie pas les nombres qu'elle avait utilisés pour identifier les relations (le 2000 ou le 10 pour le premier nombre). Elle utilise les nombres choisis un peu comme les lettres dans l'algèbre; elle a déjà effectué une généralisation, même si elle continue à écrire des nombres spécifiques. Elle n'a pas non plus un langage fonctionnel, mais elle construit ce langage à partir des nombres vus comme exemples génériques. Cette élève montre son explication, mais elle ne montre pas son processus de production. Les connaissances implicites qui sont sous-jacentes à ce qu'elle considère comme une explication restent de l'ordre du privé. Pendant la communication, les traces du processus d'élaboration de la preuve sont absentes. Les différents niveaux de connaissances en jeu dans la situation contraignent le professeur à prendre une décision : il doit laisser de côté le projet initial d'explicitation des « modes de production » (et pas seulement « les productions ») pour se centrer sur la question de la compréhension de la production même. Le déroulement de la classe « autorise » ou non la réalisation de certains projets d'enseignement prévus. L'insuffisance (pour l'élève EA113) de l'information des rétroactions apportées par l'autre groupe oblige le professeur à injecter des connaissances : il ne peut pas soutenir plus de temps l'incertitude (la confrontation avec les autres productions n'a pas été suffisante pour la réduire).

Confrontation de productions publiques et privées et introduction d'un langage pour la formalisation

Avec différentes exigences d'explicitation ou de précision, l'exemple générique – qui implique un traitement algébrique du numérique – est considéré par la classe comme une explication. La complexité des niveaux de connaissances impliquées, donc, l'exigence pour le professeur de leur traitement l'a mis dans la situation de choisir sur quels niveaux « diriger » la situation : les preuves produites ne sont pas analysées explicitement du point de vue de leur caractère explicatif, mais surtout du point de vue de leur pouvoir de conviction. Le professeur est « arbitré » sur ce qui nous semble le traitement habituel qui se fait à l'école. De cette manière, le professeur reprend la question de la conviction qui n'avait pas été traitée dans les premières étapes. Le professeur produit une confrontation explicite entre les preuves intellectuelles et empiriques pour analyser les avantages et les limites de chacune :

Extraits des interactions dans la Classe A1, Professeur A (traduction libre)

Professeur : Nous avons déjà deux conclusions : qu'il faut choisir 2999 comme deuxième nombre pour gagner et qu'on s'entend sur une explication du pourquoi le résultat de tous les calculs donnera 7 fois le deuxième nombre.
Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?
Élèves : Oui.
Professeur : Maintenant je veux discuter une troisième question : l'autre jour, quand EA110 a commencé son explication, il avait dit : « Le premier peut être n'importe quel nombre et le deuxième doit être 2999. Je suis sûr parce que j'ai prouvé avec 1, 2, 3… avec beaucoup de cas. »
Peut-on être sûr, avec la façon proposée par EA110, que la réponse donnée permettra de gagner toujours ?
Élève non identifié : oui… mais c'est un type de dogme… tu es sûr mais tu ne sais pas pourquoi.
Élèves : oui tu ne sais pas pourquoi… sûr tu l'es parce que tu as prouvé avec vingt mille cas et ça marche toujours… mais si tu demandes pourquoi… il n'est pas possible de répondre.
EA17 : à mon avis, si on fait comme ça il n'y a pas de fondements du pourquoi ça marchera toujours…
EA114 : bien sûr, ça marche mais tu ne sais pas pourquoi…
EA17 : c'est comme si on disait : DANS TOUS LE CAS [marquant avec la voix ces mots]
Es-tu sûr que tu gagneras le jeu ? ……si je prouve seulement avec quelques nombres….c'est comme…c'est mieux d'avoir quelque chose comme une formule ou autre chose qui soit utile pour tous le cas…je ne sais pas comment l'expliquer…mais à mon avis il manque quelque chose…

Professeur : maintenant vous êtes moins sûrs, mais il y a peu de temps vous étiez très sûrs et aviez prouvé avec 1,2,3….
Élèves : oui, ok, mais…
EA113 : tu es sûr par la pratique, tu sais que c'est comme ça parce que tu as prouvé et ça a fonctionné mais tu ne sais pas pourquoi.
Professeur : donc, ce que vous dites c'est qu'avec la façon de EA110 vous êtes sûrs mais l'unique chose est que vous ne savez pas pourquoi, mais vous êtes sûrs du résultat, c'est comme ça ?
[l'intervention suivante de EA114 n'avait pas été entendue par le professeur]
EA114: tu as prouvé mille fois que ça marche mais il est possible que tu n'aies pas prouvé avec un nombre qui ne marche pas
Observateur : ici EA114 a dit une chose et vous ne l'avez pas entendu.
[EA114 répète ce qu'il avait dit]
EA114 : Est-ce qu'il a prouvé avec le 11 ? Et avec le 0 ?
Élèves : Il faut prouver avec tous les nombres qu'on puisse…
D'autres élèves : non… ils sont infinis
EA114 : avec le 0 il ne l'a pas prouvé et il se pourrait qu'avec le 0 ça ne marche pas
EA110 : oui, nous avons prouvé avec le 0.
Élèves : ok, mais nous pouvons en mettre d'autres… [ils font référence à la possibilité de proposer des nombres qui n'ont pas été utilisés]
EA11 : avec sa façon je ne suis pas convaincue
Professeur : pourquoi ?
EA11 : et… parce que non… si tu prouves seulement avec quelques nombres…

Observateur : Mais vous critiquez EA110 parce qu'il a prouvé avec quelques exemples et pas avec tous mais EA12 l'a fait avec un seul nombre, avec le 2
EA11 : mais elle a fait « la méthode »!
Beaucoup d'élèves : mais ce n'est pas un exemple, le 2 peut être n'importe quel nombre
EA17 : tu es sûr que c'est comme ça et tu mets n'importe quel nombre pour le premier nombre et ça va te donner le même résultat, parce qu'après tu feras la différence et ça va s'annuler.
Beaucoup d'élèves : bien sûr
EA17 : le 2 peut être un exemple mais au lieu du 2 tu peux mettre 3 et ça te donnera tout égal
Observateur : S'il faut l'expliquer à quelqu'un qui n'a pas été dans la classe, qui n'a pas participé à toutes nos discussions, pensez-vous qu'il y aurait quelque façon de faire la même chose que EA12 a fait mais en laissant bien voir que l'explication ne vient pas du 2 ?
Élève : mets *x*
Élèves : ou mets *a*
Quelques élèves : change le 2 pour le *a* (dans l'explication de EA12)
(le professeur tire un trait sur le 2 et il met le *a* à la place :
a
2x2999
a
2x2999 + 7x2999

Le professeur revient à la question de la certitude afin de remettre en question, implicitement, les modes de validation acceptés dans les premières étapes. Mais les élèves ne se centrent pas exclusivement sur la question de « la certitude » : ils différencient de manière permanente l'explicatif et le convaincant. Les élèves « poussent », une autre fois, le projet du professeur. C'est sur la confrontation entre les deux types de preuves que le professeur s'appuie pour que les élèves peuvent commencer à reconnaître que « les preuves qui expliquent » ont aussi certains avantages par rapport à la conviction, que « plusieurs exemples ne sont pas suffisants pour s'assurer de la validité d'une proposition». Pour ces élèves, il ne s'agit pas d'une norme externe à travers laquelle le professeur règle les interactions dans la classe par rapport à la validation, mais d'une norme qui commence à avoir du sens dans le cadre d'une situation spécifique.

La discussion que le professeur et l'observateur conduisent intentionnellement autour des différents emplois des exemples permet d'expliciter des éléments caractéristiques de la validation intellectuelle d'une proposition où le domaine de validité est infini. La reconnaissance du général dans l'explication produite (l'explicitation de la nécessité de ce caractère général), le traitement de cette généralité, en s'appuyant sur des connaissances mathématiques, et la mise en acte de connaissances et pratiques algébriques (traitement algébrique du numérique), commencent à fonctionner, implicitement, comme critères de validité pour la validation des arguments produits (pour la validité mathématique de la preuve, mais aussi pour la reconnaissance du caractère explicatif ou de la conviction).

Enfin, le professeur A initie un processus de formalisation qui ne va pas trop loin : la représentation algébrique du problème ne devient pas opératoire (on n'exprime pas, par exemple des équivalences du type (a+7)x2999=ax2999 +7x2999), puis les propriétés des opérations implicites dans les explications produites ne sont pas identifiées comme des savoirs fonctionnant comme des critères de validité.

Dans la classe A2, le professeur commence le débat en prenant lui-même un rôle particulier : il conduit les discussions de manière à produire tout de suite une explication pour toute la classe. Mais la rétroaction qu'il reçoit le contraint de relancer la situation à chaque moment:

<u>Extraits des interactions dans la Classe A2, Professeur B</u>

Enseignant : Alors, avez vous trouvé une justification? EA211?
EA211: je pense que lorsqu'on additionne 7 et après on soustrait, ça va toujours te donner 7 fois le deuxième..
Professeur : cela on le sait déjà, la question est pourquoi?
(Silence)
Enseignant : veux –tu que j'essaie de te suivre avec un exemple?
EA211 : oui, met 66 et 2999. Si tu ajoutes 7 au 66 c'est comme faire 7x2999 plus 66
Enseignant : dis-tu que multiplier le 66 plus 7 par 2999 est la même chose que faire 7x2999 plus 66?
Plusieurs élèves : oui
EA211 : non
Enseignant : oui ou non?

(Silence)
Élève : il faut mettre une parenthèse (l'enseignant n'écoute pas cet élève)
Enseignant : le calcul qu'il faut faire au deuxième pas est le même que le calcul 2999x7+66?
EA21 : non, parce que lorsque tu fais 2999 fois 66+7, cela serait fois 73 et dans ton calcul tu fais 2999x7 et à ce résultat tu additionnes 66.
Enseignant : et pourquoi ce n'est pas la même chose?
Élève : il faut mettre une parenthèse (l'enseignant n'écoute pas non plus)
EA21 : et parce que…tu dois multiplier 2999x66 et aussi par 7
Enseignant : ah!!
EA21 : et dans l'autre calcul tu ne multiplies pas le 2999 par 66, tu ajoutes 66
Enseignant : ah, c'est-à-dire, tu me dis que lorsqu'on multiplie 2999 par 73, on multiplie par 66 et par 7 et que dans l'autre calcul, je n'avais que multiplié par 7 et le 66 était resté de côté, c'est ça?
EA21 : si
Élève (insiste) : il faut mettre une parenthèse…
Enseignant : où faut-il mettre une parenthèse? Ici ? (et il écrit)
2999 x (66+7)
Élève : oui
Enseignant : et quelle propriété peut-on appliquer ici?
EA212 : distributive
Enseignant : qu'est-ce que dit la propriété distributive? Est-il ancien, ne c'est pas? (en référence au fait qu'il s'agit d'une connaissance ancienne)
(les élèves cherchent dans leur cahier)
Plusieurs élèves : 2999x66 et 2999x7
Enseignant : 2999x66 plussssssss(remarque avec la voix) 2999x7. Ok, donc, ce que EA211 disait n'était pas correct, parce que je ne pouvais pas ajouter seulement le 66, je devais additionner le 66 fois 2999 parce que le 2999 multiplie le 66 et le 7. Voilà, nous transformons le calcul 2999 x (66+7) dans le calcul 2999x66 +2999x7….ok mais…on était où? Je suis déjà perdue… Qu'est-ce qu'on devait faire?
EA21 : expliquer pourquoi le résultat était toujours le même
Enseignant : ok, et quel calcul devait-on faire?
EA213 : pas 2 moins pas 1
Enseignant : EA213, qu'est-ce que tu penses?
EA213 : je pense que cela donne toujours le même résultat parce que la différence est la même entre les calculs
Enseignant : entre quels calculs?
(Silence)
EA213 : dans la première partie, j'avais 3500x2999…cela te donne un résultat…
Enseignant : oui, attends, (écrit) 3500x2999
EA213 : après tu ajoutes 7 à 3500
Enseignant : 3507
EA213 : et tu le multiplies par 2999 et quand tu fais la soustraction, tu obtiens toujours 20993.
Enseignant : oui, mais pourquoi?
EA213 : par le calcul
Enseignant : qu'est-ce qu'il veut dire, donnez de raisons? Cela signifie que tu dois me convaincre à moi pourquoi la différence va toujours donner 20993, mais tu ne peux pas me dire que cela va donner 20993 parce que la différence donne toujours la même chose….parce que je te dis que je ne te crois pas et tu me dis toujours la même chose…et comment finit-on?
(Silence)

L'enseignant prend, d'abord, à l'élève EA21, un très bon élève qui avait produit une explication (et l'enseignant le savait) pour faire avancer la situation (puis, le temps didactique), mais il perçoit, tout de suite, que les autres élèves ne participent pas; il réagit en questionnant l'élève EA213. On peut voir que l'élève EA213 ne parle pas de l'exemple sur lequel l'enseignant et l'élève EA21 étaient en train de travailler, mais sur son propre exemple.

La propriété distributive est convoquée par l'enseignant et non pas par une nécessité de la situation : les élèves reconnaissent son utilisation dans « la forme » du calcul « 2999x(66+7) », mais l'enseignant ne parvient pas à éclaircir le problème en question. Les élèves avaient utilisé cette propriété dans le contexte de la résolution de calculs et l'appel fait par le professeur empêche un changement de statut. À notre avis, l'algèbre est partiellement présente : même si les connaissances anciennes n'ont pas changé de statut, aucun des élèves ne fait appel à la réalisation des calculs pendant la discussion autour de l'équivalence des expressions 2999x 7+ 66 et 2999x(7+66)! Tous discutent autour de l'équivalence des expressions dans le contexte du problème en question.

La première stratégie du professeur B est de questionner la nature de ce qui est « une raison », mais elle retombe, comme le professeur A, sur la question de la conviction, ce qui n'aide pas à l'évolution de la discussion. Le discours du professeur s'organise en « première personne », mais il est important de remarquer que le professeur ne le fait pas à titre personnel, mais il se positionne toujours comme représentant de la communauté mathématique. Même s'il n'explicite pas les critères qui vont lui permettre de rester « convaincu », ces critères sont toujours sous le regard du savoir mathématique en question et de certaines normes de validation provisoires qui caractérisent la communauté « classe de mathématique », dans un moment déterminé.

Ensuite, il essaie une deuxième stratégie : de donner la parole à d'autres groupes qui ne participent pas du débat, en reconnaissant que ces élèves sont encore plus éloignés de l'explication qu'il avait proposée :

> Professeur : EA214, qu'est-ce que tu fais?
> EA214: je prouve avec des autres exemples… je cherche un nombre pour lequel ce que vous dites ne marche pas

Il y a encore des élèves qui ne sont pas convaincus de la validité de la proposition en question et qui continuent dans une étape exploratoire.

Le professeur B propose une autre explication (intervention prévue dans l'analyse a priori, que le professeur B avait accepté) mais il ne la présente pas, comme chez le professeur A, comme étant une stratégie des autres élèves :

> Professeur : je me demande… ce que signifie multiplier 2999 par 66?
> Élève : faire 66 fois 2999
> Professeur : ok…. Lorsqu'on additionne le 7, qu'est-ce que signifie maintenant multiplier 2999 par 73?
> Un autre élève : faire 73 fois le 2999
> Professeur : c'est-à-dire, on a ici 73 fois le 2999 et là 66 fois le 2999, qu'est-ce qui se passe quand à 73 fois le 2999 et qu'on enlève 66 fois le 2999?
> Élèves : il reste 7 , 7 fois 2999, pour cela il est « fois 7 » toujours
> Professeur : il reste 7 fois 2999, ce qui donne 20993. Oui? Leila? Avez vous compris?
> (Silence)

Le silence de la classe fonctionne comme une rétroaction pour le professeur qui décide, à la différence du professeur A, de continuer à un niveau public. Les difficultés des élèves par rapport aux différents niveaux des connaissances impliquées dans cette étape (identification, articulation et écriture de relations, transformations d'écritures, reconnaissance du caractère « explicatif » de certaines de ces articulations et transformations) et l'avancé rapide du temps didactique (en s'appuyant sur la production d'un élève) rendent difficile le processus de dévolution : « la climat » de la classe (difficile d'imaginer à partir de la lecture du protocole) confirme cette difficulté. Les élèves sembleraient avoir perdu « l'objet » de la discussion.

Ce besoin de faire avancer le temps didactique (besoin qui se manifeste moins chez le professeur A) caractérise le type de décisions prises : même si le professeur reconnaît les difficultés de rétroaction des élèves par rapport à l'explication qu'il a produite, il relance la situation, mais avec une consigne qui permet toujours de faire avancer le temps :

> […]
> Professeur : on a ici une explication mais… c'est correct mais….. cela sert pour le 66 mais pour d'autres valeurs est-elle valide? Pourquoi?
>
> (l'enseignant propose cette question pendant le débat et il s'aperçoit que, une fois de plus, que le seul élève qui participe est EA21. Il invite les élèves à travailler en groupe sur cette question).

Le professeur B propose un nouveau problème (généralisation de l'explication produite) qui exige un retour sur l'ancien problème (problème qui n'était pas fermé pour les élèves). Les contraintes de la situation obligent les professeurs A et B à relancer la situation, mais l'influence du temps didactique et les rétroactions de chacune des classes marquent la nature des situations effectivement réalisées. Le développement qui suit est encore centré sur les interactions entre le professeur B et l'élève EA21 (l'élève qui avait produit une explication reconnue par le professeur et qui était considéré un des meilleurs élèves de la classe), jusqu'à l'intervention des autres élèves qui demandent d'aller plus lentement pour pouvoir comprendre :

EA213 : il explique très vite encore ....
Professeur : ok...EA213, qu'est-ce que tu pense de cette situation?
EA213 : nous avons mis le deuxième 2999 et nous avons essayé de trouver le premier nombre avec 2999 et ça nous a donné à tous 20993...
Professeur : mais pourquoi donne 20993? C'est ça qu'on essaie de comprendre!
EA214 : peut-être que nous devrions changer le 2999...

Les élèves qui ne participaient pas au « mini débat » entre le professeur et l'élève EA21 étaient dans une situation différente : ils n'ont repris ni l'explication basée sur l'exemple de 66 et 2999, ni la généralisation qui était l'objet de discussion entre l'élève EA21 et le professeur. Il y avait encore des élèves qui doutaient, qui discutaient sur l'influence ou non du premier nombre sur le résultat, qui essayaient de trouver des relations en analysant des cas particuliers, en changent les nombres choisis, etc. Le professeur a toujours essayé de faire revenir les élèves à la question centrale de son projet, en s'appuyant sur le même exemple déjà proposé :

Professeur : On est, donc, d'accord qu'on obtient toujours le même nombre, mais pourquoi? Analysons ce que nos avons fait jusque là. Nous avons appliqué la propriété distributive, parce que nous avons utilisé des propriétés déjà étudiées, mais nous n'avons pas avancé plus...Nous avions dit que multiplier 73 était faire 73 fois 2999 et faire 66 par 2999 était 66 fois 2999 et que lorsqu'on faisait la différence, il restait 7 fois. Écrivons tout cela (il écrit sur le tableau) :

2999x(66+7) on applique la propriété distributive et on obtient 2999x66+2999x7

À ce calcul, il faut soustraire 2999x66 :

$$\begin{array}{r} 2999\text{x}66+2999\text{x}7 \\ -\quad 2999\text{x}66 \\ \hline \end{array}$$

Qu'est-ce qui reste comme résultat?

(Le seul élève qui répond est EA21. Le professeur demandes aux autres élèves de penser à cette question à l'intérieur de leurs groupes)

Le professeur B est attentif aux rétroactions qu'il reçoit de la classe; le silence des élèves ne le laisse pas indifférent. Il organise, à l'intérieur du débat, de petits moments de travail à l'intérieur des groupes, comme le fait le professeur A, mais la marque de leurs interventions antérieures est encore présente: la discussion qu'il pose n'est pas centrée sur les productions des élèves, mais sur l'explication que lui-même a proposée. Toute la classe discute sur l'explication « attendue ». Pendant le débat, il n'y a pas de variété d'explications comme dans la classe A1.

Les groupes « plus avancés » travaillent sur l'explication du professeur et sur la généralisation, en proposant d'autres exemples et en reconnaissant la « même structure » de raisonnement dans tous les « exemples génériques ». D'autres groupes finissent par se convaincre de la validité de la proposition en question, laissant de coté la recherche d'un contre-exemple (effet de contrat?):

Professeur : avez-vous déjà fini de mettre des exemples?
Élève : oui
Professeur : pourquoi?
Élève : parce qu'on ne peut pas mettre des exemples...
Professeur : mais...vous cherchez des exemples pour montrer que cela n'est pas vrai (en référence au qu'on ne peut pas trouver deux nombres qui donnent plus que 20993)
Plusieurs élèves : mais nous ne trouvons pas .... Nous nous sommes convaincus...
Professeur : vous vous êtes convaincus ou vous vous êtes déjà fatigués?
Élève : les deux choses...
(à ce moment là, les élèves reprennent l'explication du professeur)
Élève : cela il reste 7x2999 ....(en référence au résultat demandé par le professeur)
Professeur : parce que lorsqu'on fait la différence, celui-ci et celui-la disparaissent :

$$\begin{array}{rl} & 2999\text{x}66+2999\text{x}7 \\ - & 2999\text{x}66 \\ \hline \end{array}$$

(le professeur raye 2999x66 deux fois)

Et qu'est-ce qui se passe si l'on fait avec 3500 pour le premier nombre? C'est la même chose (et écrit sur la feuille des élèves)

$$\begin{array}{rl} & 2999\text{x}3500+2999\text{x}7 \\ - & 2999\text{x}3500 \\ \hline \end{array}$$

Qu'est-ce qu'on obtient comme résultat?
Élèves : 7x2999
Professeur : donc, il est vrai pour 66, il est vrai pour 3500.... Maintenant vous dites qu'il est toujours vrai mais comment on peut écrire cette analyse de manière à voir qu'il ne dépend pas de l'exemple

proposé? Je veux que vous pensiez maintenant à la manière d'écrire dans le cahier une justification qui permet de sortir de l'exemple. Pensez à quelqu'un qui n'a pas été ici, qui n'a fait aucun calcul, qui ne veut pas fait aucun calcul et que je dois convaincre que tout cela donne toujours 20993.

Une fois convaincus de la vérité de la proposition, les élèves acceptent d'analyser l'explication proposée par le professeur. À ce moment de la classe, ils n'ont pas l'option de produire eux-mêmes une explication, ils doivent s'adapter à la demande du professeur qui n'est pas capricieuse : la situation l'oblige, pour arriver au débat, à prendre de décisions qui fassent avancer le temps didactique.

Dans la classe A1, nous avons vu des groupes qui acceptaient d'entrer dans la recherche d'une explication sans être absolument convaincus de la vérité de la proposition en question, mais dans le cas récemment analysé, la recherche d'un contre-exemple a occupé la plupart du travail de ces élèves.

Comment analyser cette différence? Nous voyons, au moins, deux possibilités :

- niveaux de généralisation différents : dans le premier cas, les élèves peuvent reconnaître qu'une explication « prouve », en plus d'expliquer.
- économie du travail : si on trouve un contre-exemple, on n'a pas besoin de produire une explication.

Ensuite, le débat se centre fondamentalement sur l'écriture de l'explication, ce qui implique pour le professeur (mais pas nécessairement pour les élèves) un processus de généralisation :

Professeur : êtes-vous arrivés à quelque conclusion? Si on veut commencer avec un nombre quelconque, peut-on utiliser une lettre?
Élèves : oui
Professeur : a , par exemple. Vous êtes d'accord que lorsqu'on met une lettre, on veut dire quelque chose générale, on peut mettre une lettre pour éviter de répéter chaque fois « un nombre, n'importe quel »
(Elle écrit sur le tableau)

ax2999

Après on ajoute 7,

(Elle écrit)

a+7 x 2999

Faut-il mettre une parenthèse?

Élèves : oui
Professeur : (écrit)

a+7 x 2999 ou (a+7)x2999 c'est la même chose?
Élève : ils sont différents
Professeur : ils donnent des résultats différents, pourquoi?
EA21 : ils sont différents parce que dans le premier calcul, tu fais a plus le résultat de 7x2999 et dans l'autre tu fais d'abord a+7 et ce résultat est multiplié par 2999.
Professeur : ok, et laquelle des deux écritures est liée à ce que le problème nous demande?
Élève : la deuxième...elle est comme faire 7x2999 plus ax2999
Professeur : (il écrit au tableau) 7x2999+ax2999 Avez vous compris ce que nos avons fait jusqu'à ici?
(Silence)
Professeur : quelle propriété nous avons utilisée dans ce pas là ?
Élève : distributive
Professeur : distributive, ok
Élève : à ce résultat il faut le soustraire ax2999 et il reste 7x2999 qui est 20993
Professeur : comprenez-vous
Un autre élève : oui
(silence des autres)

Le professeur interroge certains des élèves qui ne répondent pas. Ils produisent des explications similaires, mais basées sur des exemples génériques. Le professeur discute de la différence avec la généralisation proposée :

Professeur : la justification que nous avons donnée n'utilise pas le 3500 et celle que vous proposez oui. Si quelqu'un qui n'a pas été dans la discussion voit ton explication, il va penser qui ce que tu expliques sert seulement pour le 3500. Ici on a répété le raisonnement avec 66 et 3500 et il avait un groupe qui n'était pas convaincu : ils continuaient en cherchant des exemples afin de trouver une valeur de a pour laquelle le résultat n'aurait pas été 20993. Avec le 3500 et le 66 , ce n'était pas suffisant pour eux. L'explication avec la lettre montre que le raisonnement ne dépend pas d'un exemple particulier. Êtes- vous d'accord?

(les élèves affirment avec la tête mais en silence)

À partir du développement de la classe et, en particulier, par certaines décisions du professeur (par exemple, l'acceptation de l'exemple générique comme mode de validation), on s'aperçoit que le professeur reconnaît que la question d'une écriture conventionnelle n'est pas, pour les élèves, le nœud de la problématique de la généralisation. Il fait appel à une question de « communication » et d' « économie » dans cette communication pour justifier l'introduction d'un mode particulier de représentation. Mais cette représentation apparaît avec une fonctionnalité spécifique, puis limitée : elle est un instrument pour exprimer la généralité, mais elle n'est pas encore un outil de résolution du problème, un instrument de modélisation. Le commentaire suivant d'un élève reflète, à notre avis, tout le chemin qui reste à parcourir:

> Élève : ma mère est professeur de mathématiques et lorsque je lui ai montré le problème, elle a fait 2 ou 3 « crochets » et elle m'a donné la réponse et nous avons passé trois cours pour y arriver!! Pourquoi ça?

La mère, qui connaissait l'algèbre, l'a utilisé comme instrument de modélisation du problème : a(b+7)-ab= ab+7b-ab= 7b.

Dans la modélisation du problème par l'algèbre, puis dans la réalisation des « calculs» avec cet instrument, la fonctionnalité est plus « large » que dans la situation que nous avons analysée. Nous ne disons pas que le professeur devait y arriver à partir du travail avec « une situation ». Nous voulons simplement montrer la différence entre une représentation pour « exprimer » la généralité et le développement d'une potentialité « opératoire » de ce système de représentation.

Pour finir, l'observateur relance une question à la classe (avec l'accord du professeur) :

> Observateur : Là, dans le deuxième pas, le professeur a écrit (a+7)2999 et il a dit qu'on a appliqué la propriété distributive. Quel était l'objectif d'appliquer la propriété distributive là? Il faut l'appliquer?
> EA211 : oui, parce qu'il faut faire une soustraction
> Élève : si tu n'appliques pas cette propriété, tu ne perçois pas ce qu'il faut soustraire…
> Autre élève : on fait la distributive pour que cela soit plus facile…

L'application de la propriété avait était suggérée par le professeur, elle n'était pas apparue comme un besoin pour les élèves dans le contexte de l'explication. Le professeur n'avait pas non plus explicité pourquoi il faisait cela. L'observateur essaie de rendre explicite, pour toute la classe, ce passage qui était resté un peu « caché ».

Même si dans cette classe les élèves ont eu, en général, des difficultés pour construire des explications, aucun groupe n'a proposé l'empirisme naïf comme mode d'explication. L'observateur intervient à ce sujet :

> Observateur : Nous avons fait la même situation dans une autre école et certains élèves, pour expliquer, ont fait tous les calculs avec 1 et 2999, après avec 2 et 2999, après avec 10 et 2999 et ils ont toujours obtenu 20993.
> Ils ont mis quelques exemples additionnels et ils ont toujours trouvé 20993. Donc, à partir de cela, ils ont dit qu'avec cela ils expliquaient que le résultat était toujours 20993.

Qu'est-ce que vous pensez de cette explication par rapport à celle que vous avez construite?
EA21 : mais ils ont mis un groupe de nombres mais le premier n'a pas de limite, donc on pourrait penser qu'il pourrait y avoir un autre nombre qui donne un résultat plus grand.
Observateur : et vous, qu'est-ce que vous pensez? (en s'adressant à la classe)
(Silence)
Professeur : ce qu'il dit (par rapport à l'observateur) c'est que dans l'exemple de l'autre école, les élèves ont mis plusieurs exemples. E21 dit qu'avec cela on ne peut pas être sûr qu'il n'existera pas une autre valeur de a qui nous donne plus que 20993. Avec notre explication, nous pouvons être surs?
Élève : oui....parce que pour n'importe quel nombre, lorsque tu soustrais, tu obtiendras zéro...
Professeur : comment tu sais qu'il sera comme ça pour « n'importe quel nombre »
Élève : par le « a »
Professeur : le fait de mettre une lettre, au lieu d'un exemple, de faire tous les calculs et de voir que cette partie est annulée cela m'assure...
Élèves : oui, m'assure
EA21 : la lettre « a » « parle en général »
Professeur : ok, avez vous écrit tout cela dans le cahier?

L'observateur a eu l'intention de confronter deux types d'explications, une appuyée sur l'empirisme naïf et l'autre, sur des exemples génériques, mais tout de suite, le professeur a conduit le débat vers l'explication « institutionnalisée » (qui utilise un langage spécifique). Le professeur profite de l'occasion pour parler des « avantages » implicites de son explication : la généralité de l'explication implique la certitude de ne pas trouver un résultat plus grand.

Nous analysons maintenant certains échanges dans la classe Q1 du Québec. Des caractéristiques particulières de la classe Q2 (environ la moitié de élèves de la classe ont essayé de participer à l'activité, mais les autres élèves ont perturbé le fonctionnement de ces élèves ; il n'a pas été possible de réaliser le débat prévu).

Extraits des interactions dans la Classe Q1, Professeur D

La particularité de cette classe, par rapport à toutes nos observations, est que presque tous les groupes ont généralisé tout de suite le problème, en utilisant des lettres. Ces élèves avaient utilisé des lettres, lors de leurs premières années du secondaire, pour exprimer des formules de suites, mais ils n'avaient jamais opéré sur les expressions produites. Les transformations des expressions (les connaissances impliquées) et l'information qu'elles portent sont les objets fondamentaux d'apprentissage dans cette étape :

Le professeur fait un résumé sur ce qui s'est passé au cours précédent.
Prof : nous avons conclu hier que peu importe le premier nombre, si le deuxième nombre est 2999, le résultat sera toujours 20993.
Tout le monde est d'accord avec ça?
La classe : oui
Prof : on vous avait demandé aussi de trouver une explication qui montre pourquoi on obtient toujours la même valeur.
Alors, on écoute les autres groupes…par exemple, l'équipe 1…. Qu'est-ce que vous avez fait? (on a décidé de faire parler d'abord les élèves qu'avaient eu plus de difficultés) (Un élève du groupe passe au tableau)

EQ113 : on a remplacé le premier nombre par y et le deuxième nombre par z
La deuxième étape est y+7 fois z. Il écrit au tableau: (y+7)xz et ce qui reste est
(y+7)xz-yxz et y s'annule (il écrit) $(\cancel{y}+7)xz-\cancel{y}xz$
Ça fait 7xz et z c'est 2999
Prof (en se dirigeant à la classe) : qu'est-ce que vous pensez de cette explication?
Ils ont dit qu'ils ont utilisé de l'algèbre, après on va leur demander pourquoi, mais dans cette explication, ils ont éliminé au troisième pas y dans chaque terme, puis ils concluent que ce qu'il reste est 7xz
Qu'est-ce que vous pensez de cette explication?
Élève : moi je trouve ça correct parce que plus y moins y ça fait zéro…
Expérimentateur : pouvez vous nous expliquer ce que vous avez compris du troisième pas
Élève : d'abord, il faut faire (y+7) fois z cela fait un certain nombre disons….x alors il fait x-y non…. x-y fois z….
Prof : est-ce que vous comprenez cela? (à la classe)
Certains élèves : oui
Prof : (à l'expérimentateur) comprenez-vous madame?
Expérimentateur : mais je ne comprends pas …
Prof : moi non plus…
Élève : jusqu'à cette simplification là c'est clair…
Prof : la question c'est le troisième pas…

(plusieurs élèves parlent entre eux en même temps)

Prof : ici dans le troisième pas…il arrive à la conclusion que tout ce calcul est 7xz…tout le monde voit ici que lorsqu'on élimine y dans le deuxième terme, ce qui reste est 7xz?
Certains élèves : oui
D'autres élèves : non
Prof : il y a quelqu'un qui dit oui….il y quelqu'un qui dit non…. alors?
EQ184 : pourquoi il y a moins y fois z, ce n'est pas moins y?
Prof : c'est le premier pas, le dernier pas est la différence entre le deuxième pas et le premier pas
EQ184 : mais on remplace yxz et on donne une lettre, ce ça qu'on a fait… alors tu mets moins x…
Prof : ok, mais cela est une autre explication…on essaie de comprendre celle-ci…. Tout le monde voit que si on élimine y des deux termes, ce qui reste est 7xz
Certains élèves : oui
D'autres élèves : non
Prof : alors, oui ou non?
Élève : non, parce qu'on peut pas faire –y +y à cause que le moins c'est yxz qui est ensemble et y+7 qui est entre parenthèses….de toute façon si on pouvait le faire, il resterait deux z, dont il resterait pas juste 7xz…il y aurait plus de z….
Prof (à la classe) : avez vous compris ce qu'elle dit?

(Silence)

Prof : elle dit que si on élimine ça (en référence au premier y) et on élimine ça (en référence au deuxième y) il y a un z qui reste ici (en marquant le z du deuxième terme
Élève : et il y en a une autre (celui du premier terme)
Prof : en plus, elle a dit que dans le premier terme il y a une parenthèse, alors on peut pas éliminer le y qui est dans le parenthèse…
Autre élève : vous pouvez écrire yxz+7xz –yxz
Prof : pourquoi?
Autre élève parce que (y+7)xz ça fait yxz+7xz

Prof : elle dit que cette multiplication ici (en référence à (y+7)xz) fait yxz+7xz. Après on fait la différence et alors?
Élève : yxz s'annule…
Prof : qu'est-ce qui reste?
Élève : 7xz
Prof : êtes-vous d'accord?
Certains élèves : oui (peu d'élèves participent aux échanges avec le professeur)

Prof : et z c'est qui?

Élève : 2999

Prof : Quelle est la différence entre l'explication de l'équipe 1 et ce qu'elle vient de proposer? Voyez-vous une différence?
Élève : dans la première, on ne pouvait pas éliminer y parce qu'il avait une parenthèse…
Prof : tout le monde est d'accord avec ça
Plusieurs élèves : oui
Prof : maintenant j'aimerais demander à l'équipe 1 pourquoi avez-vous décidé d'écrire l'explication avec des lettres? Pourquoi avez-vous choisi y, z pour exprimer les nombres?
Élève du premier groupe : parce que cela peut s'appliquer à n'importe quel nombre… et comme on peut changer la valeur de z et de y….on a décidé de mettre des lettres…

On peut voir que la discussion porte bien sur les transformations « permises » des expressions algébriques produites et que ces transformations sont reconnues par l'élève comme un moyen pour faire expliciter les relations qui permettent de produire ce que ces élèves comprennent par « explication ». On a aussi un exemple clair du niveau de généralité qui caractérise les explications produites dans cette classe.

Nous verrons qu'après la confrontation de différentes explications, le professeur revient sur pourquoi « (y+7)xz) » fait « yxz+7xz » (x n'étant pas une variable mais le symbole de la multiplication), en s'étonnant du fait que les élèves disent ne jamais avoir entendu parler de « propriété distributive ».

[…]

Prof : est-ce qu'il y a d'autres explications?
EQ181 : premier chiffre y, deuxième chiffre z, et la multiplication donne e
Au deuxième pas, on fait y+7 et fois z et on va dire que là cela va donner n
Troisième numéro n-e va devenir 20993
Voilà

L'élève écrit : yxz=e
(y+7)xz= n
n-e=20993

Prof : c'est quoi la différence entre cette explication et l'autre qu'on vient d'analyser?

(Personne ne répond)

Prof : voyez-vous une différence?

EQ184 : non, tu peux voir que n est 7 fois plus grand que e, donc, n-e ça donne 7 fois… 7 fois z
Prof : la question est la suivante : si l'objectif est d'expliquer pourquoi on obtient toujours 7 fois le deuxième nombre et je donne ces deux explications :

yxz	yxz=e
(y+7)xz	(y+7)xz=n
(y+7)xz-yxz	n-e= 7xz
yxz+7xz-yxz	
7xz	

Est-ce qu'il y a une différence entre les deux explications?
EQ184 : mais non
Élève : oui, la première t'explique pourquoi, t'explique comment tu fais pour obtenir 7xz, mais l'autre dit c'est qui e, c'est qui n, puis n-e=7xz mais on ne le montre pas…
EQ184 : mais c'est dit entre les lignes! Tu vois pas entre les lignes que (y+7)xz ça fait…
Élève : non, non.,… pour quelqu'un qui arrive et doit comprendre…c'est pas clair…
Expérimentateur : est-ce qu'on peut demander de corriger son écriture, d'ajouter quelque chose? Ce qui est entre les lignes, qui n'est pas écrit, est-ce que vous pourriez ajouter quelque chose pour montrer ce qui n'est pas dit? Pour montrer ce que vous dites qui est entre les lignes…
EQ184 : (oralement) e plus 7 fois z alors ça va te donner x, et x va être 7xz plus grand que e, alors ça va donner 7xz…je sais pas… je trouve que c'est dit entre les lignes…
Élève : je comprends plus… le premier montre pourquoi…
Prof : elle dit que la première montre pourquoi. Elle dit que la deuxième dit que yxz =e, on fait les calculs et on met que la différence est 7xz, mais dans la première, on montre pourquoi est 7xz. Vous êtes d'accord avec ce qu'elle dit ou vous pensez que les deux types d'écriture montrent la même chose?
Autre élève : je suis d'accord que la deuxième écriture n'exprime pas pourquoi, comment ça se fait qu'on annule les deux y ….
Prof : les autres? Qu'est-ce que vous pensez?

On discute explicitement sur le caractère explicatif des écritures proposées. L'élève EQ184 peut exprimer oralement (on l'a constaté pendant le moment du travail privé) les relations impliquées, mais il utilise une écriture arithmétique. Il n'a pas besoin, pour lui-même, d'exprimer des relations qu'il considère « évidentes » (on peut lire « entre les lignes »). Nous nous demandons : est-ce que l'écriture arithmétique proposée par l'élève E84 accompagné du texte oral qui identifie des relations impliquées est si différente de l'écriture qui est dans la première colonne? N'y a-t-il qu'un problème de « forme », de « convention mathématique » dans l'écriture du raisonnement? Ou y-a-t-il un problème de généralité? Répondre à la dernière question est plus facile : la nature du texte qui accompagne caractérise le niveau de généralité. La première question est plus difficile : l'écriture n'est pas seulement une convention, une façon « plus économique » d'exprimer les relations : elle est un moyen de penser. Possiblement, cette situation ne permet pas de mettre en évidence cette propriété des écritures algébriques, par le fait que les élèves peuvent passer par l'identification des relations sur un exemple générique, mais cette stratégie n'est pas toujours possible? Si la réponse est oui, la question de l'économie pourrait être une variable pertinente. Mais il y a aussi d'autres niveaux d'interactions : la confrontation de l'écriture de l'élève EQ184 avec une autre écriture, sous le regard de la classe, ouvre un problème qui jusque là ne l'était pour lui. Le travail sur l'explicitation de ces relations « entre les lignes » est laissé comme devoir parce que d'autres élèves interrogent encore certains éléments des explications proposées que le professeur considère plus importantes pour le développement de la situation :

[...]

Élève : moi, il y a quelque chose que je comprends pas...
Prof : il y a quelqu'un qui dit qu'il y a une chose qu'elle ne comprend pas... écoutez
Élève : y fois z plus 7 fois z moins yxz ...pourquoi il y a un plus
Prof : ah, ok, elle ne comprend pas pourquoi il y a un plus ici... c'est à dire elle ne comprend pas pourquoi à partir de cette écriture ici (en référence à (y+7)xz) on obtient yxz +7xz ... pourquoi « le plus » ici?
Autre élève : parce que quand tu écris (y+7)xz comme on a ajouté quelque chose à y on a « plus » que yxz... on a enlevé la parenthèse et on a fait yxz et après 7xz et ensuite la somme
Prof : elle dit que pour enlever la parenthèse il faut multiplier y fois z et après faire 7xz et enfin, les additionner, mais justement ce qu'on ne comprend pas c'est pourquoi il faut les additionner... c'est ça la question... qu'est-ce que vous dites? Comment est-ce que l'on explique pourquoi il faut les additionner?
Élève : parce qu'il y a deux opérations....le plus change de place...
Prof : Qu'est-ce que vous pensez? C'est clair pourquoi?

(Silence)

Prof : si on a ce calcul (écrit au tableau) (15+7)x9
Élève : on fait 15x9 + 7x9
Prof : on peut faire 15x9 + 7x9 mais pourquoi +?
Expérimentateur : comment vous faites 99x5?
E12 : 100 x 5 moins 1x5
Expérimentateur : si on a 201x5 je pourrais écrire 200+ 1 fois 5
Élèves : oui, on fait 200x5 +1x5
Expérimentateur : cette écriture a l'air de quoi?

(Silence)

Prof : alors si on doit choisir une explication, laquelle on choisirait?
Peu d'élèves (avec l'air fatigué de la discussion) : la première
Expérimentateur: quelqu'un a écouté le mot distributivité
Certains élèves : quoi?
Élèves : non

La propriété distributive n'est qu'une connaissance implicite; sur les expressions algébriques; un élève reconnaît que (y+7)z doit être plus grand que yz parce que l'on a ajouté 7 à y : il justifie l'addition en s'appuyant sur ce raisonnement, mais il n'explique pas pourquoi ce qu'il faut ajouter « de plus » à yz doit être justement 7z. Le professeur fait appel à un exemple, mais en qualité d'exemple générique : si l'entrée dans l'algèbre ne fait pas appel à un système axiomatique, l'algèbre comme instrument de modélisation ne peut qu'« hériter » des propriétés des objets qu'elle modélise.

1.5. Conclusions

Le milieu que nous avons conçu dans cette étude nous a permis de créer une scène d'observation satisfaisante, compte tenu de notre objectif : la contradiction n'est pas seulement reconnue comme telle par les élèves, elle est aussi une variable fondamentale pour les faire entrer dans la recherche d'une explication. Les caractéristiques particulières de la contradiction exigent des élèves qu'ils se centrent sur le processus de production et non sur les résultats, ce qui implique la réflexion sur l'action (nécessaire pour entrer dans un processus de preuve) et non la recherche d'un nouveau résultat, comme dans les études analysées par Balacheff (1987,1991). Le travail de tous les élèves (lorsque la dévolution a réussi) s'est centré sur cette réflexion, même chez ceux qui n'ont pas pu produire une explication dans les étapes du travail privé, ce qui a exigé un fonctionnement différent des connaissances arithmétiques. Dans les essais pour dépasser la contradiction, l'impossibilité de réussir ne conduit pas à l'empirisme naïf : ce qui leur permet de s'assurer de la vérité de la proposition ne montre pas le pourquoi de ladite vérité; en d'autres mots, lorsqu'il ne s'agit pas de montrer que « cela marche », mais pourquoi cela « marche », l'empirisme naïf devient limité. Nous avons rencontré une preuve « pragmatique » dans **toutes les classes observées**, que nous appellerons « l'exemple particulier » et que nous illustrons en nous référant à la production d'un des élèves de la classe Q2 :

EQ244: mettons 900000 et 2999

900000 et 2999 ça fait 2699100000
+7
900007 x 2999 ça fait 2699120993)

(l'élève marque le 20993 et il remarque que les 5 premiers chiffres sont égaux, donc, que la différence est 0 pour les 5 premiers chiffres et 20993 pour ce qui reste)

Pour éviter « cacher » les relations impliquées derrière les résultats, les élèves choisissent des nombres qui permettent « de voir » sur les résultats les dites relations. Il n'y a pas de changement de fonctionnement des connaissances arithmétiques : il s'agit « de voir » sur les résultats et non pas de « lire l'information » sur les relations qui conduisent à ces résultats. Comme en géométrie, où l'élève s'appuie (et « lit ») sur un dessin pour produire des connaissances sur « les figures », ces écritures arithmétiques particulières (persistantes chez les élèves de toutes les classes) permettent de produire des connaissances sur les « expressions numériques » ou les « expressions algébriques » (informations que chacune porte, équivalence d'expressions et connaissances impliquées, etc.). Mais comme en géométrie (où les rapports entre dessin et figure ne vont pas de soi), les rapports entre « exemple particulier » et « expressions numériques » ne sont pas évidents. Certaines limites de l'arithmétique commencent à se manifester implicitement : un changement de pratiques sur « les mêmes objets » devient nécessaire. À la différence de l'empirisme naïf (et de son rapport avec la conviction), cette preuve empirique est un point d'appui clair pour un niveau plus grand d'explicitation. Et c'est la particularité sur laquelle cette explication se fonde (il ne s'agit pas d'un exemple représentant d'une classe, comme dans l'exemple générique) qui ne résiste pas à la question de la généralité, mais qui confère un sens à un autre type d'écriture : l'identification et l'explicitation des même relations que l'on suppose valides pour n'importe quel nombre choisi. À la différence de la géométrie, où un changement de dessin n'implique pas nécessairement la perte des relations « visualisées » sur ce dessin, dans notre cas, un simple changement de nombres change les relations à identifier. Les limites de ce type de représentation sembleraient être plus évidentes.

Les analyses des interactions à l'intérieur des groupes nous permettent d'appuyer certaines conjectures que nous avons proposées dans le cadre théorique : les niveaux de validation impliqués sont liés aux connaissances engagées dans la production des connaissances à valider. Le jeu entre anticipation et exemples prend des caractéristiques particulières, les élèves se positionnant de manière différente par rapport à la validation, tant au niveau privé que public. Ceux qui n'avaient pas une anticipation juste, et qui acceptent la proposition d'un collègue, ont besoin de « prouver » avec des exemples pour vérifier la vérité de ladite proposition ; les exemples jouent alors un rôle de « vérification ». En revanche, pour les élèves qui sont engagés dans la production d'une hypothèse pour le choix des nombres, les exemples n'ont pas nécessairement ce statut : ils peuvent fonctionner, soit comme exemples génériques, soit comme contre-exemples. Mais comme nous l'avons remarqué dans l'analyse du groupe 2 de la classe A, ce fonctionnement peut requérir de l'institution classe comme moyen de contrôle.

Nous avons trouvé, dans le contexte de la production d'explications par les élèves, deux types d'exemples génériques caractérisés par des niveaux différents de généralisation et d'explicitation :

- exemples génériques « particuliers » : ceux qui sont choisis en fonction de leur avantage « explicatif » (par exemple, le premier nombre multiple de 10 pour voir plus « clairement » ce qui se passe quand on ajoute 7, etc., des nombres petits pour éviter de centrer l'attention sur les problèmes de calculs)
- exemples génériques « génériques » : les nombres choisis sont simplement des moyens pour exprimer les relations identifiées

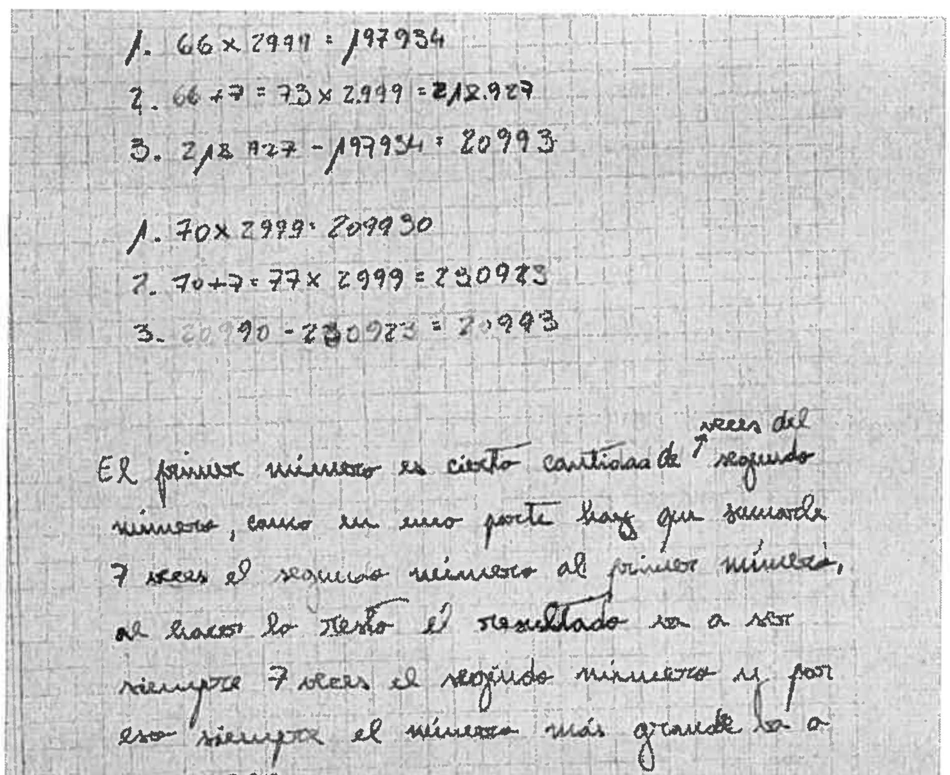
L'exigence de précision dans les explications (le besoin de « rendre visibles » certaines relations implicites) et la possibilité d'un fonctionnement algébrique du numérique ont marqué l'évolution d'un type d'exemples génériques à un autre. La « particularité » du premier type d'« exemples génériques » n'est pas nécessairement synonyme de « niveau moindre de généralité » ; ainsi, l'élève EA12 choisit 10 pour le premier nombre, en reconnaissant d'avance son indépendance du résultat, mais en justifiant son choix en fonction de la « facilité » pour faire les calculs. En revanche, pour l'élève EA11, qui fait partie du même groupe, choisir le 10 lui permet de « voir » des relations qu'elle ne pouvait pas expliciter.

Le niveau de généralité reconnu dans un exemple générique n'est pas déterminé seulement par la production même d'un de ces deux types mais pour leur rapport avec la conviction : l'élève EA11 produit un exemple générique « générique » mais, quand elle finit, elle revient sur les exemples pour « vérifier » ; l'élève EA21 avertit ses collègues, en se basant sur un exemple générique « générique », de s'arrêter de mettre des exemples parce qu'on ne pourrait jamais obtenir plus grand que 20993. Conviction, explication et généralité sembleraient être liées et non pas de manière linéale.

Dans toutes les classes observées, on peut classer les explications produites à l'intérieur des groupes selon les catégories suivantes :

- verbalisation d'actions réalisées, sans identifier les relations qui permettraient leur articulation déductive.

Exemple :


1. 66 × 2999 = 197934
2. 66 + 7 = 73 × 2999 = 218.927
3. 218 927 − 197934 = 20993

1. 70 × 2999 = 209930
2. 70 + 7 = 77 × 2999 = 230923
3. 20990 − 230923 = 20993

El primer número es cierto cantidad de veces del segundo
número, como en una parte hay que sumarle
7 veces el segundo número al primer número,
al hacer lo resto el resultado va a ser
siempre 7 veces el segundo número y por
eso siempre el número más grande va a
ser 20993.

(Traduction libre : « Le premier nombre est une certaine quantité de fois le deuxième nombre, comme dans une partie il y a que l'additionner 7 fois le deuxième nombre au premier nombre; lorsque on fait la soustraction, le résultat va être toujours 7 fois le deuxième nombre et pour cela, le plus grand sera toujours le nombre 20993»)

- argumentations qui suggèrent « des raisons sous-jacentes (underlying reasons) » soutenues par un langage naturel (Healy et Hoyles, 2000)

Exemple :

otro ejemplo :

42

3500 66

×2999

10496500 197934

3507 × 2999

10.517.493

10.517.493 − 10496500

=

20993

73 × 2999

218.927

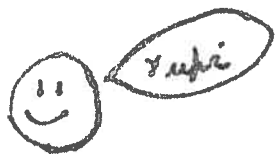
218.927 − 197934

=

20993

Diferencia

Todas las cuentas sin importar el primer número dan 20993 porque 7 veces 2999 es 20993.
Esa cuenta queda porque cuando se multiplica a por 2999 menos a por 2999 dá cero y como habrá que agregarle 7 por 2999, queda 7 por 2999 y como eso dá 20.993, siempre da igual.



Otras formas:

$$(a+7).2999 = 7.2999 + a.2999$$

$$\begin{array}{r} 7.2999 + a.2999 \\ - a.2999 \\ \hline 7.2999 \end{array}$$

Distributiva

Primer paso $a.6$

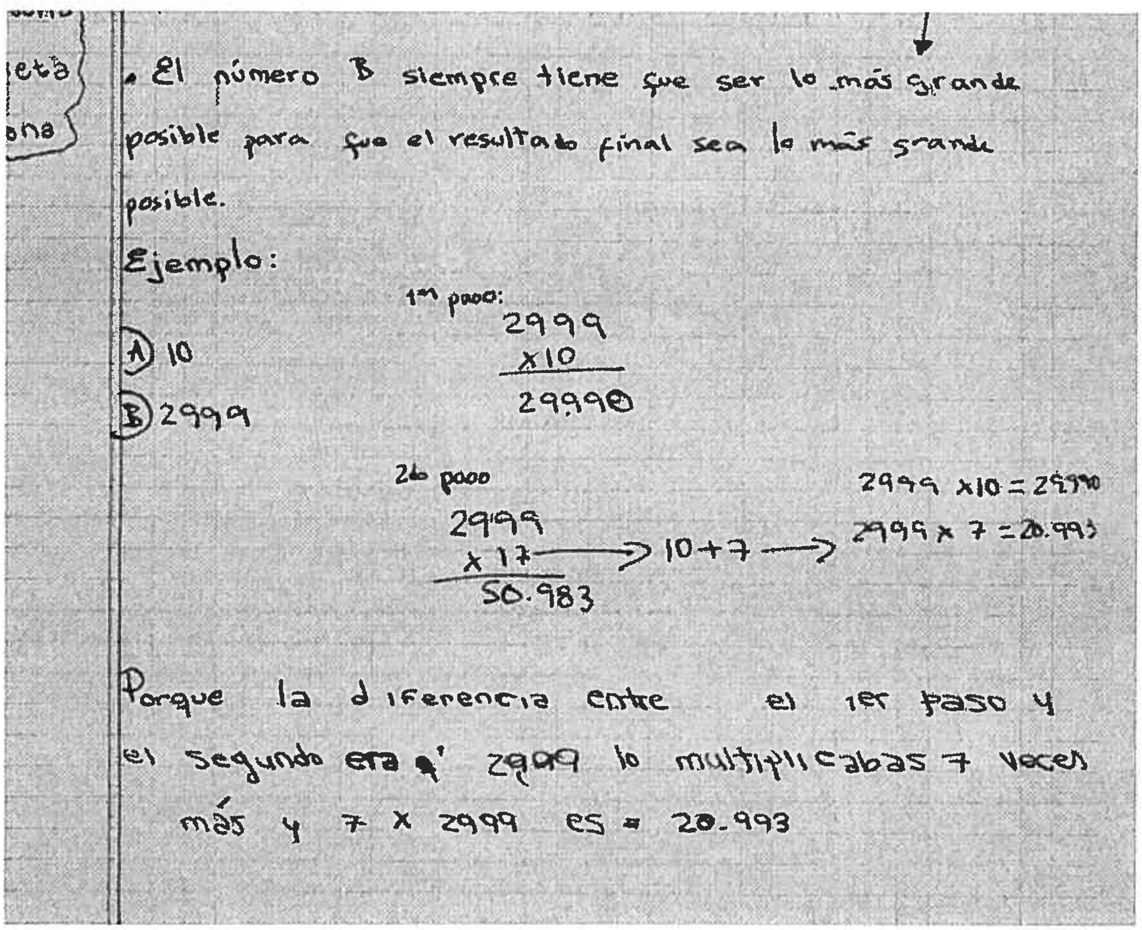
Segundo paso $(a+7).6 = 7.6 + 0.6$

Primero paso $\frac{a6}{76}$

(Traduction libre : « Tous les calculs, peu importe le premier nombre, donnent toujours 20993 parce que 7 fois est 20993. Ce calcul est toujours comme ça parce que lorsqu'on multiplie a (le premier nombre) par 2999 moins a fois 2999, on obtient 0 et, comme il faut l'ajouter 7 par 2999, ce qui reste est 7 par 2999, et comme cela donne 20993, toujours on obtient égal»)

- argumentations basées sur des exemples génériques (Balacheff, 1987). À l'intérieur de cette catégorie, on peut rencontrer des argumentations dans lesquelles les relations impliquées sont explicitées et des argumentations dans lesquelles les relations sont implicites (« underlying reasons »); on peut rencontrer aussi des argumentations avec des niveaux de généralisation différents (par exemple, chez les élèves qui choissent, un premier nombre particulier (qui se termine par le chiffre 0) pour « voir » plus facilement les relations impliquées; chez ceux qui laissent « suspendent » le problème initial (ils ne travaillent pas sur les nombres gagnants, mais sur *deux* nombres qui « facilitent » la recherche des relations engagées); ceux qui reconnaissent l'indépendance du raisonnement des nombres particuliers choisis.

Exemples :



• El número B siempre tiene que ser lo más grande posible para que el resultado final sea lo más grande posible.

Ejemplo:

A) 10

B) 2999

1er paso:

$$\begin{array}{r} 2999 \\ \times 10 \\ \hline 29990 \end{array}$$

2do paso

$$\begin{array}{r} 2999 \\ \times 17 \\ \hline 50.983 \end{array} \longrightarrow 10+7 \longrightarrow \begin{array}{l} 2999 \times 10 = 29990 \\ 2999 \times 7 = 20.993 \end{array}$$

Porque la diferencia entre el 1er paso y el segundo era q' 2999 lo multiplicabas 7 veces más y 7 x 2999 es = 20.993

(Traduction libre : « Le nombre B (en référence au deuxième nombre) doit toujours être le plus grand possible pour que le résultat final soit le plus grand possible.

Parce que la différence entre le premier pas et le deuxième te dit que le 2999 est multiplié 7 fois de plus et 7x2999 est égal à 20993»)

• Para estar seguros de que es el único par más grande el factor B tiene que ser el mayor posible con las condiciones dadas, en este caso, menor de 3.000 que es 2.999. Porque en el 3er paso la diferencia que hay entre los números que se restan es B x 7, el resultado final

• La explicación para un chico que no conoce el juego sería

- el número B) sea lo mayor que se permite. y que al número A) no le de importancia ya que después de alguna manera se termina anulando la cuenta.

(Traduction libre : « Pour que nous soyons sûrs qu'il est le seul pair plus grand, le facteur B (le deuxième nombre) doit être le plus grand possible avec les conditions données, dans ce cas, plus petit que 3000, alors 2999. Parce que dans le troisième pas, la différence qu'il y a entre les nombres qui interviennent dans la soustraction est Bx7, le résultat final.
L'explication pour quelqu'un qui ne connaît pas le jeu serait :
- le nombre B doit être le plus grand possible et le nombre A n'est pas important, puisque après, il finit par s'annuler»)

Dans ce dernier exemple, l'écriture -synthèse des discussions que nous avons déjà présentées (groupe 1 classe A)- reflète certains niveaux implicites des relations identifiées : les élèves font une décomposition additive du 17 et reconnaissent que multiplier par 17 est équivalent à multiplier par 10 « et » par 7, mais ils ne l'expriment pas à travers de l'égalité 2999x17=2999x10 +2999x7. Même si pour les « producteurs » des explications, certains niveaux d'explicitation pouvaient ne pas être nécessaires, on a vu qu'à l'intérieur des groupes et, sous la pression d'autres collègues, ils n'ont pas pu surmonter cette impossibilité : ce manque d'explicitation a été un obstacle pour la compréhension des autres. Nous avons rencontré un phénomène similaire au Québec en analysant la production de l'élève EQ184 qui parlait de ce qui était dit « entre les lignes ». La confrontation avec « les autres », mais aussi avec un autre type d'explication, lui a permis d'évoluer vers une écriture « plus standard ». Nous observons que pour les deux élèves, il n'était pas nécessaire d'expliciter davantage, mais sous la pression du professeur et des autres ils acceptent (effet de contrat?) une écriture différente.

C'est dans le cadre de ces interactions (rétroactions) que les « connaissances » qui vont régler le fonctionnement de la classe par rapport à la validation, commencent à s'élaborer. Les niveaux d'explicitation nécessaires pour la compréhension personnelle ou pour la compréhension « des autres » sont différents, ce qui exige l'établissement d'accords autour de cette question. Comme chez les mathématiciens (où les niveaux d'explicitation nécessaires pour une preuve ont toujours été objets de discussions, puis de progrès dans la construction de connaissances), la communauté « classe de mathématique » commence à élaborer des connaissances qui vont permettre de caractériser les « preuves qui expliquent » et les niveaux d'explicitation reconnus culturellement. Dans le débat public, nous avons vu, que les « rétractions » ne viennent pas seulement des élèves qui « ne comprennent pas », mais aussi du professeur qui comme représentant de la communauté de mathématiciens, a une position sur les niveaux d'explicitation « nécessaires » en mathématiques et sur les niveaux d'explicitation « possibles » à certains moments de la scolarité : la recherche d'un contrat est en marche.

Les catégories mentionnées ne s'excluent pas : on peut rencontrer des argumentations de la deuxième catégorie qui s'appuient, implicitement, sur un exemple générique. La différence entre ces deux catégories pourrait être marquée par les niveaux d'explicitation et le type de langage utilisé. Construire une hypothèse à partir de l'analyse de cas particuliers ou la construire à partir d'un jeu entre anticipations et essais particuliers peut positionner les élèves de manière différente par rapport à la validation. Mais ce positionnement ne dépend pas exclusivement de ce fait : le rapport des élèves à la généralisation, ainsi que la culture de la classe, résultent fondamentaux.

On peut résumer le positionnement du professeur A de la manière suivante. Par rapport aux deux dernières catégories, les rétroactions du professeur A pourraient se décrire en termes de « résistance » : en rappelant l'exigence d'explicitation, même aux élèves qu'il perçoit comme étant « à coté » du débat ou en exigeant lui-même un niveau plus grand d'explicitation (en se positionnant comme quelqu'un qui ne comprend pas, en demandant le pourquoi de certains relations acceptées implicitement, en rappelant que l'explication devrait convaincre les autres et être comprise par tous). Il utilise aussi la stratégie d'organiser un petit bilan pour « nourrir » le milieu avec les productions des élèves.

Le professeur B fait un travail similaire, mais il prend lui-même une place plus importante : il se positionne toujours comme l'interlocuteur contre lequel les groupes doivent réagir. La référence au savoir à construire commande les interactions : il exige des précisions, il reformule les explicitations des élèves en marquant les argumentations faibles et en demandant de les expliciter.

Les actions des deux professeurs sont toujours orientées vers l'enrichissement du débat public : ils apportent des informations, mais laissent toujours un degré d'incertitude pour éviter que le débat collectif ne soit qu'une mise en commune.

Par rapport à la première catégorie, le professeur A ne change pas de stratégie (et la participation de ses élèves au débat public a été très faible). En revanche, le professeur B a repris certains éléments des explications produites dans les autres groupes et les a utilisées pour essayer de débloquer la situation (la participation de ces élèves au débat a été aussi faible).

En prenant à charge nous-mêmes le pilotage des situations au Québec, nous montrerons les similitudes de certaines actions conditionnées par la situation; la connaissance de la situation n'est pas suffisante pour faire face à des problématiques caractéristiques de n'importe quelle classe et de n'importe quel enseignant : interprétation « à chaud » de certaines productions des élèves; articulation connaissances-savoirs; rétroactions face à l'insuffisance des interactions avec le milieu. Face à la contingence, nos réactions ne se distinguent pas de celles de n'importe quel enseignant ou se placent plus du coté de la recherche que de l'enseignement.

La recherche d'une explication met au premier plan un fonctionnement différent des connaissances arithmétiques, ce qui permet de donner sens à l'entrée des élèves dans des pratiques algébriques, puis de développer un langage particulier. Le développement de ce langage permet, en même temps, la construction des nouveaux objets. Les « expressions numériques », qui étaient auparavant un moyen de calcul, sont maintenant objets de réflexion : on peut « lire des informations » à partir d'elles, on peut « opérer » avec ces objets pour les transformer, etc. Mais la reconnaissance du caractère explicatif et opératoire des écritures exige une utilisation différente (implicite ou explicite) des propriétés des opérations, des accords sociaux et des conventions culturelles caractéristiques d'une nouvelle pratique. Ce changement de pratique et de contrat sera le produit d'un travail à long terme qui ne peut pas se réduire à une situation spécifique.

Le développement du débat public a été différent dans chacune des classes. Même si on a identifié une influence particulière de la variable « temps didactique » chez les différents enseignants, on ne peut pas dire que cette variable ait été déterminante pour la nature de cette phase. On ne peut pas analyser les décisions du professeur en « elles-mêmes », mais en fonction des interactions, dans le cadre du milieu réel. Lors du débat public, le professeur A a interagi avec un milieu qui lui permis de construire une explication collective. En revanche, le professeur B s'est confronté à un milieu « plus résistant » : il a participé plus activement à l'élaboration de l'explication. Dans une des classes au Québec (Q1), nous n'avons pas réussi à organiser un débat : les groupes qui avaient produit des explications ne pouvaient pas se décentrer de leurs propres productions; ils n'interagissaient pas avec les autres groupes, *en se limitant les interactions à celles entre le professeur et chaque équipe.* Comme dans le cas du professeur A, dans l'autre classe au Québec (Q1), le milieu était plus riche, dans le sens des interactions produites, ce qui a permis au professeur de « développer son travail ». Nous retrouvons ici une des contraintes fondamentales qui conditionne le travail du professeur : la possibilité de « faire confiance » au milieu est associée à sa richesse (en termes de productions et d'interactions). Un milieu « pauvre » en interactions ne donne pas beaucoup de marge de manœuvre au professeur. Cela nous renvoie à la question de l'enrichissement possible du milieu, pendant le travail privé des élèves, pour que le débat ait du sens.

Lorsqu'il s'agit de revenir sur la question de la certitude de la vérité de la proposition en jeu, la présence de la preuve intellectuelle (déjà acceptée par la classe comme moyen d'explication) semblerait ne pas remettre en question les processus de validation engagés dans les étapes de vérification de la proposition. Nous avions formulé l'hypothèse que la confrontation des preuves empiriques et intellectuelles, par rapport à la certitude, pourrait amorcer un questionnement sur les preuves utilisées par les élèves. Nos données expérimentales montrent qu'il n'y a que quelques élèves (justement ceux qui avaient pu élaborer, dans les étapes de travail privé, une preuve intellectuelle) qui entrent dans cette problématique. Ces élèves manifestent un doute hypothétique (l'élève EA114: « tu as prouvé mille fois que ça marche mais il est possible tu n'aies pas prouvé avec un nombre qui ne marche pas»), un rapport au général que les autres sembleraient ne pas avoir. Notre travail ne s'est pas préoccupé de ce rapport ; il met plutôt en évidence le fait que la double fonctionnalité de la preuve identifiée dans les analyses épistémologiques (une même preuve intellectuelle peut expliquer et prouver) n'est pas transparente pour les élèves. Un travail additionnel est nécessaire pour que la preuve intellectuelle devienne un moyen de conviction. Notre étude nous montre que la fonctionnalité de la preuve, du point de vue de l'enseignement, n'est pas un caractère intrinsèque de cet objet, mais plutôt un caractère lié à un système cognitif : la possibilité de la reconnaissance de ce caractère repose sur des niveaux de rationalité et sur des connaissances spécifiques. Certains épisodes du débat public nous permettent d'avancer l'idée qu'un plus grand niveau d'algébrisation pourrait être associé, chez les élèves, à un plus grand niveau d'explication.

2. Analyse des données de la Situation 2

La situation 2, comme nous l'avons décrit au chapitre précédent, comporte deux versions : une version papier-crayon et une version informatisée. La première version a été mise à l'épreuve dans les classes d'Argentine et la seconde, dans les classes du Québec. Nous analysons successivement les données liées à chacune des versions.

2.1. Situation 2 : version papier-crayon

La situation 2 comporte trois étapes. Nous reproduisons les tâches que comporte chacune de ces étapes

Première étape

La première étape comporte deux jeux. Le professeur invite d'abord les élèves à former des équipes de 4 ou 5 élèves, puis il informe les élèves que l'équipe gagnante sera celle qui parvient à trouver la somme des nombres qu'il écrit au tableau.

Pour le premier jeu, le professeur propose les nombres :
19, 20, 21, 22, 23, 24,25,26,27,28.

Pour le second jeu, il propose les nombres :
783, 784, 785, 786,787,788,789,790,791,792

Dans cette partie du jeu, l'équipe qui a trouvé une réponse la propose à la classe et le professeur (qui connaît déjà le résultat) détermine si elle est correcte ou non. Après, le professeur invite la classe à vérifier la réponse (avec la calculatrice, si c'est nécessaire). Si la réponse est incorrecte, le jeu continue.

Dans cette étape, l'objectif est que les élèves comprennent les règles et qu'ils commencent à reconnaître les limites de certaines stratégies (les nombres choisis par le professeur sont, dans chaque nouveau jeu, plus grands) et donc le besoin d'en chercher d'autres.

Deuxième étape

Le professeur propose aux élèves un temps de réflexion avant de continuer le jeu. La consigne demeure la même. Les élèves devront penser à un moyen de trouver la réponse le plus vite possible, quels que soient les nombres proposés par le professeur.

Après ce temps, le jeu recommence avec des séries de nombres plus grands que dans la première étape, par exemple, des séries commençant par 287563 ou 6432987, etc.

Troisième étape

Le professeur demande aux élèves d'écrire la méthode trouvée sous la forme d'une formule et de chercher les raisons qui permettent d'expliquer pourquoi la formule trouvée fonctionne pour toutes séries de 10 nombres naturels consécutifs. Un bilan des formules est réalisé et chaque équipe est invitée à présenter le résultat de son travail.

Le professeur spécifie que la formule à produire doit servir pour n'importe quelle série de 10 nombres naturels consécutifs et qu'elle devra permettre d'obtenir la somme des 10 nombres sans qu'il soit nécessaire de faire toutes les additions. L'enseignant explique, au besoin, ce qu'il entend par « formule ».

Comme nous l'avons fait pour l'analyse des données de la première situation, nous examinons d'abord les interactions et le fonctionnement des connaissances à l'intérieur des différents groupes.

2.1.l. Interactions et fonctionnement des connaissances à l'intérieur des groupes dans le choix des stratégies de calcul

Les stratégies liées au calcul mental que nous avons prévues dans l'analyse a priori sont les premières qui apparaissent dans toutes les classes observées. Un élément fondamental marque leur évolution, soit la vitesse de réponse des autres groupes. Ainsi, le fait de répondre rapidement et de manière correcte met immédiatement en évidence les limites de certains des stratégies mais, fondamentalement, cet événement injecte une information importante dans le milieu: il y a une stratégie différente (par rapport à celle des groupes non gagnants) pour réussir.

La plupart des stratégies associées au calcul mental ne sont que des variations de la stratégie suivante, proposée par le groupe 2 de la classe A1 (professeur A). Nous présentons des extraits des interactions entre le professeur et les élèves de ce groupe, ce qui va nous permettre de mieux apprécier les conduites des autres groupes dans les deux classes.

Extraits des interactions dans la classe A1, professeur A (traduction libre)

En partant de la séquence 19,20,21,22,23,24,25,26,27, 28, le professeur propose à la classe de poursuivre le jeu; il dit alors: « on continue le jeu, voilà une autre série de nombres. Préparez-vous: 783,784,785,786,787,788,789,790,791,792 »

Groupe 2

EA125: il y a dix "7", donc on a 70000 (il se trompe lorsqu'il fait 700x10)
EA123: maintenant, combien de fois est le « 8 »? (un, deux, trois....) 7 fois ... puis, 8 fois 7=56
EA126: 80x7 pas 8x7 … cela fait … 560
EA125: c'est vrai

EA124: 90 x 3
EA125: non
EA123:oui, 279
EA125: il manque encore 45 (on a déjà 25 et on doit ajouter 9+1 et 8+2, c'est-à-dire 20)
70000+560+270+45= 70875
EA125: 70875!
Élève d'un autre groupe: 70000? Cela devrait être 7000 et non pas 70000!
EA125: ah, ...attendez....
Professeur: ce n'est pas le résultat
EA111 (élève d'un autre groupe) : c'est 7875
Professeur: c'est correct...

Les élèves effectuent une décomposition additive des nombres, en reconnaissant la possibilité de procéder par une addition répétée, puis par une multiplication. L'augmentation de la taille des nombres exige, de certains élèves, l'élaboration de stratégies plus économiques. L'efficacité de ces nouvelles stratégies remet en question les productions des autres groupes. Dans cette première étape du jeu, les élèves proposent le résultat du calcul, sans expliciter leurs modes de production.

Voilà la prochaine série proposée par le professeur: 528, 529,530,... La plupart des groupes utilisent encore des stratégies de calcul mental, même l'élève EA1414, un élève qui donne la réponse rapidement, avant que les autres groupes terminent leurs calculs:

EA1414 : le résultat est 5325
EA125 (d'un autre groupe) : oh non! Tu l'as déjà trouvé? Comment as-tu fait?
Professeur: Quel nombre avais-je dit?
Élève: 528
Professeur: c'est correct. Un point pour l'équipe de EA1414
Plusieurs élèves: non,... ehhhh ... ce n'est pas possible!
Élève: pour moi, ils sont en train d'utiliser la calculatrice...
Plusieurs élèves: calculatrice! Calculatrice!.....ils utilisent la calculatrice.....nous pensons ça....

En s'approchant du groupe de l'élève EA1414 (groupe 4), le professeur se rend compte que les élèves de ce groupe utilisent des stratégies similaires à celles du groupe 2. Il décide, alors, de continuer le jeu:

Professeur: je vais vous donner une autre série....
Élèves: oui!
Professeur: maintenant....
Élèves: allez-y!
Professeur: êtes-vous énervés? Voulez-vous gagner?
Plusieurs élèves: ouiiiiiiiiiiiiiiiiiiiiii
Professeur: ok, on y va ... : 12.321.474, 12.321.475, 12.321.476, ...

Élèves: ehhhhhh ... nooooonnnnn ...
Élèves: douze millions et je sais pas quoi ... c'est très difficile?
Professeur: oui, on commence avec le 12 321 474
Élèves: attends, attends!!!! On ne peut pas écrire si tu vas si vite!
Professeur: 12 321 476, ... jusqu'à 12 321 484
EA1414 : oh, maintenant c'est impossible!
Élève (en parlant au professeur) : Tu es très gentil!
Professeur: merci
Élève: mais je prends plus de temps pour écrire les nombres que pour faire le calcul!!!!

Avant que les élèves finissent de copier les nombres, un élève annonce un résultat:

Élève: mille deux cents .... non .... douze milles ... non ... cent vingt et trois millions deux cent quatorze mille sept cent quatre-vingt quinze
EA111: Jusqu'à quel nombre faut-il copier?
Professeur: arrêtez de copier, il y a déjà un groupe gagnant.
Plusieurs élèves: Quoi???? Ehhhhhhhh ... on n'a pas encore fini de copier! Comment ont-ils fait?
EA111: professeur, je n'ai pas fini de copier! Comment ont-ils fait?
Professeur: ok, ok, ... je vous donne un temps pour penser. Il faut maintenant gagner avant ce groupe-là (en référence au groupe qui a gagné tout de suite) parce que sinon, je soupçonne qu'ils vont toujours gagner avant vous.
Professeur (en se dirigeant vers le groupe gagnant): vous ne parlez pas!
Élève: comment ont-ils fait? C'est pas possible!
Élève: ce n'est pas vrai, ils utilisent la calculatrice!

Une période de travail individuel succède à ces échanges. Dans les extraits précédents, les interactions entre les élèves et le professeur visent l'établissement des conditions d'enseignement, dans le cadre du milieu de référence. Le professeur choisit intentionnellement des nombres qui provoquent un certain déséquilibre; en même temps, la production d'un des groupes "informe" les autres élèves sur le fait qu'il existe des procédures plus efficaces. En comparant les conduites et les échanges dans les différentes classes, nous avons pu observer l'importance de cette connaissance injectée dans le milieu par les élèves (le processus de dévolution est devenu plus complexe dans les classes où cette connaissance n'a pu être injectée); nous y reviendrons plus tard. Nous poursuivons, pour le moment, l'analyse des échanges dans le groupe de l'élève EA111 (groupe 1).

(à l'intérieur du groupe de l'élève EA111)
EA111: je ne sais pas comment ils ont fait...
EA112: je pense que je sais ce qu'ils ont fait!
EA111: cela ne doit pas être si difficile, il doit y avoir une formule.....
Professeur (à la classe) : allez, allez, il faut gagner avant ce groupe-là (en référence au groupe qui a découvert une méthode rapide de calcul). La consigne maintenant est : il faut gagner avant ce

groupe. Avant de continuer le jeu, vous aurez un temps pour penser. Maintenant, vous pouvez utiliser la calculatrice, mais après, lorsque le jeu recommence, la calculatrice sera interdite.

Les élèves traduisent l'information injectée dans le milieu en termes d' « existence d'une formule». Le professeur s'appuie sur cette information pour faire entrer les élèves dans une étape de réflexion sur le jeu réalisé, afin de produire d'autres stratégies.

Extraits des interactions dans la classe A2, professeur B

Dans la classe A2, les stratégies de base de la première étape de la situation 2 sont des variations de celles proposées par les élèves de la classe A1. La différence a trait au processus de dévolution. Comme nous l'avons fait remarquer, lors de l'analyse des conduites dans la situation 1, certaines interventions du professeur B, commandées par son besoin de faire avancer le temps didactique, c'est-à-dire par une lecture qu'il fait de la situation (évolution lente des stratégies des élèves), caractérisent fortement les interactions à l'intérieur des groupes. Ce besoin de faire avancer le temps didactique peut être lié à une contrainte de la situation réelle : le professeur observe une évolution lente des stratégies des élèves et il évalue que la répétition du jeu ne sera pas suffisante pour l'évolution des élèves (il connaît l'histoire particulière de cette classe); il évalue qu'il ne peut pas faire confiance aux interactions avec le milieu, même si le contrat de recherche qu'il avait accepté lui demandait de le faire.

Après avoir proposé trois séries de dix nombres consécutifs, le professeur injecte lui-même des connaissances dans le milieu, en faisant un mini bilan, bilan qui n'était pas prévu initialement. Nous reproduisons certains extraits des interactions de ce professeur avec les élèves de sa classe (traduction libre).

Professeur (à la classe et avant de donner la quatrième série de nombres): j'ai vu que certains groupes ont mis les nombres en colonne ... Le groupe de l'élève EA2314 (groupe 3) a fait les sommes deux à deux (le premier nombre avec le deuxième, le troisième avec le quatrième, etc.) mais cela prend beaucoup de temps parce qu'il faut écrire beaucoup.
EA2313 (en parlant à ces collègues du groupe) : alors, on va le faire comme cela la prochaine fois! On connaît déjà le truc....

EA2315 (à toute la classe) : moi, j' « ouvre » les nombres (décomposition additive)....dans le premier cas, je pense le 21 comme 20+1, après le 22 comme 20+2 et après j'additionne le 1,2,3,4,5,6,7,8.
Professeur : ah, regardez ça, c'est très joli... cela vous donne aussi la possibilité de faire les calculs plus vite. Il est clair que si l'on additionne deux à deux et après les résultats obtenus, cette méthode est plus lente. L'élève EA2315 dit qu'au lieu de mettre 21, il met 20+1, au lieu de mettre 22, il met 20+1+1 et donc, on additonne toujours 1,1,1, ...
Ok, mais c'est l'élève EA2314 qui continue en étant le gagnant....on va jouer une autre fois....pensez à trouver une stratégie que vous permette de gagner plus vite, ok?
Le professeur écrit au tableau : 1 794 , 1 795,.......1 803
Professeur : joli, n'est-ce pas? Je suis chanceuse parce que je ne dois pas faire ce calcul!

Le professeur B fait un petit bilan, qui n'était initialement non prévu, pour injecter des connaissances dans le milieu, en reprenant les idées qu'il pense utiles pour continuer le jeu. Par rapport à la stratégie du groupe de l'élève EA2314 (groupe 3), nous n'interprétons pas l'action du professeur comme une évaluation, parce que la lenteur des stratégies avait été déjà constatée par les élèves durant le jeu. En revanche, il évalue de manière positive la stratégie de l'élève EA2315, non seulement pour encourager cet élève à continuer, mais aussi avec l'intention de transformer le milieu des autres élèves. Il ajoute des connaissances en réinterprétant les propositions des élèves : l'élève EA2315 avait exprimé 22 comme 20+2, mais pour le professeur, l'élève EA2315 avait proposé exprimer le 22 comme 20 +1+1. L'élève EA2315 produit une stratégie de calcul mental et le professeur identifie (ou essaie d'introduire, possiblement pour faire avancer le temps) les connaissances sur les nombres consécutifs qui fondent cette stratégie. Les connaissances injectées dans le milieu sont reprises par certains élèves : l'élève EA242, par exemple, adopte la stratégie du groupe de l'élève EA2314, mais l'élève EA241, du même groupe 1, continue avec sa propre stratégie. Le jeu se poursuit et les élèves ne reformulent pas substantiellement leurs procédures.

Ce passage fait ressortir deux issues de l'évaluation positive du professeur -manifestée à travers le clin d'œil donné à la stratégie de l'élève EA2315- : des élèves qui reprennent la stratégie valorisée; des élèves qui ne la reprennent pas (soit parce qu'ils décident de continuer avec leurs propres stratégies, soit parce qu'ils n'ont pas les connaissances nécessaires pour lire l'information impliquée). Tout de suite, le professeur donne une série qui commence avec le nombre 1794; les élèves ne parviennent pas à respecter le délai prévu par le professeur dans la production de leur réponse, ce qui fait réagir ainsi le professeur :

> Professeur : ça commence à devenir difficile, n'est-ce pas? Additionner un par un....avec les doigts de la main....cela ne marche pas, n'est-ce pas?

Après un certain temps, jugé trop long par le professeur, l'élève EA219 (un élève d'un groupe qui n'avait pas gagné avant, soit le groupe 1) donne une réponse correcte. Le professeur poursuit alors en disant :

> Professeur : ... cela va trop lentement ... Alors, maintenant je vais vous donner un temps pour penser à une stratégie que vous permette de faire la somme beaucoup plus vite ... après, lorsqu'on revient au jeu, je vous donnerai le premier nombre de la série et ... dans deux ou trois minutes ... vous devriez obtenir le résultat.
> Élève : avec un seul nombre?
> Professeur : oui ... je n'écrirai pas tous les nombres ... par exemple je dirai « le premier nombre est 2 millions ... etc. et vous devrez, en 2 ou 3 minutes, me donner le résultat. Donc, maintenant je vais vous donner un temps pour penser comment obtenir le résultat de manière rapide, toujours avec 10 nombres consécutifs. Commencez, mais il faut que la stratégie ne soit pas additionner un à un, ok? Celle-ci est trop lente lorsqu'il s'agit d'additionner des nombres plus grands. De plus, vous avez beaucoup de possibilités de vous tromper dans les calculs.

Le mini bilan proposé par le professeur n'a pas accéléré le temps didactique : il n'a pas transformé le milieu dans le sens attendu par le professeur; il a essayé de réduire l'incertitude, trop tôt au début du jeu (après avoir proposé trois séquences), parce que les stratégies des élèves n'évoluaient pas. La situation réelle l'amène à prendre une décision (conditionnée, bien sûr par le contrat de recherche, mais aussi par sa responsabilité d'enseignant) : il relance la situation adidactique avec des contraintes explicites. Il faut trouver maintenant une stratégie, mais elle ne doit pas être celle d'« additionner un à un ».

L'information avec laquelle les élèves de cette classe (classe A2) arrivent à cette étape de réflexion est différente de celle que nous avons mis en évidence chez les élèves de la classe A. Dans la classe A2, aucun groupe n'a gagné à plusieurs jeux (en « dénonçant » l'existence d'une stratégie qui n'a pas encore été trouvée) et pendant le bilan, il y a eu injection explicite de connaissances. L'utilisation de ces connaissances par les élèves de la classe A2 n'est pas claire : leur engagement dans la recherche d'une méthode rapide de calcul n'a pas été simple. Le professeur ne résiste pas à accepter l'incertitude de cette étape adidactique; même dans le groupe de l'élève EA2315 (qui avait eu la parole pendant le mini bilan), il intervient en prenant à sa charge la réduction de l'incertitude. Nous reproduisons les interactions du professeur avec les élèves de ce groupe.

Extraits des interactions dans la classe A2, professeur B (traduction libre)

Groupe 3

EA2311 : il faut multiplier le premier nombre par 10 et ajouter 10
EA2315 : non, le premier nombre par 10 et après ajouter les derniers chiffres. Les derniers chiffres on ne peut pas les oublier.

(le professeur s'approche au groupe)

EA2315 : nous essayons de voir si cette stratégie est correcte.
Professeur: quelle est cette stratégie?
EA2315: on multiplie le premier par 10 et on ajoute les derniers chiffres …
EA2311 : non, il faut ajouter 10
Professeur : pourquoi 10?
EA2315: je l'ai dit qu'il ne faut pas ajouter 10, c'est 1 plus 2, plus 3, …
Professeur : ahhhh … c'est-à-dire qu'il y a une chose que vous additionnez et après c'est toujours la même chose …
EA2315 : pour cela on peut multiplier par 10, mais après il faut ajouter les autres nombres
Professeur : ok ... il faut voir combien faut-il ajouter … c'est cela que vous devez trouver, combien faut-il additioner. Mais pourquoi multiplie-t-on par 10?
EA2311 : parce qu'il y a dix nombres
Professeur : mais faut-il multiplier par 10 le premier nombre ou le dernier?
EA2311: le premier
Professeur : quelle différence y a-t-il entre le premier et le deuxième?
EA2315 : il y a un nombre de plus
Professeur : ok, et entre le premier et le troisième nombre?
EA2311 : il y a deux
Professeur : et entre le premier nombre et le quatrième?
EA2311 : il y a 3
Professeur : et as-tu additionné ces nombres?
EA2311: non
Professeur: tu ne les as pas encore additionnés … il manque 1, 2, 3 … (lorsque le professeur dit « manque », il fait référence au nombre 10 proposé au début par l'élève EA2311).

(le professeur s'éloigne du groupe)

EA2311 : 1,2,3, ... cela donne 43
EA2315 : lequel?
EA2311 : ah … non ... cela donne 45
EA2311 : 1794x10+45, c'est ça le résultat
EA2315 : comment? 1794 x 10…
EA2311 : attends … (il fait le calcul et compare avec le résultat déjà connu) Oui! Ça marche ! On a une formule!

(Le contrôle est encore empirique. L'élève EA2311 a besoin de faire les calculs pour vérifier la validité de la formule)
EA2315 : voilà la stratégie :

x10=

______+45____

(Le groupe prouve avec quelques exemples en notant le temps que cela leur prend pour faire les calculs : 7 secs, 8 secs, etc.)

Le groupe 3 avait commencé en proposant la stratégie de décomposition qui consistait à exprimer les nombres de la série ainsi: 20, 20+1, 20+2, 20+3, … Mais les élèves EA2315 et EA2311 ne s'entendaient pas sur le nombre à ajouter : le professeur intervient pour modifier le milieu, en « orientant » la discussion vers la réponse qu'il attendait.

L'analyse globale du protocole nous conduit aux réflexions suivantes : il est vrai que, dans la situation réelle, le professeur B est confronté aux difficultés rencontrées par les élèves dans l'évolution des stratégies; de plus, la situation réelle établit des contraintes « effectives » qui le contraignent à prendre certaines décisions. D'un autre coté, l'analyse théorique nous montrait la possibilité d'une phase adidactique. Ces contraintes effectives sont pour nous la face émergente d'un contrat didactique dans lequel le professeur réduit toujours l'incertitude et l'élève, en faisant très bien son métier, attend toujours les interventions du professeur qui orientent son travail.

Giroux et René de Cotret (2000) ont identifié des temps didactiques différents dans la gestion des élèves des classes faibles et des classes régulières. Il semblerait que le professeur fasse davantage confiance aux interactions élève-milieu, lorsqu'il s'agit d'élèves de classes régulières. Une représentation de la classe B comme en étant une « classe faible » (selon le témoignage du professeur B) et l'implicite du temps didactique conditionnent les possibilités réelles d'adidacticité établies lors de l'analyse théorique. Cette mémoire de la classe, qui ne fait pas partie de l'analyse a priori, a une influence non négligeable dans la situation réelle : ce n'est pas seulement le développement de cette situation particulière qui conditionne le travail du professeur, mais aussi la mémoire qu'il a construit de cette classe (et possiblement la mémoire institutionnelle de cette classe), qui participent de manière active à l'établissement des conditions d'enseignement.

L'analyse du travail du professeur B met au premier plan les limites du contrat de recherche : les représentations du professeur sont toujours présentes à l'intérieur des espaces de liberté donnés par la situation. Nous rencontrons le problème expérimental, déjà souligné par Margolinas (2004), soit celui de faire vivre des phases adidactiques dans des ingénieries très ponctuelles, ce qui ne permet pas de redéfinir le contrat didactique implicite dans la classe.

Dans chacune des classes, le professeur invite les élèves à une réflexion sur l'action, réflexion qui, comme nous avons pu le montrer, est alimentée par les interactions entre le professeur et les élèves. Deux types de productions découlent de cette étape de réflexion sur l'action; nous faisons appel aux interactions dans quelques groupes de la classe A1 pour mieux rendre compte de ces productions.

1- Un raffinement des stratégies de calcul mental : les élèves analysent ce qui change et ce qui ne change pas dans les nombres proposés :

Groupe 1, classe A1, professeur A (traduction libre)

EA112: enlève tous les nombres en arrière (elle fait référence aux unités), multiplie par 10 et puis additionne ce qui reste ... D'abord 12 321 470 x 10 … Attends …
EA111: Pourquoi fois 10?
EA112: parce qu'il est 10 fois répété
EA111: ah, oui, je comprends…
EA112: comme on répète 10 fois le 70…
EA110 : Comment?
EA111: enlève ces chiffres (en références aux unités) et mets pour tous des zéros. Donc, tu auras 12 321 470 dix fois.
EA112: parce qu'on a 10 fois ce nombre …
EA111: et additionne tous ces chiffres (en référence aux unités) … on obtient … 45
EA110: mais pour le 80 il faut ajouter 10 …
(Silence)
EA112: professeur! Professeur! Combien le résultat final était-il?
Professeur: 123 214 795
EA112: ah!… Je sais … Je comprends … il faut faire 12 321 475 x10, comme cela, les derniers chiffres seront 50, puis quand tu additionnes 45 qui est le total que nous avons calculé, nous obtenons le résultat final .
EA112 : explique aux autres en écrivant :

12 321 475
12 341 476 je l'enlève 1 pour qu'il soit comme le premier
12 431 477 je l'enlève 2 pour qu'il soit comme le premier

....

EA111: donc, il reste ax10 +45
EA112: je crois, je ne sais pas …

L'élève EA112 reprend les stratégies développées dans les premières étapes, en cherchant ce qui « ne change pas » et ce qui « change » sur les nombres de la série donnée, pour les décomposer de manière additive et réduire les sommes à des multiplications. Au début, elle ne perçoit pas que le nombre de dizaines change et, même lorsqu'elle reformule le nombre à multiplier par 10, elle ne le fait qu'en regardant le résultat correct et en adaptant les nombres de son calcul pour arriver à la bonne réponse. Enfin, elle utilise, implicitement, la notion de nombres consécutifs (donnée du problème qui n'avait pas été utilisée) pour produire une explication. Il est intéressant de remarquer qu'il semblerait y avoir un jeu dialectique entre les raisonnements impliqués dans la production de la formule et le raisonnement pour la valider: la connaissance du résultat permet de réinterpréter certaines relations identifiées, d'en produire des nouvelles ayant un caractère de conjectures (elles ne sont pas « déduites » des autres relations, elles se basent sur l'observation de régularités); c'est enfin cette découverte et son caractère conjecturel qui amènent l'élève à chercher une explication. Le rapport des élèves à la généralité est un fil conducteur des interactions.

Dans les autres classes, la plupart des élèves raffinent leurs méthodes de calcul sans arriver à une formule générale.

2- L'élaboration d'une méthode en reconnaissant les relations impliquées entre les nombres de la série :

Groupe 3, Classe A1, professeur A (traduction libre)

EA138: il faut faire le premier nombre fois 10 et après ajouter 45
(le professeur s'approche du groupe)
Professeur: pourquoi fois 10?
EA138: parce que le 12 321 475 est toujours là
Professeur : comment ça?
EA138: oui, par cela on peut multiplier par 10 mais après il faut ajouter les autres nombres
Professeur : je ne comprends pas

EA139 : parce que tous les nombres contiennent le 12 321 475 …
EA138 : oui, il y a un nombre de plus … parce que le deuxième est le premier plus 1,
ÉEA139 : oui, et le troisième contient le premier, parce que c'est cela que je t'avais dit que tous contiennent le premier
Professeur : ah
EA138 : donc, tu as le premier 10 fois et après il faut ajouter 1+ 2+3+4+5+6+7+8+9, c'est pour par cela que notre méthode est multiplier le premier par 10 et ajouter 45.

Même si, dans ce cas, le groupe arrive à une formule similaire à celle du groupe de l'élève EA112 (groupe 1), il ne s'agit pas d'un raffinement des stratégies de calcul mental : les élèves produisent la formule à partir de l'identification des relations entre les nombres en question, relations qui permettront, par la suite, de valider la formule proposée. Le groupe de l'élève EA111 (groupe 1) manifeste un doute lorsque la formule est trouvée; le groupe 3 peut se positionner de manière particulière par rapport à la validation et à la généralisation : les élèves sont sûrs de la validité de leur production.

Les procédures 1 et 2 se retrouvent dans toutes les classes observées. Le développement de la situation a toutefois présenté des caractéristiques particulières dans chacune des classes observées, selon les décisions adoptées par les professeurs :

- dans la classe A1, le bilan a pris la forme d'un débat collectif où la validation des méthodes produites a été construite par l'ensemble de la classe. Un deuxième moment de travail à l'intérieur des groupes a été consacré à l'écriture algébrique de la méthode déjà validée.
- dans la classe A2, le bilan s'est centré sur la communication des méthodes trouvées et la recherche d'écritures algébriques pour ces méthodes, en laissant la question de la validation à une étape postérieure (soit à l'intérieur des groupes avec un débat collectif final).

À la différence de ce qui se produit dans la première situation, dans laquelle la situation d'action engendre une contradiction (déséquilibre) qui place les élèves face à la question de trouver une explication (rétablissement de l'équilibre), la situation d'action dans la seconde situation amène les élèves à produire un résultat (une méthode) pour lequel une validité pragmatique leur est, en général, suffisante. Nous avons choisi intentionnellement une telle situation pour explorer la complexité de l'activité conjointe des enseignants et des élèves (les décisions du professeur, les résistances des élèves, etc.), lors du passage d'une validation pragmatique à une validation intellectuelle, ainsi que dans le contexte de la recherche d'une explication, lorsque cette explication est demandée explicitement par l'enseignant (il ne s'agit pas de rétablir un équilibre, mais de relancer la situation). Nous verrons, en prenant en compte la complexité de cette situation, que le débat collectif prend des caractéristiques particulières : dans la première situation, tous les élèves discutent sur le même objet, ce qui n'est pas le cas de la deuxième situation.

2.2.2 Débat collectif: production d'explications, interactions et connaissances impliquées dans la classe A1

Dans la classe A1, le professeur donne d'abord la parole à un groupe qui avait produit une méthode qui, tout de suite, devenait lourde. Les élèves expliquent leur méthode à partir d'un exemple : 528, 529, 530, 531,.....537 (500x10; après pour l'addition de 28 , 29, 30, 31 ,....37, les élèves proposent d'enlever le 1 à 31 et de l'ajouter à 29 –pour obtenir 30-, après d'enlever le 2 à 32 et de l'ajouter à 28 –aussi pour obtenir 30; enfin, de faire 30x10 et d'ajouter 3+4+5+6+7). Pour la classe, la méthode proposée n'est pas efficace pour la série dont le premier nombre était 12 321 475.

Ensuite, les groupes qui avaient proposé de multiplier par 10 le premier nombre, et d'ajouter ensuite 45, prennent la parole. Le débat permet de mettre en évidence certains implicites liés à des stratégies de décomposition additive proposées dans la première étape : 10 nombres consécutifs finissent toujours en 0,1,2,3,4,5,6,7,8 et 9 et ces unités coïncident avec les différences entre le premier et chacun des autres nombres de la série (la différence entre le premier et le deuxième est 1; la différence entre le premier et le troisième est 2, ...). Cette coïncidence produit un conflit qui est réglé pendant le débat, comme le montrent les interactions suivantes (traduction libre):

> EA1411: nous nous sommes aperçus qu'il était suffisant de multiplier le nombre que tu me donnes par 10 et d'additionner 45.
> Professeur : comment écrit-on cela?
> EA1414 : le premier nombre ...

EA1411: 12 321 475
EA1414: dans ce cas …
EA1411: tu multiplies ce nombre par 10
Professeur: comment je l'écris?
EA1411: x10
Professeur: Où l'écrit-on, au-dessous, au-dessus, à côté?
EA1411: à côté …
Professeur écrit : 12 321 475 x 10
EA1411: maintenant tu ajoutes 45 et tu obtiens le résultat
Plusieurs élèves : pourquoi 45?
EA1411: parce que tu multiplies par 10, mais ce que tu multiplies n'est ni le 6, ni le 6 ni le 7 …
EA1414: dans les unités tu mets des zéros …
Professeur : comme ça? (il écrit 12 321 470)
EA1414: Oui, tu l'enlèves à tous les nombres les unités et tous restent égaux à 12 321 475. Donc, comme tu enlèves toutes les unités, tu multiplies par 10.
Professeur : mais les nombres ne sont pas tous égaux!
EA1414 : mais après tu additionnes les unités que tu as enlevées…
Professeur : Est-ce que quelqu'un, qui ne fait pas partie du groupe de EA1414, peut expliquer ce que EA1414 dit?
EA126 (d'un autre groupe qui avait aussi proposé la même méthode que le groupe de EA1414) : tu multiplies le nombre que tu me donnes sans les unités …
Professeur : Quel nombre sans les unités?
EA126: le 12 321 475 mais sans les unités … tu mets des zéros …
Professeur : donc, ce qui reste est 12 321 470
EA126: bien sûr, tu le multiplies par 10, qui est la quantité de fois qui le nombre apparaît dans la série, après … comme tu as effacé toutes les unités, il faut maintenant les ajout r … et la somme des unités que tu avais effacées est exactement 45.
Professeur : j'ai déjà compris mais j'ai un problème … j'ai deux calculs, celui que m'a dit EA1411 et celui que m'a dit EA126. EA1411 dit qu'on doit multiplier 12 321 475x10 +45 et EA126 dit qu'il faut multiplier 12 321 470x10+45.
EA126: pas comme ça, plus la somme des unités!
Professeur (corrige au tableau et écrit): 12 321 470x10 + la somme des unités
Élève : la somme des unités est 45
EA137: Professeur, la somme des unités est-elle 45 en considérant ce 5 (en référence au 5 du nombre 12 321 475) ou sans le considérer?
Élève : en le considérant …
EA137: donc, je ne comprends pas! Si on fait 12 321 475x10 +45 et le 45 inclut déjà le 5, il y a quelque chose qui ne marche pas … je ne sais pas …
EA111: oui, le 5 est dans le 45, c'est vrai
EA137: Je ne comprends pas. Peux-tu me l'expliquer (en se dirigeant vers le professeur)
Professeur : Ce que EA137 dit est la même chose que ce que je dis. Faut-il multiplier par 10 le 12 321 475 ou le 12 321 470? EA137 dit que si 5 du 12 321 475 est déjà dans le 45.
EA137 : non, je ne comprends pas si ce 5 est ou non dans le 45!
Professeur : d'accord, excuse-moi

…

Dans ce premier bilan, il y a une confrontation des méthodes mais, encore une fois dans cette classe, la discussion ne se centre pas sur « la vérité » de la méthode produite (les élèves qui disposaient de la formule avaient déjà gagné à plusieurs jeux; il y avait donc, implicitement, une validation pragmatique de la méthode), mais sur l'explication de la construction de la formule proposée (et en particulier, sur la compréhension d'une des méthodes). Les méthodes de calcul mental contiennent l'explication dans leur formulation, mais une « formule » (dans notre cas, le premier nombre x10 +45) « synthétise » une procédure et cette synthèse ne reflète pas les raisons des choix de chacun des éléments qui la composent. Ceux qui n'ont pas construit la formule, mais qui sont étonnés par son efficacité (les élèves se surprennent de la rapidité avec laquelle ceux qui disposent de la formule gagnent au jeu), demandent une explication. L'entrée des élèves dans la recherche d'une explication n'est pas commandée, comme dans la première situation, par la résolution d'une contradiction, mais par le manque « d'évidence » des relations exprimées dans la formule. L'efficacité de la formule est en principe suffisante pour « les groupes producteurs », mais cette efficacité ne résiste pas aux demandes d'explications des autres.

Le professeur A nourrit la discussion et met en évidence des implicites dans les productions qui conduisent à des contradictions, en enrichissant le milieu, ce qui lui permet de soutenir la dévolution. Il joue avec l'incertitude, fondamentalement par rapport aux explicitations qui essayent « de montrer » les relations impliquées : il « joue » à l'élève qui « ne comprend pas », ce jeu faisant partie du contrat établi dans la classe; il se place clairement du coté des élèves qui questionnent, relevant les contradictions, etc. Dans le cadre de ce jeu, le professeur communique implicitement plusieurs aspects d'un des critères qui permettent de valider l'explication produite : le caractère explicatif du raisonnement produit. La confiance que le professeur A dévolue au milieu, au contrat établi dans la classe, son acceptation d'enrichir le contrat didactique autour de la question de la validation et les rétroactions que le professeur reçoit de la situation réelle, le positionnent, de manière différente à celle du professeur B, par rapport à la gestion de l'incertitude. Les extraits suivants montrent l'évolution de la classe A1 par rapport aux contradictions soulevées, puis la précision de l'explication (traduction libre) :

> Élève: lorsque tu multiplies, par exemple, le 475 par 10, tu multiplies le 5 par le 10, mais dans notre cas, il faut l'additionner et pas le multiplier … si tu le multiplies et après tu l'additionnes, tu fais deux fois des calculs avec le 5 et cela ne marche pas …

Le professeur ne dit rien, il attend la réaction de la classe : il ne s'agit pas nécessairement d'un geste implicite d'évaluation. L'analyse globale du protocole nous montre des réactions similaires par rapport à des réponses correctes; il nous semble important d'analyser l'action du professeur, non pas de manière isolée, mais dans le cadre du contrat plus global dans lequel elle s'inscrit.

EA1414: Puis-je aller au tableau pour montrer quelque chose?
Professeur : oui
EA1414 (il écrit au tableau) :

12 321 475
76 pour que celui-ci reste égal au premier nombre, il faut lui enlever 1
77 ici, il faut lui enlever 2
78 ici 3
79 ici 4
80 ici 5
81 ici 6
82 ici 7
83 ici 8
84 ici 9

Tout cela est pour que tous les nombres soient égaux au premier
EA137: lorsque tu multiplies par 10, est-ce parce que tu es en train d'additionner toujours le même nombre, n'est-ce pas?
EA1414: bien sûr, j'enlève le 1, le 2 (il indique avec la main le 1, le 2 qu'il a écrit au coté de chaque nombre sur le tableau), de manière que vous voyiez que si je les enlève, il restera toujours 12 321 475.
Donc, on a 10 fois le 12 321 475 et après il faut lui ajouter la somme qui est 45; le 45 est la somme des nombres que j'ai enlevés parce que si je les ai enlevés, après je dois les remettre.
EA1414 écrit au tableau :

12 321 475 x 10 + 45

76 --→ 1
77 --→ 2
78 --→ 3
79 --→ 4
80 --→ 5
81 --→ 6
82 --→ 7
83 --→ 8
84 --→ 9
———
45

Professeur (en se dirigeant vers l'élève EA126 et en voyant qu'elle n'était pas très à l'aise avec l'explication donnée): Tu n'es pas convaincue avec l'explication de l'élève EA1414, n'est-ce pas?
EA126: pour moi, il ajoute un 5 de plus
EA1414: comment un 5 de plus?
EA126: tu as enlevé toutes les unités mais tu n'as pas enlevé le 5, pourquoi tu ne l'as pas enlevé?
EA1414: dans le premier nombre?
EA126: bien sûr

EA1414: ce que je fais est laisser tous les nombres identiques au premier, si j'enlève le 5 au premier, je n'aurai pas tous les nombres identiques.
EA137: bien sûr
EA126: mais ce n'est pas la même chose que mettre 0 à la fin du premier et multiplier par 10 et après additionner ...
EA1414: combien veux-tu additionner ?
EA126: la somme des unités
Professeur : attendez ... on va écrire ce que je pense que l'élève EA126 veut dire :

12 321 470 (5) ici j'enlève 5
12 321 470 (6) ici j'enlève 6
12 321 470 (7) ici j'enlève 7
12 321 470 (8) ici j'enlève 8
12 321 470 (9) ici j'enlève 9
12 321 470 (10) ici j'enlève ... .(les élèves disent 10)
12 321 470 (11) ici j'enlève 11

Enfin, on multiplie 12 321 470 par 10 et après on additionne tout cela (en indiquant le 5,6,7,8,9,10 et 11)

EA1414: aussi c'est bien ... mais le calcul est plus long
EA1414: c'est la même chose parce que si à tous les nombres tu ajoutes 5 ... au premier tu ne lui enlèves rien, au deuxième tu lui enlèves 1, etc.
Professeur: ah, au lieu d'enlever 6 ...
EA1414: oui, au lieu d'enlever 6 au deuxième, tu lui enlèves 1 et à la place du zéro, il va rester 5
Professeur écrit au tableau:

12 321 470 (6) je mets un 5 ici (en indiquant le 0) donc il reste 12 321 475 (1) et je lui ai enlevé 1
12 321 470 (7) je mets un 5 ici (en indiquant le 0) donc il reste 12 321 475 (2) et je lui ai enlevé 2
12 321 470 (8) je mets un 5 ici (en indiquant le 0) donc il reste 12 321 475 (3) et je lui ai enlevé 3
12 321 470 (9) je mets un 5 ici (en indiquant le 0) donc il reste 12 321 475 (4) et je lui ai enlevé 4
12 321 470 (10) je mets un 5 ici (en indiquant le 0) donc il reste 12 321 475 (5) et je lui ai enlevé 5

EA137: la procédure de EA126 est plus longue ...
EA1414: oui, mais je veux vous montrer que cela donnera la même chose ...

Les implicites impliqués dans la production des méthodes sont maintenant explicités et sont les objets de la discussion. On conclut à l'équivalence des méthodes proposées. L'élève EA1414 ne s'appuie pas sur les écritures des formules pour montrer cette équivalence (il pourrait avoir montré que 12 321 470x10 + (5+6+ ... +11) et 12 321 475x10+45 sont deux écritures différentes de la même formule), mais il continue à se centrer sur les modes de production (« le contexte »). On pourrait dire que sa validation est plus « contextuelle » qu'algébrique, même si la validation produite demande un certain niveau de travail algébrique sur le numérique. Le travail syntaxique qui aurait permis d'établir l'équivalence entre les écritures n'a pas été exploré dans cette classe. L'écriture utilisée n'est pas opératoire : elle sert à expliciter certaines relations, mais on n'opère pas avec ces écritures pour obtenir de nouvelles relations. De plus, le doute de l'élève EA126 est relativement fondé : ni l'élève EA1414 ni le professeur ne font expliciter le fait que si on multiplie 12 321 470 x10, ce qu'il faut ajouter n'est pas 45 comme plusieurs élèves le croient!

À la différence du professeur B qui ne perd pas une occasion pour établir des rapports entre les connaissances produites et les savoirs à construire (soit en injectant des connaissances dans le milieu, soit en relançant des situations ou des étapes non prévues), le professeur A est plus préoccupé par le processus de dévolution que par l'institutionnalisation (s'agit-il d'un effet du contrat de recherche?).

Une fois les méthodes validées, le professeur A pose le problème de leur généralité (un autre critère pour l'acceptation d'une validation dans la classe, un autre élément du contrat qui le professeur essaie de négocier):

> Professeur: alors, nous discutons toujours sur le dernier jeu, c'est-à-dire, sur la série qui commence avec le 12 321 475, mais il faut trouver une méthode qui serve pour n'importe quelle série, pas seulement pour ce cas particulier ...
> Plusieurs élèves: nonnnnnnnnn, cela sert pour n'importe quelle série
> Professeur: je m'excuse mais pour moi, lorsque vous additionniez 1,2,3,4 ... et obteniez 45 ... pour moi cela est absolument par hasard ...
> Plusieurs élèves à la fois : nonnnnnnnnn , cela marche toujours!
> EA1414 et collègues: non, tu peux le faire pour 528, 529,... tu enlèves le 1 à 529, le 2 à 59, etc. et c'est toujours la même affaire...
> Le professeur écrit au tableau :
> 528
> 528 (1)
> 528 (2)
> ...
> Élève: tu obtiendras toujours 45 parce qu'il faut toujours multiplier par 10
> Professeur : j'insiste, pour moi, le 45 est au hasard ...
> Plusieurs élèves (en criant): noooooonnnnn
> EA111: bien sûr, si les nombres son consécutifs et si tu as 10 nombres, tu auras toujours 45!
> EA123: mais si les unités sont différentes ...
> Professeur : c'est cela que je suis en train de dire! ... comme les unités vont être toujours différentes, vous n'obtiendrez pas toujours 45... Ce n'est pas la même chose d'additionner 1+2+3+ ... +9 que d'additionner 7+8+9+10+ ...
> Élève : professeur, si tu penses sur le 18, 19, ...etc. le suivant de 18 est toujours plus grand et tu devras enlever 1 pour arriver au 18 et la même chose avec tous les nombres ...
> EA1414: comme les nombres sont consécutifs, cela va marcher toujours ...
> Élève: c'est ça, comme ils sont consécutifs, tu ajouteras toujours 1, après 2, après 3, etc.
> EA137: ce qui est important est la différence et pas les nombres
> EA111: comme les nombres sont consécutifs, on va toujours additionner du 0 au 9, et l'ordre n'importe pas, la somme donne toujours 45.
> Professeur : EA111 dit que peu importe où vous commencez à calculer, s'il y a dix nombres consécutifs, on va toujours avoir un 1, un 2, un 3, un 4, un 5, un 6, un 7, un 8 et un 9, même si la série commence par un nombre qui finit avec un 8, un 5 ou un 0. Êtes-vous d'accord?

Plusieurs élèves: oui
Professeur: comment peut-on faire pour expliquer que cette méthode sert pour n'importe quelle série … comme pourrais-je l'écrire?
(silence)

Même si, dans la situation 1, les élèves avaient discuté de la question de la généralité et avaient accepté d'utiliser les lettres pour l'expression de la généralité, personne ne le propose dans la situation 2. Le professeur doit fermer le débat et il renvoie les élèves à une autre étape de travail privé, en demandant l'écriture d'une formule pour calculer la somme des 10 nombres consécutifs. Les lettres n'apparaissent pas dans le contexte de l'explication (pour exprimer la généralité), mais dans le contexte d'une autre situation : la représentation d'une formule. Les écritures produites ne sont utilisées, ni pour revenir sur la question de la validation, ni pour mettre en évidence les avantages de la méthode de l'élève EA1414 (économie et généralité).

Le jeu du professeur autour de la généralité favorise l'explicitation des connaissances mises en acte à l'étape antérieure (« EA111: bien sûr, si les nombres son consécutifs et si tu as 10 nombres, tu auras toujours 45! »; « EA137: ce qui est important est la différence et pas les nombres »). La production d'une explication et la problématique de la généralité de l'explication produite par les élèves se placent au centre des transformations des pratiques prévues dans l'analyse a priori. L'analyse du protocole nous a permis de mieux spécifier l'utilisation des connaissances arithmétiques dans le cadre de ce changement.

2.2.3. Débat collectif: production d'explications, interactions et connaissances impliquées dans la classe A2

L'organisation de la situation dans classe A2 a été différente de celle rencontrée dans la classe A1: le professeur B n'organise pas un débat collectif autour de la validation des méthodes produites, mais un premier bilan des stratégies proposées par chaque groupe. Dans ce bilan, on discute de la rapidité ou non des différentes méthodes trouvées, mais la validation reste à un niveau pragmatique (efficacité par rapport à la réussite au jeu).

Après le bilan, le professeur demande à chaque groupe d'écrire une formule pour la procédure trouvée et d'expliquer comment elle a été obtenue (une nouvelle étape de travail à l'intérieur des groupes). La demande d'explication et de validation est postérieure à la production des écritures. Ce changement dans l'organisation résulte en une introduction d'objets différents dans les classes A1 et A2. Dans la classe A1, une fois les stratégies analysées et validées, on s'entend sur la méthode la plus efficace (il y en a eu juste une) et on travaille sur des écritures pour valider cette méthode. En revanche, dans la classe A2, chaque groupe doit produire une formule pour rendre compte de sa méthode, ce qui confronte les élèves qui avaient produit des stratégies de calcul mental à une autre difficulté : la généralisation de la méthode et l'écriture symbolique. De plus, l'écriture de méthodes différentes ouvre un espace de travail sur les expressions algébriques équivalentes.

2.2.3.1 La préparation au débat collectif : une nouvelle étape de travail à l'intérieur des groupes de la classe A2

Dans la classe A2, une phase de préparation au débat collectif est aménagée par le professeur. Nous avons suivi trois groupes d'élèves qui avaient proposé des stratégies différentes et qui ont eu par la suite une participation importante au débat, de manière à mieux interpréter les interactions lors de ce débat.

Groupe 3 (traduction libre)

Le groupe de l'élève EA2311 s'entend sur une écriture de la méthode :

EA2311 : ax10 +45
EA2312: pourquoi « a »? Je ne comprends pas
EA2311: professeur (il s'adresse au professeur)
EA2311: « a » est n'importe quel nombre …
Professeur: C'est qui « a »?
EA2311: « a » est n'importe quel nombre
Professeur : mais est-il le premier, le dernier de la série, lequel?
EA2311: le premier, le premier …
EA2312: je ne comprends pas ce truc de lettres …

Professeur : je te demande une formule, qui doit servir pour n'importe quel nombre … puis -je mettre donc un nombre pour construire la formule?
EA2312 : non, parce qu'elle ne servirait que pour ce nombre
EA2312 : ok, je comprends, donc la formule serait : ax10+45
Professeur : oui, mais il faut justifier pourquoi elle est comme cela, d'où vient le 45, d'où vient le 10, etc…il faut justifier chaque partie de la formule.

Pour valider la formule proposée, les élèves s'appuient sur un exemple générique :

EA2311 : 45 est la différence additionnée entre le premier nombre et les autres…je ne sais pas comment le dire … Mettons un exemple …

25 26 27 28 29 30 31 32 33 34

EA2312 : entre le 25 et le 26 il y a 1 de différence, donc, on va mettre le 1 au-dessous du 26
EA2311 : met une flèche
EA2312 écrit :

25 26 27 28 29 30 31 32 33 34
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9=45
(les différences entre le premier et les autres nombres)

EA2311 montre le texte au professeur qui l'approuve

(dans ce groupe, l'élève EA2313 avait proposé la formule, l'élève EA2311 explique pourquoi on additionne 45 et l'élève EA2312 produit l'écriture et essaie de généraliser)

Ce groupe, qui avait trouvé la formule lors de la situation d'action, centre son travail sur la question de la communication aux autres et l'écriture de la formule. La question de la généralité de l'explication produite est implicite. Même si les élèves trouvent une explication, ils ont besoin de l'approbation du professeur. Le professeur évalue leur travail, puis ils arrivent au débat avec la certitude que l'explication produite est valide. L'évaluation du professeur ferme la porte, pour le moment, à la construction de critères pour la validation.

Groupe 4 (traduction libre)

Ce groupe essaie de reprendre certaines des idées données par le professeur pendant le bilan, parce que leur stratégie avait été jugée limitée. De cette manière, les élèves de ce groupe essaient de reconstruire un milieu, jusqu'à ce que le professeur intervienne:

EA241 : une formule … voyons … le nombre sera 10 fois et après … il faut ajouter 10 fois 1, c'est-à-dire, le nombre fois 10 plus 10, voilà ….

(le « plus 10 » est lié à des connaissances injectées par le professeur pendant le bilan, mais aussi au fait que la différence entre deux nombres consécutifs est toujours 1)

EA242 : voyons si ça marche … si on met 3 …
EA241 : non, on va prouver avec un nombre quelconque plus complexe …
EA242 : 297
EA241 : ok … il faut faire 297 fois 10 … plus 10 fois 1 …
EA242 : pourquoi 10 fois 1?
EA241 : parce que on a 297 298 299 … comprends-tu? … ah … non … il faut ajouter 9 et non pas 10! … parce qu'il y 9 « uns » et pas 10 … voyons …

(ils essaient la formule avec des nombres plus petits, en commençant par 23, et ils s'aperçoivent que cela ne marche pas)

Professeur : alors? … qu'est-ce que vous faites?

(EA241 explique ce qu'ils avaient fait)

Professeur : mais vous aviez déjà une stratégie … vous devez, donc, trouver une formule pour votre stratégie et non pas chercher une nouvelle stratégie …

Le professeur demande aux élèves de revenir sur les stratégies qu'ils avaient produites à l'étape précédente, même si ces stratégies avaient été considérées non économiques pendant le bilan. Les élèves reprennent ces stratégies (« si la série commence avec 225, on fait 200 x10 et après on additionne 25+26+… +34») et ils se retrouvent avec le problème de l'écriture d'une formule générale. Ils essaient de raffiner la stratégie, mais ce raffinement ne résout pas le problème. Ces élèves arrivent au débat, une fois de plus, avec la reconnaissance des limites de leur méthode, mais sans éléments pour reconstruire une nouvelle méthode. Ces éléments avaient commencé à s'élaborer au début de cette étape du travail privé, mais n'ont pu être complétés. L'intervention de l'enseignant a ainsi changé le projet des élèves.

<u>Groupe 5</u> (traduction libre)

Pendant le moment de travail à l'intérieur du groupe, à l'étape précédente, le professeur avait décidé d'injecter des connaissances dans le milieu de ce groupe pour faire évoluer les interactions. Il suggère explicitement aux élèves :

« Regardez ce qui se passe si vous additionnez le premier et le dixième élément de la série, puis le deuxième et le neuvième, puis le troisième et le huitième, etc.»

La construction de la formule sera donc orientée vers ce chemin particulier introduit par le professeur :

EA2516 : la formule est a+9 +a fois 5, écrite comme ça: (a+9+a)5
EA2517 : pourquoi a+9
EA2516 : a+9+a parce que cela serait j+a, mais je ne mets pas le « j », je mets a+9 qui est le dernier nombre, comprends-tu?
EA2517 : ah …
EA2516 : c'est facile, n'est-ce pas? Donc, c'est a+9+a entre parenthèses fois 5. Comprends-tu pourquoi « plus a »?
EA2517 : behhh, oui … je pense …
Professeur : explique-moi
(les élèves expliquent la construction de la formule et le professeur ne se prononce pas sur sa validité. On peut voir que le professeur ne procède à une évaluation que dans certains groupes)
EA2518 : il faut maintenant qu'on explique pourquoi
EA2517: en mettant un exemple?
EA2518 : on ne peut pas mettre un exemple, il faut faire une formule
EA2517 : faut-il mettre des lettres?
EA2516 : oui … on additionne le premier et le dixième … et comme on a 10 nombres, donc, on aura 5 additions … donc … c'est pour cela qu'on multiplie par 5 … a+9 parce que, puisqu'il y a 10 nombres, le dernier est a+9 … et après on additionne le « a » parce qu'il faut faire le calcul j+a
EA2517: oui mais …
EA2516 : a+9 est le dixième nombre
EA2517: c'est-à-dire, a+9 est j
EA2516: oui, a+9 est j mais comme le calcul serait j+a, on met a+9+a et après, entre parenthèses, et on multiplie par 5 qui est la quantité de calculs à faire.
EA2517: ok j'écris donc qu'on additionne a+9…plus a…..
EA2516 : oui … est la même chose que ….
EA2517 : attends (elle n'a pas le temps d'écrire)
EA2516 : est la même chose que faire j+a …
EA2516 : non!, il faut dire : « c'est la même chose qu'additionner le dixième nombre … parce qu'ils ne savent pas qui est j …

(le cours se termine ainsi. Le professeur demande, pour le prochain cours, d'apporter la formule et l'explication)

L'explication du pourquoi « décrit » les actions réalisées pour trouver la formule, mais n'explicite pas toutes les relations impliquées : elle n'explique pas pourquoi a+(a+9), (a+1) + (a+8), (a+2)+(a+7), etc. donnent toujours la même valeur.

2.2.3.2 Le débat collectif

Le cours suivant, le professeur fait un rappel et communique la consigne de travail à toute la classe : il s'agit de communiquer et d'expliquer la formule trouvée (traduction libre).

> Élève : on prenait le premier nombre et on le multipliait par 10, parce qu'il y avait 10 nombres. Puis, on additionnait 45 qui est la somme de 1 plus 2 plus 3 plus 4 …
> Professeur : mais … ce que je ne comprends pas c'est pourquoi vous multipliez par 10 si tous les nombres ne sont pas égaux.
> Élève : parce qu'on fait les dix nombres égaux et après on additionne 45 qui est la somme de 1 plus 2 plus 3 plus 4, …
> Professeur : mais d'où vient le 1, le 2, le 3, etc?
> Élève : du dernier chiffre
> EA2315 : de la différence entre le premier et les autres nombres (le professeur n'écoute pas l'intervention de Javier)
> Professeur : du dernier chiffre?
> EA2315 répète : de la différence entre le premier nombre et les autres … (la professeur n'écoute pas)
> Élève : les derniers chiffres sont 1,2,3,4, …
> Professeur : mais cela marche si on commence avec un nombre qui finit par 0 … mais si le premier ne finit pas par 0?
> EA2519 : ok mais … si commence avec 9 tu auras finalement le 8, puis tu auras toujours tous les nombres de 0 à 9 à la fin
> Professeur : et? (avec un geste qui veut dire : « cela n'explique rien »)
> (silence)
> Professeur : alors, vous ne prenez pas le premier nombre et le multipliez par 10, vous prenez un nombre qui finit par 0 et le multipliez par 10!
> Si vous me dites que vous additionnez les derniers chiffres et cela vous donne 45 … c'est comme si ce chiffre vous l'enleviez, puis ce que vous multipliez par 10 n'est pas le premier nombre, c'est le premier nombre sans le dernier chiffre … C'est ça que je comprends de ce que vous dites … sinon, vous êtes en train de mal m'expliquer … de ce que vous dites, c'est ça que je comprends … (il se dirige maintenant vers les autres élèves) Vous, vous comprenez ce qu'ils disent?

On peut voir que les élèves de la classe A2 rencontrent une difficulté similaire à celle rencontrée dans la classe A1. Mais il y a une différence fondamentale qui caractérise les interactions dans la classe A2 : on n'assiste pas à un débat entre élèves « conduit » par le professeur; on voit, en général, un débat entre un élève (ou plusieurs élèves) et le professeur. Dans cette interaction, le professeur évalue de manière permanente, mais il ne ferme pas nécessairement le débat. Il précise d'abord les problèmes que cette explication a « pour lui » en demandant, par la suite, l'avis des autres élèves. Dans cette précision, il communique des connaissances sur le caractère explicatif du raisonnement proposé, mais il le fait par le biais de l'évaluation, de manière différente de ce qui avait été fait par le professeur A. Dans ce contrat, les critères pour la validité d'un raisonnement ou son caractère explicatif n'émergent pas des interactions de la classe provoquées par le professeur, mais de l'évaluation explicite. Le fait de demander l'avis de la classe, après avoir évalué, réduit le niveau d'incertitude. Cette réduction, qui a pour but d'encadrer les discussions autour des objets attendus, n'est pas une conséquence d'un jeu d'actions et de rétroactions des élèves avec le milieu adidactique.

Le débat continue et l'élève EA2311 présente son explication (nous avons analysé le travail de ce groupe à la section 2.2.3.1); il argumente par rapport à l'origine du 45 dans sa formule : il s'agit de la somme des différences entre le premier nombre et chaque nombre de la série. Le professeur intervient en faisant remarquer que cette explication est différente de celle proposée par l'élève EA2519. Il entame ainsi un dialogue avec l'élève EA2311 autour de son explication. La classe demeure silencieuse; personne ne participe explicitement à ces échanges. Le professeur approuve l'explication de l'élève EA2311 et s'adresse à l'élève EA2519 :

> Professeur : on revient à l'explication de l'élève EA2519
> EA2519 : par exemple, si le premier est 1 000, le deuxième est 1 001 ... donc, le premier nombre est fois 10 et après il reste à additionner le 1,2,3, ... 9 qui sont les derniers chiffres.
> EA2314 : mais cela marche si le premier nombre finit par zero . Sinon, ça ne marcherait pas ...
> EA2519 : il peut finir par 5, par exemple 1 005, 1 006, ... 1 009 et après on revient au 1 010, 1 011, ...
> 1 010, 1 011, on revient le 1, le 2, le 3 ... Là tu peux les additionner tous.
> Professeur : voyons ... il écrit :
>
> 1 005
> 1 006
> 1 007
> 1 008
> 1 009
> 1 010
> 1 011
> 1 012
> 1 013
> 1 014
> (il encercle les derniers chiffres)
> EA2519: la dernière file va toujours nous donner 45 ...
> Professeur : cela je l'ai compris, parce que j'ai 1,2,3,4, ... 9 et un 0, on a toujours cela, la dernière colonne a toujours une somme de 45. Ce que je ne comprends pas c'est pourquoi tu additionnes toujours 10 fois le premier, pourquoi 10 fois 1 005 si lorsqu'on enlève la dernière colonne, les nombres se transforment ...pour moi ... explique-moi, si je ne t'ai pas bien compris ... pour moi ces nombres se transforment et ils restent avec un 0 en arrière.
> EA2519 : mmm ....
> Professeur: comprends-tu mon doute?
> EA2519 : oui, oui

Professeur : tu dis … j'enlève la dernière colonne, je les additionne à côté, mais qu'est-ce que tu mets dans la dernière colonne ….
Élèves : 0
EA2519: non, nous ne voulions pas enlever la colonne … le 1 005 continue égal … c'est comme si … non, nous ne voulions pas l'enlever
Professeur : pourquoi avez-vous pris le 1 005 et pas le …. Mais si j'efface le dernier chiffre, il faut mettre 0 dans la dernière colonne… je ne sais pas … voyons …
Comprenez-vous que cette explication est différente de celle proposée par l'élève EA2311? (en parlant à toute la classe)

L'élève EA2519 semble comprendre la difficulté remarquée par le professeur, mais il ne peut pas avancer sur cette question : il finit par s'adapter au discours du professeur. Après avoir précisé « le problème » que l'explication de l'élève EA2519 soulevait, le professeur donne un espace aux autres élèves. Deux élèves participent à la poursuite du débat, mais ils n'interagissent pas entre eux : les discussions sont toujours entre chaque élève et le professeur.

Les premières interactions sont encore autour des difficultés qu'on vient d'identifier. L'élève répète les mêmes arguments que ceux invoqués par l'élève EA2519 et le professeur reformule ces arguments sur l'exemple en question :

Professeur : mais pourquoi 10 fois le premier, c'est ça que je ne comprends pas … quand vous enleviez la dernière colonne et la laissiez de côté, ce nombre (en référence à 1 005) se transforme en 1 000, et les autres aussi.
Il écrit au tableau :

1 000
1 000
1 000
1 000
1 000
1 010
1 010
1 010
1 010

Pourquoi, donc, additionnez-vous dix fois 1 005 si le 1 005 n'est plus dans la liste de nombres? (le professeur élève la voix)

Silence

Professeur : vous me dites que j'enlève la dernière colonne mais si je fais cela, les nombres se transforment comme je viens de vous montrer … Le premier n'apparaît plus! Donc, pourquoi vous additionnez 10 fois le premier si le premier n'est plus là

Silence

Le professeur met toujours en évidence les limites de la production du groupe de L'élève EA2519, mais ce n'est pas suffisant pour que les élèves de ce groupe puissent évoluer (pas dans le sens de trouver une nouvelle explication, mais dans le sens de pouvoir reconstruire leur propre production). La question posée n'est pas partagée par toute la classe parce qu'elle est liée aux actions spécifiques qui sont à la base de la formule proposée par le groupe de l'élève EA2519 : les autres élèves sont des « observateurs » de cette interaction entre l'élève EA2519 et le professeur. Mais ce rôle des élèves ne peut pas s'étendre beaucoup dans le temps : le silence dans la classe est un indicateur de la longueur de cet épisode, puis de l'absence de partage d'objets dans cette discussion.

Enfin, un élève du groupe de l'élève EA218 (groupe 1) intervient et propose une explication qui reprend les idées de l'élève EA2311 (proposition attendue par le professeur). Le professeur remarque que cette nouvelle explication est différente de celle qu'ils avaient donnée auparavant et il profite de l'occasion pour fermer le débat.

Par la suite, la question de la généralité posée par le professeur engage d'autres élèves dans la discussion, mais les protagonistes des interactions centrales sont encore les élèves qui viennent de participer au débat. Comme dans la classe A1, les élèves finissent par conclure que ce qui est important est la différence entre les nombres et non la particularité de chaque nombre:

> EA2519 : si les nombres sont consécutifs, la différence entre le premier et le deuxième sera toujours 1, entre le premier et le troisième sera toujours 2, etc.

L'élève EA2519 ne pouvait pas, au début, expliciter les connaissances impliquées dans sa production; à la sortie du débat, il reconnaît et il explicite les relations qui sont déterminantes pour expliquer la vérité et la généralité d'une des formules proposées.

Par la suite, le professeur interroge les autres groupes qui avaient travaillé à partir d'autres stratégies:

Professeur : et le groupe 4?
EA242: notre idée était de séparer les derniers nombres pour après additionner tous ceux qui donnaient 10 …
Professeur : et qu'est-ce qui s'est passé avec ça?
EA241 : cela prenait beaucoup de temps … nous séparions les deux derniers nombres mais après nous devions faire la même chose avec les autres …
Professeur : ok, vous sépariez les deux derniers nombres mais les deux derniers n'ont pas toujours la même régularité … les derniers ont toujours pour somme 45 (les élèves se réfèrent aux deux derniers chiffres de chacun des nombres de la série : par exemple, dans la série 528, 529, 530,…, ils font référence à la somme de 28+29+30+….) les deux derniers ne donnent pas toujours la même somme, c'est ça qui faisait que la méthode était complexe, n'est-ce pas?
EA242 : oui …

Le groupe 4 avait déjà reconnu la limite de sa méthode pendant le premier bilan. Les élèves de ce groupe ont donc eu la possibilité de se positionner de manière différente par rapport aux stratégies des autres : de fait, ils ne devaient pas défendre leur travail; ils ont participé au débat, non seulement en questionnant, mais aussi en proposant des connaissances pour faire évoluer le travail, collaborant ainsi à la généralisation de la méthode qu'ils n'avaient pas produite. Même si le professeur ne l'avait pas écouté, l'élève EA2315 avait remarqué au début du débat que le 45 venait de la différence entre le premier et les autres nombres de la série.

Le dernier groupe auquel le professeur donne la parole est le groupe qui avait travaillé à partir de la suggestion du professeur de « regarder la somme des extrêmes de la série » :

Professeur : et le dernier groupe … qu'est-ce que vous avez fait?
EA2516 : nous avons commencé par 101 … 110 … après nous avons additionné 101 et 110 et cela nous donnait 211; puis nous avons additionné 102 et 109 et aussi nous obtenions 211 … et comme ça nous avons fait 5 calculs, donc le résultat a été 211x5, c'est-à-dire le résultat du premier plus le dernier, fois 5.
Professeur : le premier plus le dernier … mais cela marche pour le 101
EA2516 : non, pour tous
Professeur : pourquoi? Vous êtes en train de justifier pour le 101, pour moi cela marche seulement pour le 101 … pourquoi la somme des premier et dernier nombres est la même que celle des deuxième et neuvième nombres?
EA2516 : parce que le premier et le dernier donnent un nombre … puis le deuxième est plus grand que le premier mais le neuvième est plus petit que le dixième … donc, dans un nombre tu l'ajoutes et dans l'autre tu l'enlèves, enfin tu obtiens la même chose …
Professeur : voyons … tu dis le premier et le dernier … on les additionne et on obtient un nombre … maintenant si tu ajoutes le deuxième et le neuvième ….Qu'est-ce qui se passe là?
EA2516 : le deuxième est plus grand que le premier
EA2517 : un nombre plus grand
EA2516 : et le neuvième est plus petit que le dixième
Professeur : c'est-à-dire que si j'additionne un nombre plus grand avec un autre plus petit cela donne toujours le même nombre?

EA2518 : non, parce que la différence est toujours la même
EA2517: le deuxième est 1 plus grand et le neuvième est 1 plus petit que le dixième ...
Professeur : ahhh ... parce qu'il est 1 plus grand ... ahhhh ... vous me disiez que si vous additionniez un nombre plus grand et un nombre plus petit cela donne le même résultat ... et moi, j'étais déjà en train de vous dire ... écoute, si on additionne 103 avec 109 qui est un plus grand nombre et l'autre plus petit ... cela ne me va pas donner 211 ...
EA2517 : bien sur, il faut additionner ceux qui ont la même différence. Si à 102 tu enlèves 1, tu obtiens 101 et si au 109 tu ajoutes 1, cela te donne 110, donc, on va rester avec la même somme.
Professeur : ahhh, bien ... voyons, vous me dites que lorsque j'avance d'un ici (marque avec le doigt le passage du premier nombre au deuxième nombre de la série) et lorsque je recule d'un ici (marque avec le doigt le passage du dixième nombre au neuvième nombre de la série), comme dans un cas on additionne 1 et dans l'autre cas on soustrait 1, on obtient le même calcul ... ok ... mais qu'est-ce qui se passe avec les autres nombres?
EA2517 : c'est la même chose parce qu'ils sont plus grands
Professeur : mais maintenant ce n'est pas 1 qu'on ajoute ou enlève ...
EA2517 : non, on ajoute 2 et on enlève 2

Le professeur écrit au tableau :

101
102
103 celui il est 2 plus grand que le premier
104
105
106
107
108 celui est 2 plus petit que le dernier
109
110

Professeur : Alors, on obtient toujours la même somme et cette somme tu l'as fait combien de fois?
EA2517 : 5

L'idée de « regarder » ce qui se passait avec la somme des extrêmes avait été apportée par le professeur, mais ce sont les élèves eux-mêmes qui ont pu se reconstruire un milieu, à partir de cette intervention, et expliciter les relations qui sont à la base de la justification de la méthode. On peut voir que la discussion est entre le professeur et les élèves du groupe qui ont produit l'explication. Le professeur ne pose pas de questions à toute la classe, mais seulement à l'élève EA2517 (possiblement, la mémoire du premier épisode qui a pris beaucoup de temps dans la classe et qui n'a pas été réglé pourrait être à la base de cette décision). La classe ne discute pas non plus, ni de la validation de la méthode, ni de son caractère explicatif : c'est le professeur qui évalue le travail des élèves. Même la problématique de la généralisation n'est pas posée dans le but de « déstabiliser » ou de créer une certaine incertitude, mais comme « un fait » derrière lequel se situe l'évaluation du professeur :

Professeur : ok … mais maintenant répète-moi la justification mais maintenant sans utiliser un exemple … je ne veux pas rester en pensant que ton explication ne marche que pour l'exemple proposé.
EA223, explique-moi.

Le professeur évalue le travail des élèves et il demande une façon de communiquer sa généralité : la question des conditions de validité de cette généralité n'est pas posée explicitement, le professeur considère acceptée la généralité de la méthode proposée par les élèves et demande de l'exprimer. La question de la généralisation posée n'amène pas seulement les élèves à l'explicitation des relations impliquées, mais aussi au problème de l'écriture formelle de ces relations. Les élèves comprennent (possiblement par effet d'un contrat établi dans la classe) qu'ils devaient utiliser des « lettres » :

EA223 : entre a et b il y a une différence de 1; entre b et c il y a une différence de 2 et toujours comme ça … et par rapport aux derniers, on enlève en lieu d'additionner. Par exemple écrivez a, b…

Le professeur écrit au tableau :

101	a
102	b
…	
108	
109	c
110	d

EA223 : a+d est h et b+c aussi est h
Professeur : pourquoi?
EA223: parce qu'il y a une différence
Professeur : voyons … explique-moi
EA223: parce que 102 …
Professeur : mais avec ça tu reviens à un exemple … tu me dis que a+d donne h, mais pourquoi b+c donne aussi h?
(silence)
EA223 (après un temps) : je ne sais pas … je ne peux pas l'expliquer
Professeur : toi, EA224?

(Silence)

L'élève EA223 utilise les lettres pour exprimer la généralité, mais elle ne peut pas opérer avec les écritures algébriques produites. Les lettres sont des « étiquettes » qui n'expriment que certaines relations identifiées dans l'exemple particulier. La construction d'un langage algébrique fonctionnelle exige plus que la production d'écritures. Le professeur veut faire entrer les élèves dans cette construction, mais le milieu n'avait pas été construit pour accueillir cette problématique. Les interactions entre le professeur et les élèves de ce groupe sont teintées de nombreuses difficultés; les autres élèves de la classe ne participent pas à ces échanges.

Pour exprimer symboliquement les relations entre b et a (à partir de la demande du professeur), les élèves passent d'abord par l'écriture a<b pour arriver, après une discussion assez longue dans laquelle le professeur occupe une place centrale, à l'expression b-a=1, puis enfin, à l'expression attendue par le professeur, soit b=a+1. Un travail similaire permet d'écrire d-c=1 et c=d-1. Il est important de remarquer que les équivalences entre ces relations sont établies en fonction « du contexte », et non à partir des transformations des écritures. Le professeur conduit la discussion pour arriver à b+c = a+d (traduction libre) :

Professeur : qu'est-ce qu'il reste lorsqu'on additionne c+b?
Élève : a+1+d-1
EA241 : il faut mettre des parenthèses …
Professeur : où faut-il mettre des parenthèses ?
Élève : dans a+1 et dans d-1 sinon, cela donnera a+1+d et tout cela moins 1
Professeur : et cela est différent
Élève : oui
Professeur : pourquoi?
Élève : parce que c'est à « d » qu'il faut soustraire 1, pas à tous les autres
Professeur : et faire a+1 et après d-1 est différent de faire a+1+d et soustraite 1 au résultat obtenu?
Élève : oui
Professeur : ok, donne-moi un exemple
Élève : (101+1) + (110-1)
Professeur : vous dites que c'est différent de faire ce calcul et de faire (101+1+110)-1 … faites le calcul!
Plusieurs élèves : cela donne égal
Professeur : avec un exemple est-il suffisant pour faire une inférence? Pour justifier, est-il suffisant de mettre un exemple?
EA241: un exemple vaut pour dire qu'une propriété ne marche pas.
Professeur : ok, pour justifier qu'une propriété ne marche pas, je mets un exemple et je la tue. Mais pour justifier qu'elle est vraie, est-il suffisant avec un, deux, vingt, cent exemples?
EA2311 : il faut chercher jusqu'à trouver un exemple qui ne marche pas
Professeur : cela pour justifier qu'elle ne marche pas, mais pour montrer qu'elle marche? Puis-je mettre tous les exemples possibles? Combien y d'exemples faudrait-il?

> Pour justifier quelque chose qui est toujours vraie, je dois le justifier d'une autre manière qu'en mettant des exemples, parce que même si je travaille avec un ordinateur, finirais-je de mettre des exemples à un moment donné?
> Élève : non, parce qu'il y a une infinité
> ...
> (La discussion continue; avec l'aide du professeur, les élèves arrivent à dire que a+1+d-1 est a+d, en faisant appel aux propriétés des opérations engagées dans le calcul, soit la commutativité et l'associativité)

Les écritures et leurs transformations, la recherche des expressions équivalentes qui montrent les relations implicites, etc., ne sont pas des conséquences de décisions prises par les élèves dans le cadre de la recherche d'une explication; elles sont une lecture des implicites qui commandent l'action du professeur. Les élèves suivent et essayent de répondre aux questions posées par le professeur, mais l'objet qui a initié tout ce développement (la généralité de la méthode proposée) semble être perdu. L'entrée dans la problématique des écritures pose à chaque moment des difficultés qui provoquent des bifurcations de la situation que le milieu originel ne peut pas nécessairement accueillir. Les lettres apparaissent davantage comme des « moyens de traduction » des relations déjà établies que comme des éléments d'un langage opérationnel qui permet d'identifier les dites relations. Comme Radford (2003) l'a explicité, les symboles algébriques sont une représentation des actions : « enlever 1 à d » est un acte lié au contexte du problème, à la question d'exprimer le prédécesseur de d dans la séquence proposée. Opérer avec ces écritures, comme le professeur le propose, exige un détachement du contexte pour entrer dans un problème syntaxique. Le professeur « force » ce changement de signification en interprétant l'expression algébrique dans le contexte numérique (avait-il un autre choix?), mais on ne sait pas quel est l'impact de ce changement sur les connaissances des élèves. Dans le contexte du projet d'enseignement, il était nécessaire d'opérer avec les expressions algébriques construites afin de compléter le problème, mais cette nécessité n'est pas clairement reconnue.

La question de la généralité de la méthode proposée n'exigeait pas, dans le contexte de cette classe particulière, le recours à des lettres. Mais les élèves l'ont proposé, possiblement par un effet de contrat didactique, et le professeur n'a pu éviter de se confronter aux contraintes que ce détour de la situation lui a imposées.

La formule associée à la méthode qu'on vient de présenter a été donnée par les élèves : (a+a+9)x5. Le professeur pose finalement à la classe la question de l'équivalence entre cette formule et la formule 10xa+45 (traduction libre):

Professeur : il semblerait que les deux formules qu'on a jusqu'à maintenant servent pour la somme de dix nombres consécutifs mais … ce sont de formules différentes … ok mais nous allons transformer cette formule (en référence à la dernière formule trouvée) pour voir si on peut l'écrire de manière plus … y aurait-il une manière plus simple, comme nous avons fait avant lorsqu'on a écrit a+1 et d-1 en forme plus réduite?
EA2519 : ax2+9
Professeur : fois 5 aussi … N'est-ce pas? (écrit au tableau : (a+9+a)x5= (ax2+9)x5)
EA2519 : ou i …
Professeur : comprenez-vous comment l'élève EA2519 est passé d'ici (en référence au premier membre de l'égalité) à ici (en référence au deuxième membre de l'égalité).
(Silence)
EA2311 : au lieu d'additionner deux fois a, il a multiplié a par 2 et après il a additionné le 9.
Professeur : aha … et pourquoi on peut additionner d'abord les deux « a » et après le 9, au lieu de faire en premier le 9 et après le « a »? Y-a-t-il quelque propriété qui me permet de faire cela?
Élèves : commutativité
Professeur : commutativité … ok … et selon de cette propriété j'ai ajouté les deux « a » et j'ai obtenu ax2. Ok.
Quelle autre chose peut-on faire ici (indique le terme (ax2+9)x5)?
(Silence)
Professeur : pouvons-nous faire une autre chose?
(silence)
Professeur : j'ai une somme (elle indique la somme ax2+9) et une multiplication (elle indique le « x5 »). Une somme multipliée par 5. Peut-on faire d'une autre manière cette somme multipliée par 5?
EA241: le 5 on peut le décomposer en 3+2
Professeur : oui, mais avec cela elle serait plus longue
EA241 : ah!
Professeur : qu'est-ce qu'on peut faire alors?
Élève : ax2x5 plus 9x5
Professeur : c'est ça!… comment s'appelle cela?
Plusieurs élèves : distributivité
Professeur : bien, distributivité … voyons qu'est-ce qu'il reste, alors.
Élève : 5 fois 9 plus 5 fois et entre parenthèses a fois 2
Professeur écrit au tableau: 5x9 +5x(ax2) … ok et alors, combien donne 5x9?
Élèves : 45
Professeur : et cela? (en référence à 5x(ax2))
Élève : behhh, cela dépend de la valeur de a
Plusieurs élèves : oui … bien sûr … dépend de la valeur de a

Professeur : si je fais 2 fois a et après je fais 5 fois deux fois « a », combien de « a » il va y avoir?
Élève : 10 fois a
Professeur écrit : 10 a et en plus, je pourrais avoir changé l'ordre et multiplié 5x2 qui est 10!

Sur le tableau , il est écrit :

(a+9+a).5= (a.2+9).5 = 5.9+ 5.(a.2) = 45+10.a

Professeur : est-ce que j'obtiens la même formule?
(silence)
Quelques élèves : oui ...
Professeur : donc, cette expression (en référence à (a+9+a).5) et cette expression (en référence à 45+10.a) sont-elles des expressions ...
Élèves : égales
Professeur : équivalentes ... on les appelle équivalentes ... ok il faut écrire tout cela sur le cartable, toutes les explications doivent être dans votre cartable ...

Le problème de l'équivalence des formules est posé par le professeur, mais c'est lui qui décide de la manière de comparer les formules, qui conduit « pas à pas » ce qu'il « faut » faire pour arriver à la réponse attendue (voir, par exemple, l'interaction avec l'élève EA241). La nouvelle situation n'est pas dévolue à toute la classe. Le professeur ignore la réponse d'un élève qui ne semble pas entrer dans le jeu des calculs sur les expressions algébriques (« le résultat de (2xa)x5 dépend de la valeur de a »), tout en s'emparant par la suite de la réponse correcte donnée par cet élève pour fermer la situation.

Le protocole de la classe A2 nous montre la complexité du traitement didactique d'une phase collective qui s'organise autour de la communication et de la validation des stratégies produites par des groupes différents. Cette phase, comme nous l'avons vu, présente plus les caractéristiques d'un bilan que celles d'un débat collectif : seulement les élèves qui n'avaient pas produit une stratégie efficace pour le jeu ont pu se décentrer de leurs propres productions et intervenir dans le débat que le professeur a eu avec chaque groupe. Les contraintes de la situation ne permettent pas au professeur de faire participer toute la classe aux échanges qu'il a avec chaque groupe : lorsqu'il a tenté de le faire, il a compris que les autres élèves ne pouvaient pas se reconstruire un milieu avec lequel interagir. L'impossibilité d'établir un débat qui engage toute la classe oblige le professeur à jouer lui-même le rôle de rétroaction dans le milieu, à travers l'évaluation permanente. Dans les espaces de liberté que la situation a laissé au professeur, ce dernier de manière à réduire toujours l'incertitude, ce qui a limité l'action des élèves.

2.2.4. Conclusions

Le travail des professeurs, leurs possibilités d'action dans le cadre des contraintes spécifiques de la situation 2, ont été très différents dans les classes A1 et A2, ce qui a entraîné des interactions sur des objets différents. En particulier, pendant le débat public, le professeur A initie le débat en donnant la parole à ceux qui n'avaient pas produit une méthode gagnante, ce qui permet à la classe d'explorer des voies possibles et de reconnaître également les limites de certaines des méthodes par rapport à la tâche demandée. Mais ces élèves ne participent pas explicitement à la poursuite du débat; lorsque la méthode gagnante est proposée par un des groupes, tout le débat se centre sur cette méthode et ses implicites. Les seuls qui y participent sont ceux qui avaient produit la méthode ou ceux qui avaient des méthodes similaires (6 élèves de 3 groupes différents parmi un ensemble de 6 groupes). Pourtant, dans la deuxième étape du débat, étape relative à la généralisation, nous avons pu identifier l'intervention d'autres élèves qui n'avaient pas produit la stratégie gagnante; ces élèves peuvent interagir (même implicitement) avec les informations présentées par leurs collègues, dans le temps limité du débat, et se reconstruire un milieu pour rentrer dans le jeu. De quoi dépend cette possibilité?

Nous identifions ici une problématique qui n'est pas spécifique de nos situations. Dans toute situation dans laquelle un bilan de résultats conduit à rejeter certaines stratégies et à en accepter d'autres, cette acceptation crée, chez ceux qui ne les ont pas produites, le besoin de se reconstruire un milieu avec lequel interagir : ils doivent interagir avec le raisonnement et la validation faits par autrui. De quoi dépend la possibilité de cette reconstruction? Peut-elle se réaliser pendant le débat lui-même ou faut-il prévoir une étape de travail individuel?

Dans l'analyse a priori, nous avons remarqué l'importance du débat public pour les étapes de validation. L'analyse du protocole nous confronte avec une complexité que nous avions ignorée. Dans la situation adidactique, on peut reconnaître la production de nouvelles connaissances par un changement de stratégie. Comment reconnaître l'élaboration de nouvelles connaissances dans un débat public, pour ceux qui n'y participant pas explicitement ? Comment savoir avec quel milieu interagissent-ils? Qu'est-ce que pourrait faire le professeur pour impliquer les élèves dans ces interactions (explicites ou implicites)? La dévolution continue-elle pendant le débat collectif? A-t-elle des caractéristiques différentes de la dévolution effectuées dans les phases adidactiques?

Dans le protocole, on peut observer que l'élève EA123 (classe A1, groupe 2), un des élèves qui avait déjà questionné la procédure de l'élève EA1414 (classe A1, groupe 4), se trouve dans une position semblable: l'explication produite dans la classe semblerait ne pas être suffisante à lever son doute. Le professeur donne un espace à ce questionnement, mais cela ne semble pas être suffisant pour que l'élève EA123 puisse se reconstruire un milieu que lui permette d'évoluer. Y-a-t-il d'autres élèves qui sont dans une position similaire à celle de l'élève EA123?

L'objet de nos questionnements n'est pas de trouver une réponse. Notre problème n'est pas de savoir s'il y a 1,2,5, ou 15 élèves dans la position de l'élève EA123. Le questionnement posé ouvre des possibilités; la constatation d'un seul cas nous oblige à réfléchir sur la structure du débat public (considéré de manière naïve dans notre analyse a priori), ce qui nous permet en même temps de problématiser le rôle du professeur. Y-a-t-il des actions que le professeur pourrait réaliser pour rapprocher les milieux de ceux qui « produisent » et de ceux qui « écoutent », pendant un débat public?

Du point de vue du sujet qui a la parole pendant le débat public, leur milieu est constitué par les actions, les réflexions sur ces actions et les interactions qui se produisent autour de ces actions et réflexions. Le sujet qui n'a pas la parole n'interagit pas nécessairement avec le même milieu : possiblement leurs actions ont été différentes, puis, leurs réflexions; les interactions qui se produisent font maintenant partie de son milieu, mais elles ne sont pas nécessairement liées à son objet. Dans la modélisation du milieu proposé par Brousseau (connu comme l'ognon, 1998), les interactions qui composent la situation didactique dans laquelle un sujet S se trouve, sont toujours liées à la situation adidactique qui S a vécu. Brousseau ajoute même: « Les relations du (professeur acteur) avec (le milieu de l'apprentissage adidactique) sont *une partie* des relations constitutives de la situation didactique » (1998, p.61-62) (c'est nous que soulignons)). Mais dans la situation didactique, ce milieu a-didactique de S peut s'enrichir des interactions avec les autres milieux.

La situation didactique (ou, éventuellement, une situation adidactique qui s'organise autour d'un débat public) ne peut donc pas être modélisée par les interactions autour de la situation adidactique d'un sujet générique : la modélisation doit incorporer les possibles interactions autour des situations adidactiques d'autres sujets génériques présents dans la classe. Un sujet générique peut évoluer dans le cadre strict des interactions autour de sa propre situation adidactique (ce qui ne signifie pas que l'on ignore les interactions avec les autres), mais il peut avoir besoin d'interagir avec le milieu adidactique d'autres sujets génériques dans le cadre de la même situation (par exemple, comme dans l'exemple précédent, parce que les seules interactions avec son milieu adidactique ne lui fournissaient pas des connaissances pour la validation).

Les exemples analysés montrent que l'engagement d'un élève (qui n'est pas celui qui est en train d'expliciter ses résultats), dans une phase collective de validation, semblerait exiger, une décentration de ses propres productions et une reconstruction, dans le temps limité de cette phase, d'un nouveau milieu avec lequel interagir, ce qui ne semble pas être très évident. L'analyse des situations particulières devrait nous permettre de préciser cette reconstruction en termes de connaissances spécifiques.

L'explicitation des actions effectives, la réflexion autour d'elles, et le temps qui caractérise le développement d'un débat, ne définissent pas nécessairement, pour tous les élèves qui n'ont pas réalisé les mêmes actions, un milieu dans lequel évoluer. Les élèves interagissent autour d'un objet qui est le même pour un observateur externe (voir, par exemple, les interactions à propos de la formule 10n+45), mais pour lequel les actions associées sont différentes : les répertoires des élèves ne sont pas suffisamment proches; les actions associées ne permettent pas de rapprocher les fonctionnalités de l'objet pour les différents élèves.

Serait-il nécessaire d'inviter à une réflexion individuelle autour de cet objet apparemment partagé (comme dans la situation 1) pour redéfinir un milieu qui permette d'accueillir la question de la validation pour la plupart des élèves (et pas seulement pour ceux qui ont construit la formule)? Comment les élèves pourraient-ils apprendre des informations présentées par leurs pairs ou par leur professeur? Dans quelles conditions ces apprentissages pourraient-ils être possibles? Qu'est-ce que les élèves pourraient apprendre?

Ces questions nous amènent à une problématique plus générale : l'étude des conditions qui permettraient aux élèves de s'engager dans un projet de validation autour d'un objet qui n'a pas été construit pour eux (de faire sien un objet qui leur est a priori extérieur, Conne, 1992). Il serait aussi important d'identifier les connaissances qui permettraient que le débat puisse s'orienter davantage du côté de la validation que de celui de l'évaluation (de manière à établir des contraintes qui permettent à l'enseignant de gérer un contrat d'implication effective et pas seulement un contrat d'ostension, dans le sens de Fregona, 1995). Nous formulons l'hypothèse que les conditions et les connaissances, dont nous venons de parler, sont liées à des processus de construction d'une rationalité mathématique qui prendrait sens dans le cadre d'un ensemble de situations, plutôt que dans une situation ponctuelle.

Ces questionnements n'ont pas été formulés avec l'esprit de tout vouloir contrôler dans une situation didactique, mais si la didactique a identifié, entre autres, le caractère « didactique » des situations de validation (Orus, 2000; Brousseau, 1998), en particulier l'importance des phases collectives, elle a donc la responsabilité de se questionner sur les conditions qui favoriseraient des apprentissages dans ces phases, pour le plus grand nombre possible d'élèves d'une classe. Nos questions pourraient ne pas être les plus pertinentes, mais notre étude met au premier plan le besoin d'avancer sur cette problématisation.

La comparaison des moments publics de la situation 1 et de la situation 2 nous permet de différencier:

- le bilan qui fonctionne comme rétroaction du milieu en permettant de définir un nouveau problème (ouverture), en revenant sur des phases adidactiques, puis sur un débat autour d'un objet partagé (situation 1),
- le bilan des résultats suivi d'un débat autour de l'objet « attendu », mais qui n'est pas nécessairement partagé par toute la classe : la confrontation des stratégies et l'accord sur l'efficacité d'une de ces stratégies n'ont pas été suffisants pour la reconstruction d'un milieu qui engage la plupart des élèves (qui n'avaient pas participé à l'élaboration de cette stratégie) dans le débat de validation.

Ce deuxième bilan est caractéristique de plusieurs situations dans lesquelles les élèves s'engagent sur des voies différentes de résolution; ce bilan permet d'analyser chaque solution, de les comparer et de choisir celles à retenir. Mais l'existence d'un débat qui engage toute la classe n'est pas évidente, comme nous venons de le montrer.

Comme nous l'avons explicité dans le cadre théorique de notre recherche, dans le traitement de la validation, la situation didactique occupe un rôle central. Selon Salin (1999), les théories didactiques doivent approfondir les études sur la modélisation didactique elle-même (comme cela a été fait pour la situation adidactique); pour cela, elles doivent essayer de comprendre et d'analyser la fonction de l'enseignant et les contraintes auxquelles il est soumis.

La modélisation de la situation adidactique considère un sujet générique en interaction avec un milieu et la théorie des situations nous permet de décrire un état des interactions possibles d'un sujet mathématique avec un milieu mathématique (Margolinas, 1993). Une modélisation de la relation didactique, en particulier lors des phases collectives de validation, exigerait, à notre avis, d'étudier plus précisément (et théoriquement) les interactions entre « ces possibles », les sujets associés à chacun de ces possibles (on a maintenant plusieurs sujets génériques) et le savoir en question. En d'autres mots, l'effort de recherche d'une modélisation pour les phases collectives exigera de différencier des sujets génériques (selon les possibles identifiés dans l'analyse adidactique) et d'identifier des interactions possibles de ces sujets avec le milieu qui caractérise cette étape. Cela nous permettrait de mieux comprendre certaines décisions du professeur (par exemple lorsqu'il donne priorité à la parole de certains élèves et pas à d'autres), de mieux préciser les contraintes que cette étape de la situation didactique impose, les possibilités d'implication de certains élèves dans le débat qui suit la confrontation des stratégies, le rôle possible du professeur pour obtenir cette implication, la nécessité ou non de renvoyer les élèves à un travail individuel, etc.

Nous n'ignorons pas les phénomènes sociaux qui peuvent conditionner le développement d'un débat (statuts de certains élèves dans la classe, histoire personnelle par rapport à la pratique du débat, etc.). Du point de vue théorique, nous sommes intéressé à identifier certaines des conditions nécessaires à l'engagement des sujets génériques dans un débat de validation, en particulier, celui qui est spécifique des connaissances en jeu.

Nous avons considéré (on pourrait dire de manière intuitive), dans l'analyse a priori, les interactions entre « les possibles » du sujet générique et du milieu, en analysant différents scénarios de confrontation pendant le débat public, mais sans analyser le rapport entre les connaissances de chacun des « sujets génériques » qui arriveraient au débat et les scénarios possibles; dans cette analyse, il y avait un implicite : la validation de la formule retenue ne serait problématique que pour les groupes qui ne l'avaient pas produite. L'analyse du protocole nous confronte, sans ménagement, aux limites de notre compétence.

2.2. Situation 2: version informatique

La version informatique de la situation 2 a été conçue à la suite d'analyses des expériences réalisées dans les classes d'Argentine. Dans ce jeu, les élèves voient défiler à l'écran, du haut jusqu'en bas, une suite de nombres consécutifs. Ils doivent inscrire la somme de ces nombres le plus rapidement possible, avant que la suite ne parvienne au bas de l'écran. S'ils réussissent, le bloc qui porte la série disparaît; dans le cas contraire, le réponse correcte est donnée et le bloc reste dans la partie inférieure de l'écran, ce qui réduit le temps pour les séries suivantes. Les élèves peuvent disposer d'une calculatrice pour réaliser les calculs qu'ils jugent nécessaires.

Dans la première partie du jeu (tableau I apparaissant à l'écran de l'ordinateur), on joue avec des séries de 10 nombres naturels consécutifs. Chacune des séries, ainsi que le temps requis pour parvenir au bas de l'écran, sont des paramètres que le professeur peut définir. On distingue également trois niveaux de difficulté, niveau débutant; niveau intermédiaire et niveau expert. Chacun de ces niveaux se distingue par le temps requis pour que chaque série parvienne au bas de l'écran et par l'ordre de grandeur des nombres qui composent chaque série. Le passage d'un niveau à un autre, ainsi que le passage de la première partie du jeu à la partie suivante sont déterminés par un certain nombre de succès consécutifs (paramètre défini aussi par le professeur).

Dans la deuxième partie du jeu (tableau II apparaissant à l'écran de l'ordinateur), on joue avec des séries de 8 nombres naturels consécutifs. On distingue, dans ce cas, deux niveaux de difficultés, niveau débutant et niveau expert, chacun de ces niveaux étant caractérisé de la même manière que celle que nous avons présentée dans la première partie du jeu. Le passage d'un niveau à un autre est aussi déterminé par un certain nombre de succès consécutifs (paramètre défini aussi par le professeur). Le passage à la troisième partie du jeu demande la production écrite d'une formule algébrique.

La troisième partie du jeu comporte une série de tâches qui demandent la production de formules équivalentes et un jeu similaire à celui effectué dans les parties précédentes mais dans lequel la quantité de nombres consécutifs dans chaque série est variable. Dans les classes du Québec, nous n'avons pas eu le temps d'expérimenter la deuxième étape de cette troisième partie du jeu.

En incorporant un environnement informatique, la transformation de la situation 2 « papier-crayon » qui avait été présentée aux élèves des classes en Argentine, a enrichi les milieux des élèves. La possibilité de valider rapidement certaines conjectures (de manière empirique, dans une première phase de la situation) a favorisé la diversité des stratégies; un jeu d'anticipation-rétroaction a commandé les interactions, dans le cadre de contraintes de généralisation, en leur conférant un dynamisme particulier. Cela a marqué une différence considérable dans les pratiques algébriques émergentes dans les classes du Québec et de l'Argentine.

Un type de raisonnement lié à la recherche de « régularités », dans les contextes de généralisation, est favorisé dans l'environnement informatique par l'économie de la pensée que cet outil représente : le nombre d'essais, dans des temps très courts, est remarquable par rapport à l'environnement papier-crayon. L'entrée dans la recherche d'une explication au fonctionnement d'une formule est faite avec une certaine certitude de sa validité. Il y a ici une certaine économie de la pensée et une fonctionnalité particulière de la preuve : elle agit plus au niveau de l'explication que de la conviction.

Le coût des essais dans le cas des classes d'Argentine, à cause de l'absence de l'environnement informatique, a impliqué un plus grand niveau de discussion à l'intérieur des groupes (moment de travail privé) et un travail d'anticipation de nature différente, puis, des raisonnements différents sur les actions. La variable temps a été aussi déterminante. Les stratégies de calcul mental que nous avions décrites dans les classes d'Argentine sont peu rencontrées dans les classes de Québec.

Nous présentons maintenant les parties les plus importantes du déroulement de la situation 2 dans les classes au Québec. Dans le déroulement de cette situation, nous nous intéressons aux interactions dans le contexte des tâches réalisées avec l'environnement informatique (travail à l'intérieur des différents groupes) et dans le contexte de la confrontation publique des productions des élèves.

2.2.1 Les interactions dans le contexte des tâches réalisées avec l'environnement informatique

Les contraintes particulières dans lesquelles notre expérimentation s'est réalisée nous ont empêché d'accéder aux interactions à l'intérieur des groupes : la proximité des groupes dans le laboratoire d'informatique nous a empêché de délimiter, au moment de l'écoute des enregistrement, les interactions correspondantes à chaque groupe spécifique, interactions qui ont conduit aux décisions de chaque équipe face à chacune des séries proposées par le jeu. En revanche, nous disposons de l'enregistrement de tous les essais de chaque équipe, essais correspondant aux différentes séries de nombres consécutifs proposées par le jeu (le logiciel a été construit de manière à garder trace des essais des élèves). Nous présenterons alors les caractéristiques les plus importantes de ces essais pour chacune des classes observées (classes Q1 et Q2). Enfin, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, c'est le chercheur (responsable de cette recherche) qui a pris la responsabilité des interventions dans ces classes; à certaines occasions, les professeurs titulaires de ces classes ont participé au travail et nous en ferons alors mention.

<u>Classe Q1</u>

Le tableau 1 fait état du nombre d'essais réalisés par chaque groupe d'élèves avant d'arriver à trouver la somme des nombres présentés. La lettre X représente les cas où les élèves ne sont pas parvenus à trouver les sommes correspondant à un niveau; la lettre F indique que les élèves ont réussi à produire une formule pour la somme de 8 nombres consécutifs. Les trois premières colonnes correspondent à trois niveaux du jeu, pour des séries de 10 nombres consécutifs. Les autres deux colonnes correspondent à deux niveaux du jeu, pour des séries de 8 nombres consécutifs.

Tableau 1

Nombres d'essais dans la classe Q1

	10 nombres consécutifs			8 nombres consécutifs	
Équipes	Débutant	Intermédiaire	Expert	Débutant	Expert
Eq112	1	2	0	X	
Eq113	0	2	0	0	0 F
Eq114	9	0	0	5	0
Eq115	5	2	0	10	0 F
Eq116	2	0	0	1	0 F
Eq119	4	2	0	2	X
Eq1110	0	2	10	2	0 F
Eq1111	3	8	2	6	1
Eq1112	5	1	0	0	0 F
Eq1113	2	5	X		
Eq1114	1	0	0	0	0 F
Eq1115	2	10	5	X	

Le fait que certains groupes réussissent, au niveau débutant, à trouver la somme des nombres consécutifs, sans faire d'essais, ne signifie pas qu'ils disposent d'une formule pour trouver la somme. Au niveau débutant, la vitesse avec laquelle les séries descendent donne la possibilité aux élèves de réussir avec différentes stratégies. Le temps alloué avait été pensé pour éviter que les élèves parviennent, avec une stratégie élémentaire, voire même en utilisant la calculatrice, à trouver les sommes, même au niveau « débutant » du jeu. Pourtant, nous avons observé que certains groupes ont utilisé plus d'une calculatrice et sont ainsi arrivés à trouver les sommes en ayant recours à une stratégie élémentaire, soit additionner tous les nombres. Par ailleurs, puisqu'aux niveaux suivants, la vitesse de défilement des séries augmente, cette stratégie devient insuffisante.

Comme nous l'avions prévu, nous avons observé une réduction du nombre d'essais en fonction de l'avancée dans les différents niveaux des jeux. Nous montrons d'abord certaines productions qui illustrent une telle évolution; nous commentons ensuite les productions d'une équipe (équipe 1110) qui vont à l'encontre de cette tendance.

Le tableau 2 reproduit les différentes suites traitées par les élèves de l'équipe 116, ainsi que les réponses attendues (rubrique : résultat) et celles qu'ils ont produites (réponse de l'équipe). Ce tableau indique aussi le moment de production de chacune des réponses (date et heure). Rappelons que la première partie du jeu porte sur la somme de 10 nombres consécutifs et la seconde, sur la somme de 8 nombres consécutifs.

Tableau 2

Résultats de l'équipe 116

Série	**Résultat**	**Réponse de l'équipe**
Première partie du jeu		
Début de la partie		
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56	515	
Début de la partie		
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56	515	57
Début de la partie		
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56	515	461
93+94+95+96+97+98+99+100+101+102	975	975
148+149+150+151+152+153+154+155+156+157	1525	1525
Niveau intermédiaire		
186+187+188+189+190+191+192+193+194+195	1905	1905
247+248+249+250+251+252+253+254+255+256	2515	2515
Niveau expert		
294+295+296+297+298+299+300+301+302+303	2985	2985
493+494+495+496+497+498+499+500+501+502	4975	4975
Deuxième partie du jeu		
niveau débutant		

578+579+580+581+582+583+584+585	4652	4655
438+439+440+441+442+443+444+445	3532	3532
894+895+896+897+898+899+900+901	7180	7180
Niveau expert		
1257+1258+1259+1260+1261+1262+1263+1264	10084	10084
1894+1895+1896+1897+1898+1899+1900+1901	15180	15180
Formule pour la somme de 8 nombres consécutifs		
n+36		
236		
n=36		
n=n36		
n36		
n+1+n+2+n+3+n+4.5+n+5+n+6+n+7+n+8		
n+4.5*8		
(n 4.5)8		
(n+4.5)8		
(n+4,5)8		
(n+3)+(n+4)/2*8		
n*8+28		

On peut voir qu'après les deux premiers essais, les élèves ont trouvé une façon de calculer rapidement les sommes demandées. On peut faire l'hypothèse que, dans le calcul de la somme de 8 nombres consécutifs, les élèves ont généralisé la formule trouvée pour les séries de 10 nombres. Les élèves ont toutefois éprouvé des difficultés à exprimer, par une écriture mathématique, leur méthode de calcul; après leurs cinq premières tentatives infructueuses, ils effectuent une autre représentation des nombres, prenant note probablement de certaines régularités qu'ils essaient de traduire par une écriture et aboutissant enfin, à exprimer leur façon de faire les calculs par une formule.

Confronté aux mêmes tâches, les conduites de l'équipe 1110 empruntent une trajectoire fort différente de celle observée chez les élèves de l'équipe 116. Le tableau 3 permet de retracer la trajectoire de l'équipe 1110; dans ce tableau, la lettre N indique qu'aucune réponse n'a été produite par cette équipe.

Tableau 3

Résultats de l'équipe 1110

Série	**Résultat**	**Réponse de l'équipe**
Première partie du jeu		
Début de la partie		
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56	515	515
93+94+95+96+97+98+99+100+101+102	975	975
Niveau Intermédiaire		
148+149+150+151+152+153+154+155+156+157	1525	151964
186+187+188+189+190+191+192+193+194+195	1905	1905
Niveau expert		
493+494+495+496+497+498+499+500+501+502	4975	N
493+494+495+496+497+498+499+500+501+502	4975	4975
841+842+843+844+845+846+847+848+849+850	8455	N
841+842+843+844+845+846+847+848+849+850	8455	16109
926+927+928+929+930+931+932+933+934+935	9305	N
994+995+996+997+998+999+1000+1001+1002+1003	9985	N
1177+1178+1179+1180+1181+1182+1183+1184+1185+1186	11815	N
1177+1178+1179+1180+1181+1182+1183+1184+1185+1186	11815	11780
1486+1487+1488+1489+1490+1491+1492+1493+1494+1495	14905	0

1559+1560+1561+1562+1563+1564+1565+1566+1567+1568	15635	N
19+20+21+22+23+24+25+26+27+28	235	N
19+20+21+22+23+24+25+26+27+28	235	235
Début de la partie		
47+48+49+50+51+52+53+54+55+56	515	515
93+94+95+96+97+98+99+100+101+102	975	975
Niveau intermédiaire		
148+149+150+151+152+153+154+155+156+157	1525	1525
186+187+188+189+190+191+192+193+194+195	1905	3665
247+248+249+250+251+252+253+254+255+256	2515	2515
294+295+296+297+298+299+300+301+302+303	2985	2985
Niveau expert		
493+494+495+496+497+498+499+500+501+502	4975	4975
572+573+574+575+576+577+578+579+580+581	5675	5675
Deuxième partie du jeu		
145+146+147+148+149+150+151+152	1188	1495
578+579+580+581+582+583+584+585	4652	5814
438+439+440+441+442+443+444+445	3532	3532
894+895+896+897+898+899+900+901	7180	7180
Niveau expert		
1257+1258+1259+1260+1261+1262+1263+1264	10084	10084
1894+1895+1896+1897+1898+1899+1900+1901	15180	15180
Formule pour la somme de 8 nombres consécutifs		
n x 8 4		
8n+4		
n+4*8+4		
n+3*8+4		
n+3*8+4		
(n+3)*8+4		

On peut voir, d'abord, que les élèves réussissent très rapidement à trouver les sommes des deux séries du « niveau débutant » du premier jeu, mais lorsqu'on passe au niveau intermédiaire, ils n'arrivent pas à trouver la somme demandée. Leurs résultats positifs sont attribuables à une erreur du fonctionnement de l'environnement qui répète la même série deux fois. Les résultats, au niveau expert, laissent entrevoir l'absence d'une procédure pour calculer les sommes proposées. Dans une nouvelle tentative, les élèves recommencent et ils réussissent assez vite à passer à la deuxième partie du jeu. Nous avons pu récupérer certains extraits des interactions à l'intérieur de cette équipe : en analysant des essais différents, les élèves découvrent que pour la somme de 10 nombres consécutifs, il était suffisant de multiplier par 10 le cinquième nombre de la série et d'ajouter 5 à cette somme. Lorsqu'ils doivent calculer la somme de 8 nombres naturels consécutifs, ils procèdent à une généralisation de la méthode trouvée précédemment; nous reproduisons les interactions entre les élèves de cette équipe :

<u>Équipe Eq1110</u>

(la série : 145 146 147 148 149 150 151 152)
E101 : mets 1 495
E102 : oh non, ça marche pas …

La rétroaction rapide du logiciel informe les étudiants de l'échec de leur tentative; ils s'engagent à la recherche d'une nouvelle méthode.

(prochaine série : 578 579 580 581 582 583 584 585)

E101 : ok, essayons le quatrième nombre fois 10 plus 4
E102 : ça fait 5 814
E101 : mets là!
E102 : oh non! ça marche pas
E101 : essayons avec … avec … ah … c'est fois 8 pas fois 10
E102 : ah! on a 8 consécutifs, c'est vrai!
E101 : on va essayer avec le quatrième fois 8 plus 4

(prochaine série : 438 439 440 441 442 443 444 445)

E102 : ça fait 3 532 … Oui! Ça marche

(Ils utilisent la même méthode pour toutes les séries suivantes ce qui confirme, pour eux, la validité de leur méthode)

Dans un jeu d'anticipations et de rétroactions, à partir d'une première régularité trouvée, les élèves de l'équipe 1110 arrivent à écrire une formule valide. La validité de leur formule est, dans ce cas, de nature pragmatique, résultant de leur engagement dans la recherche de la formule demandée par l'environnement. :

E102 : maintenant il faut trouver la formule … as-tu déjà la formule?
E101 : ben, non …
E102 : mets nx8 4 …
E101 : ok …ça marche pas…
E102 : nous avons dit fois 8 plus 4, alors, mets nx8+4
E101 : ok, … mais ça marche pas …
E102 : oh … ah mais c'est le quatrième fois 8 …
E101 : et?
E102 : mais « n » est le premier
E101 : qu'est-ce qu'on fait alors?
E102 : mets … .n+4x8+4
E101 : ça marche pas … pourquoi n+4
E102 : c'est le quatrième
E101 : mais si n est le premier, le quatrième est … n+3
E102 : ah ok, c'est vrai! … alors, mets n+3x8+4
E101 : ça ne marche pas non plus
E102 : comment ça? C'est pas possible …ah oui! la parenthèse … il faut mettre une parenthèse..
E101 :où ça?
E102 : mets (n+3)x8 + 4
E101 : oui! C'est correct!

L'adaptation de la stratégie trouvée pour les séries de 10 nombres consécutifs est une constante dans la plupart des groupes; voici, entre autres, l'adaptation produite par les élèves de l'équipe 113 :

<u>Équipe Eq113</u>
……..

E31 : maintenant c'est juste faire fois 8+45, on va voir si cela sert …
(ils ne réussissent pas avec une série, puis, ils reformulent la stratégie; un élève du groupe qui est à côté du leur donne une stratégie : multiplier celui du milieu par 8. L'élève donne un exemple, en leur montrant que s'il y a 8 nombres, celui de la moitié est le quatrième plus 0,5. Les élèves de cette équipe vérifient leur stratégie, en utilisant divers nombres, et comme elle marche, ils passent au prochain niveau.)

Même si les élèves prennent appui sur la méthode provenant d'un autre groupe, on peut voir clairement que leur première tentative est une adaptation de la stratégie trouvée pour les 10 nombres consécutifs.

Classe Q2

Dans l'examen des conduites des élèves de la classe Q2, nous avons construit un tableau similaire à celui que nous avons réalisé pour la classe Q1. La lettre X représente les cas où les élèves ne sont pas parvenus à trouver les sommes correspondant à un niveau; la F indique que les élèves ont réussi à produire une formule pour la somme de 8 nombres consécutifs.

Tableau 4

Nombre d'essais dans la classe Q2

	10 nombres consécutifs			8 nombres comsécutifs	
Équipes	Débutant	Intermédiaire	Expert	Débutant	Expert
Eq152	8	0	0	0	0 F
Eq252	8	0	1	4	0 F
Eq352	19	0	0	1	1 F
Eq452	2	0	0	0	0 F
Eq552	5	0	0	3	0 ?
Eq652	1	0	0	1	0 F
Eq752	7	0	1	0	0 F
Eq852	6	1	1	2	0 F
Eq952	3	0	0	4	X
Eq1052	0	9	0	1	0 F
Eq1152	0	6	0	0	0 F
Eq1252	0	5	0	3	0 F
Eq1352	7	2	0	3	0 ?

On peut identifier une tendance similaire à celle observée précédemment dans la classe Q1. Aux niveaux experts, les élèves disposent déjà de quelques stratégies pour réussir; le nombre d'essais diminue de manière remarquable. Toutefois, les élèves de l'équipe Eq352 sembleraient avoir fait plusieurs essais avant de passer au niveau intermédiaire (19 essais), mais les enregistrements montrent que, dans 9 de ces essais, les élèves ne donnent pas de réponse. Nous interprétons ce manque de réponse en l'associant au travail privé de recherche d'une stratégie : pendant ce temps, les élèves analysent les différentes séries proposées sans se préoccuper du résultat de la somme. Notre interprétation considère le fait que déjà, à un niveau intermédiaire, les élèves réussissent sans besoin d'essais additionnels. Les conduites des équipes Eq552 et Eq1352 sont aussi différentes de celles des équipes de leur classe; les élèves de ces équipes ne produisent pas une formule, même s'ils réussissent au jeu, parce que le logiciel ne leur permet pas d'avancer jusqu'à l'étape dans laquelle ladite formule est demandée (une autre erreur dans le fonctionnement du logiciel). Enfin, au niveau expert (premier tableau du jeu), nous avons pu observer que les élèves des équipes Eq752 et Eq852 ont fait une seule tentative, avant de réussir, mais le contexte nous permet de faire l'hypothèse qu'il s'agit d'une erreur d'entrée du résultat ou de calcul; par exemple, l'équipe Eq752 propose un premier résultat correct pour la première série et dans la deuxième série, elle propose comme résultat 189 670 tandis que la réponse correcte était 189 675; l'équipe Eq852 propose pour la première série de 10 nombres consécutifs le résultat 194 555 tandis que la réponse correcte était 194565.

Sauf une équipe, tous sont arrivés à écrire la stratégie de calcul sous la forme d'une formule. Voici les différentes propositions :
n représente le premier nombre de la série

n*8+28 : Eq152; Eq252; Eq352; Eq652
(2n+7)*4 : Eq452; Eq752
8n+28 : Eq1052; Eq1152;Eq1252

L'équipe Eq652 rencontre des difficultés dans l'écriture de la stratégie découverte. Voici les essais que nous avons enregistrés :

(n 3) x 8 4 =
(n 3) x 8 4
(n 3) 8 4
n8+38+4
n8+28

La première formule proposée correspond à la stratégie « le quatrième nombre de la série fois 8 plus 4 », qui est liée à une autre stratégie découverte par les élèves pour le cas de la somme de 10 nombres consécutifs : « le cinquième nombre de la série avec un 5 à la fin », c'est-à-dire, le cinquième nombre fois 10 plus 5. Les élèves utilisent implicitement la propriété distributive, lors de leur quatrième essai : n8+38+4 correspond à nx8+3x8+4, formule équivalente à (n+3)x8+4. Enfin, ils réduisent la formule proposée en arrivant à n8+28 (3x8+4=28). Les difficultés d'écriture amènent les élèves à la recherche d'expressions équivalentes!

Dans toutes les deux classes, il y a une évolution des stratégies de calcul conduisant à la production des formules pour l'action. La nature de certaines de ces formules crée des problèmes d'écriture, ce qui implique la mise en jeu de connaissances autres que celles nécessaires à la production des formules : le jeu d'action-rétroaction avec l'ordinateur (la rapidité des rétroactions) semblerait permettre aux élèves de se centrer sur les écritures comme des objets en soi et de faire passer au « deuxième plan », le contexte de référence dans lequel les formules ont pris sens.

2.2.2 Le débat collectif

Comme nous l'avons déjà spécifié dans l'analyse de la première situation, dans la classe Q1, nous n'avons pas eu la possibilité de développer un débat public. Un bilan nous a toutefois permis d'identifier, dans les validations produites, des traces des raisonnements impliqués dans l'étape de production de formules; nous rendons compte de ces raisonnements, en nous appuyant sur les interactions entre les élèves de certaines équipes

<u>Raisonnements des élèves d'une des équipes de la Classe Q1 dans la production de formules pour le calcul des sommes</u>

Nous reproduisons les échanges au sein de l'équipe Eq1110, équipe dont nous avons fait état dans l'analyse des conduites lors des différents jeux effectués dans l'environnement informatique; dans ces échanges le chercheur est identifié par la lettre P.

Les échanges dans les autres équipes n'ont pu être enregistrés, pour les raisons que nous avons évoquées précédemment. Dans plusieurs équipes, selon les notes que nous avons pu prendre, les échanges sont fort similaires à ceux que nous présentons pour l'équipe Eq1110.

Équipe Eq1110

E102 : j'ai une autre méthode : multiplier le cinquième par 10 et ajouter 5
E102 : si tu prends le nombre de la moitié …
P : c'est quoi le nombre de la moitié?
E102 : si tu as 10 nombres, par exemple 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41, le 36 est celui de la moitié (tu fais 10/2). Lorsque tu le multiplies par 10, ce que tu fais c'est 36x10 et tu vois ce que tu as ajouté de plus ou de moins, s'il faut ajouter ou enlever quelque chose …
P : pourquoi?
E102 : parce que lorsque tu multiplies par 10 celui du milieu, on fait toujours la somme de 36, 10 fois, mais il y a de choses qu'on ajoute et des choses qu'on enlève, en se compensant …
P : il dit que lorsqu'on multiplie le nombre « du milieu » par 10, on fait 36+36+… il faut voir qu'est-ce qu'on a mis de plus ou de moins …
E102 : dans le 37, tu as 1 de plus et dans le 35, 1 de moins, dans le 38, il y a 2 de plus. Et dans le 34, 2 de moins … alors, ce qu'il manque est 41-36=5, pour cela tu ajoutes le 5

P (écrit au tableau) :

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
36-4	36-3	36-2	35-1		36+1	36+2	36+3	36+4	36+5

Si on avance un nombre à partir de 36, on a 1 de plus, si on recule un nombre, on enlève 1, alors, … ce qui reste est +5. Alors, la somme de 10 consécutifs, est la même chose que 36x10 +1-1+2-2+3 -3+4-4+5, qui est 36x10+5

(certains élèves participent aux échanges)

Observateur (Qui l'enseignant???): si au lieu d'avoir de 32 à 41, on a de 32 à 42, est-ce que pouvez-vous trouver la somme rapidement?

E : 37x11 …

(plusieurs élèves parlent en même temps ….)

EL4 : la moitié …c'est quoi le nombre du milieu?
E102 : 36.5
El4 : mais il n'est pas dans la série …
E102 : mais on peut faire 36.5x11 +5.5
P: pourquoi?

(bruit, on ne peut pas discuter sur cette proposition)

Même sans avoir pu avancer davantage dans les échanges avec les élèves de cette équipe, on peut observer un mécanisme de généralisation dans la production de nouveaux résultats, mécanisme accompagné de modes de validation qui dépassent une validation empirique. La justification produite sur un cas particulier a la marque de la généralité, comme dans les classes d'Argentine. Il faut dire, encore une fois, que nous ne nous sommes pas centré sur la question de la conviction, mais plutôt sur la recherche de raisons.

Extraits des interactions lors du débat public dans la classe Q2

Nous présenterons maintenant certaines parties du développement du débat public dans la classe Q2. Nous avons vu que les méthodes pour trouver la formule ont été semblables à celles que nous avons rencontrées dans la classe Q1. La plupart des groupes ont cherché, pour les séries de 10 nombres consécutifs, le nombre du « milieu » et ils ont généralisé la formule trouvée pour les séries de 8 nombres consécutifs. Dans cette classe, avant de réaliser cette situation, nous avions proposé le problème suivant :
« Trouver trois nombres consécutifs pour lesquels la somme ne soit pas un multiple de 3 ». Les élèves ont expliqué l'impossibilité de trouver les trois nombres en montrant, sur des exemples génériques, que : 8 ,9, 10 le 8 est 9 (celui du milieu)-1 et le 10 est 9+1. Alors la somme est 3 fois celui du « milieu », puis elle sera toujours un multiple de trois.

Durant le débat public, les élèves proposent des explications similaires à celles que nous avons déjà montrées pour la formule 10n+45. Pour les autres formules, voici le passage plus important :

P : y-a-t-il d'autres stratégies?
E2: nous nous sommes rendu compte que le cinquième chiffre fois 10 plus 5 ça donnait la réponse …
P : ok, elle propose une autre stratégie, … mais c'est quoi le cinquième chiffre?
E2 : mettons, dans l'exemple donné par lui ça serait 32 …
P : ah, c'est le cinquième nombre de la série
E2 : oui
P : alors, elle dit que si on prend 32, on le multiplie par 10 et on additionne 5, on obtient le même résultat que celui-ci (en référence à la stratégie 10n+45)
Comment êtes-vous arrivés à trouver la formule?
E2 : on est allé voir les calculs (la section « consultez vos essais ») et à chaque fois, la réponse était la cinquième chiffre avec un « 5 » en arrière.
P : qu'est-ce que vous pensez ? (à la classe) c'est vrai?
(silence)

Obs. : est-ce que l'équipe pourrait donner une idée pour nous aider à l'expliquer, pour que les autres puissent rentrer dans votre façon de penser?
E3 (ce n'est pas un élève du groupe qui propose la stratégie) : pour 3 consécutifs, on prenait celui du milieu et on multiplie par 3, maintenant entre le cinquième et le sixième le milieu est : 32,5; si on multiplie maintenant par 10, on obtient 325
P : ça c'est la même chose que ce qu'ils disent?
E3 : oui ... c'est le milieu
P : quel est le milieu?
E3 : entre le cinquième et le sixième
P : et alors ... 32,5x10 est la même chose que 32x10+5
Obs : vous êtes d'accord que ces deux écritures représentent la même chose?
Certains élèves : oui
E3 : c'est pas la même chose, c'est le même résultat
P : ah , elle dit que c'est pas la même chose, que c'est le même résultat, quelle est la différence?
(silence)
P : dans le premier cas, E1a donné une formule et il a expliqué d'où venait le 45 et pourquoi on multiplie par 10, comment pouvons-nous expliquer ces deux nouvelles formules qu'ils proposent?
E1 : tu fais normalement le premier fois 10 plus 45, mais lorsque tu prends 32, tu as déjà 4 de plus que le premier, alors, tu ajoutes seulement 5, parce que la chiffre d'avant, le 4...disons ...
P : avez-vous compris?
(silence)

Les élèves qui proposent la stratégie de « mettre » un 5 en arrière du cinquième nombre de la série ne peuvent qu'expliquer leur méthode de production, mais cette méthode est basée sur l'« observation » des différents essais. Comme dans la classe d'Argentine, où cette stratégie est apparue, les élèves ne peuvent pas aller chercher une explication dans le milieu de l'action (production de la formule). Ce milieu vient de s'enrichir avec les autres méthodes et les autres explications; il s'agit d'un milieu enrichi, dans lequel la classe va « chercher » les relations qui permettront d'établir des rapports entre les différentes méthodes, en se référant à la « mémoire » de la classe, à ce qui avait été fait avec la somme de 3 nombres consécutifs. De plus, les élèves peuvent distinguer « les résultats » des « écritures » produites. L'équivalence des écritures n'est pas encore prouvée, ce qu'on sait ces écritures permettent de produire un même résultat.

Obs : quelqu'un peut le dire autrement?
E1 : disons 32x6 ... plus 15 ...
P : pourquoi fois 6?
E1 : parce que ce sont les 6 derniers chiffres de la série, après le 32 ... maintenant il y a des chiffres plus petits ...
P : attends, pourquoi plus 15?
E1 : c'est 1+2+3+4+5
P : il est en train de penser 33=32+1 34=32+2 35=32+3 36=32+4 et 37=32+5
E1: les 5 premier chiffres sont plus petits, alors 32x5-10 ... et tu fais l'addition 32x6+15+ 32x4-10 ...
P : vous êtes d'accord?
(silence)

P : pourquoi –10?
E1 : parce que la somme de 1+2+3+4 est 10 mais ils sont plus petits que 32!
P : ah, le 31 c'est 32-1, c'est ça?
E1 : oui, le 30 c'est 32-2, le 29 =32-3 et le 28=32-4 et la somme est -10, alors 32x10+15-10 qui est +5!
E1 : tout le calcul fait d'abord, 32x6+32x4, c'est-à-dire, 32x10, alors, 15-10 est 5, alors la formule est 32x10 +5
P : y a-t-il une propriété mathématique qui vous permette de passer de 32x6+32+4 à 32x10?
Obs : il y a une autre écriture pour 32x6+32x4?
Certains élèves : 32x10
Obs : avez vous écouté le terme distribution, ça vous dit quelque chose?
(silence)

En utilisant un raisonnement similaire à celui utilisé par les trois nombres consécutifs, l'élève E1 explique le pourquoi de la formule proposée. La propriété distributive de la multiplication est implicite, mais les élèves ne la reconnaissent pas comme objet de savoir. Comme dans les autres classes, l'exemple sur lequel l'explication a été produite fonctionne comme un exemple générique et les élèves ne voient pas la nécessité d'une écriture différente :

P : ok, mais à mon avis tout ce qu'on vient de faire sert pour la série qui commence avec le 28, mais pas nécessairement pour les autres séries.

E4 : non, parce que les différences sont toujours les mêmes
P : on va essayer de trouver une écriture mathématique qui montre que le raisonnement ne dépend pas de cette série particulière, qui montre que cela vaut pour n'importe quelle série de 10 nombres consécutifs
E : mets des variables… n est le cinquième nombre de la suite et tu mets nx10+5
P : ok, ça c'est la formule, mais comment on peut expliquer, au lieu d'utiliser le 28, je veux une explication générique

(silence)

Obs : quelqu'un a dit que n est le cinquième nombre de la série, mais il faut le savoir ….
comment on pourrait le dire autrement?

E1 : si n est le premier, tu as (n+4) x 10+5 … n représente le premier nombre
C'est plus logique de penser que n est le premier
P : il a dit qu'il est plus logique que n soit le premier, mais on peut mettre n pour le cinquième… on n'a pas l'obligation de mettre n au premier.
Mais cela est la manière d'écrire la formule, mais comment je peux expliquer que cette formule nous permet de trouver la somme de 10 nombres consécutifs?
E5 : parce que c'est comme ça
E6 : c'est pareil
P : on ne peut pas faire le même raisonnement fait pour 28 maintenant, de manière générique?

(silence)

Obs : si n est le premier, le deuxième est quoi? Et le troisième? Etc.
Certains élèves répondent n+1 n+2 … etc.

Je ne peux pas faire la vérification pour n'importe quel cas parce que « n » est n'importe quel nombre naturel et on a une infinité de nombres naturels.
Est-ce que j'ai une manière de savoir qu'il s'agit de deux écritures d'une même formule?
(silence)

E6 : si tu fais (2n+7)x4 2n x 4 est nx8 et 7x4 est 28
P : nous avons vu avant qu'il y avait quelque chose qui s'appelle la propriété distributive… alors, je peux faire (2n+7)x4 2nx4 et 7x4 comme il vient de dire … alors … on transforme cette écriture (en référence à (2n+7)x4) en une autre écriture …et j'arrive à 8n+28

Peut-on faire la même chose ici? (en référence à (n+3)x8+4)
E7 : 8n
P : 8n parce qu'on fait nx8
E7 : et 3x8 plus 4
P : on revient à 8n+28… alors, je peux montrer que ces trois formules sont la même chose, en faisant seulement de calculs, je n'ai pas besoin d'aller chercher la manière avec laquelle chaque formule a été construite … ça c'est une possibilité et c'est bien … mais une autre façon de faire ça c'est seulement en regardant les écritures et en faisant de calculs … les trois formules s'appellent des formules équivalentes … cela ça veut dire, on a « la même chose écrite de manière différente »

On essaie de sortir du contexte de production de « chaque formule » pour les valider en termes syntaxiques. Le travail sur les écritures, en suspendant le contexte de référence, n'est pas évident pour les élèves. La situation permet de démarrer cette problématique, mais elle devrait être au centre d'un travail plus large en algèbre.

2.2.3. Conclusions

Les dynamiques de la situation présentée dans la version papier-crayon et de celle présentée dans la version informatique ont été assez différentes. Dans la version papier-crayon, les coûts de production d'une réponse « à la main », les temps alloués- qui ne sont pas préfixés, mais déterminés par le développement de la situation, parce que le jeu finit dès qu'un groupe produit la réponse correcte- et le nombre d'élèves par équipe font rentrer les élèves dans la production d'une variété de stratégies que nous n'avons pas rencontrée dans la version informatique. La reconnaissance de l'économie d'une certaine stratégie est alors relative aux productions de la classe. Les temps de rétroaction, par rapport aux propositions de chacun des groupes, sont longs. En revanche, les discussions à l'intérieur des groupes pour raffiner les stratégies de base sont assez riches.

Dans la version informatique, la possibilité d'essayer plusieurs fois et d'obtenir rapidement une rétroaction du milieu, dans un temps déterminé, semblerait produire une

P : c'est clair?

(silence)

On peut voir que l'écriture générique n'est qu'une question de contrat didactique. Les élèves n'ont pas besoin de cette écriture pour reconnaître le caractère général de l'explication produite.

Pour les séries de 8 nombres consécutifs, le fait de demander explicitement l'écriture d'une formule et la variété des formules produites permet de faire entrer les élèves dans la problématique de la syntaxe des pratiques algébriques :

P. on passe à la somme de 8 consécutifs, j'ai trouvé trois formules que vous avez écrites dans le logiciel :
8n+28; n8 +28; (2n+7)4

(les élèves expliquent la première formule de manière similaire à celle faite pour 10n+45 dans le cas de 10 nombres consécutifs)

P : pourquoi fois 4, dans la troisième formule? Je ne la comprends pas

E : parce que le premier plus le dernier est le double de celui du milieu … alors au lieu de multiplier par 8 je multiplie par la moitié de 8
P : et comment tu sais que le premier plus le dernier est le double de celui du milieu?
E1 : celui du milieu est n+3,5; après on a 2n +7 et 7 :2 fait 3,5; la moitié de 2n est 2, et voilà
E1 : on peut faire aussi (n+3)x8 +4 …nle quatrième fois 8 plus 4
P : vous êtes d'accord (à la classe)?
(silence)
E1 : c'est la même chose que pour les dix consécutifs !
(silence)
P : on a ajouté une autre formule … maintenant, pour expliquer chaque formule, on a expliqué d'où venait chaque nombre, etc. … on s'est toujours appuyé sur le manière de construire la formule pour expliquer le pourquoi.
Mais si on a ces trois formules (en référence à 8n+28; (n+3)x8+4 et (2n+7)x4) mais que n'avons pas l'explication de la logique de construction de chaque formule.
Est-ce qu'on a des moyens de vérifier que ces trois formules sont , enfin, les mêmes formules, mais qu'elles sont écrites d'une manière différente, sans nécessairement nous appuyer sur la manière de construire la formule ou sans essayer d'identifier comment elles ont été construites?

C'est à dire, en regardant seulement les écritures, pourrais-je savoir s'il s'agit ou non de les mêmes formules?

(les élèves demandent des précisions sur la question)

E1 : on peut les tester
P : on peut les tester … mais … cela va te servir pour un cas particulier …
E1 : oui
P : je veux montrer que 8n+28 et (2n+7)x4 donnent toujours le même résultat pour n'importe quel n

évolution plus rapide des stratégies de base. En même temps, cette évolution rapide favorise l'avancement vers la généralisation du jeu : la somme de 8 nombres consécutifs et par la suite, la somme d'un nombre n de nombres consécutifs (étape qui n'a toutefois pas été expérimentée).

3. Conclusions générales

Dans la première situation, nous visions à mettre en évidence des effets de la variable « contradiction au niveau des connaissances qui commandaient les actions et non pas, au niveau de résultats », afin de centrer le travail des élèves sur la réflexion autour de ces connaissances et d'éviter la centration sur la production des nouveaux résultats. Nous avons pu constater l'efficacité de cette variable pour faire entrer la majorité des élèves dans la recherche d'explications. Mais la résolution de la contradiction n'exige pas uniquement de mettre les élèves face à cette contradiction et qu'ils mettent aussi à profit certaines des connaissances arithmétiques et algébriques que nous avions identifiées dans l'analyse a prirori : elle exige un changement de pratiques, puis un contrat spécifique. On le voit clairement dans le développement particulier que la situation a pris à l'intérieur de chaque classe. La possibilité d'installer un jeu d'anticipations et de décisions, producteur de nouvelles connaissances, semblerait plus difficile lorsque ce jeu ne se place pas à l'intérieur d'une pratique déjà établie : par exemple, la connaissance « laisser une trace écrite des opérations », liée au besoin de garder certaines informations (aspect monstratif des écritures), est à la base de ce jeu d'anticipation et c'est en même temps une connaissance à construire dans le contexte de ce changement de pratiques.

La première partie de la deuxième situation se place, pour les élèves en question, dans une pratique connue : ils s'agit de « produire » un calcul, même si une stratégie plus raffinée est exigée. Nous avions fait l'hypothèse que des connaissances algébriques implicites seraient en jeu dans cette production, connaissances qui seraient ensuite explicitées au moment de la demande d'écriture d'une formule et de la validation de cette formule. Mais il y avait un implicite dans cette hypothèse : nous voyions l'explicitation de ces connaissances comme une « formulation » des relations impliquées dans la production de la formule. Cette vision s'avère pertinente lorsqu'il s'agit de la formule 10n+45 et ce, dès que les élèves identifient la relation entre chaque nombre de la série et le premier nombre, mais elle se révèle non fondée dans les autres formules très ingénieuses proposées par les élèves (« mettre un 5 à la fin du cinquième nombre de la série »). L'explicitation exige beaucoup plus que la formulation de relations identifiées auparavant : elle exige l'identification de nouvelles relations, plus complexes que les relations nécessaires à la production de la formule. Les connaissances en jeu dans la production et l'écriture de la formule sont fondamentalement des connaissances sur le système de numération décimal, mais il s'agit d'un autre fonctionnement de ces connaissances. C'est la validation des formules qui a exigé, comme dans la première situation, plusieurs niveaux de connaissances et, entre autres, des connaissances liées à l'équivalence de formules. Mais le travail sur ces nouveaux objets, comme objets en soi, n'a pas été évident.

Chapitre V

Conclusions générales

Chapitre V
Conclusions générales

Nous rappelons rapidement l'objectif global de notre recherche, soit l'étude du développement de pratiques algébriques scolaires dans lesquelles la construction d'un système de validation interne -qui règle leur fonctionnement- occupe un lieu central. Dans le cadre de cette problématique globale, nous avons défini des questions plus précises. Nous les reprenons maintenant afin de préciser quels aspects de ces questions ont été mieux appréhendés à la fin de notre travail, et quels aspects demeurent encore « obscurs ». Comme dans toutes les recherches, de nouvelles problématiques apparaissent ou, plus encore, notre ignorance se fait explicite et la naïveté de plusieurs de nos présupposés « est mise en lumière ». Nous essaierons ainsi de rendre compte de ce que cette recherche nous a appris.

L'étude des conditions didactiques pour permettre un fonctionnement du numérique qui dépasse l'efficacité désignative, tout en conservant l'information monstrative, était un des objets fondamentaux de notre recherche. Nous avions fait l'hypothèse que la recherche de raisons et d'explications permettrait de mettre, au premier plan, une dialectique entre le numérique et l'algébrique, en aménageant le développement de nouvelles pratiques et de nouveaux modes de validation (en dépassant l'empirique pour entrer dans un jeu intellectuel). Les caractéristiques spécifiques de ces pratiques et de ces modes de validation, dans le contexte de la recherche d'explications, et la nature des interactions didactiques à l'intérieur de ces pratiques, constituaient les objets majeurs de notre recherche.

1. Conditions didactiques et caractéristiques de pratiques émergentes

Les variables didactiques de la première situation proposée ont été choisies de manière à provoquer une contradiction au niveau des modes de production du résultat et non pas au niveau du résultat même. Cette contradiction est reconnue par les élèves et elle est une variable fondamentale pour les faire entrer dans la recherche d'une explication. La situation met tous les élèves dans une position réflexive par rapport aux actions réalisées, position dont l'enjeu est la résolution de la contradiction. Différents niveaux de productions, explicités au chapitre précédent, découlent de cette réflexion. Nous relevons certaines des caractéristiques fondamentales des pratiques sous-jacentes à ces productions :

- la recherche d'écritures qui permettent de conserver l'information « monstrative » des expressions numériques, entre en compétition avec l'efficacité « désignative » du numérique : exemple particulier, exemples génériques, etc.
- l'introduction de nouveaux objets et du changement de statut des connaissances arithmétiques : expressions numériques comme objet de réflexion (et non pas comme moyens de calcul) et connaissances arithmétiques comme moyens pour produire ou établir l'équivalence d'expressions numériques.
- l'élaboration, dans l'action, de connaissances sur la validation et sur l'explication dans les classes de mathématiques : preuves pragmatiques et preuves intellectuelles, niveaux d'explicitation nécessaires à la compréhension (production de raisons)

Les deux premiers items sont liés par la question de la généralisation; ainsi, certaines écritures ingénieuses des élèves, qui ne pourraient pas être associées à l'introduction de nouveaux objets, ne résistent pas à la question de la généralité (le cas des exemples particuliers). C'est à l'intérieur d'un jeu entre la recherche d'écritures numériques qui permettent de conserver l'information monstrative, et la généralité de ce caractère monstratif, que l'introduction des nouveaux objets (écritures numériques) et l'élaboration de connaissances caractéristiques des pratiques algébriques (« une écriture numérique porte de l'information », etc.) prennent sens. On peut voir que ce changement de pratiques implique différents niveaux de connaissances : nous avons observé des élèves pour lesquels l'écriture (1+7)x2999 -1x2999 ne leur fournissait pas l'information « attendue » ou identifiée par les analyses épistémologiques. Ce changement de pratiques implique aussi différents types de validation : la validation de la connaissance « une écriture numérique porte de l'information » est différente de la validation de la connaissance « le résultat du calcul (dans la situation 1) ne dépend pas du premier nombre ». Le caractère explicatif ou non d'une preuve répond à des critères autres que la validité mathématique de la preuve. Les critères de validité identifiés par Margolinas (1993) sont alors des connaissances mathématiques qui permettent aux élèves de valider *certaines* des connaissances produites dans le cadre de ces pratiques. Pourtant, nous avons observé que la disponibilité et la stabilité chez les élèves des connaissances « candidates » à des critères de validité ne sont pas suffisantes pour qu'elles fonctionnent comme tels; l'élaboration d'un contrat spécifique autour de la validation dans la classe de mathématiques est nécessaire pour donner, à toutes les connaissances impliquées dans les changement de pratiques, le statut correspondant.

La première situation a permis de mettre en évidence, pour tous les élèves, les limites des connaissances arithmétiques, mais cette mise en évidence n'a pas été suffisante pour engager la plupart des élèves, -dans les moments de travail individuel- dans la production de nouvelles connaissances. La recherche d'un équilibre face à la contradiction posée (l'entrée dans des pratiques algébriques) implique, comme nous l'avons déjà explicité, différents niveaux de connaissances. Les rétroactions prévues par le milieu n'atteignent pas tous ces niveaux : seulement dans les classes, dans lesquelles un contrat de validation avait déjà été installé, les interactions entre les élèves fonctionnent comme rétroactions au niveau de ce qui est considéré une explication ou une raison acceptée en mathématique. Nous pensons qu'il ne s'agit pas d'un « défaut » de la situation : lorsqu'il s'agit de l'entrée dans des pratiques algébriques et, en particulier, dans des pratiques de validation intellectuelle, le fonctionnement adidactique ne peut que s'observer dans des dispositifs stables, où certains indices d'un contrat établi peuvent fonctionner comme rétroactions. Dans ce cas, on ne peut pas s'appuyer sur des connaissances « culturelles », comme dans la situation du puzzle conçu par Brousseau (1998) ou d'autres situations dans lesquelles un milieu matériel et une référence externe à la mathématique, par rapport à la validation, sont présents (savoir si un puzzle a été bien construit ou si on a gagné à un jeu, par exemple). Lorsqu'un milieu matériel n'est pas disponible, c'est à l'intérieur du « fonctionnement » des savoirs dans la communauté mathématique et dans la communauté « classe de mathématiques » que les rétroactions auront lieu et feront sens. Les « premières » rencontres avec cette nouvelle pratique vont demander plusieurs interactions avec le professeur (représentant de la communauté mathématique et acteur de la communauté « classe de mathématiques ») et avec les autres élèves de la classe (acteurs de la communauté « classe de mathématiques »). Certains aspects de ces interactions et les problèmes didactiques qu'elles soulèvent seront discutés dans la section suivante.

Les conditions didactiques créées par la deuxième situation sont assez différentes. C'est la production, l'écriture et la validation d'une formule de calcul, et non la reconnaissance et la résolution d'une contradiction, qui commande le développement de la situation. *La construction* de ladite formule acquiert un sens par le choix de certaines variables didactiques : dans la version papier-crayon, une compétition entre différentes équipes formées par les élèves de la classe; dans la version informatique, un jeu dans lequel la variable « temps » est prépondérante. Dans la version papier-crayon, le temps est aussi important, mais il s'agit d'une variable « indirecte » commandée par le développement de la situation dans la classe, et non pas directement par le professeur (au moins dans les premières versions). La recherche d'une formule exige des élèves qu'ils se centrent sur les relations entre les données -et non pas sur l'obtention du résultat-, puis qu'ils puissent généraliser l'invariance des relations identifiées. Le contexte numérique a été choisi de manière à poser la problématique de la validation dans le cadre de la dialectique numérique-algébrique, l'entrée dans cette problématique étant liée à la généralité de la formule proposée et à la confrontation de formules équivalentes. *L'écriture* de la formule est demandée explicitement dans les deux versions de la situation et elle est le lien entre la production et la validation de cette formule.

Voici des aspects importants des pratiques qui émergent du travail en classe avec cette situation :

- l'identification et la généralisation de l'invariance de relations : la production d'écritures numériques qui, conservant de l'information « monstrative » (qui expriment les relations intermédiaires identifiées), sont des outils pour la production de la formule.
- l'introduction de nouveaux objets (expressions algébriques), le changement de statut et la reconceptualisation des connaissances arithmétiques : l'identification de relations ne conduit pas nécessairement à la production d'une écriture. La production d'une écriture algébrique exige plus que « la traduction », dans un autre langage, de ces relations exprimées dans un certain langage: des connaissances arithmétiques sont au cœur de cette production. L'exemple de l'écriture algébrique de la formule « mettre un 5 à la fin du cinquième nombre de la série » (pour le calcul de la somme de 10 nombres consécutifs) est éloquent.

- l'élaboration, dans l'action, de connaissances sur la validation (différence entre des modes de production et de validation de généralisations) et sur l'explication dans les classes de mathématiques : preuves pragmatiques et preuves intellectuelles, niveaux d'explicitation nécessaires à la compréhension (production de raisons)

Dans cette situation, la validation et l'explication de la formule produite répondent à une demande explicite de la situation. L'engagement des élèves est sans problèmes lorsque les généralisations des relations identifiées au moment de la production de la formule peuvent s'exprimer en termes de données du problème (les méthodes de production contiennent déjà des traces des validations à produire), par exemple, pour les élèves qui, dans le processus de production de la formule, expriment tous les nombres de la série en fonction du premier nombre (n, n+1, n+2, n+3,…), en utilisant le fait que les nombres sont consécutifs (donnée du problème). En revanche, cet engagement n'est pas évident lorsque les formules proposées se basent sur des « inductions » de certains cas particuliers, dont la généralisation est aussi inductive (« je vois dans tous les exemples proposés que c'est le cinquième nombre de la série avec un 5 à la fin »), et que les relations identifiées n'utilisent qu'implicitement les données du problème. La complexité du travail d'explicitation de ces relations (la difficulté à identifier des connaissances arithmétiques pour soutenir ce travail d'explicitation), et la rétroaction « positive » du milieu par rapport à l'efficacité de la formule proposée, ne collaborent pas à l'engagement des élèves dans des processus de validation. Encore une fois, nous ne pourrions pas dire que les connaissances arithmétiques nécessaires à cette explicitation ne sont pas disponibles chez les élèves; c'est le fonctionnement de ces connaissances, dans le contexte de pratiques de validation, qui pose problèmes. Pourtant, la confrontation avec les validations produites par les élèves qui arrivent à produire des explications, met en évidence, pour ces élèves, les limites de leurs validations pragmatiques. Dans les classes observées, cette confrontation a injecté des connaissances dans le milieu des élèves qui ne pouvaient pas dépasser les preuves empiriques; ils ont pris des éléments des raisonnements impliqués dans les validations intellectuelles des autres groupes pour éclairer leurs démarches et celles des autres élèves. Nous analyserons avec plus de détail les caractéristiques des débats publics dans la prochaine section; nous souhaitons toutefois souligner un fait qui nous semble remarquable : l'injection de connaissances dans un milieu est un événement reconnu, non seulement en fonction de la disponibilité des connaissances qui permettent de lire l'information fournie (interprétation habituelle), mais aussi en fonction du projet des élèves et de leurs besoins.

Les situations construites et leur développement en fonction des objets de notre recherche accordent une place importante aux phases collectives et aux débats publics. Nous aborderons maintenant les problématiques didactiques que nous y avons rencontrées.

2. Nature des interactions à l'intérieur des pratiques privilégiées dans les classes

Les situations construites favorisent deux grands types d'interactions dans le cadre des milieux qui comportent plusieurs sujets : les interactions à l'intérieur des groupes et les interactions au niveau public. La nature des interactions, à l'intérieur de ces deux catégories, est marquée par les contrats implicites dans les classes observées. Nous synthétiserons d'abord certains faits globaux caractéristiques de ces étapes, ainsi que les problématiques didactiques que nous avons identifiées. Enfin, nous ouvrirons sur de nouvelles questions émanant de notre recherche.

Par rapport aux interactions à l'intérieur des groupes, les deux classes d'Argentine se différencient clairement par l'action du professeur : dans la classe A, le professeur joue de manière permanente avec l'incertitude, en faisant confiance aux interactions milieu-élèves et aux confrontations publiques postérieures. Ces indices d'incertitude sont des rétroactions injectées sur le milieu et interprétés comme telles par les élèves. Le professeur fait confiance au milieu, mais il fait aussi, et fondamentalement, confiance aux élèves; en même temps, les élèves font confiance au professeur et au développement de la situation : il s'agit d'un contrat qui caractérise l'histoire de cette classe. Dans la classe B, le contrat est différent. Le professeur évalue de manière permanente, en général par des actions qui masquent cette évaluation, mais qui sont connues par les élèves et lues comme telles. Dans le cadre de ce contrat, les élèves sont davantage en position d'attente; en général, les décisions ne se prennent que sous la vigilance du professeur qui est très présente dans tous les groupes et qui connaît de manière remarquable le travail de chaque équipe.

Dans les classes du Québec, le professeur, auteur de la thèse et concepteur des situations, agit davantage en se référant à certaines interventions « prévues », qu 'en interprétant les productions des élèves dans le cadre du milieu en question. Ces interventions n'ont pas d'effets sur la transformation des milieux des élèves. Le professeur fait confiance au milieu et aux élèves, mais le contrat en place (la classe s'organisant habituellement à partir d'un exposé des savoirs, de la réalisation de problèmes types avec toute la classe, de la résolution d'exercices, l'ensemble de ces activités étant soumis à l'évaluation permanente du professeur) établit une dynamique assez « individuelle » à l'intérieur des groupes, ce qui limite les interactions entre pairs. De plus, la prédominance de l'évaluation dans le contrat habituel se manifeste dans les efforts permanents du professeur pour créer une incertitude qui ne peut qu'être lue par les élèves comme une « perte de temps » (les élèves ont demandé au professeur titulaire du cours à quel moment ils allaient commencer avec la « vraie » algèbre). Cette dernière expérience remet clairement en question l'essai d'installer un nouveau contrat à partir de l'unique objet de la recherche. Par ailleurs, elle nous a permis de vivre personnellement la difficulté que le professeur peut avoir lorsqu'il essaie de modifier un contrat existant.

Même si on n'a pas l'intention de réaliser une analyse comparative, l'analyse des trois classes met en relief un fait déjà remarqué par Margolinas (2004) :

*« ...c'est parce que le contrat **fonctionne** et non parce qu'il dysfonctionne que les élèves cherchent à lire toute réaction du professeur comme une évaluation de leurs réponses. C'est aussi sans doute pour cette raison que l'installation à court terme d'une ingénierie didactique n'est pas viable, et que l'on n'observe véritablement le fonctionnement adidactique prévu que dans des dispositifs stables : la rencontre répétée avec des phases de validation conduit à un contrat didactique différent, parce que les indices qui permettent à l'élève d'identifier l'attente du professeur sont modifiés » (pp.50)*

L'observation de l'adidacticité ne peut qu'être réalisée à l'intérieur d'un contrat spécifique. Mais ce contrat didactique ne se caractérise pas seulement par les indices qui permettent aux élèves d'identifier les attentes du professeur; il est aussi producteur de connaissances sur la validation. De fait, des connaissances qui permettront de décider du caractère explicatif ou non d'une preuve, de la validité d'une preuve, etc. sont des connaissances qui s'élaborent à l'intérieur de ce contrat, en interaction avec la classe et non seulement en fonction des attentes du professeur.

Dans les deux situations, les interactions publiques occupent un lieu central, soit un espace didactique réservé à l'élaboration de certaines connaissances caractéristiques du contrat dont nous venons de parler. Notre travail nous a grandement appris sur la spécificité de cet espace, en fonction des particularités de chacune des situations, sur la complexité du rôle du professeur dans la gestion de ces interactions et sur les limites des modèles de situation didactique existants.

La spécificité de cet espace est liée aux bifurcations possibles de la situation (Margolinas, 2004). Margolinas montre bien comment l'analyse en termes de bifurcations introduit plusieurs situations dans la classe, à partir d'un même problème posé. Même si la notion de bifurcation naît dans le contexte de l'analyse de classes ordinaires, nos analyses nous permettent de la reprendre dans le contexte de l'ingénierie didactique. À notre avis, dès qu'une situation didactique existe, il y a des phénomènes qui se manifestent et qui ne dépendent pas du fait d'être dans un contexte de classe ordinaire ou d'une ingénierie didactique, la distinction pouvant être associée davantage aux traitements « possibles » des phénomènes (par exemple, pouvoir s'appuyer ou non sur le milieu, en fonction de leurs caractéristiques). Dans le contexte particulier de notre deuxième situation (toujours du point de vue de l'analyse a priori), et nous plaçant du point de vue du professeur, nous n'associerons pas les bifurcations de la situation à des branches « principale » et « marginale », mais plutôt à des branches principales, ce qui n'exclut pas que des branches marginales puissent également s'y greffer. Il en est ainsi dans plusieurs situations dans lesquelles, au moment des interactions publiques, les milieux adidactiques des sujets génériques différents ne sont pas les mêmes et pourtant, tous sont pertinents par rapport au savoir en question. Les deux stratégies, « mettre un 5 a la fin du cinquième nombre de la série » et « multiplier le premier nombre de la série par 10 et ajouter 45 », sont pertinentes pour calculer la somme de 10 consécutifs, mais plus encore pour les problèmes d'écriture et de validation qu'elles pourraient soulever.

Ces situations soulèvent plusieurs problèmes didactiques : la situation didactique est composée de plusieurs milieux adidactiques correspondant à différents sujets génériques. Dans ces cas, les phases collectives sembleraient se rapprocher davantage de bilans des résultats que de débats publics.

Les interactions entre des sujets génériques « différents » (milieux adidactiques différents) ne semblent avoir lieu que dans les cas où les sujets peuvent lire ces interactions comme des rétroactions à leur propre milieu (ce qui est assez raisonnable!). L'illusion que nous avions par rapport à l'entrée d'un sujet générique, au moment des phases collectives, dans « la logique » de production d'un autre sujet générique, soit pour fonctionner comme rétroaction, soit pour « comprendre » la production des autres, se voit diluée non pas par « la mauvaise » volonté des élèves, mais par l'absence d'un milieu adidactique (et par la présence de contraintes, par exemple le temps, dans ces phases collectives) qui pourrait soutenir la volonté des élèves. De la même manière que l'action du professeur ne dépend pas seulement de sa « bonne volonté », mais plutôt des contraintes de la situation dans laquelle il « est », nous trouvons que les élèves « sont » dans une situation similaire.

Chevallard (1991) affirme que la transmission de certaines connaissances requiert des formes didactiques inexistantes dans la culture dans laquelle les élèves sont plongés. Au lieu de chercher la manière de réaliser cette transmission, on remplace ce travail qui serait lourd et coûteux par un texte unique, par exemple, apprendre « de mémoire ». Les connaissances sur la validation en algèbre sont un bel exemple. Nous avons montré que le système scolaire crée un système parallèle d'artéfacts didactiques qui finissent par réduire la problématique de la validation à un problème de vérification de normes préétablies (sans raisons). Nous pensons avoir apporté certains éléments de réflexion à la question de la création d'une culture, d'un contrat autour de la problématique de la validation dans le contexte des pratiques algébriques.

3. Limites et perspectives de recherches futures

Afin de mieux contrôler certaines variables qui nous ont permis de faire une étude plus fine, nous avions décidé de placer notre recherche dans un contexte microdidactique. Cette décision était en accord avec nos hypothèses ou présupposés de départ, par exemple, la notion d'adidacticité liée à une situation spécifique. Certaines limites de notre recherche se manifestent dans le contexte de ces décisions :

- l'impossibilité d'observer un changement de pratiques dans une courte période de temps
- l'insuffisance des observations de situations isolées, i.e, le besoin de les placer dans une organisation mathématique spécifique
- l'impossibilité de provoquer un changement de pratiques, même à un niveau local (à l'intérieur de la situation spécifique), lorsque ces pratiques ne sont pas reconnues explicitement par l'institution qui les accueille (principalement l'institution classe)
- l'illusion de prétendre perturber un contrat étranger aux chercheurs concepteurs des situations

Mais, comme pour les élèves en situation « adidactique », ce sont ces limites qui nous ont ouvert les yeux aux questions et à la production de nouvelles connaissances, et non pas uniquement à l'observation de ce qu'on « attendait ». Voici les réflexions auxquelles ces limites nous ont confrontés.

Si l'élaboration d'un contrat pour la validation est nécessaire et que ce contrat contient plus que des gestes ou des indices de l'action du professeur, si certaines connaissances nécessaires à ce contrat se construisent dans des interactions publiques, il faut étudier plus précisément ces phases publiques et mieux caractériser la modélisation de la situation didactique.

Dans les débats publics (tous les élèves interagissent autour d'un objet « similaire»), nous avons observé deux positions dominantes : les élèves qui produisent des formulations, des explications, et ceux qui « écoutent » ou résistent aux explications proposées. Est-ce que ces élèves qui n'arrivent pas à produire des formulations ou des explications, et qui fonctionnent comme des rétroactions pour les « producteurs », apprennent dans cette interaction ou sont-ils seulement des moyens pour l'apprentissage des autres? Qu'apprennent-ils dans cette phase publique didactique plutôt qu'adidactique? Comment ces apprentissages pourraient-ils se manifester? La compréhension d'un raisonnement produit par un élève A, lorsqu'elle est effectuée par un autre élève B ou pour le collectif classe, implique-t-elle la construction de connaissances mathématiques pour le sujet A, pour le sujet B, pour les autres élèves du collectif classe? Quel type de connaissances? Comment se manifeste cette construction?

Considérer plusieurs sujets génériques complexifie la modélisation didactique. Brousseau (1998) a caractérisé différents types de contrats didactiques. La possibilité de considérer différents sujets génériques fait en sorte que ces contrats puissent cohabiter à l'intérieur de la même classe (avec le même professeur!), comme nous l'avons montré dans le cas du professeur B (la confiance dans les interactions milieu-élèves chez le professeur B dépendait de la représentation particulière qu'il avait de chacun des groupes, à l'intérieur de la même classe). Comment interagissent ces types de contrats à l'intérieur de la même classe et d'une même situation? Quelle implication a cette cohabitation de contrats à l'intérieur d'une même classe, lorsqu'il s'agit d'élaborer un contrat de validation commun?

Répondre aux questions précédentes, il faut en convenir, est un projet qui peut occuper une communauté de chercheurs en didactique.

Bibliographie

Arsac, G., Mante, M. (1997). Situations d'initiation au raisonnement déductif. *Educational Studies in Mathematics*, 33, p. 21-43.

Arsac, G. (1993). Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie. Vérification et démonstration. *Petit x, 37*, p. 5-33.

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y., Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Lyon: Presses Universitaires de Lyon.

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique : quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui? In A. Terrisse (dir.), *Les didactique des disciplines scientifiques : concepts et méthodes*, Presses Universitaires du Mirail, p. 18-43.

Artigue, M. (1986). Étude de la dynamique d'une situation de classe : une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (1), p. 5-62.

Assude, T., Drouhard, J.-P., Maurel, M., Paquelier, Y, Sackur, C. (1997). Presentation des travaux du groupe CESAME. In C. Comiti, et al. (Eds), Actes de la 9ème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Houlgate, p. 89-121.

Arzarello, F.,Bazzini, L.,Chiappini, G. (2001). A Model for Analysing Algebraic Processes of Thinking. In R Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (Eds.), *Perspective on School Algebra,* Kluwer Academic Publishers , p. 87-103.

Arzarello, F. (1993). Analysing Algebric Thinking. In R. Sutherland (Ed), *Algebraic Processes and the Role of Symbolism*, Proceedings of the ESRC Working Conference, Institute of Education, University of London, p. 35-41.

Arzarello, F. (1991). Procedural and Relational Aspects of Algebraic Thinking. In J.F. Furinghetti (Ed). Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Assisi, Italy, p. 80-87.

Balacheff, N. (2001). Symbolic Artihmetic vs Algebra. The core of a didactical dilema. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (Eds.) *Perspective on School Algebra*, Kluwer Academic Publishers, p. 189-205.

Balacheff N. (1999). Apprendre la preuve. In J. Sallantin, J.J. Szczeciniarz (Eds.), *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Paris: PUF, p. 197-236.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutation : aspects of the complexity of a constructivist approach of mathematics. In E. Von Glasersgeld (Ed), *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Kluwer Academic Publisher, p. 89-11.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18, p. 147-176.

Barallobres, G. (2004). La validation intellectuelle dans l'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2-3, p. 285-328.

Bednarz N., Desgagné S., Diallo P., Poirier L. (2001a). Approche collaborative de recherche : une illustration en didactique des mathématiques. In P. Jonnaert et S. Laurin (Eds.). *Les didactiques des disciplines, un débat contemporain.* Presses de l'Université du Québec, p. 37-53.

Bednarz N., Poirier L, Desgagné S., Couture C. (2001b). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens, In A. Mercier, A. Rouchier et G. Lemoyne. (Eds). *Le génie didactique. Usages et mesurages des théories de l'enseignement.* De Boeck Université, p. 43-69.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching. Kluwer Academics Publishers.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. In Kieran, C. (Ed.), New perspectives on school algebra. Papers and discussions of the ICME-7algebra working group. *Journal of Mathematical Behavoir*, 14, p. 41-73.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la géometrie dans la scolarité obligatoire. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux I.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (2), p. 135-193.

Bosch, M., Gascon, J. (2001). Organiser l'étude-Théories et empiries. Actes de la XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, p. 23-40.

Broin, D. (2002). Arithmétique et Algèbre élémentaires scolaires. Thèse doctorat Université Bordeaux I.

Brousseau, G. (1999). Educacion y Didactica de las matematicas. Congreso Nacional de Investigacion Educativa. Mexico, 1999.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didac*tiques. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G., Brousseau N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM de Bordeaux.

Brousseau G. (1986). La relation didactique : le milieu. In Actes de la IVe école d'été de didactiques des mathématiques. Paris : IREM de Paris VII, p. 54-58.

Brousseau G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple: la géométrie. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Grenoble : IMAG, p. 183-226.

Brousseau, G. (1978). L'observation des activités didactiques. *Revue française de pédagogie*, 45, p. 130-140.

Chevallard, Y., Bosch M., Gascon, J. (1997). Estudiar matematicas. El eslabon periddo entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: ICE-Horsori.

Chevallard, Y., (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2e édition augmentée.

Chevallard, Y (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x*, 5, p. 51-94.

Chick, H. (2001). The Future of the Teaching and learning of Algebra. 12e ICMIK Study, Melbourne: Australia.

Cobb, Paul, Yackel, Erna (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vo.l 27, No. 4, p. 458-477.

Combier, G., Guillaume, J., Pressiat, A. (1996). Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre! INRP, Paris.

Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne et F. Conne (dir.), *Le cognitif en didactique des mathématiques*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal, p. 31-69.

Conne, F (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12 / 2-3, p. 221-270.

Coulange, L. (2000) Étude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de Troisième. Thèse doctorat Université Joseph Fourier.

Da Costa (1997). *Logiques classiques et non classiques; essai sur les fondements de la logique*. Paris; Masson.

DeBlois, (1995). La place de l'erreur dans le développement de la compréhension en mathématiques. *Instantanés mathématiques*, XXXI (2), 4-7.

De Villiers, M (1993), El papel y la función de la demostración en matemáticas *Epsilon*, 26, p. 15-29.

Drouhard, J.P (1992). Les Écritures Symboliques de l'Algèbre Élémentaire. Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques,* 23/3, p. 34-56.

Duval, R. (1999). L'argumentation en question. La lettre de la preuve. In Newwsleter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ? *Petit x*, 31, p. 37-61.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22(3), p. 233-261.

ERMEL (1999). Vrai? Faux?... On en débat!, In J. Douaire et C. Hubert (dir.), Didactique des disciplines, INRP, Paris.

Fregona (1995). Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géometrie : interactions, contrats et transpositions didactiques. Thèse doctorale. Université Bordeaux I.

Garcia, R. (2000). El conocimiento en construccion. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoria de sistemas complejos. Editorial Gedisa.

Gascon, J., Bosch, M, Bolea, P. (2001). Como se construyen los problemas en didactica de las matematicas, Parte II : El algebra escolar en el Programa Epistemologico. *Educacion Matematica*, 5, p. 25-43.

Gaudreau A. (1998). Interactions chercheurs-enseignants dans l'élaboration, la mise à l'essai et l'analyse de situations d'enseignement des mathématiques en classe spéciale. Thèse de doctorat inédite, Université de Montréal.

Giroux, J., René de Cotret, S. (2000). À propos du temps didactique : l'introduction d'un objet de savoir en classe mathématique de doubleurs (13 ans). Actes de la 5^{ième} Biennale de l'éducation et de la formation. http:www.inrp.fr/Acces/Biennale /5biennale/Contrib/Groupe.htm#the20. Paris, p. 12-15.

Glaeser, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 2.3, p. 34-55.

Grugeon, B. (1995). Étude des rapports personnels et des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : B.E.P. et Première G., Thèse de doctorat inédite, Université Paris 7.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. , 15 *For the Learning of Mathematics* (3), p. 42-50.

Hanna, G. (1995). Review of M. Detlefsen (ed.), Proof and Knowledge in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 28 (1), p. 87-90.

Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof . *Interchange*, 21, 6-13.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics*, 9 (1), p. 20-25.

Hanna, G. (1983). Rigorous proof in mathematics education. Toronto: The Ontario Institute for Studies in Education.

Harel, G., Sowder, L. (1998). Student's Proof Schemes. In A Shchoenfeld et al. (Eds). Research on collegiate Mathematics, vol. 3, M.A and A.M.S, p. 56-78.

Healy, L., Hoyles, C. (2000). A Study of proff conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, p. 396-428.

Kieran, C., Boileau A., Garançon, M. (1996). Introducing Algebra by means of a Technology-Supported, Functional Approach. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee, L. (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, Kluwer Academics publishers, p. 239-262.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations*, Paris: Editions Hermann.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture trough generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.), *Approach to Algebra: perspectives for research and teaching*, Kluwer Academics publishers, p. 209-238.

Legrand, M. (1990). Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 9.3, p. 123-148.

Legrand, M. (1988). Genèse et étude sommaire d'une situation codidactique : le débat scientifique en situation d'enseignement. In C. Laborde (Ed.). *Proceeding of the Premier Colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l'Informatique*, Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 46-58.

Lemoyne, G., Conne, F., Brun, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales : une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherche en Didactiques des Mathématiques,* 13 (3), p. 333-384.

Lins, R. (2001) The production of Meaning for Algebra : a Perspective Based on a Theoretical Model Semantic Fields. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell et R. Lins (Eds.) *Perspective on School Algebra*, Kluwer Academic Publishers, p. 143-178.

Margolinas, C. (2004). Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques. Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation. Université de Provence.

Margolinas, C. (1998). Étude de situations didactiques ordinaires à l'aide de concept de milieu : détermination d'une situation du professeur. In M. Bailleul (éd.). Actes de la 9e École d'Été de didactique des mathématiques, 153-160, Houlgate1 1997.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mary, C. (1999). Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire. Thèse de doctorat. Université de Montréal.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. *Recherche en didactiques des mathématiques,* 18/3, p. 279 -310.

Orus, P. (1992). Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire. Thèse présentée à l'Université Bordeaux I.

Panizza et Drouhard (2003). Los ordenes de conocimientos como marco para significar las practicas evaluativas. Dans «La enseñanza y la evaluacion. Una propuesta para matematica y lengua. Grupo», Facultad de Ciencias de la Educacion, Universidad del Comahue, Argentina.

Perrin-Glorian, M.J (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19/3, p. 279-321.

Perrin-Glorian, M.J (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13/1.2, p. 5-118.

Piaget, J., Garcia, R. (1983). Psicogenèse e hisoria de la cienca. Paris : Flammarion.

Piaget, J. (1974). Réussir et comprendre. Paris : Presses Universitaire de France.

Radford, L. (2003a). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students'Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), p. 37-70.

Radford, L. (2003b) Narratives, expressions algébriques et calcul formel: de la constitution à la transformation du sens. (http://laurentian.ca/educ/lradford).

Radford, L. (1999) El aprendizaje del uso de signos en algebra . Una perspectiva post-Vigotskiana , *Educacion Matematica*, Vol 11, No.3, p. 24-42.

Radford, L. (1996) The roles of Geometry and Arithmetic in the developmentof Elementary Algebra: Historical Remarks from a Didactic perspective In: N. Bednarz, C. Kieran and L. Lee (Eds.*), Approaches to Algebra: perspectives for research and teaching*, Dordrecht /Boston/ London: Kluwer, p. 39-53.

Ratsimba-Rajohn (1992). Contribution à l'étude de la hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique de phénomènes d'ostension et de contradictions. Thèse de Doctorat. Université de Rennes I.

Sadosky, P (2003). Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis de doctorado. Universidad de Buenos Aires.

Salin, M.-H. (1999). Pratiques ostensives des enseignants et contraintes de la relation didactique, In G. Lemoyne et F. Conne (Éds.), Le cognitif en didactique des mathématique, Montréal : Presses de l'Université de Montréal, p. 327-352.

Sensevy, G. (1998), *Institutions didactiques. Étude et autonomie à l'école élémentaire.* Presses Universitaires de France.

Sessa, C, Barallobres, G, Itzcovich, H, Sadosky, P (2001). Actualizacion Curricular para 7mo grado. Direccion de curricula, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (http://www.gcba.gov.ar/educacion/docentes/planeamiento/pdf/integrado.pdf).

Sierpinska, A. (1995). *La compréhension en mathématiques*. De Boeck Université.

Soury-Lavergne S. (2003). De l'étayage à l'effet Topaze, regard sur la négociation dans la relation didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/1, p. 9-40.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A., Lins, R. (2001). *Perspectives on School Algebra*, Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (2001). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. First Coloqui de Historia e Tecnologia no Ensino de Matematica. Université do Estado do Rio de Janeiro.

Vergnaud, G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.). *Construction des savoirs: Obstacles et conflits*, Montréal, Canada : Agence d'Arc, p. 76-83.