Université de Montréal

Situations d'enseignement sur les fractions à l'intention d'élèves de secondaire 1 présentant des difficultés d'apprentissage

par

Pierre Lancup

Département de Didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maîtrise ès arts (M. A.)

Décembre 2004

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Situations d'enseignement sur les fractions à l'intention d'élèves de secondaire 1 présentant des difficultés d'apprentissage

Présenté par

Pierre Lancup

A été évalué par un jury composé des personnes suivantes

Madame Louise Poirier

Président-rapporteur

Madame Gisèle Lemoyne

Directeur de recherche

Madame Ewa Puchalska

Membre du jury

Directeur de recherche : **Gisèle Lemoyne**

Résumé

Pour bien des gens, les mathématiques sont une matière très difficile. Les fractions contribuent pour beaucoup à cette image. Des facteurs externes, tels le nombre d'élèves par classe, l'hétérogénéité des groupes, la diminution des ressources, complexifient autant l'enseignement que l'appropriation de la matière par les élèves. L'échec sur un volet aussi important a des conséquences graves allant du rejet des mathématiques jusqu'au décrochage scolaire. Comment y remédier ne serait-ce que partiellement?

La question qui motive notre recherche est alors la suivante : peut-on trouver des situations impliquant la relation partie-tout et allant au delà du simple partage de grandeurs, de façon à permettre aux élèves d'exploiter leurs connaissances antérieures, de les transformer et d'en construire des plus satisfaisantes sur les fractions? Diverses situations visant la construction du sens partie-tout de la fraction et la coordination des différents sens de la fraction ont été ainsi construites et réalisées en classe auprès de 11 élèves de la première année de l'enseignement secondaire présentant des difficultés d'apprentissage.

Les résultats de notre recherche témoignent d'améliorations tangibles des rapports aux fractions de tous les élèves du groupe. En attestent également les différences importantes entre leurs résultats aux épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique. L'écart entre leurs performances à la sortie de la séquence d'enseignement et celles des élèves des classes régulières est relativement faible. Enfin, la majorité de ces élèves qui ont bénéficié de la séquence d'enseignement ont réussi des problèmes complexes de représentation impliquant divers sens de fractions ; de tels problèmes sont rarement proposés aux élèves des classes régulières.

Notre recherche comporte des limites. Le dispositif d'enseignement que nous avons mis à l'épreuve doit être conçu comme une ouverture pour des recherches futures en didactique des nombres rationnels.

Mots-clés : didactique, mathématiques, enseignement, fractions, secondaire, élèves, difficultés d'apprentissage

Abstract

For many people, mathematics is a very difficult subject. Fractions seem to account for much of this difficulty, in addition to other factors such as, number of pupils per class, heterogeneity of the groups, and decrease in resources. Failing on fractions may lead to rejecting mathematics and even dropping out of school all together. How to help students understand fractions?

The question is then the following one: can one find situations involving the relation whole-and-part and going beyond the simple division of sizes in order to allow the students to exploit their former knowledge, transform them and build more satisfactory relationships to fractions. Various situations aiming at the construction of the whole-and-part meaning of the fraction and the coordination of the various meanings of the fraction were thus built and proposed to eleven students of the first year of secondary education presenting learning difficulties.

The above approach resulted in tangible improvements among all the students of the study group. The results of the tests administered at the end of the didactic sequence showed an important improvement from those administered at the beginning. In addition, most of these students exposed to the above teaching approach were able to solve complex fraction based problems having a level of difficulty seldom given to regular class students.

Although our research was limited in scope, it may very well be considered the basis for future research into the didactic of rational numbers.

Keywords : didactic, mathematics, teaching, rational numbers, secondary, students, learning disabilities.

Table des matières

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

Remerciements

Épanouissement, déchirement, enthousiasme, dépassement sont autant d'émotions qui m'ont accompagné durant cette aventure qu'est la rédaction d'un mémoire de maîtrise. Aujourd'hui, je vous écris pour vous remercier tous et chacun d'entre vous pour le support que vous m'avez apporté lors de cet exercice.

Tout d'abord, je remercie ma directrice de mémoire, la Professeure Gisèle Lemoyne pour son soutien, ses conseils et sa collaboration. Ses encouragements m'ont grandement inspiré tout au long de la rédaction de cet ouvrage.

Un incommensurable merci à la famille et aux amis qui n'ont jamais douté de mes capacités. Les milliers de petits conseils demeurent, sans aucun doute, une grande source de motivation. Je suis aujourd'hui le résultat de vos espoirs. Cet exercice de recherche n'est pas de tout repos pour l'entourage immédiat. L'écoute, la naïveté, l'étonnement sont aussi des outils qui contribuent à soutenir une démarche de recherche.

Ce mémoire augure, le lancement d'une carrière fructueuse, dans le but de servir tous ces gens qui m'ont fait confiance. En fait, ce mémoire ne fut qu'un instant dans ma vie, qu'une ponctuation précieuse.

INTRODUCTION

L'hétérogénéité des groupes scolaires du Québec d'aujourd'hui et les difficultés persistantes des élèves forcent souvent les enseignants de mathématiques à se dépasser. Construire des activités, des situations-problèmes et des tâches nouvelles constitue autant de défis pour faire progresser les élèves.

Les enseignants de mathématiques doivent d'abord composer avec le fait que les classes regroupent le plus souvent des élèves dont les performances académiques sont satisfaisantes et d'autres élèves présentant des lacunes en mathématiques, des difficultés d'apprentissage, voire des problèmes de comportement importants. Les classes de l'enseignement secondaire d'autrefois comportant moins de 30 élèves ne se rencontrent que très rarement aujourd'hui ; des classes de 35, 36 et même de 37 élèves sont choses courantes. Dans de telles conditions, penser un enseignement des mathématiques qui soit profitable à tous les élèves d'une classe n'est pas évident !

Les taux d'échecs enregistrés dans les matières de base (français et mathématiques) sont très élevés. Selon un rapport produit par la C. E. C. M. (1997 : Commission scolaire des écoles Catholiques de Montréal, maintenant connue sous le nom de Commission scolaire de Montréal (CSDM)), près de 45% des élèves du secondaire subissaient un échec dans une des matières de base avant la fin de leurs études secondaires. L'échec scolaire, c'est bien connu, provoque le décrochage scolaire chez les jeunes. Ainsi, selon les données obtenues du ministère de l'Éducation et reproduites dans un quotidien montréalais, «le nombre de jeunes qui quittent l'école sans avoir obtenu leur diplôme d'études secondaires atteint même près de 75% des élèves du secondaire, dans certains établissements de la commission scolaire» (Thibodeau, Journal La Presse, 4 janvier 2002). En 1999-2000, à l'École secondaire L'Horizon (école de Ville LeGardeur où a lieu cette étude), 31,4% des élèves subissaient des échecs dans l'une ou l'autre des matières de base (Rapport de la Commission scolaire des Affluents). Les restrictions budgétaires imposées aux écoles depuis 1995 affectent l'enseignement et l'encadrement des élèves du secondaire; on note ainsi une diminution du nombre de postes d'enseignants réguliers, à temps complet, une augmentation du nombre d'élèves par classe et une diminution des services aux élèves présentant des difficultés d'apprentissage ou d'adaptation. De plus, les écoles secondaires doivent composer avec une plus grande mobilité des enseignants, ce qui n'est pas sans affecter les suivis pédagogique et didactique des élèves.

Faire en sorte qu'un plus grand nombre d'élèves acquièrent des connaissances satisfaisantes en français et en mathématiques et poursuivent harmonieusement leurs études secondaires constitue un défi dont les enjeux sociaux et économiques ne sont plus à démontrer. Mais comment y parvenir ? En tant qu'enseignant de mathématiques à des élèves du secondaire, à plusieurs élèves présentant des difficultés importantes en mathématiques, nous nous devons d'examiner notre enseignement et de viser un enseignement qui permette aux élèves de mieux comprendre les notions mathématiques, de réussir.

La recherche actuelle est d'abord motivée par le souci de l'enseignant de mathématiques, que je suis, de transformer les rapports des élèves aux mathématiques. Elle l'est tout autant par la nécessité de ne pas improviser dans la recherche de moyens pour transformer ces rapports. Effectuer une étude rigoureuse et bien documentée de situations d'enseignement des mathématiques est donc essentiel.

Les situations d'enseignement que nous étudions dans ce travail concernent les fractions, objet de savoir sensible et complexe. En secondaire 1, une grande partie du temps consacré à l'enseignement des mathématiques est réservée à l'enseignement des fractions et les résultats de cet enseignement ne sont pas très positifs. Pour montrer l'importance des fractions en mathématiques et dans l'enseignement secondaire, il nous semble pertinent de citer un court passage de l'ouvrage de Rouche (1998, p. 1) :

« Les fractions sont un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité « réservée aux plus intelligents ». « Oh moi les mathématiques» dit-on dans l'âge

adulte, en repensant entre autres aux fractions. Celles-ci sont comme des insectes nuisibles qui s'attaquent aux écoliers et dont les piqûres entraînent d'interminables séquelles intellectuelles et morales. »

Des résultats comparables sont observés depuis plusieurs années dans tous les pays. Il n'est donc pas inutile de poursuivre les études sur l'enseignement des fractions.

Si l'enseignement des fractions s'avère une entreprise difficile lorsqu'il est réalisé en classes régulières, que dire d'une telle entreprise lorsqu'elle concerne des élèves peu performants en mathématiques, des élèves dont les rencontres avec les mathématiques n'ont pas été très fructueuses ? Ce sont ces élèves qui nous préoccupent plus particulièrement dans cette étude. Les difficultés de ces élèves ne sont pas exclusives aux fractions; elles se manifestent toutefois avec plus d'acuité dans l'enseignement des fractions, enseignement crucial, s'il en est un, en secondaire I.

Comment envisager l'enseignement des fractions auprès de ces élèves, compte tenu de leurs expériences d'apprentissage sur les fractions ? Comment éviter les pièges d'un enseignement répétitif ou, selon une formulation plus imagée, comment éviter de « faire du sur place » ? Animée par ces questions, notre recherche vise la construction de situations d'enseignement des fractions et leur mise à l'épreuve dans une classe de secondaire I incluant des élèves présentant des difficultés non négligeables en mathématiques.

Dans cette introduction, nous avons exposé très brièvement quelques motifs à l'appui de notre recherche. Le premier chapitre permettra d'en préciser davantage la problématique. Le cadre théorique dans lequel s'inscrit notre recherche sera présenté au second chapitre; ce chapitre se terminera par une présentation des objectifs spécifiques de notre recherche. Dans le troisième chapitre, la méthodologie de notre recherche sera décrite. Le quatrième chapitre sera consacré à l'analyse des résultats. Enfin, au cinquième chapitre, nous présenterons les conclusions de notre recherche.

1. PROBLÉMATIQUE

La place réservée à l'enseignement des fractions dans le programme d'études de la 1^e année du secondaire est importante. On y retrouve l'objectif général suivant: favoriser chez l'élève l'utilisation des connaissances relatives aux nombres rationnels. Savoir opérer sur les fractions et savoir résoudre des problèmes de la vie courante constituent des objectifs spécifiques privilégiés. Des objectifs similaires se retrouvent aussi dans le programme d'études des 5^e et 6^e années du primaire. Les fractions sont donc un objet de savoir familier aux élèves de la 1^e année du secondaire. Depuis plusieurs années, en effet, ces élèves effectuent des tâches utilisant des fractions. On pourrait être enclin à juger superflu le temps consacré à l'enseignement des fractions aux élèves du secondaire. Mais, devant l'importance des difficultés rencontrées par plusieurs élèves du secondaire dans les tâches impliquant les fractions, nous devons reconnaître que ce jugement serait erroné, dangereux.

Pour mieux comprendre la portée des difficultés mises en évidence chez les élèves du secondaire, et pour mieux comprendre les motivations qui animent notre recherche, nous rendons d'abord compte de résultats de quelques études réalisées en France et au Québec. Nous examinons ensuite quelques conduites représentatives de celles d'un grand nombre d'élèves de $1^{ère}$ secondaire, dans la résolution de problèmes sur les fractions; ces problèmes faisaient partie d'une épreuve régionale visant à évaluer les connaissances en mathématiques de l'ensemble des élèves des différentes classes de $1^{ère}$ secondaire.

1.1. Les difficultés associées à la comparaison et au positionnement de nombres rationnels sur une droite

Le premier sens de la fraction, privilégié dans l'enseignement primaire, est le sens partie-tout. Le tout considéré est souvent une figure géométrique connue des élèves, du moins perceptivement, depuis les premières années du primaire. Le rectangle et le cercle sont ainsi des objets «emblématiques». Les dimensions des figures sont généralement choisies par l'enseignant pour pouvoir rapidement - par un partage simple - représenter les parties correspondant aux fractions. Lorsqu'on utilise des objets « moins standards », telle une feuille de papier, on suggère le pliage pour déterminer les parties associées aux fractions. Le rôle joué par les dimensions des figures est rarement examiné, sauf en de rares occasions et dans certains manuels. Plus encore, les relations d'ordre entre les fractions sont examinées dans des cas fort simples, à l'aide de représentations de parties de figures géométriques simples ou à l'aide de calculs permettant de comparer les fractions dont les dénominateurs sont différents; à l'occasion seulement, on introduit des procédés permettant de générer des fractions comportant un même dénominateur. Ainsi, si on demande à des élèves de 6[ième] année ou du premier cycle du secondaire de placer en ordre croissant les fractions, 6/7, 7/8, 8/9 (par exemple), la grande majorité des élèves aura recours à au procédé dit "du dénominateur commun" (Lemoyne, 1993). Pourtant, ces élèves pourraient comparer les fractions en utilisant le sens partie – tout, en donnant un sens aux actions de partage, en comparant les parties à ajouter pour constituer l'entier ou le tout (ex : 1/9 est plus petit que 1/8 car ...). Enfin, une grande majorité des élèves ne peut également illustrer à l'aide d'un seul rectangle, diverses fractions dont les dénominateurs ne possèdent pas tous des communs multiples ou des communs diviseurs (par exemple, illustrer les fractions 62/122, 3/5, 10/20, 3/7).

On pourrait multiplier les exemples faisant état des difficultés des élèves sur les fractions et montrer comment les rapports aux fractions contaminent les rapports aux décimaux, aux nombres à virgule, aux réels (voir, entre autres : Charnay et Mante, 1992; Sandoval-Bergeron, 1995). Nous reproduisons deux des exercices proposés à des élèves de 6[e] année provenant de deux collèges français (le degré scolaire de ces élèves correspond à celui des élèves de secondaire 1 du programme d'enseignement québécois); dans ces deux collèges, on compte 12 classes, pour un total de 320 élèves. Ces exercices proviennent du *Centre régional de documentation pédagogique de Nice (CRDP, EvaMath, 1994, p. 20-21).*

« 1[er] exercice :

Dans la liste ci-dessous entoure les écritures qui représentent 14/10.

140 1,4 1 + 4/10 1,04 1,40 0,14

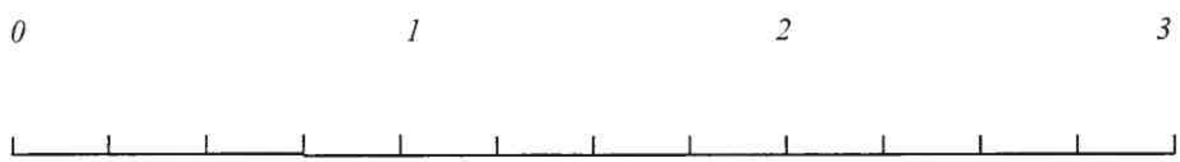
Les pourcentages du tableau ci-après indiquent les erreurs commises par les élèves:

1 + 4/10	Non entouré	66%
1,40	Non entouré	33%
1,4	Non entouré	29%
0,14	Entouré	22%
140	Entouré	16%
1,04	Entouré	4%

2ième exercice.

Sur la droite graduée ci-dessous place les nombres.

½ 1,75 9/4 0,25



9/4	mal ou pas placé	65%
½	mal ou pas placé	49%
1,75	mal ou pas placé	33%
0,25	mal ou pas placé	28%

Dans le 1[er] exercice, comme le soulignent les auteurs de cette évaluation, l'équivalence entre 1 ¼ et 1 + ¼ n'est pas reconnue par une grande majorité d'élèves. On peut sans doute prévoir que des résultats similaires seraient obtenus au Québec, en raison des difficultés des élèves à interpréter les nombres fractionnaires, en reconnaissant dans ces nombres, une composition additive d'entiers et de fractions.

Les résultats au 2[ième] exercice sont tout aussi étonnants. Il est difficile d'imaginer qu'autant d'élèves ne savent positionner correctement des fractions aussi simples que ½ et 9/4, d'autant plus que les graduations de la droite montrent une partition de l'entier en 4 sections. Un plus grand nombre d'élèves réussit toutefois à bien positionner les nombres décimaux; il est possible que les repères numériques 0, 1, 2 et 3 soient mieux associés aux nombres décimaux. Il est également plausible de penser que, dans le cas des fractions, les traits indiquant les partitions soient une source de confusion, les élèves ne sachant pas tenir compte des traits servant de bornes. Il ne s'agit toutefois que d'hypothèses, les informations fournies pas les auteurs du rapport étant insuffisantes.

Ces résultats, comme le soulignent les auteurs, montrent à quel point il n'est pas si évident d'amener les élèves à construire un lien entre *« fraction décimale, division, droite graduée et écriture décimale. »* (p. 21). Nous pourrions citer d'autres résultats tout aussi étonnants. Puisque notre étude concerne les élèves de la première année du secondaire, nous proposons un examen plus détaillé des réponses d'élèves de ce degré à une épreuve régionale récente.

1.2. Les difficultés sur les fractions mises en évidence chez des élèves de la première année du secondaire, lors d'une épreuve régionale récente

Au cours de la première année de l'enseignement secondaire, comme nous l'avons indiqué précédemment, les opérations sur les fractions et la résolution de problèmes comportant des fractions occupent un espace important. Pour donner une meilleure idée des problèmes que pose l'enseignement des fractions, il nous a semblé pertinent d'examiner les réponses des élèves de 1^e^ secondaire à une épreuve régionale visant à évaluer leurs connaissances en mathématiques. Cette épreuve comportait 20 items; dans 12 de ces items, les élèves étaient invités à résoudre des problèmes et à laisser des traces de leurs démarches. Nous proposons d'examiner quelques traces de démarches fréquentes utilisées par les élèves pour résoudre deux problèmes impliquant des fractions.

Problème #1 :

Énoncé : *Martin désire faire un cocktail avec un contenant de 5 litres de jus. Il possède 2 ¾ L de jus d'orange, 1 1/3 L de jus d'ananas et 5/6 L de jus de pamplemousse. Quelle quantité de jus de citron pourra-t-il inclure dans le cocktail?*

Quelques conduites typiques :

- Les conduites de l'élève E1

E1: ***2 ¾ + 1 1/3 + 5/6***

3 l + ¾ + 1/3 + 5/6 = 9/13 + 2 ½ = 5 l

5l - 2 ½ = 9/13

2 ½

L'élève n'arrive pas à traiter convenablement les expressions fractionnaires. Par exemple, pour additionner les fractions, il fait la somme des entiers aux numérateurs et aux dénominateurs. Ce qu'il fait par la suite est difficile à comprendre. Comment interpréter l'addition « 9/13 + 2 1/2» ? Le travail de cet élève est plutôt étonnant. En effet, les nombres rationnels ainsi que les algorithmes entourant les nombres rationnels font partie des objectifs du programme de la première année du secondaire. Au début de cette année scolaire, il y révision et poursuite de l'enseignement de ces notions.

E2: ***2 ¾ + 1 1/3 + 5/6 =***

11/4 + 4/3 + 5/6

$$\frac{33 + 16 + 10}{12} = 59/12 = 4\ 11/12 - 5/5$$

59/12 – 5/5

$$\frac{295 - 60}{60} = 35/60$$

$$\frac{35 \div 5}{60 \div 5} = 47/12 \quad 3\ 11/12$$

Pour calculer la somme des litres de jus déjà versés dans le contenant, cet élève recourt correctement à l'algorithme usuel. Il soustrait par la suite 5 litres au résultat obtenu précédemment, commettant une erreur dans la représentation du nombre 5; 5 devient successivement 5/5 puis 60/60. Il est possible que le fait d'obtenir un nombre inférieur à 5 le satisfasse. Quoiqu'il en soit, la démarche de cet élève est tout aussi surprenante que celle de l'élève précédent.

E3:

2 ¾ + 1 1/3 + 5/6 =

11/4 + 4/3 + 5/6 = 33/12 + 16/12 + 10/12 = 59/12

4 11/12

5 – 4 11/12 = 1 1/12

Mise à part la réponse finale, le raisonnement de l'élève est adéquat. La réponse associée au calcul 5 - 4 11/12, soit 1 11/12, montre un traitement indépendant des entiers et des fractions.

Dans une autre question de l'épreuve, il était demandé aux élèves d'effectuer la chaîne d'opérations suivante:

Problème #2

Résoudre $(2/5)^2$ */ 7/10 – 1/7 =*

Quelques conduites typiques

E4: ***$(2/5)^2$ / 7/10 – 1/7 =***

4/5 / 7/10 – 1/7

40/35 – 1/7 =

40/35 – 5/35 = 35/35

Le résultat est … 35/35… 1 (1 est rayé puis réécrit)

L'élève effectue une erreur dès le départ dans le calcul de *(2/5) se contentant de mettre au carré le nombre au numérateur de la fraction uniquement. Mais* ensuite, il réussit à effectuer correctement les autres opérations.

E5: $(2/5)^2 / 7/10 - 1/7 =$

$4/25 \div 7/10 - 1/7$

$4/25 \times 10/7 = 40/175$

$40/175 - 1/7$

$\dfrac{39 \div 3}{168 \div 3} = 13/56$

La soustraction est effectuée "numérateur avec numérateur" et "dénominateur avec dénominateur". Il s'agit d'une erreur fréquemment relevée dans les études diagnostiques sur les fractions.

E6: $(2/5)^2 / 7/10 - 1/7 =$

$4/10 / 7/10 - 1/7$

$40/70 - 1/7$

$\dfrac{40 - 10}{70 - 70} = \dfrac{30}{70}$

Le traitement de l'exposant $(2/5)^2$ est incorrect . Il est possible que l'élève associe le carré à la multiplication par 2 de chacun des nombres composant la fraction ; dans ce cas précis, le résultat correspond à une fraction équivalente à 2/5. Il effectue bien la division de fractions ; les gestes à mener pour diviser sont possiblement plus simples à retenir, ces gestes étant souvent accompagnés d'un discours du type *tu renverses la fraction pour diviser.* Il ne réduit toutefois pas la fraction alors trouvée et effectue par la suite la soustraction, en appliquant l'algorithme usuel.

Les conduites précédentes aux problèmes du test sont fréquentes; elles montrent de toute évidence des erreurs dans le traitement des fractions et des opérations sur les fractions. Des situations d'enseignement choisies en tenant compte des difficultés des élèves, des organisations variées du travail des élèves en classe (travail individuel, travail en équipe, ...), on pourrait espérer infléchir la situation d'échec des élèves. Or, au fil des ans, les résultats sont souvent désolants. Je ne suis pas le seul enseignant à déplorer cette situation, mais comme mes collègues, je demeure souvent impuissant. L'étude actuelle nous permet de repenser les situations d'enseignement, d'en construire de nouvelles et de me donner les moyens d'en apprécier les bénéfices et les limites.

1.3. Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des fractions

De nombreuses études ont été réalisées sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions. Diverses activités ou situations ont été proposées afin d'amener les élèves à construire, coordonner et intégrer les divers sens de la fraction: rapport, partie-tout, résultat d'une division, opérateur, mesure. Ces études ont surtout été envisagées et éprouvées dans les classes "régulières" d'élèves au primaire.

L'étude de Blouin (2002) auprès d'élèves du secondaire présentant des difficultés d'apprentissage est, du moins au Québec, une première tentative visant a infléchir les rapports aux fractions des élèves de ce degré scolaire. Blouin a ainsi adapté des situations conçues par Nadine et Guy Brousseau (1987) et en particulier, des situations mettant en cause le sens opérateur de la fraction. À notre connaissance, peu d'études ont eu recours à des situations exploitant initialement le sens partie - tout de la fraction, sens abondamment utilisé dans les manuels scolaires du primaire, pour amener les élèves du début secondaire à reconstruire les fractions et les opérations sur les fractions. Tout en reconnaissant l'importance de présenter des situations exploitant divers sens et utilisations de la fraction, il nous semble important de ne pas oblitérer les expériences des élèves du secondaire avec le sens partie - tout, quelles que soient ces expériences, si on souhaite agir sur les connaissances des élèves. En effet, au cours de l'enseignement primaire, ces élèves ont surtout rencontré des situations dans lesquelles il s'agissait d'exprimer par une fraction les relations entre une partie considérée d'un tout et ce tout. Par ailleurs, il faut trouver des situations qui, tout en présentant certaines caractéristiques des situations déjà vues, offrent des défis aux élèves, de tels défis permettant de ne pas arrêter le "temps d'apprentissage" (Mercier, 1992, 1996, 1998).

De tels défis sont possibles si les situations exploitant initialement le sens partie - tout de la fraction vont au-delà de ce sens pour intégrer les divers sens de la fraction. Trouver de telles situations est donc le défi que nous nous sommes donné dans ce travail.

1.4. Les questions à l'origine de notre recherche

Notre recherche vise donc la construction de situations d'enseignement des fractions et leur mise à l'épreuve dans une classe de secondaire I incluant des élèves présentant des difficultés non négligeables en mathématiques. Elle souhaite offrir à ces élèves des occasions de mettre à l'épreuve leurs connaissances antérieures sur les fractions, de les transformer et de construire ainsi des connaissances plus satisfaisantes. Les situations envisagées devront initialement faire appel au sens partie-tout de la fraction, sens abondamment, mais souvent mal exploité, dans l'enseignement primaire. Elles devront également proposer de nouveaux défis provoquant une transformation des rapports des élèves aux situations impliquant le sens partie-tout de la fraction (Brousseau, 1998) et un ré-investissement cognitif de ces élèves.

Comment penser de telles situations? Est-il possible d'offrir une visite renouvelée, et motivante pour ces élèves, de situations impliquant initialement le sens partie-tout de la fraction et débouchant sur des transformations essentielles de leurs rapports aux fractions? Est-il possible d'aménager l'enseignement pour faire place à de telles situations et permettre aussi à ces élèves de rencontrer les exigences du programme de secondaire I? Voilà quelques-unes des questions qui orientent notre recherche.

2. CADRE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, nous exposons le cadre théorique qui oriente nos questions de recherche et nos choix méthodologiques. Pour mieux camper cet objet du savoir à enseigner que constitue la fraction et en montrer l'intérêt, nous procédons d'abord à une analyse des nombres rationnels et de leur construction au fil de l'histoire. Nous présentons ensuite les études didactiques qui ont permis de mieux identifier le champ conceptuel de la notion de fraction. Les problèmes que pose l'enseignement des fractions à des élèves du secondaire qui présentent des difficultés d'apprentissage en mathématiques sont ensuite examinés et des solutions didactiques à ces problèmes sont explorées. Les objectifs de notre recherche sont enfin précisés.

2. 1. Nombres rationnels : définitions, évolution historique et intérêt didactique

La construction des nombres rationnels a une longue histoire. Avant d'entreprendre une analyse épistémologique de ces nombres et de leur construction, il nous a semblé pertinent de montrer quelques définitions courantes des nombres rationnels. Ces définitions permettent déjà d'entrevoir le parcours cognitif qui a mené à ces nombres et la complexité de l'enseignement-apprentissage de ces nombres, notamment de la notion de fraction.

2.1.1. Définitions des nombres rationnels

De Champlain, Mathieu, Patenaude et Tessier (1996, p. N 22-23) proposent la définition suivante des nombres rationnels et accompagnent cette définition de quelques exemples. Voici ce qu'ils écrivent :

Un nombre rationnel est un:

«Nombre obtenu à partir du quotient de a et b où a et b sont des nombres entiers et b est différent de 0.

Exemples :

Les nombres suivants sont des nombres rationnels :

- *½ = 0,5*
- *1/3 = 0,333 333 333 ... =* $0,\overline{3}$
- *- ½ = - 0,5*
- *- 1/3 = - 0,333 333 333 ... =* $-0,\overline{3}$
- *5/1 = 5»*

Cette définition évoque déjà une difficulté non négligeable pour les élèves. En effet, la définition d'un ensemble de nombres fait appel à une opération sur d'autres nombres: «un nombre rationnel est obtenu à partir du quotient de a et b». Et la définition se complique encore davantage lorsqu'on y associe des exemples montrant diverses façons de désigner un même nombre rationnel. Et si on prolongeait ce travail par des définitions de fractions (ex : fraction décimale, fraction continue, fraction impropre, fraction irréductible, fraction périodique, fractions équivalentes, …), de nombre décimal, de nombre fractionnaire, le paysage notionnel serait encore plus complexe.

La définition précédente de nombre rationnel a été produite dans une perspective didactique, à l'intention des enseignants et des élèves du secondaire. À cet effet, il nous semble pertinent de rappeler une autre définition proposée par le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1964), lors de la réforme de l'enseignement connue sous le vocable de «mathématiques modernes»: « *le nombre rationnel est une classe d'équivalence de couples d'entiers naturels, c'est-à-dire que chaque élément (couple, fraction, nombre décimal) d'une classe d'équivalence (nombre rationnel) peut désigner la classe d'équivalence.*» Selon cette définition, il faut comprendre que plusieurs fractions peuvent ainsi désigner un même nombre rationnel (ex: 4/5, 8/10, 12/15,...), qu'un nombre décimal, un pourcentage, un couple peuvent aussi désigner un même nombre rationnel, comme le fait un ensemble de fractions (ex: 0,8, 80%, (4,5), ...).

Comme le rappelle le document produit par le NCTM (1964), certaines propriétés des nombres rationnels sont essentielles à la construction adéquate de ces nombres. Tout nombre rationnel différent de 0 a un inverse multiplicatif (a * b = 1; ex: 5/7 * 7/5 = 1; 7/5 est l'inverse multiplicatif de 5/7). Les applications de cette propriété sont nombreuses. Mentionnons, entre autres, une application qui généralement échappe aux élèves et qui pourtant confère un sens aux opérations effectuées en division de fractions.

L'ensemble des nombres rationnels est dense : entre deux nombres rationnels quelconques, il existe une infinité de nombres rationnels (NCTM, 1964). Cette propriété est rarement étudiée dans l'enseignement actuel, bien qu'elle soit importante dans la différenciation des nombres rationnels et des nombres entiers (Brousseau, 1981; Kieren, 1992, 1994, 1995; Desjardins et Hétu, 1974).

Les définitions précédentes des nombres rationnels et le rappel de leurs propriétés montrent l'étendue des moyens dont on dispose pour représenter un nombre rationnel. Cette puissance, il va sans dire, n'apparaît pas aisément à l'élève du primaire, habitué à désigner un nombre entier par un seul code digital. Cette habitude rend ardue la construction de la notion de fractions équivalentes. Et, l'achèvement d'une telle construction va bien au-delà de l'habileté à calculer des fractions équivalentes. Accepter de concevoir qu'entre deux fractions, si minime que soient les différences entre leurs numérateurs et leurs dénominateurs respectifs (ex : 11349/25865 et 11348/25866), il soit possible d'intercaler une infinité de fractions, suppose donc une compréhension des nombres rationnels, du sens et de la portée des définitions précédentes.

Dans l'enseignement des nombres rationnels, il importe donc d'être ouvert à la complexité de ces nombres pour ne pas banaliser leur enseignement et induire des obstacles didactiques qui peuvent minimiser les chances que l'élève construise des rapports adéquats à cet objet du savoir mathématique. Une analyse épistémologique de ces nombres et de leur construction au fil de l'histoire nous apparaît également fort précieuse pour mieux identifier les voies didactiques actuelles ou possibles.

2.1.2. Quelques jalons sur l'épistémologie des nombres rationnels et de leur construction au fil de l'histoire

La réalité mathématique représentée par les nombres rationnels que nous connaissons aujourd'hui est le fruit d'une longue construction, selon les ouvrages sur l'histoire des mathématiques. Dans son étude sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux, Brousseau (1981) effectue une brève analyse épistémologique des nombres rationnels et des événements qui ont marqué leur construction. L'entrée par les nombres décimaux permet de bien montrer les tensions entre les nombres entiers et les nombres rationnels et fait apparaître toute l'importance du développement du concept de fractions.

Brousseau (1981) rappelle d'abord que les nombres décimaux peuvent être obtenus par extension de l'ensemble Z (nombres entiers) ou encore, par restriction à partir de l'ensemble Q (nombres rationnels). Le fait de concevoir les nombres décimaux comme une extension, un prolongement des nombres entiers, nécessite que les nombres entiers aient toutes les propriétés des nombres rationnels, mais l'inverse n'est pas vrai. Ainsi, certaines propriétés des nombres entiers sont "perdues" dans l'ensemble des nombres rationnels. Ces modifications des propriétés dans le passage de l'ensemble des nombres entiers aux nombres rationnels constituent, selon Brousseau (1981), de véritables obstacles; elles sont la source de grandes difficultés et de résistances au changement d'emploi des nombres. Pour mieux en comprendre l'impact, un bref examen des principales propriétés des nombres entiers et des nombres rationnels s'impose.

Certains problèmes ne peuvent trouver de solutions dans certains ensembles parce que ceux-ci ne sont pas assez riches; par exemple, on ne trouve pas dans l'ensemble des nombres naturels de nombres tel que :

(1) $a \times 3 = 2$ ou (2) $7 + b = 5$

Mais il peut arriver que dans certains domaines, ou certaines applications, ces équations aient toujours des solutions; on peut ainsi partager une longueur en trois parties égales, même si elle mesure 2 mètres (Brousseau, 1981). Comment représenter alors par un nombre la mesure d'une de ces parties? Il faut donc construire une extension (ici des nombres naturels) pour trouver les solutions de ces équations (nombres rationnels pour (1) et nombres entiers pour (2)). Pour mieux comprendre ce travail, il nous semble pertinent de présenter les moments importants de la construction des nombres rationnels au fil de l'histoire.

Des représentations des nombres rationnels par divers symboles de quantités variées, aux représentations des entiers et des fractions unitaires (mathématiciens babylonniens, égyptiens et grecs) et enfin, aux représentations que nous utilisons actuellement, on voit défiler plus de 4000 ans d'histoire (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1985). La naissance d'une nouvelle conception du nombre embrassant à la fois tous les nombres réels positifs peut déjà être repérée au début du X $^{\text{ième}}$ siècle dans l'emploi d'un même mot « ada » (nombre) pour les nombres rationnels et les nombres irrationnels; les nombres rationnels sont alors désignés par l'expression « al-adad al muntiqa » et les nombres irrationnels, par l'expression « al-adad al summa ». Progressivement, les nombres irrationnels deviennent un objet à part entière de l'algèbre et de l'arithmétique; grandeurs géométriques incommensurables et quantités numériques irrationnelles tendent à se confondre.

Fait intéressant, le livre V des Éléments d'Euclide est non plus seulement considéré par les arithméticiens-algébristes comme un livre de géométrie, mais aussi comme un livre traitant des grandeurs en général, c'est-à-dire, des nombres. Dans le livre « Commentaires des difficultés se trouvant dans les introductions du livre d'Euclide », le géomètre Al-Khayyam adopte une démarche qui se ramène à décomposer un rapport A/B en une fraction continue. Rappelons ce qu'est une fraction continue :

Soit x un nombre positif, rationnel ou irrationnel. On peut poser :

«$x = q + \frac{1}{x_1}$, $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$, … $x_{n-1} = q_{n-1} + \frac{1}{x_n}$

$q, q_1, q_2, \ldots$ étant les plus grands entiers contenus dans $x, x_1, x_2, \ldots$ respectivement. Seul le premier entier q peut être nul, les autres sont au moins égaux à 1.

Par substitution, on peut écrire,

$$X = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots \, \cdots \, \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1}}}}$$

qui est appelé une fraction continue.» (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1985, p.104)

Résumons maintenant les étapes importantes dans la construction du décimal et des fractions.

Au 13 siècle avant Jésus-Christ, le décimal sert à mesurer des grandeurs et des quantités. La méthode utilisée pour faire ces mesures s'apparente à celle utilisée par les Egyptiens (2500 avant J. C.) et les Babyloniens (1900 avant J. C.); on relève *« l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire les fractionnements »* (Brousseau, 1981, p.451) Certaines fractions peuvent être désignées et d'autres, seulement approchées. Elles se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels et techniques des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport . Dans l'évolution de la notion de rapport, on peut mettre en évidence les passages suivants :

- Passage à la forme 1/m, m naturel quelconque.
- Puis, à n/m, n strictement inférieur à m.
- Puis, à n/m, n et m quelconques, etc.

C'est Al Huwarizmi (750-850) qui associe *«le calcul des naturels avec celui des rapports « géométriques » et qui introduit l'emploi de la numération de position décimale,* *permet l'émergence du décimal – outil mathématique d'approche, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques; rationnels d'abord, puis radicaux, etc.»* (Brousseau, 1981, p.451). Le décimal devient alors une notion parathématique; il est tout d'abord un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi (952) ne traite pas comme un objet d'étude. Le décimal est montré dans son fonctionnement et apparaît comme une méthode d'exposition ou une curiosité. Plusieurs siècles plus tard, Al Kashi (1427) ré-invente le décimal. Le décimal n'est toujours pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition (propriété et position épistémologique). Le décimal devient une notion mathématique grâce à Steven (1585). Steven introduit les fonctions polynômes (nombres géométriques et multinomies) dans le but d'unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. *« Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables »*. Pour Steven, les *« quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes »* (Brousseau, 1981, p.452) sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux. Newton utilise par la suite les décimaux dans un cadre heuristique dans le but d'expliquer l'approche des fonctions à l'aide des fonctions polynômes.

Devenu un objet mathématique, le décimal devient un objet d'enseignement et son entrée oblige à prendre en compte les diverses représentations des rationnels. Selon Brousseau, l'objectif traditionnel de l'enseignement des décimaux est de rendre les élèves capables de résoudre des problèmes classiques et pratiques, mettant en œuvre les opérations et l'ordre des décimaux. Une maîtrise convenable implique la résolution de problèmes d'applications linéaires décimales (et rationnelles), de problèmes d'échelles, de changement d'unités, de pourcentage, de vitesse, de volume, de surface… L'enseignement traditionnel des fractions partage cet objectif et ce découpage des problèmes. L'entrée des décimaux dans l'enseignement implique la possibilité de faire les calculs usuels avec les décimaux, les fractions; ce raccord des décimaux aux fractions montre bien le travail de la transposition didactique. Nous aurons l'occasion de montrer dans ce chapitre comment ce raccord est souvent problématique pour l'enseignement des fractions.

2.1.3. Intérêt didactique des nombres rationnels, notamment de la fraction

La réalité mathématique représentée par la fraction que nous connaissons aujourd'hui est le fruit d'une longue construction, selon les ouvrages sur l'histoire des mathématiques (Brousseau, 1981). Chez les élèves, la construction de cet objet mathématique s'échelonne aussi sur plusieurs années (Kieren, 1988, 1992, 1994, 1995) et est accompagnée d'un cortège d'erreurs, témoins de la complexité de ce processus. L'intérêt de cet objet est toutefois indiscutable. Comme le souligne Kieren, les nombres rationnels (représentés par les fractions) constituent une partie très riche des mathématiques. Les connaître modifie en profondeur notre conception du nombre et s'avère un tremplin essentiel pour envisager l'ensemble des nombres réels. Leur utilisation permet aussi de mettre en relation le concept de nombre avec plusieurs concepts des mathématiques et leurs applications. Enfin, l'acquisition du concept de nombre rationnel est nécessaire pour l'interprétation juste d'un nombre appréciable de situations impliquant une quantification des relations entre parties et tout ou des comparaisons de rapports.

Dans son ouvrage sur les fractions, Rouche (1998) effectue des analyses fort intéressantes des contextes arithmétiques dans lesquels les fractions interviennent. Nous y reviendrons ultérieurement. Mais, il nous semble également pertinent de résumer ce qu'écrit aussi ce chercheur à propos de l'importance des fractions dans le curriculum de l'enseignement des mathématiques du secondaire. Rouche identifie ainsi trois niches importantes pour les fractions, soit le calcul algébrique, le calcul des probabilités et enfin, le calcul des exposants.

2.1.3.1 calcul algébrique

Une fraction est une division non réalisée. Cette idée, selon Rouche, permet de donner sens à l'écriture des fractions algébriques. Considérant les fractions algébriques suivantes :

$$\frac{1}{1-x}, \qquad \frac{a-b}{a+b}, \qquad \frac{ax+b}{cx+d}$$

il fait d'abord remarquer que la barre de division est d'usage universel en algèbre et que dans plusieurs fractions algébriques, notamment dans les fractions précédentes, on ne peut fréquemment, de manière simple exécuter la division pour obtenir une expression plus commode. Il ajoute aussi que les fractions arithmétiques sont un modèle de fonctionnement pour les fractions algébriques; on factorise ainsi le numérateur et le dénominateur pour simplifier une fraction. On multiplie aussi les fractions algébriques en multipliant les numérateurs et les dénominateurs entre eux. On additionne des fractions algébriques, comme on le fait pour les fractions arithmétiques, en les réduisant au même dénominateur.

Ces propos qui semblent évidents aux professeurs de mathématiques, ne le sont pas, loin s'en faut, aux élèves du secondaire. En effet, plusieurs études en didactique de l'algèbre montrent comment certaines difficultés ou erreurs des élèves semblent résulter d'un absence de rapprochement entre les représentations des écritures des fractions arithmétiques et celles des fractions algébriques (Lemoyne, Conne et Brun, 1993; Kieran, 1996; Slavit, 1999; Vance, 1998). Mais, pour que les fractions arithmétiques puissent servir de référence dans le traitement des fractions algébriques, les premières doivent avoir été construites dans des situations suffisamment riches.

2.1.3.2. calcul des probabilités

L'intérêt des fractions dans le calcul des probabilités n'est plus à démontrer. Cet intérêt est reconnu depuis plusieurs années non seulement pour l'enseignement secondaire, mais également pour l'enseignement primaire.

L'expression d'une probabilité par une fraction est, comme le souligne Rouche (1998), plus évocatrice que ne l'est l'expression de cette même probabilité par un nombre à virgule : dire qu'on a 2 chances sur 6 d'obtenir le 1 ou le 2 lorsqu'on lance un dé est plus évocateur de l'interprétation de l'expérience en pensée que de dire que la probabilité est de 0,333… d'obtenir le 1 ou le 2. L'expression d'une probabilité par une fraction nous permet plus aisément d'associer un rapport entre les cas favorables (numérateur) et les cas possibles (dénominateur).

Mentionnons également que les lois fondamentales des probabilités amènent à calculer avec des fractions. Dans l'exemple précédent, la probabilité 2/6 résulte de la somme des probabilités associées respectivement à l'un et l'autre des événements (1/6 + 1/6). Lorsqu'il s'agit de traiter des événements non indépendants, de calculer les probabilités composées, il est possible d'interpréter la multiplication de fractions. Supposons l'expérience suivante : on a une urne qui contient 6 billes rouges et 4 billes vertes; on puise une première bille, puis une deuxième; la probabilité d'obtenir 2 billes vertes correspond au produit associé à la multiplication des probabilités de chacun des événements, soit 6/10 x 5/9 = 30/90 ou 1/3. On peut dresser un arbre des parcours possibles et relever les parcours favorables.

2.1.3.3. calcul des exposants

Les fractions sont aussi fort utiles dans le calcul d'expressions algébriques comportant des radicaux et des exposants. Rouche déclare ainsi qu'il est plus facile de réaliser le calcul $y^{3/2}$ x $y^{2/3}$ ($y^{3/2 + 2/3}$ ou $y^{13/6}$) que d'exécuter le calcul $(\sqrt{y})^3$ x $(\sqrt[3]{y})^2$. Nous pourrions ajouter aussi que ce que montrent ces écritures est différent, bien que toutes deux désignent le même nombre (Chevallard, 1991) .

Nous pourrions prolonger ce travail pour montrer tout l'intérêt didactique des fractions. Nous avons plutôt choisi d'introduire les réflexions et les exemples mis de l'avant par Rouche. Si l'intérêt des fractions dans l'enseignement des probabilités est reconnu depuis longtemps et souvent utilisé pour convaincre de la nécessité d'effectuer des transformations du curriculum, à notre connaissance, les références aux fractions dans le calcul algébrique ou dans le calcul des exposants sont rarement évoquées dans les discours sur l'intérêt et l'importance des fractions.

2.2. Le champ conceptuel de la notion de fraction

Dès le primaire, les élèves reçoivent un enseignement sur les fractions. Cet enseignement est poursuivi jusqu'à la fin du primaire et au début du secondaire. Par la suite, la notion de fraction sera utilisée comme notion de base, comme un outil dans le cadre de la résolution de problème. L'apprentissage de la notion de fraction s'inscrit donc à l'intérieur d'un long processus. Souvent, ce n'est qu'à l'âge adulte que l'acquisition de la notion de fraction se fait de manière opératoire. Cette lente évolution s'explique par la complexité mathématique des nombres rationnels, par la lenteur du développement des mécanismes cognitifs nécessaires au développement de conceptions adéquates sur ces nombres et enfin, par l'ampleur du champ conceptuel dans lequel ces nombres s'inscrivent. Dans notre étude sur l'enseignement de la notion de fraction à des élèves du secondaire présentant des difficultés d'apprentissage, il nous apparaît indispensable de mieux caractériser ce champ conceptuel.

Selon la théorie des champs conceptuels élaborée par Vergnaud (1991), les concepts se développent en liaison à des situations ou des problèmes que l'apprenant sait résoudre et à d'autres pour lesquelles il cherche une solution. Cette étape représente une pierre angulaire de notre recherche. Diversifier les situations permet d'aborder différents sens d'un concept; cette diversité constitue un terrain propice pour l'abstraction des propriétés essentielles ou encore, des invariants d'un concept.

Le champ conceptuel de la notion de fraction est très vaste et riche. La richesse de la notion de fraction réside dans la relation qu'elle entretient avec d'autres notions mathématiques. Les occasions pour construire les fractions sont très variées et le concept de fraction reflète les espaces de problèmes que ces nombres ont permis de résoudre ou dont ils étaient la solution. Effectuer une typologie de ces problèmes n'est pas évident. Nous choisissons de le faire en nous référant aux divers sens de la notion de fraction (Kieren, 1988 ; Blouin, 2002; Blouin et Lemoyne, 2002). Nous fixons d'abord ces sens et nous y associons ensuite divers contextes d'utilisation pour montrer la portée d'un enseignement attentif à ces sens (Rouche, 1998), dans la perspective d'un enseignement s'adressant à des élèves du secondaire éprouvant des difficultés en mathématiques.

2.2.1. Les divers sens de la fraction

Les divers sens de la fraction sont les suivants: 1) "partie-tout"; 2) "rapport"; 3) "résultat d'une division"; 4) "opérateur"; 5) "mesure". Ces divers sens sont aussi définis dans certains des manuels scolaires récents traitant plus spécifiquement de l'enseignement secondaire.

2.2.1.1. Fraction "partie-tout"

Dans l'interprétation partie-tout, la fraction a/b est utilisée pour quantifier une relation entre un tout et un nombre désigné de parties. Ainsi, dans la fraction a/b, on reconnaît qu'un tout a été partagé en *b* parties égales et qu'on a réuni *a* parties (ex: la fraction 3/100 représente trois parties égales sur 100 parties au total d'une quantité continue (longueur, formes géométriques) ou discrète (collection)). Selon cette interprétation, les deux termes de la fraction (a et b) sont en constante relation, c'est-à-dire qu'ils n'ont de signification que s'ils sont mis en relation comme un couple ordonné (ex: la fraction 3/100 n'a pas la même signification que 3 cents; elle représente trois centièmes, les centièmes étant obtenus en partageant le tout en 100 parties égales; les parties (numérateur) sont reliées au tout (dénominateur)). Cette interprétation de la fraction permet d'aborder l'équivalence des fractions. Deux fractions sont équivalentes si elles représentent la même mesure d'un quantité continue ou le même sous-ensemble d'une collection. Ainsi, 75/100 ou 750/1000 d'un mètre sont des fractions équivalentes.

2.2.1. 2. Fraction rapport.

Une fraction peut aussi être utilisée pour représenter le rapport entre deux quantités. La notion de proportion découle de cette interprétation. Regardons l'exemple suivant:

La classe A compte 20 filles et 25 garçons et la classe B, 8 filles et 10 garçons.

La relation entre le nombre de filles et le nombre de garçons dans la classe A est de 20 : 25, soit 4 filles pour 5 garçons. Dans la classe B, la relation entre le nombre de filles et le nombre de garçons est de 8 : 10, soit 4 filles pour 5 garçons. Si le rapport entre le nombre de filles et de garçons est le même dans les deux classes, nous pouvons parler de proportionnalité; les rapports 20/25 et 8/10 sont équivalents.

Les interprétations « partie-tout" et rapport sont intimement liées par la notion d'équivalence. Lorsqu'on interprète la fraction 3/5 selon le sens "partie-tout", on considère 3 objets sur 5 objets au total ou 3 billes rouges sur 5 billes au total. En revanche, si on interprète la fraction 3/5 selon le sens rapport, on peut se référer à la situation précédente, mais également à d'autres situations et envisager, par exemple, que la collection comporte au total 8 billes et que la fraction 3/5 précise la relation entre les 3 billes rouges et les 5 billes noires que comporte la collection. Interpréter une fraction comme un rapport permet notamment de comparer des fractions qui proviennent d'un tout différent, comme le montre l'exemple présenté au paragraphe précédent. Cette interprétation se reflète également dans le traitement additif des rapports entre diverses quantités. Considérons, par exemple, la situation des classes qui est présentée au paragraphe précédent, que nous transformons ainsi : « La classe A est composée de 20 filles et de 25 garçons; la classe B est composée de 14 filles et de 18 garçons. Quelles fractions rendent compte du rapport dans chacune des classes entre le nombre de filles et le nombre de garçons? Si on réunit les élèves des deux classes, quelle fraction rend alors compte du rapport entre le nombre de filles et le nombre de garçons. » À partir des réponses à la première question, soit 20/25 et 14/18, on peut répondre à la seconde question en composant un nombre formé par l'addition des numérateurs et des dénominateurs : (20 + 14)/(25 + 18); 34/39. Cette addition n'est pas celle utilisée pour additionner des fractions. Il s'agit d'une différence importante entre les interprétations «partie-tout et rapport des fractions qui n'est, à notre connaissance, rarement abordée dans l'enseignement.

2.2.1.3. La fraction "résultat d'une division", la fraction "opérateur" et la fraction "mesure".

Les interprétations des résultats d'une division, opérateur et mesure d'une fraction sont aussi fort utiles pour comprendre le sens d'une fraction. Dans l'interprétation résultat d'une division, la notation fractionnaire est utilisée pour représenter le résultat de a divisé par b, c'est-à-dire, la solution d'une équation linéaire du type bx=a (Le nombre rationnel est alors un quotient de deux entiers naturels).

Dans l'interprétation opérateur, la fraction a/b est considérée comme une fonction. Cette interprétation intervient, entre autres, dans la construction d'image d'une figure géométrique par des homothéties. La fraction est alors envisagée de manière algébrique. Le sens du nombre est affecté; le nombre ne représente plus une quantité ou une comparaison, mais plutôt une transformation. Cette interprétation permet de concevoir la multiplication de fractions comme une composition de fonctions.

Enfin, l'interprétation mesure de la fraction suppose un changement de l'unité de mesure, un changement d'échelle. Par exemple, 3/4 n'est plus considérée comme 3 parties prises sur 4 parties égales au tout, mais exprime une relation multiplicative. Selon cette relation, ce n'est pas 1, mais ¼ qui représente l'unité de mesure et ¾ serait le résultat de l'itération de la fraction ¼ ; la fraction ¾ serait alors ¼ + ¼ + ¼ . Il s'agit d'un outil important pour représenter l'addition répétée. L'addition de 4/7 à 5/7 est l'ajout répété de la fraction 1/7.

2.2.2. La portée d'un enseignement attentif aux divers sens de la fraction et réalisé auprès d'élèves du secondaire

Rappelons d'abord que notre recherche concerne l'enseignement des fractions à des élèves du secondaire qui éprouvent des difficultés en mathématiques. Il ne s'agit donc pas de reprendre les situations d'enseignement que ces élèves ont déjà rencontrées et qui, de toute évidence, ne leur ont pas été profitables, mais plutôt de chercher des situations qu'ils peuvent percevoir originales, qui sont source de défis, en un mot qui leur permettent d'avancer, reconnaissant alors qu'ils possèdent des acquis. Cette gestion du rapport ancien-nouveau est essentielle, comme le soulignent plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques (Mercier, 1992, 1996).

Dans cette quête de situations, l'ouvrage de Rouche (1998) nous est apparu contenir des idées que nous pouvions exploiter. Ce chercheur discute des sens de la fraction en faisant référence à des tâches ou à des types de tâches (Chevallard, 1999).

2.2.2.1. Partager, prélever : sens de ces types de tâches

« *Couper en 2, en 3..., en n part égales est au départ une idée toute simple. Mais en cours de route, on peut s'étonner de la trouver si riche d'aspects divers.* » (Rouche, 1998, p.21).

Couper en parts égales s'appuie, comme son nom l'indique, sur une notion plus primitive qui est l'égalité des grandeurs. Les opérations de comparaison pour vérifier l'égalité varient selon la nature de la grandeur envisagée : superposition (ou encore décomposition en morceaux et recomposition) pour les surfaces, mise côte à côte pour les bâtons, les baguettes et les fils, disposition sur les plateaux d'une balance pour les objets lourds, etc.

De plus, Rouche mentionne que l'opération de couper en *n* parties s'appuie, de façon implicite, sur la somme des grandeurs. En effet, la somme des parties, dont chacune est elle-même une grandeur, doit reconstituer l'objet entier. Avancer ces propos, suggère déjà de faire un pas vers l'avant, car d'un point de vue pratique, deux baguettes sont autre chose qu'une baguette deux fois plus longue et deux demi-cercle autre chose qu'un disque.

Couper un objet (ou une grandeur) en deux parts égales est une opération. Celle-ci a pour résultat l'objet coupé en deux moitiés. Prélever une moitié est une autre opération qui porte l'attention sur une moitié. Les termes demi et moitié renvoient à la partie prélevée, non aux deux parties juxtaposées. Pour faire référence aux deux parties juxtaposées, il faut recourir à nouveau au nombre deux : on parle de deux moitiés. Le nombre 2 suffit. On peut dire ainsi : 2 bouts de carton, 2 bouts de baguettes, 2 bouts de fil. Cependant, rien n'empêche toutefois d'introduire la fraction pour désigner une partie de l'objet considéré, une partie d'un tout; on dira ainsi ½ carton, ½ baguette, ½ kg pour désigner une moitié d'une grandeur et cette moitié est toujours une grandeur.

L'opération composée de couper en deux parts égales et de prélever une part est associée à l'écriture ½ . Cette écriture est souvent appelée fraction opérateur car elle agit (ou opère) sur la grandeur.

L'ensemble de nos dires peut se transposer évidemment au tiers, au quart, au cinquième, etc. Les fractions opérateurs 1/3, ¼, 1/5,... expriment l'opération de couper en 3, 4, 5 parts égales et prélever une part. Une fraction opérateur comme 2/7 exprime l'opération de couper en 7 et de prélever deux parts.

2.2.2.2. partager, prélever : simples tâches ou tâches complexes

Le partage d'objets en parts égales est plus ou moins difficile à réaliser selon la nature des objets et le nombre de parts recherché.

2.2.2.2.1. partager, selon la nature des objets

Comme le mentionne Rouche, il peut sembler simple de partager un objet fait de plasticine; cet objet peut être pesé, prendre diverses formes et les conserver (ex : boule, galette, ...). Il peut apparaître aussi relativement simple de partager certains objets en trois dimensions, s'il s'agit, par exemple, de certains polyèdres réguliers (ex : cube) ou de certains solides de révolution (ex : cylindre), en privilégiant une dimension, par exemple : la longueur d'un crayon, la hauteur d'un édifice... Les bâtonnets sont de bons objets allongés; leur longueur est souvent plus « longue » que leur largeur, ce qui attire l'attention. Les bâtonnets se juxtaposent facilement en longueur bout à bout permettant de les comparer et de les couper. Ce genre d'exercice ne se ferait pas avec une tour.

Pour partager des collections finies constituées d'objets hétéroclites, comme les voitures dans un stationnement ou les élèves dans une classe, on peut recourir à des objets qui les représentent (petits objets identiques et miniatures, jetons ou allumettes par exemple). Nous pouvons alors utiliser des petits objets identiques miniatures tels que des jetons ou des allumettes.

Dans l'enseignement usuel, il est relativement rare que les enseignants aient recours à des objets comme ceux évoqués précédemment. Ces objets sont généralement dessinés. On se sert de segments ou de bandes rectangulaires pour représenter non seulement des longueurs mais aussi des poids, des temps, etc... Le partage de segments de droites et de bandes engendre d'autres segments et d'autres bandes. Les ensembles finis peuvent être représentés sur papier à partir de dessins identiques : objets ou personnages familiers que nous retrouvons dans les manuels.

Comme le rappelle Rouche, partager peut aussi être réalisé non pas sur des objets ou des dessins, mais sur des mesures de ces objets. Ainsi, connaissant la masse d'un objet, on peut partager cette masse en masses identiques; une boule de plasticine qui pèse 1 250g peut être partagée en 5 en effectuant une division du nombre 1 250 par 5, obtenant alors la masse d'une partie, soit 250 g. Un pas d'abstraction supplémentaire est réalisé. À cet effet, Rouche effectue une gradation fort pertinente des tâches de partage:

- On coupe d'abord les objets les plus variés, (selon une grandeur déterminée)
- On coupe ensuite des objets standards (bâtonnets, boules de plasticine) selon la grandeur déterminée de la 1$^{\text{ière}}$ étape.
- On coupe ensuite des segments, des rectangles ou des disques (de tous les types de grandeurs)
- Enfin, on divise des nombres (les mesures des grandeurs diverses)

Dans l'enseignement élémentaire, il faut bien admettre que le recours à des actions de pliage pour partager masque tout ce travail sur les mesures des grandeurs. Ainsi, s'il est relativement simple pour un élève de déterminer la moitié ou le quart d'une feuille de papier de formal légal (soit 215,9 cm par 279,4 cm), en effectuant un pliage, il en est autrement s'il n'est plus autorisé à recourir à un pliage, devant alors effectuer un calcul sur les mesures, en un mot devant recourir à une modélisation numérique de la situation (Chevallard, Bosch et Gascon, 1997).

2.2.2.2.2. partager, selon le nombre de parts recherché

Quelle que soit la nature des objets, le nombre de parts recherché ne peut être dissocié de la tâche de partager. La difficulté de certains partages réside dans le rapport entre le nombre de parts recherché et la mesure de la grandeur de l'objet à partager. Ainsi, partager une nappe qui mesure 17 cm de longueur et 13 cm de largeur en 5 parts égales n'est pas une tâche de même niveau de difficulté que celle qui consisterait à partager une nappe qui mesure 15 cm de longueur et 3 cm de largeur. Dans le second cas, une des mesures étant un multiple du nombre de parts, il y a de forte chance que les élèves arrivent à des partages plus précis que dans le premier cas.

Dans les situations rencontrées par les élèves du primaire, il est rare que ceux-ci soient confrontés à des partages d'objets dont les mesures de grandeur ne soient pas des multiples du nombre de parts. Et, lorsque cela arrive, par exemple partager une feuille de papier standard en 4 partes égales, les élèves sont soit incités à procéder par pliage, soit aidés par des partages déjà matérialisés de l'objet dont les relations avec les partages attendus sont souvent évidentes. Lorsque le partage concerne des ensembles finis d'objets, les relations entre les mesures de ces ensembles et les nombres de parts recherchés sont aussi évidentes.

La simplification des situations de partage dans l'enseignement primaire et, même dans l'enseignement secondaire, n'est pas sans effet sur les rapports des élèves aux fractions. Ainsi, dans une tâche de représentations de fractions à l'aide de figures géométriques, à maintes reprises, nous avons pu observer que les élèves, sauf quelques-uns, commencent par dessiner une figure (un rectangle par exemple), peu importe les fractions données, ne se préoccupant nullement d'examiner les fractions pour choisir les mesures de leurs figures. S'il va de soi que dans le cas du partage d'une figure imposée, de manière à représenter une ou des fractions, il faille trouver des manières de faire pour parvenir à des partages de plus en plus précis, une telle obligation est levée lorsqu'on a le choix des mesures. Mais, comme nous l'avons dit précédemment, il est rare que les figures imposées contraignent à recourir à des techniques plus complexes de partage.

2.2.2.3. partager, repartager ou transformer, pour comparer des grandeurs, des quantités et établir des rapports

Les rapports sont comme le dit Euclide *«une relation, telle ou telle selon la taille entre deux grandeurs de même nature»* (Rouche, 1998). Apprendre à chiffrer des rapports est une activité essentielle. La parenté de la notion de rapport avec celle de similitude en géométrie et celle de proportionnalité est évidente.

Dans son ouvrage sur les fractions, Rouche (1998) montre comment il est souvent nécessaire de partager, de repartager, voire de modifier les mesures des objets, pour les comparer, pour les mettre en rapport. Il présente à cet effet l'algorithme d'Euclide et la méthode des coïncidences. Ces outils conceptuels et techniques nous semblent intéressants pour bien montrer la complexité des fractions.

2.2.2.3.1. L'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide présenté par Rouche (1998) est particulièrement intéressant. Il montre bien comment, pour se prononcer sur le rapport entre les mesures des côtés d'une figure, il est nécessaire de partager, puis de repartager cette figure. Ainsi, pour identifier le rapport entre les mesures des côtés A et B d'un rectangle, l'algorithme d'Euclide nous incite à trouver un carré qui puisse paver ce rectangle, au sens de recouvrir exactement, sans chevauchements ni lacunes. Le côté du carré ainsi trouvé devient une unité de commune mesure pour A et B.

Supposons un rectangle dont les dimensions A et B sont respectivement 4 cm et 6 cm. Dans ce cas, un carré ayant 2 cm de côté permet de paver le rectangle. Le côté de ce carré entre ainsi 2 fois dans A et 3 fois dans B. Le rapport A/B est donc 2/3. Mais, si les dimensions A et B sont quelconques (ex : 11,4 cm et 27,4 cm), trouver un carré qui permette de paver un tel rectangle oblige à des partages et des repartages nombreux. On peut ainsi essayer de paver avec un carré de 11,4 cm de côté. Puisqu'il y a une partie du rectangle non recouverte, il faut répéter le processus sur cette partie non recouverte et ainsi de suite. On imagine sans peine qu'il faudra beaucoup d'étapes avant que le processus s'achève, ce qui peut être fastidieux. On peut aussi imaginer qu'il ne s'achève jamais! Si tel est le cas, il n'y aura pas entre A et B de rapport au sens donné jusqu'à maintenant. Il n'existe pas dans un tel cas de nombres naturels x et y, tel que A soit à B comme x et à y. Mais ceci permet d'ouvrir une porte à des rapports irrationnels, ce dont nous ne nous occupons pas dans cette recherche.

2.2.2.3.2. La méthode des coïncidences

Pour établir un rapport entre deux grandeurs A et B, il peut être pertinent de considérer des grandeurs qui soient multiples des grandeurs initiales. Supposons deux segments de droite A et B. L'idée est de reproduire chacun des segments autant de fois qu'il est nécessaire pour que ces segments soient de même longueur. Supposons un segment A de 4 cm et un segment de longueur B de 5 cm. Il faudra mettre bout à bout 5 copies du segment A et 4 copies du segment B pour que les longueurs coïncident. Il n'est pas toujours aussi facile que dans le cas précédent de trouver le rapport entre les longueurs de 2 segments, d'où l'intérêt de la méthode des coïncidences. Dans plusieurs cas, il faudra produire un nombre important de copies de l'un et l'autre des segments.

2.2.2.3.3. Intérêt de ces outils

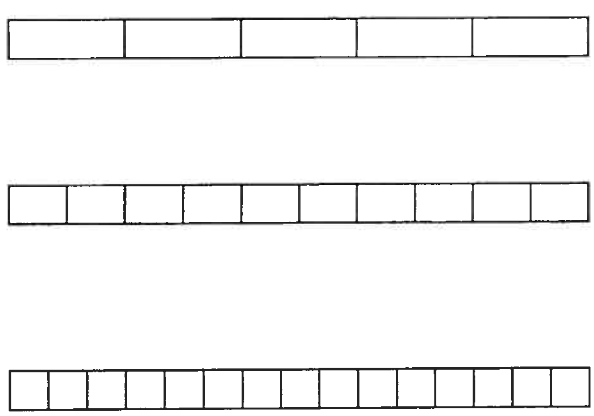
L'algorithme d'Euclide et la méthode des coïncidences permettent de donner sens à des idées fort importantes sur les fractions. Le premier outil met en œuvre l'idée d'une unité qui puisse agir comme commune mesure de deux grandeurs, chacune des mesures de ces grandeurs étant vue comme une mesure composée. Obligeant souvent à effectuer plusieurs partages, il montre qu'il n'est pas toujours aussi évident de décomposer un tout en parties identiques. Le second outil permet de chiffrer un rapport entre des grandeurs, de produire une grandeur dont la mesure soit un multiple commun des mesures de chacune des grandeurs initiales. Si par exemple, une grandeur A est reproduite 6 fois et une grandeur B 4 fois, on peut rendre compte par une écriture des relations entre les mesures obtenues : $6a = c$ et $4b = c$; $6a = 4b$ (a et b correspondant respectivement aux mesures des grandeurs A et B).

2.2.2.4. Se prononcer sur des rapports équivalents, sur des fractions équivalentes

Dans l'enseignement usuel, le recours à des grandeurs continues ou discrètes permet de donner sens aux rapports équivalents, aux fractions équivalentes. Mais souvent, très vite après avoir eu recours à quelques exemples relativement simples, un peu emblématiques, on expose quelques techniques pour produire des rapports équivalents et des fractions équivalentes. Nous pourrions exploiter davantage les idées présentées ci-haut pour mieux montrer comment le partage, le repartage de grandeurs et de quantités, la transformation de grandeurs et de quantités, de manière à établir des rapports sur lesquels il soit plus facile d'opérer pour établir des comparaisons entre grandeurs et quantités. Un tel travail permettrait d'accéder à une représentation plus adéquate des rapports équivalents, de donner sens aux fractions équivalentes et aux techniques usuelles pour décider si des fractions sont équivalentes ou non. Rouche (1998) montre comment la notion de fractions équivalentes prend appui sur les idées précédentes.

Dans le but de comprendre le concept de fraction équivalente, Rouche (1998) représente par un schème simple, les fractions-mesures. La figure suivante illustre cette façon de faire avec des fractions familières aux élèves du primaire.

La figure 1 (a) représente 3/5 d'une mesure et se lit trois cinquièmes.



(a) 3/5

(b) 6/10

(c) 9/15

Figure 1- Représentations de fractions-mesures

On obtient la même grandeur si on utilise une unité deux fois plus petite et qu'on en prend deux fois plus, (figure 1b), où 6 dixièmes égalent 3 cinquièmes. On a,

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10}$$

La figure 1 (c) montre même que :

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$$

Nous dirons que deux fractions sont équivalentes si, une unité de mesure choisie, elles mesurent la même grandeur.

2.2.3. Conclusions

Nous pourrions poursuivre longtemps l'analyse du champ conceptuel de la notion de fraction, des embûches qui marquent la construction de cet objet du savoir, des types de problèmes qui donnent sens aux fractions et qui obligent au dépassement de conceptions initiales, souvent naïves, des fractions. Dans l'exposé précédent, nous avons à peine traité des opérations sur les fractions, nous concentrant davantage sur les sens de la fraction qui constituent un terrain notionnel fortement miné chez les élèves qui présentent des difficultés d'apprentissage. Consolider ce terrain nous apparaît nécessaire à toute construction qui pourrait être menée sur ce terrain. Nous donnons maintenant un aperçu de certaines activités sur les fractions qui ont été présentées aux élèves concernés par notre recherche

2.3. Activités sur les fractions dans les manuels scolaires en usage dans les écoles de notre commission scolaire

Les élèves de secondaire 1 concernés par notre recherche ont reçu un enseignement des fractions depuis plusieurs années. L'enseignant soucieux d'amener ces élèves à construire des représentations adéquates des fractions se doit d'abord de s'informer de l'enseignement reçu par ces élèves lors de leurs études primaires.

Les enseignements primaire et secondaire sont réalisés dans des lieux différents, ce qui affecte la mémoire du système didactique. Bien que les documents didactiques soient accessibles aux enseignants du primaire et du secondaire et que les enseignants du secondaire se constituent une mémoire relative aux rapports à des objets de savoir des élèves qui entrent au secondaire, les enseignants du primaire et du secondaire ne peuvent partager, dans le quotidien des échanges, des informations sur l'enseignement et l'apprentissage, ce qui rend la tâche de l'enseignant du secondaire plus complexe. Comme le souligne, Centeno : *«... un maître qui ne connaît pas les conditions de l'apprentissage antérieur ne peut pas utiliser certaines connexions ou dépendances entre les connaissances»* . (Centeno, 1995, p. 133). Pour pallier ce manque d'information, nous avons demandé aux enseignants du primaire qui ont enseigné aux élèves de notre étude, de nous indiquer les principaux manuels utilisés par ces élèves au 2e cycle du primaire (4e à 6e année).

Rappelons que, selon Chevallard (1991), tout objet est fait d'un nom qui le désigne, de discours, de graphismes, de gestes; un objet émerge de praxèmes. Le rapport à l'objet fraction que les élèves auront construit est ainsi fait de ces praxèmes. Les praxèmes renvoient à des pratiques; ces pratiques renvoient aux tâches que les élèves ont eu à réaliser. L'examen de ces tâches, malgré ces limites, nous éclaire cependant sur le rapport que les élèves qui les ont réalisés ou ont réalisé des tâches similaires ont pu construire. Si on veut bien comprendre comment les élèves du secondaire envisagent les fractions, il est utile d'analyser les activités et les tâches que les manuels leur proposent.

Mais avant de présenter les activités retenues, nous jugeons important de préciser les interprétations des programmes d'enseignement des mathématiques qui ont marqué la conception de la majorité des manuels pour l'enseignement primaire et secondaire.

Bien qu'il existe des différences entre les orientations des programmes québécois et français d'enseignement des mathématiques, les interprétations de ces programmes qui influent sur la conception des manuels nous semblent fort comparables. Nadine et Guy Brousseau (1987) caractérisent ces orientations d'une manière qui nous semble fort pertinente. Selon eux,

1- Chaque leçon doit viser le maximum d'acquisition (le débit) compatible avec les capacités d'apprentissage des élèves.

2- L'apprentissage d'un concept doit donc se faire sous une forme qui utilise au mieux les connaissances antérieures et les modifie le moins possible.

3- Il doit demander le minimum de temps et doit se rentabiliser par un usage ultérieur assez fréquent dans des applications d'intérêt pratique.

Étant donné la complexité de la notion de fraction, la tentation est forte d'élaguer l'enseignement primaire des principales difficultés liées à la construction de cette notion. Il n'est pas étonnant alors que l'enseignement de cette notion occupe une portion importante de l'enseignement en 1e année secondaire. L'enseignement de cette notion ne prend pas pour autant fin au cours de cette année, du moins dans les classes de mathématiques. Si, à partir de la 2e année secondaire, les fractions sont considérées "apprises" par les élèves; elles sont utilisées à l'intérieur de nouvelles pratiques, par exemple, lors de la résolution d'équations algébriques. Cette entrée oblige les enseignants du secondaire à "faire revivre", en quelque sorte, la notion de fraction à chaque fois qu'elle intervient, puisqu'elle n'est plus au programme. Cela ne garantit pas pour autant le transfert des savoirs d'un niveau à l'autre du programme d'enseignement, même lorsque cette notion est au programme. Le passage au secondaire des savoirs construits (mais qui devraient être institués) au primaire pose des problèmes importants, selon les dires des enseignants du secondaire. Pour mieux comprendre ces problèmes, il nous semble important de procéder à un examen de quelques activités types des manuels d'enseignement en usage dans la Commission Scolaire où notre recherche est réalisée. Nous limitons notre étude aux activités faisant intervenir les sens de la fraction, ces activités concernant davantage notre travail auprès des élèves présentant des difficultés d'apprentissage.

2.3.1. Activités pour l'enseignement primaire

Deux manuels sont utilisés pour l'enseignement au 2^e^ cycle du primaire (4^e^, 5^e^ et 6^e^ années, selon la désignation antérieure à 2002); ce sont : Espace mathématique (Huard, 1991) et Mathématique au primaire (Bardier, 1988).

Nous reproduisons quelques activités d'exploration puisées dans les manuels de 4^e^ et de 6e, en les commentant brièvement. De telles activités sont réalisées dans la très grande majorité des classes et jouent une fonction prototypique importante, les attributs prégnants étant bien mis en évidence. Les tâches que les élèves doivent réaliser par la suite prennent appui sur de telles activités.

Activité-1 : Mathématique au primaire -4^e^ année (Bardier, 1988, éd. HRW, p. 36)

Un gâteau rond est présenté aux élèves ; un trait indique un partage de ce gâteau en deux parties égales. Les élèves sont invités à répondre aux questions suivantes : 1) Trouve la fraction représentée par chaque morceau du gâteau d'Anne; 2) Si le gâteau d'Anne était divisé en quatre parties égales, quelle fraction de tout le gâteau : a) deux parties représenteraient-elles?; b) chaque partie représenterait-elle?; c) trois parties représenteraient-elles?; d) quatre parties représenteraient-elles?

Pour répondre correctement, une connaissance relativement élémentaire du sens partie-tout de la fraction est suffisante. Il s'agit donc d'une activité presque emblématique, tant la représentation et les questions sont familières à tous ceux qui ont été élèves.

Activité-2 : Mathématique au primarie - 4^e^ année (Bardier, 1988, éd. HRW, p. 37)

L'objectif pour cette seconde activité est, selon les auteurs du manuel, de *Dégager le sens d'une fraction à partir de différentes expériences.*

Quatre personnages sont présentés et chacun rend compte d'une action différente. Voici les déclarations de chacun des personnages : a) Véronique : *« J'ai mangé la moitié de la pizza»*; b) Jean : *« J'avais 2$ et 1$. Il me reste : 1$. J'ai dépensé la moitié de mon argent»*; c) Stéphane : *«J'avais 12 bonbons, mais j'en ai mangé 6. Il m'en reste la moitié»*; d) Annie : *« J'ai partagé mon orange en 8 quartiers; j'en ai mangé 6. Il m'en reste moins que la moitié à manger»*

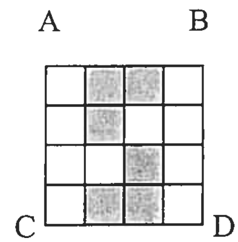
Cette activité peut donner lieu à un travail important sur le sens partie-tout et sur les techniques de partage. En effet, partager une pizza en 2 parties égales et une orange en 8 parties égales n'est pas évident. Mais, généralement (et malheureusement), en 4e année (même souvent en 6e année), on se contentera d'un partage approximatif. Il est possible toutefois que ce partage soit objet de discussion lors des vérifications.

Activité-3 : Espace mathématique 6e année (Huard, 1991, p. 92)

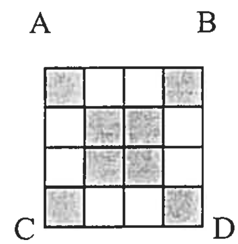
Les situations de représentation ou d'identification de fractions proposées en 6e année (du moins dans le manuel en usage à notre Commission scolaire) font appel à des figures géométriques simples (généralement, des rectangles) et font référence à l'aire. Cette référence établit une continuité avec les activités en géométrie. Le travail d'identification ou de partage demandé aux élèves ne requiert toutefois pas une mise en œuvre de cette connaissance, comme le montre l'activité suivante.

Dans cette activité, il est d'abord dit que « *L'aire du carré ABCD est prise comme unité.* » Puis, la consigne donnée à l'élève est la suivante : « *Exprime à l'aide d'une fraction, l'aire de la partie colorée des figures suivantes.* » La figure 2 suivante présente les diverses représentations.

i)



ii)



iii)

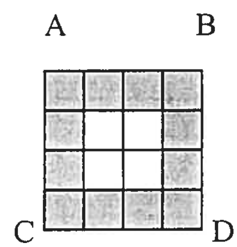


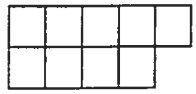
Figure 2- Représentations diverses de fractions d'une aire

Si on fait abstraction de l'ambiguïté de la question, la tâche est élémentaire. En effet, il suffit pour y répondre de compter le nombre de carrés colorés (numérateur) et le nombre de carrés en tout (dénominateur), actions fort familières aux élèves. On pourrait, par ailleurs, demander aux élèves de trouver plus d'une fraction pour exprimer la relation, ou encore, de trouver la fraction la plus simple.

Activité-4 : Espace mathématique 6^{e} année (Huard, 1991, p. 182)

Dans l'activité que nous reproduisons à la figure 3, la référence aux mesures des côtés d'un rectangle et à la mesure d'aire fournit des informations sur le type de solution attendue.

La figure ci-dessous a pour aire 9 unités carrées.

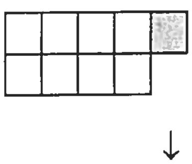


Comment s'y prendre pour construire un rectangle ayant pour largeur 2 unités et de même aire?

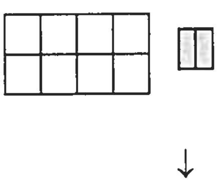
Figure 3- Construction d'un rectangle par partition et réunion de fractions d'une figure

Le respect des 2 contraintes, rectangle et même aire, oblige à partager en deux parties égales la partie coloriée. Il s'agit de contraintes pertinentes pour amener chez les élèves une prise en compte de l'égalité des parties. La figure 4 montre la solution attendue.

1-



2-



3-

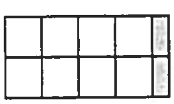


Figure 4- Solution attendue pour l'activité présentée à la figure 3

Cette solution attendue n'exige pas malheureusement que l'élève indique les mesures des côtés du rectangle obtenu après les transformations. Pourtant, la détermination des mesures aurait permis un travail important sur l'expression des mesures.

2.3.2. Activités pour l'enseignement secondaire

Trois manuels sont utilisés en 1e secondaire à notre Commission scolaire : Scénarios 1, Caroussel mathématique 1, Parcours mathématique 1. Nous présentons des activités puisées dans ces différents manuels.

Dans ces manuels, nous retrouvons un premier type d'activités. Les auteurs présentent des définitions en les accompagnant de représentations commentées et de tâches qui permettent de mettre en évidence le sens de certaines des idées importantes que comportent ces définitions. Ces définitions revêtent, selon nous, une fonction importante, soit celle de fixer pour tous les objets du savoir à l'entrée au secondaire.

2.3.2.1. Activités impliquant des définitions

Nous avons retenu quelques activités types impliquant des définitions, puisées des manuels Caroussel mathématique 1 et Parcours mathématique 1.

Activité-1: Caroussel mathématique 1 (Breton, 1993, pp. 176-177)

Dans un premier temps, l'élève se retrouve devant une définition impliquant des mots-clés fort importants lors de l'apprentissage des fractions : «*Un tout peut-être divisé en parties équivalentes. On obtient des fractions lorsqu'on considère un certain nombre de ces parties. ...Les fractions sont des nombres.... Les fractions facilitent le partage... Une fraction fait référence à un tout qui peut être un objet ou un ensemble d'objets*». La fraction se forme donc lorsqu'on prend en compte une des parties d'un tout. L'auteur mentionne «un certain nombre» de parties, ce qui peut porter à confusion pour un élève de secondaire 1; 0 est-il inclus dans cette expression? Enfin, l'expression «*Les fractions sont des nombres*» complète la définition et fait un clin d'œil aux ensembles de nombres que l'on connaît (naturels, entiers, rationnels, irrationnels, réels).

Prolongeant cette définition, diverses représentations fort usuelles sont proposées aux élèves : rectangles, pizzas, collections variées d'objets. Pour chacune de ces représentations, il leur est demandé de se référer à la définition pour identifier les parties prises en considération selon la division du tout en parties équivalentes et de «nommer» par la suite la fraction.

Activité-2: Parcours mathématique 1 (Lidec, p. 32)

Dans cette activité, la mise en situation présentée implique encore une fois, un objet classique, soit une «tablette de chocolat», représentée par une figure géométrique conventionnelle : le rectangle. Cette fois-ci, l'auteur prend pour acquis la représentation de la fraction (¾) et définit le numérateur et le dénominateur de cette fraction : un tout séparé en 4 parties égales (dénominateur) où 3 parties sont «prises» (numérateur). Dans les exercices associés, il s'agit d'identifier numérateur et dénominateur. Nous ne reproduisons pas ces exercices qui sont particulièrement simples et fort conventionnels.

2.3.2.2. Activités de représentation, d'identification de fractions

Les activités de représentation et d'identification de fractions occupent une place importante dans l'enseignement des fractions en 1^{e} secondaire. Les activités que nous présentons maintenant sont puisées du manuel en usage dans notre école, soit Scénarios 1. Ces activités sont présentées aux élèves au cours du premier semestre de l'année scolaire et sont comparables à celles que nous retrouvons dans les autres manuels scolaires. Nous reproduisons quelques activités typiques.

Activité-1 : Scénarios 1 (Thibodeau, 1993, p. 222)

Dans cette activité, l'élève doit illustrer des fractions. Il s'agit, de prime abord, d'une tâche très simple et comparable à celles que l'élève a rencontrées tout au long de ses études primaires. La contrainte de recourir à des carrés identiques pour chacune des fractions oblige cependant l'élève à un choix de mesures qui puissent lui permettre d'effectuer les divers partages en cause et qui suppose un examen des relations entre les dénominateurs des fractions.

Puisque le plus grand dénominateur, soit 16, est un multiple des autres dénominateurs, le travail est cependant fort simplifié.

Il serait possible de bonifier cette activité, en traitant non pas de carrés mais de rectangles, et en demandant à l'élève de trouver diverses mesures de rectangles qui permettraient de produire l'illustration.

Nous reproduisons la consigne pour cette tâche :

« Sur une feuille quadrillée, illustre dans des carrés de mêmes dimensions chacune des fractions ci-dessous.

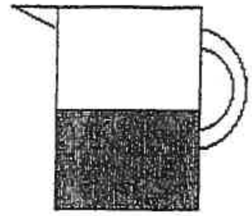
a) 1/16; b) 1/8; c) 1/4; d)1/2; e) 1/1»

Activité-2 : Scénario 1 (Thibodeau, 1993, p. 222)

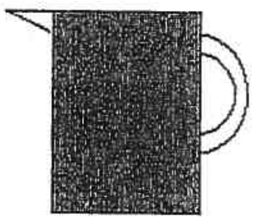
Dans cette activité d'identification des fractions, l'élève est d'abord invité à établir un rapport entre des mesures de contenance de divers pots et des mesures de quantité de liquide dans chacun de ces pots. Ces rapports, du moins dans les tâches a, b et c, sont faciles à établir. En effet, il n'est pas nécessaire que l'élève sache que 125 ml est la moitié de 250 ml, ou encore, que 62,5 ml est la moitié de 125 ml et le quart de 250 ml, pour répondre correctement. Il peut mettre en relation les hauteurs de chacun des liquides dans les pots proposés. Établir une relation entre la hauteur du liquide et la hauteur du pot permet aussi d'identifier sans problème la fraction illustrée dans la tâche d. Mieux exploitée, cette tâche pourrait donner lieu à un travail important sur l'identification de fractions, travail faisant écho aux connaissances sur les fractions mises en évidence par Rouche (1998).

Quelle fraction de chacun des pots représente le contenu liquide?

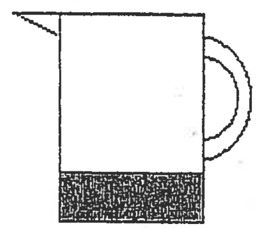
a) 125 ml



b) 250 ml



c) 62,5 ml



d) 62, 5 ml

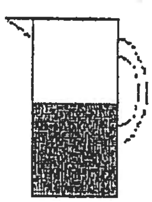
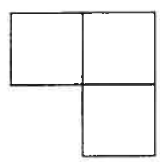


Figure 5- Représentations par des fractions des rapports entre des mesures de contenance de divers pots et des mesures de liquide dans chacun de ces pots

Activité-3: Scénario 1 (Thibodeau, 1993, p. 223)

Dans cette activité, l'élève est invité à compléter une figure, en faisant appel au sens partie-tout de la fraction. La tâche de l'élève est fort simple. On pourrait imaginer une tâche plus intéressante, plus riche, plus pertinente, en ne représentant pas chacune des parties ou, en choisissant des figures obligeant à des partages plus complexes. Nous reproduisons la tâche proposée :

a) Reproduis l'illustration et complète le carré. Quelle fraction du carré n'apparaît pas dans ce dessin?



b) Reproduis l'illustration et complète le rectangle dont tu aperçois les 2/7.

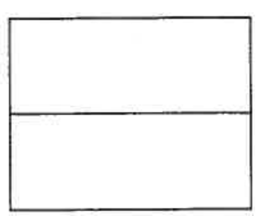
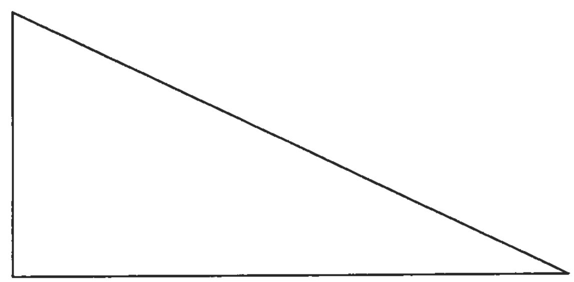


Figure 6- Complétion d'un carré et d'un rectangle, à partir du tracé de figures représentant des fractions de ces figures

Activité-4 : Scénario 1 (Thibodeau, 1993, p. 223)

Dans cette activité similaire à l'activité précédente, la tâche de l'élève est aussi très simple. Certains élèves pourraient par ailleurs éprouver des difficultés à composer la figure en a), en raison de leurs conceptions primitives du losange. La figure 7 reproduit l'activité présentée.

a) Dessine un losange, sachant que le triangle illustré en représente le quart.



b) Les quatre petits carrés représentent les 2/6 d'un rectangle. Dessine ce rectangle.

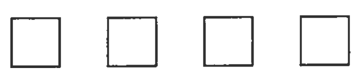


Figure 7- Complétion d'un losange et d'un rectangle, à partir du tracé de figures représentant des fractions de ces figures

2.3.3. Conclusion

Dans cette présentation de quelques activités puisées de certains manuels en usage pour l'enseignement primaire et secondaire, nous avons pu montrer l'indigence des activités, en regard des connaissances qui permettent d'atteindre une compréhension satisfaisante des fractions. Nous avons par ailleurs pu apprécier les possibilités d'exploitation des idées à la base de certaines activités. Exploiter de telles idées en nous appuyant sur les études réalisées par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques nous apparaît essentiel. Il nous semble également important que les élèves de 1[e] secondaire, tous les élèves du secondaire, et à plus forte raison les élèves présentant des difficultés d'apprentissage, puissent construire des connaissances fondamentales sur les sens de la fraction et dépasser leurs connaissances *naïves* du sens partie-tout de la fraction.

2.4. Orientations privilégiées dans notre recherche

L'enseignement des fractions débute au niveau de l'enseignement primaire et se termine, officiellement du moins, à la fin de la première année de l'enseignement secondaire. Ces nombres interviennent par la suite dans de nombreuses situations et à l'intérieur de nombreux domaines des mathématiques enseignées au secondaire. Plusieurs études montrent la complexité de la construction des fractions et de là, les problèmes que soulève son enseignement (Brousseau, 1981, 1987; Chevallard et Jullien, 1989 ; Kieren, 1988, 1992, 1994; Rouche, 1998). Il serait naïf de penser qu'au terme de l'enseignement officiel, les élèves aient achevé la construction des fractions. Il serait tout aussi inapproprié d'interpréter et d'analyser les erreurs dans certaines situations en terme de compréhension ou d'incompréhension. Ces erreurs témoignent d'un rapport à l'objet fraction, rapport qui peut se lire qu'à travers les praxèmes qui constituent l'objet.

Dans la recherche actuelle, nous proposons une reconstruction du sens partie-tout de la fraction qui puisse amener les élèves à dépasser leurs conceptions naïves des fractions et à effectuer un travail important de coordination des divers sens de la fraction. Nous pensons que ces conceptions vivent insidieusement durant de nombreuses années et parasitent les relations des élèves aux nombres rationnels. Notre entrée par le sens partie-tout de la fraction prend donc acte des rapports problématiques de ces élèves aux fractions et des situations qui, selon les manuels examinés, ont pu contribuer au développement de ces rapports, notamment des situations d'illustration, de comparaison, et de composition de fractions, dans lesquelles le sens partie-tout était plus spécialement convié.

Notre analyse des difficultés des élèves, et des activités d'enseignement des fractions qui ont pu marquer les apprentissages et les rapports aux fractions de ces élèves, nous invite à la recherche d'un dispositif qui permettrait d'installer un jeu bénéfique entre connaissances antérieures et connaissances à construire. Selon Brousseau (1998), l'intégration de connaissances nouvelles aux anciennes est généralement laissée entièrement à la charge de l'élève. L'élève doit non seulement construire des connaissances nouvelles, mais aussi réapprendre et réorganiser les anciennes et en oublier ou plutôt en désapprendre une partie. S'il est probable que les élèves n'aient pas une compréhension satisfaisante des premiers sens "quantité", "mesure", "quotient" et "rapport" de la fraction, ils ont par ailleurs développé des schèmes procéduraux de traitement de situations impliquant ces sens. Il serait inutile, voire tout à fait inapproprié, de reprendre l'enseignement de chacun de ces sens. Il apparaît plus prometteur de "plonger" ces élèves dans des contextes plus riches les confrontant à leurs conceptions anciennes.

Notre étude s'appuie sur un nombre important de situations didactiques sur les nombres rationnels et, d'une façon plus particulière, sur les idées de situations proposées par Rouche (1998) et concernant, entre autres, le partage. Notre intention majeure est d'amener les élèves à considérer les mesures des grandeurs à partager, à établir des rapports entre certaines mesures d'un objet, afin d'effectuer des partages de plus en plus précis et de trouver le nombre rationnel (la fraction) qui exprime avec le plus de précision les relations entre parties et tout.

2.5. Objectifs de la recherche

Notre recherche s'inscrit donc dans le champ des études sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Diverses situations visant la construction du sens partie-tout de la fraction et la coordination des différents sens de la fraction seront ainsi construites et réalisées auprès d'élèves de secondaire 1 présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques.

Pour apprécier les effets de ces situations sur l'évolution des connaissances des élèves, nous aurons d'abord recours à des épreuves comportant diverses questions et divers problèmes impliquant les nombres rationnels, plus particulièrement, les fractions. Une première épreuve sera ainsi présentée aux élèves à l'entrée dans la sequence didactique; une seconde épreuve sera alors présentée à ces élèves à la sortie de la sequence didactique. Nous effectuerons ensuite une analyse des conduites des élèves et des interactions enseignants/élèves (enseignant titulaire de la classe et enseignant/chercheur directeur du mémoire) lors de la réalisation des situations de notre séquence didactique. Cette dernière analyse aura ainsi pour objectifs : 1- d'évaluer la pertinence didactique de ces situations, en retenant divers critères: a- l'évolution des connaissances des élèves ; b- la transformation des pratiques des élèves dans des tâches de partage et d'identification de fractions; 2- de préciser les caractéristiques des situations et les interactions enseignants/élèves qui sont déterminantes (ou non) dans l'évolution des connaissances des élèves.

3. MÉTHODOLOGIE

Nous présentons d'abord les élèves qui participent à l'étude. Nous décrivons ensuite les situations qui seront présentées dans la classe de ces élèves. Nous donnons enfin un bref aperçu du traitement des données de notre recherche.

3.1. Présentation des élèves

Les élèves qui participent à cette étude se retrouvent dans une des classes de mathématiques dont le titulaire est le responsable de cette étude. Ces élèves font partie d'un groupe de sixième année (appoint 1,1) intégré au secondaire dans le cours *mathématique 600*. Ce cours touche trois grands domaines des mathématiques: Nombres, Géométrie et Statistiques. Nous faisons un bref survol de l'enseignement. Nous parlons ensuite davantage des élèves de ce groupe.

3.1.1. Les mathématiques enseignées

Les nombres naturels, entiers et rationnels font partie du premier domaine des mathématiques enseignées. Dans le manuel en usage, soit Scénarios 1 (Thibodeau, 1993), on retrouve des définitions de ces nombres et des applications variées portant, entre autres, sur la loi des signes, les 4 opérations sur les nombres rationnels (fractions a/b), les multiples d'un nombre et les facteurs.

L'enseignement de la géométrie porte sur les transformations, les polygones (périmètre, aire), les quadrilatères et leur classification, les triangles et leur classification, les droites, les angles et la construction de figures géométriques. Les notions d'aire et de périmètre sont enseignées en référence à un schéma-figure (triangle, rectangle, carré,...) supporté par une formule d'application. L'ensemble des constructions et/ou transformations sont réalisées avec du matériel usuel de géométrie (compas, rapporteur d'angle).

L'enseignement de la statistique est très élémentaire. Il est demandé aux élèves de construire et d'interpréter un diagramme à bandes (à ligne brisée et circulaire), de comprendre et d'appliquer la notion de moyenne et d'écart de température dans des contextes simples. Enfin, l'élève est invité à élaborer et effectuer un sondage.

3.1.2. Les élèves du groupe

La classe envisagée comptait 19 élèves. Toutefois, pour diverses raisons extra-pédagogiques, seulement 11 de ces élèves ont participé à la recherche. Il s'agit d'élèves ayant un an de retard, donc d'élèves n'ayant pas encore une connaissance suffisante des mathématiques de 6^{e} année primaire. Deux de ces élèves présentent des "Difficulté graves d'apprentissage" et un autre élève présente un "Trouble de comportement", selon des fiches signalétiques constituées au moment de leur entrée au secondaire.

Tous ces élèves ont bien sûr bénéficié d'un enseignement des nombres rationnels, au second cycle du primaire. Diverses tâches de représentation de fractions (exploitant surtout le sens partie-tout de la fraction), de résolution de problèmes impliquant des fractions ou des nombres décimaux, d'addition et de soustraction de fractions et de nombres décimaux et enfin, quelques tâches d'introduction de la multiplication de fractions leur ont été présentées. Selon les observations que nous avons pu recueillir au fil des ans, les élèves faisant partie de groupes classes similaires à celui envisagé pour notre recherche, éprouvent des difficultés importantes de compréhension des divers sens de la fraction et des opérations sur les fractions. Ils ont surtout un rapport "technique" ou "instrumental" aux fractions et les erreurs d'interprétation des opérations sur les fractions sont fréquentes. Enfin, ces élèves peuvent difficilement envisager qu'entre 0 et 1, il y ait une infinité de fractions. Imputer ces difficultés à l'enseignement reçu au primaire ne résout pas le problème. Il importe également de reconnaître que ces élèves ont construit des connaissances sur les fractions, leur rapport à ces objets et les erreurs commises en témoignent. Les situations que nous avons construites essaient de composer avec cette histoire didactique.

3.2. Description des instruments de recherche

Chez les élèves concernées par notre étude, les fractions ont surtout été incarnées dans des situations faisant intervenir le sens partie-tout. Il nous est apparu important de ne pas contrarier ce premier enseignement. Il est apparu tout aussi essentiel de penser des tâches et des problèmes plus significatifs et plus exigeants que ceux qu'ils ont connus. Comment amener une reconstruction de la fraction en exploitant le sens partie-tout dans des tâches obligeant à un travail mathématique plus important que celui réalisé antérieurement et offrant de meilleures garanties de construire divers sens de la fraction et des opérations sur les fractions ? Peut-on ainsi "incarner les fractions" à l'intérieur de tâches de représentation et d'identification de fractions faisant intervenir des figures quelconques (tâches usuelles), mais en effectuant un choix judicieux des mesures de ces figures facilitant une coordination originale de divers sens de la fraction. Tel est le défi que nous avons essayé de relever.

Avant de décrire les situations d'enseignement que nous avons conçues, il nous a semblé important de prendre le pouls des connaissances des élèves sur les nombres rationnels, principalement sur les fractions. Nous présentons d'abord l'épreuve que nous avons utilisée.

3.2.1. Examen des connaissances des élèves à l'entrée dans les situations d'enseignement des fractions

L'épreuve que nous avons fait passer aux élèves à l'entrée dans les situations d'enseignement des fractions est celle utilisée dans notre école depuis quelques années. Elle a été construite par les enseignants et reflète leurs connaissances des problèmes des élèves sur les nombres rationnels. L'objectif principal est d'être mieux informé sur les rapports des élèves à ces nombres, afin d'intervenir avec plus de pertinence lors des situations d'enseignement. Voici les principales questions :

1- Si tu avais à expliquer à un camarade de classe ce qu'est 1/3, que lui dirais-tu?

2- Combien y a-t-il de minutes dans ¼ d'heure? Dans 1/3 d'heure? Dans 1/5 d'heure?

3- Que vaut ½ + 1/3 ?

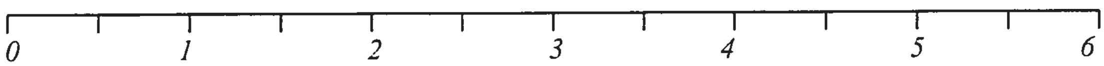
4- Peux-tu citer deux nombres :

compris entre : 1,8 et 2,1?

compris entre ½ et ¾ ?

5- Voici une droite graduée. Peux-tu placer les nombres suivants sur cette droite?

4,2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8

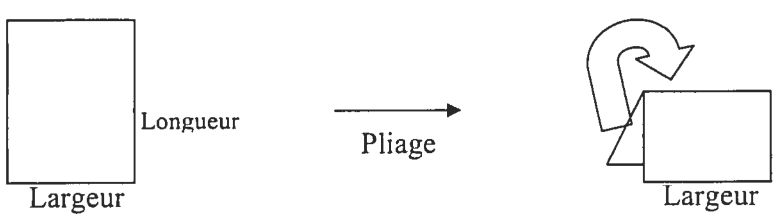


3.2.2. Description des situations d'enseignement

Dans la description qui suit, pour chacune des situations d'enseignement, nous indiquons les connaissances en jeu, les modalités de gestion des tâches et les conduites possibles des élèves.

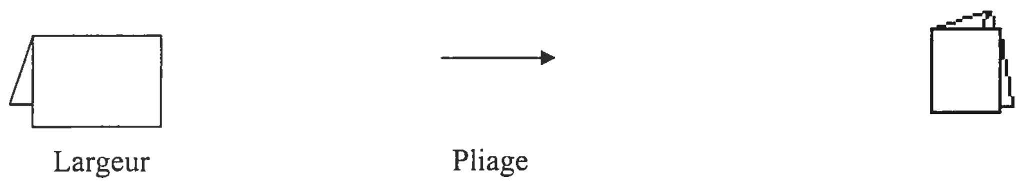
3.2.2.1. Première situation : introduction à l'aide de tâches familières aux élèves

La **première situation** comporte des tâches familières aux élèves. Dans la tâche d'introduction (1ère tâche), il est demandé aux élèves d'effectuer un premier pliage d'une feuille de format A11 (8 pouces ½ par 11 pouces) selon le sens de la largeur.



Ce travail fait, l'enseignant leur demande de reprendre leur feuille, de la déplier, puis d'inscrire ce que cette représentation évoque (2e tâche). Si les élèves ne pensent pas à inscrire une fraction sur chacune des parties ainsi formées, l'enseignant peut leur demander explicitement en utilisant la formulation usuelle : «Quelle fraction pouvez-vous inscrire sur chacune des parties ? Quelle partie du tout est ainsi produite par le fractionnement de la feuille engendré par le pliage que vous avez fait ?»

Par la suite, l'enseignant demande aux élèves de reprendre la feuille pliée selon le fractionnement obtenu précédemment et de répéter le même procédé de pliage : «Pliez encore une fois, selon le sens de la longueur votre feuille déjà pliée en deux. Quelle fraction pouvez-vous inscrire sur chacune des parties ? »



Les élèves ne devraient pas avoir de problèmes à effectuer les pliages, de même qu'à identifier les fractions ainsi représentées et à justifier leurs réponses. Il est fort possible toutefois que les pliages soient faits de manière expéditive et que les parties ainsi obtenues représentent, de manière fort approximative, les fractions inscrites. L'enseignant pourra ainsi choisir des productions variées et demander aux élèves de choisir, parmi ces productions, celles qui leur semblent les plus précises, qui montrent bien que les parties correspondent à ¼ ou à 1/8 du tout.

3.2.2.2. Situations principales d'investigation plus systématique du sens partie-tout

Deux situations d'investigation plus systématique du sens partie-tout de la fraction sont construites. Chacune d'elles comporte plusieurs tâches qui obligent les élèves à effectuer diverses compositions de parties d'un tout, à établir des relations entre les parties d'un tout. Dans chacune des tâches, les élèves doivent recourir aux fractions pour rendre compte des relations entre parties et touts.

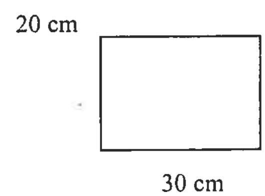
3.2.2.2.1. première situation principale

Nous présentons d'abord le matériel utilisé, puis chacune des tâches en décrivant brièvement les conduites possibles des élèves.

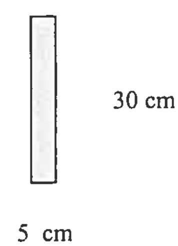
Matériel utilisé

Le matériel utilisé pour cette situation comporte diverses bandes rectangulaires de carton dont les mesures sont respectivement : A- 20 cm de longueur par 30 cm de largeur; B- 5 cm (longueur) par 30 cm (largeur); C- 5 cm (longueur) par 10 cm (largeur).

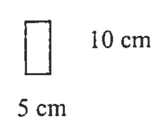
Bande A :



Bande B :



Bande C :



La bande A constitue le tout et les bandes B et C, des parties de ce tout. Les mesures des côtés de la bande A sont des nombres pairs dont les diviseurs sont :

Diviseurs de 30: {1, 2, 3, 5, 10, 15, 30}
Diviseurs de 20: {1, 2, 4, 5, 10, 20}

Ces mesures comportent des diviseurs communs (2, 5, 10) et des diviseurs spécifiques (20: 4 ; 30: 3, 6, 15). Plusieurs des diviseurs spécifiques d'une des mesures numériques, sont soit des multiples de diviseurs de l'autre mesure, soit des facteurs de diviseurs de l'autre mesure. Ainsi, les diviseurs spécifiques de 30 (6 et 15) sont des multiples de "2 et 5", facteurs de 20. Ces choix de mesures accroissent les possibilités de représentations des fractions. Ainsi, les fractions ½, 1/5 et 1/10 peuvent être "réalisées" en partageant l'une ou l'autre des mesures; en revanche, les représentations des fractions ¼, 1/15, 1/20 et 1/30 sont plus facilement réalisées par un choix judicieux de l'une des mesures. Enfin, les relations entre les mesures, soit 20/30 (2/3) et 30/20 (3/2) peuvent être exploitées pour trouver des rapports moins évidents entre une partie et un tout.

Tâche -1 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

L'enseignant présente le carton A (30 cm par 20 cm) et rapproche ce carton de la bande orange (carton B : 5 cm par 30 cm). Il invite chacun des élèves à comparer les deux cartons. Les relations identifiées par chacun sont ensuite examinées. Les consignes initiales sont les suivantes:

"Comment pourriez-vous comparer le deuxième carton B (bande orange) au premier carton A (tout)?";

"Que pouvez-vous dire de cette bande orange?";

"Que pouvez-vous dire sur ses dimensions?" (ces deux dernières consignes sont empruntées à Nadine et Guy Brousseau, 1987).

Le but poursuivi dans cette tâche est d'abord de susciter, chez les élèves, une prise de conscience des impressions différentes qu'ils peuvent avoir sur les relations entre la bande orange et le tout. Cette prise de conscience devrait rendre pertinente la nécessité de trouver un moyen plus sûr pour comparer les cartons et pour ainsi établir une relation plus juste entre les deux cartons.

Étant donné la possibilité de calculer les mesures des cartons, les comparaisons effectuées par les élèves mettront probablement en cause des relations de types "beaucoup plus grand, plus grand, plus gros, n fois plus grand, n fois plus gros, à peu près n fois plus grand ou plus gros". Parmi les conduites attendues des élèves, il est fort probable que les relations très qualitatives de types "plus grand, plus gros" dominent. Les interventions de l'expérimentateur devraient amener les élèves à quantifier les relations et à comparer certaines quantifications. Voici quelques interventions prévues; ces interventions reprennent le vocabulaire des élèves.

«Vous avez dit que le tout est plus grand et plus gros que la bande orange. Pourriez-vous être plus précis?»

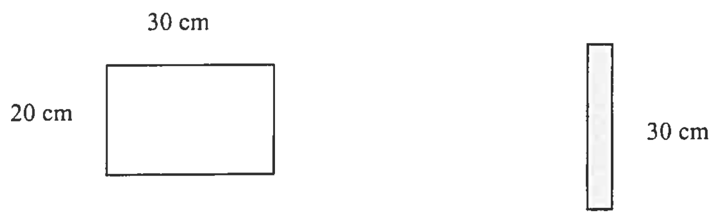
«L'élève E1 dit que le tout est plus gros, l'élève E2 dit qu'il est quatre fois plus gros. Etes-vous tous d'accord avec cela? Qui pensez-vous exprime le mieux les relations entre les bandes?»

«L'élève E3 dit que la bande A tout est deux fois plus grosse que la bande B. Trouvez-vous qu'elle est deux fois plus grosse?»

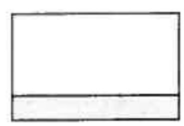
Tâche -2 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

Au terme de la tâche 1, les élèves ont pu discuter de la pertinence des relations exprimant les différences. Ils se sont probablement entendus sur une expression de la forme " le tout est environ quatre fois plus grand que la bande orange". La deuxième tâche les invite à trouver un moyen pour établir une relation plus juste entre les cartons. La consigne donnée est la suivante: "Comment pourrait-on savoir combien de fois le tout est plus gros que la bande orange?" Les élèves sont invités, à tour de rôle, à donner leur opinion.

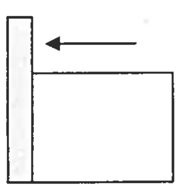
Les élèves vont probablement relever le fait qu'ils ne connaissent pas aucune mesure. Ils vont réclamer un outil pour mesurer (une règle). Dans le but de trouver la relation partie-tout entre les deux cartons, les élèves devront comparer les mesures trouvées. Il est fort possible que les élèves établissent la relation partie-tout entre les largeurs des bandes (5 cm pour la bande orange et 20 cm pour le tout) et qu'ils superposent les bandes par la suite.



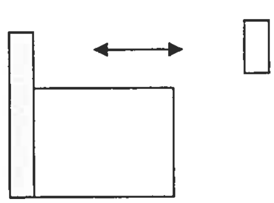
En superposant la bande orange dans le sens de la largeur, ils obtiendront la configuration suivante



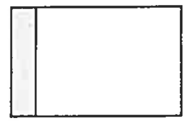
Réaliser cette tâche ne pose aucun problème. Le travail se fait de manière simple et l'élève peut utiliser une action de recouvrement qui lui est familière. L'enseignant poursuit alors en disant «Et si on mettait la bande orange dans l'autre sens?»



Certains élèves diront : «Que fait-on avec la partie *qui dépasse*?»



L'enseignant leur demande alors : «Sans la partie *qui dépasse*, quelle relation partie-tout peut-on observer?»



Répondre à cette question oblige à un re-partage. Or, pour que les élèves puissent effectuer un double partage, ils doivent construire une unité de mesure appropriée. Pour faciliter cette construction, l'enseignant distribue à chacun le carton C, dont les mesures correspondent à celles de la partie *qui dépasse*, se fiant au contrat didactique pour que les élèves transforment cet artéfact en instrument (Rabardel, 1995). En apposant successivement le carton C sur la partie du carton B incluses dans le carton A (B1), puis sur la partie *qui dépasse* du carton B (B2), ils remarqueront que la partie C est contenue 2 fois dans la partie B1 et une fois dans la partie B2. Mais, pour établir la relation entre la partie B1 et la partie A, il leur faudra établir déterminer la relation entre la partie C et la partie A, etc. Certains y parviendront et parmi eux, certains pourront conclure sur la relation entre la partie B1 et la partie A, d'autres non. Quelle que soit l'issue, l'enseignant se contentera d'entendre les élèves, certains pouvant alors y trouver profit. Intervenir à ce moment serait prendre le risque d'institutionnaliser une façon de faire étrangère à plusieurs élèves.

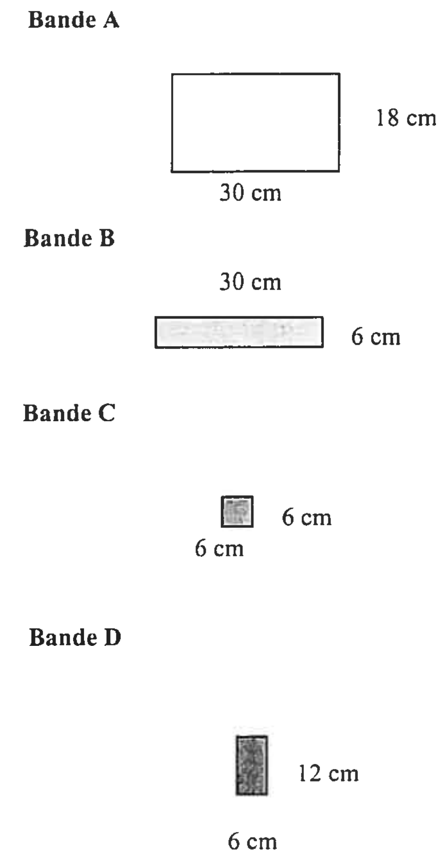
3.2.2.2.2. seconde situation principale

Dans cette seconde situation, nous poursuivons le travail amorcé au cours de la première situation. Si les tâches sont similaires à celles présentées au cours de la première situation, elles sont toutefois plus complexes, cette complexité résultant en grande partie des mesures des bandes utilisées.

Matériel utilisé:

Le matériel utilisé pour cette situation comporte diverses bandes rectangulaires de carton dont les mesures sont respectivement : A- 30 cm de longueur par 18 cm de largeur;

B- 30 cm (longueur) par 6 cm (largeur); C- 6 cm (longueur) par 6 cm (largeur) ; D- 12 cm (longueur) par 6 cm (largeur).



La bande A constitue le tout et les bandes B, C et D des parties de ce tout. Les mesures des côtés de la bande A sont des nombres pairs dont les diviseurs sont :

Diviseurs de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
Diviseurs de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

Ces mesures comportent des diviseurs communs (1, 2, 3, 6) et des diviseurs spécifiques (30: 5, 10, 15, 30 ; 18: 9, 18). Aucun des diviseurs spécifiques de 18 (9, 18) n'est un facteur des diviseurs spécifiques de 30. Ainsi, si les fractions ½, 1/3 et 1/6 peuvent être "réalisées" en partageant l'une ou l'autre des mesures, en revanche, les représentations des fractions 1/5, 1/9, 1/10, 1/15, 1/18, 1/30 sont plus facilement réalisées par un choix judicieux de l'une des mesures.

Tâche -1 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

La présentation de la première tâche commence par un rappel du travail effectué lors des tâches de la première situation :

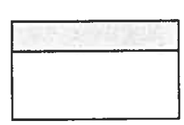
"Nous avons appris, lors des tâches précédentes, à représenter par une fraction les relations entre parties et touts. Nous poursuivons ce travail en utilisant d'autres cartons. Que pouvez-vous dire sur la bande A (le tout) et la bande B (partie verte fluo)?"

Il est possible que plusieurs élèves suggèrent que B est 1/3 de A. L'enseignant leur demande alors comment ils peuvent être sûrs de leur réponse. Les élèves vont possiblement répondre qu'ils n'ont qu'à superposer les bandes ; d'autres pourraient aussi suggérer de reporter la bande B sur la bande A un certain nombre de fois. L'enseignant reçoit ces réponses et propose une complexification du travail en ajoutant :

"Supposons que vous ne puissiez déplacer les bandes, que feriez-vous ?"

Certains élèves vont possiblement suggérer de mesurer les bandes. Si tel n'est pas le cas, l'enseignant peut demander aux élèves s'ils pensent que cela pourrait les aider d'avoir une règle, puis il précise la question :

« La bande verte fluo par rapport au tout dans le sens de la largeur, que vaut-elle? »



Certains élèves, se référant au travail fait lors de la seconde tâche de la première situation vont possiblement établir les relations entre les mesures et conclure que la bande B est 1/3 de la bande A. D'autres élèves vont probablement se contenter de reporter visuellement la bande B sur la bande A. L'enseignant se contente de recevoir ces réponses.

Tâche -2 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

À la tâche 2, les relations entre les bandes A et B sont examinées à nouveau. Mais, cette fois, les recouvrements de la bande A par la bande B sont effectuées selon le sens de la longueur, comme le montrent les figures suivantes :

Figure 1

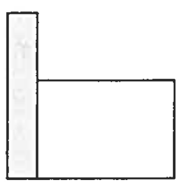
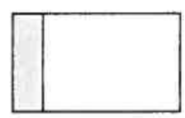


Figure 2



La question usuelle est reprise en tenant compte de cette orientation :

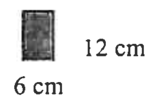
«Quelle est la relation partie-tout entre la bande B (verte fluo) et la bande A (le tout), si on fait abstraction de la partie de la bande B qui dépasse?»

Répondre à cette question est simple. Il suffit de reporter la partie de la bande verte incluse dans la bande A un certain nombre de fois de manière à recouvrir la bande A. Les élèves devraient ainsi obtenir facilement 1/5 (6 cm vs 30 cm).

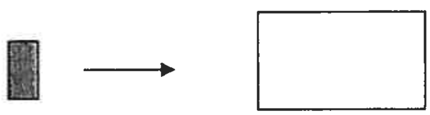
Tâche -3 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

La tâche 3 prolonge la tâche précédente. Il s'agit cette fois de déterminer la relation entre la partie de la bande B qui dépasse de la bande A et cette dernière bande. L'enseignant présente alors les bandes D et A ainsi :

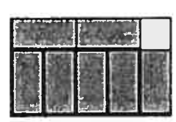
Bande D



Bande A



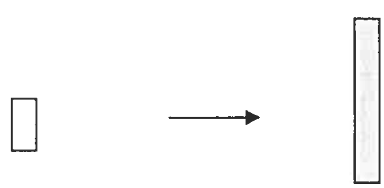
Établir cette relation n'est pas chose facile pour les élèves. Si la mesure de la longueur de la bande D peut être facilement mise en relation avec l'une ou l'autre des mesures de la bande S, il n'en est pas ainsi pour la mesure de la largeur de la bande D (12 cm); cette dernière mesure ne correspond pas à un nombre qui serait un facteur de l'un ou l'autre des nombres associés aux mesures de la bande A. Entrevoyant cette difficulté, l'enseignant met à la disposition de l'élève plusieurs bandes D. Il est ainsi attendu que l'élève puisse s'en emparer pour essayer de recouvrir la bande A à l'aide de plusieurs bandes D. Mais, faisant cela, il se retrouvera avec une partie de la bande A qu'il lui sera impossible de recouvrir en utilisant toute une bande D.



Même si à l'œil, il lui semble que la partie non recouverte correspond à la moitié de la bande D, comment pourra-t-il exprimer le rapport entre la bande D et la bande A, sachant qu'il faut 7 bandes D et la moitié d'une autre bande D pour recouvrir la bande A ? L'élève pourrait également envisager de mettre en rapport les aires des bandes D et A (soit respectivement, 72 cm^2 et 560 cm^2), mais comment alors exprimer à l'aide d'une fraction réduite un tel rapport ? Cette dernière conduite, selon nos expériences auprès de ces élèves, a peu de chance de se produire. Pour cette raison, il est prévu qu'une fois recueillies les solutions des élèves, l'enseignant offre aux élèves la petite bande carrée C suivante (côté : 6 cm), en leur demandant de voir si cette bande peut leur être utile :

Il a de fortes chances que la majorité des élèves interprètent le geste de l'enseignant comme une invitation à utiliser cette dernière bande pour recouvrir la bande A, puis la bande D. Ils pourront peut-être conclure ainsi : la bande D est 2/15 de la bande A.

Ce travail fait, l'enseignant demande aux élèves d'exprimer à l'aide de fractions les relations entre les diverses bandes prises 2 à 2 : B : D ; D : B ; B : C ; C : D ; C : A ; etc. D'autres bandes pourraient également être ajoutées, par exemple, une bande jaune mesurant 5 cm par 10 cm, une bande orange mesurant 5 cm par 30 cm et, une bande bleue mesurant 15 cm par 10 cm; les questions précédentes seraient reprises, mais la contrainte suivante serait ajoutée : vous ne pouvez déplacer les bandes. L'enseignant pourrait aussi rappeler aux élèves qu'ils disposent par ailleurs d'une règle pour mesurer.



3.2.2.2.3. troisième situation principale

Au cours de la dernière tâche de la seconde situation, les élèves ont trouvé diverses façons de déterminer les relations partie-tout entre différentes bandes devenant tour à tour parties et touts. La troisième situation permet de pousser plus loin leur compréhension du sens partie-tout de la fraction et de renouveler leurs connaissances sur les fractions équivalentes.

Tâche -1 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

Dans une première tâche, les élèves sont d'abord invités à représenter un rectangle sur une feuille de papier quadrillée (format A11 ; feuille usuelle mesurant approximativement 8 pouces 1/2 par 11 pouces), rectangles dont les dimensions sont définies ainsi : 4 cases par 8 cases. Cette tâche complétée, il leur est demandé de répondre aux questions suivantes :

a) « Pouvez-vous représenter la ½ des cases sur votre rectangle? »

b) « Pouvez-vous représenter le ¼ des cases sur votre rectangle »

c) « Pouvez-vous représenter le 5/20 des cases sur votre rectangle »

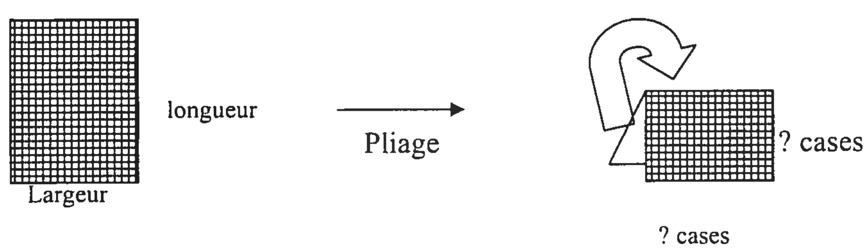
d) « Comment pourriez-vous décrire vos solutions? »

Répondre aux questions a) et b) ne devrait pas poser problème. Pour répondre à la question c), les élèves qui essaient de partager le rectangle en 20 parties feront face à un problème. Certains remarqueront probablement que les fractions ¼ et 5/20 représente le même nombre rationnel et pour eux, le problème sera réglé. D'autres pourront considérer d'abord de prendre 20 cases et de choisir 5 cases ; ils pourront difficilement poursuivre ainsi avec les cases restantes et demanderont l'aide de l'enseignant. Il est prévu que ce dernier réponde à leur demande par des questions du type : « Qu'est-ce qui vous embête dans cette tâche? Vous avez choisi d'encercler 5 cases sur les 20 premières cases de votre rectangle. Quelle fraction des 20 cases représentent les 5 cases encerclées ? Si les 5 cases encerclées forment une bande, comme celles que nous avons vues avant et, si les 20 cases encerclées forment la bande-tout, pouvez-vous répondre à la question précédente ? Que remarquez-vous ?...» Quelle que soit l'issue de ces interventions, l'enseignant n'intervient plus.

Cette tâche se termine par l'enregistrement par l'enseignant des réponses de l'ensemble des élèves aux questions formulées. Les élèves qui ne sont pas convaincus de la validité de leurs réponses sont également invités à les exposer et à indiquer ce qui les a embêté. L'enseignant peut leur demander de rappeler les questions qu'il leur a adressées et leur demander en quoi ces questions leur ont ou non aidés. Les autres élèves peuvent alors intervenir pour interpréter ces questions ; ces interprétations pouvant rendre service aux élèves ayant rencontré des difficultés (et aux autres élèves également), l'enseignant demande à tous les élèves de réviser leurs réponses.

Tâche -2 : présentation, déroulement, conduites attendues et interventions

La tâche 2 représente un saut dans une complexité plus élevée que celle rencontrée jusqu'à maintenant. Les mesures des rectangles choisies sont non conventionnelles et obligent à envisager divers partages et repartages des rectangles. Le matériel utilisé est toujours une feuille quadrillée mesurant environ 8 pouces ½ par 11 pouces, mais cette fois-ci, les élèves doivent utiliser toute la feuille. Les élèves sont d'abord invités à plier la feuille quadrillée dans le sens de la largeur. Par la suite, ils doivent compter les nombres de cases déterminant la largeur et la longueur de la demie feuille. Enfin, ils doivent trouver la partie représentant 1/5 de cette demie feuille.



Il est fort probable que les élèves mentionnent que «le cinquième de (par exemple 34 cases) sur la largeur «ne fonctionne pas», «qu'on ne peut diviser 34 par 5», «que 5 n'est pas un diviseur des mesures de la feuille en cases (par exemple, 34 et 21 cases)». L'enseignant pourrait alors leur demander avec quelles mesures du tout seraient-ils à l'aise, mesures voisines des mesures de la demie feuille. Plusieurs élèves pourraient répondre 30 cases par 20 cases. L'enseignant pourrait poursuivre en leur demandant justement de montrer ce que représente 1/5 de ce tout amputé d'une partie ? Les élèves devraient répondre facilement, l'obstacle des dimensions étant levé. L'enseignant pourrait demander aux élèves de penser à une façon de continuer. Il est probable que peu, voire aucun élève, ne puisse poursuivre, les mesures du rectangle à considérer étant 4 cases par 1 case, invoquant les raisons données initialement. Que faire alors ? Comment intervenir sans donner la réponse ?

Une première intervention, nous apparaissant la moins problématique en regard d'un éventuel effet Topaze, effet produit lorsque l'enseignant, face aux conduites des élèves qui ne sont pas celles attendues, finit par guider pas à pas les conduites des élèves (Brousseau, 1998), pourrait être la suivante : reprendre une bande A mesurant 30 cm par 20 cm, une bande B mesurant 20 cm par 20 cm et une bande C mesurant 10 cm par 20 cm et demander aux élèves de trouver 1/5 de chacune de ces bandes, puis de comparer les parties obtenues. L'idée est d'amener les élèves à constater que *la somme des parties obtenues avec les bandes B et C est de même mesure que la partie obtenue avec la bande A* et à construire le théorème-en-acte (Vergnaud, 1991) suivant : pour déterminer la partie d'un tout correspond à a/b du tout, on peut trouver a/b d'une partie de ce tout, puis a/b d'une autre partie de ce tout, puis a/b d'une autre partie correspondant à la partie non considérée du tout; la réunion des parties ainsi obtenues correspond alors à a/b du tout initial non partitionné. Mais, même si les élèves parviennent à construire un tel théorème-en-acte, l'application d'un tel théorème à la tâche initiale ne va pas de soi et peut demander plusieurs partages et repartages du tout ou de parties de ce tout. Les élèves peuvent parvenir à des représentations de plus en plus précises, ce qui nous semble un pas important dans la compréhension du sens partie-tout et des autres sens de la fraction.

3.2.3. Examen des connaissances des élèves à la sortie des situations d'enseignement des fractions

Dans notre institution, les enseignants de mathématiques ont coutume de préparer ensemble les évaluations des connaissances des élèves, à la fin d'un module d'enseignement. Ces évaluations comportent souvent des problèmes ou exercices qui permettent d'examiner comment les élèves peuvent mettre à profit les connaissances acquises pour répondre à des questions plus avancées que celles traitées dans l'enseignement. Il nous est apparu important de retenir cette pratique. Nous présentons l'épreuve qui a été soumise aux élèves de 1^{e} secondaire.

1- Dites que représentent les éléments des écritures des fractions suivantes.

a) Soit la fraction: $\frac{a}{b}$

a:______________________________

b:______________________________

b) Soit la fraction: $\frac{4}{7}$ (autre réponse qu'en a))

4:______________________________

____

7:______________________________

____

2- Linda veut utiliser le potager suivant en occupant : a) 1/3 de l'espace pour les tomates ; b) ½ de l'espace pour les petits oignons blancs ; c) 1/12 de l'espace pour les

concombres. Pouvez-vous partager ce potager pour elle ? Les cases sont toutes de dimensions congrues.

3- Placez en ordre croissant les fractions suivantes sur le segment de droite dessiné

Suggestion : Transformer ces fractions, si nécessaire.

4/2 7/2 14/4 ½ ¾ 13/8 1/5 1/7

4- Utilisez l'un des symboles suivants : < , > ou = .

a) 1/7 ______ 3/21

b) 4/9 ______ 2/18

c) 3/4 ______ 4/3

d) 2 et 1/6 ______ 21/6

5- Encerclez la plus grande fraction.

31/42 3/7 ½ 5/6 1/100

- Dites pourquoi la fraction que vous avez encerclée est la plus grande?

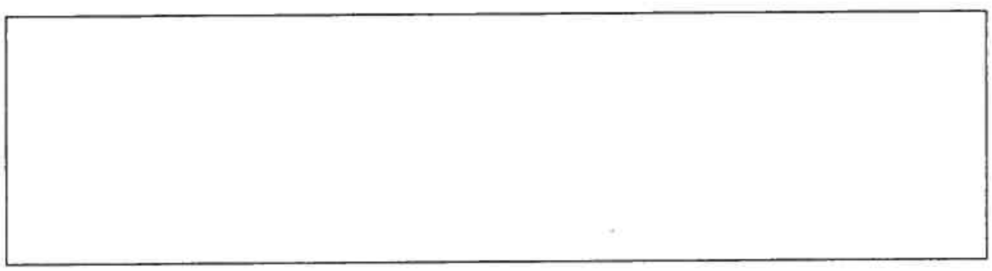
6- Écrivez ces nombres en utilisant des expressions fractionnaires.

a) 15/2 : _________ b) 19/2 : _________

c) 150/2 : _________ c) 71/8 : _________

7- Soit la figure suivante.

a) Déterminez la partie représentant le 1/12 de cette figure. (les mesures sont les suivantes :a) longueur : 16 cm ; b) largeur : 5 cm)



b) Si l'on sectionne la partie que vous avez obtenue (en a)) en deux parties égales, quelle fraction de la figure obtiendrez-vous ?

8- Problèmes à résoudre:

8.1. Dans la classe de Borromée, le 1/5 des élèves préfèrent le violon, les 4/10 la flûte à bec et 21% le « ruine-babine ». Les autres élèves préfèrent jouer du « triangle ». Quelle fraction des élèves préfèrent jouer du « triangle » ?

8.2. Martinez a réalisé la construction d'un hôtel en 150 jours. 1/5 de ce temps a été consacré à l'installation de la charpente et 1/15 au travail de finition. Combien de jours ont été consacrés à l'installation de la charpente ?

9- Écrivez ces nombres fractionnaires sous la forme de fractions simplifiées

a) 15 et ½ : _________ b) 4 et 5/5 : _________

c) 12 et 5/13 : _________ d) 2 et ¾ : _________

e) 2 : _________ f) 7 et 11/14 : _________

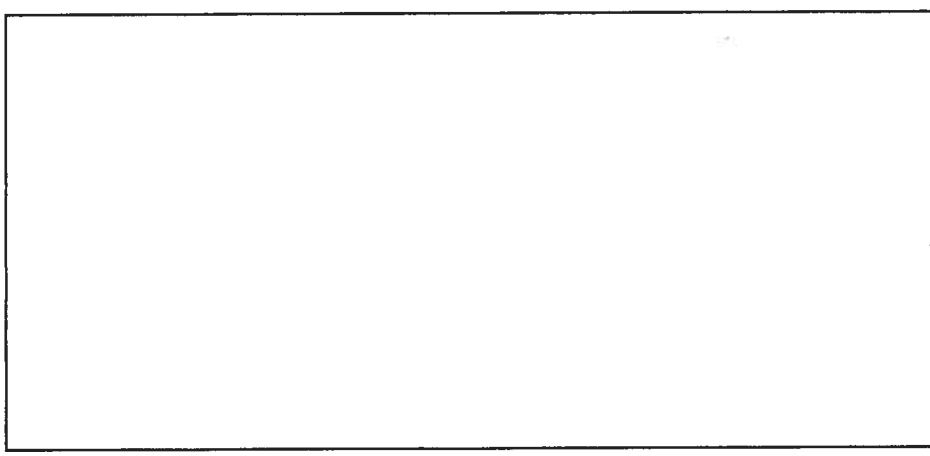
g) 200 et 7/8 : _________ h) 402 et 1/2 : _________

i) ¾ : _________ j) 9/1 et ¾ : _________

10. Soit la figure suivante.

10.1. Identifiez les mesures de ces côtés en <u>arrondissant</u> au cm près. (les mesures de ce rectangle, mesures inconnues de l'élève, sont les suivantes : longueur : 13 cm ; largeur : 6 cm.)

___________ cm



_____ cm

10.2. Comment procéderiez-vous pour partager le tout en 5 parties égales ?

11. Problème à résoudre.

Six autobus de 54 places chacun ont été réservés en vue du spectacle de Céline Dion à Toronto.

À 30 minutes du départ, 2 autobus sont déjà remplis à pleine capacité, le 3$^{\text{ième}}$ au 2/3 et le 4$^{\text{ième}}$ au 5/6.

On compte 3 bancs vides dans le 5$^{\text{ième}}$ et le 1/9 des bancs sont inoccupés dans le dernier autobus. Combien de personnes ne sont pas arrivées?

3.4. Déroulement de l'étude et analyse des données

L'expérience s'est étalée sur une période de 2 mois, en raison de 2h30 par semaine. Les données de la recherche ont ainsi été constituées: a) des traces écrites des démarches et réponses des élèves aux deux épreuves d'évaluation ; b) des traces écrites des démarches et réponses des élèves lors de la réalisation des tâches que comportaient les situations d'enseignement ; c) des interactions élèves/enseignant lors de la réalisation des tâches que comportaient les situations d'enseignement.

L'analyse de l'ensemble de ces données, en fonction des objectifs définis précédemment, a été effectuée par le chercheur-étudiant en maîtrise et par le chercheur-directeur du mémoire, ce regard croisé sur les données nous semblant nécessaire en raison de la nature et des enjeux de la présente recherche. L'analyse avait pour objectifs : 1- d'évaluer la pertinence didactique des situations, en retenant divers critères: a- l'évolution des connaissances des élèves ; b- la transformation des pratiques des élèves dans des tâches de partage et d'identification de fractions ; 2- de préciser les caractéristiques des situations et les interactions enseignants/élèves qui sont déterminantes (ou non) dans l'évolution des connaissances des élèves ; 3- d'identifier certaines situations ou certaines interactions enseignant/élèves problématiques et de proposer des transformations éventuelles de ces situations et des interventions de l'enseignant.

4. ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans notre recherche, le dispositif didactique que nous avons mis à l'essai auprès des élèves de 1e secondaire présentant des difficultés d'apprentissage, visaient l'évolution des connaissances de ces élèves sur les fractions. Pour apprécier les effets de ce dispositif didactique sur l'évolution des connaissances des élèves, nous examinons d'abord les conduites des élèves aux épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique. Nous procédons ensuite à un examen des conduites de ces élèves et des interactions enseignants/élèves (enseignant titulaire de la classe et enseignant/chercheur directeur du mémoire) lors de la réalisation des situations de la séquence didactique. Nous effectuons enfin une analyse critique des apports et des limites des situations d'enseignement que nous avons réalisées.

4.1. Connaissances et habiletés des élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique

Au chapitre précédent, nous avons présenté les épreuves utilisées à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique. Comme nous l'avons mentionné, pour cerner ces connaissances, nous avons eu recours aux épreuves utilisées par notre institution scolaire. Examinons les performances des élèves de notre classe à chacune de ces épreuves. Mentionnons, toutefois, que des raisons indépendantes de notre volonté, seulement 7 des 11 élèves impliqués dans notre projet ont pu effectuer les épreuves d'évaluation des connaissances à l'entrée et à la sortie de la séquence.

4.1.1. Les connaissances et les habiletés à l'entrée de la séquence didactique

Afin de faciliter la lecture, nous reproduisons dans l'encadré ci-après les questions de l'épreuve présentée à l'entrée de la séquence. Il importe de noter que cette épreuve a été présentée individuellement à chacun des élèves.

Questions de l'épreuve
1- Si tu avais à expliquer à un camarade de classe ce qu'est 1/3, que lui dirais-tu? Puis, $\frac{3}{4}$? Puis, 2,3?
2- Combien y a-t-il de minutes dans $\frac{1}{4}$ d'heure? Dans 1/3 d'heure? Dans 1/5 d'heure?
3- Que vaut $\frac{1}{2}$ + 1/3 ?
4- Peux-tu citer deux nombres : a) compris entre : 1,8 et 2,1? ; b) compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$?
5- Voici une droite graduée. Peux-tu placer les nombres suivants sur cette droite? 4,2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8


Comme on peut le voir, les questions portaient sur: la représentation d'une fraction et d'un nombre décimal, sur la conversion d'une fraction d'heure en minutes, sur l'addition de fractions irréductibles comportant des dénominateurs différents, sur l'intercalation de nombres rationnels entre deux fractions et deux nombres décimaux, sur le placement de fractions et de nombres décimaux sur un segment de droite. Il s'agissait de questions usuelles adressées aux élèves de 1$^{\text{ère}}$ secondaire.

Le tableau 1 présente en abrégé les réponses de chacun des élèves aux questions. L'évaluation de ces réponses est effectuée selon les coutumes de l'institution scolaire, par l'attribution des codes suivants : a) R : réponse juste; b) E : réponse et démarche incorrectes; c) R/2 : démarche pertinente, mais réponse incorrecte; d) E?: réponse ambiguë; d) N : aucune réponse. Les élèves sont identifiés par des codes composés de la lettre E et d'un chiffre.

Comme le montrent les réponses à la **question 1**, 5 élèves sur 7 privilégient le sens partie-tout pour expliquer les fractions et y associent des actions de partage réalisées sur un objet familier, tel la tarte. Les réponses de l'élève E2 sont assez étonnantes, compte tenu du fait qu'il s'agissait de fractions ordinaires maintes fois utilisées depuis plusieurs années; cet élève effectue une distinction entre une fraction et un tout, la fraction étant ce qui manque au tout. Les réponses de l'élève E3 sont ambiguës; cet élève montre qu'il sait trouver une fraction équivalente pour chacune des fractions, tout en faisant référence à un contexte inapproprié (arrondissement).

Aucun élève ne sait traiter adéquatement le nombre 2,3 présenté à la question 1. Les réponses des élèves font référence à des contextes variées : mesures de longueurs (relations entre les mesures); monnaies; objets usuels (ex : pizza). Le recours aux objets usuels conduit à des interprétations inattendues du nombre, notamment de la valeur de position du chiffre 3.

Tableau 1

Sommaire des performances de chacun des élèves à chacune des questions de l'épreuve présentée à l'entrée de la séquence didactique

Questions		Élèves						
		E1	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**
No 1	1/3	R Tu prends 1 tarte et tu la sépares en 3 parties.	E C'est toute la classe mais il manque encore quelques élèves.	E? Un tiers d'une fraction et d'un nombre qu'on peut arrondir à 1/3 = 2/6	R 1 morceau de tarte de 3 morceaux.	R Tu as mangé 1 morceau sur 3.	R Une tarte. Tu sépares en trois et tu prends 1 pointe.	R 1/3; C'est le nombre de partie qu'il manque; 1 partie sur 3 a été supprimée.
	3/4	R Même chose, tu divises en 4 et tu en colories 3.	E C'est pas tout à fait la moitié, c'est un peu moins.	E? Trois quarts on peut arrondir lui aussi ; ¾ = 6/8	R Trois quarts d'un morceau divisé en quatre.	R Tu as mangé 3 morceau x sur quatre.	R Tu sépares en 4 morceaux et tu en prends 3 pour toi.	R ¾; 3 parties sur 4 qui ont été supprimées.
	2,3	E Tu peux faire un tableau, mais quand il n'a pas de cm, hm, ou km, tu regardes où est placé la virgule.	E Moitié de la classe.	E Deux, trois, un nombre numérique et qu'on peux l'arrondir. 2,3 cm = 230 mm.	E Deux dollars et trois cents.	E 2 tartes au complet, mais que l'autre tarte est mangée que 3 mor-ceaux.	E Pizza séparée en 5. Tu en prends 2,3 pour toi.	E 2,3 est nombre que tu peux placer dans un Système Interna-tional

Tableau 1 (suite)

		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
No2	¼ heure	R 15 minutes	R 15 minutes	E 100 minutes	N	E 45 minutes	R 15 minutes	R 15 minutes
	1/3 heure	R 20 minutes	E 30 minutes	E 90 minutes	N	E 15 minutes	E 11 minutes	E 10 minutes
	1/5 heure	R 12 minutes	E 0 minute	E 110 minutes	N	E 30 minutes	E 20 minutes	E 20 minutes
No3	½ + 1/3	E 2/6	E 2/6	E 2/6	E 2/6	E 2/6	E 2/3	E 2/6
No4	entre 1,8 et 2,1	R/2 1,9	R/2 2	E 0,1 02,03	R 1,9 et 2,0	R 1,9 et 2,0	R/2 1,9	R 1,9 ou 2
	entre ½ et 3/4	R 2/3	R 2/3	E 2/2 = 1/1	E 1 et 2/1/2 2 et 1/2	E 1/3 et 2/2	R 2/3	R 2/3
No5	Droite	E	E	E	E	E	E	E

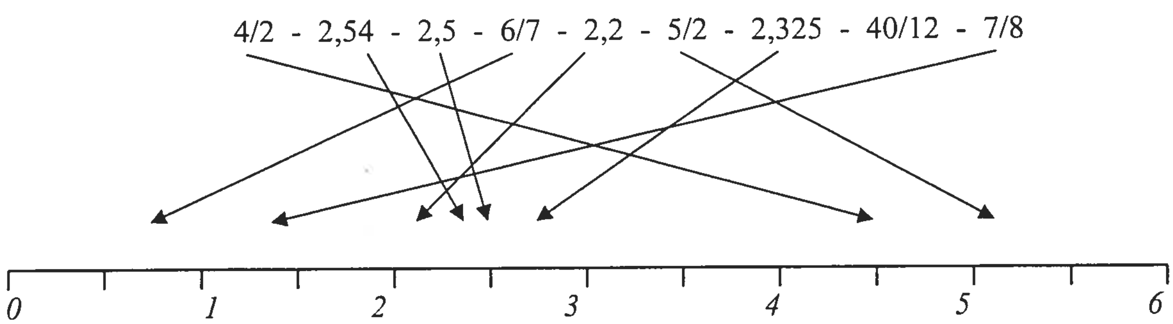
La **question 2** donne lieu à 8 réponses justes sur un total de 21 réponses ; les élèves ne laissent aussi aucune trace de leur démarche. Comme on pouvait s'y attendre, trouver le nombre de minutes associé à ¼ d'heure est plus familier aux élèves que de trouver le nombre de minutes associé aux autres fractions d'heure. Il n'est pas sûr non plus que les bonnes réponses proviennent de la compréhension de ce qu'est le quart d'une heure, mais plutôt d'une simple connaissance de l'équivalence ¼ - 15 minutes. Il est quand même étonnant de constater un échec aussi important à cette question. Pour interpréter cet échec, nous avons examiné à nouveau les manuels utilisés au primaire avec ces élèves; nous avons ainsi constaté que les fractions sont peu associées aux mesures de temps dans ces manuels. N'empêche qu'il s'agit d'un concept couramment employé au quotidien.

Les réponses à la **question 3** indiquent qu'aucun élève ne sait additionner correctement les fractions ½ et 1/3. Plus encore, 6 élèves sur 7 semblent recourir à un procédé hybride intégrant des actions associées à l'addition et à la multiplication de fractions, soient l'ajout des numérateurs et la multiplication des dénominateurs.

Six élèves sur 7 ont trouvé au moins un nombre compris entre 1,8 et 2,1 (première partie de la **question 4**). Ce résultat ne surprend guère, étant donné qu'ils peuvent d'abord faire abstraction de la virgule, traiter ensuite les nombres comme des entiers (18 et 21), trouver aisément un nombre entre ces bornes, puis y insérer la virgule. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de fractions ordinaires, même de fractions aussi familières que ½ et ¾, comme le montrent les résultats moins positifs des élèves à la seconde partie de la question 4. Il nous est difficile d'interpréter les réponses des élèves E1, E2, E5, E7, ceux-ci n'ayant laissé aucune trace de leur démarche. On peut faire l'hypothèse que ces élèves ont composé la fraction cherchée en ajoutant 1 au numérateur de la fraction ½ et 1 au dénominateur de cette fraction.

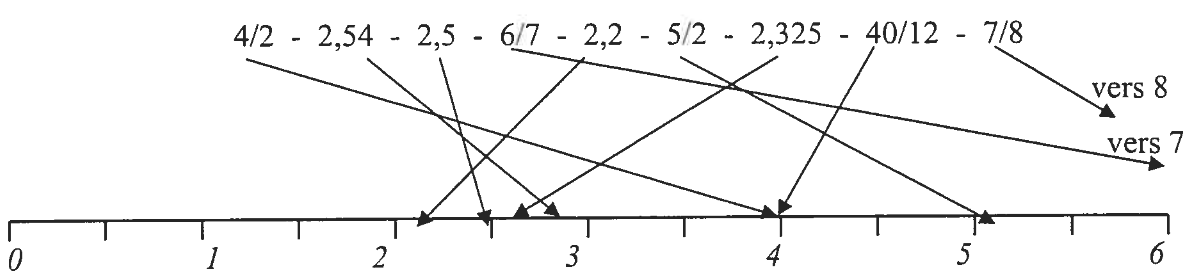
Les rapports problématiques des élèves aux nombres rationnels apparaissent d'une façon tout aussi, sinon plus évidente, dans leurs réponses à la **question 5,** dans laquelle il leur était demandé de situer des fractions et des nombres décimaux sur une droite graduée. En effet, aucun élève n'est parvenu à placer correctement ces nombres. Nous reproduisons et commentons brièvement les réponses de chacun des élèves.

Élève E1



2,54 se retrouve avant 2,5. Toutefois, 6/7 est relativement bien positionné.

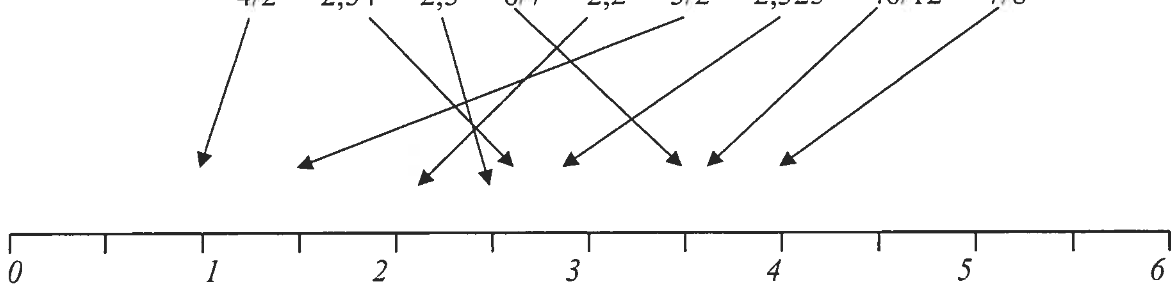
Élève E2



2,325 se retrouve après 2,5.

Élève E3

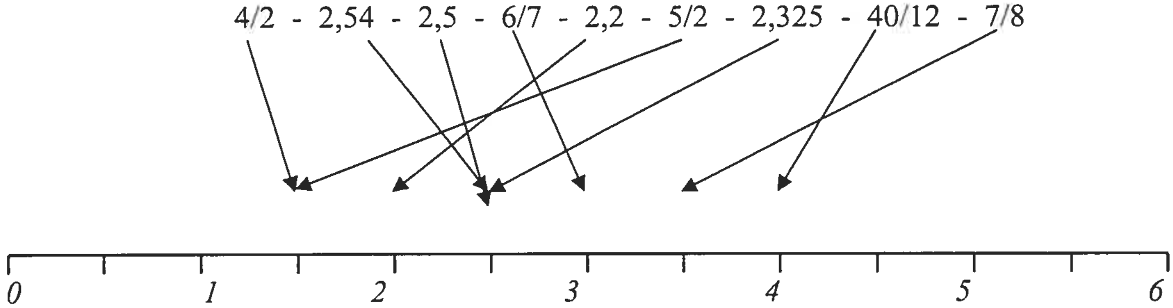
4/2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8



2,325 est placé après 2,5 et 2,54.

Élève E4

4/2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8

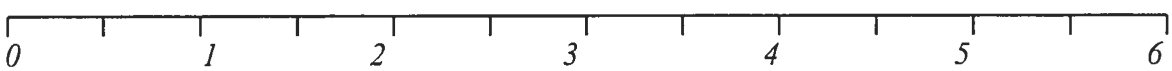


Les 3 nombres 2,54; 2,325; 2,5 sont placés au même endroit, soit à 2,5.

Élève E5

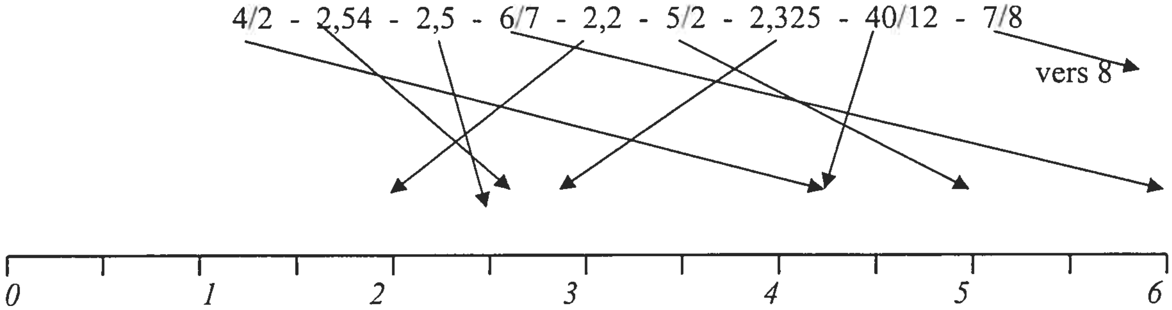
4/2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8

NON FAIT



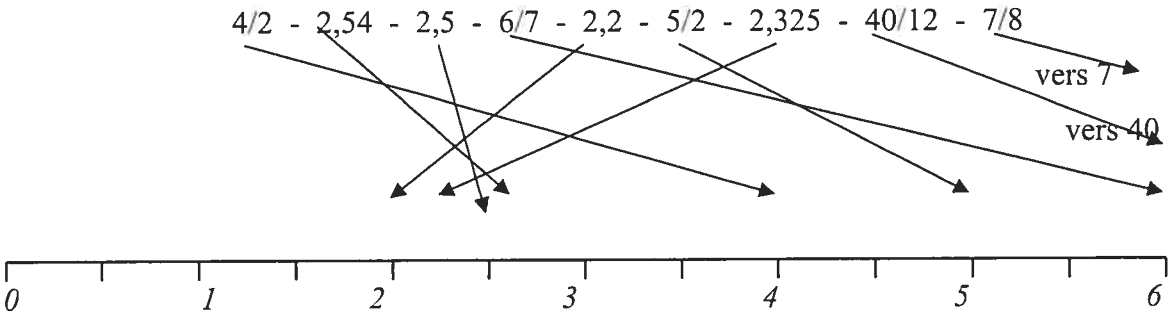
Élève E6

4/2 - 2,54 - 2,5 - 6/7 - 2,2 - 5/2 - 2,325 - 40/12 - 7/8



Le nombre 2,325 se retrouve après 2,5.

Élève E7



Comme le montrent les réponses des élèves, seul l'élève E7 a bien ordonné les nombres 2,325; 2,5 ; 2,54. Les fractions 6/7, 7/8 et 5/2 ont été mal positionnées par les élèves, sauf par l'élève E1 qui a bien placé la fraction 6/7 avant le nombre 1.

Personne donc n'a réussi à répondre de façon satisfaisante à la question 5. Positionner les nombres rationnels sur une droite demeure un exercice complexe, si on recourt à la fois à des nombres décimaux et à des fractions. Tous les élèves, sauf E7, ont placé 2,325 après 2,5, traitant possiblement ces nombres comme des entiers, «325» étant ainsi plus grand que «5»? Dans le positionnement des fractions, plusieurs élèves traitent le numérateur comme l'entier de référence sur la droite numérique. Par exemple, on retrouve 5/2 à la position 5 sur la droite et 40/12 à la position 4 (par défaut, puisque le nombre 40 ne figure pas sur la droite). On voit également que certains élèves associent les fractions 6/7 et 7/8 à des nombres juste un peu plus grands que les nombres apparaissant aux numérateurs de ces fractions.

À la suite de l'analyse des résultats par question et par élève, il nous a semblé pertinent d'identifier le savoir sur les nombres rationnels impliqué dans chacune des questions et d'y associer les réussites de l'ensemble des élèves. Il est ainsi possible de mieux situer les savoirs qui semblent maîtrisés par la majorité des élèves, ou, au contraire, qui sont sources des difficultés. Le tableau 2 rend compte de ce travail.

Tableau 2
Réussite de l'ensemble des élèves à chacune des questions de l'épreuve présentée à l'entrée dans la séquence didactique, en regard des savoirs impliqués

	Nombre rationnel (Définition)	Nombre rationnel (Partie d'un tout)	Nombre rationnel (Opération)	Nombre rationnel (Trouver un nombre)	Nombre rationnel (Positionnement)	Réussite de l'ensemble des élèves : nombres de points obtenus/nombres de points attendus	% de réussite de l'ensemble des élèves
Questions #	1					11,5/21	55%
Questions #		2				6/21 (3 non fait)	29%
Questions #			3			0/7	0%
Questions #				4		8,5/14	61%
Questions #					5	0/8	0%
Total						**26/71**	**37%**

Comme le montre le tableau 2, aucun élève n'a pu répondre correctement aux questions #3 et #5; ce résultat montre que tous les élèves éprouvent des difficultés majeures dans l'addition de fractions irréductibles et dans le positionnement de nombres rationnels sur un segment de droite graduée.

En considérant les résultats cumulatifs du groupe d'élèves, on trouve un taux global de réussite de 37%. Ce très faible taux de réussite est d'autant plus inquiétant que, dans cette épreuve, nous avons fait abstraction d'une évaluation des compétences des élèves en résolution de problèmes additifs et multiplicatifs impliquant des nombres rationnels.

Les connaissances sur les nombres rationnels à l'entrée dans la séquence didactique sont donc, chez les élèves de ce groupe, peu satisfaisantes. Les difficultés d'ordre conceptuel rencontrées dans le traitement des fractions, des nombres décimaux et, plus généralement, des nombres rationnels, fait croître notre motivation pour la conception et la mise en œuvre de la séquence didactique que nous avons décrite au chapitre précédent.

Examinons maintenant les connaissances des élèves à la sortie de la séquence didactique que nous avons réalisée.

4.1.2. Les connaissances et les habiletés à la sortie de la séquence didactique

Dans notre institution, à la fin d'un module d'enseignement, les enseignants de mathématiques ont l'habitude de préparer ensemble les évaluations des connaissances et des habiletés, ces habiletés étant liées à l'exploitation des connaissances des élèves, à la fin d'un module d'enseignement. Ces évaluations comportent souvent des problèmes ou exercices exigeant des élèves de mettre à profit les connaissances qu'ils ont construites pour répondre à des questions plus avancées que celles traitées habituellement dans l'enseignement. Il nous est apparu important de souligner cette pratique. Nous présentons l'épreuve qui a été soumise aux élèves de 1^{e} secondaire, à la suite de la séquence didactique, et donnons un aperçu des réponses des élèves à chacune des questions de cette épreuve. Puis, nous présentons les performances de chacun des élèves à cette épreuve.

1- Dites que représentent les éléments des écritures des fractions suivantes.

a) Soit la fraction: $\frac{a}{b}$

a: ______________________________

b: ______________________________

b) Soit la fraction: $\frac{4}{7}$ (autre réponse qu'en a))

4 : ______________________________

7 : ______________________________

Cette question, qui exigeait une expression écrite du sens de l'écriture des fractions, a été jugée difficile par la majorité des élèves qui ont, par ailleurs, effectué plusieurs tentatives pour compléter leurs réponses, pour verbaliser leurs représentations des fractions. Si tous les élèves ont répondu de façon satisfaisante à la question 1a. (en répondant pour «a» numérateur et «b» pour dénominateur), il en fut autrement à la question 1b qui exigeait une représentation du sens de chacun des nombres.

Un élève (E7) a inscrit «partie supprimée» pour le numérateur; rappelons que, lors de l'épreuve présentée à l'entrée de la séquence, cet élève avait parlé de la fraction en disant qu'elle représentait la partie manquante d'un tout. Cet élève semble ainsi avoir maintenu son interprétation de la fraction. Un autre élève (E1) a inscrit «facteur» pour le numérateur et «fraction» pour le dénominateur. Pour l'élève E4, le numérateur 4 signifiait «la quantité prise au tout qui est 7». L'élève E6 mentionne que le numérateur 4 représente «4 morceaux sur 7 de ta tarte pour toi» et pour le dénominateur 7, «tu sépares la tarte en 7 parties égales».

2- Linda veut utiliser le potager suivant en occupant : a) 1/3 de l'espace pour les tomates ; b) ½ de l'espace pour les petits oignons blancs ; c) 1/12 de l'espace pour les concombres. Pouvez-vous partager ce potager pour elle ? Les cases sont toutes de dimensions congrues.

Le partage de ce potager est relativement simple, puisque le nombre de cases est un multiple de chacun des dénominateurs. Tous les élèves ont répondu correctement à cette question, sauf un élève qui a indiqué que le tiers de ce potager représentait 7 cases; ce dernier élève a toutefois bien représenté les fractions ½ et 1/12. Il pourrait s'agir d'une erreur d'inattention ou encore, d'un calcul erroné.

3- Placez en ordre croissant les fractions suivantes sur le segment de droite dessiné

Suggestion : Transformer ces fractions, si nécessaire.

4/2 7/2 14/4 ½ ¾ 13/8 1/5 1/7

Cette question rejoint une des questions de l'épreuve présentée à l'entrée de la séquence (voir la question ≠5). Toutefois, dans l'épreuve à l'entrée, les élèves disposaient d'un segment d'une droite graduée, ce qui n'est plus le cas dans l'épreuve de sortie. Dans cette dernière épreuve, tous les élèves, sauf l'élève E1, se montrent incapables de placer correctement tous les nombres sur le segment de droite. L'erreur la plus importante, qui est relevée chez plusieurs élèves (E2, E6 et E7), est de ne pas considérer les dénominateurs dans le placement de la majorité des fractions. Plusieurs élèves, dont les élèves E2 et E6, ont réussi à placer en ordre les fractions dont les dénominateurs étaient 2, 4, ou 8; ces élèves ont cependant placé les fractions 1/5 et 1/7 à la fin du segment, comme si ces fractions avaient un statut particulier. De plus, les élèves E2 et E4 ont eu des difficultés à transformer les fractions initiales en fractions équivalentes (E2 y associe des expressions fractionnaires inappropriées, tandis que E4 ne fait aucune transformation). Les élèves E1, E4, E5 et E6 reconnaissent toutefois l'équivalence des fractions 7/2 et 14/4. Pour sa part, l'élève E7 a essayé de trouver des fractions équivalentes ayant pour dénominateur commun 80 (choix qu'il nous est difficile d'interpréter), mais n'a pas inscrit de réponse. Enfin, l'élève E1 qui n'a commis qu'une seule erreur, n'a transformé que deux fractions.

4- Utilisez l'un des symboles suivants : < , > ou = .

a) 1/7 ______ 3/21 b) 4/9 ______ 2/18

c) 3/4 ______ 4/3 d) 2 1/6 ______ 21/6

Il s'agit d'une question usuelle, demandant aux élèves d'identifier, à l'aide des symboles usuels, les relations de grandeur entre des fractions. Tous les élèves, sauf l'élève E6, identifient correctement les relations entre les fractions. L'élève E6 a toutefois recours au signe d'égalité pour identifier la relation entre les nombres 2 1/6 et 21/6. L'écriture de ces nombres, notamment le peu d'espace entre 2 et 1/6, peut avoir influé sur ce choix.

5- a) Encerclez la plus grande fraction.

31/42 3/7 ½ 5/6 1/100

- **b) Dites pourquoi la fraction que vous avez encerclée est la plus grande?**

Cette question impliquait des connaissances sur le sens de la fraction et de l'écriture fractionnaire, ainsi que sur les opérations permettant de comparer des fractions comportant des dénominateurs différents. Un élève sur deux a identifié correctement la fraction la plus grande, mais plusieurs explications manquent de précision. Il est cependant possible que la formulation de la question ait induit en erreur certains élèves; il aurait ainsi été plus juste de formuler ainsi la question 5a) : Encerclez la fraction qui représente le plus grand nombre. Les réponses à la question 5b) permettent toutefois de mieux apprécier les connaissances mises en œuvre par les élèves. Pour en rendre compte, nous distinguons les explications associées aux réponses erronées et celles associées aux réponses justes.

Réponses erronées.

E1

«3/7 : Quand on fait des tartes, c'est elle qui prend le plus de place»

E3 :

«31/42 : reste mis sur 600»

E2 :

«1/100 : C'est le seul qui est sur 100» L'élève fait référence au plus gros nombre trouvé.

E7 :

«Parce qu'on la met sur 100. 100/2 = 50 et ½ x 25 = 1/100» (1/100)

E2 et E7 ont retenu le plus «gros nombre» 100. E3 tente d'écrire les fractions en recourant à un dénominateur commun (600), mais en vain.

Réponses justes:

E5 :

«Parce qu'on les a mis sur le même dénominateur» (5/6)

E4 :

«Parce que ça fait 5/6»

E6 :

«Parce que je vais avoir un plus gros morceau et plus de morceaux» (5/6)

Mettre les fractions sur un même dénominateur est, pour l'élève E5, une méthode pertinente pour comparer des fractions. De son côté, l'élève E6 semble faire appel simultanément aux dénominateurs et aux numérateurs des fractions, pour se prononcer sur les relations entre les fractions; il semble ainsi considérer le nombre de parties que représente chacun des numérateurs, la grandeur de chacune de ces parties, le nombre de parties que représente chacun des dénominateurs, les différences entre ces nombres.

6- Écrivez ces nombres en utilisant des expressions fractionnaires.

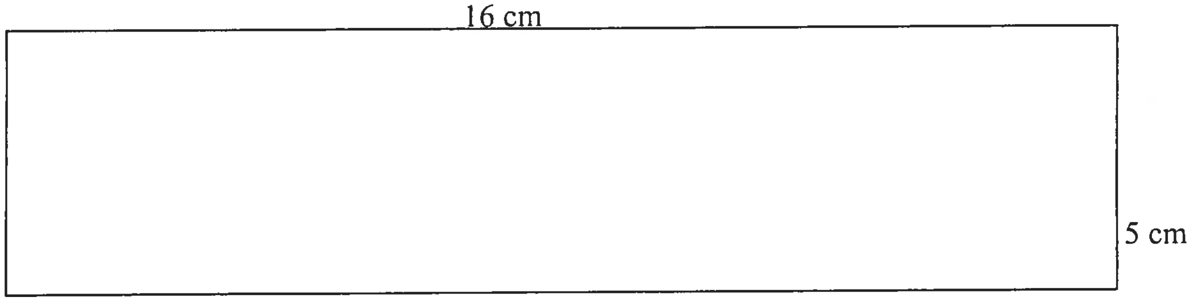
a) 15/2 : ________ b) 19/2 : ________

c) 150/2 : ________ c) 71/8 : ________

Nous relevons, chez l'ensemble des élèves, plusieurs bonnes réponses à la question 6a), ainsi qu'aucune erreur à la question 6b). On relève toutefois à la question 6c), quelques erreurs. Ainsi, ayant trouvé la bonne réponse, soit 75, l'élève E3 divise ensuite par 2, obtenant 37,5 ; cette conduite est étonnante et se prête peu à une interprétation. De son côté, l'élève E4 associe 150/2 aux nombres 70 et 10/2, sans transformer à nouveau le nombre 10/2. L'élève E5 inscrit comme réponse les nombres 1 et 70/180, et l'élève E7 écrit le nombre 75 et ½ ; aucun de ces élèves ne laisse toutefois traces de sa démarche.

7- Soit la figure suivante.

a) Déterminez la partie représentant le 1/12 de cette figure.



b) Si l'on sectionne la partie que vous avez obtenue (en a)) en deux parties égales, quelle fraction de la figure obtiendrez-vous ?

La tâche demandée à la **question 7a)** était complexe. Il s'agissait de laisser les traces de la construction de 1/12 d'une figure dont aucune des dimensions n'était un nombre multiple de 12. Tous les élèves parviennent à identifier correctement 1/12 de la figure. La figure initiale étant déjà séparée en trois dans le sens de la longueur, les élèves E2, E6 et E7 ont séparé en quatre parties dans le sens de la largeur. Les autres élèves ont séparé en six parties dans le sens de la largeur et deux parties dans le sens de la largeur pour obtenir 12 parties. Il importe toutefois de mentionner qu'aucun des élèves n'a cru bon de mesurer pour effectuer avec précision les partitions.

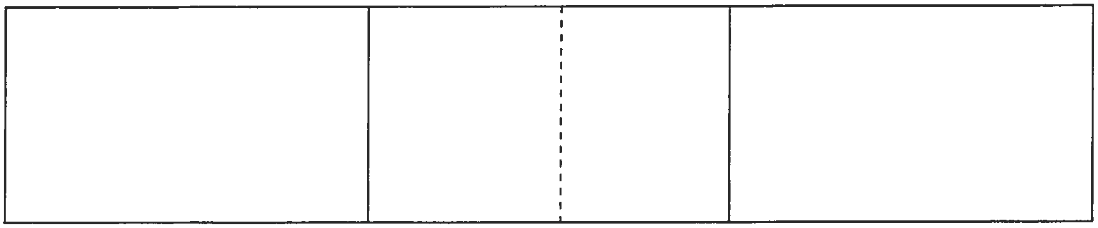
Seul l'élève E6 répond correctement à la **question 7b)**. Nous donnons d'abord un aperçu des solutions proposées par chacun des élèves, puis commentons brièvement ces solutions.

Réponses erronées

E1: «Séparer le rectangle en 12 parties égales, sinon le pli ça donne 6»

E2 : «On sépare le rectangle en 2 parties égales»

E3 : «Je coupe la moitié de 12 et ça donne 6, (regarder le pointiller)»



E4 : «Tu le sépares en 2 et ça fait ½»

E5 : «1/12»

E7 : «Séparer les 3 parties en deux = 2/24. … 1/12 x 2 = 2/24»

Réponse juste

E6 : «1/24 Parce que j'ai séparé mon tout en 24 pis j'en ai pris 1/24. Ce qui me donne la moitié.»

La réponse attendue était 1/24 ; seul l'élève E6 a pu produire une telle réponse. Les commentaires de certains des autres élèves donnent un aperçu des connaissances qu'ils ont mises à profit, bien qu'ils ne soient pas parvenus à la réponse attendue.

Les élèves E1 et E3 ont ainsi senti le besoin de diviser par deux le nombre (12) qui provenait de la question 7. Pour l'élève E4, l'idée de «ça fait ½ » faisait allusion à la moitié d'une case ; bien qu'il est dit : « On sépare le rectangle en 2 parties égales », l'élève E2 pointait à la moitié d'une case. Les élèves E2 et E4 n'ont toutefois pu poursuivre leur idée initiale et parvenir à la solution attendue. Les conduites de l'élève E7 sont particulièrement intéressantes. En effet, cet élève est parvenu à bien identifier la fraction associée à chacune des parties constituées des 2 parties résultant du partage effectué ; il a ensuite effectué une représentation symbolique des actions ainsi effectuées, soit 1/12 x 2 = 2/24, montrant l'équivalence des fractions 1/12 et 2/24.

La tâche était complexe. 16 et 5 n'étaient pas des facteurs de 24. Il s'agissait de laisser les traces de la construction de 1/12 sur une figure avec des dimensions peu communes.

«On a séparé en en 12 parties égales. Si on le pli, ça donne 6 parties égales.»

«On sépare le rectangle en 2 parties égales»

«On coupe la moitié de 12 et ça fait 6»

L'élève allait-il travailler avec le reste en séparant 16 cm par 12... ? Non, il a plutôt estimé en séparant approximativement le tout.

8- Problèmes à résoudre:

8.1. Dans la classe de Borromée, le 1/5 des élèves préfèrent le violon, les 4/10 la flûte à bec et 21% le « ruine-babine ». Les autres élèves préfèrent jouer du « triangle ». Quelle fraction des élèves préfèrent jouer du « triangle » ?

Ce problème implique trois nombres rationnels : deux nombres représentés par des fractions et un nombre représenté par un pourcentage. Le fait que le dénominateur d'une des fractions soit un multiple du dénominateur de l'autre fraction simplifie toutefois la tâche, en autant que cette connaissance soit mise à profit. L'écriture du pourcentage à l'aide d'une fraction décimale, soit 21/100, permet également d'effectuer plus aisément la composition additive des nombres. Nous présentons les réponses des élèves, que nous commentons ensuite brièvement.

Réponses justes:

E2 :

1/5 x 20 = 20/100

4/10 x 10 = 40/100

21% = 21/100 ...   81

100 – 81 = 19 élèves qui veulent jouer au triangle.

E6 :

20/100 + 40/100 + 21/100 = 81/100 + 19/100 = 100

Réponse : 19/100 = 19%

Réponses incorrectes

E1 :

21/100 divisé par 10 = 2/10

E3 :

V: 1/5 x 20 = 25/100

F: 4/10 x 10 = 40/100

R-B: 21/100 = 21/100 25 + 40 + 21 = 86 84 + 14 = 100.

14 élèves qui jouent au triangle.

E4 :

4/16 x 20 = 8

Réponse : 14/100

E5 :

1/5 de 20%

4/10 de 40%

21%

Réponse : 29%

E7 :

2/10 + 4/10 = 6/10

Réponse : 6/10 élèves joue du triangle.

La réponse attendue était 19/100. Deux élèves, soit les élèves E2 et E6, réussissent à solutionner correctement le problème en écrivant chacune des fractions sous la forme décimale x/100. Deux autres élèves, soit les élèves E3 et E5, mettent en œuvre une démarche adéquate, mais ne parviennent pas à trouver une réponse juste; il s'agit possiblement d'erreurs de calcul ou d'inattention. Enfin, les autres élèves échouent à ce problème.

8.2. Martinez a réalisé la construction d'un hôtel en 150 jours. 2/5 de ce temps a été consacré à l'installation de la charpente et 1/15 au travail de finition. Combien de jours ont été consacrés à l'installation de la charpente ?

La réponse attendue était 60 jours. Deux élèves, soit les élèves E3 et E7, réussissent à résoudre ce problème. L'élève E3 procède ainsi : 2/5 de 150 = 300/5 = 60; ce procédé est similaire au procédé usuel enseigné au primaire, soit : (2 x 150) / 5. L'élève E7 a recours à un procédé tout à fait comparable, soit 2/5 x 150/1 = 300/5 = 60. Les autres élèves mettent en œuvre une démarche pertinente, sans parvenir toutefois à trouver une réponse adéquate. Deux de ces élèves passent par la recherche d'une fraction équivalente à 2/5, fraction dont le dénominateur correspond au nombre de jours ou se rapproche de ce nombre : E2 : 2/5 = 30/150; E4: 2/5 = 50/125. Une telle interprétation est particulièrement intéressante et montre une intégration originale du travail fait durant la séquence didactique. Enfin, l'élève E1 fait 150/5 = 30, sans se soucier du numérateur.

9- Écrivez ces nombres fractionnaires sous la forme de fractions simplifiées

a) 15 et ½ : _________ b) 4 et 5/5 : _________

c) 12 et 5/13 : _________ d) 2 et ¾ : _________

e) 2 : _________ f) 7 et 11/14 : _________

g) 200 et 7/8 : _________ h) 402 et 1/2 : _________

i) ¾ : _________ j) 9/1 et ¾ : _________

Deux élèves seulement, soit les élèves E2 et E3, savent représenter par des fractions tous les nombres. Plusieurs élèves ne produisent aucune réponse aux questions a), b), c), d), f), g) et h). Il est possible que ces élèves aient été déroutés par la taille des nombres; il est possible aussi que ces élèves n'aient pas eu le temps de compléter l'épreuve, laissant alors de côté les questions jugées difficiles. Nous nous contentons donc d'examiner les réponses données aux questions e), i) et j).

Réponse à la question e)

E1 : 2

E2 : 2/1

E3 : 2/1

E4: 1 et 1/1

E5: 2

E6: 20 et 1/1

E7: 1 et 2/2

Bien qu'elles ne soient pas conformes à la réponse attendue, les réponses des élèves E4 et E7, sont intéressantes. Ainsi, ces élèves ont utilisé deux représentations du nombre 1. Voulaient-ils produire une réponse différente de la réponse 2/1 jugée trop simple? On ne saurait le dire.

Réponse à la question i)

E1 : 7

E2 : ¾

E3 : 3/4

E4: 0 et ¾

E5: ¾

E6: 75

E7: ¾

La réponse attendue était ¾. Plusieurs élèves ont produit une bonne réponse. Bien qu'elle ne soit pas juste, la réponse de l'élève E6 est intéressante : a-t-il associé ¾ à 75% ou au ¾ de 100? La réponse de l'élève E4 est aussi étonnante; cet élève semble, d'une part, avoir voulu montrer qu'il sait que ¾ est déjà une fraction simplifiée et, d'autre part, avoir succombé à un effet de contrat didactique (Brousseau, 1998), en ajoutant le nombre 0. Enfin, l'élève E1 semble avoir additionné le numérateur et le dénominateur de la fraction 3/4.

Réponse à la question j)

E1: 17

E2 : 39/4

E3 : 39/4

E4 : 3/13

E5 : 91 ¾

E6 : 7/27

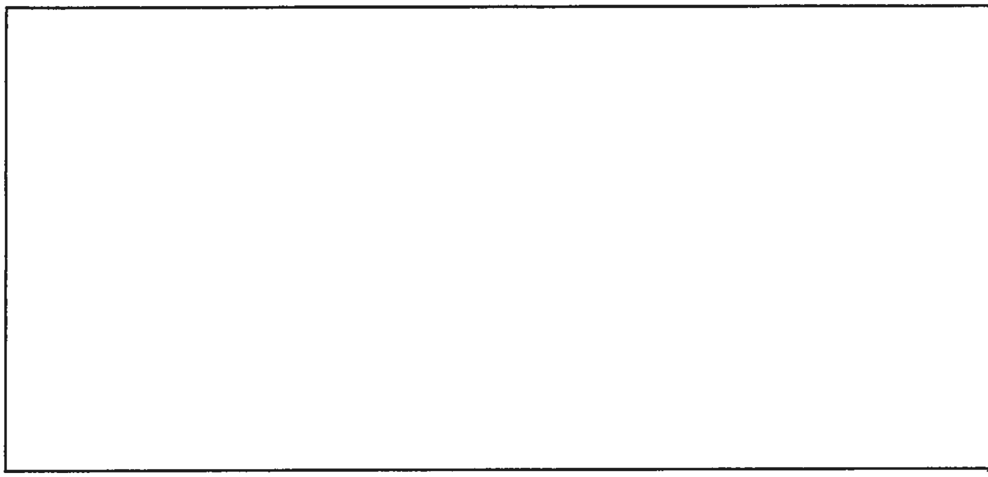
E7: 6 ¾

Seulement 2 élèves, soit les élèves E2 et E3, produisent une réponse juste. Les réponses erronées des élèves sont difficiles à interpréter. On peut formuler diverses hypothèses sur les procédés utilisés par certains élèves : a) l'élève E1 a additionné tous les nombres; b) l'élève E5 a enlevé le symbole « / » et fait du nombre 9/1 un nombre naturel, qu'il a pu par la suite juxtaposer à la fraction ¾; c) l'élève E4 a conservé le nombre 3 au numérateur de la fraction ¾ et composé un dénominateur en additionnant le nombre 9 et le dénominateur de la fraction ¾. Mais, que dire des réponses 7/27 et 6 ¾?

10. Soit la figure suivante.

10.1.: Identifiez les mesures de ces côtés en <u>arrondissant</u> au cm près. (les mesures de ce rectangle, mesures inconnues de l'élève, sont les suivantes : longueur : 13 cm ; largeur : 6 cm.)

__________ cm



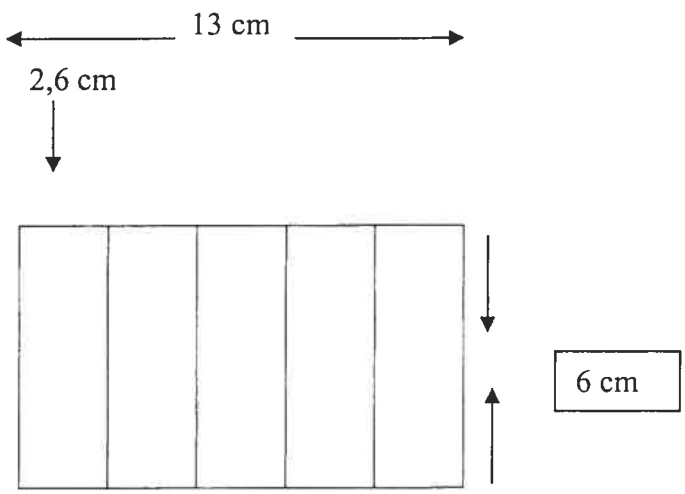
______ cm

10.2. Comment procéderiez-vous pour partager le tout en 5 parties égales ?

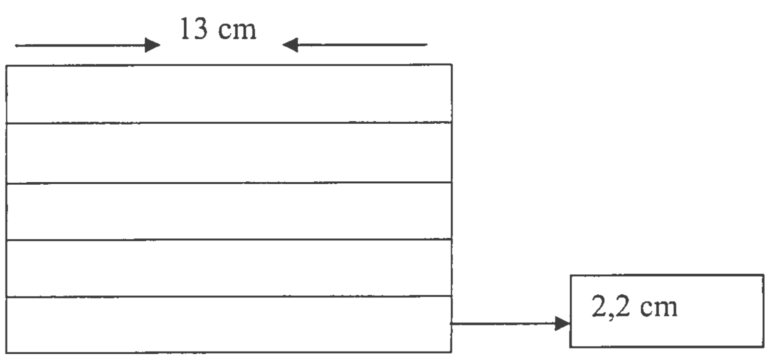
Tous les élèves, sauf l'élève E5, ont trouvé correctement la mesure de la longueur. Les élèves E2 et E6 ont trouvé 6,1 cm pour la largeur du rectangle, mais ils ont retenu 6 cm pour les calculs. Les mesures constituaient un préalable, mais le véritable intérêt de cette question de l'épreuve résidait dans la question formulée en seconde partie, soit en 10.2. À retenir ici, que c'était la façon de faire («comment procèderiez-vous…») plus que le résultat qui importait.

Pour partager ce rectangle en 5 parties égales, il fallait voir qu'il suffisait de diviser en 5 l'un ou l'autre des côtés pour obtenir des portions représentant chacune le 1/5 du rectangle. Il était également possible de diviser les deux côtés par 5, mais c'était alourdir la tâche : chacun des rectangles obtenus représentait le 1/25 du grand rectangle et il fallait en compter 5 (multiplier par 5) pour obtenir le 1/5. La démarche la plus économique était donc de prendre un nombre divisible facilement par 5, en effectuant le partage sur la longueur ou la largeur. Avec 13 cm de longueur, un élève aurait pu prendre 10 cm et le diviser par 5 pour obtenir des tranches de 2 cm sur la figure, puis partager le reste de la figure. L'élève pouvait donc diviser les 3 cm restants par 5, obtenant cette fois des segments de 0,6 ou de 3/5 cm; il pouvait donc déterminer 1/5 de la longueur en mettant bout à bout un segment de 2 cm et un segment de 0,6 cm. Avec 6 cm de largeur, un élève aurait pu choisir de diviser 5 cm par 5, en effectuant des tranches de 1 cm sur la figure, puis diviser ensuite 1 cm par 5, obtenant des tranches de 0,2 cm. Il pouvait donc déterminer 1/5 de la largeur en mettant bout à bout un segment de 1 cm et un segment de 0,2 cm.

La représentation graphique suivante (représentation qui n'est pas à l'échelle) illustre les deux démarches :



ou encore



Tous les élèves, sauf l'élève E7, ont tenté de résoudre ce problème. Nous présentons et commentons brièvement les réponses produites par ces élèves.

E1 :

«À chaque cm, faire une ligne droite des deux sens et compter le nombre de carrés.»

Démarche : 13 X 6 = 78

Réponse : 78 carrés.

En passant par le calcul de l'aire, on peut supposer que l'élève E1 a cherché un moyen de diviser le rectangle en 5 parties égales, même s'il n'a pas complété sa démarche.

E2 :

1 3

10/5 = 2

Réponse : 5 et 1

L'élève E2 a d'abord souligné le 1 et le 3 du chiffre 13, sans qu'on sache pourquoi. Par ailleurs, on voit qu'il s'était engagé sur la bonne piste de calcul. Il avait pensé à 10, trouvé 2, les premiers éléments de la division de 13. Le fait qu'il ait donné 1 suppose qu'il ait fait la même démarche avec 6. Il lui aurait resté la division des restes, ce qu'il n'a pas fait. On présume, bien sûr, de sa démarche à partir des traces laissées, mais cela semble raisonnable.

E3 :

13 + 6 = 19 – 5 = 14

L'élève E3 est dépassé par le problème. À priori, il ne comprend pas ce qu'on lui demande; s'il le comprend, il n'arrive pas à trouver une solution à ce qui est demandé. Sa réponse ne laisse entrevoir aucun lien avec même une simple amorce de la démarche attendue : même la division par 5 est absente dans son approche.

E4 :

E2 :13 x 6 = 78

Réponse: 80 cm

À l'instar de l'élève E1, l'élève E4 semblait chercher une piste en passant par le calcul de l'aire. Pourquoi donne-t-il 80 cm pour réponse? On ne saurait le dire.

E5:

16 x 6 = 96 divisé par 2

Réponse : 2,5 de petite coche.

L'élève E5 a mal mesuré la longueur, mais cela n'aurait pas été dramatique, s'il avait trouvé un moyen de partager le rectangle. On ne sait trop pourquoi il écrit « divisé par 2 », ni comment il parvient à trouver 2,5.

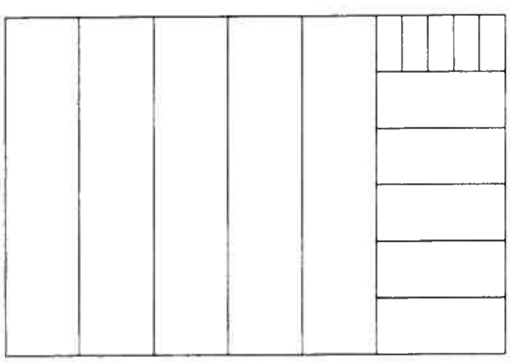
E6 :

3/15

Tu prends 3 dans chaque partie et tu sépares chaque partie en 5 qui en fait 15.

Réponse : 3/15

L'élève E6 a trouvé une façon de diviser le rectangle, bien qu'elle soit plus laborieuse que celle attendue. La représentation graphique de sa réponse est la suivante :



Cet élève a d'abord divisé une partie du rectangle en 5 parties égales (partage d'une longueur en 5 segments égaux, possiblement, 10 cm). Il a ensuite partagé la partie restante en 5 parties égales (partage effectué sur la largeur, considérant une mesure se partageant bien en 5 segments égaux (possiblement, 5 cm)). Il a ensuite partagé la partie restante en 5 petits rectangles. Les traces de ses calculs ne permettent toutefois pas d'affirmer qu'il aurait pu effectuer les compositions de parties pour bien identifier 1/5 du rectangle.

Force nous est de constater qu'aucun élève n'a su résoudre ce problème, bien que certains aient effectué des actions qui sont loin d'être dépourvues de sens, des actions qui montrent bien que ces élèves possèdent des connaissances non négligeables. Pour expliquer ce résultat, plusieurs facteurs sont à considérer.

Le problème comporte deux volets :a) empirique : savoir partager le rectangle en 5 parties égales; b) mathématique : savoir donner un sens aux actions effectuées, ou plus simplement, savoir écrire une procédure. Il s'agit d'un problème d'une certaine complexité. Pourtant, il suffit simplement de diviser une des longueurs en parties égales pour trouver la solution, ou encore, de partager la surface en unités de 1 cm carré, en graduant chacune des mesures. Mais, les procédés dont disposent les élèves ont un domaine restreint d'application, les élèves ayant trop fréquemment rencontré des figures dont les dimensions se prêtent bien à un partage. Assez curieusement, dans cette situation, la solution la plus économique passe par une mathématisation du problème, soit par la recherche du quotient de la division des mesures par 5, soit par la recherche du quotient de l'aire du rectangle par 5; dans ce dernier cas, il faut toutefois, repartager les unités d'aire. La première solution semble moins accessible aux élèves. Et, si on avait demandé aux élèves de diviser une planchette de bois, ou encore, une corde, mesurant 13 cm de longueur, les élèves auraient-ils pu recourir à une telle solution? Par ailleurs, la deuxième solution semble être davantage accessible aux élèves que la première, si on considère le nombre d'élèves qui effectuent un calcul de l'aire de la figure, bien qu'ils ne sachent davantage comment poursuivre.

De toute évidence, le partage d'objets géométriques, tels des rectangles dont les dimensions ne sont pas des mesures auxquelles sont associés des nombres naturels qui sont des multiples des nombres de parties à constituer, pose problème aux élèves, même à la sortie de la séquence didactique. Il faut toutefois reconnaître, comme le souligne bien Rouche (1998), qu'il ne s'agit pas de tâches triviales.

11. Six autobus de 54 places chacun ont été réservés en vue du spectacle de Céline Dion à Toronto.

À 30 minutes du départ, 2 autobus sont déjà remplis à pleine capacité, le 3ième au 2/3 et le 4ième au 5/6.

On compte 3 bancs vides dans le 5ième et le 1/9 des bancs sont inoccupés dans le dernier autobus. Combien de personnes ne sont pas arrivées?

Pour résoudre ce problème, il fallait d'abord établir que le nombre de personnes qui «ne sont pas arrivées» correspondait au nombre de places libres dans les autobus. Différentes données sont fournies pour établir le nombre de places libres. En gros, le nombre de places libres correspondait, dans plusieurs cas, au nombre de sièges moins les places occupées.

Dans un premier temps, inscrivons les données dans un tableau :

Autobus	Places occupées	Places libres
1	54	
2	54	
3	2/3 des places	
4	5/6 des places	
5		3
6		1/9 des places
Total		

Dans un deuxième temps, il faut compléter le tableau :

Autobus	Places occupées	Places libres
1	54	0
2	54	0
3	2/3 des places	1/3 des places
4	5/6 des places	1/6 des places
5		3
6		1/9 des places
Total		

L'opération suivante consistait à établir le nombre de places correspondant aux fractions représentant le nombre de places inoccupées. Il fallait alors calculer 1/3, 1/6, et 1/9 de 54.

Autobus	Places occupées	Places libres
1	54	0
2	54	0
3	2/3 des places	18
4	5/6 des places	9
5		3
6		6
Total		36

Voyons maintenant les réponses des élèves.

E1 :

54/6 = 9

54/9 = 6

18 + 9 + 6 = 33

Réponse : 33 personnes.

L'élève E1 effectue une interprétation juste du problème et se montre capable de trouver les nombres de places inoccupées. Il omet toutefois d'inclure dans les 3 places libres du 5^{ième} autobus, dans son calcul du nombre total de places libres.

E2 :

1/9 x 6

54 + 54 = 108

Réponse : 6/54

Il est fort difficile de voir la trame du raisonnement suivi par l'élève E2. De toute évidence, cet élève ne sait traiter convenablement ce problème. Par ailleurs, le calcul « 1/9 x6 » semble être celui qui lui permet de trouver une fraction équivalente à 1/9, mais dont le dénominateur correspond au nombre de places dans un autobus.

E3 :

2/3

5/6 = 45/54

1/9 = inoccupés 6/54

Réponse : 6/54 ne sont pas arrivés.

L'élève E3 a su trouver le nombre de places inoccupées correspondant à 1/9 des places disponibles dans un autobus; il semble avoir cherché une fraction équivalente à 1/9, mais dons le dénominateur est 54. Il a également trouvé que 5/6 des places occupées correspondait à 45 places. Cet élève sait traiter, par parties, certaines données du problème, mais ne semble pas avoir une représentation adéquate de l'ensemble du problème, de la solution cherchée.

E4 :

1/9 x 6 = 6/54

Réponse : 6 personnes.

L'élève E4 ne trouve que le nombre de places libres dans le 6^{e} autobus. Il ne semble ainsi s'arrêter qu'aux données qui évoquent clairement un calcul, tel : « 1/9 des bancs sont inoccupés dans le dernier autobus »

E5 :

54 x 6 = 324

54 + 54 = 109

2/3 de 56 = 36 élèves qui y vont.

56 – 36 = 20

Réponse : 20 élèves qui ne sont pas arrivés

En calculant le nombre total de places disponibles, on peut penser que l'élève E5 avait dans l'idée d'y soustraire le nombre de places occupées pour trouver le nombre de sièges libres. Le fait d'avoir additionné les places des autobus 1 et 2 (malgré l'erreur de calcul), de même que les sièges occupés dans le 3^{ième} autobus, renforce cette hypothèse. Il a même calculé le nombre de sièges libres dans le 3[ième] autobus, mais tout s'est arrêté là. Cet élève n'a su tenir compte de l'ensemble des données.

E6 :
Pas de réponse/démarche

E7 :
Pas de réponse/démarche

Les performances des élèves à ce problème sont relativement faibles. Seulement 4 élèves sur 7 traitent correctement une partie des données. Comment expliquez ces performances? Fondamentalement, le problème n'est pas si compliqué, puisqu'il demande d'établir la différence entre les places disponibles et les places occupées. En revanche, le nombre de données à traiter est assez important; des omissions sont ainsi possibles. On voit bien que 5 des 7 élèves savent calculer le nombre de places occupées ou inoccupées correspondant à des fractions du nombre de places disponibles dans un autobus, mais ces élèves n'arrivent pas à harmoniser les calculs dans un plan logique pour trouver la solution. Notons enfin que plusieurs élèves nous ont dit ne pas avoir disposé du temps nécessaire pour résoudre ou compléter leur solution au problème 11.

Au terme de cette analyse des réponses des élèves à chacune des questions, nous pouvons schématiser les résultats de chacun des élèves à chacune des questions. Le tableau 3 rend compte de ce travail.

Au tableau 3, nous dénombrons 154 réponses aux différents problèmes pour l'ensemble des élèves. Notons que les réponses à la question 9 ont été évaluées globalement selon le nombre de bonnes réponses. Quatre-vingt-dix-sept des réponses aux différentes questions sont justes; le pourcentage de réussite pour l'ensemble des élèves est d'environ 63%, ce qui n'est pas négligeable si on tient compte du fait qu'il s'agissait d'une épreuve conçue pour tous les élèves de 1[ère] secondaire.

Pour mieux apprécier les résultats des élèves à la sortie de la séquence didactique, et pour apprécier également les effets des situations didactiques sur l'évolution des connaissances des élèves, il nous a semblé pertinent de tenir compte des différents sens de la fraction impliqués dans chacune des questions. Le tableau 4 présente les pourcentages de réussite de l'ensemble des élèves aux différentes questions de l'épreuve, en fonction des différents sens de la fraction. Notons que nous avons relevé les sens les plus prégnants.

Tableau 3

Sommaire des performances de chacun des élèves à chacune des questions de l'épreuve d'évaluation présentée à la sortie de la séquence didactique

		Elèves						
Questions		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
No1	a)	R	R	R	R	R	R	R
	b)	E	R	R	R/2	R/2	E	R/2
No2		R	R	R	R	R	R	R/2
No3		R (1 erreur)	E	E	E	E	E	NF
No4	a)	R	R	R	R	R	R	R
	b)	R	R	R	R	R	R	R
	c)	R	R	R	R	R	R	R
	d)	R	R	R	R	R	E	R
No5	a)	E	2 réponses	E	R	R	R	E
	b)	I	R	E	E	I	I	E
No6	a)	R	R	E	R	E	E	R
	b)	R	R	R	R	E	E	R
	c)	R	R	E	E	E	R	E
	d)	E	R	R	R	E	E	R
No7	a)	R	R	R	R	R	R	R
	b)	E	E	E	E	E	R	E
No8	a)	E	R	R/2	E	E	R	R/2
	b)	R/2	R/2	R	R/2	R/2	R/2	R
No9		E	R	R	E	E	R/2	E
No10	a)	R	R	R	R	R	E	R
	b)	E	R/2	E	E	E	R/2	NF
No11		R/2	R/2	R/2	E	R/2	NF	NF

Légende :
R : Réussite de la question.
E : Échec de la question.
R/2 : La moitié des points a été accordée pour la démarche mathématique.
NF: Pas de réponse
I : Réponse imprécise

Tableau 4

Pourcentages de réussite de l'ensemble des élèves aux différentes questions de l'épreuve, en fonction des différents sens de la fraction

Questions	**Sens des fractions**						
	Nombre rationnel (Définition)	Partie-tout (Figures géométriques)	Partie-tout (Situation problème avec opérations)	Résultat d'une division	Partie-tout (comparaison)	Réussite/total des réponses	% de réussite des élèves
Questions #	1					9/14	64%
Questions #		2 – 7 – 10				23/35	65%
Questions #			8 – 11			14/21	67%
Questions #				6 - 9		19/35	54%
Questions #					3 - 4 - 5	32/49 (4 imprécis ou non fait)	65%
Total						98/154	64%

Le dispositif didactique, que nous avons mis à l'épreuve dans cette recherche, visait la construction du sens partie-tout de la fraction et la coordination des différents sens de la fraction dans la résolution de problèmes impliquant, entre autres, la représentation, la comparaison, l'addition et la soustraction de fractions.

Trois questions, soit les questions #2, #7 et #10, concernaient le partage de figures géométriques, en regard de fractions différentes. Comme il est montré au tableau 4, 7 élèves sur 8 ont répondu correctement à la question #2. Ce résultat est non négligeable, sachant qu'au départ, ces mêmes élèves ne pouvaient donner que des interprétations très générales de la fraction 1/3, celle-ci ayant fait partie des deux épreuves. Deux élèves, soit les élèves E2 et E3, affichaient de sérieuses difficultés dans l'interprétation des fractions à l'entrée de la séquence. Ils peuvent maintenant, à la fin de la séquence, effectuer des partitions précises. On observe également que 7 élèves sur 8 sont maintenant capables de procéder à une partition adéquate d'une figure, telle celle présentée à la question #7a, dont aucune des mesures des côtés ne comporte un nombre de cm qui soit un multiple de la fraction considérée dans la partition. Par ailleurs, un élève seulement a pu répondre correctement à la question #7b. Enfin, même si aucun élève n'a pu réussir à exécuter correctement les tâches que comportait la question # 10, il faut admettre que le défi cognitif était de taille, étant donné les mesures du rectangle. Que certains élèves aient effectué diverses partitions de la figure n'est pas un événement banal et montre bien que ces élèves peuvent recourir à divers procédés pour effectuer un partage, par exemple, calculer l'aire de la figure, décomposer la figure en parties qui se prêtent bien à un partage, en regard du nombre de parties indiqué par la fraction.

Les questions 8 et 11 de l'épreuve comportaient des situations-problèmes faisant appel au sens partie-tout de fraction; les sens opérateur et rapport de la fraction pouvaient aussi être invoqués. Le pourcentage de réussite de ces situations-problèmes par les élèves est de 67%. Ce pourcentage mérite d'être relevé, bien que les élèves éprouvent des difficultés à relier les différentes écritures des nombres rationnels, difficultés fort compréhensibles étant donné que ces écritures n'ont pas été un objet privilégié dans notre séquence.

Il nous semble aussi important de souligner le faible pourcentage de réussite aux questions 6 et 9 impliquant le sens « résultat d'une division » de la fraction. La transformation d'une fraction en expression fractionnaire ayant un numérateur plus grand que le dénominateur n'est pas une tâche naturelle et n'a pas été objet d'une attention appréciable dans les situations d'enseignement dans notre séquence.

En ce qui concerne les questions traitant de la comparaison de fractions, soit les questions 3, 4 et 5, nous nous attendions à un taux de succès supérieur au taux de 65% observé chez les élèves. Le recours aux divers sens de la fraction ou, encore, au procédé usuel de construction de fractions équivalentes aux fractions entrant dans la comparaison, notamment la recherche d'un dénominateur commun, demeure peu accessible aux élèves, voire peu naturel, même après investigations et expérimentations diverses impliquant ces savoirs.

En terminant, rappelons que le taux moyen de réussite à l'ensemble des questions est de 64%. Il s'agit d'une performance remarquable, compte tenu du fait que ces questions étaient les mêmes que celles adressées aux élèves des classes régulières, compte tenu également des acquis antérieurs et des caractéristiques des élèves qui ont participé à notre étude.

4.2. Analyse des conduites et des interactions didactiques, au cours des situations d'enseignement

La séquence d'enseignement que nous avons conçue comporte quatre situations : une situation d'introduction et trois situations principales. L'analyse des conduites respectives des élèves et de l'enseignant et des interactions entre les élèves et l'enseignant, que nous entamons maintenant, a pour objectif d'évaluer la pertinence didactique de ces situations. Nous nous intéressons, non seulement à l'évolution des connaissances des élèves et à la transformation de leurs pratiques, mais également aux conditions qui marquent ou, au contraire, qui freinent cette évolution. Chacune des situations sera ainsi examinée. Pour faciliter l'examen des données, il nous a semblé important de reproduire les tâches que comportent ces situations.

4.2.1. Conduites et interactions au cours de la situation d'introduction

La **situation d'introduction** comporte des tâches familières aux élèves. Dans la première tâche, il est demandé aux élèves d'effectuer un premier pliage d'une feuille de format A11 (8 pouces ½ par 11 pouces) selon le sens de la largeur, puis de déplier cette feuille et d'inscrire ce que représente chacune des parties ainsi formées. Ce travail fait, l'enseignant demande aux élèves de reprendre la feuille pliée, de répéter le même procédé de pliage, et d'inscrire une fraction sur chacune des parties ainsi formées.

Les diverses tâches que comportait cette situation ont été présentées par l'enseignant. Chacune des dyades d'élèves étaient invitée à effectuer ces tâches; dès qu'une tâche était complétée, l'enseignant demandait aux élèves de faire part de leurs réponses. Comme il avait été prévu, la première tâche n'a généré aucun problème. Tous les élèves peuvent effectuer les pliages et identifier les fractions que représente chacune des parties résultant des pliages. Les interventions de l'enseignant permettent aux élèves de préciser leurs réponses, de relier ces réponses aux actions effectuées et aux objectifs poursuivis, et de prendre note de certaines informations.

Nous reproduisons quelques extraits des échanges entre l'enseignant et les élèves, lors de la realization des premières tâches. L'identification des élèves qui ont effectué les épreuves d'évaluation des connaissances à l'entrée et à la sortie de la séquence, est celle que nous avons utilisée précédemment. Les autres élèves, soit ceux qui n'ont participé qu'aux situations d'enseignement, sont identifiés par les codes E7, E8, E9 et E10. Il nous est apparu important d'inclure ces derniers élèves, dans notre analyse du déroulement des situations d'enseignement, leur participation étant essentielle à la comprehension des conduites et interactions didactiques. Il importe de porter à l'attention le fait qu'il ne nous a pas toujours été possible d'identifier les élèves qui ont pris la parole ; nous avons décidé d'utiliser le code EL pour désigner un élève que nous n'avons pu identifier lors de l'écoute des enregistrements audios. Mentionnons enfin que nous avons ordonné ainsi les prises de parole de l'enseignant et des élèves : Pn : prises de parole de l'enseignant ; En : prises de parole des élèves; l'identification de l'élève est inscrite entre parenthèses.

<u>Extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves</u>

P 1: Prenez votre tout dans le sens de la largeur et plier-le en deux. Si vous prenez votre feuille et dépliez-la…

E 2 (tous) : Wow…!!!!

P 3: Combien de parties égales avez-vous?

E 4 (tous): 2!

P 5: Inscrivez votre résultat. Quel est mon résultat? J'ai combien de demis?

E 6 (tous): 2!

P 7: Inscrivez votre résultat… Alors, j'ai 2 fois…

E 8 (E7): 2 fois ½

P 9: 2 fois ½ …

E 10 (E7): Ben ½ …

P 11: ½ …? Hein?

E 12 (E7): 1 entier (c'est cela que je disais)

Note : L'automatisme de l'élève fut ½ …

…

P 13: Vous avez ½… Vous pliez en deux dans le sens de la largeur vous obtenez…

E 14 (tous): ¼.

P 15: Si je prends le quart, combien ai-je besoin de parties pour refaire le tout?

E 16 (tous): 4

P 17: 4 fois ¼ me donne…

E (tous): 1 entier.

P 18: Inscrivez votre résultat.

…

P 19: Une seule partie correspond à quoi?

E 20 (tous): Un quart (1/4)

P 21: Dépliez votre feuille.

E 22 (tous): Wow!!… Une étoile. Il y a 4 coins.

…

P 23: Donc, 4 fois 1/4 me donne…

E 24 (tous): 1 entier.

P 25: J'ai ¼ , (je déplie) ici j'ai ½, (je déplie) 2 fois ½ me donne…

E 26 (tous): Un entier

P 27: OK, 2 fois 1/2 me donne un entier.

P 28: Que puis-je dire de ma moitié? Et le quart?

P 29: (démonstration en pliant et dépliant) La moitié de la demi est le quart.

P 30: J'ai combien de quarts?

E 31 (E7, E1): 2

…

P 32: Donc, 2 fois ¼ me donne

E 33 (E4): 1/2

P 34: OK, deux fois ¼ me donne la demi de l'entier.

…

P 35: L'entier séparé en deux me donne ½ . Deux fois ½ donne un entier.

P 36: (démonstration en pliant et dépliant), combien de quarts dans ma demi?

E 37 (tous): 2

…

P 38: Plier votre quart une autre fois en deux. Combien par rapport au tout?

E 39 (E4): C'est 1/8!!

Refaire le pliage…

E 40 (E9) : 1/8

P 41: Quand je plie en deux : je passe de ½ à ¼ à 1/8 . Je divise par deux.

P 42: Combien de fois je vais utiliser le 1/8 pour revenir à mon entier?

E 43 (tous): 8 fois.

P 44: 8 fois 1/8 donne…

E 45 (E4): 1 entier.

E 46 (E7) : Comment tu peux revenir à ton entier?

P 47: C'est 8 parties sur un total de 8.

P 48: 8 fois 1/8 donne 8/8. 8 divisé par 8 donne 1 entier.

E 49 (E4): Cela va te donner un entier.

P 50: J'ai 1/8, si je déplie,

E 51: 4

P 52: Ben non. Je recommence

E 53 (E1): Cela donne 2 huitième.

P 54: 2 huitième correspondant à quoi? (démonstration en pliant et dépliant)

E 55 (3 élèves) : un quart…?

P 56: 2/8 équivaut ¼. Écrivez-le.

P 57: 2 fois 1/8 me donne ¼. ¼ de l'entier.

P 58: 2/8 donne…

E 59 (E7): ¼

P 60 : Si j'ai 4/8, cela me donnera…

E 61 (E4, E1): ½

P 62: 4 fois 1/8...

E 63 (E4): C'est 4/8!!! Ben, c'est ½.

P 64: Est-ce que l'on peut établir un lien entre 4/8 et ½ ? 4 par rapport à 8?

E 65 (E1): C'est la moitié.

E 66 (E7) : ½

P 67: Simplification… Division par quatre. Il me reste…(Démonstration au tableau)

E 68(E1) : ½

P 69: Si j'ai 1/8 et que je plie encore en deux. J'obtiens…

E 70: Discussions… (E1) Cela donne 16…

E 71 (E5): Ça ne peut pas donner 15!

…

P 70: Et si j'ai 1/16 et que je partage en 2?

P 71: Et si je partage ce que vous obtenez encore 2?

Comme le montrent les extraits précédents, les interventions de l'enseignant sont nombreuses. L'enseignant invite ainsi les élèves à préciser leurs réponses, à relier ces réponses aux actions effectuées, et à prendre note de certaines informations. Ces interventions nous semblent mues par une intention d'agir sur les pratiques des élèves. Elles sont également des occasions de mettre en oeuvre diverses connaissances sur les fractions: a) la fraction comme partie d'un tout; b) le tout comme une composition de fractions identiques ou comme une itération d'une même fraction (ex: P 23: 4 fois 1/4 me donne…E 24 (tous): 1 entier); c) une fraction comme une composition de fractions identiques ou comme une itération d'une même fraction (ex: P 60 : Si j'ai 4/8, cela me donnera… ;E 61 (E2, E4):½; P 62 : 4 fois 1/8...; E 63 (E4): C'est 4/8!!! Ben, c'est ½); une fraction comme un rapport (ex : P 64: Est-ce que l'on peut établir un lien entre 4/8 et ½ ? 4 par rapport à 8?; E 65 (E1): C'est la moitié.; E 66 (E7) : ½). Les interventions permettent aussi de rappeler certaines pratiques, telle la simplification de fractions (ex : P : Simplification… Division par quatre. Il me reste ….). De telles interventions nous semblent également indiquer que l'enseignant intègre une représentation de la mémoire didactique (mémoire appuyée par ses connaissances de l'enseignement dont ces élèves ont bénéficié, par ses connaissances sur les contenus et pratiques d'enseignement primaire, …).

À la suite des échanges précédents, les élèves sont invités à rendre compte par des calculs de la suite des opérations qui permettent de générer les différentes fractions. Non prévue initialement, cette tâche témoigne de l'intention de l'enseignant d'aller au-delà des connaissances mises en place et de construire des ponts entre les partages successifs et les opérations mathématiques pouvant montrer la genèse des fractions ainsi obtenues. Dans la réalisation de cette tâche, l'enseignant et le chercheur interviennent à la demande des élèves et notent les échanges avec ces élèves (ces échanges n'ont pu être enregistrés, pour des raisons techniques).

Nous présentons maintenant les traces écrites des calculs inscrits par les élèves. Il convient de noter toutefois que seulement 5 des 11 élèves s'acquittent de cette tâche, les autres élèves ne s'y engageant pas, la jugeant trop difficile.

<u>Traces écrites des calculs de quelques élèves</u>

E1 :

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}/2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}/2 = 1/8$

$1/8\ /2 = 1/16$

$1/16 \text{ x } 2/2 = 1/32$

$1/32 \text{ x } 2 = 1/64$

E2 :

$\frac{1}{2}/2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4} = 1/2\text{x}2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}/2/2 = 1/8$

E3 :

1 divisé par 2 = $\frac{1}{2}$

(1 divisé par 2)/2 = $\frac{1}{4}$

(1 divisé par 2)/2 /2 = 1/8 = ($\frac{1}{2}$) exposant 4 = 1/2x4 = 1/8

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 = 1/16 = ($\frac{1}{2}$) exposant 8 = 1/2x2 = 1/16

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 /2 =1/32 = ($\frac{1}{2}$) exposant 16 = 1/2x16 = 1/32

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 /2 /2 =1/64 = ($\frac{1}{2}$) exposant 32 = 1/2x32 = 1/64

E4 :

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}/2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4} = 1/2\text{x}2 = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}/2/2 = 1/8 = \frac{1}{4}^2 = 1/8$
$\frac{1}{2}/2\ /2\ /2 = 1/16 = 1/8^2 = 1/16 = 1/2\text{x}8 = 1/16$

E5 :

1 divisé par 2 = ½

(1 divisé par 2)/2 = ¼

(1 divisé par 2)/2 /2 = 1/8 = $½^3$ = 1/8 = 1/2x2x2 = 1/8

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 = 1/16 = ½ (exposant 4) = 1/16 = 1/2x2x2x2 = 1/16

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 /2 = 1/32; ½ (exposant 5) = 1/32 ; 1/2x2x2x2x2 = 1/32

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 /2 /2 = 1/64 = ½ (exposant 6) = 1/2x2x2x2x2x2 = 1/64

E6

1 divisé par 2 = ½

(1 divisé par 2)/2 = ¼

(1 divisé par 2)/2 /2 = 1/8 = $½^3$ = 1/8 = 1/2x2x2 = 1/8

(1 divisé par 2)/2 /2 /2 = 1/16 = ½ (exposant 4) = 1/16 = 1/2x2x2x2 = 1/16

La tâche initiale impliquait des partages successifs d'une feuille, partages effectués par pliage en deux parties égales. Comme le montrent les échanges précédents, la majorité des élèves a investi cette tâche et a éprouvé peu de difficulté à identifier les fractions résultant des pliages successifs. En revanche, la représentation mathématique de la genèse des fractions résultant des pliages successifs n'a pas été une tâche simple.

Certains élèves ont discuté de la validité du passage de ½ à ¼, lors d'une division par deux. «C'est deux fois plus petit et on se retrouve avec 4 au dénominateur… Pourtant la fraction est deux fois plus petite…» De là, certains élèves ont compris qu'il fallait «multiplier par deux» le dénominateur de la fraction ½ pour obtenir ¼. Ce calcul a aussi été appliqué pour effectuer les passages de ¼ à 1/8, de 1/8 à 1/16 et ainsi de suite. Comme le montrent les traces écrites des calculs effectués par les élèves, ceux-ci sont parvenus à représenter par des divisions successives par 2 les partages successifs. Ce résultat encourageant a incité l'enseignant à proposer une manière différente de représenter, par exemple, ¼: la fraction ½ multipliée par elle-même ou $½^2$ = ½ x ½ . Comme le montrent les calculs des élèves, cette proposition s'est avérée infructueuse.

4.2.2. Conduites et interactions au cours des situations d'investigation plus systématique du sens partie-tout

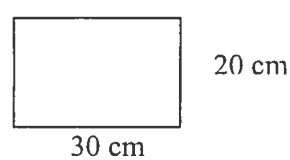
Deux situations d'investigation plus systématique du sens partie-tout de la fraction sont construites. Chacune d'elles comporte plusieurs tâches qui obligent les élèves à effectuer diverses compositions de parties d'un tout, à établir des relations entre les parties d'un tout. Dans chacune des tâches, les élèves doivent recourir aux fractions pour rendre compte des relations entre parties et tout.

4.2.2.1. première situation

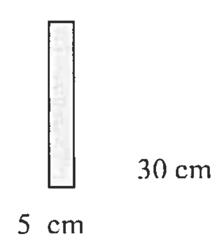
Nous présentons d'abord le matériel utilisé. Nous reproduisons successivement chacune des tâches et faisons état des conduites des élèves, des connaissances mises en œuvre par les élèves, des interactions entre les élèves et l'enseignant.

Le matériel utilisé pour cette situation comporte diverses bandes rectangulaires de carton dont les mesures sont respectivement : A- 20 cm de longueur par 30 cm de largeur; B- 5 cm (longueur) par 30 cm (largeur); C- 5 cm (longueur) par 10 cm (largeur).

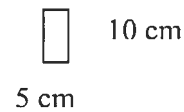
Bande A :



Bande B :



Bande C :



La bande A constitue le tout et les bandes B et C, des parties de ce tout. Les mesures des côtés de la bande A sont des nombres pairs dont les diviseurs sont :

Diviseurs de 30: {1, 2, 3, 5, 10, 15, 30}
Diviseurs de 20: {1, 2, 4, 5, 10, 20}

Ces mesures comportent des diviseurs communs (2, 5, 10) et des diviseurs spécifiques (20: 4 ; 30: 3, 6, 15). Plusieurs des diviseurs spécifiques d'une des mesures numériques, sont soit des multiples de diviseurs de l'autre mesure, soit des facteurs de diviseurs de l'autre mesure. Ainsi, les diviseurs spécifiques de 30 (6 et 15) sont des multiples de "2 et 5", facteurs de 20. Ces choix de mesures accroissent les possibilités de représentations des fractions. Ainsi, les fractions ½, 1/5 et 1/10 peuvent être "réalisées" en partageant l'une ou l'autre des mesures; en revanche, les représentations des fractions ¼, 1/15, 1/20 et 1/30 sont plus facilement réalisées par un choix judicieux de l'une des mesures. Enfin, les relations entre les mesures, soit 20/30 (2/3) et 30/20 (3/2) peuvent être exploitées pour trouver des rapports moins évidents entre une partie et un tout.

4.2.2.1.1. Première tâche

Pour introduire la première tâche, l'enseignant présente le carton A (30 cm par 20 cm) et rapproche ce carton de la bande orange (carton B : 5 cm par 30 cm). Il invite chacun des élèves à comparer les deux cartons. Les relations identifiées par chacun sont ensuite examinées. Les consignes initiales sont les suivantes:

> "Comment pourriez-vous comparer le deuxième carton B (bande orange) au premier carton A (tout)?";
>
> "Que pouvez-vous dire de cette bande orange?";

"Que pouvez-vous dire sur ses dimensions?" (ces deux dernières consignes sont empruntées à Nadine et Guy Brousseau, 1987).

Les questions précédentes, selon l'analyse effectuée au moment de la conception de cette tâche, devaient susciter chez les élèves des appréciations qualitatives du type « le carton A est beaucoup plus grand que le carton B », appréciations qui se préciseraient en réponse aux demandes de plus grandes précisions faites par l'enseignant. Ces premières phases ne se sont pas produites en classe, l'enseignant ayant jugé approprié de transformer la première question, s'appuyant en cela sur les conduites mises en place lors de la situation d'introduction. Les extraits suivants des interactions entre l'enseignant et les élèves montrent que tous les élèves optent pour une même fraction pour exprimer le rapport entre la bande B et la bande A. Évoquant une action de pliage, action utilisée dans la situation d'introduction, l'enseignant rappelle aux élèves qu'ils peuvent utiliser un procédé de pliage (procédé utilisé lors de la situation d'introduction), ce que met en application un élève (E 77 (E2)). Toutefois, l'enseignant ne demande pas à l'élève de préciser sa réponse, ne lui demande pas d'exprimer sa réponse sous la forme d'un rapport entre la bande B et la bande A; l'enseignant reprend les propos de l'élève et exprime alors lui-même le rapport entre les bandes B et A (P 79 et P 80).

<u>Extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves</u>

P 72: Appliquer votre bande (orange) dans le sens de largeur, votre bande par rapport au tout vaut quoi?

E 73 (E11) : 1/4 … 4 fois

P 74: Autre réponse possible?

E 75 (tous) : … ¼

P 76: Est-ce qu'il y en a qui avait pensé à autre chose. En pliant? Prenez votre carton dans le sens de la longueur…?

E 77 (E2) : Ca donne 20 cm avec 4 cm, 5 fois

P 78: Alors, 4 x 5 cm = 20 cm. Ce qui donne la largeur.

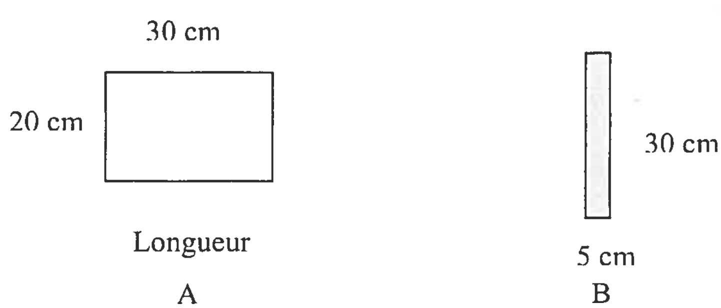
P 79: Quelle est la valeur de la bande orange dans le sens de la longueur par rapport au tout?

P 80: 5 cm x 6 cm = 30 cm Donc 5 cm sur 30 cm donne 1/6.

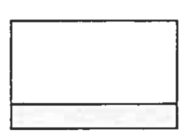
4.2.2.1.2. Seconde tâche

La deuxième tâche invite les élèves à trouver un moyen pour établir une relation plus précise entre les cartons. La consigne donnée est la suivante: "Comment pourrait-on savoir combien de fois le tout est plus gros que la bande orange?" Les élèves sont invités, à tour de rôle, à donner leur opinion.

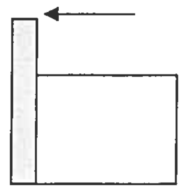
Au moment de la conception de cette tâche, il avait été prévu que, lors de la 1ère tâche, les élèves se seraient contentés d'une approximation qualitative du rapport entre la bande B et la bande A. Or, comme nous l'avons vu, les interventions de l'enseignant ont porté sur la quantification de ce rapport, quantification effectuée par l'enseignant. Ce travail est poursuivi lors de la 2e tâche. Après avoir demandé aux élèves de comparer les bandes B et A – comparaison déjà produite à la fin de la 1ère tâche -, en établissant la relation partie-tout entre les largeurs de ces bandes, l'enseignant poursuit alors en disant : Question #1 - « Et si on mettait la bande orange dans l'autre sens ? ». Cette question en suscite d'autres qui sont également examinées.



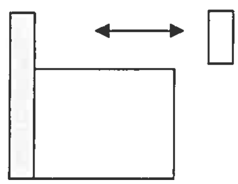
En superposant la bande orange dans le sens de la largeur, ils obtiendront la configuration suivante :



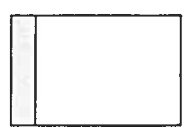
L'enseignant poursuit alors en disant : Question #2 - «Et si on mettait la bande orange dans l'autre sens?»



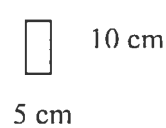
Certains élèves diront : «Que fait-on avec la partie *qui dépasse*?»



L'enseignant leur demande alors : Question #3 - «Sans la partie *qui dépasse*, quelle relation partie-tout peut-on observer?»



Et l'enseignant invite à l'établissement d'un rapport entre la partie qui dépasse et le tout. Le carton suivant est alors distribué, et les élèves sont informés de l'utilité de ce carton. La question suivante est alors formulée; il s'agit d'une question non prévue initialement : Question #4 - « Maintenant, la partie qui dépasse, par rapport au tout vaut combien?».



C

Comme il avait été prévu, les élèves n'éprouvent aucune difficulté à répondre à la première question, ainsi qu'à la troisième question. Nous donnons un aperçu des moyens mis en œuvre par les équipes qui ont répondu à la question #1; ces élèves ont utilisé des moyens similaires pour répondre à la question #3.

Aperçu des moyens utilisés par certaines équipes

E1 et E7 :

Moyen #1 : 20 /4 = 5   Car la bande mesure «4 fois» dans la bande de 20 cm. = ¼

Moyen #2 : Calculer tous les côtés.

Moyen #3 : ¼   … 1x chaque fois.

E9 – E6 :

Moyen #1 : On a déplacé la bande.

Moyen #2 : On a mesuré.

Moyen #3 : -

E10 – E11:

Moyen #1 : Il rentre 5 cm dans le carton dans le sens de la largeur.

Moyen #2 : On prend la bande et on peut la mettre 4 dans le carton et ça donne 1/4

Moyen #3 : -

E2 et E4:

Moyen #1 : Tu prends la bande orange et tu en mets une à chaque largeur de bande.

Moyen #2 : Tu prends la bande orange et tu en mets à chaque longueur de bande.

Moyen #3 : -

Résultat : ¼

La plupart des élèves procèdent par application successive de la bande B sur la bande A. Certains élèves (E2, E4, E10 et E11) ont tracé un trait sur la largeur de la bande A, à chaque application de la bande B, puis compter ensuite le nombre de traits. Certains ont carrément divisé la mesure de la largeur de la bande A (20 cm) par la mesure de largeur de la bande B (5 cm), obtenant alors 4 cm (E1, E7). Cette dernière démarche s'appuie sur une représentation mathématique des actions de partage, représentation qui témoigne d'une évolution non négligeable des connaissances sur les fractions.

Le traitement de la question #4 donne lieu à des conduites variées. Nous reproduisons les conduites des élèves qui ont laissé traces de leur démarche.

<u>E1 et E7</u> :

Moyen #1 : 30/5 = 6 x 2 = 12
Moyen #2 : 20 x 30 = 600
600 / 50 = 12
Résultat : 1/12

<u>E3 et E5</u>:

Moyen #1 : J'ai compté à la verticale.
Moyen #2 : J'ai compté à l'horizontal.
Moyen #3 : Après j'ai compté le tout.
Résultat : 1/12

<u>E8 :</u>

Moyen #1 : 6 x 2 en largeur
Moyen #2 : 4 x 3 en hauteur
Moyen #3 : -

E6 – E9 :

Moyen #1 : On a entré 4 fois la bande dans le rectangle.

Moyen #2 : On a mesuré.

Note : Elles ont trouvé1/12 en calculant l'aire, mais sans laisser de traces.

E2 et E4 :

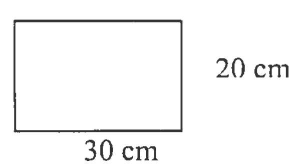
Moyen #1 : Tu places le petit carton vert dans le sens de la largeur.

Pour déterminer le rapport entre la bande C et la bande A, certains élèves procèdent soit par recouvrement de la partie A par la partie C (E2, E3, E4, E5, E6 et E9), soit en établissant la relation entre les aires des bandes C et A (E6, E9, E1, E7). Cette dernière conduite nous semble suscitée par le fait que cette bande rappelle celles utilisées usuellement pour établir l'aire d'une figure géométrique.

Dès que les élèves ont établi le rapport entre la bande C et la bande A, l'enseignant leur demande de rendre compte de leurs solutions respectives. Les interactions entre l'enseignant et les élèves visent surtout une institutionnalisation des connaissances. Il aurait été souhaitable que ce soit les élèves qui concluent sur les rapports entre les bandes, utilisant comme il avait été prévu le carton C comme unité de mesure.

Extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves

E 83 (E9): Nous on a fait 20 fois 30, ça donne 600.



P 84: C'est quoi cela 600?

E 85 (E9) : C'est l'aire. C'est 600 cm².

E 86 (E9): Après, on a trouvé 50.

P 87: Comment as-tu fait pour trouver 50?

E 88 (E9): 10 cm fois 5 cm

P 89: 600 divisé par 50 = 12. Cela égale les 12 parties de surface. 1/12.

P 90: La bande entre 6 fois. La partie dépassant vaut la moitié de celle-ci.

...

P 90: En faisant abstraction de la part qui dépasse que vaut la bande par rapport au tout?

E 91 (E7-E1): En collant le carton 5 fois

P 92: (...) On obtient 1/5.

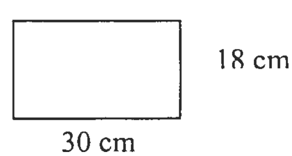
Au terme de cette situation, il semble que les élèves soient en mesure d'exprimer à l'aide de fractions simples, les rapports entre parties et touts, de même qu'entre parties et parties. Et, pour ce faire, lorsqu'il s'agit de grandeur continue, ils peuvent recourir à divers procédés : a) recouvrement ou mesure des parties et du tout à l'aide d'une partie du tout servant d'unité de mesure; b) calcul de l'aire des parties et du tout.

4.2.2.2. seconde situation

Cette seconde situation comporte des tâches similaires à celles présentées au cours de la première situation; elles sont toutefois plus complexes, en raison des mesures des bandes utilisées et des relations entre ces mesures.

Diverses bandes rectangulaires sont utilisées; leurs mesures sont respectivement : A- 30 cm de longueur par 18 cm de largeur; B- 30 cm (longueur) par 6 cm (largeur); C- 6 cm (longueur) par 6 cm (largeur) ; D- 12 cm (longueur) par 6 cm (largeur).

Bande A



Bande B

6

30 cm

Bande C

6

6 cm

Bande D

12 cm

La bande A constitue le tout et les bandes B, C et D des parties de ce tout. Les mesures des côtés de la bande A sont des nombres pairs dont les diviseurs sont :

Diviseurs de 30: {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
Diviseurs de 18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

Ces mesures comportent des diviseurs communs (1, 2, 3, 6) et des diviseurs spécifiques (30: 5, 10, 15, 30 ; 18: 9, 18). Aucun des diviseurs spécifiques de 18 (9, 18) n'est un facteur des diviseurs spécifiques de 30. Ainsi, si les fractions ½, 1/3 et 1/6 peuvent être "réalisées" en partageant l'une ou l'autre des mesures, en revanche, les représentations des fractions 1/5, 1/9, 1/10, 1/15, 1/18, 1/30 sont plus facilement réalisées par un choix judicieux de l'une des mesures.

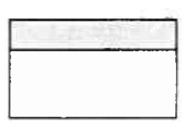
4.2.2.2.1.1. première tâche

La présentation de la première tâche commence par un rappel du travail effectué lors des tâches de la première situation :

« Nous avons appris, lors des tâches précédentes, à représenter par une fraction les relations entre parties et touts. Nous poursuivons ce travail en utilisant d'autres bandes. Que pouvez-vous dire sur la bande A (le tout) et la bande B (partie verte fluo)? »

« Supposons que vous ne puissiez déplacer les bandes, que feriez-vous ? »

«La bande verte fluo par rapport au tout dans le sens de la largeur, que vaut-elle? »



Nous reproduisons les conduites des élèves qui ont laissé traces de leur démarche. Ces conduites montrent divers procédés pour déterminer le rapport entre les bandes : a) recourir aux multiples de 6 pour atteindre 18; b) établir le rapport entre les mesures et le représenter sous la forme d'une fraction; c) poser ainsi le problème: 6 x ? = 18 cm, puis interpréter la solution obtenue; d) effectuer la division 18/6 et interpréter le résultat.

<u>E1</u> :

Moyen #1 : Carton 30 cm 18 cm

Bande 30 cm 6 cm = 1/3

<u>E2 :</u>

Moyen #1 : Tu fais 6 – 12 – 18 pour ta bande verte, ça entre 3 fois donc 6 x 3 = 18.

Moyen#2 : Prends la bande verte et calcule combien de fois la bande verte entre dans le rectangle.

Moyen#3 : Le 6 cm par rapport à la largeur de 18 cm. Combien de fois entre-t-il?

<u>E3</u> :

Moyen #1 : Je trouve la largeur du tout et de la bande.

Moyen #2 : Je divise 18 cm par 6 et ça va te donner 1/3

Moyen #3 : Tu dis combien de 6 entre dans le 18 et ça donne 1/3.

<u>E4</u> :

Moyen #1 : Prendre la bande dans le sens de la largeur.

Moyen #2 : Disposer sur la feuille.

Moyen #3 : Calculer le nombre de fois que ça entre.

Résultat : 1/3

<u>E6</u> :

Moyen #1 : Tu fais 18 / 6 = 3 fois

Moyen #2 : 6 x ? = 18

6 x 3 = 18

Résultat : 1/3

<u>E7</u> :

Moyen #1 : Calculer chacun des côtés demandés et faire la fraction

Moyen #2 :Faire la suite : ex : 6 - 12 – 18 ⟶ 3 x ⟶ 1/3

Moyen #3 : 18/6 ⟶ 3x ⟶ 1/3 (il rentre 3x dans 30 x 18 qui donne 3x)
Résultat : 1/3

E8 :

Moyen #1 : 6 + 6 = 12 + 6 = 18
Moyen #2 : 6 entre 3 fois dans 18
Moyen #3 : 6/18 = 1/3
Résultat : 1/3

E10 :
Moyen #1 : 6 x 2 x 3 = 18

Cette tâche est enfin l'occasion de faire le point sur l'enseignement, de mettre en évidence les divers moyens dont on peut disposer pour établir les rapports entre parties et touts. Malheureusement, des ennuis techniques nous ont empêché de procéder aux enregistrements des interactions entre l'enseignement et les élèves, lors de ce retour sur les moyens.

4.2.2.2.1.2. seconde tâche

Pour introduire la seconde tâche, les relations entre les bandes A et B sont examinées à nouveau. Mais, cette fois, les recouvrements de la bande A par la bande B sont effectuées selon le sens de la longueur, comme le montrent les figures suivantes :

Figure 1

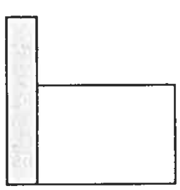
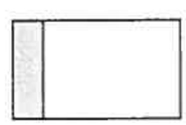


Figure 2



La question usuelle est reprise en tenant compte de cette orientation :

«Quelle est la relation partie-tout entre la bande B (verte fluo) et la bande A (le tout), si on fait abstraction de la partie de la bande B qui dépasse?»

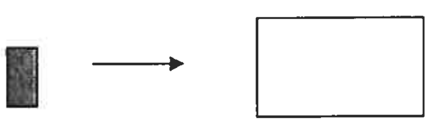
Comme il avait été anticipé, tous les élèves répondent rapidement 1/5 ; répondre à cette question ne demande que de reporter la partie de la bande verte incluse dans la bande A un certain nombre de fois de manière à recouvrir la bande A. Ce travail fait, la troisième tâche est présentée.

4.2.2.2.1. 3. troisième tâche

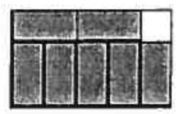
La troisième tâche prolonge la tâche précédente. Il s'agit de déterminer la relation entre la partie de la bande B qui dépasse de la bande A et cette dernière bande. L'enseignant présente alors les bandes D et A ainsi :

Bande D

Bande A



Établir cette relation n'est pas chose facile pour les élèves. Si la mesure de la longueur de la bande D peut être facilement mise en relation avec l'une ou l'autre des mesures de la bande A, il n'en est pas ainsi pour la mesure de la largeur de la bande D (12 cm) ; cette dernière mesure ne correspond pas à un nombre qui un facteur de l'un ou l'autre des nombres associés aux mesures de la bande A. Entrevoyant cette difficulté, l'enseignant met à la disposition de l'élève plusieurs bandes D. Il est ainsi attendu que l'élève puisse s'en emparer pour essayer de recouvrir la bande A à l'aide de plusieurs bandes D. Mais, faisant cela, il se retrouvera avec une partie de la bande A qu'il lui sera impossible de recouvrir en utilisant toute une bande D.



Même si à l'œil, l'élève peut envisager que la partie non recouverte correspond à la moitié de la bande D, comment pourra-t-il exprimer le rapport entre la bande D et la bande A, sachant qu'il faut 7 bandes D et la moitié d'une autre bande D pour recouvrir la bande A ? L'élève pourrait également envisager de mettre en rapport les aires des bandes D et A (soit respectivement, 72 cm^2 et 560 cm^2), mais comment alors exprimer à l'aide d'une fraction réduite un tel rapport ? Cette dernière conduite, selon nos expériences auprès de ces élèves, a peu de chance de se produire. Pour cette raison, il est ainsi prévu, qu'une fois recueillies les solutions des élèves, l'enseignant offre aux élèves la petite bande carrée C suivante (côté : 6 cm), en leur demandant de voir si cette bande peut leur être utile :

Il y a de fortes chances que la majorité des élèves interprètent le geste de l'enseignant comme une invitation à utiliser cette dernière bande pour recouvrir la bande A, puis la bande D. Ils pourront peut-être conclure ainsi : la bande D est 2/15 de la bande A.

Nous reproduisons des extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves, en y intégrant, les traces des démarches proposées par les élèves. Ces interactions modulent les démarches des élèves, puisqu'elles surviennent pendant que ces élèves essaient de répondre aux questions formulées. Pour faciliter la lecture de ces échanges, nous commentons d'abord brièvement les principaux événements dont témoignent les échanges entre l'enseignant et les élèves, ainsi que les démarches des élèves qui s'engagent dans la recherche d'une solution.

Les extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves, ainsi que les démarches de ces élèves, montrent la réalisation des prédictions qui avaient été faites lors de la conception de cette tâche. En effet, les élèves interprètent bien le geste de l'enseignant, qui met à leur disposition un certain nombre de bandes D, puisqu'ils essaient de mesurer la bande A avec ces bandes D. Ils concluent à l'impossibilité d'un recouvrement. Ils peuvent toutefois dire que la bande D entre « 7 fois et quelque chose dans la bande A » (voir E 113 à E 118 (E1)). L'enseignant leur demande ensuite de préciser ce quelque chose, en recourant au carton D. Les élèves interprètent adéquatement cette demande et un élève conclut en disant: « 7 fois et demi ». La distribution du carton C permet, par la suite, aux élèves de réinterpréter la relation « 7 fois et demi ».

Il importe toutefois de souligner que plusieurs élèves avouent ne pas être capables de trouver des moyens pour établir le rapport entre les bandes A et D. Ces élèves bénéficient toutefois des interactions avec l'enseignant et avec les élèves qui proposent certaines démarches, comme le montrent leur prise de parole progressive au cours de la réalisation et de l'analyse des solutions. Face à cette situation, l'enseignant effectue un retour sur les travaux réalisés lors de la première période d'enseignement.

<u>Extraits des interactions entre l'enseignant et les élèves et des démarches proposées par certains élèves</u>

P 99: La bande verte <u>fluo</u>, par rapport au tout, vaut quoi?

E 100 (tous): 1/3

P 101: Un à coté de l'autre, mesuré?

E 102 (tous): 6 cm chacun

P 103: Et la largeur?

E 104 (tous): 18 cm

P 105: 6 cm sur 18. Alors 1/3 simplifié

P 106: En appliquant dans le sens de la longueur cette bande et en faisant abstraction de la partie qui dépasse, que vaut cette bande par rapport au tout?

E 107(E3) : 5 fois. Alors 1/5.

P 108: La partie qui dépasse, vaut combien par rapport au tout?

(Distribution du carton vert foncé)

...

E 109: Ça ne rentre pas juste… Il y a un trou…Un espace libre.

P 110: Comment de fois il entre dans le tout en excluant l'espace libre?

E 111 (E1): 7 fois.

P 112: Peux-tu préciser ta réponse?

E 113 (E1): 7 fois et quelque chose.

P 114: De quelle manière pourrais-tu préciser le «quelque chose»… À partir de ton carton vert foncé…

E 115: (E1 vérification…) Ah! C'est la moitié… L'espace libre est la moitié.

P 116: Combien de fois le carton vert «entre-t-il»dans le tout?

E 117 (E1): C'est 7 fois le carton… plus la moitié.

P 118: Maintenant, peux-tu me dire qu'elle fraction représenterait le carton vert par rapport au tout?

E 119 (E1): Ben, 7 fois et demi.

P 120: Je veux une fraction…Quelle fraction représente ce carton par rapport au tout?

Distribution du carton rose.

P 121: Que peut-on faire avec ce carton?

E 122 (E7): Ben, on peut le placer sur le tout.

P 123: Ok, mais peut-on faire une relation avec le carton vert et le rose?

E 124: (…)

E 125 (E7): L'un est la moitié de l'autre…?

P 126: Bien, maintenant, que vaut la bande verte par rapport au tout…?

E 127: (…)

E 128 (E7): 7 fois et demi… 7 fois 2 plus 1… Le carré entre 15 fois.

P 129: Quelle serait la fraction du carré rose dans le tout?

E 130 (E7): Ah! 1/15…

P 131: Le carton vert par rapport au tout maintenant?

E 132 (E7): 2/15…

Retour sur l'examen des rapports entre les diverses bandes

P 133: Bande verte sur la bande verte fluo.

P 134: 1 fois sur combien? 1 sur deux et demie.

E 135 (E10) : Un sur deux et demi pour 2/5.

E 136 (E10): Fois 2 ici.

P 137: Comment tu as fait.

E 138 (E10): 2 et ½. Tu fais 2 fois 2 (=4) plus 1 demi, ça fait une de plus pour cinq demis. Donc 2 cinquièmes.

P 139: En combien je peux la séparer, (bande verte fluo)… en 5?

P 140: Combien vaut la longueur de la bande : 30 cm ici et celle-ci vaut 12 cm.

30 cm

12 cm

P 141: En divisant la longueur par 6 cela me donnerait 5 cm. Bande rose...

E 142 (E10): la moitié de la bande verte.

P 143: La verte c'est 2/5.

E 144 (E10): 1 sur 2.

P 145: La bande rose représente quoi? C'est la moitié… C'est la demi de 2/5.

P 146: La demie de 2/5… Représente quoi?

E 147 (E10): Ca marche?

P148: Par exemple, la moitié de 60 minutes...?

E 149 (plusieurs élèves) : 30 minutes…!

E 150 (E8) : 2 divisé par 2 donne 1

P 151: La bande rose valait 1/5.

…

La tâche suivante est ensuite proposée, soit de reconstituer le tout à partir de la bande rose (1/15) par rapport à la bande verte (2/15).

P 152: 5 fois 2/15…(la bande verte)

E 153 (E8): Je l'ai pris 1 fois, 2 fois,…

P 154 : Combien de 15^{ième}?

E 155 (E8): 5 …

P 156: Attention : une bande verte représente 2/15. Alors, 5 fois 2…

E 157 (E8): 10 fois..

P 158: Bien

E 159 (E8): 10 sur 15.

P 160: 5 fois 1/15 ça fait…

E 161 (E8): 5/15.

P 162: On a le tout quand on a 15/15?

E 163: Oui

P 164: Un autre moyen maintenant.

Traces des calculs effectués par l'élève E8

Moyen #1 : 5 x 2/15 + 5 x 1/15 = 15/15

Moyen #2 : 6 x 2/15 + 3 x 1/15 = 15/15

Moyen #3 : 3 x 2/15 + 9 x 1/15 = 15/15

....

E 165 (E5): (à partir de la bande verte) j'ai fait 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...Trois et un quinzième.

E 166 (E5): Les bandes roses que j'explique 3 fois 1/15 donc 3 quinzièmes. 3 sur 15

E 167 (E5): Bande verte : il y en avait 6 ...2-4-6 ... 6 et 2/15.

E 168 (E5): 2 fois le 6/15 donne 12/15.

E 169 (E5): 3 sur 15 plus 12 sur 15 m'a donné 15 sur 15 la réponse, l'entier.

P 170 : Très bien! Comment faire pour le mettre en application sur papier ?

P 171 : Que remarque-t-on avec les dénominateurs? Ils sont tous restés les mêmes.

P 172: Des signes d'additions ont été rajoutés. 6 fois 2 quinzièmes pour 12 quinzièmes...

P 173: Que s'est-il passé avec les dénominateurs?

E 174 (tous): Ils sont tous restés les mêmes!!

Traces des démarches et calculs proposés par l'élève E5

Moyen #1 : J'ai pris 3 fois le rose et 6 fois le vert.

Moyen #2 : Vert : 6 2/15 2/15 2/15 2/15 2/15 2/15 = 12/15

Rose : 3 1/15 1/15 1/15 = 3/15

Moyen #3 : 3/15 + 12/15 = 15/15

1 entier 15/15.

Traces des démarches et calculs proposés par d'autres élèves

E2 :

Moyen #1 : $\left.\begin{array}{r}\text{Rose; } 7\ ½\\ \text{Vert : } 7\ ½\end{array}\right\}\ 14\ ½$

2/15 = 14/105 pour la bande verte.

E3 et E10:

Moyen #1 : On recouvre les bandes vertes et roses sur le tout.

Moyen #2 : 5 x 7 ½

E4 :

Moyen #1 : 5 x 2/15 + 5 x 1/15 = 15/15

Moyen #2 : 6 x 2/15 + 3 x 1/15 = 15/15

Moyen #3 : 3 x 2/15 + 9 x 1/15 = 15/15

E6:

Moyen #1 : 5 verts, 5 roses

Moyen #2 : 6 verts, 3 roses

Moyen #3 : 3 verts, 9 roses

E7 :

Moyen #1 : On prend 7 cartons verts et 1 carton rose, donc 1/7 et on ne peut pas les simplifier.

Moyen #2 : 5 x 2/15 + 5 x 1/5 = 15/15

10/15 + 5/15 = 15/15

E9:

Moyen #1 : En largeur le carton vert entre 5 fois.

Moyen #2 : En longueur le carton vert entre 2 fois

Moyen #3 : Si tu coupes le carton vert en deux, tu prends la moitié et tu le mets au morceau qui manque, ce qui donne un tout.

E11:

Moyen #1 : 5 de 2/15 + 5 de 1/15 = 15/15

10/15 + 5/15 = 15/15

Les différentes démarches des élèves montrent, de toute évidence, le trajet important accompli par chacun depuis le début de l'enseignement. Ces élèves se montrent ainsi capables d'effectuer divers partages et repartages du carton A, de prendre en compte les mesures respectives des cartons A et D pour procéder à plus d'une partition du carton A, de recourir à une unité de mesure, soit le carton C, pour préciser les rapports entre les cartons A et D. Pour pouvoir conclure sur les fractions du carton A que représentent les cartons D et C, les élèves doivent pouvoir faire correspondre au carton D, donc à l'unité, une fraction dont le dénominateur puisse permettre d'exprimer les parties C et D de ce tout. Les demarches de la majorité des élèves montrent qu'ils ont pu effectuer de telles correspondances.

Il importe également de mentionner que la majorité des élèves a su rendre compte par diverses opérations mathématiques des compositions des diverses fractions correspondant aux partitions effectuées dans la recherche du rapport entre les cartons C, D et A. Les calculs proposés par plusieurs élèves (ex: E4, E7 et E11) montrent une coordination de divers sens de la fraction, notamment des sens partie-tout, rapport, opérateur, résultat d'une division.

La représentation par une fraction du rapport entre la bande D et la bande A, enjeu majeur de cette dernière tâche, était une tâche complexe. La majorité des élèves ayant trouvé «7 fois et ½ », mais n'arrivaient pas ou, arrivaient difficilement, à trouver le fameux «quinzième». La bande verte, par rapport au tout représentait en fraction 1/7 ½ où certains disaient 1/7,5. En suggérant aux élèves «d'éliminer» le nombre décimal au dénominateur, d'exprimer ce rapport à l'aide d'une fraction simple, quelques élèves ont pensé à multiplier par 2 les nombres aux numérateur et dénominateur, obtenant ainsi 2/15.

4.2.3. Conclusion

Les conduites des élèves dans les tâches proposées dans la dernière situation montrent, de toute évidence, le trajet important accompli par chacun depuis le début de l'enseignement. Ces élèves se montrent ainsi capables: a) d'effectuer divers partages et repartages d'une figure; b) de prendre en compte les mesures respectives des figures à comparer, pour procéder à plus d'une partition de ces figures; c) de recourir à une unité de mesure pour préciser les rapports entre des figures; d) de traduire enfin par des calculs impliquant divers sens de la fraction, les partages successifs, de manière à pouvoir exprimer par des fractions les rapports entre différentes figures.

5. CONCLUSIONS

Pour bien des gens, les mathématiques sont une matière très difficile. Les fractions contribuent pour beaucoup à cette image. Des facteurs externes, tels le nombre d'élèves par classe, l'hétérogénéité des groupes, la diminution des ressources, complexifient autant l'enseignement que l'appropriation de ce savoir par l'élève. L'échec sur un volet aussi important de l'apprentissage des mathématiques a des conséquences graves, allant du rejet des mathématiques au décrochage scolaire. Comment remédier à cette situation, ne serait-ce que partiellement? Voilà la question au départ de cette recherche.

On admet facilement que les fractions posent un défi cognitif important aux élèves. Si les élèves disposent de certaines connaissances pratiques, telles pouvoir représenter le quart d'une pizza, la demie d'une heure, le tiers d'un salaire, ils ne peuvent toutefois transférer ou utiliser ces savoirs pour résoudre des problèmes légèrement plus complexes, notamment les problèmes habituellement présentés à l'école.

Les échecs des élèves sont souvent liées à leurs rapports au concept de fraction, comme le montrent plusieurs des études que nous avons présentées au premier chapitre.. Habitués à manipuler des nombres naturels, l'utilisation de nombres inférieurs à l'unité inverse l'image du produit des opérations. La multiplication de nombres naturels donnant un résultat supérieur à chacun de ces nombres. Dans le cas des fractions, le produit dépend des fractions; ainsi, si les fractions sont inférieures à l'unité, le produit est inférieur à la plus grande de ces fractions. On peut faire le même genre de raisonnement pour la division. On pourrait multiplier les exemples qui montrent le difficile passage entre les nombres entiers et les fractions. Pour opérer un tel passage, la maîtrise du concept de fraction est indispensable; la compréhension du sens partie-tout de la fraction en est un pivot essentiel.

La question qui a motivé notre recherche est alors la suivante : peut-on trouver des situations impliquant la relation partie-tout et allant au delà du simple partage de grandeurs, de façon à permettre aux élèves d'exploiter leurs connaissances antérieures, de les transformer et de construire des connaissances plus satisfaisantes sur les fractions?

La recherche que nous avons réalisée s'inscrit dans le champ des études sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Diverses situations visant la construction du sens partie-tout de la fraction et la coordination des différents sens de la fraction ont ainsi construites et réalisées auprès d'élèves de secondaire 1 présentant des difficultés d'apprentissage en mathématiques. Des épreuves comportant diverses questions et divers problèmes impliquant les nombres rationnels, plus particulièrement, les fractions, ont été présentées aux élèves à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique, permettant une appréciation globale des effets des situations d'enseignement sur l'évolution des connaissances. Nous avons également procédé à une analyse des conduites des élèves et des interactions enseignants/élèves (enseignant titulaire de la classe et enseignant/chercheur directeur du mémoire) lors de la réalisation des situations de notre séquence didactique. Comme nous l'avons mentionné au second chapitre, cette dernière analyse avait pour objectifs : 1- d'évaluer la pertinence didactique de ces situations, en retenant divers critères: a- l'évolution des connaissances des élèves ; b- la transformation des pratiques des élèves dans des tâches de partage et d'identification de fractions; 2- de préciser les caractéristiques des situations et les interactions enseignants/élèves qui sont déterminantes (ou non) dans l'évolution des connaissances des élèves.

Nous effectuons d'abord une brève synthèse des principaux résultats de notre recherche. Nous identifions ensuite les principales limites de notre recherche. Nous présentons enfin quelques perspectives pour des recherches futures.

5.1. Synthèse des principaux résultats de notre recherche

Nous effectuons d'abord une appréciation globale des effets de notre séquence didactique sur les conduites des élèves aux épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de cette séquence.

5.1.1. Synthèse des conduites des élèves lors des épreuves présentées à l'entrée et à la sortie de la séquence didactique

Les résultats de notre recherche témoignent d'une évolution appréciable des connaissances des élèves sur les fractions et de leurs pratiques de résolution de tâches variées impliquant divers sens de la fraction.

Au terme de la séquence didactique, tous les élèves montrent des représentations adéquates du sens partie-tout de la fraction, savent effectuer des partages successifs pour identifier, par une fraction, le rapport entre diverses figures et collections. Plusieurs élèves réussissent brillamment des problèmes plus complexes que ceux qui sont généralement présentés aux élèves de leur niveau scolaire. Ces indices d'amélioration prennent tout leur sens, si l'on tient compte, qu'à l'entrée, ces mêmes élèves ne pouvaient se représenter correctement la fraction 1/3. Les progrès sont donc considérables, même si nous aurions souhaité qu'ils soient plus vastes et plus profonds. Néanmoins, nous avons là une base saine pour poursuivre les apprentissages engagés.

Parallèlement à ces succès, on observe que certaines des habiletés requises pour répondre à certaines des questions de l'épreuve présentée à la sortie de la séquence, ne sont que partiellement acquises. Ces questions ont cependant permis aux élèves de démontrer qu'ils savent tirer profit de leur bagage de savoirs, même s'ils ne parviennent pas à trouver la solution attendue. Les démarches utilisées par les élèves pour effectuer le partage en 5 parties égales, d'un rectangle mesurant 13 cm de longueur et 6 cm de largeur (problème 10 de l'épreuve présentée à la sortie de la séquence), en témoignent.

Aux difficultés précédentes s'ajoute la division qui constitue toujours un obstacle sérieux. Cependant, comme nous l'expliquions ailleurs dans le texte, la division par des fractions n'est pas une démarche naturelle même pour des élèves réguliers. Limites de temps, difficulté des problèmes, priorité des différents volets, voilà autant de pistes qui peuvent expliquer certains insuccès. Les contraintes d'ordre organisationnel ont également pesé lourdement sur le déroulement de cette recherche. En aurait-il été autrement que les résultats auraient pu être différents.

Un autre point mérite d'être souligné : ces élèves, en difficultés d'apprentissage, ont un taux de réussite moyen de 64% à l'épreuve présentée à la sortie de la séquence didactique. Or, cette épreuve a aussi été présentée aux élèves des classes régulières; les écarts entre les performances des élèves des classes régulières et celles des élèves qui ont participé à notre recherche, sont faibles. En effet, dans les classes régulières, 2 élèves sur 3 ont réussi l'épreuve à la sortie, soit 67% des élèves. Il est important de noter que plusieurs élèves en difficultés composaient aussi les classes régulières; les difficultés de ces élèves étaient toutefois moindres que celles des élèves de notre groupe, d'où leur insertion en classes régulières.

5.1.2. Synthèse des conduites des élèves et des interactions enseignant/élèves lors de la réalisation de la séquence didactique

L'analyse des conduites des élèves et des interactions enseignant/élèves lors de la réalisation de la séquence didactique a d'abord permis d'évaluer l'évolution des connaissances et des pratiques des élèves au cours des diverses situations que comportait la séquence. Elle a aussi permis d'identifier certaines caractéristiques des situations et des interactions enseignants/élèves qui se sont avérées importantes dans l'évolution des connaissances et des pratiques des élèves.

À l'entrée dans la séquence didactique, les élèves se sont familiarisés avec le matériel et ont construit des représentations des parties fractionnaires représentées par les différents rectangles. Établir des rapports entre les bandes de carton (parties) et les cartons (touts) ne fut pas une tâche simple. En effet, les dimensions des cartons rectangulaires n'étaient pas des dimensions « standards », des dimensions correspondant à celles des objets rencontrés dans l'enseignement (ex : 18 cm par 30 cm ; 20 cm par 30 cm). Les manipulations des bandes dans le sens de la largeur et de la longueur pour établir des relations entre ces objets et les cartons, ou entre une partie de ces objets et les cartons, notamment dans le cas du dépassement d'une bande lorsqu'elle était placée sur le carton (situations principales de la séquence), sont vite devenues le point culminant de la séquence didactique. La maîtrise progressive de ces tâches, par la mise en place de solutions pertinentes, a permis à ces élèves de construire des connaissances fondamentales sur les fractions, sur les divers sens de la fraction.

La séquence didactique a suscité des interactions importantes entre l'enseignant et les élèves. S'il fut facile pour les élèves d'établir une correspondance entre les parties et le tout, lors de pliages successifs d'une feuille de papier dans les premières tâches de la situation d'introduction, il en fut autrement, lors des tâches des situations principales, lorsqu'il leur a été demandé d'identifier les relations entre les bandes et les cartons et de représenter par des fractions les relations ainsi mises en évidence. Les échanges entre les élèves et l'enseignant ont alors été déterminants. Plus encore, ce sont souvent les élèves qui ont souvent incité l'enseignant à aller au-delà de ce qui avait été prévu dans la préparation de la séquence, pour inviter les élèves à entrer dans un travail important de modélisation mathématique des solutions qu'ils avaient produites en procédant à diverses actions de recouvrement et de comparaison entre les bandes (parties) et les cartons (touts). Ainsi, au cours de la troisième tâche de la seconde situation, à la suite des propos d'un élève sur les rapports entre les aires des bandes verte et rose (E7 : «L'un est la moitié de l'autre », p. 127), l'enseignant invite les élèves à exprimer par des fractions les rapports entre les diverses bandes utilisées dans cette situation, puis à représenter, par des écritures mathématiques, diverses compositions du tout à l'aide de bandes représentant diverses fractions du tout. On assiste alors à une diversité de conduites qui témoignent d'un travail important sur les fractions, sur les divers sens de la fraction (E8 : « Moyen #2 : 6 x 2/15 + 3 x 1/15 » ; E5 : « j'ai pris 3 fois le rose et 6 fois le vert : Vert : 6 ... 2/15 2/15 2/15 2/15 2/15 2/15 ; Rose : 3 ...1/15 1/15 1/15 ; p. 131-132). Il nous semble aussi intéressant de noter que dans la comparaison des bandes et des cartons, deux élèves procèdent à des calculs des aires respectives de ces objets (p. 117).

Les résultats de notre recherche montrent que le matériel utilisé dans l'ensemble des situations d'enseignement s'est avéré judicieux. Les élèves ont pu établir des rapports entre les grandeurs des différentes bandes, ainsi qu'entre les grandeurs des bandes et des cartons. Ils ont pu ensuite représenter ces rapports à l'aide d'écritures mathématiques et utiliser ces rapports dans la composition de touts ou de parties de ces touts.

5.2. Limites de la recherche

Les situations d'enseignement des fractions ont été effectuées durant les périodes consacrées à l'enseignement de ce savoir. Les résultas observés l'ont été durant une seule année scolaire. Nous avons dû aussi nous plier aux contraintes qu'imposent les programmes d'étude et leur organisation. La portée des conclusions est forcément partielle et il faut éviter de généraliser à outrance.

Tout d'abord, le concept de fraction est abordé à d'autres niveaux que la première secondaire. D'une part, les élèves l'ont possiblement étudié d'une façon qui n'était peut-être pas optimale et, d'autre part, la partie vue en première secondaire ne constituait qu'une des plages passées ou à venir consacrées aux fractions : notre expérience ne portait donc que sur une partie du temps consacré à l'étude des fractions. Aurions-nous eu à notre disposition la totalité de ce temps que les résultats auraient pu être plus significatifs.

La deuxième limite est liée à la précédente. Le programme d'études de première secondaire exige de couvrir bien d'autres sujets que les fractions et il impose de ce fait une répartition du temps sur les différents sujets et une limite de temps pour cette expérimentation. Avec plus de temps, nous aurions pu mettre de l'avant plusieurs autres tâches pour consolider et généraliser les connaissances et les habiletés développées. Les résultats à la sortie s'en seraient probablement trouvés améliorés, ce qui nous amène, encore une fois, à limiter la portée de nos résultats.

En corollaire avec le nombre de tâches, il aurait été intéressant d'utiliser un plus grand nombre de questions dans les épreuves. Les problèmes auraient pu être approfondis davantage et ils auraient pu toucher à une plus grande diversité de situations. La base des conclusions n'en aurait été que plus solide.

Nous nous interrogeons également sur le fait que les épreuves à l'entrée et à la sortie étaient différentes. Si elles avaient été les mêmes, l'interprétation des résultats en aurait été simplifiée et les conclusions plus solides. Formellement, nous aurions pu utiliser les mêmes, mais cela aurait été sans tenir compte des contraintes du fonctionnement d'une école quant au choix de l'examen final. L'épreuve d'entrée dans la séquence aurait pu être administrée en parallèle à la fin de l'année mais encore là, pour le temps requis, il aurait fallu trancher entre un avantage au plan expérimental et une nécessaire révision des autres notions vues durant l'année. Nous avons opté pour un questionnaire que nous estimons équivalent et apte à nous fournir des données valables, mais il aurait été souhaitable d'aller plus loin dans cette voie.

On peut également se demander si les résultats auraient été les mêmes avec d'autres élèves. Les élèves du groupe présentaient des troubles d'apprentissage dans plusieurs cas. Est-ce à l'image de l'ensemble des élèves? Difficultés plus sérieuses, capacité d'apprendre équivalente, intérêt comparable sont autant de facteurs qui ont pu influencer les résultats.

5.3. Perspectives de recherche

Les données recueillies sont encourageantes; le sujet mériterait d'être approfondi. Puisque l'expérience s'appuie sur l'efficacité d'une démarche pédagogique, il conviendrait de réduire au minimum l'influence des facteurs externes. Ne serait-ce que par simple commodité administrative, on pense facilement à intégrer une démarche comme celle-là à la tâche d'un enseignant durant l'année scolaire. Or, le fonctionnement régulier d'une école comporte son lot de contraintes qui peuvent influencer les résultats, comme on l'a vu à la section précédente.

Serait-il possible de disposer d'assez de temps avec les élèves durant une année pour couvrir à fond le concept des fractions? Plus de temps signifie plus de situations, plus d'interventions, plus de réinvestissement. Cela signifie permettrait aussi de conduire différentes opérations de mesure du rendement, en dehors des périodes officielles d'examen. Pour cela, il suffirait d'augmenter le nombre de périodes en mathématiques, quitte à réduire le temps consacré à d'autres activités. Les grilles matières ne sont pas totalement figées au secondaire. D'ailleurs, à chaque année, les écoles doivent procéder à des aménagements pour tenir compte de différents projets locaux. Elles ont la latitude voulue pour le faire. Une entente à ce niveau serait facile à réaliser.

Pourrait-on envisager de conduire l'expérience en dehors des heures des cours ou durant un été complet? Ce n'est pas inconcevable, mais après leur journée ou leur année à l'école, on peut penser que des élèves avec des difficultés d'apprentissage ont davantage le goût de faire autre chose que des fractions.

La composition du groupe a aussi son importance. Ce qu'on appelle difficultés d'apprentissages couvre toute une variété de problèmes. Sans vouloir stratifier à outrance le bassin d'élèves potentiels, il serait souhaitable de regrouper des élèves présentant à peu près les mêmes caractéristiques. Il y aurait moins de dispersion dans les interventions de l'enseignant. La chose est facilement réalisable pour une école.

Le nombre d'élèves, s'il est trop élevé, a pour effet de diluer l'efficacité des interventions. Un nombre suffisant pour représenter un bon échantillon est nécessaire toutefois. Le nombre d'élèves dans le groupe peut être plus délicat à gérer parce qu'en principe, il a une incidence budgétaire. Dans les faits, dans une école, il existe pratiquement toujours des groupes moins nombreux, ainsi que des tâches d'enseignement incomplètes parce qu'il ne peut en être autrement. Ces difficultés d'organisation pourraient être mises au profit des élèves en difficulté.

On parle souvent de manque de ressources, surtout pour souligner le besoin de personnels spécialisés pour intervenir dans les groupes hétérogènes. Ce ne serait pas un problème dans ce cas parce que l'enseignant conduisant la recherche constitue en soi une ressource spécialisée.

Pour ce qui est de l'approche elle-même, il conviendrait d'approfondir, de circonscrire plus encore les divers concepts composant l'univers des fractions. Il deviendrait possible de dresser un tableau clair des sujets concernés et de se donner un plan d'intervention très structuré.

Les concepts mieux ciblés, il faudrait procéder à une analyse fouillée de la correspondance des questions des tests aux concepts visés par celle-ci. Il en résulterait un diagnostique plus clair à l'entrée et des résultats plus probants à la sortie. Enfin, une augmentation du nombre de questions présentées dans les épreuves contribuerait à une plus grande fiabilité des résultats observés, et permettrait une exploration plus significative du champ conceptuel de la fraction, des nombres rationnels.

Références bibliographiques

Bardier, J.-C. (1988). *Mathématique au primaire 4.-* Les Éditions HRW, Montréal, (Canada), 247 p.

Blouin, P. (2002). *Dessine-moi un bâteau : la multiplication par un et demi*, Editions Bande Didactique, Presses de l'Université du Québec à Montréal, 291 p.

Blouin, P., Lemoyne, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficultés d'apprentissage: une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x. 58*, 7-23.

Breton, G. (1993). Caroussel mathématique 1, Anjou : Centre éducatif et culturel, 252 p.

Brousseau, G., (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2 (3)*. 37-127.

Brousseau, G. (1986). *Fondements et méthode de la didactique des mathématiques.-* Université de Bordeaux.- Bordeaux, (France).

Brousseau, G., Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.-* I.R.E.M de Bordeaux.- Bordeaux, (France), 529 p.

Brousseau, G., (1998). *Théorie des situations didactiques*, [Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield], Grenoble: La pensée sauvage, coll. Recherches en didactique des mathématiques.

Centeno, J., (1995). *La mémoire didactique de l'enseignant*, Thèse Posthume, Bordeaux: LADIST.

Charnay, R., Mante, M. (1992). De l'analyse d'erreur en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, Repères IREM, n°7, p.5-31

Chevallard, Y. (1991). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique,* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble, Université Joseph-Fourier, pp. 103-117.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19/2, Grenoble : La Pensée Sauvage, pp.221-266.

Chevallard, Y. et Jullien, M. (1989). *Sur l'enseignement des fractions au collège : ingénierie, recherche, société.-* Publication de l'I.R.E.M., (Marseille), no 15, 244 p..

De Champlain, D., Mathieu, P., Patenaude, P., Tessier, H. (1996). Lexique mathématique enseignement secondaire, Québec : Les éditions du Triangle d'Or.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1985). *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Paris : Éditions du Seuil , 314p.

Desjardins, M., Hétu, J.-C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*, Québec : Presses de l'Université de Montréal.

Evamath (1994). Réflexions et activités CM2-6ème, CRDP Nice, 165 p.

Huard, C. (1991). *Espace mathématique 6*.- Éditions du renouveau pédagogique, Saint-Laurent, Montréal (Québec), 352 p.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. *8th International Congress on Mathematical Education Selected Lectures*, Éd. S.A.E.M. Thales, p. 271-290.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T.E. (1992). Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R.A. Hattrup (Eds.), Analysis of arithmetic for mathematics teaching (pp. 323-371). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieren, T.E. (1994). Reflections and interactions on rational number thinking, learning and teaching. In D. Kirshner (Ed.), Proceedings of the 16th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 53-56). Baton Rouge: Louisiana State University.

Kieren, T.E. (1995). Creating spaces for learning fractions. In J. T. Sowder & B.P. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp. 31-65). Albany: State University of New York Press.

Lemoyne, G. (1993). La quête de sens dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, *dans:* P. Jonnaert et Y. Lenoir (dir.): *Sens des didactiques et didactique du sens.* Éditions du CRP, Université de Sherbrooke, pp. 263-288.

Lemoyne, G., Conne, F., Brun, J. (1993). Du traitement des formes à celui des contenus d'écritures littérales: une perspective d'enseignement introductif de l'algèbre. *Recherches en didactique des mathématiques, 13(3),* pp. 333-384.

Mercier, A., (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Mercier, A., (1996). La création d'ignorance, condition de l'apprentissage. *Revue des* *sciences de l'éducation, 22 (2),* 345-363.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(3), 279-310. Grenoble : La Pensée Sauvage.

National Council of Teachers of Mathematics (1964). Rational Number. Document. Traduction effectuée par l'AMQ.

Rabardel, P., (1995). *Les hommes et les technologies*. Paris: Armand Colin.

Rouche, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions?*.- Ellipses/éditions marketing S.A., Paris (France), 125p.

Sandoval-Bergeron, R. (1995). Les rapports des élèves du secondaire aux fractions, Mémoire de maîtrise inédit, Université de Montréal.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transition from arithmetic to algebra thought. *Educational Studies in Mathematics Education, 37*, 251-274.

Thibodeau, J.-G. (1993). Scénarios I, Montréal: Éditions HRW.

Thibodeau, M. (2002). *Le taux de décrochage scolaire à un niveau dramatique*.- Journal La Presse, (Montréal), 118ième année, no. 73, p. A-1.

Vance, J.H. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching children mathematics*, *4*(5), 282-285.

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10, n°2/3, 1990, p. 133-170