Université de Montréal

Identification d'obstacles et de difficultés inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite

par

Ismaïl Régis Mili

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès arts (M.A.)
en sciences de l'éducation,
option didactique

Mai, 2016

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Identification d'obstacles et de difficultés inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite

présenté par

Ismaïl Régis Mili

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Philippe R. Richard

Président Rapporteur
Département de didactique – Université de Montréal

France Caron

Directrice de recherche
Département de didactique – Université de Montréal

Yvan Saint-Aubin

Membre du jury
Département de Mathématiques et Statistique – Université de Montréal

Résumé

L'apprentissage de l’algèbre abstraite semble correspondre, pour les étudiants de niveau universitaire ou collégial, à l'introduction d'une multitude de nouveautés conceptuelles. Afin de mieux comprendre les raisons du taux d'échec important mesuré dans cette discipline, nous avons tenté de dégager les obstacles ou les difficultés rencontrés et nous les avons regroupés en quatre familles. Sur la base d'un exemple tiré d'une séquence d'introduction à l'algèbre abstraite et des productions des étudiants, nous relèverons que, en plus de devoir franchir un cap dans le niveau d'abstraction requis, les étudiants sont, souvent pour la première fois de leur parcours, confrontés à une théorie axiomatique développée comme telle, à des définitions de nature essentielle dont l'emploi va parfois à l'encontre du sens usuel, à l'absence de représentation graphique ainsi qu'à un processus de preuve formelle pour lequel ils n'ont été jusque-là que peu entraînés.

MOTS CLÉS : algèbre abstraite, obstacle, abstraction, définition, représentation, preuve

Abstract

For university or college students, the learning of abstract algebra seems to involve a multitude of conceptual innovations. To better understand the reasons for the high failure rate in abstract algebra courses, we have aimed at identifying the obstacles or difficulties encountered and grouped them into four families. Based on an example from an introductory sequence in abstract algebra, we will show that in addition to having to reach an unprecedented level of abstraction, students, often for the first time in their mathematical instruction, have to face simultaneously an axiomatic theory developed with essential type definitions that seem to go against the usual meaning, a lack of graphical representation as well as a process of formal proof for which they had little to no training.

KEY WORDS : abstract algebra, obstacle, abstraction, definition, representation, proof

Table des matières

Table des figures

Remerciements

Mes premières pensées vont à France Caron dont le soutien indéfectible n'a eu d'égal que sa compréhension et sa tolérance vis-à-vis de tous mes retards. Je la remercie d'avoir crû en l'adage qui veut que « la lenteur arrive souvent au but, tandis que la précipitation s'empêtre en chemin ». Ne dit-on pas que les plus fructueuses entreprises sont celles qui mûrissent très lentement... ?

Parce que la vie d'un département serait bien terne sans son personnel, je profite de ces lignes pour remercier la perle qui se cache dans le nôtre. Je souhaite à Nicole Gaboury une excellente continuation et espère que des générations entières d'étudiants pourront profiter encore longtemps de la qualité exemplaire de son travail.

Rien dans ce mémoire n'aurait été possible sans la collaboration de Nicolas Pfister que je remercie ici de son appui et de son intérêt contagieux pour mon projet. Il va de soi que je lui souhaite la meilleure des continuations et beaucoup de gratifications dans la suite de son métier d'enseignant.

Impossible d'oublier celles et ceux qui ont jalonné cette aventure. Comme il est impensable de tous les nommer, je profite de ces lignes pour envoyer à tous ceux du Parc une petite pensée collective. De permanence ou en transit, installé ou de passage, nos conversations de coin de table ont souvent été source de consolation et de motivation. Merci à tous pour ces beaux moments.

Merci enfin à Priscille et à mes parents de toutes ces choses pour lesquelles les mots ne suffisent pas.

« Quant à moi, je n'ai pas oublié la leçon
de Gauss : Découvrir, c'est voir les mêmes
éléments dans une autre configuration. »

Paul Inchaupsé, *Discutons de l'essentiel*.

1 Problématique

1.1 Introduction

La présente problématique est née d'un constat effectué durant notre ancienne pratique d'enseignant en Suisse au niveau collégial (Collège de Genève) : lors de l'introduction à la théorie des groupes et aux premières notions d'algèbre abstraite, un nombre important d'étudiants semblaient déroutés face à ce domaine, a priori purement formel, des mathématiques.

En particulier, nous avons pu observer que certains élèves au profil et au parcours scolaire dit « scientifique » perdaient alors de leur aisance, notamment parmi ceux ayant jusque-là obtenu d'excellents résultats en mathématiques. L'étude de ce nouveau chapitre semblait entraîner chez ces étudiants un sentiment de déroute ; avec en toile de fond, des questions comme « qu'est-ce que cette nouvelle matière, à quoi cela peut-il bien servir, que dois-je faire et, surtout, qu'attend-on de moi… ? ».

A l'inverse, d'autres élèves, au profil en général plus littéraire, se découvraient des aptitudes inattendues en mathématiques.

Il nous est alors apparu manifeste que certains étudiants semblaient mieux *outillés* pour franchir ce cap de rigueur et de formalisme que peut constituer l'algèbre abstraite. Nous en sommes donc venu à nous questionner sur ce à quoi pouvaient ressembler ces *outils*. Pour cela, une démarche préliminaire consistant à identifier quels pouvaient être les difficultés et les obstacles rencontrés par les étudiants semblait nécessaire ; ceci afin de mieux cerner les stratégies mises en jeu pour les surmonter.

Cette identification est devenue, au fil de notre étude, la principale motivation de ces lignes.

1.2 Difficultés observées chez nos étudiants

L'algèbre abstraite, au sens où nous l'entendrons dans ce mémoire, est généralement abordée à l'université. Même si la place de cette discipline au sein du curriculum dépend des cultures académiques, son enseignement au niveau collégial reste assez peu répandu (notamment au Québec où l'algèbre abstraite ne figure pas de manière explicite dans les programmes du cégep[1] et en Suisse où, en 2006, ce sujet était laissé totalement à la discrétion de l'enseignant qui, s'il le souhaitait, pouvait introduire, pour chacune de ses classes de filière *Scientifique*, une question relative à l'algèbre abstraite dans son examen de fin d'études collégiales[2]). Toutefois, notre pratique et notre intuition d'enseignant nous laissaient penser que la présentation précoce d'une facette rigoureuse de la discipline (rigueur tant dans la logique que le formalisme, à la manière des mathématiques modernes) semblait importante non seulement pour favoriser la compréhension de l'élève mais contribuait également à la structuration cognitive de ses connaissances. Ce sont les raisons pour lesquelles nous avons toujours tenté de réserver une place de choix à cette approche de l'algèbre dans notre enseignement, même si celui-ci s'adressait alors à des élèves de niveau collégial.

Cette intention se traduisait notamment par la volonté de présenter les premières notions d'algèbre dite « linéaire » dans leur contexte le plus formel, c'est-à-dire à l'aide d'une théorie générale mettant en jeu des objets mathématiques comme les groupes ou les corps et en tâchant d'introduire rapidement la notion d'espace vectoriel dans son sens le plus large.

Par l'orientation donnée à notre séquence d'enseignement, nous avons pu remarquer que plusieurs de nos élèves rencontraient de grandes difficultés. En particulier, le recours aux définitions posait souvent bien des problèmes. La recherche de rigueur dans le processus de validation semblait elle aussi constituer un obstacle récurrent ; les validations par l'exemple étaient légion et l'incompréhension des supports logiques du raisonnement semblait tenace. Le fait que la mention d'un exemple puisse servir à confirmer une proposition à caractère

---

[1] Cf. le programme de Science de la nature du cégep approuvé par le Ministère de l'Education du Québec en 2003 (MELS, 2003).

[2] Cette dérogation a été abolie depuis, au moment de la refonte du programme du Collège de Genève et de l'introduction de la nouvelle Maturité Fédérale, décidées en 2003 mais mises en application à partir de 2007.

existentiel mais non une proposition à caractère universel représentait notamment une source constante de difficultés d'ordre logique.

Il nous est alors apparu que le formalisme employé (notamment au sein des démonstrations) et le recours permanent aux définitions représentaient deux caractéristiques du champ disciplinaire algébrique encore inédites pour les élèves. Cette observation est d'ailleurs corroborée par Harel (1989) et Findell (2001).

Ces auteurs soulignent que l'introduction et la justification de cette discipline se fait généralement à l'aide de situations nouvelles pourtant élaborées à partir de notions antérieures connues, comme les nombres entiers vus comme éléments de groupes finis. Les exemples choisis, familiers aux étudiants, nuiraient à la pertinence du sujet étudié qui échapperait alors aux étudiants. Dans sa thèse de doctorat, Lajoie (2009, p. 241) observe en effet, que « les étudiants ont non seulement un nombre restreint d'exemples de groupes en tête mais qu'ils réfèrent surtout à des exemples de groupes de nombres ».

Cette familiarité aurait également une incidence sur la compréhension du sujet lui-même. En effet, les groupes de nombres

> « ne sont manifestement pas les meilleurs pour extraire la définition d'un groupe, en particulier parce qu'ils possèdent plusieurs propriétés additionnelles, comme la commutativité, mais aussi parce que les lois d'addition et de multiplication sur les nombres sont toujours associatives, quelques soient les ensembles sur lesquels elles sont définies » (ibid, p. 241).

En ce sens, comme le suggère Hazzan (1999), les groupes de permutations et les groupes de transformations géométriques d'un polygone régulier seraient plus « typiques » d'un groupe général.

1.3 Un regard curriculaire personnel

Pour faire la recension des obstacles rencontrés par nos élèves, il nous a d'abord fallu circonscrire notre champ d'étude en effectuant une distinction entre différents types d'algèbre. En effet, les notions étudiées sous le couvert de cette terminologie peuvent considérablement varier tout au long du cursus scolaire ; en particulier, la résolution d'équation du premier degré

- autre élément d'un cours « d'algèbre » - ne fait pas typiquement référence à une théorie axiomatique.

1.3.1 *Les différentes algèbres du curriculum*

Nous nous proposons de distinguer trois domaines de l'enseignement des mathématiques habituellement désignés par le terme « algèbre » : l'algèbre du secondaire, l'algèbre linéaire et enfin l'algèbre abstraite. Cette dernière est parfois appelée algèbre générale, universelle ou formelle, mais nous avons choisi la terminologie algèbre abstraite, plus couramment utilisée, autant en français qu'en anglais (« abstract algebra »).

Selon Findell (2001), l'*algèbre du secondaire* correspondrait à la découverte de l'écriture littérale et aux premières utilisations de la notion d'inconnue. Le champ auquel elle s'applique concernerait notamment l'étude des identités remarquables, la factorisation ainsi que la résolution d'équations linéaires et la mise en équation de problèmes. Comme dans bien d'autres pays, le programme de l'école québécoise situe l'entrée dans cette première algèbre durant les premières années du secondaire (Ministère de l'Education, 2006, pp. 253-255). Tout comme Findell (qui emploie de manière équivalente l'appellation « algèbre scolaire »), nous poserons que,

> « l'algèbre scolaire peut être vue comme une généralisation de l'arithmétique élémentaire dans laquelle les variables sont des nombres ; les expressions ainsi que les équations y sont formées à l'aide des quatre opérations élémentaires » (traduction libre de Findell, 2001, p.9)

Après avoir laissé une large place à l'étude de fonctions et aux prémisses de l'analyse, les notions algébriques réapparaissent ensuite dans le curriculum en fin d'études collégiales – voire en début de cursus universitaire – lors de l'étude d'objets mathématiques comme les vecteurs, les matrices et de l'utilisation variable de leurs représentations graphiques possibles. Ces dernières sont toutefois délicates à introduire car elles ne sont envisageables que dans des espaces réels de faible dimension (alors que l'étude des matrices et vecteurs permet une généralité qui va bien au-delà de trois dimensions). Ce deuxième type d'algèbre sera appelé *algèbre linéaire* et se devra d'être distingué du troisième car, typiquement, on n'y recourt pas à un cadre axiomatique.

Nous utiliserons ce dernier critère pour effectuer la distinction – notable – avec ce que nous appellerons *algèbre abstraite*. Celle-ci consistera en l'étude des structures algébriques élémentaires, notamment les notions de groupes (opération interne et associative, existence d'un élément neutre et d'un élément inverse), de corps et d'espaces vectoriels. Notre liste pourrait s'étendre aux anneaux, modules et homotopies, mais nous avons choisi de nous limiter, en raison de notre expérience professionnelle, aux obstacles rencontrés par des élèves en transition entre les études collégiales et universitaires. Nous nous restreindrons donc aux premières structures susmentionnées et aux applications élémentaires (isomorphismes, homomorphismes etc…) qui les relient et pour lesquelles Findell précise que

> « l'algèbre abstraite est une généralisation de l'algèbre scolaire dans laquelle les variables peuvent représenter plusieurs objets mathématiques incluant les nombres, les vecteurs, les matrices, les fonctions, les transformations et les permutations. Les expressions et les équations sont formées à l'aide des opérations qui font sens pour ces objets en particulier » (traduction libre, *ibid,* p.9)

Plus formellement, nous pouvons concevoir l'algèbre abstraite comme la branche des mathématiques qui étudie les structures algébriques[3] indépendamment de la notion de *limite* (rattachée à l'analyse) et de la notion de *représentation graphique* (rattachée à la géométrie).

Notons ici qu'indépendance ne signifie pas exclusion. Les propriétés d'une structure algébrique comme celles de groupe pourraient en effet être illustrées à l'aide de polygones et de transformations géométriques telles que les symétries. Toutefois, nos observations personnelles nous laissent penser que le caractère unifiant de l'algèbre abstraite a eu pour effet de diminuer le recours aux représentations graphiques au sein des séquences d'enseignement.

[3] Une structure algébrique est formée d'un ensemble combiné avec une ou plusieurs lois de composition éventuellement complétées par un ordre ou une topologie, le tout satisfaisant un certain nombre d'axiomes.

1.3.2 *Place de l'algèbre abstraite dans le curriculum*

Le caractère calculable, prédictif et explicatif de l'algèbre formelle, son respect des critères de cohérences interne et externe ainsi que la précision de la circonscription de son domaine de validité nous permettent, au sens de Dupin (1995), de considérer l'algèbre abstraite comme un modèle intra mathématique. Elle consiste en effet en une théorie axiomatique permettant de considérer plusieurs systèmes mathématiques comme des cas spéciaux de la même structure abstraite, plus générale.

L'algèbre linéaire peut donc être vue comme un cas particulier de l'algèbre abstraite[4] ; c'est la raison pour laquelle il est tout à fait possible de présenter d'abord la seconde en citant la première comme exemple. Il s'agit par exemple de la voie traditionnellement choisie par les filières universitaires française et marocaine alors que les cursus américains et brésiliens (entre autres) effectuent généralement un large tour d'horizon de l'algèbre linéaire et n'introduisent qu'ensuite la généralisation qui mènera à l'algèbre abstraite (Dorier, 1997). C'est pourquoi, selon leur provenance, certains étudiants peuvent être directement confrontés à un formalisme assez *radical* sans avoir pu recourir au caractère « illustratif » de l'algèbre linéaire ; « la tradition [française voulant] qu'on introduise dès la première année d'université la théorie la plus générale (axiomatique) avec, en général, un fort ancrage dans les exemples géométriques » ayant trait à l'algèbre linéaire (*ibid*, p. 199).

Dans le système d'éducation québécois, l'algèbre abstraite figure typiquement dans les premières années d'un programme universitaire de premier cycle en mathématiques pures[5]. Elle est parfois abordée en fin d'études collégiales, même s'il s'agit plus d'une initiative de certains enseignants qui choisissent d'aborder cette matière dans le cadre du cours d'algèbre linéaire[6] que d'une disposition du curriculum.

---

[4] Remarquons que l'algèbre linéaire élargit elle aussi à de multiples dimensions les idées présentées lors de l'algèbre du secondaire.

[5] Comme l'illustrent les programmes d'étude de l'Université de Montréal (2009) : « http://dms.umontreal.ca/EtudesBacc/indexPremierCycle.html »

[6] Comme dans le cours NYC du programme en sciences de la nature (MELS, 2003).

Il semble en être de même pour d'autres parcours scolaires étrangers, notamment suisse. Et c'est en nous attardant de plus près sur la place occupée par cette discipline au sein du curriculum que nous nous sommes aperçu, durant notre pratique, que, dans le cas des élèves genevois de niveau collégial, il s'agissait certainement de la première théorie axiomatique traitée comme telle (Département de l'Instruction Publique, 2006).

1.3.3 *L'algèbre abstraite vue comme première théorie axiomatique du curriculum*

Les principales sources de difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre abstraite résideraient ainsi, du moins en partie, dans le fait que les étudiants sont exposés pour la première fois à une vision axiomatique des mathématiques (Findell, 2001 ; Harel, 1989; Dorier, 1997 ; Gallian, 1990).

Notons ici que, même si un sujet étudié relève d'une théorie axiomatique, il est tout à fait possible de le considérer voire de l'élaborer et de l'enseigner sans recourir à de tels fondements axiomatiques. Un exemple historique nous est donné par les probabilités dont les principes façonnés par Fermat et Pascal dès 1654 ne furent formalisés par Kolmogorov sous sa forme axiomatique qu'en 1929…

C'est toutefois l'exemple de la géométrie qui nous semble le plus révélateur du traitement réservé dans l'enseignement aux théories à fondements axiomatiques avant l'étude de l'algèbre abstraite. En effet, la géométrie plane enseignée à l'école secondaire repose formellement sur un système axiomatique prédéterminé par les cinq axiomes énoncés par Euclide. Toutefois, comme en témoignent les objectifs des écoles secondaires québécoise et genevoise (Département de l'Instruction Publique, 2006 ; Ministère de l'Education, 2006), la pratique de son enseignement repose pour une large part sur des bases purement numériques (mesures, unités, calculs d'aires et de périmètres). Il ressort également de la lecture de ces objectifs que, même si la géométrie déductive est aussi traitée, la notion de démonstration géométrique n'apparaît que très longtemps après l'introduction de la discipline. Ce faisant, comme le souligne Tanguay (2002) dans son étude, l'enseignement dispensé à l'école secondaire ne permettrait que rarement de considérer la discipline comme une théorie axiomatique[7].

Remarquons qu'il n'en a pas toujours été ainsi et que ce choix de curriculum a déjà été soumis à débat. Pour des raisons certainement plus épistémologiques que didactiques, le collectif connu sous le nom de Bourbaki prônait dans les années 50 une approche structurante et axiomatique de la discipline dès l'initiation aux mathématiques[8]. Toutefois, on trouvait encore, jusqu'au milieu des années 80, des traces de cette position dans les programmes français, suisses et de quelques pays du Maghreb ; cela se présentait sous la forme de l'étude, dès l'école primaire, de la théorie des ensemble à l'aide des diagrammes de Venn, et du calcul au sein de groupes finis sous le couvert de modulo et de bases autres que décimales. On en voyait aussi quelques traces dans les programmes et manuels québécois des années 60 et 70.

1.3.4 *Autres observations personnelles*

A l'aide de ce propos, nous souhaitons simplement illustrer qu'un décalage peut exister entre la perception usuelle des habiletés à développer durant les premiers pas du parcours scolaire et celles qui seront effectivement requises par la suite, pour une minorité d'élèves au moment de l'étude de l'algèbre abstraite. Car au-delà de celles mentionnées précédemment, nous avons observé d'autres difficultés « chroniques » durant notre enseignement. L'absence typique de représentations graphiques, le manque de supports sur lesquels s'appuyer et la rupture avec les anciennes pratiques mathématiques qui en découlait (Dubinsky, Dautermann, Leron, U., & Zazkis, R., 1994) – souvent associée par nos élèves au caractère abstrait de la matière de même que son manque apparent d'applications immédiates – en sont quelques exemples.

Cependant, le constat le plus flagrant (et peut-être le plus objectif) issu de notre pratique consiste en l'importance du taux d'échec aux évaluations d'algèbre abstraite. Cette observation quant à la faiblesse des résultats nous est ensuite apparue plus générale et s'est vue confirmée par plusieurs études comme celles de Hazzan et Leron (1996), de Dubinsky et al.

---

[7] C'est également ce que nous avons pu observer au sein des manuels étudiés (Guay, 2006 ; Lafortune, 1997 ; Breton, 1999).

[8] Comme en témoigne leur « Eléments de Mathématique ».

(1994) et plus récemment par celle de Lajoie (2009).

1.4 Buts et intentions du cours d'algèbre abstraite

Ce constat d'échec ne doit toutefois pas nous faire perdre de vue les raisons pour lesquelles les cours d'algèbre sont dispensés. En effet, si l'échec est aussi répandu, si les difficultés rencontrées semblent importantes, pourquoi alors faire de l'algèbre abstraite ?

Selon Findell (2001), un cours d'algèbre abstraite a pour but *d'aborder des notions fondamentales* comme celles d'ensemble et d'opération, principales notions mises en jeu dans la définition du groupe. Ceci aurait pour conséquence de *remettre en cause des préconceptions parfois trop ancrées*, souvent considérées comme acquises voire allant de soi.

Cette remise en question conduit à *rechercher et manipuler des propriétés caractéristiques (universelles) des objets et systèmes*, ceci grâce à la manipulation, dans plusieurs contextes différents, de mêmes objets[9], permettant ainsi une compréhension plus profonde des notions d'inverse, d'opposé, d'équivalence, de fonctions etc…[10]

Tout ceci contribue au développement de ce que Findell (2001) appelle la *pensée mathématique avancée*.

Gallian (1990), quant à lui, voit dans le cours d'algèbre abstraite une invitation à une *approche structurante du raisonnement* (rappelons que, selon lui, c'est même la première fois que les étudiants doivent manipuler des concepts introduits de manière abstraite). Il relève également les *applications des raisonnements* tenus en algèbre abstraite *dans des contextes extra mathématiques*. En effet, il note que la terminologie et la méthodologie employées dans cette discipline possèdent un caractère pluridisciplinaire (sciences informatiques, physique, chimie etc). Mais, plus que le vocabulaire, c'est la *pluridisciplinarité des raisonnements* employés

---

[9] A titre d'exemple, l'addition peut y est vue comme cyclique (dans des groupes finis) tout en satisfaisant les mêmes propriétés que l'addition usuelle manipulée au sein de l'algèbre du secondaire.

[10] Notons ici que cette recherche nécessite *d'extraire les caractéristiques communes de plusieurs systèmes* mathématiques (comme les matrices, les fonctions etc...), ce qui constituera une particularité des définitions dites essentielles.

dans le cadre d'une théorie axiomatique, notamment dans la *recherche d'invariants entre différents systèmes*, que cet auteur met en avant. Enfin, étant donné la *prédominance de la preuve*, composante elle aussi pluridisciplinaire, l'algèbre abstraite favoriserait le développement des habiletés de validation et de raisonnement transférables dans d'autres disciplines (ibid), notamment dans le domaine juridique, comme en témoigne l'ouvrage « Tactiques et stratégies judiciaires » de Souris (2009).

1.5 Pertinence de la recherche et de son sujet

Le présent mémoire a pour intention de mieux cerner et comprendre les difficultés ainsi que les obstacles rencontrés lors de l'apprentissage des notions d'algèbre abstraite. Une telle recension permettrait certainement d'alimenter la recherche de moyens destinés à les anticiper, les contourner ou mieux les confronter, un peu comme la cartographie d'un terrain accidenté prépare une randonnée.

De plus, pour continuer sur le registre de la métaphore, les cartes semblent manquer. Hazzan (1999) et Findell (2001) relèvent la faible quantité de littérature touchant à la didactique de l'algèbre abstraite. Ce constat est partagé par Lajoie (2009) qui le nuance toutefois en mentionnant le récent accroissement de la proportion d'articles relatifs à ce domaine au sein des revues spécialisées de didactique.

En revenant à nos étudiants et à notre allégorie, nous observons que le voyage est souvent vécu de manière difficile par les élèves et les enseignants. Outre le fait que, comme nous l'avons déjà mentionné, l'importance du taux d'échec aux examens d'algèbre abstraite semble particulièrement répandue (Dubinsky et al. 1994 ; Hazzan et Leron, 1996 ; Findell, 2001) – Leron et Dubinsky (1995) parlent même d'un *désastre*, indépendant de la qualité de l'enseignement... – les difficultés vécues par les étudiants semblent aussi se refléter dans l'insatisfaction mesurée chez les professeurs (Findell, 2001).

Enfin, réussir un cours ne semble pas garantir la maîtrise de son contenu. Le niveau de compréhension des étudiants reste souvent faible, même après avoir suivi et réussi un cours d'algèbre abstraite. En témoignent les études, notamment par Traoré et al. (2007), qui montrent que les étudiants, suite à un cours d'algèbre abstraite, font encore des erreurs importantes sur des notions élémentaires, telle l'appartenance et l'inclusion.

1.6 Objectifs et questions de recherche

En conclusion, alors que certains des obstacles d'apprentissage de l'algèbre abstraite semblent caractéristiques des théories axiomatiques – comme le recours à la définition et à la démonstration – d'autres, tels le caractère abstrait de la matière et l'absence de représentations graphiques (mentionnés lors de la section 1.3.4, p.8), apparaissent inhérents au contenu de la matière enseignée.

Notre question de recherche vise donc à préciser et mieux comprendre ces obstacles et peut dès lors se formuler comme suit: *Quels sont les difficultés et les obstacles rencontrés par les étudiants soumis à un premier cours d'algèbre abstraite ? Comment peut-on les expliquer ?*

Quant à notre objectif de recherche, il est double : nous proposons tout d'abord une *identification et une catégorisation des difficultés et obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite* avant d'en *présenter une illustration sur la base de productions d'étudiants* puis *d'en cerner les raisons dans le cadre d'un cours de niveau collégial*[11].

[11] Les raisons de ce choix (cycle d'enseignement) seront précisées dans la section relative à notre méthodologie – cf. section3.3.

2 Cadre Conceptuel

Avant d'approfondir notre étude des différents obstacles et difficultés associés à l'apprentissage de l'algèbre abstraite, il convient de définir ce que ce sont une difficulté et un obstacle puis d'en faire la distinction.

2.1 Notions d'obstacle et de difficulté – vers une typologie des obstacles dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite

Selon Lajoie (2009, p. 30), qui elle-même puise ses sources au sein des Petit et Grand Robert, trois principales définitions coexistent pour le terme de « difficulté »:

- *le caractère de ce qui est difficile*, ce qui rend quelque chose difficile: complexité, subtilité. On parle alors de la difficulté d'une entreprise, d'un travail, d'un cas, d'un problème.
- *ce qu'il y a de difficile en quelque chose*: obstacle, barrière. On parle alors de difficultés que comporte un sujet. On dit alors qu'une difficulté peut être surmontée, vaincue, tournée.
- *difficulté à*, c'est-à-dire de l'embarras, de la gêne, du mal, de la peine que peut avoir une personne face à une situation. On parle alors d'une difficulté à comprendre, à s'exprimer...

Cette troisième insiste sur le malaise éprouvé. On y parle alors de gêne, de confusion, de peine... – il s'agit du point de vue en fait adopté par Bednarz (1987) et Glaeser (1981). Les deux premières définitions mettent quant à elles l'accent sur le caractère intrinsèque des difficultés d'une tâche ou d'une notion; on y parle alors d'une complexité, d'une subtilité, d'un *obstacle*, d'une barrière... Ce point de vue, adopté par Vergnaud (1988) et Brousseau (1983), fait plus référence aux notions mathématiques elles-mêmes qu'à la personne qui les rencontre.

2.1.1 *Distinction entre difficultés et obstacles*

Brousseau (1983) ne formule ainsi pas ses obstacles en termes de difficulté, d'incompréhension ou de manque de connaissances. Selon lui, l'obstacle relève d'une *connaissance*, et c'est là ce qui le distingue d'une difficulté. Cette connaissance possède un domaine de validité et d'efficacité, et elle est de plus résistante à l’enseignement et à l’apprentissage (comme le souligne notamment Artigue, 1991, p.252). En effet, Brousseau définit les obstacles de la manière suivante (cité par Artigue, 1991, p.259):

1. « Un *obstacle* sera une connaissance, une conception et non une difficulté ou un manque de connaissance.
2. Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte fréquemment rencontré.
3. Elle engendre toutefois des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
4. Cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse.
5. Après la prise de conscience de son inexactitude, elle continue à se manifester de façon intempestive et opiniâtre. »

La notion de domaine de validité à laquelle il est fait référence aux points 2 et 3 de la précédente définition est reprise par Briand et Chevalier (1995, p. 117) pour qui un obstacle « se manifeste par une famille d’erreurs relatives à un savoir ». Ces erreurs révèlent « une connaissance erronée qui a réussi dans tout un domaine d’action, mais qui échoue dans d’autres. Elles [ces erreurs] persistent souvent après l’apprentissage du savoir correct. Le rejet des connaissances qui ont produit ces erreurs fait partie de la connaissance nouvelle ».

2.1.2 *Typologie des obstacles – distinctions entre difficulté et obstacle*

A l’instar de Brousseau (1983), Briand et Chevalier (1995) distinguent trois types d’obstacles : les *obstacles épistémologiques* (étroitement liés au savoir, la construction des connaissances se heurte à et s'appuie sur ces obstacles), *didactiques* (provoqués par des choix d'enseignement) et *ontogéniques* (liés au développement neurophysiologique du sujet).

Afin d'identifier les obstacles épistémologiques, il faut, selon Brousseau:

- trouver des erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions[12],
- trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques, et
- confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique (Brousseau cité par Artigue, 1991, p.259).

Lajoie reprend cette distinction (2009, p. 30) alors que Vergnaud (1988, p. 13) effectue une différence supplémentaire entre *difficulté conceptuelle* et *obstacle épistémologique* en prenant appui sur les conceptions antérieures de l'apprenant. A titre d'exemple, en ce qui a trait à la multiplication, la concaténation d'additions itérées et le produit cartésien de deux espaces de mesures sont des difficultés conceptuelles car vues comme enrichissement du savoir, sans lien avec les préconceptions de l'élève, alors que la possibilité de diviser un nombre plus petit par un nombre plus grand relève de l'obstacle épistémologique (étant donné la contradiction potentielle avec les conceptions et compétences antérieures de l'élève).

En dépit du fait que tous les chercheurs ne semblent pas s'entendre sur l'ensemble de ces conditions, nous adopterons ce vocabulaire pour asseoir notre terminologie, notamment en ce qui concerne la distinction entre *difficulté* et *obstacle* au sein de notre cadre conceptuel.

2.1.3 *Cas de l'algèbre abstraite – genèse et utilisation antérieure de la notion de groupe*

La définition donnée par Brousseau nous invite à aller prospecter au sein de l'histoire de l'algèbre abstraite afin d'y rechercher la présence d'éventuels obstacles épistémologiques. Un bref regard en arrière nous apprend que « Cayley (1821-1895) est le premier mathématicien de l'histoire à avoir suggéré que les groupes pouvaient être représentés abstraitement à l'aide

[12] La notion de conception sera abordée plus loin.

d'une table de composition, comme il est le premier aussi à avoir proposé une définition générale de groupe » (Lajoie, 2009, p. 76). Fait intéressant souligné par Lajoie (ibid, p.130), les travaux de Cayley ont mis beaucoup de temps à être acceptés par ses contemporains ; « une situation semblable s'était [même] produite précédemment avec l'algèbre symbolique alors que plusieurs mathématiciens, en particulier Hamilton, refusaient de manipuler des symboles n'ayant à leurs yeux aucune signification ».

La notion de groupe a donc été implicitement employée par les mathématiciens sans pour autant être formalisée, notamment par Jordan qui, à l'instar de plusieurs confrères, ont continué à ne manipuler que des groupes avec lesquels ils étaient familiers, soit des groupes de permutations. Lajoie (2009, p. 49) parle ainsi de *groupes implicites* pour désigner des instances du concept de groupe qui n'ont pas été reconnues comme telles par leurs utilisateurs.

Elle souligne en outre que « les réticences des mathématiciens à adopter le point de vue de Cayley suggèrent que le passage des groupes *concrets* aux groupes *abstraits* et celui des groupes *abstraits* à un *concept général de groupe* puissent être difficile pour les étudiants » (ibid, p. 76).

Alors que les étudiants sont confrontés à des *groupes implicites* dès l'apprentissage de notions arithmétiques, un des objectifs du cours d'algèbre est justement de rendre cette notion explicite. Lajoie (2009) souligne que cette *explicitation* ne se fait pas sans heurts.

De la même manière que plusieurs mathématiciens dont Hamilton refusèrent de manipuler des symboles dépourvus de signification, Lajoie décrit la gêne et les nombreuses confusions des étudiants lors du traitement de symboles dénués de sens à leurs yeux. Ces signes ou symboles, déjà connus mais employés dans un contexte mathématique différent[13], prennent en algèbre formelle une signification nouvelle, dans un contexte mathématique original. Ces distinctions sémiotiques se devront d'autant plus d'être étudiées que la familiarité des exemples proposés aux étudiants (souvent d'ordre numérique) semble nuire à l'explicitation de la notion de groupe.

[13] Nous faisons ici notamment référence aux symboles 0; 1; + etc... qui désigneront des notions ou objets plus généraux que ceux jusque-là employés par les étudiants.

Cet amalgame de sens apparaît renforcé par le fait qu'en plus d'employer la même sémiotique, chacun des symboles possède le même nom que celui qui lui a été attribué au début de la scolarité... Cette confusion entre le langage « naturel » et le langage mathématique entraînerait, toujours selon Lajoie (2009, p.245), une *contamination sémantique* sur laquelle nous devrons nous attarder.

2.1.4 *Structure du cadre conceptuel et présentation d'un exemple tiré d'une séquence didactique*

Afin d'introduire les différents éléments de notre analyse, nous proposons l'exemple suivant, tiré de la séquence didactique d'introduction à l'algèbre abstraite (Pfister, 2008) dont nous présenterons une analyse plus complète ultérieurement dans ce mémoire.

Question 1

Considérons l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble K_2 qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps.

Un étudiant qui souhaite résoudre cet exercice pourrait dans un premier temps proposer un candidat et, dans un deuxième temps, vérifier que ce candidat satisfait les différentes propriétés nécessaires pour pouvoir être considéré comme un corps. Indépendamment de l'approche de résolution utilisée, cette activité nécessite un recours aux définitions (section 2.3 du cadre conceptuel, p. 26) et à la validation (section 2.5, p. 49). Notons enfin que le fait d'avoir 0 et 1 en guise de symboles justifiera un détour par la sémiotique et l'étude de ses registres de représentation (section 2.4, p. 40).

Mais avant toute chose, ce qui peut dérouter un étudiant au moment de sa première lecture, c'est le côté *abstrait* de cet énoncé : quelle est donc cette réalité à laquelle un tel énoncé correspond ? S'il ne consiste pas en un pur jeu de l'esprit, quelle situation *concrète* et *réelle* cet énoncé peut-il refléter ?

2.2 Difficultés relatives à l'abstraction

2.2.1 *L'abstrait et l'abstraction selon Aristote*

Une première esquisse de la notion d'abstraction nous est fournie par Aristote. Son postulat est que l'Homme, curieux de nature, cherche à comprendre le monde par l'étude de la Réalité telle qu'elle est (Cleary, 1985). Pour reprendre la terminologie d'Aristote, nous avons à notre disposition plusieurs facultés (les *dispositions sensorielles* et *intellectuelles*) permettant de décrire et percevoir cette Réalité qui nous est extérieure, selon qu'on l'aborde par le biais de notre intellect ou par celui de nos sens. Les connaissances que l'on en tire peuvent alors se classer dans une des deux grandes catégories que sont la connaissance *sensible* et la connaissance *intellectuelle*.

Cette connaissance *sensible*, transmise à l'aide de descriptions et de mesures, n'est toutefois pas suffisante pour permettre une étude complète de la Réalité car elle s'arrête aux événements observés ou ressentis ; à l'aide de la connaissance sensible, on ne peut ni effectuer de rapprochement entre certains faits ni en déduire quelque concept général que ce soit.

En revanche, l'objet étudié dont nous cherchons à améliorer notre connaissance possède également une nature intelligible, du domaine des idées. De cette nature intelligible découlera une définition, laquelle vient alimenter notre connaissance intellectuelle de l'objet.

Selon Aristote, l'intelligence est l'activité de formation d'idée. Elle découvre dans les choses sensibles leur constitution même, leur *nature intelligible*. Et c'est par un processus d'abstraction que l'on parvient à extraire l'intelligible des données de l'expérience sensible. Le rapprochement entre diverses observations et événements sera ainsi à la charge de la connaissance intellectuelle que l'on souhaite, afin de tenter d'expliquer la « Réalité » le plus fidèlement possible.

Aristote considère que cette *abstraction* qui permet de « transformer » la détermination sensible en nature intelligible est en fait le procédé fondamental de l'intelligence humaine. L'intelligence se manifeste ainsi, du moins en partie, dans notre capacité à former des idées en cohérence avec la réalité.

C’est en nous formant une idée de la chose étudiée, c’est en percevant sa nature intelligible, que nous créons l’objet de la connaissance intellectuelle ; c’est à l’aide de sa nature intelligible que nous nous formons une idée de la chose en question. Ainsi, selon Aristote, toutes nos connaissances intellectuelles et nos idées sont abstraites, et l’abstraction, vue comme procédé fondamental de l’intelligence humaine, permettra de classer les connaissances intellectuelles d’après leur degré de profondeur, c’est-à-dire *d’après la distance qui sépare la réalité de l’objet de sa nature intelligible*.

Nous pouvons résumer en énonçant que l’abstraction est un procédé qui transforme la perception sensible en nature intelligible et que l’abstrait est une mesure de la distance ainsi obtenue entre la perception et la connaissance intelligible.

Cette analyse des données sensibles et de leurs rapprochements est reprise par Dreyfus (2002) qui voit en la *généralisation* un des trois processus servant à l'abstraction (les deux autres étant la *synthèse* et la *représentation*). Alors que la généralisation consiste à dégager ou induire à partir de cas particuliers, d'identifier des situations communes ou d'étendre des domaines de validité (Dreyfus, 2002, p. 35), la synthèse tend à combiner ou composer des parties de telle manière qu'elles forment un tout, une entité.

La recherche de régularité entre différents systèmes mathématiques que l’on retrouve au sein de l’algèbre abstraite reviendrait ainsi à pousser l’abstraction au sens d’Aristote et de Dreyfus à son paroxysme (la notion de groupe y est d'ailleurs soulignée par Dreyfus comme étant un bon exemple d'abstraction car elle permet de « montrer à l'étudiant qu'il est possible de décrire de manière unifiée une vaste quantité de situations ayant été préalablement considérées de manière séparée et indépendante les unes des autres » - traduction libre, Dreyfus, 2002, p.37).

Toutefois, la définition qu’Aristote nous fournit de l’*abstrait* (correspondant à une évaluation de la distance entre l’objet et la réalité) demeure intrinsèque à l’objet et indépendante de celui qui le manipule, ce qui relève d’un intérêt limité pour une étude didactique. Dubinsky et Sfard y remédient en nous proposant une mesure qui prend en considération l’élève, ses conceptions et ses productions.

2.2.2 *Le schéma APOS et la réification comme mesures de l'abstrait*

Pour reprendre la terminologie de Sfard, le terme de *concept* sera employé « lorsqu'une idée mathématique est prise en compte dans sa forme *officielle*, en tant que construction théorique à l'intérieur de l'univers formel de la connaissance idéale » (Sfard, 1991, p. 3). Une *conception* consistera en « l'ensemble de toutes les représentations personnelles et les associations évoquées par le concept » (ibid, p. 3).

Dubinsky (1991) part de l'hypothèse théorique selon laquelle toute *conception mathématique* d'un étudiant peut être comprise en tant qu'*action*, *processus*, *objet* ou *schéma* - d'où l'acronyme APOS. Elle permet ainsi d'inclure l'individu au sein de sa mesure de l'abstrait en catégorisant les conceptions des étudiants et non plus strictement les objets mathématiques eux-mêmes.

Les conceptions en *action* et en *processus* sont d'ordre dynamique ; les conceptions en *objet* et *schéma* sont quant à elles plus d'ordre statique. Plus précisément, une conception en *action* diffère d'une conception en *processus* dans le sens où l'étudiant est, dans le cas d'une *action*, focalisé sur une étape spécifique de la procédure et est incapable de réfléchir clairement à une des étapes de résolution suivantes jusqu'à ce que l'étape en cours ait été franchie. Une conception en *action* devient une conception en *processus* à travers un cheminement mental appelé *intériorisation,* au terme duquel l'étudiant peut réfléchir sur le résultat du processus sans en avoir fait toutes les étapes et, en particulier, imaginer le processus inverse[14]. Dubinsky (1991) offre ainsi une hiérarchie des niveaux d'abstraction qui s'inspire de la notion d'abstraction réflexive de Piaget (1970) au sein de laquelle ce dernier distinguait les conceptions figuratives (qui se réfèrent à un état momentané et statique) des conceptions opératives (qui prennent en considération les transformations).

Un saut ontologique appelé *encapsulation* permet ensuite de distinguer une conception en *processus* d'une conception en *objet.* Comme nous l'avons déjà souligné, le passage de l'une à l'autre peut être assimilé à la conversion d'un mécanisme dynamique en une entité stable (qui

[14] Précisons ici que Dubinsky qualifie de conception en *processus* celle d'un étudiant qui considère un concept mathématique comme une entité n'étant que potentielle, dont l'existence nécessite une séquence d'actions.

pourra elle-même s'enrichir et être combinée avec d'autres afin de former de nouveaux objets).

Un étudiant qui a une conception en *objet* d'un concept mathématique peut l'imaginer dans sa globalité et agir dessus avec un haut degré d'habileté, notamment à l'aide d'actions ou de processus. La notion mathématique est alors considérée comme une entité solide ; ceci permet entre autres de l'examiner sous différents angles, d'analyser ses relations avec d'autres notions mathématiques et de lui appliquer des opérations. Pour reprendre les mots de Sfard, nous mentionnerons que

> « concevoir une entité mathématique en objet signifie être capable de s'y référer comme s'il s'agissait d'une chose réelle, une structure statique, existant quelque part dans l'espace et le temps. Cela signifie aussi : être capable de reconnaître l'idée d'un simple coup d'œil et de la manipuler dans son entier, sans entrer dans les détails » (traduction libre, Sfard, 1991, p. 4).

Enfin, les *schémas* sont des collections structurées d'actions, de processus, d'objets voire d'autres schémas qui peuvent eux-mêmes être encapsulés comme objets.

Le plus grand cap à franchir au sein de cette typologie est donc celui qui sépare les conceptions opérationnelles (en processus) des conceptions structurelles (en objet). Parce qu'« il est délicat de développer le discernement nécessaire à une création mathématique sans la capacité à *voir* les objets abstraits, la conception *structurelle* semble très difficile à atteindre » (traduction libre, Sfard, 1991, p.9). C'est la raison pour laquelle « l'approche *structurelle* devrait être vue comme le stade de développement du concept le plus avancé […] car, dans le processus de formation du concept, les conceptions *opérationnelles* précéderaient les conceptions *structurelles* » (ibid, p. 10).

En guise d'exemple, on évoquera le concept mathématique de *fonction*, initialement présenté dans les programmes scolaires sous la forme de correspondance entre deux éléments. En référence à notre terminologie, cette association entre une préimage et son image (ou inversement) mobilise des conceptions de nature plutôt procédurale. Pourtant, ultérieurement dans le curriculum, un ensemble de fonctions déterminé sera associé à plusieurs propriétés : certaines de ces fonctions, satisfaisant des propriétés bien définies, seront par exemple regroupées de manière à former des espaces vectoriels, etc. Les conceptions relatives à la fonction mobilisées seront alors certainement proches de l'*objet* ou, une fois reliées avec d'autres concepts mathématiques comme les équations (différentielles), organisées en un *schéma*.

Notons qu'il existe quelques contre-exemples comme les notions géométriques, « pour lesquelles les représentations graphiques statiques apparaissent très naturelles et qui peuvent probablement être considérées de manière *structurelle* avant même qu'une conscience complète de descriptions sous forme de procédure (conceptions *opérationnelles*) ne soit achevée » (ibid, p. 10). Toutefois, « la majorité des idées émergent en tant que processus plutôt qu'en tant qu'objets » (ibid, p.11).

Une fois l'encapsulation effectuée, la conception opérationnelle n'en reste pas moins indispensable et il peut parfois être utile pour l'étudiant de *désencapsuler* un objet afin de se concentrer sur le processus sous-jacent. C'est la raison pour laquelle Sfard parle de dualité et de complémentarité entre les caractères opérationnel et structurel d'un même concept, ces deux types de conceptions ne pouvant être séparés l'un de l'autre.

Prenant appui sur la *phylogenèse* d'une notion mathématique, Sfard (1991) propose trois étapes jalonnant l'encapsulation, permettant ainsi de détailler ce saut ontologique. Remarquons déjà que celles-ci forment une hiérarchie, c'est-à-dire qu'une étape ne pourra être effectuée avant que toutes les étapes précédentes n'aient été complétées.

En s'alignant sur l'hypothèse de l'origine opérationnelle du concept mathématique, la première étape consisterait en un processus élaboré sur la base d'objets déjà familiers (*intériorisation)*. Ce processus évoluerait jusqu'à ce que l'idée de le transformer en une entité autonome émerge (*condensation*). Enfin, la capacité à considérer cette nouvelle entité en un objet en son entier serait à acquérir (*réification*). Suite à la phase de réification, « une personne peut rechercher les propriétés générales d'une certaine catégorie et effectuer des liens entre les diverses représentations d'un même concept. L'apprenant peut résoudre des problèmes similaires à celui consistant à identifier tous les éléments d'une catégorie satisfaisant une certaine condition » (*traduction libre,* ibid, p.18-19). Remarquons enfin que cette habileté à percevoir quelque chose de familier sous un angle complètement nouveau relève d'un changement qualitatif, alors que *l'intériorisation* et la *condensation* sont graduelles et quantitatives.

De façon quelque peu paradoxale, ce passage du processus à l'objet peut être considéré, une fois complété, comme une réduction du degré d'abstraction : en se familiarisant avec le concept mathématique au travers de la réification, l'élève diminue la « distance » qui le sépare de celui-ci. Un sujet est donc d'autant moins abstrait que la conception de l'étudiant peut, au besoin, être évoquée en tant qu'*objet* ou *schéma*.

Ceci expliquerait la tendance des étudiants à prendre parfois appui sur des notions mathématiques qu'ils connaissent et conçoivent déjà en tant qu'objets ou schémas (comme la multiplication usuelle, vue comme objet ou schéma avec ses propriétés, en lieu et place de la multiplication matricielle), tentant ainsi de réduire le degré d'abstraction des énoncés qui leur sont proposés.

2.2.3 *Modèles analogique et paradigmatique*

Cette disposition à utiliser des notions mathématiques déjà connues afin d'atténuer l'effort d'abstraction peut s'avérer à double tranchant. Dreyfus souligne en effet que

> « les exemples, même s'ils sont nécessaires, peuvent desservir l'abstraction par les élèves. En effet, si les exemples sont trop complexes, i.e. qu'ils contiennent trop de propriétés qui doivent être ignorées dans le processus d'abstraction, il peut être délicat pour les étudiants d'identifier des caractéristiques communes et d'effectuer le processus d'abstraction » (*traduction libre*, Dreyfus, 2002, p.37).

La finesse consistant à ne dégager que les *bonnes propriétés*, celles sur lesquelles reposera la définition moderne, est également mentionnée par Lajoie (2009) qui relève au passage la propension des étudiants à se référer surtout à des exemples de groupes de nombres et non à des groupes de transformations géométriques d'un polygone régulier, pourtant plus typiques d'un groupe général. Or, les groupes de nombres « ne sont manifestement pas les meilleurs pour extraire la définition d'un groupe, en particulier parce qu'ils possèdent plusieurs propriétés additionnelles, comme la commutativité » (Lajoie, 2009, p.241).

Du fait de cet amalgame, les propriétés connues sur les nombres entiers risquent ainsi d'être intégralement attribuées à l'ensemble des structures algébriques. Celles-ci hériteraient ainsi de propriétés qui ne sont pas les leurs, de *propriétés fantômes* (notamment celle de commutativité).

Notons ici que la confusion dont il est question peut également être présente au niveau des symboles et de leurs significations. En d'autres termes, *l'amalgame décrit au paragraphe précédent peut également comporter un volet sémiotique*. Face à notre exemple[15], un étudiant qui souhaite se familiariser avec la notion de corps pourrait associer les symboles employés pour désigner l'élément neutre de l'addition (0) et l'élément neutre de la multiplication (1) à ceux servant habituellement à désigner les deux plus petits éléments de l'ensemble des nombres naturels. En ce qui concerne les opérations et les symboles servant à les désigner, une écriture fréquente telle que $a^n = a + a + \cdots + a$ risque de paraître incohérente à un étudiant novice qui étudierait le groupe $(G; +)$.

Pour asseoir notre propos, nous nous référerons à la terminologie de Fischbein (1987) et à sa classification des différents types de modèles. Alors que Dupin (1995), comme nous l'avions mentionné à la section 1.3.2, en propose une définition sur la base de ses propriétés, Fischbein avance une vision plus « mathématique » de la notion de modèle. Selon lui,

> « un système B est considéré comme un *modèle* du système A si, sur la base d'un certain isomorphisme, une description ou une solution produite en termes de A peut être reflétée de manière consistante en termes de B et inversement » (*traduction libre,* Fischbein, 1987, p.121)

Malgré le caractère peut-être subjectif de certains termes de cette définition (la notion de consistance y est laissée à la discrétion du lecteur), nous y décelons toutefois une volonté prédictive qui se rapproche de celle qu'en donne Dupin (1995) ; l'étude du système A nous apportant les informations recherchées sur le système B.

Parmi tous les modèles, Fischbein distingue les modèles abstraits des modèles intuitifs. Un

[15] « Considérons l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps ».

modèle *abstrait* est un modèle qui permet l'abstraction la plus générale : « la solution obtenue à l'aide d'un modèle abstrait est valide pour le phénomène concret auquel le modèle correspond et représente un instrument essentiel dans la prédiction d'événements en regard du phénomène étudié » (*traduction libre*, Fischbein, 1987, p.121). Les formules physiques et les relations mathématiques sont des exemples de modèles abstraits.

Quant aux modèles *intuitifs*, « il ne s'agit pas nécessairement d'un reflet direct d'une certaine réalité. Très souvent, il s'agit d'une interprétation abstraite de la réalité » (*traduction libre*, Fischbein, 1987, p.121). Il s'agit plus d'une illustration, d'une projection, nécessaire à la compréhension et à l'enseignement d'une discipline. Le graphe d'une fonction ou le segment orienté en guise de « force » au sens de Newton sont des exemples de modèles intuitifs.

Ces modèles intuitifs peuvent ensuite être décomposés en modèles *analogiques* ou *paradigmatiques* suivant l'usage qui est fait de ce modèle. Un modèle analogique est un modèle intuitif qui tend à représenter l'intégralité de la théorie à l'aide de concepts connexes, de champs de connaissances différents (comme c'est le cas de la représentation des nombres complexes à l'aide du plan cartésien). Un modèle paradigmatique représente quant à lui un exemple, un cas particulier de la théorie générale. C'est notamment le cas de la géométrie fondée sur l'algèbre linéaire (étant donné les dimensions des espaces mathématiques étudiés).

Remarquons ici que l'algèbre abstraite emploie une symbolique et des registres sémiotiques qui peuvent faire office de modèles intuitifs. Les exemples portant sur l'ensemble des nombres entiers utilisés au sein d'un cours d'algèbre abstraite servent, suivant la classification proposée par Fischbein, de modèles paradigmatiques : ils ne décrivent pas l'intégralité de la théorie. L'addition dans un groupe y est généralement représentée par le symbole « + » ; ce dernier sert de modèle dans la mesure où l'opération sous-jacente « hérite » des propriétés définies par la notion de groupe. Mais ces propriétés ne sont pas celles de l'opération usuelle sur les réels dans leur intégralité. L'addition usuelle est un « cas particulier » des multiples additions qui peuvent être construites.

Dans notre exemple[16], le symbole « 0 » (respectivement les symboles « 1 » et « + ») n'est qu'une représentation symbolique du concept « élément neutre de l'addition », (respectivement « élément neutre de la multiplication » et « addition »). Une lecture imparfaite de l'énoncé peut mener à la confusion suivante : les symboles 0 et 1, pris dans leur sens usuel (vus comme les deux plus petits éléments de l'ensemble des nombres naturels) peuvent être perçus comme des éléments d'un modèle analogique alors que l'ensemble des entiers ne constitue en fait qu'un exemple de groupe dont la portée ne dépasse pas celle d'un modèle paradigmatique.

Il y a donc glissement potentiel entre le message transmis et l'interprétation qu'en font les étudiants. Ils attribueront des « propriétés fantômes » aux symboles présentés en vertu d'un modèle qu'ils pensent analogique.

Comme le souligne Lajoie (2009), pour manipuler efficacement un groupe spécifié via une table de composition ou via ses générateurs et relations définissantes sans que la nature de ses éléments et celle de l'opération ne soient spécifiées, de même que pour manipuler le concept général de groupe, *il faut absolument se détacher de la signification habituelle de certains symboles, notations ou mots.* Il faut accepter par exemple qu'un mot comme *produit* soit utilisé pour désigner une loi de composition même si celle-ci n'est pas la multiplication, qu'un symbole + puisse être utilisé pour désigner une loi de composition même si celle-ci n'est pas l'addition (et que la notation exponentielle soit utilisée pour représenter le fait d'engendrer même si la loi n'est pas la multiplication).

Selon Fischbein et Baltsan (1998), lorsqu'un terme scientifique est emprunté au langage ordinaire, sa signification première, c'est-à-dire celle prise dans la vie de tous les jours, tend à survivre de manière implicite. Aussi, avec le temps et à force de conflits entre cet implicite et la définition formelle, la seconde tend à disparaître au profit du premier. De tels problèmes viennent du fait que *les étudiants sont généralement inconscients du changement de registres*

[16] « Considérons l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps ».

langagiers. Il y a là une mise en garde à faire contre ce que Lajoie (2009) appelle les contaminations sémantiques.

Cette confusion quant à la nature des symboles manipulés, laquelle met en avant l'importance des registres de représentation sémiotique sur lesquels nous nous attarderons dans la section 2.4 de notre cadre conceptuel (p. 40) et ce glissement de perception chez l'élève (entre les modèles analogique et paradigmatique) soulèvent également la question de la définition des objets mis en jeu et manipulés au sein des modèles. Comme nous l'avions mentionné dans notre problématique, le cours d'algèbre abstraite constitue pour bien des étudiants la première fois où ils ont à manipuler des concepts introduits de manière abstraite (Gallian, 1990) sur la base de définitions formelles. Il sera fréquemment demandé à l'élève de faire référence à la *définition* d'un concept mathématique (comme le concept de *corps* dans notre exemple) lors d'une résolution d'un exercice d'algèbre, voire aussi de *définir* de nouveaux objets (comme les opérations d'addition et de multiplication dans notre exemple).

2.3 Obstacles relatifs aux définitions

Au-delà du fait que « les définitions servent d'assise au raisonnement et à tout l'édifice de la théorie » (Kahane, 1999, p.13), nous voyons deux autres raisons qui motivent notre intérêt pour la définition.

Tout d'abord, même si, comme le soulignent Tall et Vinner (1981), beaucoup de notions mathématiques sont rencontrées sous une forme *implicite* (au sens qu'emploie Lajoie, 2009) avant d'être formellement définies, la définition est généralement proposée au sein d'un cours à une place qui n'est pas vraiment la sienne, se situant à contre-courant de la phylogenèse de la notion définie. Ouvrier-Buffet (2003) observe en effet qu'une définition est généralement l'aboutissement d'un processus de recherche alors que la transposition didactique classique fait en sorte que les définitions sont généralement situées au début d'un cours ou d'un exposé, en guise de préalable à l'étude de la notion. Ainsi, « la transposition didactique prend pour point de départ un aboutissement historique et réécrit l'histoire à l'envers » (Kahane, 1999, p.11). On perd alors de vue les raisonnements qui ont mené au choix des termes contenus dans la définition, générant potentiellement un obstacle didactique[17].

La seconde raison de notre intérêt réside dans la différence d'usage qui est fait des définitions entre le langage courant et le langage mathématique. Dans le premier, les définitions apparaissent comme limitatives et *abréviatives* alors que dans le second, elles cherchent plutôt à ôter des barrières, notamment à l'aide d'une identification et d'une manipulation des caractéristiques universelles des objets et des systèmes (Findell 2001). Comme le souligne Ouvrier-Buffet,

> « le langage courant préfère les définitions exclusives : un carré n'est pas un rectangle et un parallélogramme n'est pas un trapèze. En mathématiques, au contraire, on adopte toujours des définitions inclusives et ainsi, on considère un parallélogramme comme un cas particulier de trapèze, un rectangle est un parallélogramme particulier, et par suite, un trapèze particulier » (Fletcher, *in* Ouvrier-Buffet, 2003, p.21)

Cette discrimination nous apprend que toutes les définitions ne sont pas identiques, qu'elles ne remplissent pas toutes la même fonction et qu'il y a donc une distinction à faire entre les différents types de définitions pouvant être rencontrées au sein des manuels et des pratiques d'enseignement.

2.3.1 *Typologie des définitions*

Pour les logiciens, une *définition* doit être une équivalence entre la notion à définir (definiendum) et une expression ne contenant que des notions dont le sens est évident ou déjà expliqué (definiens) ; étymologiquement, « définir » signifie *délimiter ce qui est de ce qui n'est pas* ou encore *assigner un statut* (Ouvrier-Buffett, 2003).

Les philosophes grecques de l'Antiquité distinguaient déjà deux grandes classes de définitions, issues de deux courants encore présents dans les enseignements et dans certains manuels scolaires (Ouvrier-Buffet, 2003) :

---

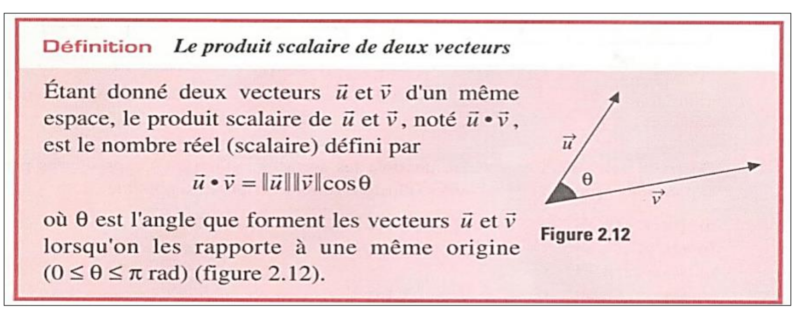
[17] Pour reprendre appui sur notre exemple, une piste d'activité didactique serait alors d'identifier les caractéristiques de l'addition et d'ensuite les présenter pour définir le groupe – les étudiants verraient ainsi pourquoi on a choisi ces trois critères de définitions que sont l'associativité, l'existence d'un élément neutre et d'un inverse et non des autres.

- les définitions *nominales* qui consistent en une énumération de caractères connus suffisants pour distinguer une chose parmi d'autres ; elles pourraient donc posséder un caractère exclusif ;
- les définitions *réelles* ou *essentielles* qui expliquent la genèse de la chose notamment par la recherche des caractéristiques essentielles des objets. Elles laissent au terme défini son idée générale ordinaire et pourraient relever d'un caractère plus inclusif.

Les premières sont « le lieu où l'esprit rapproche des idées séparées jusqu'alors et en fixe le résultat par un mot ; ainsi, la définition se résume à une abréviation » (Ouvrier-Buffet, 2003, p.24). Les secondes participent à l'élaboration d'une théorie et sont ainsi soit évidentes soit à démontrer ; elles peuvent par conséquent être fausses et mises en discussion (*ibid*).

Remarquons que la distinction entre ces différents types de définition était déjà effectuée par Aristote qui opposait alors les *définitions de noms* (nominales) aux *définitions de choses* (essentielles). Selon lui, par sa faculté d'« abstraction », l'Homme cherche en fait à identifier les *caractéristiques essentielles* des objets afin de pouvoir les rassembler sous des *définitions de choses. Le type de définition employé, et par conséquent le sens des mots de référence, semble ainsi évoluer, dans une certaine mesure, avec le degré d'abstraction.*

La Figure 1 nous rappelle la définition généralement employée pour exprimer le produit scalaire de deux vecteurs. En vertu de son caractère exclusif (la définition sous-entend que c'est « *cette formule-ci qui fait foi et non une autre* »), nous pouvons la qualifier de nominale.



Définition *Le produit scalaire de deux vecteurs*

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un même espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$, est le nombre réel (scalaire) défini par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

où θ est l'angle que forment les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on les rapporte à une même origine ($0 \leq \theta \leq \pi$ rad) (figure 2.12).

Figure 1: Exemple de définition nominale - produit scalaire **(Papillon, 1993, p. 52)**

Le produit scalaire est pourtant vu par certains mathématiciens comme une « forme bilinéaire symétrique définie positive »… Cette deuxième définition, à caractère inclusif (car *n'importe quelle* forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire) est une définition essentielle. Elle sous-entend qu'il est possible d'obtenir d'autres types de produit scalaire que celui proposé au sein de la Figure 1.

La définition du groupe donnée par la Figure 2 est par conséquent elle aussi à caractère essentiel. Il en est de même pour celles de corps et d'espace vectoriel généralement employées dans les manuels d'introduction à l'algèbre abstraite.

Alors que l'algèbre abstraite invite les étudiants à traiter avec des définitions essentielles, cet exemple illustre que, d'une certaine manière, ceux-ci semblent jusque-là avoir plutôt manipulé des définitions nominales (nous reviendrons sur une courte recension des types de définitions présentes au sein des manuels dans notre analyse de données).

Définition *Groupe* $\langle G,\bullet\rangle$

Un groupe $\langle G,\bullet\rangle$ est un ensemble G muni d'une opération $\bullet$ qui satisfait aux trois axiomes suivants.

G1 L'opération $\bullet$ est *associative* :
si $a, b, c \in G$, alors $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$.

G2 G contient un *élément neutre* e pour l'opération $\bullet$:
si $a \in G$, alors $a \bullet e = e \bullet a = a$.

G3 Tout élément a de G a un *inverse* a^* dans G relativement à l'opération $\bullet$ et à l'élément neutre e :
si $a \in G$, alors il existe a^* dans G tel que $a \bullet a^* = e = a^* \bullet a$.

Figure 2: Exemple de définition essentielle - groupe (Papillon, 1993, p.335**)**

Ce glissement entre les définitions essentielles et nominales permettrait, du moins en partie, d'expliquer quelques-unes des difficultés[18] reliées aux concepts de groupes et d'axiomes de groupes recensées par Lajoie (2009). Parmi elles, le discernement par les étudiants des propriétés essentielles des groupes, la capacité à délimiter un ensemble de conditions permettant de définir un groupe (i.e. à tenir compte des quatre axiomes de groupe, retrouver la définition, etc...), à considérer des transformations géométriques comme des éléments d'un groupe (et ce à cause d'un trop grand attachement aux ensembles de nombres). Ou encore, de manière plus générale, les difficultés à concevoir le groupe présenté abstraitement, autrement qu'en termes numériques. Comme le précise Lajoie dans sa thèse (2009, p. 129),

> « les participants [à son expérience de doctorat] sont portés à se laisser influencer par les ensembles de nombres au moment de définir dans leurs mots le concept de groupe. […] Cette situation rappelle des difficultés des élèves de passer de l'arithmétique à l'algèbre, en particulier des difficultés liées à l'introduction de nombres non-spécifiés, et plus particulièrement à la signification des lettre utilisées pour les représenter ».

En effet, les définitions s'appliquant également aux symboles employés, elle observe la difficulté des étudiants à reconnaître que l'élément neutre dans un groupe (autre qu'un groupe composé de nombres) puisse être un élément autre que [0] ou [1] . Afin d'appuyer son propos, Lajoie (ibid, p. 121) prend pour exemple le groupe (multiplicatif) des classes résiduelles de $\mathbb{Z}_{10}$ qui possèdent un inverse multiplicatif. Ce groupe, noté ${\mathbb{Z}_{10}}^{x}$, possède les quatre éléments {[2], [4], [6], [8]} et l'élément [6] y est le neutre. À l'aide d'entretiens, Lajoie relève en effet que cet ensemble, muni de la multiplication modulo 10, n'est pas considéré comme étant un groupe par les étudiants sous prétexte que ni [0] ni [1] n'y figurent.

Plusieurs typologies proposent également des définitions d'autres types, comme les définitions génératives, intuitives, analytiques, génétiques, etc. Toutefois, comme le souligne Ouvrier-Buffet (2003), les courants nominalistes et essentialistes sont les deux principaux courants philosophiques et mathématiques ayant alimenté le débat sur la définition au cours de l'histoire.

---

[18]Le terme de *difficulté* est employé par Lajoie (2009). Toutefois, comme nous le verrons au sein de notre conclusion, les *difficultés* présentées dans ce chapitre semblent plus faire référence à des *obstacles*, suivant la terminologie adoptée au début du présent cadre conceptuel.

2.3.2 *Les courants nominaliste et essentialiste*

Les nominalistes ne sont pas dans une perspective métaphysique (laquelle est propre aux essentialistes) mais s'inscrivent plutôt dans une logique psychologique et méthodologique. Ceux-ci se sont principalement attachés au fait qu'un mot n'est qu'une abréviation, donnant la préexistence au concept qui lui-même procède de l'observation (Ouvrier-Buffet, 2003, p.25). Les idées n'y ont pas d'existence réelle mais sont seulement des mots issus de la perception, des étiquettes qui nous servent à désigner des individus. Le nominalisme est alors perçu sous un angle *abréviatif* (ou *dénominatif*) – le terme dénomination signifiant *choix d'un mot pour une notion*.

Plusieurs philosophes et mathématiciens s'inscrivent quant à eux dans le courant essentialiste qui prend le parti de travailler sur l'essence et l'existence d'un concept. Les héritiers des essentialistes pensent que les mathématiques ont une certaine réalité, qu'il ne s'agit pas que d'un jeu de symboles. Ainsi, les finalités de l'essentialisme peuvent être de caractériser un objet, d'en rechercher l'existence, de démontrer la fécondité d'une définition, d'élaborer une théorie non contradictoire…

Frege souligne élégamment cette dimension constructive de la définition au sein du courant essentialiste en soulignant qu' « on ne peut pas savoir ce qu'on pourra sortir de la définition : ce qu'elle implique n'est pas contenu comme une poutre l'est dans une maison mais plutôt comme une plante l'est dans une graine » (Frege *in* Ouvrier-Buffet, 2003, p.28).

Aristote, qui distinguait déjà les définitions essentielles des nominales, s'inscrit plutôt dans le courant essentialiste (Ouvrier-Buffet, 2003) ; il emploie une méthode de définition par genre et différence spécifique en estimant que, pour connaître l'*essence*, il faut trouver le genre auquel appartient la chose puis un trait particulier qui différencie cette chose des autres éléments du genre. Aristote aborde ainsi la définition en tant que discours : exprimer l'essence de la chose consiste à donner le *genre* et la *différence spécifique* de la chose. Par exemple, l'homme est un animal (genre) raisonnable (différence spécifique).

Le philosophe dégage même un certain paradoxe dans le fait de définir : alors qu'une définition est l'essence d'une chose, l'essence est ce qui est énoncé dans la définition. De la même manière qu'avec la poule et l'œuf, on ne sait donc qui, de la définition ou de l'essence, constitue l'origine de la chose… Comme le souligne Ouvrier-Buffet (2003, p. 51), ce « *cercle vicieux* – à éviter selon Aristote et les logiciens – rejoint l'idée de régression à l'infini. Plus précisément, cela nous permet ici d'insister sur l'importance, dans toute construction axiomatique, des éléments premiers ». Et pour y remédier, il paraît indispensable d'expliciter l'antérieur et le postérieur à la définition. Car les problèmes concernés par la définition y sont principalement des problèmes de classification[19] (comme en géométrie) et,

> « plus largement, des problèmes où une action de délimitation est possible – au sein d'un même genre par exemple – et où la méthode de définition par genre et différence spécifique [ou, plus généralement, ce qui constitue la recherche de l'essence] est opératoire » (ibid, p.51).

2.3.3 *Le point de vue essentialiste de Leibniz*

A l'instar d'Aristote, Leibniz distinguait lui aussi les définitions nominales des essentielles. Il compléta la classification d'Aristote (qui opposait simplement les deux principales catégories) à l'aide d'une hiérarchisation de différents types de définitions suivant le degré de difficulté et le degré de certitude :

- les définitions *nominales* : celles-ci risquent d'être provisoires, parfois contradictoires, voire illusoires. Il est, selon Leibniz, impossible de démontrer l'équivalence entre deux définitions si elles ne sont que nominales. Les conclusions obtenues par des définitions nominales ne sont qu'hypothétiques.
- les définitions *réelles* : elles expriment ou impliquent la possibilité des êtres qu'elles introduisent et préservent ainsi du risque de contradiction. Leibnitz décompose celles-ci en deux sous-catégories:
    - réelles causales : la preuve du possible se fait *a priori* ou lorsqu'une définition constructive règle la génération de la chose ;
    - réelles *parfaites* ou *essentielles* : poussent l'analyse jusqu'aux notions primitives,

[19] Ouvrier-Buffet (2003) observe de plus que ce type de problème présente de grandes difficultés chez les étudiants, notamment lors de la génération d'exemples et de contre-exemples à partir d'une définition formelle, car cette dernière met en jeu un certain processus de catégorisation qui se révèle délicat.

sans rien supposer, qui ait besoin de preuve a priori de sa possibilité. Plus que des explications, *Leibniz les considère comme des axiomes ou des postulats.*

Par exemple, la Figure 3 fait référence à une définition *réelle causale* (l'objet étant défini par construction). La définition présentée à l'aide de la Figure 4 est *réelle parfaite* (ou *essentielle*). Quant à la définition de groupe présentée à la Figure 2, elle reste *essentielle* selon la terminologie de Leibniz.

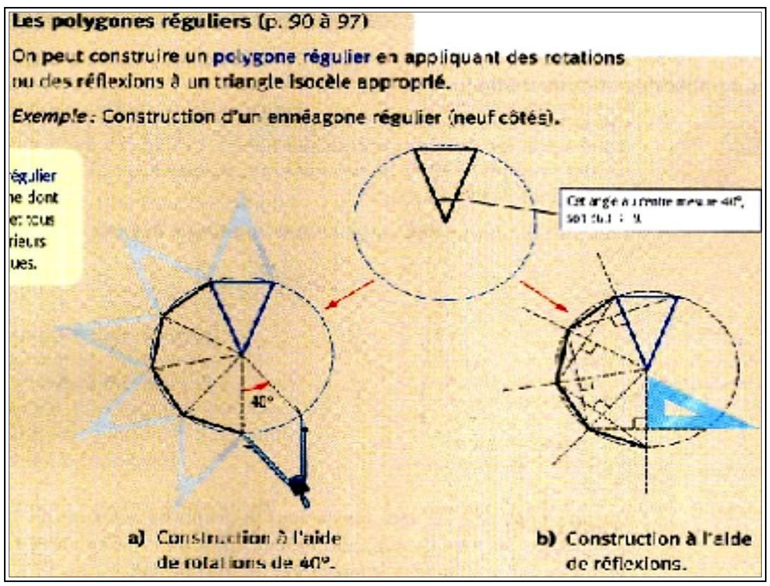


Figure 3: Exemple de définition par construction - polygone régulier (Guay, 2006, p.540)

Définition ***Espace affine sur un espace vectoriel***

Un espace affine sur un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est la donnée

i) d'un ensemble $\mathcal{E}$ dont les éléments sont appelés points, et notés A, B, C, etc.;

ii) d'une opération appelée addition affine et notée $\mathbin{\pmb{+}}$ qui associe à chaque point A dans $\mathcal{E}$ et à chaque vecteur $\vec{v}$ dans $\mathcal{V}$ un point $A \mathbin{\pmb{+}} \vec{v}$ dans $\mathcal{E}$ de telle façon que :

1. pour chaque paire de points A et B de $\mathcal{E}$, il existe un et un seul vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$ tel que $A \mathbin{\pmb{+}} \vec{v} = B$,
2. pour chaque point A de $\mathcal{E}$ et chaque vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{V}$, il existe un et un seul point B de $\mathcal{E}$ tel que $A \mathbin{\pmb{+}} \vec{v} = B$,
3. l'addition vectorielle est transitive sur l'addition affine :

$$A \mathbin{\pmb{+}} (\vec{u} + \vec{v}) = (A \mathbin{\pmb{+}} \vec{u}) \mathbin{\pmb{+}} \vec{v}$$

quel que soit le point A dans $\mathcal{E}$ et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{V}$.

Figure 4 : Exemple de définition essentielle - espace affine (Papillon, 1993, p.41)

Leibniz s'inscrit ainsi dans une perspective de construction de théorie dont « les seuls principes premiers sont les définitions : une démonstration lui apparaît comme un enchaînement de définitions et il distingue, dans l'art de démontrer, deux arts à savoir *l'art de définir* (analyse) et l'*art de combiner les définitions* (synthèse) » (Ouvrier-Buffet, 2003, p.31). Sa principale préoccupation est qu'une bonne définition, au-delà du discours, doit révéler l'existence de l'être qu'elle définit.

2.3.4 *La vision heuristique de Lakatos*

Cette volonté d'attribuer à la définition une dimension constructive est reprise par Lakatos qui propose lui aussi plusieurs types de définitions. Ouvrier-Buffet relève que Lakatos se réfère pour cela au processus de preuve, soulignant ainsi les ressemblances entre les heuristiques scientifiques et mathématiques. Pour Lakatos, c'est « la recherche d'une preuve, l'étude d'une conjecture qui conduisent à la formation d'un ou plusieurs concepts, et ceci se traduit notamment par l'évolution des définitions de ceux-ci. […] Une procédure définitionnelle correspond à la formation du concept qui lui-même provient de la preuve » (Ouvrier-Buffet, 2003, p.58). Il profite de la dialectique entre preuve et formation de concept tout en faisant apparaître les notions de *concept naïf*, *concept-zéro* (zero-concept) et *concept généré par la preuve* (*proof-generated concept*) et introduit, en parallèle, les notions de *définition naïve*, *définition-zéro* (*zero-definition*) et *définition générée par la preuve* (*proof-generated definition*).

Un *concept naïf* est une idée de départ, l'embryon d'un processus de recherche, qui peut ne déboucher sur rien ; il ne donne pas nécessairement lieu à une *définition-zéro*. De la même manière qu'un *concept naïf* peut s'avérer inexact pour ensuite être gommé et remplacé sans laisser de trace par un *concept généré par la preuve*, une *définition naïve* peut ne rien apporter et tomber aux oubliettes.

Selon Lakatos, une *définition-zéro* possède une fonction de dénomination et se situe à l'origine du processus de recherche. Il s'agit d'une définition qui peut être adoptée à titre d'essai. « Elle peut être amenée à disparaître ou à évoluer vers une *définition générée par la preuve* » (Ouvrier-Buffet, 2003, p.61). Les *définitions-zéro* « constituent un raccourci de langage sans que le concept mathématique ainsi désigné ne soit encore défini. Celles-ci peuvent être des définitions à l'essai au début de l'investigation » (ibid, p.60). Elles naissent de la recherche d'une preuve et se situent en aval des *définitions générées par la preuve*.

Ces dernières, quant à elles, auraient en quelque sorte vocation de préserver les théorèmes. Elles sont abouties et permettent à la théorie dans laquelle elles s'inscrivent d'être cohérente. Les définitions usuelles employées au sein d'un cours d'algèbre sont ainsi des *définitions générées par la preuve*.

Notre exemple[20] de tâche convie implicitement l'étudiant à passer par chacun des différents stades de définition proposés par Lakatos.

[20] « Considérons l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps ».

2.3.5 *Image du concept et définition du concept*

Toutefois, l'usage et le recours aux définitions formelles ne semble pas être la norme chez les étudiants. Tall et Vinner (1981) observent que ceux-ci privilégient plutôt des « représentations » sans forcément faire usage des définitions « formelles ». Petit à petit, les étudiants semblent même ne plus avoir recours à la définition. En d'autres termes, malgré leur possible coexistence, l'image du concept tend à devenir dominante : elle l'emportera au fur et à mesure de l'apprentissage sur la définition du concept. C'est sur ce glissement que nous proposons de nous attarder maintenant.

Afin de justifier leur propos, Tall et Vinner (1981) relèvent tout d'abord qu'une définition formelle n'est pas toujours antérieure à l'étude d'un concept : beaucoup de notions abordées en mathématiques sont rencontrées sous une forme ou une autre avant d'être formellement définies. C'est une des raisons pour lesquelles une structure cognitive complexe semble exister dans l'esprit de chacun, produisant une large variété d'images mentales personnelles lorsque le concept est évoqué. Les auteurs poussent leur analyse en remarquant qu'« une grande partie des concepts régulièrement utilisés ne sont en fait pas définis de manière formelle ; on apprend à les reconnaître par expérience et par leur utilisation dans des contextes appropriés » (*traduction libre*, Tall et Vinner, 1981, p.151).

Rappelons que, par « concept », nous faisons toujours référence, en accord avec la terminologie de Sfard, aux cas où « une idée mathématique est prise en compte dans sa forme officielle, en tant que construction théorique à l'intérieur de l'univers formel de la connaissance idéale » (*traduction libre*, Sfard, 1991, p. 2). Une conception consiste quant à elle en « l'ensemble de toutes les représentations personnelles et les associations évoquées par le concept » (ibid, p. 2).

Selon Tall et Vinner (1981), ces concepts seront ensuite affinés au cours de l'étude et interprétés selon une subtilité croissante, avec ou sans le luxe d'une définition précise. Dans ce processus, le concept est habituellement présenté à l'aide d'un symbole ou d'un nom qui favorisera sa communication ainsi que sa représentation mentale. Ainsi, durant le procédé mental de remémoration et de manipulation du concept mathématique, beaucoup de processus associés sont mis en jeu, de manière consciente ou non, pouvant en affecter le sens et l'usage. Nous utiliserons donc, à l'instar de ces deux auteurs, le terme *image du concept* (traduction libre de l'expression *concept image*) pour décrire l'intégralité des représentations cognitives associées au concept. Elle inclut toutes les images mentales ainsi que les propriétés et processus associés et se construit à travers les expériences, au cours des années, changeant au fur et à mesure que l'individu grandit et rencontre de nouveaux stimuli.

Il y a donc, pour un même concept, une image (représentation faite de l'objet par l'élève) et une définition qui établit un lien entre l'objet considéré et une formulation langagière. Selon Vinner (2002) et Ouvrier-Buffet (2003), il se peut même qu'il y ait opposition entre ces deux représentations d'un même concept (la « définition » vs l'« image »). Ces auteurs relèvent enfin que *l'existence de l'image du concept peut entraîner un non-recours ou un recours partiel à la définition du concept*. Les élèves ayant tendance à ne pas recourir aux définitions, il semble nécessaire d'élaborer une stratégie d'enseignement dont le but est de montrer le statut d'énoncé mathématique des définitions, au même titre qu'un théorème, comme étant un élément de la théorie mathématique. Toujours selon ces deux auteurs, il semble indispensable que les étudiants se trouvent parfois dans des situations où leur *image du concept* ne fonctionne pas correctement ; cette rupture est nécessaire pour qu'il y ait un retour sur la définition voire une reconstruction de la définition « formelle ».

Enfin, il est des contextes (comme l'algèbre abstraite en particulier et les théories axiomatiques en général) dans lesquels se rapporter à la définition formelle est crucial pour une exécution correcte des tâches demandées comme l'identification des exemples et des contre-exemples malgré les nombreuses difficultés rencontrées (Ouvrier-Buffet, 2003).

2.3.6 *Des incohérences potentielles*

Plusieurs stimuli différents pouvant activer différentes parties de l'image du concept, cette dernière peut se développer dans un sens qui ne nécessite pas un tout cohérent. Il y a donc un risque que le processus d'apprentissage débouche sur des images évoquées du concept mutuellement contradictoires (toujours en référence à Tall et Vinner, nous appelons *image évoquée du concept* la partie de l'image du concept qui est activée à un moment donné –

traduction libre du terme *evoked concept image*).

Pour illustrer nos propos, reprenons l'exemple de la multiplication : avant sa définition formelle, les étudiants peuvent considérer cette opération comme forcément commutative. Cette perception est certainement en contradiction avec la généralisation du concept (multiplication matricielle) qu'on fera dès le début d'un cours d'algèbre abstraite ou linéaire[21].

Ces images peuvent non seulement ne pas être cohérentes dans leur globalité mais également posséder quelques aspects relativement différents de la définition formelle du concept. En d'autres mots, il peut y avoir un décalage entre la représentation et la définition du concept mathématique. En effet, « plusieurs recherches montrent que certaines images du concept diffèrent parfois de la théorie formelle et contiennent des éléments qui peuvent causer des conflits cognitifs » en cas d'incohérence entre celles-ci (traduction libre, Tall et Vinner, 1981, p.151). Ainsi,

> « nous considérerons la *définition du concept* comme étant une formulation constituée de mots servant à spécifier le concept. Elle peut être apprise par une personne de manière triviale ou plus significative et liée à un degré plus ou moins important au concept dans son ensemble. Il peut aussi s'agir d'une reconstruction personnelle d'une définition par l'étudiant. Il peut également s'agir de la formulation utilisée par l'étudiant pour sa propre explication de l'*image évoquée du concept*. Si la *définition du concept* lui est donnée ou si elle est construite par lui-même, elle peut varier au cours du temps. En ce sens, une *définition personnelle du concept* peut différer d'une *définition formelle du concept*, cette dernière étant celle acceptée par la communauté mathématique dans son ensemble » (traduction libre, Tall et Vinner, 1981, p.152).

Cette *définition du concept* a beau être partagée, elle engendre, chez chaque personne, une *image du concept* qui lui est propre. Dreyfus (2002) relève également que chaque conception est personnelle alors que la définition est identique et partagée par tout le monde.

Afin d'illustrer cette différence entre la conception et la définition, on peut prendre pour exemple celui de la fonction ; sa définition formelle (*« une relation entre deux ensembles A et B pour laquelle à chaque élément de A correspond un et un seul élément dans B »*) est souvent

---

[21] Notons qu'ici, une ancienne connaissance rentrant en contradiction avec une nouvelle notion, on rejoint la notion d'obstacle épistémologique au sens de Brousseau (1983).

remplacée par une image mentale mettant en jeu des axes, un graphe ou une formule qui constituent les éléments d'une « image personnelle du concept » (Tall et Vinner, 1981). Dans de tels cas,

> « l'*image du concept* peut se développer en une notion plus restreinte, évoquant une simple formule, alors que la *définition du concept* est en grande partie inactive dans la structure cognitive de l'élève. Initialement, l'étudiant qui est dans cette position peut opérer avec une certaine réussite à l'aide de ces notions restreintes dans un contexte restreint. Il se peut même qu'il apprenne à répondre à l'aide d'une définition formelle correcte quand bien même il manipule une image inappropriée du concept » (traduction libre, Tall et Vinner, 1981, p.153).

Ainsi, à l'instar de Tall et Vinner, nous appellerons *facteur de conflit potentiel* une partie de l'image du concept (ou de la définition du concept) qui peut rentrer en conflit avec une autre partie de l'image (ou de la définition) du concept. Selon ces deux auteurs, la plus importante catégorie de *facteurs de conflit potentiel* est observée lorsque l'image du concept est en désaccord non pas avec une autre partie de l'image du concept mais avec la définition formelle du concept elle-même. Cela semble particulièrement pertinent dans le cas de l'algèbre abstraite car

> « de tels facteurs peuvent sérieusement entraver l'apprentissage d'une théorie formelle. Les étudiants ayant de tels facteurs de conflit potentiel dans leur image du concept peuvent être confiants dans la qualité de leurs propres représentations et simplement considérer la théorie formelle comme inefficace et superflue » (traduction libre, Tall et Vinner, 1981, p.154).

De plus, c'est seulement lorsque les différents aspects du conflit sont évoqués de manière simultanée qu'il y a sentiment de conflit ou de confusion.

Notons enfin que, même si le type d'enseignement semble avoir un impact sur le type de représentation du concept effectuée par les élèves, l'enseignement, qu'il soit théorique ou non, n'élimine pas complètement les risques de facteurs de conflits potentiels. Comme le relèvent Bingolbali et Monaghan (2008), au moment où les notions d'image du concept et de définition du concept ont été introduites dans la littérature didactique,

> « il existait une idée répandue stipulant que, si les enseignants de maths

> présentaient des définitions exactes, alors, suite à une explication claire et détaillée, le concept se cachant derrière la définition apparaîtrait clairement à l'élève. Pourtant, plusieurs étudiants généreront, parmi des associations d'idées intentionnelles et *exactes*, des images inappropriées de concept » (traduction libre, Bingolbali et Monaghan, 2008, p.19).

Vinner (2002) suggère ainsi que l'élaboration d'une séquence didactique puisse tenir en partie compte de ces facteurs de conflits potentiels, voire éventuellement les anticiper. Notons que Lajoie (2009) nous en fournissait un exemple lorsqu'elle parlait de contamination sémantique sur les symboles; elle mettait en exergue le fait que l'image mentale des étudiants sur + était en désaccord avec la définition formelle de l'opération représentée par ce symbole.

Mais cet exemple sur la compréhension par les étudiants du signe + soulève un questionnement un peu plus général quant aux modes et aux registres de représentations à disposition des élèves. De quelle manière peut-on (se) représenter un concept mathématique ? Quels sont les moyens à notre disposition afin de rendre intelligible une donnée aussi « abstraite » que certains objets mathématiques ? Comment surmonter une des difficultés de l'abstraction – relevée par Dreyfus, (2002, p.38) – qui consiste à générer des structures mentales pourtant souvent reliées aux images visuelles lorsqu'elles sont censées représenter des relations éloignées des objets concrets auxquels elles étaient originalement reliées?

2.4 Obstacles relatifs aux modes de représentations (registres de représentations sémiotiques)

Duval, à l'aide de ses études sur les registres sémiotiques, nous fournit quelques éléments de réponses. Mais au-delà d'être de simples supports à la représentation, il semblerait que ces registres sémiotiques s'avèrent nécessaires à la compréhension même des concepts mathématiques. Comme le souligne Duval, « il n'est pas possible d'étudier les phénomènes relatifs à la connaissance sans recourir à la notion de représentation (…) Car il n'y a pas de connaissance qui ne puisse être mobilisée par un sujet sans une activité de représentation » (Duval, 1995, p. 15). Duval observe de plus qu'on ne peut s'approprier l'objet sans en maîtriser quelques-unes de ses représentations (ou, pour reprendre sa formulation originale, qu'« il n'y a pas de noésis sans sémiosis »).

2.4.1 *Noésis et Sémiosis*

Tall et Vinner (1981) relevaient déjà qu'une définition donnée pouvait générer des représentations personnelles du concept, distinctes suivant les individus. Une même notion mathématique peut ainsi être développée et perçue au moyen de représentations a priori très hétérogènes.

Ce constat est partagé par Dreyfus (2002) et Duval (1995) qui soulignent à la fois l'importance des transitions entre les diverses représentations mais également la grande variété de celles-ci. Duval considère même cette diversité comme une des spécificités de l'activité mathématique. En effet,

> « la particularité de l'apprentissage des mathématiques tient à ce que les activités cognitives y requièrent l'utilisation de systèmes d'expression et de représentations autres que le langage naturel ou que les images : systèmes variés d'écriture pour les nombres, notations symboliques pour les objets, écriture algébrique et logique qui prennent le statut de langues parallèles au langage naturel pour exprimer les relations et les opérations, figures géométriques, représentations en perspective, graphe cartésien, réseaux, diagrammes, etc… » (Duval, 1995, p.1)

Parce que les objets mathématiques peuvent être appréhendés à travers leurs représentations, il existe un grand risque de les confondre avec celles-ci et Duval (1995) en conclut qu'il est capital pour la compréhension en mathématiques d'être apte à effectuer la distinction entre un objet et sa représentation.

Cette « compréhension », Duval l'associe plus précisément à l'appréhension conceptuelle d'un objet, à la discrimination d'une différence ou à la compréhension particulière d'une inférence et regroupe ces différentes notions sous la dénomination de *noésis*. Il nomme *sémiosis* l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique. La clé de voûte de l'argumentation de Duval réside dans le fait que,

> « étant donnée la nécessité des représentations sémiotiques pour certaines fonctions cognitives fondamentales et l'implication réciproque des représentations mentales et des représentations sémiotiques, *il ne peut y avoir de noesis sans sémiosis* ; c'est la sémiosis qui détermine les conditions de possibilités et d'exercice de la noésis » (Duval, 1995, p.4)

Ainsi, la représentation des notions apparaît nécessaire à leur apprentissage. Il convient par conséquent de les détailler au sein de notre étude, d'autant plus que, comme nous l'avions illustré au sein de la section consacrée aux modèles de Fischbein, le contexte d'apprentissage de l'algèbre abstraite peut faire naître d'importantes confusions en ce qui a trait aux symboles (comme par exemple une trop forte association par les étudiants des symboles « 0 » et « 1 » aux deux plus petits éléments des naturels).

2.4.2 *Les registres de représentations sémiotiques*

Alors que les *représentations mentales* correspondent aux conceptions d'un individu sur un objet, une situation et ce qui leur est associé, les *représentations sémiotiques* sont définies comme des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement. Plus précisément, « la notion de *registre de représentation sémiotique* désigne tout système qui permet les trois activités suivantes :

1. constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une *représentation de quelque chose dans un système déterminé* ;
2. transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales ;
3. convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système de telle façon que ces dernières permettent d'expliciter d'autres significations relatives à ce qui est représenté » (Duval, 1995, p.21).

De la même manière qu'il existe différentes représentations mentales pour un même concept, un objet mathématique peut ainsi avoir plusieurs représentations sémiotiques. Par exemple, une certaine fonction polynomiale du deuxième degré peut être évoquée à l'aide de chacun des trois registres suivants :

- un registre relatif à la *langue naturelle* qui pose qu'à un nombre donné, on lui fait correspondre la différence entre la somme du double de son carré et de son triple avec 5.

- un registre *symbolique* à l'aide de la notation $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$
- un registre *graphique* avec le graphe suivant (cf. Figure 5)

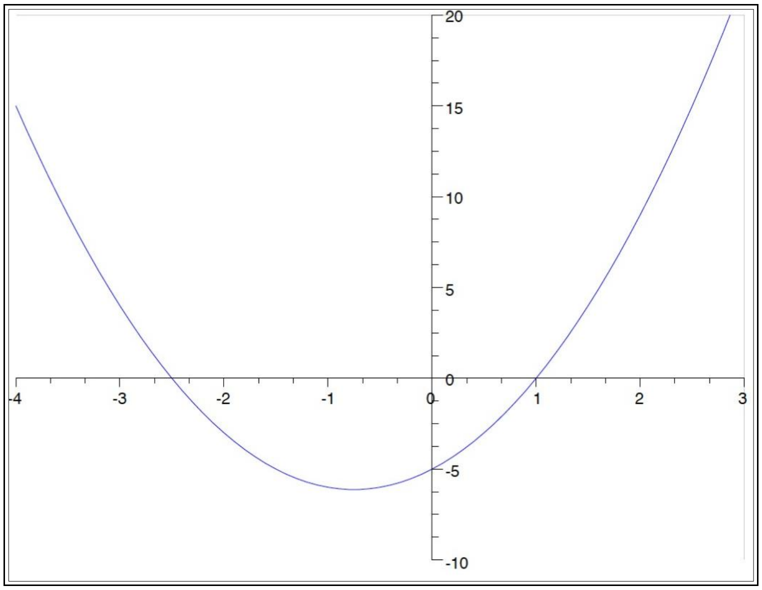


Figure 5 : Représentation graphique de la fonction f

À vrai dire, Duval (1995) insiste sur la diversité des registres de représentation sémiotiques. Tous ces registres lui apparaissent comme « des systèmes de représentations très différents entre eux et qui posent chacun des questions d'apprentissage spécifiques » (ibid, p.22). Cette pluralité des registres nécessite ainsi une différenciation entre le *représentant* et le *représenté* afin de garantir la compréhension du sujet mathématique. Duval (1995) relève qu'une telle différentiation n'est jamais acquise d'emblée et ce, quels que soient le registre de représentation et le stade de développement de l'élève. Il identifie deux conditions indispensables à la distinction entre le représentant et l'objet représenté. Pour effectuer cette distinction et pour qu'une représentation puisse véritablement fonctionner, il est nécessaire que les élèves « disposent d'au moins deux systèmes sémiotiques différents pour produire la présentation d'un objet, d'une situation, d'un processus… et puissent convertir spontanément d'un système sémiotique à l'autre, sans même le remarquer, les représentations produites » (Duval, 1995, p. 22).

Cette coordination, nécessaire entre les différents registres de représentations sémiotiques disponibles, s'avère elle aussi délicate. A vrai dire, Dreyfus (2002) note le fait que les étudiants se limitent souvent à travailler sur une seule des multiples représentations possibles. Quant à Duval, il remarque que

> « la connaissance de règles de correspondance entre deux système sémiotiques différents ne suffit pas pour qu'ils puissent être mobilisés et utilisés ensemble. Un obstacle majeur à une mise en place spontanée de cette coordination est l'importance des phénomènes de non-congruence entre les représentations produites dans des systèmes différents » (ibid, p.22)

L'importance de la faculté de coordination entre différents registres est également soulignée par Dreyfus (2002, p.39) qui l'utilise pour proposer une autre mesure de la faculté d'abstraction d'un étudiant. Plus que le nombre de représentations différentes employés par l'étudiant, c'est sur la facilité de transition et la qualité du lien entre différentes représentations d'un même objet mathématique que Dreyfus s'appuie pour quantifier l'abstraction d'un étudiant. Un étudiant qui n'userait que d'une seule représentation se situerait au premier des quatre jalons successifs. L'utilisation par l'étudiant de plus d'une représentation en parallèle en constitue le deuxième. La possibilité pour l'étudiant de faire des liens entre les différentes représentations parallèles et le passage aisé de l'une à l'autre complètent cette mesure.

2.4.3 *Congruence entre les registres*

Un peu comme si ces systèmes étaient cloisonnés, la transition d'un système de représentation à un autre ou la mobilisation simultanée de plusieurs registres semble être source de difficultés voire constituer un obstacle chez les étudiants. « Le plus souvent, [les élèves] ne reconnaissent pas le même objet à travers les représentations qui peuvent être données dans des systèmes sémiotiques différents » (Duval, 1995, p.5).

Duval identifie pourtant certaines catégories de tâches au sein desquelles la conversion entre différents registres semble aisée et qui donnent lieu à un taux élevé de réussite. Il est donc des situations ou le cloisonnement entre les différents registres semble moins net. C'est sur la base de cette observation que Duval construit la notion de congruence entre les différents registres.

Généralement, le passage d'une représentation à une autre se fait naturellement lorsqu'elles sont *congruentes*, c'est-à-dire lorsque les trois conditions suivantes sont remplies :

1. il existe une correspondance sémantique entre les unités signifiantes[22] qui les constituent ;
2. il y a un même ordre possible d'appréhension de ces unités dans les deux représentations ;
3. il n'existe qu'une seule unité signifiante dans la représentation d'arrivée par unité signifiante dans la représentation de départ pour la conversion.

Par exemple, il y a congruence entre le registre symbolique $y > x$ et son équivalent en langage naturel : *l'ordonnée est supérieure à l'abscisse*. On constate en effet une correspondance terme à terme entre les unités signifiantes respectives qui est suffisante pour effectuer la conversion. En revanche, cette correspondance terme à terme n'est pas respectée entre l'expression $x > 0$ (qui contient trois unités signifiantes) et *l'abscisse est positive*, un de ses homologues en langage naturel (qui ne contient que deux unités signifiantes). L'écart à franchir pour effectuer la conversion devient encore plus grand avec l'expression *l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe* et son expression algébrique $xy > 0$. Ici, non seulement n'y a-t-il plus de correspondance terme à terme entre les unités signifiantes respectives des deux expressions, mais une réorganisation de l'expression donnée du registre de départ est nécessaire pour obtenir l'expression correspondante dans le registre d'arrivée. En outre, l'expression > 0 se traduit aussi bien à l'aide des expressions *de même signe* que *positif*. La conversion inverse ne permet pas de retrouver l'expression initiale $xy > 0$, qui se traduit naturellement par *le produit de l'abscisse et de l'ordonnée est supérieure à 0 (est positive)*, et non par *l'ensemble des points dont l'abscisse et l'ordonnée sont de même signe*.

Dans ces deux derniers cas, on parle de non-congruence des représentations[23] ; la conversion

---

[22] En référence à Duval (1995), on appellera « unité signifiante » élémentaire toute unité qui relève du « lexique » d'un registre.

[23] Notons que la dernière condition requise a pour conséquence que la congruence n'est pas symétrique : il se peut que deux représentations soient congruentes dans un sens de conversion et ne le soient pas pour les conversions inverses. La conversion entre l'expression $xy > 0$ et son équivalent dans un graphe cartésien en est un exemple.

peut se révéler impossible à effectuer ou même à comprendre s'il n'y a pas eu un apprentissage préalable concernant les spécificités propres à chacun des registres en présence. Ainsi, même si

> « la spécificité des représentations sémiotiques consiste en ce qu'elles sont relatives à un système particulier de signes (le langage, l'écriture algébriques ou les graphes cartésiens), […] elles peuvent être converties en des représentations *équivalentes* dans un autre système sémiotique mais pouvant prendre des significations différentes pour le sujet qui les utilise » (Duval, 1995, p.17).

Il devient alors essentiel de distinguer les activités de traitement de celles de conversion. Pour reprendre la terminologie de Duval (1995), un *traitement* est une transformation qui s'effectue à l'intérieur d'un même registre. La *conversion* est une transformation qui fait passer d'un registre à l'autre et qui requiert par conséquent leur coordination. Cette différentiation apparaît primordiale car « c'est seulement en distinguant les activités de traitement et de conversion que l'on peut voir la persistance des difficultés relatives à l'activité de conversion et l'importance des phénomènes de cloisonnement entre les registres » (Duval, 1995, p.23). Dans le cadre de notre exemple, il y a *conversion* entre l'expression (périphrase) « élément neutre de l'addition » et sa représentation à l'aide du symbole « 0 ».

L'expression $xy > 0$ nous montre également qu'un même symbole peut avoir plusieurs significations, être converti dans un autre registre de plusieurs manières différentes. Cette conversion peut être rendue d'autant plus difficile que Selden et Selden (1987, p. 461) ont identifié chez les étudiants une conception erronée à l'effet qu'il existerait une correspondance biunivoque entre les mots (ou symboles) et les objets mathématiques. L'utilisation d'un même mot ou d'un même symbole pour faire référence à des notions mathématiques différentes, mais entre lesquelles il est possible d'établir une certaine relation, est pourtant un phénomène courant.

Ce caractère polysémique des unités signifiantes soulève le problème de *contamination sémantique*, lesquelles sont inévitables de par les nombreux changements de registres inconscients pratiqués dans la classe de mathématiques.

2.4.4 *Les langages mathématiques*

Cette pluralité des significations possibles pour un même mot ou pour une suite de symboles constitue pourtant une des caractéristiques du langage. Habituellement, le contexte permet aux interlocuteurs d'identifier le sens à attribuer aux différents symboles. Mais dans le cadre de l'algèbre abstraite, le sens semble évoluer avec le degré d'abstraction requis, selon que l'on manipule, par exemple, des définitions de mots ou de symboles de type nominal ou essentiel. D'une certaine manière, le sens usuel des mots (ou unités signifiantes) peut ainsi faire *obstacle* à la compréhension et à l'usage mathématique.

Le terme de *langage* est employé ici car, formellement, selon Leclerc (1993, p. 15), le langage « correspond à la faculté naturelle, inhérente et universelle qu'a l'être humain de construire des langues, c'est-à-dire des codes pour communiquer ». Pour sa part, le Larousse, dans son édition de 1995, estime qu'on parle de langage « dès qu'on considère un ensemble de symboles (dessinés, écrits, parlés, etc…) concaténés en suite de phrases, selon un nombre fini de règles servant à distribuer de façon acceptable et significative ces symboles ». Le langage y est ainsi perçu comme « un système qui a pour finalité de réaliser un message d'un émetteur vers un récepteur » (De Serres & Groleau, 1997, p. 6).

En ce qui concerne les mathématiques, le langage a des fonctions variées :

> « il permet de rendre intelligible et de communiquer une pensée claire, il suggère des états affectifs et parfois, il joue un rôle algorithmique. Le fondement de l'utilisation des langages est l'aptitude des êtres intelligents à substituer des symboles à des idées ou des objets et à opérer directement sur les symboles pour exprimer des relations. Un langage est un système de signes dont l'emploi est codifié pour permettre de remplir une partie des fonctions précédentes » (Glaeser, 1971, p. 51).

Pour reprendre la terminologie de De Serres et Groleau (1997, p.9-10), le *langage mathématique* se présente comme une association complexe de trois langages qui en deviennent les composantes : le *langage naturel*, composé de termes usuels et de termes scientifiques propres à la discipline; le *langage symbolique*, constitué d'un ensemble de symboles ayant un sens bien précis et de règles régissant leur agencement (comme, par exemple, les chiffres et nombres) ; et le *langage graphique,* qui correspond à l'ensemble des éléments visuels ou pictogrammes utilisés en mathématiques, munis de règles d'agencement[24].

Les auteurs relèvent que la maîtrise de ces langages semble indispensable à la réussite d'un cours de mathématiques ainsi qu'à la compréhension des différentes notions, définitions, propriétés et théorèmes. En effet,

> « les notions mathématiques (définitions, propriétés, théorèmes) ne sont accessibles que par trois modes d'expression majeurs : le langage naturel, le langage symbolique et les représentations graphiques, et la réussite en mathématique ne saurait faire l'économie de la maîtrise de ces différents modes d'expression » (De Serres et Groleau, 1997, p.2).

Ce constat les incite à étudier différents types d'erreurs commises lors de la manipulation de chacun de ces trois langages. Le premier, relevant de problèmes de logique et d'argumentation, correspond aux erreurs dites *syntaxiques* ; les erreurs de nature *sémantique* sont quant à elles plus liées à la perception et à l'utilisation des définitions. Il y a donc pour chaque langage, trois types d'erreurs qui peuvent être distingués : sémantiques, syntaxiques et mixtes (erreurs relevant à la fois de la syntaxe et de la sémantique du langage).

L'hypothèse de recherche des auteurs s'articule autour de la maîtrise partielle des règles sémantiques et syntaxiques des élèves dans le langage naturel et, par extension, dans chacun des deux autres langages manipulés en classe de mathématiques. Ces difficultés sémantiques débouchent sur celle, également observées par Parker (1993 : 29 in De Serres et Groleau, 1997, p.17) de « formulation » en langage naturel chez l'élève.

Quant à la syntaxe, elle est propre au langage employé ; De Serres et Groleau répertorient donc les erreurs fréquentes d'étudiants au collégial soumis à un test, tout en les distinguant suivant le langage car

> « si la définition de la syntaxe peut s'appliquer aux trois langages, il n'en va pas de même pour les règles (…) Chacun des langages (naturel, symbolique,

---

[24] Notons ici que chacun de ces langages peut être abordé au sein d'une session d'algèbre abstraite. Pourtant, comme nous le verrons dans l'analyse des données, le langage graphique semble sous-utilisé au sein des séquences d'enseignement d'algèbre abstraite.

> graphique) a ses propres règles de syntaxe. Le langage mathématique, reposant sur ces trois langages, comporte donc trois systèmes de règles syntaxiques » (De Serres et Groleau, 1997, p.12).

De l'analyse de leurs résultats, « il est ressorti que beaucoup [d'étudiants] accordaient une plus grande attention aux chiffres et aux symboles qu'aux mots dans ce genre d'énoncés (hybrides) » (ibid, p.147) et que les erreurs langagières semblaient souvent prédominantes sur celles plus « mathématiques ». En témoigne la réaction d'un élève à qui les auteurs ont expliqué ses erreurs langagières : « Je suis plus poche en français que je ne le pensais, mais moins nul en maths » (ibid, p.154).

Remarquons enfin que seuls deux des trois langages figurent au sein de notre exemple[25]; à vrai dire, le langage graphique semble presque absent de la plupart des séquences didactiques d'algèbre abstraite que nous avons pu consulter. Les notions de congruence et de conversion entre les différents registres ne peuvent donc s'effectuer qu'entre les langages symbolique et naturel. Les importantes difficultés observées chez les élèves dans la maîtrise de ce dernier risquent ainsi de ne prendre que plus d'ampleur.

2.5 Obstacles relatifs au processus de preuve

Comme nous l'avons relevé en première partie de notre cadre conceptuel, au-delà des registres de représentations sémiotiques, notre exemple de construction d'opérations sur l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ fait appel, sans la nommer explicitement, à la notion de validation. En effet, après avoir défini deux opérations sur $K_2 = \{0; 1\}$ qui feront de lui un corps, l'étudiant devra s'assurer que le candidat proposé satisfait les propriétés requises. Et de manière générale, en algèbre abstraite comme dans toute théorie axiomatique, la solution proposée se doit d'être validée à l'aide d'une preuve dont une méconnaissance des mécanismes peut s'avérer un handicap. De plus, il s'agit en l'occurrence de preuves déductives, faisant référence à des arguments de nature plutôt intellectuelle comme les propriétés des notions, abordées par le

[25] L'énoncé qui demande de définir une opération d'addition et une opération de multiplication qui fasse de l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ (muni de ces deux opérations) un corps peut en effet être résolu sans jamais avoir recours au langage graphique.

biais de leurs définitions (ou « construction » pour ce qui concerne les opérations) et des différents langages employés. Nous proposons dès lors de nous attarder sur ce qu'est une preuve et de nous munir d'outils de mesure permettant d'évaluer les validations présentes dans les productions d'élèves.

2.5.1 *La démonstration et l'argumentation : deux types de preuve*

Selon Duval (1995), la preuve est un raisonnement, qui est lui-même un certain type de discours. Pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement, il doit à la fois être orienté vers un énoncé cible (c'est-à-dire vers une proposition à justifier) et à la fois être centré sur la valeur – logique ou épistémique – de cette proposition et non pas sur son contenu, « la fonction première du raisonnement [étant] de changer la valeur épistémique de l'énoncé-cible » (Tanguay, 2004, p. 74).

En plus d'une valeur *logique*, Duval (1995) distingue deux types de valeur *épistémique* pour une proposition :

- la valeur *épistémique sémantique*, qui est le degré de fiabilité du contenu de la proposition au moment de son énonciation (évident, certain, vraisemblable, possible, peu probable, impossible, absurde…), fonction du contenu mais aussi de l'état des connaissances et du milieu socioculturel de l'interlocuteur (émetteur ou récepteur), et
- la valeur *épistémique théorique* (conventionnel, possible, impossible, nécessaire, authentique…), en principe *indépendante de l'interlocuteur* et qui est celle associée au statut de la proposition dans le cadre théorique sous-jacent, quand il y en a un : définition, axiomes, conjecture, théorèmes, hypothèses en mathématiques ; loi, règle, convention, article de contrat etc… dans les autres domaines.

Une preuve consiste en un discours qui tend à s'assurer de la valeur épistémique d'un énoncé. Et de la même manière qu'il distingue deux types de valeurs épistémiques, Duval discerne deux types de preuves : la démonstration et l'argumentation. Tout comme Balacheff (1987), Duval (1995) désigne par *démonstration* la preuve formelle, c'est-à-dire, comme l'a reformulé Tanguay,

> « ces preuves qui établissent qu'un résultat est vrai en combinant déductivement – selon les règles de la logique propositionnelle – d'autres résultats déjà démontrés ou admis axiomatiquement. Une démonstration consiste donc en un enchaînement de *pas de déduction* ou *inférences*, chacune de structure ternaire, et où les propositions combinées prennent l'un parmi trois statuts opératoires possibles : prémisses, règle d'inférence, conclusion » (Tanguay, 2004, p.74).

Ainsi, « toute démonstration doit fonctionner dans le contexte global d'un cadre théorique » déterminé par les axiomes, théorèmes, définitions, hypothèses « qui discriminent localement les statuts opératoires des propositions quand elles apparaissent pour la première fois dans la démonstration » (Tanguay, 2004, p.75). Une *démonstration* vise donc à modifier la *valeur épistémique théorique* d'une proposition.

L'*argumentation*, quant à elle, ne cherche pas d'abord à prouver mais plutôt à convaincre (Duval, 1995). Et comme le souligne Tanguay, elle « a pour but de modifier la *valeur épistémique sémantique* qu'attache à l'énoncé-cible celui à qui l'on s'adresse » (Tanguay, 2004, p.75). Les propositions n'ont ici « ni statut théorique, ni statut opératoire préalablement fixés, si bien que le raisonnement s'organisera autour des interactions entre contenus et valeurs épistémiques sémantiques, elles-mêmes fonction des contenus » (ibid, p.75).

Suivant qu'il s'agit d'une argumentation ou d'une démonstration, une preuve, au sens de Balacheff et Duval, peut ainsi consister aussi bien en quelques exemples qu'en un raisonnement hypothético-déductif *formel et rigoureux*. A vrai dire, une multitude de définitions de la notion de preuve semblent coexister.

2.5.2 *Niveaux de preuves*

D'un point de vue historique et épistémologique, Barbin (1988) et Hanna (1995) font valoir que, chez les Grecs notamment, la preuve, sous forme de démonstration, « apparaît comme un acte social qui a pour but de convaincre l'autre » (Barbin, 1988, pp. 595–596), rejoignant en partie la notion d'argumentation de Duval. La preuve pouvait alors reposer sur l'illustration de quelques situations particulières. En poursuivant ce bref regard historique, Barbin (1998) nous montre que certains mathématiciens du dix-septième siècle (comme Descartes et Pascal) commencèrent à réfuter cette façon de concevoir la preuve en privilégiant l'heuristique et l'analyse (par opposition à la synthèse), en s'attachant plus à la démarche et aux méthodes.

Balacheff (1987, 1988) et Rouche (1989) proposent de baliser cet éventail de possibilités au travers de productions et de raisonnements d'élèves. Il s'agit des *niveaux de preuve* qui se distinguent par leur le degré de référence au monde réel, la présence de mots d'action, le degré de conceptualisation, le degré de formalisme (symbolisme et utilisation d'un vocabulaire précis) et, enfin, le degré de généralité de la production. Nous pouvons les résumer dans ce qui suit, d'abord chez Rouche :

Niveaux de preuve de Rouche (1989) :

1. « *L'induction* » où l'élève conclut par l'évidence[26]
2. « *La pensée discursive* » où une suite d'opérations intermédiaires mène à la solution.
3. « *L'hypothético-déductif* » où les objets employés au sein du raisonnement sont construits, l'hypothèse est distinguée de la conclusion et les opérations permises sont clairement définies.

Les transitions entre chacun de ces trois niveaux nécessitent quelques passages importants, sources de difficultés potentielles, que nous pouvons résumer de la manière suivante. L'étudiant est tout d'abord amené à passer d'une résolution locale à une résolution plus générale. Il est ensuite amené à passer d'une généralisation par l'exemple à une généralisation à l'aide d'une suite d'opérations et d'un discours. Alors que les discours en mots font place à des discours symboliques, les preuves, quant à elles, ne s'appuient plus sur les propriétés (générales) d'une figure représentative d'une classe mais plutôt sur des objets abstraits

[26] Cette terminologie est bien entendu à distinguer de celle du raisonnement dit « inductif »

construits pour les besoins de la preuve. Enfin, les preuves qui veulent convaincre d'une vérité unique cèdent la place aux preuves où ce qui importe est la validité des inférences (Rouche, 1989).

Balacheff avait plutôt proposé la décomposition suivante :

Niveaux de preuve de Balacheff (1987 ; 1988) : A. Preuves pragmatiques : ▪ La *vérification* de la validité à l'aide de quelques exemples. ▪ L'*expérience cruciale* où l'élève effectue la vérification sur un exemple le moins particulier possible[27]. ▪ L'*exemple générique* où l'élève emploie un « cas particulier » non pas pour lui-même mais pour fonder une procédure. B. Preuves intellectuelles : ▪ *L'expérience mentale* où l'élève n'a pas recours à une action réelle mais plus à une action mentale sur un cas général ; l'argumentation repose sur une formulation des propriétés en jeu et de leurs relations, ▪ *Le calcul sur les énoncés* où l'élève effectue un calcul de type inférentiel qui s'appuie sur des définitions ou des propriétés explicites.

Bien que ces modèles aient été construits sur la base de notions géométriques, il est possible, sans trop d'adaptation, de les appliquer à l'algèbre abstraite. Une production d'élève pourra ainsi être catégorisée en fonction des critères énumérés précédemment, tout en nous renseignant quant au degré de formalisme employé. Remarquons déjà que, pour ce qui est de l'algèbre abstraite, les preuves principalement admises et présentées dans les manuels se situent au niveau du *calcul sur les énoncés*. En effet, les propriétés des objets mis en jeu sont

[27] Par exemple, un élève pourra, lors de cette étape, tenter de se convaincre de la validité de la relation de Pythagore en la vérifiant sur un triangle rectangle dont la longueur d'un des cathètes est proche de zéro.

généralement mentionnées de manière très explicite soit au travers de leurs définitions, soit par le biais des théorèmes du cours.

2.5.3 *Difficultés rencontrées dans le processus de preuves*

Comme en témoigne l'imposante littérature consacrée au sujet, le chemin qui mène à la démonstration « aboutie » et à un raisonnement hypothético-déductif rigoureux semble long et pavé de difficultés (Balacheff, 1988 ; Duval, 1995 ; Cyr, 2001; Tanguay, 2002). Entre autres choses, la démonstration apparaît aux élèves technique et compliquée, voire inutile. Duval (1991) préconise l'enseignement d'aspects techniques pour surmonter *la principale difficulté liée à cet apprentissage* qui est, selon lui, que *les énoncés en argumentation interviennent pour leur contenu, alors que le statut d'un énoncé en démonstration est indépendant de son contenu*. Ce statut (d'un énoncé au sein d'une démonstration) peut même changer d'une unité ternaire à l'autre à l'intérieur d'une même démonstration, en devenant par exemple prémisse d'un nouveau pas d'inférence après avoir été la conclusion du pas précédent. Comme le souligne Tanguay (2004, p.77),

> « la thèse centrale de Duval, à l'égard des difficultés qu'éprouvent les élèves avec la démonstration mathématique, est à l'effet que ceux-ci n'en comprennent ni spontanément ni aisément les exigences propres, parce qu'ils appréhendent et traitent les démonstrations comme des argumentations ».

Duval (1995, p.305) identifie six causes qui pourraient être à l'origine de cette confusion. Selon lui :

- les manuels et les enseignants ne prennent pas toujours le soin de distinguer lesquelles, parmi les démarches discursives, ils sont en train d'utiliser,
- l'argumentation est la forme de raisonnement à laquelle les élèves sont confrontés au primaire, tant en mathématiques que dans les autres disciplines,
- la structure locale ternaire n'est que rarement explicitée en démonstration,
- le caractère opératoire des liens entre prémisses, énoncés-tiers et conclusions reste masqué pour l'élève. Celui-ci ne perçoit que des relations symétriques de proximité sémantique, entre des arguments retenus pour leur pertinence, leur vérité et leur

communauté thématique.

- la structure globale des démonstrations qui exigent plus d'un pas de déduction peut elle aussi rester inintelligible pour l'élève,
- les points précédents sont exacerbés par la similitude linguistique qui lie l'argumentation à la démonstration ; les deux emploient les mêmes connecteurs, même si elles leur attribuent des fonctions différentes.

Devant ces difficultés, Duval va même jusqu'à préconiser un enseignement spécifique de l'organisation déductive en démonstration, séparément des tâches de résolution de problèmes afin de distinguer les méthodes de preuve de celles employées lors de la résolution de problème.

Mentionnons par ailleurs qu'au Québec, l'élève, au sortir du secondaire, n'a pas encore été vraiment confronté aux principaux obstacles et difficultés inhérents à l'apprentissage de la preuve.[28] C'est du moins une des conclusions de l'analyse de l'emploi de la preuve en géométrie dans les manuels effectuée par Tanguay (2002). Cette étude nous révèle que le recours à la déduction ou à la preuve se cantonne d'abord à la géométrie avant de gagner petit à petit l'algèbre (mais toujours par l'entremise de la géométrie). De plus, Tanguay y relève que l'étape de la pensée déductive formelle[29] n'est que rarement présentée au sein des manuels (7%) et que « les concepteurs [de manuel] semblent réfractaires aux longues chaînes déductives complexes et suggèrent plutôt des problèmes dont la solution ne combine qu'un nombre restreint de résultats apparentés » (ibid, p. 373).

La notion de démonstration n'apparaissant qu'à une seule reprise dans le programme d'études collégiales en sciences de la nature (Ministère de l'Education, 2003), il semble légitime de croire que les étudiants, au moment de l'introduction de l'algèbre abstraite, ne possèdent qu'une maîtrise partielle de ses procédés et de ses objectifs. Pourquoi prouve-t-on ? Et quelles sont les techniques à notre disposition pour prouver quelque chose ? De plus, à y voir quelque

[28] La réforme actuelle du curriculum cherche notamment à redonner une nouvelle importance à la preuve et à la démonstration, mais il est encore trop tôt pour en observer les effets chez les étudiants du collégial.

[29] Nous faisons ici référence à celle qui correspond à l'*étape N* dans la nomenclature originale de l'article de Tanguay.

chose de technique, de procédural, on risque de perdre de vue certaines intentions de la démarche de preuve, notamment celle d'assurer une cohérence externe à la théorie étudiée[30] (Bérubé, 2007; Cyr, 2001). On peut donc supposer que, privés de cette motivation, les élèves s'exposent à une incompréhension des consignes et des attentes de l'enseignant.

2.6 Conclusion

Notre cadre conceptuel nous a permis de nous munir de plusieurs éléments d'analyse pour chacun des quatre volets étudiés, à savoir le niveau d'abstraction requis, les définitions employées, les systèmes de représentations mis à contribution ainsi que les processus de preuve impliqués dans une activité d'algèbre abstraite.

Afin d'affiner notre analyse, nous avons dans un premier temps effectué une distinction entre les difficultés des obstacles. Par convention, les premières seront plus dues à un manque de connaissances, les seconds à la confrontation de deux savoirs a priori incompatibles.

Concernant l'abstraction, nous parlerons de difficultés étant donné que, plus que la confrontation de deux savoirs, c'est plutôt un manque de connaissances, voire de pratique, qui semble poser problème. A titre d'exemple, l'usage par un étudiant d'un modèle paradigmatique qu'il croit analogique et la présence de propriétés fantômes nous indiqueront que les procédés d'abstraction ne sont que partiellement maîtrisés.

A l'aide du schéma APOS et du processus de réification, nous serons également en mesure de situer un étudiant et sa pratique de l'algèbre abstraite sur une échelle d'abstraction. Nous pourrons également évaluer le niveau d'abstraction d'un étudiant à grâce au nombre de représentations manipulées par les étudiants et la facilité de transition entre chacune d'elles.

Nous avons ainsi développé, comme éléments d'analyse:

- la place du concept mathématique dans le schéma APOS

[30] La cohérence externe d'une théorie (au sens de Bérubé, 2007) se juge en confrontant ses résultats à ceux des autres essais abordant la même question. Elle permet de s'assurer que le résultat pris en considération n'est pas unique en son genre mais qu'il s'intègre dans un cadre logique, qu'il est confirmé par d'autres, qu'il est cohérent avec les connaissances fondamentales, épistémologiques, etc…

- le type de modèle employé (analogique ou paradigmatique) employé par l'étudiant ainsi que la recherche d'éventuelles propriétés fantômes découlant d'un usage inadéquat d'un modèle par l'étudiant.

Les premiers pourront être évalués à l'aide des entretiens d'élèves, les seconds en analysant l'énoncé d'une activité d'introduction à l'algèbre abstraite, les productions écrites des étudiants suite à cette activité, et grâce à des entretiens avec les étudiants suite à l'activité[31].

Cette confusion entre les modèles risque d'affecter le sens donné par les étudiants aux notions étudiées. En effet, le sens d'un mot ou d'un symbole évolue avec le degré d'abstraction requis. De plus, un recours trop fréquent aux structures algébriques sur la base d'exemple basé sur les ensembles numériques risque de générer un obstacle chez les étudiants qui peinent ainsi à concevoir les groupes ou corps autrement qu'en termes numériques.

Ce constat nous a amené à nous intéresser à la place occupée par les définitions dans l'activité algébrique et leur consacrer le deuxième volet de notre analyse. Concernant les définitions, nous parlerons d'obstacles car un certain type de définition relativement nouveau (essentiel) vient côtoyer un autre, déjà connu (nominal). Une confusion entre ces deux types de définitions risque d'entraîner des contradictions sémantiques et d'impliquer un certain nombre de conflits que l'étudiant devra résoudre.

Mais d'autres obstacles risquent d'être étroitement reliés aux définitions. Parmi eux, la perte de la vision heuristique qui mène à la définition la plus adéquate. En effet, les définitions présentées par l'enseignant lors du cours, sont, d'une certaine manière, abouties. L'étudiant perd ainsi de vue le processus de recherche et toutes les pérégrinations qui ont menés à la construction d'une certaine définition.

Enfin, étant donné que le recours à l'image du concept est généralement privilégié à l'emploi de sa définition lors des activités mathématiques, le caractère non représentable des concepts algébriques risque de créer un malaise chez l'étudiant (qui ne peut plus recourir, comme à son

[31] Ces éléments seront détaillés dans notre méthodologie.

habitude, à l'image du concept).

Cela crée des incohérences potentielles qui peuvent être analysées à l'aide de notions telles que l'image évoquée du concept, la distinction entre les définitions personnelles et la définition formelle du concept et les facteurs de conflit potentiel pouvant surgir en cas d'incohérence entre celles-ci.

Nous avons ainsi développé comme éléments d'analyse:

- le type de définitions présentes au sein des séquences didactiques et des manuels de références ;
- le recours par les étudiants à la définition[32] (à l'aide d'une analyse de production et d'entretiens avec les étudiants) ;
- la compatibilité entre les définitions personnelles et la définition formelle du concept avant de déterminer, le cas échéant, quel est le facteur de conflit potentiel.

Comme nous l'avons déjà souligné, cette possible altération du sens concerne non seulement les mots mais également les symboles, lesquels peuvent acquérir de nouvelles significations. Par exemple, le symbole « + », en tant que loi de composition d'un groupe, risque de prendre un sens très différent de celui auquel les étudiants étaient jusque-là habitués – générant ainsi ce que Lajoie (2009, p.245) qualifie de *contamination sémantique.* Celles-ci seront d'autant plus présentes que le nombre de registres employés est important – Dreyfus (2002) et Duval (1995) insistent sur l'importance de maîtriser plusieurs représentations et mesurent la capacité d''abstraction d'un individu sur la base de la facilité de transition entre les différents registres à sa disposition.

Dans le cas des représentations sémiotiques, nous parlerons ainsi d'obstacles car, pour un symbole donné, un certain sens déjà connu peut entrer en conflit avec un autre, entraînant d'éventuelles contradictions et, surtout, un possible conflit à résoudre.

La transition entre les différentes représentations passe par l'emploi de plusieurs *langages*

[32]Nous pourrons ainsi voir si le fait d'avoir jusque-là pu avoir recours à l'image des concepts a entraîné un oubli du recours à la définition

mathématiques. En effet, de manière générale, l'activité mathématique peut être décomposée en l'usage de trois langages : naturel, symbolique et graphique.

L'algèbre abstraite, étant donné son degré de généralité et la dimension des objets mathématiques manipulés, ne met que très peu à contribution le langage graphique. Nous pourrons dès lors nous interroger quant à savoir si cela modifie les pratiques des étudiants et rend leur compréhension plus délicate.

Nous avons ainsi développé comme éléments d'analyse:

- le nombre de représentations sémiotiques et de langages mis à contribution au sein d'un énoncé d'algèbre abstraite ;
- la distinction entre les activités de traitement et de conversion et une étude des types d'erreur commises par les étudiants au sein de production écrites ;
- la fréquence des différentes composantes du langage mathématique au sein des manuels et des énoncés de séquence didactique.

Enfin, l'étude des processus de preuves constituera le dernier volet de notre analyse. En effet, une des particularités de l'activité algébrique, à l'instar des autres théories axiomatiques, réside en ses recours fréquents à la notion de preuve. Celles-ci, d'ordinaire déductives, font référence à des arguments de natures intellectuelles et donc aux propriétés des notions, généralement au travers de leurs définitions (ou « construction » pour ce qui concerne les opérations).

Concernant les preuves, même si l'habileté dans le processus de preuve est quelque chose à acquérir par le biais de travail individuel et d'exercices, la distinction effectuée entre les différents niveaux de preuves nous montre qu'on recourt, dans le cas des preuves intellectuelles, à des notions de logique formelle pouvant entrer en contradiction avec la logique naïve préalablement développée par les étudiants. Plus qu'un manque de connaissances, c'est la confrontation de deux savoirs qui prévaut : les critères auparavant admissibles pour valider une propriété (recours à l'évidence, à des cas particuliers, etc.) ne le seront plus désormais. Nous parlerons donc d'obstacle et non de difficultés[33].

Nous avons ainsi développé comme éléments d'analyse:

- la distinction entre démonstration et argumentation et leur fréquence au sein des séquences didactiques et des manuels ;
- les niveaux de preuve requis ainsi que leur fréquence au sein des énoncés de séquences didactiques et des manuels ;
- la difficulté à manipuler des preuves de types intellectuelles, qui pourra être évaluée à l'aide d'entretiens avec les étudiants.

---

[33] On pourrait même parler d'un *obstacle de l'évidence* qui émergera lors de l'analyse de nos résultats (section 4.4.1)

3 Méthodologie

3.1 Introduction

La récolte et l'analyse des données que nous présentons ici répondent à un double objectif. Le premier consiste à repérer les obstacles auxquels sont confrontés des étudiants d'un cours d'algèbre abstraite à partir de ceux décrits dans notre cadre conceptuel ; le second est d'estimer dans quelle mesure les pratiques inhérentes à l'algèbre abstraite diffèrent de celles auxquelles les élèves ont été habitués jusqu'alors au cours de leur curriculum.

En nous basant sur les éléments d'analyse développés dans notre cadre conceptuel, nous proposons :

1. de parcourir le contenu de manuels scolaire à l'aide d'une recension et d'une classification des définitions, des langages et des preuves ;
2. d'analyser l'énoncé d'une séquence didactique (Pfister, 2008) sur la base des éléments développés dans notre cadre conceptuel ;
3. d'analyser des productions d'élèves ayant participé à cette séquence ;
4. enfin de rendre compte d'entretiens que nous avons pu obtenir avec certains d'entre eux dans la mesure où ils offrent des éléments explicatifs.

3.2 Analyse de manuels

Un premier volet de notre analyse de données consistera en une analyse de contenu de quatre manuels de référence. De manière générale, nous y effectuerons les analyses suivantes :

- analyse de fréquence des langages employés tels que définis à la section 2.4.4 de notre cadre conceptuel (p. 47) – naturel, graphique et symbolique ;
- analyse des types de définitions employées (essentielles vs nominales) tels que définis au sein de la section 2.3 de notre cadre conceptuel (p.26) ;
- analyse de la présence de preuve et des niveaux de preuve requis telles que définis au sein de la section 2.5.2 de notre cadre conceptuel (p. 51) ;

3.2.1 *Manuels de 5ème secondaire*

L'algèbre abstraite ne figurant pas explicitement au programme du cégep (Ministère de l'Education, 2003), la matière, si elle est abordée, l'est généralement durant le cours d'algèbre linéaire (de sigle NYC). Ainsi, afin de cerner les spécificités de l'apprentissage de l'algèbre abstraite, nous serons amené à étudier quelques manuels de référence employés au collégial lors du cours NYC.

Toutefois, afin d'apprécier le bagage et les pratiques auxquelles les étudiants ont été habitués, ce qui est nécessaire pour répondre au deuxième objectif de notre travail, nous débuterons par l'analyse de deux manuels de référence du cours 536 de l'école secondaire québécoise. Le cours 536 a été ciblé car il s'agit du cours durant lequel les étudiants sont le plus susceptibles d'être confrontés à une approche et une structure de cours théorique, proche de celle d'un cours d'algèbre abstraite. De plus, il s'agit d'un préalable au programme de sciences au sein duquel nous retrouvons les étudiants qui seront, plus tard, initiés à l'algèbre abstraite.

Nous proposerons ainsi un premier survol des deux ouvrages de référence approuvés par le Ministère de l'Éducation du Québec[34] (Ministère de l'Education, 2009) pour la période allant de 1999 à 2010. Il s'agit de *Mathophilie 536* (Lafortune, 1997) et de *Réflexions Mathématiques 536* (Breton, 1999).

3.2.2 *Manuels de calcul et d'algèbre au cégep*

Il nous est ensuite apparu nécessaire de considérer également des ouvrages manipulés par les élèves du collégial. Afin de considérer un spectre aussi large que possible des pratiques et habitudes mathématiques des élèves, nous étudierons, en complément d'un manuel de référence pour l'algèbre linéaire, le contenu d'un manuel de *calcul* (ou, suivant les appellations, d'*analyse* – qui consiste en l'étude du calcul différentiel et intégral sur des fonctions réelles à une voire plusieurs variables).

---

[34]Tels que référencés sur le site du Ministère de l'Education, des Loisirs et des Sports à l'adresse https://www3.meq.gouv.qc.ca/bamd/second.asp?no=1

Parce qu'il ne s'agit pas ici d'une recherche exhaustive, notre choix s'est porté sur le manuel *Calcul intégral* de Gilles Charron et Pierre Parent (2004) car il en était, en 2007, à sa 6ème édition et est encore utilisé comme manuel obligatoire par bon nombre d'enseignants du cégep[35]. Notre choix s'est porté sur l'édition de 2004 car elle correspond à celle utilisée, au moment de notre récolte de données, par les étudiants rencontrées en entretiens. Nous proposerons également un bref survol du manuel de Hamel et Amyotte (2007), récipiendaire d'un prix de l'AMQ cette même année[36], afin de voir si celui-ci vient appuyer les principales conclusions de notre étude du manuel de Charon et Parrent (2004).

Pour les mêmes raisons, notre choix s'est porté sur l'*Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications* de Amyotte (2003).

3.3 Analyse d'une séquence didactique

3.3.1 *Choix de la séquence didactique*

Nous proposerons ensuite l'étude d'une séquence didactique d'initiation à l'algèbre abstraite afin d'y repérer les obstacles relevés au sein de notre cadre conceptuel. Notre choix s'est arrêté sur la séquence didactique présentée par Pfister lors du congrès conjoint EMF-AMQ-GRMS en mai 2006 et reprise plus tard dans un article du Bulletin AMQ (Pfister, 2008).

Notre attention s'est portée sur cette séquence pour les raisons suivantes. Tout d'abord, afin d'être aussi certain que possible de toucher une population qui n'avait pas encore été initiée à l'algèbre abstraite, nous avions pris le parti de nous orienter vers une population d'étudiants au cycle collégial. Ce choix nous permettait ainsi d'avoir un échantillon relativement homogène par rapport à la familiarité antérieure avec la discipline; cette variable n'a ainsi pas eu à être prise en compte. De plus, ce choix élargissait notre bassin de population au-delà de ceux pour qui les mathématiques représentaient une source d'intérêt (population que nous aurions

---

[35] Comme nous l'a corroborée une recherche informatique informelle (mots clés : NYA Charron « calcul différentiel ») effectuée le 21 octobre 2009.

[36] Tel que mentionné sur le site de la maison d'édition (ERPI, 2009).

rencontrée si notre étude s’était intéressée aux étudiants d’un programme de premier cycle universitaire en mathématiques).

Par ailleurs, parmi les parcours possibles au collégial, l’orientation en «sciences de la nature » s’imposait car c’est au sein de cette section que nous avions le plus de chance de rencontrer des étudiants et des professeurs proposant un cours d’algèbre abstraite.

Une fois ce choix arrêté, une brève revue de littérature nous a confirmé que, bien que de nombreux ouvrages concernant les prémisses de la théorie des groupes soient disponibles, seule une très faible proportion d'entre eux sont destinés à des étudiants de niveau collégial. La séquence de Pfister représentait donc une des rares sources à notre disposition.

Enfin, Nicolas Pfister fait partie des quelques enseignants proposant à leurs étudiants une étude de l’algèbre abstraite au cégep – l’algèbre abstraite ne figurant pas au programme en tant que contenu visé par le cours NYC (Ministère de l'Education, 2003). La possibilité qui nous a été offerte de consulter les productions d’élèves et d’interroger certains de ses élèves nous a ensuite permis d’arrêter notre choix.

3.3.2 *Manuel de référence de la séquence didactique (Papillon, 1993)*

Afin de rendre compte des obstacles spécifiques rencontrés par les étudiants à qui cette séquence didactique a servi d'introduction à l'algèbre abstraite, nous proposerons au préalable une analyse du manuel qui leur servait de référence. Il s’agit de *Vecteurs, matrices et nombres complexes* (Papillon, 1993). Étant donné que celui-ci couvre des notions d'algèbre abstraite qui ne figurent pas explicitement dans le programme ministériel, son contenu déborde de celui prescrit pour le cours NYC. Nous y voyons là une des raisons pour lesquelles il semble moins employé que d’autres en tant qu’ouvrage de référence au sein des collèges québécois. En plus des trois angles d’analyse mentionnés précédemment (langages, définitions, preuves), nous procéderons à un dépouillement de sa structure afin notamment d’évaluer la place de l’algèbre abstraite en comparaison avec celle occupée par l’algèbre linéaire.

3.3.3 *Description de la séquence*

La séquence, dont l'énoncé complet est présenté en annexe (annexe 7.1), est divisée en trois parties. Notre étude se limitera à la première d'entre elles car, au moment de la cueillette des données, les sections 2 et 3 n'avaient pas encore été présentées aux étudiants (une discussion avec l'enseignant nous révélera par la suite qu'il se rend rarement au bout de la séquence avec ses étudiants).

Cette première section comporte deux parties : une première consiste en un exposé des concepts et des principales définitions (notions d'espace vectoriel, de corps …), la seconde correspond aux énoncés à proprement parler.

Cette séquence est pensée pour être réalisée par les élèves de manière semi autonome. Les énoncés ne sont pas ou peu présentés ni expliqués en classe ; les élèves ont pour consigne d'effectuer les exercices à domicile, par équipe de deux, tout en ayant la possibilité de poser des questions à l'enseignant. Ainsi, quatre interlocuteurs privilégiés sont à disposition d'un étudiant, à savoir le coéquipier (le travail étant à remettre par équipe de deux) le professeur, le manuel de référence et les compléments théoriques de l'énoncé de la séquence didactique.

3.3.4 *Mode d'analyse de l'énoncé de la séquence*

Conformément à la structure de la première section de la séquence didactique, nous effectuerons une analyse à la fois du support écrit servant de référence et à la fois de l'énoncé de chacun des trois exercices soumis aux élèves. Nous y étudierons l'ensemble des difficultés et obstacles relevés dans notre cadre conceptuel.

Cela revient à une analyse qualitative en termes de difficultés et d'obstacles relatifs à l'abstraction, aux définitions (analyse des types de définitions présentes au sein de l'énoncé), aux modes de représentations (analyse des langages à la disposition des élèves), à la validation (analyse des types de preuves exigées par l'énoncé) et aux types de problèmes (notion de problème *bien* ou *mal* défini).

3.4 Analyse de productions d'élèves et entretiens

3.4.1 *Analyse de productions d'élèves et mode de récolte des données*

Jusqu'à présent, à l'aide de nos analyses, nous ne pouvions parler d'obstacles que de manière *potentielle.* L'enjeu sera ensuite, à l'aide d'une analyse de productions d'élèves, d'inférer au mieux la manière dont ces obstacles se traduisent en erreurs dans des productions d'élèves.

Nous avons donc contacté l'auteur de la séquence didactique afin de voir si celui-ci pouvait nous ouvrir ses classes et nous fournir les copies du premier travail de certains de ses étudiants – c'est de ce premier travail, comportant trois exercices, dont il est ici question et dont l'énoncé est présenté en annexe (cf. annexe 7.1).

Avec son accord, nous sommes ensuite passé en octobre 2006 dans deux classes (celle de l'enseignant et celle de sa collègue Marie[37], laquelle utilisait avec ses étudiants la même séquence didactique) afin d'exposer le projet aux étudiants et de leur présenter le formulaire de consentement (cf. annexe 7.3). De même que pour l'énoncé de la séquence, nous avons procédé à une analyse qualitative de ces copies sur la base des cinq obstacles relevés au sein de notre cadre conceptuel.

Remarquons ici qu'à travers l'étude des productions des étudiants à la séquence proposée, nous souhaitions la voir agir comme révélateur des différents obstacles recensés. Comme cette séquence se voulait propice à un apprentissage autonome et que les critères de rédaction ont été présentés de manière semblable, nous n'avons pas cherché à distinguer les étudiants selon leur enseignant.

3.4.2 *Entretiens avec des élèves*

Afin de pouvoir mettre en avant certaines des difficultés ressenties par les étudiants (notamment en ce qui concerne l'obstacle épistémologique relatif à l'abstraction – difficilement perceptible sur la base des productions d'élèves), nous avons choisi de

[37] Il s'agit, pour des raisons de confidentialité, d'un prénom fictif.

sélectionner certaines copies d'étudiants ayant accepté de participer à l'étude pour rencontrer ensuite les équipes en entretien. La constitution d'un échantillon contrasté s'est faite au regard de la maîtrise des aspects étudiées: langage, formalisme, démonstration, etc. La sélection des équipes rencontrées s'est faite suite à l'analyse globale des erreurs, présentée à la section 4.3.3 de l'analyse de données (p. 93).

Notons que les notes attribuées par l'enseignant ne nous ont jamais été communiquées, même si nous pouvions observer sa correction. L'analyse intermédiaire des productions ainsi que la sélection des équipes interrogées n'étaient pas basées sur l'évaluation de l'enseignant et relèveraient donc d'un caractère indépendant de celle-ci. Cette sélection a débouché sur un choix de quatre équipes qui ont été rencontrées lors d'entrevues de 45 minutes environ (octobre 2006). Comme les entrevues ne pouvaient se tenir que durant les heures d'étude des étudiants, nous avons dû, en raison de ces contraintes horaires, nous limiter à quatre équipes.

Nous n'avons pas cherché à aborder les obstacles de manière immédiate et « frontale » ; comme nous souhaitions plutôt les dénicher dans les propos des étudiants, nous nous sommes orienté vers un mode d'entretien semi dirigé. La relative souplesse des questions avait également pour intention de faire ressortir par les étudiants eux-mêmes d'éventuels liens avec des disciplines autres que les mathématiques. Nous tenterons ainsi d'esquisser une piste de réponse à notre questionnement d'origine : existe-t-il des similitudes entre l'algèbre abstraite et des disciplines plus « littéraires » telle la philosophie (par le biais du texte argumentatif notamment) ?

3.4.3 *Choix et motivation des questions*

Afin de caractériser le rapport aux mathématiques de chacun et l'intérêt manifesté pour la discipline en général, nous avons débuté par une question portant sur le rôle attribué aux mathématiques au sein de leur formation. (*Quel rôle attribuez-vous aux mathématiques dans votre formation ?)*. Nous avons ensuite enchaîné avec une série de questions orientées sur les difficultés du travail afin d'amener le discours des étudiants sur les obstacles rencontrés, sur leur impression a priori et dans l'intention de pointer les stratégies mises en œuvres pour surmonter les problèmes *(En quoi ce travail (cette activité) diffère-t-il (ou ressemble-t-il) des* *maths étudiées jusque-là ? Quelles en sont les nouveautés ? Comment avez-vous abordé ce travail ? Quelles ont été les difficultés rencontrées ? Comment avez-vous réussi à les surmonter ?)*

Parce qu'il nous apparaissait essentiel d'étudier la nature du rapport entre l'étudiant et les différents interlocuteurs à sa disposition, nous avons poursuivi avec une autre série de questions orientée sur les rôles du professeur et du manuel (*Comment la matière préalable à ce travail a-t-elle été présentée par le professeur? Où et comment avez-vous utilisé cet enseignement dans votre travail ? Cet enseignement était-il suffisant pour vous permettre d'avancer ? Et est-ce que vous avez eu recours au manuel ?*).

Enfin, nous avons orienté nos questions sur un bilan général de l'activité, bilan au sein duquel nous souhaitions voir émerger d'éventuels parallèles avec d'autres disciplines. (*Y a-t-il quelque chose qui vous a particulièrement plu dans ce travail ? Qu'est-ce que ce serait ? À quoi cela vous fait-il penser ? Y a-t-il quelque chose qui vous a déplu particulièrement dans ce travail ? Quelle est la tâche (année ; activités ; discipline) qui s'est le plus rapprochée de celle-ci durant votre parcours scolaire ? Que retirez-vous principalement de ce travail ? Quelle modification apporteriez-vous ?*)

3.4.4 *Analyse des entretiens*

De même que pour les productions écrites, nous effectuerons une analyse des réponses apportées par les étudiants afin de les mettre en lien avec les obstacles présentés au sein de notre cadre conceptuel. Nous chercherons également à effectuer des parallèles avec leurs productions écrites afin de voir comment un obstacle identifié ou verbalisé en entretien peut s'y être manifesté.

4 Résultats de l'analyse des données

4.1 Analyse de manuels

Comme mentionné dans notre méthodologie, nous avons parcouru différents manuels afin d'y repérer les langages, les niveaux de preuves et les définitions employés. Afin de voir quel est leur bagage et ce à quoi les étudiants sont habitués, nous avons considéré plusieurs manuels du cours 536 (Lafortune et al., 1997, Breton et al., 1999) et du collégial.

Rappelons que, en ce qui concerne le secondaire, nous nous sommes centré sur le cours 536 car, se situant dans un cursus pré universitaire, c'est certainement celui où les élèves auront le plus de chances d'être confrontés à une structure de cours formelle, proche de celle d'un cours d'algèbre abstraite. C'est également dans ce cours que l'on rencontre le plus d'élèves qui seront, plus tard, initiés à l'algèbre abstraite.

Afin de pouvoir bénéficier de points de comparaison avec une discipline autre que l'algèbre, nous considérerons également deux manuels de calcul (ou *analyse*) de niveau collégial (Charron et Parrent, 2004; Hamel et Amyotte, 2007). Dans le même esprit, en plus du manuel de référence de la séquence didactique étudiée (Papillon, 1993), nous examinerons enfin un autre manuel d'algèbre linéaire en vigueur au collégial (Amyotte, 2003).

4.1.1 *Répartitions des différents langages au sein des manuels*

Parce qu'il y sert de support au raisonnement et à la transmission de la théorie, le langage naturel est le langage principalement employé au sein de chacun des deux manuels du secondaire étudiés (Mathophilie 536 et Réflexions Mathématiques 536). Les langages symbolique et graphique y semblent ensuite équitablement représentés.

Il en va de même pour le manuel de calcul de Hamel et Amyotte (2007) : le langage naturel apparaît prédominant. Le symbolique suit alors que le langage graphique sert principalement à représenter des graphes de fonctions. En revanche, en ce qui a trait à l'autre manuel de calcul étudié, celui de Charron et Parent (2004), le langage symbolique prime, aussi bien en qui relève des notions théoriques que des exercices et des exemples. Suivent le naturel et enfin le graphique.

Cette prédominance des langages naturel et symbolique sur le langage graphique s'observe également dans le manuel d'algèbre linéaire de Amyotte (2003) où le langage graphique n'est mis à contribution qu'à quelques reprises, le plus fréquemment pour représenter des situations en trois dimensions ou des applications, notamment l'algorithme du simplexe en optimisation.

4.1.2 *Les niveaux de preuves*

Notre étude des manuels du secondaire va dans le sens de l'analyse de Tanguay (2002) et de sa recension des preuves présentées au sein des manuels en vigueur à l'école secondaire. En ce qui concerne le manuel Mathophilie 536 (Lafortune et al. 1997), à l'exception de la page 293 du tome 1 (cf. Figure 6) où un raisonnement déductif, à l'arborescence relativement simple, nous prouve que $p \log_a M = \log_a(M^p)$, nous avons constaté une quasi absence de preuves complexes mettant en jeu des raisonnements à l'arborescence complexe.

La propriété plus générale s'énonce: L9: $\log_a(M^p) = p \log_a M$.

On la prouve comme suit:

Posons $z = \log_a M$. Cette équation logarithmique est équivalente à l'équation exponentielle $a^z = M$.

On peut mettre à l'exposant p les deux membres de cette égalité: $(a^z)^p = M^p$.

Une propriété des exposants permet d'écrire: $a^{pz} = M^p$.

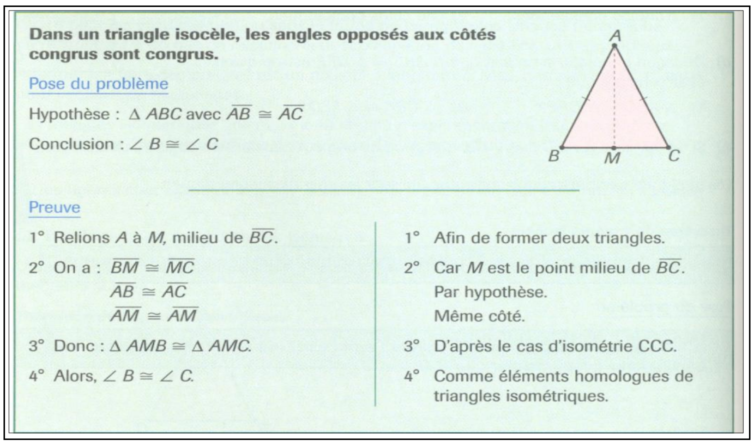
Cette équation exponentielle a une forme logarithmique équivalente: $pz = \log_a(M^p)$.

Puisque $z = \log_a M$, on peut donc écrire: $p \log_a M = \log_a(M^p)$.

Figure 6: Exemple de preuve sur la base d'un raisonnement de type déductif dans le manuel Mathophilie 536 (Lafortune et al, 1997, Tome 1, p.293)

Réflexions Mathématiques 536 revient quant à lui sur des éléments de raisonnement comme le modus ponens et la preuve par l'absurde et en propose une étude un peu plus détaillée (Breton et al. p.256). Malgré la faible proportion des résultats prouvés, ce manuel propose néanmoins certaines démonstrations complètes (Breton et al., 1999, Tome 1 p.260 – cf. Figure 7 – et Tome 2 pp. 183-190) ainsi que quelques exercices (ibid, Tome 1, pp. 289-291, cf. Figure 8) invitant l'étudiant à se familiariser avec la notion de preuve.

Malgré l'énoncé de nombreux résultats et théorèmes (notamment en ce qui a trait aux propriétés des intégrales et aux différentes techniques d'intégration), cette faible présence de la preuve est également observable dans le manuel de calcul de Charron et Parent (2004). Nous relèverons toutefois le cas de la démonstration du Théorème fondamental du calcul intégral, présentée à la page 133, car dans ce cas précis, cette preuve peut être rattachée au niveau du *calcul sur les énoncés,* même si l'arborescence de cette dernière reste très simple.



Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

Pose du problème

Hypothèse : ΔABC avec $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Conclusion : $\angle B \cong \angle C$

Preuve

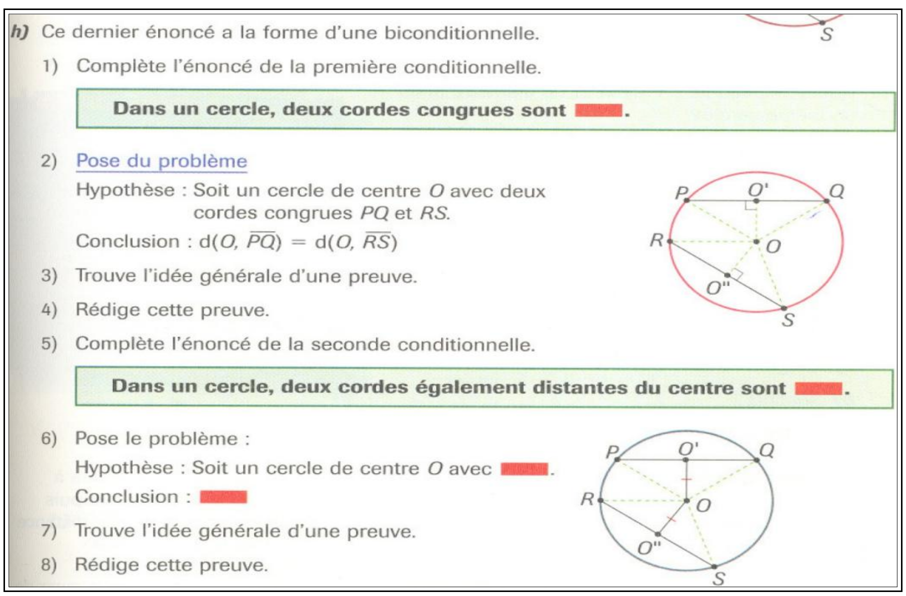
1° Relions A à M, milieu de $\overline{BC}$.	1° Afin de former deux triangles.
2° On a : $\overline{BM} \cong \overline{MC}$	2° Car M est le point milieu de $\overline{BC}$.
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$	Par hypothèse.
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$	Même côté.
3° Donc : $\Delta AMB \cong \Delta AMC$.	3° D'après le cas d'isométrie CCC.
4° Alors, $\angle B \cong \angle C$.	4° Comme éléments homologues de triangles isométriques.

Figure 7: Exemple de preuve proposant une justification de ses étapes (Breton et al., 1999, Tome 1 p.260)

Nous avons constaté lors de notre étude que les preuves sont souvent présentées en groupes, réunies autour de thèmes ou notions. Par exemple, toujours en ce qui concerne le manuel de Charron et Parent (2004), on trouvera entre les pages 301 et 318 les preuves de quelques-uns des critères employés pour étudier la convergence des suites et séries (critères du terme général, de l'intégral, de comparaison etc...), sans que l'application d'une telle rigueur ne soit systématique.

Ainsi, même si quelques théorèmes sont démontrés, la très grande majorité des preuves des résultats présentés au fil du manuel sont laissées au soin du lecteur, sans autre indication. Si l'on note une présence plus importante des preuves dans leur manuel de calcul (nous y avons recensé 13 preuves[38] ou *groupe de preuves*), Hamel et Amyotte (2007) laissent également la plupart des preuves en exercice implicite au lecteur.

Si le manuel d'algèbre linéaire de Amyotte (2003, p.99) laisse quelques preuves en exercices explicites au lecteur, notamment sous la forme de textes à trous, on note néanmoins que seuls 15 résultats (ou groupes de résultats) sont démontrés. La plupart de ces preuves relèvent du *calcul sur les énoncés* sur l'échelle de Balacheff (1988), reposent sur des propriétés énoncées au préalable et requièrent un raisonnement à l'arborescence complexe. Toutefois, il ne nous semble pas anodin de relever que le chapitre relatif aux espaces vectoriels, et consacré plus largement aux bases de l'algèbre abstraite, est celui dans lequel les preuves sont le plus concentrées (notion de sous-espace vectoriel, de bases etc...) par opposition aux chapitres portant sur les types de matrices et le calcul matriciel.



h) Ce dernier énoncé a la forme d'une biconditionnelle.

1) Complète l'énoncé de la première conditionnelle.

Dans un cercle, deux cordes congrues sont .

2) Pose du problème
Hypothèse : Soit un cercle de centre O avec deux cordes congrues PQ et RS.
Conclusion : $d(O, \overline{PQ}) = d(O, \overline{RS})$

3) Trouve l'idée générale d'une preuve.

4) Rédige cette preuve.

5) Complète l'énoncé de la seconde conditionnelle.

Dans un cercle, deux cordes également distantes du centre sont .

6) Pose le problème :
Hypothèse : Soit un cercle de centre O avec .
Conclusion :

7) Trouve l'idée générale d'une preuve.

8) Rédige cette preuve.

Figure 8 : Exercice de familiarisation à la preuve (Breton et al., 1999, Tome 1, p.291)

[38] Elles sont souvent de niveau *calcul sur les énoncés* sur l'échelle de Balacheff (1988).

4.1.3 *La présence des définitions et leur typologie au sein des manuels*

Lors de notre recensement, nous avons relevé, dans le livre Mathophilie 536, un total de 101 définitions. En référence à la typologie employée par Ouvrier-Buffet (2003), nous pouvons affirmer qu'elles sont quasi exclusivement nominales, à l'instar de la définition proposée pour une *base* à la page 32 du tome 2 (cf. Figure 9). En effet, seules deux de ces définitions (présentées aux pages 168 et 261 du tome 1) sont des définitions par construction et donc essentielles selon notre référence. Remarquons toutefois que, malgré leur caractère essentiel, elles ne font référence à aucune propriété.

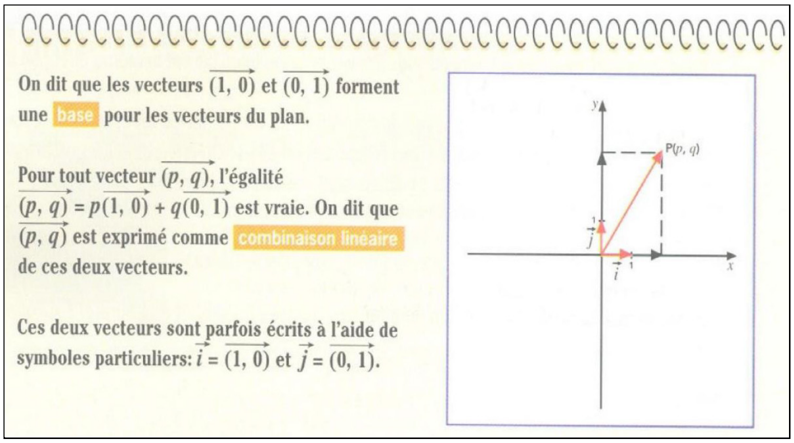


Figure 9 : Exemple de définition nominale présentée dans le manuel Mathophilie 536 (Lafortune et al. 1997, Tome 2, p.32)

Comme pour la plupart des autres manuels que nous avons parcourus, les définitions sont ainsi peu mises en exergue au sein du Mathophilie 536 et, si elles le sont, c'est à l'aide d'une typographie qui peut prêter à confusion car, comme en témoignent les deux figures suivantes, elle est identique à celle employée pour les remarques (cf. Figure 10) et pour les propriétés des objets mathématiques (Figure 11), en plus des remarques, sont également énoncées à l'aide de la même typographie. L'ambiguïté de cette présentation peut dès lors constituer un obstacle didactique potentiel.

1) Pour tracer le graphique d'une droite, on peut placer deux points qui appartiennent à la droite, puis tracer la droite passant par ces deux points.

Il y a plusieurs façons de trouver les deux points:

a) Si l'équation est donnée sous la forme $y = mx + b$, on peut trouver l'ordonnée à l'origine (le point $(0, b)$) puis:
- soit utiliser la pente pour trouver graphiquement l'autre point;
- soit trouver un autre point en prenant une valeur quelconque pour x et en trouvant la valeur correspondante pour y.

b) Si l'équation est donnée sous la forme $Ax + By = C$, on peut:
- soit trouver deux points en remplaçant x par deux valeurs; pour chacune des valeurs de x, il est possible de trouver la valeur de y correspondante.
- soit isoler y et revenir à la stratégie a).

2) Pour tracer le graphique d'une droite, on peut utiliser une calculatrice à affichage graphique ou un logiciel pertinent. Pour utiliser l'un ou l'autre de ces outils, il faut généralement isoler y dans l'équation de la droite avant de tracer le graphique.

Figure 10 : Exemple de remarque effectuée à l'aide de la typographie en vigueur pour les définitions dans Mathophilie 536 (Lafortune et al, 1997, tome 1, p.30)

Dans un système de deux équations linéaires, on peut établir l'endroit où se situe la solution (si elle existe) en traçant les deux droites sur un même graphique. En effet, la solution correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites.

Pour trouver graphiquement les solutions d'un système d'inéquations, il faut trouver l'intersection des demi-plans. Dans les systèmes d'équations, si les deux droites ne sont pas parallèles ou confondues, il n'y a qu'un point d'intersection. Par contre, dans les systèmes d'inéquations, il peut exister une infinité de points qui constituent l'intersection de tous les demi-plans solutions des inéquations du système.

Pour obtenir graphiquement les solutions d'un système d'inéquations linéaires, on prend l'intersection des demi-plans solutions de toutes les inéquations du système.

Figure 11 : Exemple de propriété énoncée à l'aide de la typographique en vigueur pour les définitions dans Mathophilie 536 (Lafortune et al, 1997, tome 1, p.52)

Enfin, toujours dans le manuel Mathophilie 536, nous pouvons trouver des définitions incomplètes comme celle de fonctions *inverses* (ou *réciproques*) présentée à l'aide de la Figure 12.

Quand deux fonctions f et g sont telles que $f(g(x)) = x$ et que $g(f(x)) = x$, on dit que les deux fonctions sont inverses ou réciproques.

Figure 12 : Exemple de définition incomplète présentée dans le manuel Mathophilie 536 (Lafortune et al, 1997, tome 1, p.208)

Les définitions essentielles ne semblent pas plus présentes au sein des manuels de calcul que nous avons pu consulter. Nous avons en effet recensé trente-neuf définitions (ou groupe de définitions) au total dans le livre de Hamel et Amyotte (2007), et quarante et une dans celui de Charron et Parent (2004), à chaque fois quasi exclusivement nominales.

Ces définitions sont souvent présentées au début de section, comme dans les manuels français examinés par Ouvrier-Buffet (2003), corroborant ainsi la place habituellement attribuée à la définition dans une séquence didactique. A la différence de manuels du secondaire comme Mathophilie 536, les définitions y sont plus facilement repérables, résumées en apartés (cf. Figure 13) ou explicitement mentionnées dans le texte (cf. Figure 14).

Sur la figure 6.4 *b*, on constate que si $x \to -\infty$, alors $g(x) \to d$ et la distance entre le point $(x, g(x))$ et la droite $y = d$ tend vers 0, c'est-à-dire que la courbe décrite par la fonction $g(x)$ s'approche de plus en plus de la droite $y = d$. De plus, $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ et, lorsque $x \to \infty$, la courbe décrite par la fonction $g(x)$ s'approche de plus en plus de la droite $y = c$. Les droites $y = c$ et $y = d$ sont donc des asymptotes horizontales à la courbe décrite par la fonction $g(x)$.

DÉFINITION

ASYMPTOTE HORIZONTALE

La droite $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe décrite par la fonction $f(x)$ si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

De façon générale, la droite $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe décrite par une fonction $f(x)$ si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ ou si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$.

EXEMPLE 6.8

Déterminons, s'il y en a, les asymptotes horizontales à la courbe décrite par la

Figure 13 : Exemple de définition – asymptote horizontale – dans le manuel Calcul différentiel (Hamel et Amyotte, 2007, p 295)

Définition

Soit f une fonction indéfiniment dérivable en $x = a$. Le développement en **série de Taylor** de la fonction f, autour de a, est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots,$$

pour tout x dans l'intervalle de convergence.

Figure 14 : Exemple de définition – série de Taylor – dans le manuel Calcul intégral (Charron et Parrent, 2004, p.347)

3.3 Intégrale définie

Propriétés de l'intégrale définie

Définition

1) Pour toute fonction f intégrable, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, pour tout $a \in \text{dom } f$.

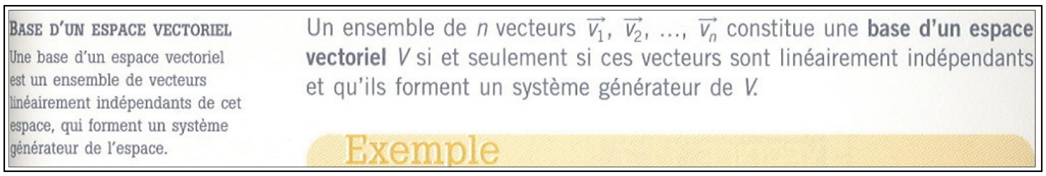
2) Pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$, $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Figure 15 : Propriétés de l'intégrale définie présentées comme des définitions (Charron et Parent, 2004, p.130)

En revanche, toujours dans l'ouvrage de Charron et Parent (2004), certaines propriétés de l'intégrale sont présentées comme des définitions, ce qui peut prêter à confusion et ne pas permettre à l'étudiant de repérer ce qui constitue une définition (cf figure 15)

C'est dans le manuel d'introduction à l'algèbre linéaire de Amyotte (2003) que l'on retrouve le plus de définitions : soixante-quatre définitions ou groupes de définitions y ont été répertoriés. De même que dans le manuel de calcul de Hamel et Amyotte (2007), celles-ci sont mises en exergue grâce à une typographie spécifique, en marge du texte. Là encore, contrairement aux manuels en vigueur au secondaire, la mention *Définition* y figure souvent explicitement, et nous n'y avons relevé aucune des confusions de genre mentionnées précédemment.

Parmi ces soixante-quatre définitions, sept sont essentielles, principalement regroupées dans le chapitre consacré aux espaces vectoriels (Amyotte, 2003), à l'instar de celle de *base* d'espace vectoriel et de sous-espace vectoriel (cf. Figure 16).



BASE D'UN ESPACE VECTORIEL
Une base d'un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de cet espace, qui forment un système générateur de l'espace.

Un ensemble de n vecteurs $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, ..., $\vec{v_n}$ constitue une **base d'un espace vectoriel** V si et seulement si ces vecteurs sont linéairement indépendants et qu'ils forment un système générateur de V.

Exemple

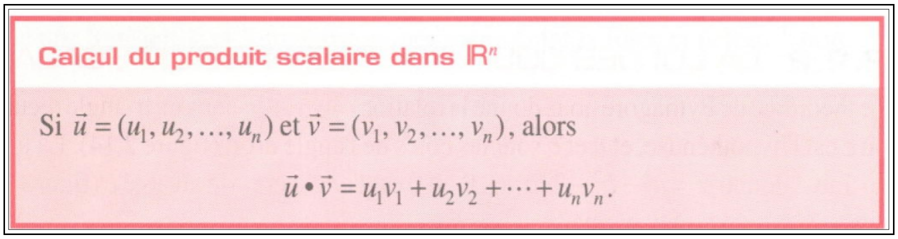
Figure 16 : Exemple de définition essentielle – base d'un espace vectoriel (Amyotte, 2003, p.455)

4.1.4 *Etude du manuel de référence de la séquence didactique – Papillon (1993)*

Nous proposons maintenant de conclure cette section par l'étude du manuel de référence de la séquence didactique. Notons tout d'abord que ce manuel est composé de neuf chapitres; les huit premiers traitent d'algèbre « linéaire » alors que le dernier consiste en une introduction à la théorie des groupes. Chaque chapitre présente la matière de manière segmentée, à l'aide d'une alternance de commentaires, de définitions et d'exemples, et comporte une section finale qui tend à approfondir les notions abordées.

Tout au long du manuel, les définitions y sont clairement démarquées, figurant toutes dans un même encadré rouge. La mention *Définition* y figure de manière explicite. Néanmoins, la présentation peut elle aussi prêter à confusion : en effet, on retrouve, au sein de ces encadrés, non seulement des définitions mais également des constructions ou des méthodes de calcul. En témoigne l'encadré de la page 54 (cf.Figure 17) qui fait référence au calcul du produit scalaire dans un espace réel à n dimensions. Un autre exemple concerne les méthodes de calcul de déterminants (règle de Cramer – Papillon, 1993, p.96).

Pour ce qui relève des langages employés, on note que les premiers chapitres sont riches en illustrations graphiques, car l'auteur est soucieux d'établir des liens entre la géométrie vectorielle et celle des transformations. En revanche, le dernier chapitre, consacré à l'algèbre abstraite ne comprend qu'une seule figure…



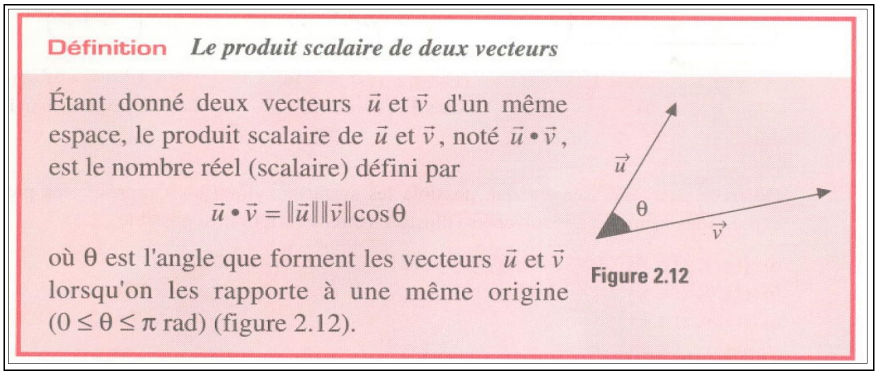
Calcul du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, alors

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Figure 17 : Méthode de calcul présentée à l'aide de la typographie servant de référence aux définitions (Papillon, 1993, p.54)

Concernant les définitions, comme pour l'ensemble des manuels étudiés, *la quasi intégralité des définitions présentées dans les sections principales des chapitres sont à caractère nominal***.** A l'exception des définitions par construction (comme la définition de la norme d'un vecteur de la page 44 ou celle du déterminant d'une matrice carrée de la page 216) et de quelques exceptions « triviales » où une seule propriété doit être satisfaite (comme la définition d'un vecteur unitaire, p.46, ou celle d'une droite présentée à la page 122), elles consistent généralement en des abréviations de langage. Autrement dit, *les objets et les notions ne sont que très rarement définis sur la base de leurs propriétés.* Par exemple, les propriétés du produit scalaire (qui pourrait, comme mentionné dans notre cadre conceptuel, être présenté à l'aide d'une définition essentielle) sont présentées à la page 59 alors que sa définition, présentée à la page 52 (cf. Figure 18), ne fait référence qu'à la norme des vecteurs et au cosinus de l'angle formé par les vecteurs considérés.



Définition *Le produit scalaire de deux vecteurs*

Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'un même espace, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$, est le nombre réel (scalaire) défini par

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

où θ est l'angle que forment les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on les rapporte à une même origine ($0 \leq \theta \leq \pi$ rad) (figure 2.12).

Figure 18 : Définition nominale du produit scalaire (Papillon, 1993, p.52)

S'il n'est presque jamais fait explicitement mention de preuve dans la plus grande partie du manuel, les chapitres 6 et 7, consacrés au calcul matriciel, font toutefois figure d'exception. Tout au long du manuel, quelques raisonnements viennent appuyer certains propos ou résultats mais les propriétés des objets ou les théorèmes ne sont, hormis quelques exceptions notables (théorème de Gauss-Jordan – page 207, théorème d'inversion de matrices – p.209 et théorème de représentation – page 246) généralement pas démontrés[39].

Relevons enfin que, dans le dernier chapitre, l'introduction à la théorie des groupes se fait sur la base de l'étude des ensembles finis de nombres entiers (Papillon, 1993, p. 330). On risque ainsi de voir se renforcer la confusion des modèles (au sens de Fischbein, 1987) et restreindre de facto le champ d'application de la théorie.

Nous avons relevé deux éléments qui, selon nous, peuvent conduire les étudiants à penser que le contexte d'application de cette théorie se restreint au champ des ensembles numériques. Tout d'abord, la définition du groupe (p.335) suit la définition de $\mathbb{Z}_n$ (p. 330). Enfin, même s'il est parfois fait référence à des groupes tels que les groupes de symétries (p. 336), de permutations et de matrices particulières (orthogonales, inversibles…), les ensembles finis de nombres servent non seulement d'entrée mais également de référence récurrente à la théorie des groupes.

---

[39] Comme en témoignent les résultats présentés aux pages 167 et 206.

4.1.5 *Conclusion sur l'étude des manuels*

Notre analyse a relevé une très faible présence de preuves parmi les manuels du secondaire et du collégial. Une très petite proportion des résultats énoncés y sont prouvés. La plupart des preuves présentes dans les manuels d'algèbre concernent les résultats relatifs aux espaces vectoriels ou, pour ce qui du manuel de Papillon (1993), le calcul matriciel.

Nous avons également pu observer une prédominance du langage naturel, et ce à tous les niveaux (secondaire et collégial). Le graphique semble quant à lui être le moins employé des trois langages. Cela se remarque particulièrement en algèbre où il n'est employé que pour les cas élémentaires.

Nous avons remarqué une quasi absence de définitions essentielles (ou de définitions basée sur le respect de plusieurs propriétés) à la fois au secondaire et au collégial. En algèbre, lorsque celles-ci sont présentes, elles se retrouvent principalement parmi les chapitres consacrés aux espaces vectoriels.

L'apprentissage de l'algèbre abstraite, lorsqu'effectué au collégial, semble donc correspondre, et de façon variable, à une introduction aux définitions essentielles et aux preuves intellectuelles, au sens de Balacheff (1998).

4.2 Analyse de la séquence didactique

Nous aborderons l'analyse de la séquence didactique proposée par Pfister (2008) sous l'angle des différents éléments de notre cadre conceptuel. Nous y relèverons le niveau d'abstraction requis (aussi bien en référence au schéma APOS qu'au type de modèles employés par les étudiants – analogique ou paradigmatique), le type de définitions mises en jeu, la nature des langages employés, et les niveaux des preuves requises au sein de l'activité.

Cette séquence se compose de trois exercices – dont nous présentons les énoncés plus bas – précédés d'une introduction théorique qui consiste en un rappel des principales définitions (espace vectoriel sur l'ensemble des réels, scalaire et corps) nécessaires à la résolution des exercices de la seconde partie. Parmi ces définitions, seule celle de scalaire est nominale. Les autres sont essentielles (9 propriétés à respecter en ce qui concerne l'espace vectoriel et 11 en ce qui concerne le corps).

- Exercice 1 :

Considérons l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$. Définir une opération d'addition et de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0; 1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps.

L'enjeu de ce problème est de proposer une définition qui respecte les 11 conditions énoncées dans la définition de corps. La réponse anticipée rejoint la vision heuristique de Lakatos, relevée par Ouvrier-Buffet (2003). L'étudiant doit en effet proposer des candidats sur la base d'une définition naïve, proche de la *définition-zéro* et de nature plutôt intuitive, pour passer ensuite à une *définition générée par la preuve* – suivant ainsi une « activité de recherche » des opérations adéquates. C'est à l'aide d'un processus de validation de nature déductive à l'arborescence complexe (proche du *calcul sur les énoncés*) que l'étudiant vérifiera que les opérations définies satisfont les contraintes de la définition de corps. A la suite de cet exercice de validation, la *définition-zéro* peut alors devenir une *définition générée par la preuve*.

- Exercice 2 :

Considérons l'ensemble $K_{(\alpha;\,\beta)} = \{(\alpha\,;\,\beta)\,t.q.\,\alpha\epsilon\mathbb{R}$ et $\beta\epsilon\mathbb{R}\}$ Dans cet ensemble, deux éléments $(\alpha_1;\ \beta_1)$et $(\alpha_2;\ \beta_2)$ sont égaux si et seulement si $\begin{cases}\alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2\end{cases}$

1. Vos sympathiques professeurs ont vérifié que l'addition terme à terme de ces éléments (semblable à celle dans $\mathbb{R}^2$) satisfait bien les cinq premières propriétés caractéristiques des corps. Expliquer pourquoi la multiplication terme à terme de ces éléments, jumelée à l'addition terme à terme, ne fait pas de $K_{(\alpha;\,\beta)}$ un corps.
2. Considérons maintenant l'opération suivante que nous appellerons multiplication sur $K_{(\alpha;\,\beta)}$: $(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\,\alpha_2 - \beta_1\,\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. En admettant que cette opération est commutative et associative, démontrer que l'ensemble $K_{(\alpha;\,\beta)}$muni de l'addition terme à terme et de cette multiplication est bien un corps.

Comme pour le premier exercice, on relève dans cet énoncé une prédominance des langages naturel et symbolique. La représentation graphique est encore possible pour les éléments de $K_{(\alpha;\,\beta)}$ car, sans le mentionner explicitement, cet exercice fait référence aux nombres complexes. L'étudiant pourrait donc recourir au plan cartésien et au *principe du parallélogramme*, généralement présenté dans les cours de physique, pour illustrer leur somme. Pour autant que les étudiants puissent s'y référer, le degré d'abstraction, au sens de Dreyfus (2002), n'est donc pas trop élevé.

Toutefois, ce recours au plan cartésien n'est plus aussi immédiat dès lors qu'on considère la multiplication des éléments de $K_{(\alpha;\,\beta)}$ car celui-ci nécessite une connaissance du théorème de Moivre.

Toutes les définitions, à l'exception de celle de l'égalité, sont *essentielles*: celles des opérations se font par construction et sont donc également essentielles. Les opérations sont ainsi présentées, dans ces deux premières questions, en tant qu'objets (au sens de Dubinsky, 1991) et non en tant que processus.

On retrouve, dans la première partie de l'énoncé, la vision heuristique de Lakatos : une première définition *naïve* de la multiplication est proposée. Cependant, la multiplication terme à terme ne satisfait pas les propriétés et cette *définition-zéro* doit être ensuite retravaillée par l'étudiant pour aboutir à une définition convenable. L'*image du concept* de multiplication risque ici d'être très forte, très ancrée chez l'étudiant, car la multiplication terme à terme est la multiplication *naturelle*, celle qui prévalait jusque-là dans les cours de mathématiques. Il y a lieu de penser que l'étudiant peut alors ne pas percevoir la pertinence de recourir à une nouvelle définition, l'i*mage du concept* prenant le dessus sur la *définition du concept.*

Un des objectifs de ce problème réside dans le *type de modèle employé* par l'étudiant, lequel, a priori, risque de ne pas être adéquat. A quelques exceptions près, et la multiplication matricielle en est une, les opérations usuelles fonctionnaient dans la plupart des situations auxquelles les étudiants ont été confrontés. Les étudiants peuvent ainsi supposer que ces opérations prévalent d'emblée, voire qu'elles sont les seules envisageables, quels que soient l'ensemble, la théorie et les objets mathématiques considérés. Ce faisant, l'enjeu de la première partie de ce deuxième exercice est d'amener les étudiants face à une contradiction. L'ensemble

$K_{(\alpha;\,\beta)}$ étant de surcroît un ensemble numérique, les connaissances antérieures de l'étudiant sur les ensembles numériques peuvent ainsi agir, à tort, comme un *modèle analogique* (au sens de Fischbein, 1987) : elles devraient s'appliquer car elles sont supposées, toujours selon l'étudiant, décrire l'intégralité de la théorie.

Mais alors que le modèle de l'étudiant ou la représentation qu'il a des ensembles numériques et des opérations est analogique, pourquoi un tel exemple ne correspondrait-il pas à l'analogie implicitement faite au nombre réels ? Au travers de la recherche du contre-exemple, on amène l'étudiant à bouleverser l'organisation de ses connaissances...

- Exercice 3:

Maintenant que nous savons que $K_{(\alpha;\,\beta)}$ muni des opérations définies à la question précédente est un corps et qu'il nous fournit des scalaires, nous sommes autorisés à parler d'espaces vectoriels sur $K_{(\alpha;\,\beta)}$. Par exemple, l'espace vectoriel ${K^2}_{(\alpha;\,\beta)}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{v} = ((\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2))$ où les composantes (α_1, β_1) et (α_2, β_2) sont des scalaire de $K_{(\alpha;\,\beta)}$. On effectue la somme de deux vecteurs de ${K^2}_{(\alpha;\,\beta)}$ composante à composante et la multiplication par un scalaire $k\,\vec{v}$ (où $k = (\theta, \mu)$est un scalaire de $K_{(\alpha;\,\beta)}$) en multipliant chacune des composantes du vecteur $\vec{v}$ par le scalaire k 1. Considérons l'ensemble ordonné $B = \{((1;0),(0{,}0));((0;0),(0;1))\}$ Cet ensemble de deux vecteurs de ${K^2}_{(\alpha;\,\beta)}$constitue-t-il une base de ${K^2}_{(\alpha;\,\beta)}$? 2. Exprimer le vecteur $\vec{v} = ((1;2)(3;4))$ comme une combinaison linéaire des éléments de B.

Les éléments mathématiques considérés dans cet exercice appartiennent à l'ensemble $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pour ses éléments comme pour les opérations, seule la représentation symbolique est possible et il est délicat, voire impossible, pour les étudiants de se construire une *image du concept* et de recourir à un mode de représentation utilisant le *langage graphique*.

On retrouve à nouveau, dans cet exercice, un *processus de validation* avec un niveau de preuve relatif à une preuve intellectuelle (au sens de Balacheff, 1998). Les principales définitions (*base*, *corps* et *espace vectoriel*) sont toujours essentielles. Mais en revanche, la définition de multiplication, abordée dans cet exercice en tant qu'objet, semble *inusuelle,* car elle met en jeu deux éléments issus de deux ensembles distincts: le vecteur $\vec{v}$, issu de ${K^2}_{(\alpha;\,\beta)}$, et le scalaire k, élément de $K_{(\alpha;\,\beta)}$

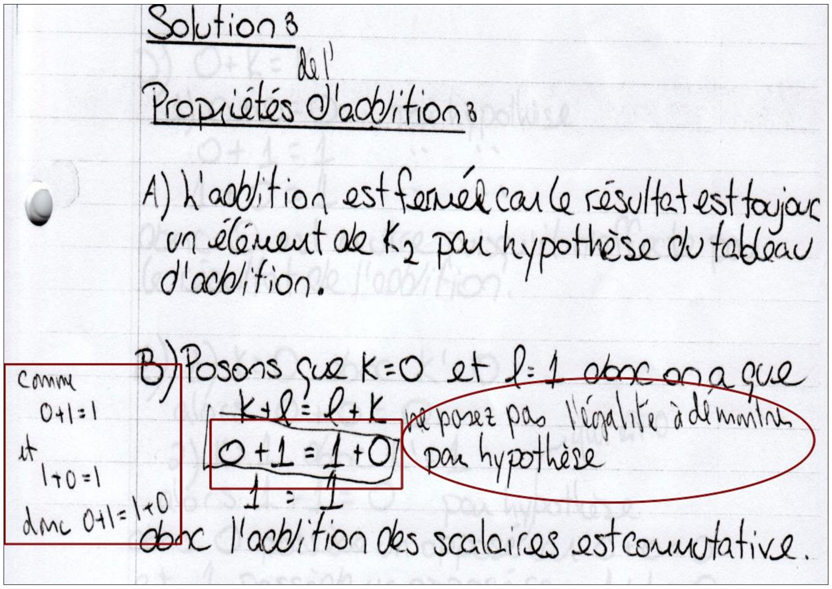
4.3 Analyses des productions d'étudiants

4.3.1 *Présentation des catégories (regroupement par type d'erreur)*

L'énoncé de la séquence didactique présentée et analysée dans la section précédente (section 4.2, page 80) a été proposé à un groupe d'une quarantaine d'étudiants dans le cadre du cours NYC dispensé en octobre 2006 au Cégep de Sherbrooke. Grâce à l'accord de chacun des participants et au soutien inconditionnel de l'enseignant, nous avons pu consulter les travaux de 34 étudiants et analyser les productions de ces 17 équipes (chaque équipe était composée de deux étudiants). Les copies nous ont été transmises suite à la correction de l'enseignant dont nous avons ainsi pu bénéficier sans connaître la note finale des étudiants. Dans un souci d'objectivité et afin de profiter de l'équité de la correction, nous n'avons identifié les erreurs des étudiants que sur la base des remarques et commentaires écrits de l'enseignant. Notre grille devrait ainsi refléter, du moins en partie, le contrat didactique passé entre l'enseignant et ses étudiants et ne comporter que des éléments ayant fait l'enjeu d'un enseignement.

Après une analyse des fautes commises et un travail de regroupement, nous les avons classées en neuf familles (les quatre premières ont également été décomposées en sous-familles) réparties comme suit:

1. Famille « Macro-Raisonnement »:
    - Elément à démontrer pris comme point de départ du raisonnement (un exemple de ce type d'erreur est présenté à l'aide de la Figure 19);
    - Preuve effectuée sur la base d'un exemple;
    - Non-étude de tous les cas possibles;
    - Vérification inutile de propriétés.


Solution :

Propriétés de l'addition :

A) L'addition est fermée car le résultat est toujours un élément de K_2 par hypothèse du tableau d'addition.

B) Posons que $k=0$ et $l=1$ donc on a que

$k+l=l+k$

$\boxed{0+1=1+0}$

$1=1$

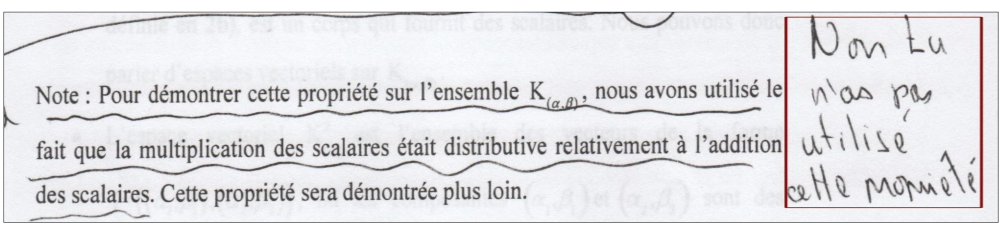
donc l'addition des scalaires est commutative.

ne posez pas l'égalité à démontrer par hypothèse

comme $0+1=1$ et $1+0=1$ donc $0+1=1+0$

Figure 19 . Exemple d'erreur où l'élément à démontrer est pris comme point de départ du raisonnement (Equipe 4, page1)

2. Famille « Micro-Raisonnement »:
   - Justification partielle du raisonnement employé;
   - Absence de référence ou référence inadéquate voire partielle aux propriétés ou aux définitions (un exemple de ce type d'erreur est présenté à l'aide de la Figure 20).

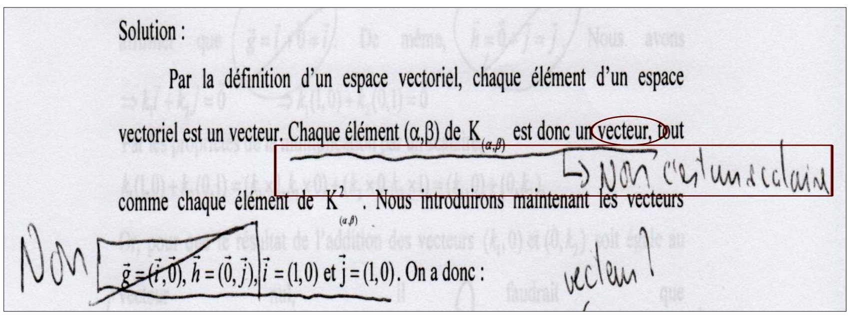

Note : Pour démontrer cette propriété sur l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, nous avons utilisé le fait que la multiplication des scalaires était distributive relativement à l'addition des scalaires. Cette propriété sera démontrée plus loin.

Non tu n'as pas utilisé cette propriété

Figure 20 : Exemple d'erreur où la propriété n'est pas adéquate (Equipe 5; page 7)

3. Famille « Non-respect des règles de rédaction »:
    - Absence (ou mauvaise formulation) de conclusions intermédiaires ;
    - Absence de conclusion générale.

4. Famille « Erreurs avec le langage naturel »:
    - Vocabulaire inadapté (un exemple de ce type d'erreur, en l'occurrence une confusion sémantique entre les termes *scalaire* et *vecteur*, est présenté à la Figure 21);
    - Utilisation erronée de connecteurs linguistique (et, car, donc...).



Solution :

Par la définition d'un espace vectoriel, chaque élément d'un espace vectoriel est un vecteur. Chaque élément (α,β) de $K_{(\alpha,\beta)}$ est donc un vecteur, tout

→ Non c'est un scalaire

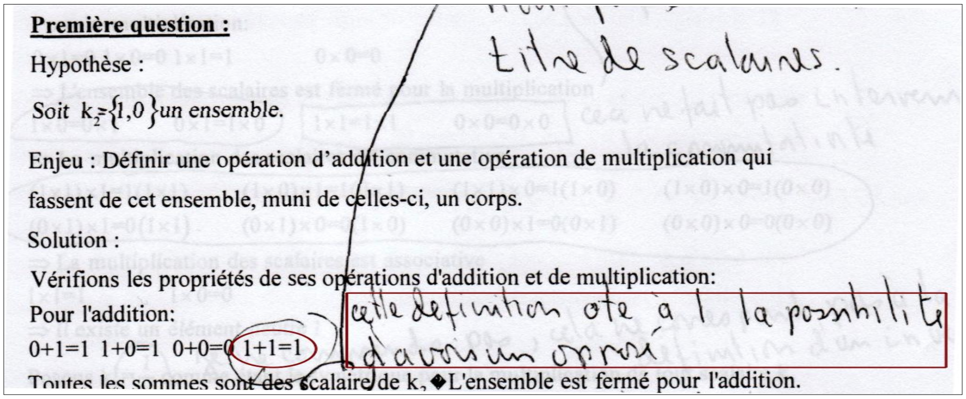
comme chaque élément de $K^2_{(\alpha,\beta)}$. Nous introduirons maintenant les vecteurs

Non $\vec{g} = (\vec{i},0), \vec{h} = (0,\vec{j})$, $\vec{i} = (1,0)$ et $\vec{j} = (1,0)$. On a donc :

vecteur ?

Figure 21: Exemple d'erreur - confusion sémantique dans le langage naturel (Equipe 5 ; page 9)

5. Construction inadéquate (ou absente) de la définition de l'opération (un exemple de ce type d'erreur est présenté à la Figure 22).



Première question :

Hypothèse :

Soit $k_2=\{1,0\}$ un ensemble.

Enjeu : Définir une opération d'addition et une opération de multiplication qui fassent de cet ensemble, muni de celles-ci, un corps.

Solution :

Vérifions les propriétés de ses opérations d'addition et de multiplication:

Pour l'addition:

0+1=1 1+0=1 0+0=0 1+1=1

Toutes les sommes sont des scalaires de k, ◆L'ensemble est fermé pour l'addition.

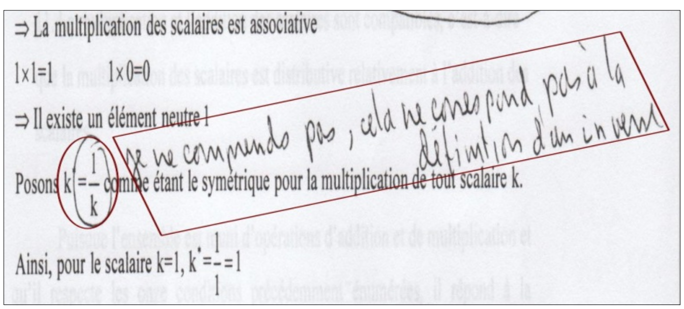
titre de scalaires.

cette définition ôte à 1 la possibilité d'avoir un opposé

Figure 22 : Exemple de construction inadéquate d'une opération (Equipe 5 ; page 2)

6. Erreur ou confusion sémiotique (dans le langage symbolique)

Un exemple de ce type d'erreur – écriture inadéquate de l'élément neutre – est présenté à la Figure 23. Remarquons que, dans cet exemple, l'étudiant applique l'écriture usuelle, en fraction, de l'élément inverse. Cette confusion, le fait qu'il prenne appui sur les ensembles de nombres usuels, qu'il considère le corps des nombres rationnels comme un cas général (alors qu'il ne s'agit que d'un cas particulier de structure algébrique) laisse penser qu'il est confronté à une confusion de modèle – analogique et paradigmatique – (cf section 2.2.3, p. 22)



⇒ La multiplication des scalaires est associative

1x1=1 1x0=0

⇒ Il existe un élément neutre 1

Posons $k'=\frac{1}{k}$ comme étant le symétrique pour la multiplication de tout scalaire k.

Ainsi, pour le scalaire k=1, $k'=\frac{1}{1}=1$

je ne comprends pas, cela ne correspond pas à la définition d'un inverse

Figure 23 : Exemple d'erreur sémiotique - confusion dans l'écriture de l'élément neutre (Equipe 5 ; page 3)

7. Preuve effectuée sur la base d'exemple(s)

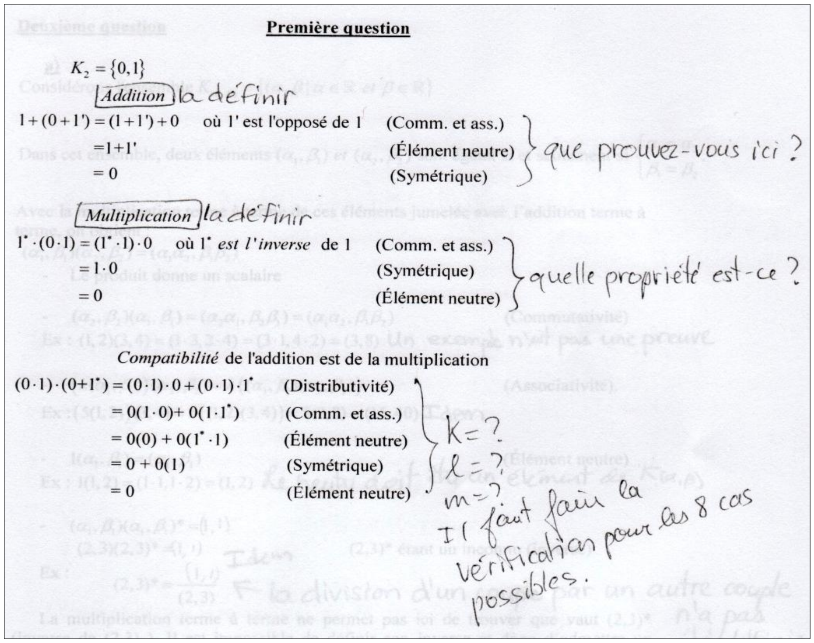
8. Non mention de l'inconnue au sein du calcul

9. Exercice incomplet

4.3.2 *Présentation des résultats (tableau de recension et de répartition)*

La compilation et la répartition de l'ensemble des erreurs sont données en annexe (cf. annexe 7.4, p.145) sous la forme d'un tableau dans lequel nous avons recensé les erreurs commises par les étudiants. Les nombres contenus dans le tableau indiquent la page de leur travail où l'erreur a été commise.

Avant d'approfondir certains exemples d'erreurs à l'aide de productions d'étudiants et la répartition de celles-ci, remarquons déjà qu'il nous est délicat de les quantifier et de tirer des conclusions en effectuant des sommes. Il s'agit en effet d'une appréciation qualitative et toutes les erreurs, même au sein d'une catégorie donnée, ne sont pas de la même envergure. A titre d'exemple, considérons l'équipe 14 qui, sur la base du relevé, semble avoir commis peu de fautes. Même si ce nombre est en apparence relativement restreint, les erreurs commises ont pourtant une énorme incidence sur l'évaluation finale et il est pertinent de se questionner sur la réelle compréhension de la matière chez ces étudiants. La justification des résultats est en effet presque absente de leur rapport, comme en témoigne l'extrait présenté à l'aide de la Figure 24. Nous devrons donc relativiser nos observations basées sur un dénombrement.



Première question

$K_2 = \{0,1\}$

$\boxed{Addition}$ la définir

$1+(0+1') = (1+1')+0$ où $1'$ est l'opposé de 1 (Comm. et ass.)

$=1+1'$ (Élément neutre)

$=0$ (Symétrique)

que prouvez-vous ici ?

$\boxed{Multiplication}$ la définir

$1^* \cdot (0 \cdot 1) = (1^* \cdot 1) \cdot 0$ où 1^* *est l'inverse* de 1 (Comm. et ass.)

$= 1 \cdot 0$ (Symétrique)

$= 0$ (Élément neutre)

quelle propriété est-ce ?

Compatibilité de l'addition est de la multiplication

$(0 \cdot 1) \cdot (0+1^*) = (0 \cdot 1) \cdot 0 + (0 \cdot 1) \cdot 1^*$ (Distributivité)

$= 0(1 \cdot 0) + 0(1 \cdot 1^*)$ (Comm. et ass.)

$= 0(0) + 0(1^* \cdot 1)$ (Élément neutre)

$= 0 + 0(1)$ (Symétrique)

$= 0$ (Élément neutre)

k = ?
l = ?
m = ?
Il faut faire la vérification pour les 8 cas possibles.

Figure 24 : Extrait de production d'étudiant illustrant le caractère non quantitatif des erreurs commises (Equipe 14 ; page 2)

Une première étude succincte de ce tableau dans son ensemble nous apprend toutefois que la famille « Non-étude de tous les cas possibles » est la plus fréquente. En effet, il apparaît que toutes les équipes ont commis au moins une faute de ce type. La plupart des équipes ont commis cette erreur lors de l'exercice 2 de la séquence, lorsqu'il leur était demandé de vérifier si les propriétés du corps étaient ou non satisfaites par la multiplication usuelle dans l'ensemble $K_{(\alpha\,;\,\beta)} \cong \mathbb{R}^2$ (l'erreur commise consistait en général à omettre l'étude du cas où le dénominateur valait 0). Une seule équipe (17) a systématiquement considéré le fait que le paramètre étudié pouvait être égal à 0; le seul moment où les membres de cette équipe n'envisagent pas tous les cas possibles est lorsqu'ils omettent, à l'exercice 2, d'identifier un inverse multiplicatif pour les éléments du type $(\alpha_k, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.

L'importance de ce type d'erreur laisse penser que les structures des raisonnements et des preuves ne sont pas parfaitement maîtrisées. Cela resterait à confirmer à l'aide d'entretiens mais l'arborescence des démonstrations et la preuve dite « intellectuelle » semble être source de difficultés chez un grand nombre d'étudiants.

Un second indice allant dans ce sens est qu'un autre type d'erreur commise fréquemment concerne l'absence ou la mauvaise formulation de conclusions intermédiaires.

Afin de constituer un échantillon contrasté d'équipes à recevoir en entrevue, nous avons tenté de dégager le profil de certaines d'entre elles, qui paraissaient plus fortement typées. Une étude plus détaillée du tableau de recension nous permet de remarquer les points suivants:

- l'équipe 1 est la seule équipe, avec l'équipe 2, à avoir effectué une vérification inutile des propriétés (ce qui laisse présager d'une difficulté dans le processus de preuve) ;

- les équipes 1 et 5 sont les deux équipes à avoir commis le plus grand nombre d'erreurs ou confusions sémiotiques au sein du langage symbolique (respectivement 7 et 10) ;

- l'équipe 5 est celle dont le vocabulaire semble le moins adapté (équipe ayant commis le plus d'erreur de type sémantique). Nous n'avons malheureusement pas eu la possibilité de rencontrer cette équipe en entretien afin de pouvoir identifier quelles en sont les raisons[40] ;

- l'équipe 6 a commis deux erreurs sémantiques particulières avec le langage symbolique dans le deuxième exercice de la séquence. Il s'agit en l'occurrence d'une mauvaise appréciation du nombre d'éléments contenu dans un ensemble - « l'ensemble $K_{(\alpha;\,\beta)} = \{(\alpha,\beta)|\alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$ contient deux éléments » - et d'une perception erronée de la multiplication « $k \cdot l = kl$ où k et l sont des scalaires ». C'est la multiplication usuelle qui est ici prise en compte en lieu et place de la multiplication définie dans l'énoncé (confusion de modèles) ;

- l'équipe 6 se démarque par l'importance du nombre d'erreurs de type « *non mention de l'inconnue au sein du calcul* », ce qui l'amène à prendre pour point de départ l'élément qui sera à démontrer ;

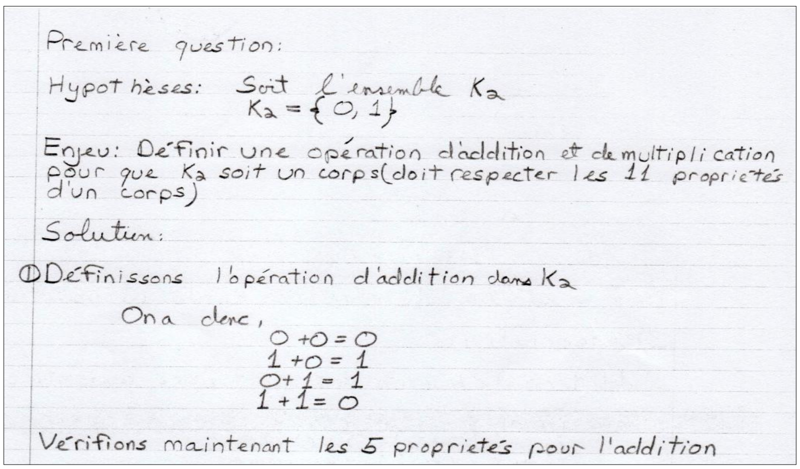
---

[40] Ceci pourra constituer une limite de notre recherche.

- les équipes 6 et 7 se démarquent par l'absence de conclusions intermédiaires dans leur rapport.

De manière plus positive, on peut relever que :

- l'équipe 16 décrit explicitement, tout au long de son rapport, les hypothèses, les enjeux et l'ébauche de raisonnement – cf. Figure 25. On en trouve d'autres traces aux pages 10, 13, 20 et 24 de leur rapport. La présence de cette structure de rédaction dans d'autres copies, comme celle de l'équipe 5, laisse supposer qu'il s'agit d'un protocole (canevas) proposé en classe par l'enseignant[41]. Toutefois, contrairement à l'équipe 5, ce procédé est très bien rédigé par l'équipe 16.


Première question:

Hypothèses: Soit l'ensemble K_2
$K_2 = \{0, 1\}$

Enjeu: Définir une opération d'addition et de multiplication pour que K_2 soit un corps(doit respecter les 11 propriétés d'un corps)

Solution:

① Définissons l'opération d'addition dans K_2

On a donc,
$0+0=0$
$1+0=1$
$0+1=1$
$1+1=0$

Vérifions maintenant les 5 propriétés pour l'addition

Figure 25 : Exemple de canevas de raisonnement proposé par l'enseignant (Equipe 16 ; page 1)

- tout comme les équipes 8, 10 et 16, l'équipe 3 n'a commis aucune faute de nature sémiotique dans le langage symbolique ni d'erreurs dans le langage naturel. Toutefois, à l'inverse des trois autres équipes, l'équipe 3 a commis beaucoup de fautes de raisonnement. Il est étonnant que cette équipe ait réussi à clairement discriminer les

[41] Un entretien informel effectué par la suite avec les deux enseignants nous a confirmé qu'il s'agissait bien d'un canevas de rédaction présenté et imposé de manière explicite pour l'ensemble des travaux. Ce canevas reste toutefois circonscrit à ces deux enseignants et ne s'applique pas aux travaux de mathématiques demandés par les autres enseignants de mathématiques de l'établissement.

concepts mathématiques manipulés dans l'exercice sans faire preuve d'un raisonnement structuré et adapté.

- quatre équipes parmi les dix-sept étudiées, en l'occurrence les équipes 8, 10, 13 et 17, ont effectué un excellent travail, ce qui représente une proportion non négligeable. Un effort de justification soutenu est à mettre au crédit de l'équipe 13 dont nous présentons le travail en guise de corrigé (cf. annexe 7.5 p. 148).

Enfin, chose qui n'apparaît pas dans notre tableau de recension mais qui mérite d'être soulignée, l'équipe 17 effectue des distinctions sémiotiques entre les éléments de l'ensemble et leur fonction au sein de la structure algébrique (cf. Figure 26). L'élément neutre y figure en caractère gras (**0**) et est différencié des éléments de l'ensemble représenté en caractère simple. De là l'équation **0**=1, plutôt originale mais pleine de sens.

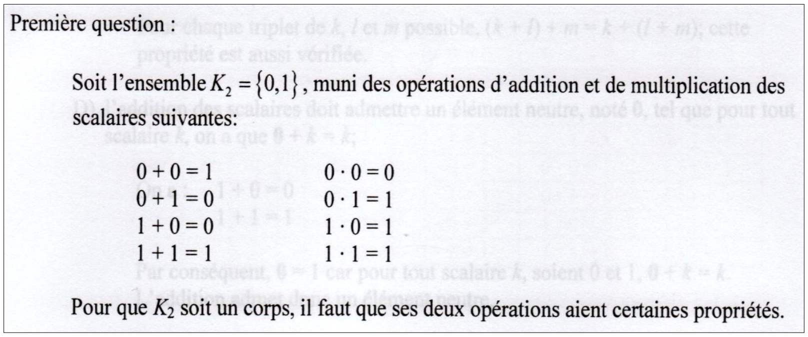
D) l'addition des scalaires doit admettre un élément neutre, noté **0**, tel que pour tout scalaire k, on a que $\mathbf{0} + k = k$;

On a : $1 + 0 = 0$
$1 + 1 = 1$

Par conséquent, $\mathbf{0} = 1$ car pour tout scalaire k, soient 0 et 1, $\mathbf{0} + k = k$.
L'addition admet donc un élément neutre.

Figure 26 : Distinction sémiotique entre les éléments d'un ensemble et leur fonction algébrique (Equipe 17 ; page 2)

Mais surtout, cette équipe propose, au premier exercice, une solution relativement originale: en lieu et place de l'addition habituellement développée elle construit deux opérations inhabituelles qui, sur l'ensemble K_2 , satisfont pourtant les propriétés d'un corps – cf. Figure 27. Cette singularité laisse penser que les étudiants ont parfaitement intégré les enjeux de l'exercice et possèdent des habiletés certaines dans le processus de preuve.



Première question :

Soit l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$, muni des opérations d'addition et de multiplication des scalaires suivantes:

$$\begin{array}{ll} 0+0=1 & 0\cdot 0=0 \\ 0+1=0 & 0\cdot 1=1 \\ 1+0=0 & 1\cdot 0=1 \\ 1+1=1 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

Pour que K_2 soit un corps, il faut que ses deux opérations aient certaines propriétés.

Figure 27 : Solution originale de l'exercice 1 de la séquence didactique (Equipe 17 ; page 1)

4.3.3 *Profil des équipes et choix des équipes rencontrées en entretiens*

Étant donné l'objet de notre recherche, nous nous sommes plutôt orienté plutôt vers des équipes ayant commis plusieurs erreurs. Bien entendu, afin de bénéficier d'analyses contrastées, nous envisagions également de rencontrer des équipes ayant rendu un travail comportant peu d'erreurs. Par exemple, nous aurions souhaité nous entretenir avec l'équipe 17, notamment afin de les interroger concernant la singularité de leur solution. Des contraintes temporelles ont malheureusement rendu cette rencontre impossible.

Après avoir composé avec l'accord des participants et au vu des erreurs commises ainsi que de leur répartition, notre choix pour les entrevues s'est porté sur les équipes 1, 3, 6 et 7. Ce choix repose sur les raisons suivantes :

- Nous avons sélectionné l'équipe 3 car, comme nous l'avons mentionné précédemment, elle n'a pas commis de fautes sémiotiques dans le langage symbolique ni d'erreurs dans le langage naturel (tout comme les équipes 8, 10 et 16). Mais à l'inverse de ces trois équipes, l'équipe 3 a commis beaucoup de fautes de raisonnement, ce qui nous apparaît relativement paradoxal. Nous avons donc cherché à connaître les raisons de cette contradiction apparente.

- Nous avons sélectionné l'équipe 6 car, avec l'équipe 2, elle est celle ayant commis le plus d'erreurs de raisonnement et, plus précisément, concernant le point de départ de ces différents raisonnements. De plus, nous y avons constaté une quasi absence de conclusions intermédiaires. Cette équipe nous semblait donc particulièrement intéressante pour expliquer les écueils du processus de démonstration et en détailler les raisons. De plus, la fréquence importante de ces types d'erreur, portant sur des éléments fondamentaux de l'exercice, laisse penser que cette équipe n'a que partiellement compris l'enjeu de l'énoncé.

- Parce que l'objectif des exercices semble également lui avoir échappé, nous avons sélectionné l'équipe 1. En effet, les multiples confusions sémiotiques entre les éléments neutres et symétriques porte à croire qu'elle n'a pas parfaitement intégré la distinction entre les ensembles de nombres et les structures algébriques étudiées et qu'elle considère encore les premiers pour cas général du second.

- Enfin, parce que la plupart des conclusions intermédiaires requises par l'enseignant était absentes de sa copie, nous avons souhaité nous entretenir avec l'équipe 7. Toutefois, en marge de cette omission, également observée chez l'équipe 6, nous n'avons observé que peu de fautes de raisonnement. A ce stade, nous ne savions donc pas si cette absence témoignait d'une faiblesse de raisonnement ou d'un non-respect des contraintes édictées par l'enseignant. C'est pour nous faire une idée sur le sujet que nous avons décidé de les inviter à une entrevue.

Encore une fois, étant donné le profil de ses erreurs, il aurait été intéressant de nous entretenir avec l'équipe 5. Malheureusement, il nous a été impossible d'organiser une rencontre avec ces étudiants. Cela constitue sans doute une des limites de notre recherche.

4.4 Analyse des entretiens (parallèles entre les productions et les entretiens)

Nous avons ainsi rencontré ces quatre équipes d'étudiants en entretien afin de leur soumettre les questions décrites dans le questionnaire présenté à la section 3.4.3 (p.67) de la méthodologie. Relevons encore une fois que, pour des raisons de délais, les termes du questionnaire avaient été déterminés en amont de l'analyse des résultats et du choix des équipes.

4.4.1 *Equipe 1 – Le caractère déconcertant de l'abstraction*

Cette première équipe est composée d'un futur étudiant en pharmacologie et d'une future étudiante en soins infirmiers. Rappelons qu'à plusieurs reprises dans son travail, cette équipe a inutilement vérifié des propriétés et, à l'inverse, a parfois omis certains cas nécessaires à la vérification et aux validations. Cette équipe a également commis plusieurs erreurs sémantiques avec le langage symbolique.

Notre entretien a d'abord permis de mettre en avant le fait que cette équipe a visiblement eu du mal à démarrer l'exercice. Le côté « abstrait » de l'énoncé fut mentionné à maintes reprises au court de l'entretien. Le fait que la réponse attendue par l'enseignant corresponde à une démarche et ne se résume pas à un chiffre ou à un ensemble de solutions semblait les perturber.

> *En quoi ce travail (cette activité) diffère-t-il des maths étudié jusque-là:*
>
> « C'est très abstrait […] il n'y a pas de réponses claires. C'est un peu philosophique... »
>
> *Et comment avez-vous abordé ce travail?*
>
> « Franchement, au début, on comprenait pas c'était quoi et on a dû poser beaucoup de questions »
>
> « C'est vrai, on s'dit : *T'es-tu malade, je serai jamais capable de faire ça, y a-tu vraiment quelque chose à comprendre ? »*

Le caractère inhabituel des éléments mathématiques des exercices les a également déroutés. L'existence d'ensembles différents des ensembles de nombres usuels ne leur est visiblement pas familière, comme en témoigne la suite de leur réponse, toujours à la même question :

> « C'était nouveau […] . Les nombres venaient par deux. J'ai de la misère à expliquer. C'est dur à dire ce qu'il y a de nouveau »

Ce côté abstrait semble plutôt les avoir rebutés, et cela peut être en lien avec leur manque d'autonomie lors de la résolution. Lorsqu'on les interroge sur les éventuelles modifications à apporter, c'est du « concret » qu'ils revendiquent.

Y a t-il quelque chose qui vous a déplu particulièrement dans ce travail?

« Le travail a été très long, **très abstrait**. En fait, assez long »

« Le fait d'avoir constamment besoin de quelqu'un... On peut pas le faire seul dans son coin, c'est ça le problème. On pouvait pas s'organiser. »

Et quelle modification apporteriez-vous ?

« **Pour créer de l'intérêt, il aurait fallu un contexte bien concret**. Il aurait pu mettre en contexte comme faire une situation. Susciter un intérêt dans la question tout court »

Même s'ils perçoivent que la validation entrera en ligne de compte dans cet exercice, leur déroute se ressent aussi au niveau des enjeux et des attentes de l'enseignant.

Quelles sont les nouveautés (du travail):

« Il y a pas vraiment de réponses *(à l'exercice)* […] On sait pas où aller »

« Il faut partir du néant »

« Il fallait démontrer les choses » « Il *(le prof)* nous explique c'est quoi un corps et tu dois montrer c'est quoi un corps. » « **C'est pas forcément démontrer qui est dur, mais plutôt la matière**. »

C'est un peu plus tard dans l'entretien que nous pourrons relever une certaine contradiction dans leurs propos: lors d'une question qui portait initialement sur l'emploi du manuel, ils s'écartent momentanément du sujet pour mentionner que c'est justement ce processus de démonstration qui s'est avéré délicat.

Est-ce que vous avez eu recours au manuel (et pour quels aspects de la tâche avez-vous eu recours au manuel) ?

« Une fois qu'on avait compris le corps, il fallait appliquer au problème et le démontrer et c'est ça qui a été super dur. »

Cette discordance reflète mieux ce que nous avons observé lors de l'analyse de leur production. Des difficultés ont bel et bien été ressenties au moment de la rédaction du processus de preuve dont les raisons semblent d'autant plus obscures que l'énoncé à démontrer apparaît « **évident** ».

« Il *(le prof)* veut tout qu'on prouve. Prouver quelque chose **d'évident**, c'est pas utile. 0=1? »

« Quand c'est **évident**, tu sais pas comment le démontrer parce que c'est **évident**... »

« En fait, il faut justifier les étapes de notre démarche. Mais il n'y a rien qui vient de même pour la justification ».

Mais alors que cette équipe a inutilement revérifié certaines propriétés, créant ainsi une certaine redondance dans leurs justifications, les étudiants proposent de justifier encore plus, comme si c'était en termes de quantité que leur travail péchait. Et c'est paradoxalement cette justification qui aurait dû structurer leur raisonnement qui semble les avoir handicapés.

« A un moment donné, à force de tout justifier, tu oublies un peu d'en mettre et tu te décourages »

« Et si on justifie [encore] plus, tu vois plus toutes les possibilités : par exemple 1 sur *a* et on oublie *a* différent de 0. »

« Il y a une manière de faire du prof et il faut que tu suives cette démarche-là. Il faut que tu justifies tout. Si on refaisait, on rejustifierait plus.

Nous pouvons conclure de cette dernière intervention que cette équipe n'a pas perçu l'enjeu de l'exercice. Leurs tentatives d'argumentation et de justification semblent être entreprises plus dans le souci de satisfaire les attentes du professeur que pour autre chose. Ces étudiants qui attachent manifestement une réelle importance à une « réponse finale » tangible, comme pourrait l'être la solution d'une équation ou le résultat d'un calcul, ne semblent pas considérer le raisonnement comme une fin en soi. Seule la réponse, identique à celle figurant sur un corrigé « officiel », semble importer:

« En plus, tu préfères apprendre par cœur que faire les exercices. Tu apprendrais par cœur le corrigé de l'algèbre plus que de la compréhension. Et il y a pas de corrigé ».

Certainement déroutée par le niveau d'abstraction requis et l'absence de contexte, cette équipe a ressenti quelques problèmes avec la validation et les preuves de type intellectuel (au sens de

Balacheff, 1988) comme en témoignent les nombreuses fautes de validation au sein de la production écrite. Enfin, perturbée par la signification des termes employés dans l'énoncé (à l'aide de définitions essentielles), cette équipe a été déconcertée, ne sachant trop où aller, d'où partir, comment amorcer le problème, un peu comme si chacun des termes des exercices et l'ensemble du problème étaient mal définis.

4.4.2 *Equipe 3 – Le travail du sens*

Un seul étudiant parmi les deux qui composaient l'équipe était présent pour l'entrevue. À l'aube d'études universitaires en physique, il témoignera très tôt dans l'entretien d'une grande prise de recul quant à sa formation. En effet, à plusieurs reprises, il effectuera des *parallèles entre les différentes disciplines scolaires*, notamment entre le cours d'algèbre linéaire et l'épreuve ministérielle de français (texte argumentatif).

> *Et en prenant un spectre plus large que les mathématiques, tu penses déjà avoir rencontré ce genre de processus (de justification)?*
>
> « On a eu à appliquer cette démarche (de justification) très souvent. Par exemple, pour des cours plus généraux comme le français. Au dernier cours de français qui est en fait le prélude à notre épreuve uniforme ministérielle, on a à produire un texte argumentatif où on doit prouver une thèse et la défendre dans son intégralité jusqu'à la fin avec des arguments. […] Donc je crois qu'il y a des parallèles intéressants à tirer effectivement avec le cours d'algèbre linéaire. »

Il poursuivra ces parallèles lorsque, revendiquant une certaine facilité avec les maths appliquées, il désignera la statistique comme *le français des maths* et l'algèbre linéaire comme une porte vers le discours argumentatif.

> « J'ai toujours eu beaucoup de plus de facilité quand c'était dans un cadre appliqué. Donc l'algèbre linéaire ou les statistiques, c'est quelque chose avec lesquelles j'ai beaucoup de misère. Les statistiques c'est étrange parce que c'est quelque chose de quand même assez appliqué sauf que c'est... Dans le fond, c'est un peu comme le français des mathématiques. **C'est l'étude des mille cas possibles qui sont différents mais c'est pas une loi qu'on peut tout le temps appliquer**. En tout cas... »

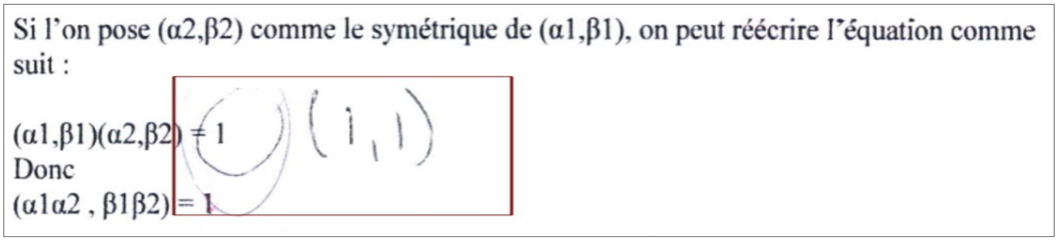
Malgré cette maturité et à l’instar de toutes les équipes interrogées, cet étudiant a semblé dérouté au moment de la première lecture de l’énoncé, un peu comme si la question était floue et les composantes du problème mal définies.

> *Y a t-il quelque chose qui vous a déplu particulièrement dans ce travail?*
>
> « Pour la question numéro 2... Je crois que c'est vraiment plus la question numéro 2 b où j'ai vraiment... **J'ai lu ça et je n'ai rien compris**. Il a vraiment fallu que je fasse un travail de recherche pour pouvoir le comprendre. Mais, a priori, il n'y avait rien dans ma tête, je ne savais pas par où commencer ou quoi que ce soit. […] **On rencontre beaucoup de problèmes sur toute l'abstraction qu'on doit faire** »

Au-delà de l'écueil dû à l'abstraction, explicitement mentionné dans ce cas-ci, certains éléments de l’énoncé et de son solutionnaire sont même perçus comme des *aberrations.*

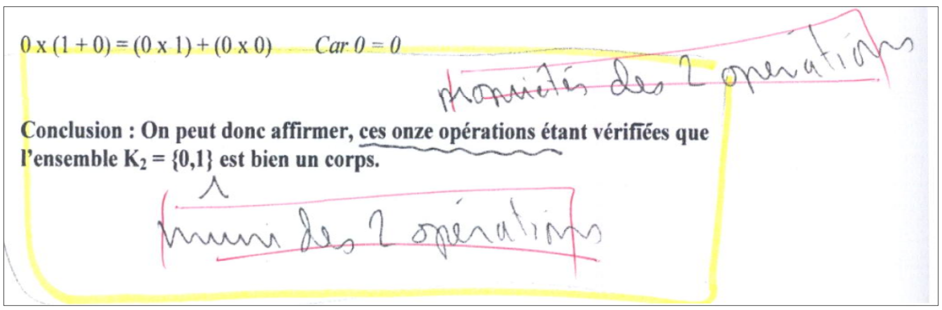
> *Comment as-tu utilisé cet enseignement ? […] Comment est-ce que tu as utilisé ce préambule pour faire ton travail ?*
>
> « Ben en fait, il y a des choses dans ce qu'il nous avait présentées qui étaient déjà, à la base, un peu intuitives. Comme 1+0 donne 1. C'est quelque chose, logiquement à ça, on l'applique à alpha et bêta, alpha+bêta donne bêta+alpha, des trucs comme ça. C'est assez intuitif. Là où ça l'était beaucoup moins et où le cours, je crois, nous a servi beaucoup plus ça a été pour le … disons les symétriques pour les neutres, des trucs pour l'ensemble (0;1) où 1+1 doit donner 0. **C'est quelque chose de tout à fait aberrant** au niveau où on était au début de la session ».

Nous avions relevé, lors de l’analyse des productions écrites, qu'une des particularité de cette équipe est, à l’instar des équipes 8, 10 et 16, de n'avoir commis **aucune erreur langagière –** à l'exception de l'erreur commise en page 6 (écriture du neutre, cf. Figure 28). De plus, à l’exception de la page 3 dans laquelle les opérations sont confondues avec leurs propriétés (champ lexical algébrique incohérent – cf. Figure 29), **aucune erreur de type sémantique** n'a été recensée chez cette équipe.


Si l'on pose (α2,β2) comme le symétrique de (α1,β1), on peut réécrire l'équation comme suit :

(α1,β1)(α2,β2) = 1 (1,1)
Donc
(α1α2 , β1β2) = 1

Figure 28 : Exemple d'erreur de type sémiotique dans l'écriture de l'élément neutre (Equipe 3 ; page 6)


0 x (1 + 0) = (0 x 1) + (0 x 0) *Car 0 = 0*

propriétés des 2 opérations

Conclusion : On peut donc affirmer, ces onze opérations étant vérifiées que l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$ est bien un corps.

muni des 2 opérations

Figure 29 : Exemple d'erreur de type sémantique dans le langage naturel (Equipe 3 ; page 3)

Cela pouvait laisser présager d'une relative aisance face au caractère novateur des définitions et au sens à accorder aux mots et symboles. C'est plutôt une volonté de compréhension, de **recherche du sens** à attribuer aux éléments de l'énoncé voire d'*encodage* qui sera mis en avant par notre interlocuteur.

> *Quelles sont les difficultés que tu as rencontrées et comment les as-tu abordées?*
>
> « Premièrement, lire et relire pour saisir qu'est-ce qu'un corps. On n'avait pas eu d'explications ou d'exposés sur ce qu'était un corps. Il a fallu essayer de déchiffrer ça par nous-même un peu. »
>
> « Puis, ensuite, ça a été la résolution des problèmes: je suis face à telle situation avec tel ensemble. Est-ce que c'est un corps, comment je dois faire pour déterminer que c'est un corps etc.. »

Mais au-delà de cette seule volonté de compréhension du sens, notre interlocuteur semblait déjà disposé à s'engager dans le problème en commençant par une approche essai-erreur. Il témoignait déjà d'une vision heuristique, notamment dans le processus de construction de la définition, rejoignant ainsi la vision de Lakatos (décrite par Ouvrier-Buffet, 2003) présentée dans notre cadre conceptuel.

> *Et ces difficultés, comment as-tu réussi à les surmonter ?*
>
> « **Moi, ce qui m'a beaucoup aidé, c'est l'essai erreur**. J'ai dû essayer des trucs et puis *Ah OK c'est ce qu'il voulait dire*. Parce qu'ensuite, je prenais ce qu'était un corps et j'essayais de l'appliquer comme si alpha1 est le terme qui n'est pas non nul et alpha2 disons qu'on le prend, c'est notre neutre etc... »
>
> *Et en ce qui concerne la justification, vu que tu la mentionnais tout à l'heure, est-ce que tu as le sentiment qu'il y a eu un apport à ce niveau-là?*
>
> « Oui, je crois que oui. Parce que lorsque vient le temps de faire des justifications dans le travail, on pose certaines hypothèses, on commence à résoudre le problème et **on se rend compte que nos hypothèses parfois sont incomplètes. Donc ça nous force à retravailler nos hypothèses jusqu'à ce qu'elles soient complètes** pour ensuite faire la justification de notre travail. »

En référence à Sfard (1991) et Dubinsky (1991), le degré d'abstraction semble être moindre pour cet étudiant qui, tout en s'intéressant au sens à donner aux concepts, tente, contrairement aux autres équipes interrogées, de voir la multiplication proposée à l'exercice 2 comme *objet* et non uniquement comme processus (même si l'étape de réification ne semble pas complétée). En effet, même si on les « mettait devant une multiplication qui, a priori, ne faisait pas de sens dans [leur] tête (…) c'est juste de comprendre après que c'est quelque chose qui nous est donné pour l'intégrer ensuite dans [leurs] calculs ». Comme le souligne notre interlocuteur, « dans le fond, [l'important], c'était d'abord de comprendre, de voir ».

Quant au fait que, pour reprendre les propos de l'étudiant, la « multiplication donnée ne fasse pas de sens dans [sa] tête », nous y voyons une *confusion des modèles selon Fischbein* (1987). Pour cet étudiant (comme pour tous ceux que nous avons rencontrés), la multiplication ne peut être que l'usuelle, celle étudiée dans les ensembles numériques jusque-là. Mais cette multiplication n'est en fait qu'un cas particulier de la multiplication présentée dans l'exercice 2 (pour retrouver la multiplication usuelle, il suffit de prendre des nombres dont la deuxième coordonnée est nulle). Ainsi, un cas particulier est perçu comme un cas général et un modèle qui n'est que paradigmatique est perçu comme analogique.

Ce qui distingue toutefois cette production de celles des équipes 8, 10 et 16 est que ces dernières ont rendu un excellent travail alors que cette équipe (3) a commis plusieurs erreurs d'autres types, notamment de raisonnement. Nous y avons en effet relevé plusieurs erreurs témoignant d'une maîtrise partielle du processus de preuve (non étude de tous les cas possibles avec une omission des cas particuliers, comme $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, en pages 8 et 10 ; conclusion du raisonnement souvent erronée, etc...)

Cela contraste pourtant avec la *grande volonté d'argumentation, de justification des hypothèses et la précision du champ lexical employé* à la fois dans le rapport (production écrite) – cf Figure 30 – et lors de l'entretien. Malgré quelques erreurs, cette équipe cherche à expliciter la plupart des étapes de son raisonnement (de type déductif) notamment en ce qui concerne la recherche d'un contre-exemple.

Nous savons à partir de a) que les opérations d'addition pour un corps fonctionnent bien pour l'ensemble K(α,β). Le problème survenait lors de opérations de multiplication. Puisque ce nouveau problème nous spécifie que l'associativité et la commutativité pour cette nouvelle formule de multiplication, il faut donc vérifier les 4 dernières opérations caractéristiques d'un corp pour affirmer avec certitude que K(α,β) en est effectivement un.

Hypothèses :
1) K(α,β) = {(α,β)|α Є R et β Є R}
2) (α1,β1)(α2,β2) = (α1α2 – β1β2 , α1β2 + α2β1) multiplication sur K(α,β).
3) L'associativité de la multiplication a été vérifiée.
4) La commutativité de la multiplication a été vérifiée.
5) L'addition terme à terme est définie comme étant
(α1,β1) + (α2,β2) = (α1 +α2 , β1 + β2)

Enjeu : K(α,β) est un corps.

Figure 30 : Argumentation, justifications et présentation des étapes du raisonnement qui va être tenu (Equipe 3 ; page 7)

Malgré l'accent mis sur la rédaction, cette équipe a admis que cela s'était fait plutôt simplement, que le gros du travail avait plutôt porté sur la réflexion et la résolution mathématique du problème. En effet,

> « la rédaction en tant que telle du travail, ça a été beaucoup moins problématique que pour la résolution. C'est-à-dire que très rapidement, on a vu que traduire un travail d'algèbre linéaire, ça se résume en fait à donner des justifications pour tout. Donc, on devait seulement justifier et montrer ce qu'on allait faire dans les étapes à venir ».

Chose assez facile en apparence puisque, pour reprendre les propos de notre interlocuteur, il fallait

> « [poser] nos hypothèses, qu'on connaissait au départ, et on les utilisait après pour justifier toutes nos étapes. Donc c'était en gros des lignes mathématiques avec selon hypothèse 1, selon hypothèse 2 etc... A part ça, je ne crois pas que cela a été problématique »

Étant données les erreurs commises dans le rapport, il semblerait donc que la connaissance des raisonnements et de leur structure ne suffise pas à rédiger un travail exemplaire. Peut-être cela témoigne-t-il d'un manque de pratique, en partie attribuable à la faible présence des rédactions de preuve au sein du programme ministériel pour le secondaire et le collégial ?

4.4.3 *Equipe 6 – L'art difficile de la fiction et du récit*

L'équipe 6 est composée d'une étudiante inscrite au *double dec* (science de la nature et musique) ayant un goût particulier pour la lecture[42] et d'une autre étudiante qui pense s'orienter vers les sciences de la santé. Leur enseignante est Marie[43], raison pour laquelle ces étudiantes utiliseront le féminin pour évoquer leur professeur.

Nous croyons intéressant de pointer le goût pour la lecture de la première étudiante pour la raison suivante. Au début de l'entretien, les deux étudiantes faisaient part du même

[42] Nous retranscrirons les propos de cette étudiante dans cette section à l'aide d'une police helvetica.

[43] Le prénom est fictif.

scepticisme quant à l'apport du travail. Alors que notre question portait sur les mathématiques en général, elles firent toutes les deux immédiatement référence à la séquence didactique et au travail à rendre.

> « Moi, ce cours-là, je trouve que c'est plus de la culture. J'apprends des nouveaux trucs, mais est-ce qu'à un moment donné je vais calculer le volume d'un parallélépipède avec un déterminant trois par trois, je pense pas… »
>
> « Même chose. Moi, je trouve que ça sert plus à développer des façons de penser... ».

Il n'en sera toutefois pas de même à la fin de l'entretien. En effet, contrairement à sa collègue, *l'étudiante littéraire exprimera un avis légèrement différent* et présentera un **goût pour la fiction**, pour le *jeu de l'esprit* suscité par cette série d'exercice.

> *Est-ce qu'il y a quelque chose qui vous a plu dans ce travail ?*
>
> - Moi ? Non ! A part que, après, elle nous a expliqué comment ça fonctionne avec les ordinateurs et puis tout ça, là je voyais l'utilité. Mais quand je le faisais, j'étais là : « A quoi ça sert ? ». Mais t'sais, après ça, elle nous dit : « Bon, là, t'as intégré le nombre imaginaire et puis de tout ça… ». Là tu vois et puis « Ah, OK ! Je peux comprendre pourquoi qu'ils font ça ! ». Mais sinon, quand tu regardes ça, juste comme ça, tu te dis : « Voyons, t'sais ».
>
> « Au début, quand tu lis la première question, j'ai pas trippé, là. J'ai pas trouvé ça le fun pantoute. Mais après ça, **j'ai trouvé vraiment cool comment il a inventé une équation** (enfin il ne l'a pas inventé là) mais on avait jamais vu ça **et puis là on se rendait compte que ça marchait et puis, non, ça j'ai aimé**.
>
> **[…] Ouais, c'était le fun de voir qu'il y avait d'autres choses que 1+1=2** »

Il fut une nouvelle fois frappant de constater, au moment de l'entrevue, à quel point ces étudiantes admettaient n'avoir rien compris lors de la première lecture de l'énoncé, à quel point celui-ci les avait déroutées de prime abord.

En quoi ce travail (cette activité) diffère-t-il des maths étudiées jusque-là ? Avez-vous le sentiment que c'est quelque chose qui va bien avec le reste ou au contraire que c'est un cas particulier ?

« Ca, c'est vraiment un cas particulier… »

« On voit que ça touche un peu ce qu'on a vu : les bases par exemple. Mais… »

《 On se dit : *c'est quoi, c'est un ensemble ?* La première question, on l'a lu… »

« On l'a lu, t'fais : *qu'est-ce que qu'ils veulent, qu'est-ce qu'ils demandent…* »

《 **Je comprenais aucun mot de la question**. On l'avait pas vu, c'te matière-là. On n'avait rien vu. »

Et toujours à l'instar des autres équipes, sans les explications du professeur, même le solutionnaire leur apparaît aberrant : la solution, notamment de la question 1, n'a pas de sens à leurs yeux. Un peu comme s'il ne pouvait rien exister d'autres que les ensembles numériques et les opérations usuels.

« Jamais j'aurais pensé moi que *Ah oui… t'attribues…* […] Mais t'sais, t'aurais pensé à faire *1+1, et ben tiens je vais mettre 0?* […] **Comment tu penses d'égaler 1+1=0** ? »

Ces nouvelles opérations génèrent manifestement un malaise chez les étudiants qui ne voient pas ce qu'elles sont, à quoi elles servent, d'où elles viennent. Et comme le besoin de créer de nouvelles opérations ne se fait pas sentir, le fait que ces étudiants en connaissent déjà une rend délicat d'envisager une nouvelle multiplication.

« C'est que la deuxième [question], il pose une opération, tout le monde se demandait « *ça vient d'où, c't'opération-là ?* ». C'est juste comme… »

D'ailleurs, comme nous pouvons le constater à la Figure 31, ces étudiantes, même lors de l'exercice qui consiste à manipuler une nouvelle multiplication, recourent encore à la multiplication usuelle et confondent ces deux opérations dans leur production écrite (l'opération $k \cdot l$ devient kl).

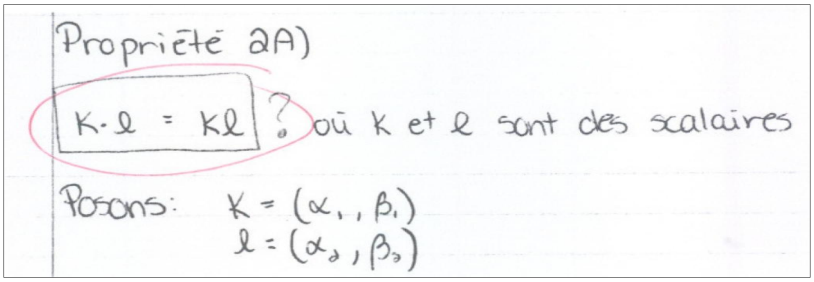


Figure 31 : Exemple de confusion sémantique entre les différents types de multiplication (Equipe 6 ; page 15)

Cette confusion a de quoi étonner car ces étudiantes ont pourtant déjà été confrontées à différentes multiplications. Le calcul différentiel les a amenés à multiplier des fonctions et l'algèbre linéaire des matrices. Le problème vient peut-être du fait que la multiplication présentée à l'exercice met apparemment en jeu les mêmes éléments que la multiplication usuelle.

Mais au-delà de la signification de la multiplication, c'est bien l'objectif général de la séquence qui demeure flou pour ces étudiantes. Les intentions du professeur ne leur apparaissent pas et ces étudiantes s'avouent incapables de dresser un plan de résolution a priori, d'identifier les étapes à suivre pour arriver au but attendu par l'enseignant, ni même d'identifier ce but.

> « Comment tu pars, comment tu… ?»
>
> *Quand tu dis que tu ne comprends pas la question 3, qu'est-ce que tu comprenais quand tu dis que tu ne comprends pas ?*
>
> « Dans le fond, je la lisais et puis **je savais pas comment partir**, **je savais pas à quoi arriver** »
>
> *Quelles sont les difficultés que vous avez rencontrées ?*
>
> « **De comprendre**. **Juste de savoir qu'est-ce qu'il nous demandait.** T'sais, on savait pas au début, on est supposé arriver à quoi, qu'est-ce qu'on est supposé avoir comme réponse. »

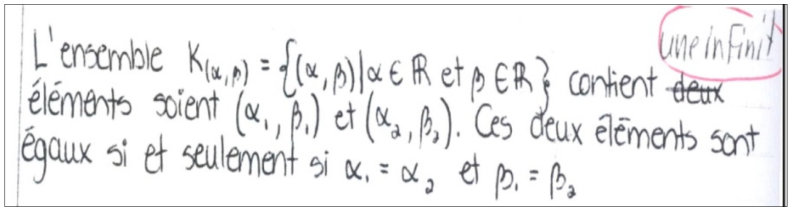
Si l’énoncé apparaît mal défini à ces étudiantes, c'est entre autres parce que, au-delà des objectifs et des intentions de l’enseignant, les phrases et les mots qui composent l’énoncé ne font pas sens, même à la relecture.

> *Comment est-ce que vous résumeriez votre impression à priori ?*
>
> « Ben, au début, n’importe quoi ! **Elle aurait pu le donner en arabe…** »
>
> *Est-ce que c’était parce que tu ne comprenais pas le vocabulaire ou bien est-ce que c’était parce que les phrases étaient trop tordues pour que tu puisses un petit peu t’y retrouver ?*
>
> « Juste la revoir. Parce qu’il me semble que, de un, je l’ai revue tout à l’heure et j’ai fait « Ouh ». (Lecture de la question). OK ! Ouais, c’est ça. **Moi, c’est vraiment les mots.** C’est à cause que moi, t’sais, c’est sûr que j’ai une question que il faut que je la relise plus qu’une fois. C’est sûr ! Mais là, je la lisais et j’étais perdue dans les variables, plus. J’étais un peu plus perdue dans… J’étais juste… C’est ça. »

Un peu plus tard dans l'entretien, nous apprendrons que ce sont non seulement les mots mais également les symboles qui étaient dépourvus de sens pour ces étudiants.

> *Comment avez-vous utilisé l’enseignement qui vous a été dispensé ?*
>
> « [...] Moi, le premier numéro, j’veux dire, le premier numéro, non ! Vraiment pas là ! Mais le deuxième, j’dois dire, t’sais montrer les bases, **on aurait p’t-être même pas compris les symboles**. T’sais tu comprenais un peu plus, là, mais… »
>
> *C’était donc dans les « K-alpha-bêta » que tu te perdais ?*
>
> « C’est ça. Quand ça semble ordonné. Et quand il y a encore d’autres affaires, j’étais là : « voyons ». Mais t’sais, je suis consciente que **j’ai un peu plus de misères** dans les bases, **dans le fait de comprendre l’écriture**. »

Cette incompréhension du langage symbolique, déjà observée lors de la confusion des différentes multiplications, s’illustre à nouveau à la page p.11 de leur production écrite (cf. Figure 32).



L'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,\beta) | \alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}\}$ contient ~~deux~~ une infinit éléments soient (α_1,β_1) et (α_2,β_2). Ces deux éléments sont égaux si et seulement si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\beta_1 = \beta_2$

Figure 32 : Erreur dans l'estimation du nombre d'éléments d'un ensemble (Equipe 6 ; page 11)

Mais plus encore que la compréhension des symboles, c'est surtout l'absence de représentation graphique qui semble avoir perturbé ces étudiantes pour qui, d'ordinaire, le langage graphique se révèle un allié précieux. En effet, nous avons vu que si il est encore possible d'y recourir pour la question 2 (même si les étudiants ignorent comment), cela n'est plus le cas pour la question 3.

> *Est-ce que je me trompe si je dis que ce qui vous a dérouté c'est le fait qu'on ne puisse rien représenter ?*
>
> ≪ C'est sûr. Parce que moi, à chaque fois que je comprends pas un problème, je prends une feuille, je dessine quelque chose, t'sais… Pis même avec les vecteurs, quand je comprends rien, je fais des axes, je dessine les vecteurs et puis là, à un moment donné je me dis : « OK ! ». Mais là, **je savais vraiment pas quoi dessiner ; si il y avait quelque chose qui se dessinait**. ≫

Malgré toutes ces difficultés, la production écrite de cette équipe témoignait d'un bon raisonnement algébrique – fait rare : cette équipe a toujours envisagé la possibilité d'un dénominateur nul lorsque cela était nécessaire... De même, cette équipe a régulièrement pris soin de mentionner et d'écrire les propriétés qui devaient être vérifiées.

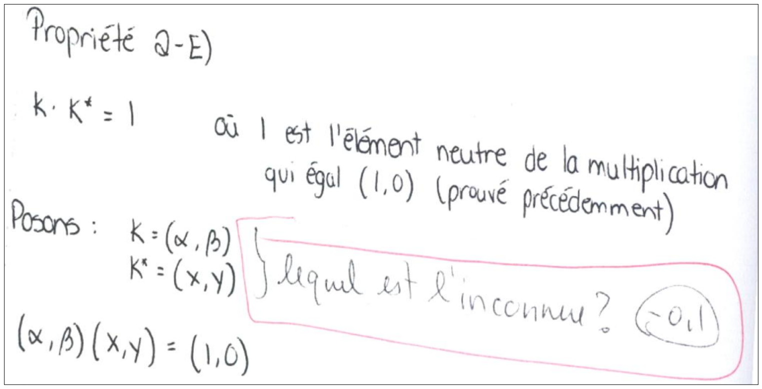
La rédaction de cette équipe semble donc bonne dans l'ensemble. Plus précisément, les questions 1 et 3 étaient bien rédigées alors que la question 2 s'est en revanche révélée un peu plus problématique.

L'analyse des productions écrites nous avait toutefois montré que cette équipe, à l'instar de l'équipe 7, avait commis beaucoup d'erreur de type « absence de conclusions intermédiaires ».

Comme l'entretien nous l'a appris, il pourrait s'agir là d'un certain malentendu quant aux critères de correction et aux attentes de l'enseignant. En effet, l'entrevue a révélé que ces étudiantes ne font des preuves et ne justifient leurs raisonnements que pour satisfaire les demandes l'enseignant, parce que cela figure dans les critères de correction et dans le contrat pédagogique. Et non pas parce qu'elles en ressentent la nécessité.

> *Si on regarde votre travail, on observe qu'il y a quand même pas mal de choses en français. Est-ce parce que c'est votre professeur qui vous a dit de faire ceci comme ça ou bien parce que vous en avez ressenti le besoin ?*
>
> « Ben moi j'ai déjà eu Marie comme professeur et puis on sait que Marie, elle aime l'écriture… »
>
> « Moi, je l'ai jamais eue et il aurait fallu que je mette des conclusions dans mon numéro 1 et puis je savais pas. Et parce que ça varie vraiment beaucoup d'un prof… Parce qu'on a fait ce travail-là et puis la semaine avant on avait un travail à remettre en statistique, on a fait la même chose… »
>
> « On a tout écrit en mots »
>
> « On est arrivé avec un travail de 20 pages chaque et le prof s'attendait à voir 2 pages. Et il a dit : « Mais qu'est-ce qu'il s'est passé ? ». On a dit: « Mais on a tout écrit. ». Il a dit «Ben, pas besoin ! ». »
>
> « T'sais, lui il voulait les choses mathématiques. Point ! »

Ce flou quant aux directives pédagogiques (qui peuvent varier d'un enseignant à l'autre) ne nous fait toutefois pas perdre de vue ce que cette absence de justification témoigne probablement aussi d'une relative faiblesse des raisonnements. Cette équipe est en effet celle ayant commis le plus de fautes du type « non identification de l'inconnue » lors des mises en équation (comme par exemple à la page 17, cf. Figure 33).



Propriété 2-E)

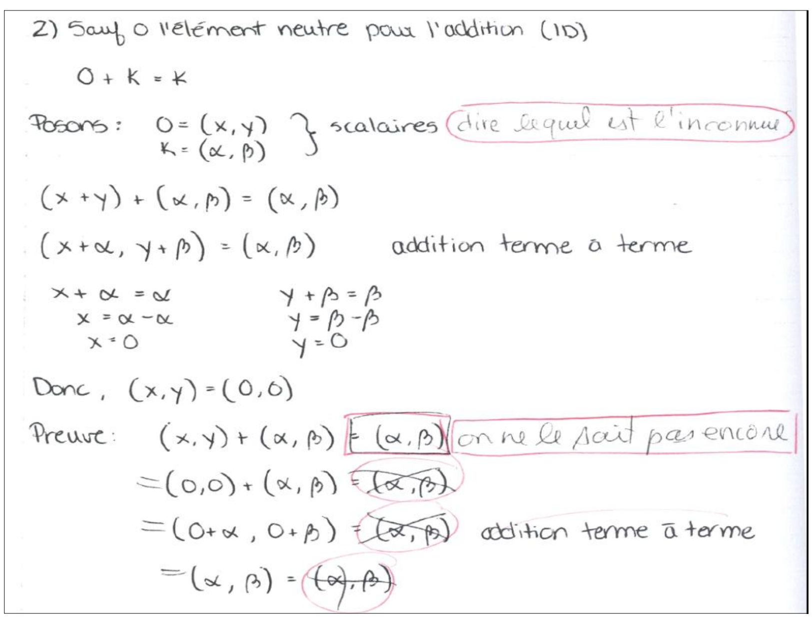
$k \cdot k^* = 1$ où 1 est l'élément neutre de la multiplication qui égal $(1,0)$ (prouvé précédemment)

Posons : $k = (\alpha, \beta)$, $k^* = (x, y)$ } lequel est l'inconnu? ($\leftarrow 0,1$)

$(\alpha, \beta)(x, y) = (1, 0)$

Figure 33 : Exemple d'erreur de type "non-identification de l'inconnue" (Equipe 6 ; page 17)

Il s'agit en effet de la seule équipe à avoir commis 4 fautes de ce type (à titre indicatif, viennent ensuite l'équipe 8 avec 2 fautes et l'équipe 7 avec 1 faute). Enfin, contrairement à l'équipe 7 mais tout comme l'équipe numéro 2, nous avons relevé beaucoup d'erreurs de type « élément à démontrer pris comme point de départ du raisonnement » dans leur travail (cf. Figure 34).



2) Sauf 0 l'élément neutre pour l'addition (1D)

$0 + k = k$

Posons : $0 = (x, y)$, $k = (\alpha, \beta)$ } scalaires (dire lequel est l'inconnu)

$(x + y) + (\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$

$(x + \alpha, y + \beta) = (\alpha, \beta)$ addition terme à terme

$x + \alpha = \alpha$, $x = \alpha - \alpha$, $x = 0$; $y + \beta = \beta$, $y = \beta - \beta$, $y = 0$

Donc, $(x, y) = (0, 0)$

Preuve : $(x, y) + (\alpha, \beta) \boxed{= (\alpha, \beta)}$ on ne le sait pas encore

$= (0,0) + (\alpha, \beta) = \cancel{(\alpha, \beta)}$

$= (0 + \alpha, 0 + \beta) = \cancel{(\alpha, \beta)}$ addition terme à terme

$= (\alpha, \beta) = \cancel{(\alpha, \beta)}$

Figure 34 : Exemple d'équation incohérente où l'égalité à démontrer est posée en début de raisonnement (Equipe 6 ; pages 12-13)

Comme indiqué dans la méthodologie, nous avons pris le parti, dans le cadre de notre recherche, d'effectuer la classification des erreurs sur la base des corrections effectuées par l'enseignant. C'est donc au regard de la remarque manuscrite « *on ne le sait pas encore* » que nous avons inclus cette partie de production dans la catégorie susmentionnée.

Une autre lecture de la deuxième partie de la rédaction dans laquelle les étudiantes souhaitent vérifier leur calcul serait d'interpréter la première ligne (celle incluant le mot *Preuve*) comme « *Nous souhaitons montrer que* $(x; y) + (\alpha; \beta)$, *avec le* $(x; y)$ *déterminé précédemment, est bel et bien égal à* $(\alpha; \beta)$ ». Si cela était, on pourrait alors reconnaître chez ces étudiantes un raisonnement cohérent dans ce passage, malgré un manque de rigueur dans l'écriture.

4.4.4 *Equipe 7 – La recherche du problème et des outils*

Les membres de l'équipe 7, l'un futur étudiant en médecine dentaire et l'autre en nutrition alimentation, justifient eux aussi la rédaction de leurs raisonnements davantage pour répondre aux attentes de l'enseignant et pour respecter les critères de correction que parce qu'ils en ressentent la nécessité: « Avec Marie, on sait comment elle fonctionne, elle veut du français ». Cela n'a toutefois pas été sans peine: la construction du texte et la structuration des idées semble avoir été problématique (« Tout ordonner, ça a été difficile à écrire ») et nous avons dénombré, tout comme pour l'équipe 6, plusieurs absences ou mauvaises formulations de conclusions intermédiaires (cf. Figure 35).

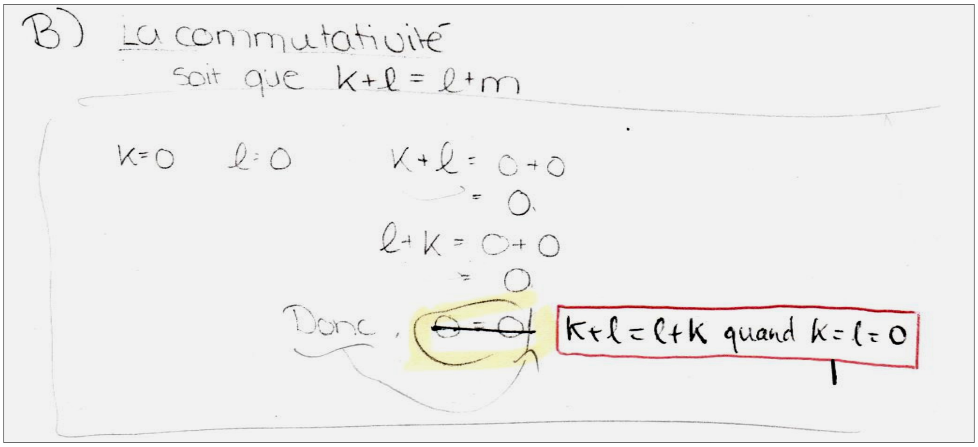


Figure 35 : Exemple de conclusion intermédiaire erronée (Equipe 7 ; page 1)

Ces étudiants ont néanmoins été soucieux de la rigueur du raisonnement tenu. Rappelons que cette équipe fait partie des six équipes à n'avoir fait qu'une faute de type « non-étude de tous les cas possible » (exercice 2), là où les autres équipes en font entre quatre et six. Consciencieux, systématiques et attentifs, leur attention s'est portée sur chacune des étapes du raisonnement – « Il fallait toujours se dire que peut-être il faut penser à des petits détails. Ils sont importants mais il fallait penser ». En témoignent la qualité des introductions et des conclusions (en termes argumentatifs) des exercices 1 et 2 (cf. Figure 36).

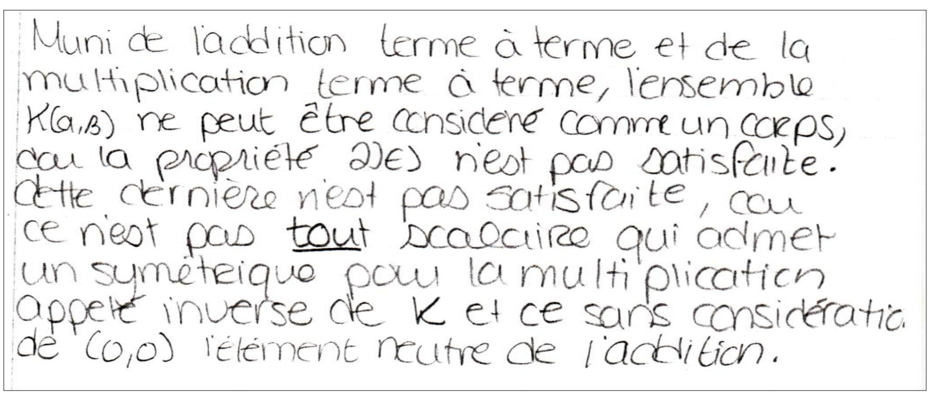


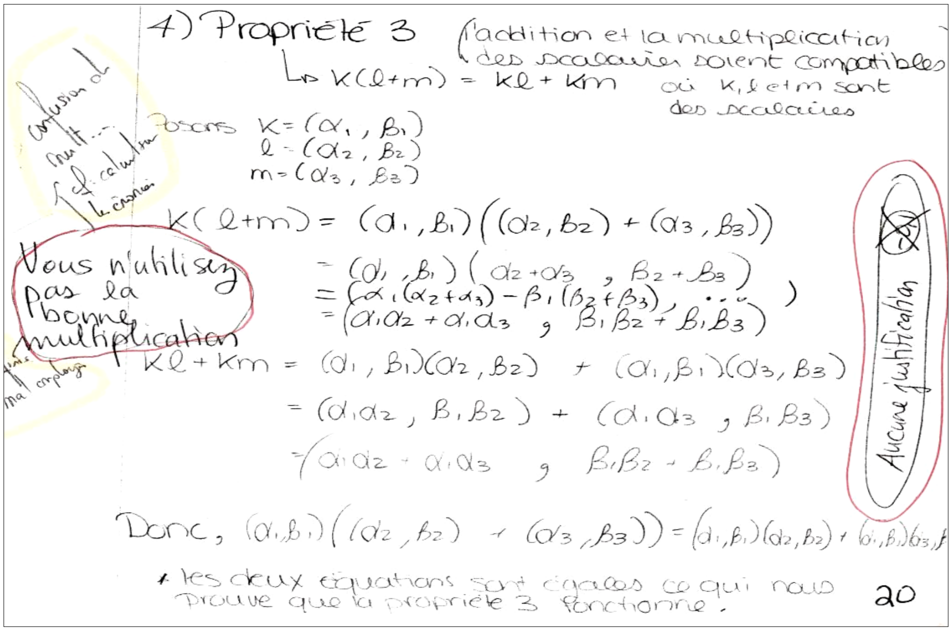
Figure 36 : Conclusion de l'exercice 1 (Equipe 7 ; page 16)

Cette équipe n'a pas fait exception à la règle et, tout comme les trois équipes précédentes, les étudiants reconnurent très tôt dans l'entretien avoir été particulièrement désorientés par l'énoncé des exercices.

> *Quelles ont été les difficultés rencontrées ?*
>
> « Savoir ce qu'on devait faire, ce qu'on attendait de nous. Juste comprendre les mots qu'il y a là-dessus ».
>
> « On s'est demandé si c'était nous qui comprenions pas ou si on avait manqué quelque chose ».

A nouveau, peut-être à cause de l'incompréhension des termes employés dans l'énoncé, les étudiants n'arrivaient pas à élaborer de plans de résolution, ne trouvaient pas d'amorce (« Mais comment partir ? On aurait jamais pensé par nous-même que 1+1=0 ») ou de stratégie de résolution (« Au moins, en physique, il y a des formules »). Ils étaient incapables d'effectuer le moindre lien entre cette activité-ci et le reste des notions mathématiques précédemment étudiées, voire même à n'importe quel autre domaine de formation (« Souvent, on peut rattacher, on peut voir des liens, mais ça… »). Plutôt que de piquer leur curiosité, cela a généré chez ces étudiants un rejet de la matière et des mathématiques en général (« On aurait pu découvrir que les maths, on aime ça, mais non »).

A l'instar des autres équipes, leur incompréhension ne se limite pas aux mots et aux termes de l'énoncé mais prévaut également tout autant pour les symboles (« Déjà rien que la notation, on comprend rien »). On en décèle quelques traces dans leur production écrite, sous la forme de confusions sémiotiques, notamment en ce qui concerne la multiplication aux pages 14 et 17 (voire de manière plus prononcée en page 20 – cf. Figure 37).



4) Propriété 3 (l'addition et la multiplication des scalaires soient compatibles

↳ $k(l+m) = kl + km$ où k, l et m sont des scalaires

Posons $k = (\alpha_1, \beta_1)$

$l = (\alpha_2, \beta_2)$

$m = (\alpha_3, \beta_3)$

$k(l+m) = (\alpha_1, \beta_1)((\alpha_2, \beta_2) + (\alpha_3, \beta_3))$

$= (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2+\alpha_3, \beta_2+\beta_3)$

$= (\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3) - \beta_1(\beta_2+\beta_3), \ldots)$

$= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3, \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3)$

$kl + km = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) + (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_3, \beta_3)$

$= (\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\alpha_3, \beta_1\beta_3)$

$= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3, \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3)$

Donc, $(\alpha_1, \beta_1)((\alpha_2, \beta_2) + (\alpha_3, \beta_3)) = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) + (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_3, \beta_3)$

* les deux équations sont égales ce qui nous prouve que la propriété 3 fonctionne.

20

Vous n'utilisez pas la bonne multiplication

Aucune justification

Figure 37 : Exemple de confusion sémantique entre les multiplications - emploi de la multiplication usuelle en lieu et place de la multiplication définie (Equipe 7 ; page 20)

4.4.5 *Synthèse des entretiens*

Nos entretiens ont révélé que l'ensemble des étudiants avaient été déroutés par le degré d'abstraction requis, source de nombreuses difficultés. Seul un étudiant parmi les sept rencontrés présentait une vision des concepts manipulés proche de celle de l'objet (au sens de Dubinsky, 1991 – cf. Equipe 3, section 4.4.2). De plus, la vision heuristique (au sens de Ouvrier-Buffet, 2003) et la construction d'une opération adéquate selon une démarche expérimentale semblaient, au début de l'exercice, presque inconcevable, pour la totalité des étudiants.

Une étudiante, habituée à essayer de représenter les problèmes à l'aide de graphiques ou de schémas, a explicitement mentionné avoir été déstabilisée par *l'absence de recours au langage graphique*. En ce qui a trait au *langage symbolique*, la signification et l'organisation des symboles semblaient problématiques (aussi bien dans ses composantes sémantique que syntaxique). En effet, l'emploi de symboles possédant une forte connotation pour les étudiants (les symboles habituels servaient ici à désigner des opérations nouvellement construites) encourageait les confusions sémantiques dans le langage symbolique.

De plus, ce *caractère non-représentable des énoncés* a permis, lors de nos entretiens, de révéler le malaise des étudiants face à l'emploi des définitions. Une observation similaire avait déjà faite dans d'autres circonstances par Tall et Vinner (1981) : l'image du concept entraîne un oubli de la définition du concept. Étant donné que les concepts mathématiques étudiés jusque-là étaient *représentables* et pouvaient être manipulés en ayant recours à leur *image* (graphe d'une fonction, *flèches* pour les vecteurs, etc...), il n'est pas déraisonnable de supposer que l'emploi et le recours à la définition formelle des concepts ne soit pas (plus) une habitude spontanée chez les étudiants. Or, comme nous l'avons remarqué lors de l'analyse de l'énoncé de la séquence didactique, la résolution de la plupart des exercices de cette séquence nécessitait un recours et une compréhension approfondie de la définition.

Enfin, comme l'analyse des productions écrites l'avait déjà laissé entrevoir, les preuves et les démarches de validation furent sources de grosses difficultés. Plus que le *comment*, c'est le *pourquoi*, la raison et l'utilité des preuves formelles, qui semblait échapper aux étudiants.

Par ailleurs, chaque équipe a, à des degrés divers, fait part d'un certain malaise, d'une incompréhension du problème, d'une incertitude quant à ses objectifs et aux attentes de l'enseignant. Quant aux différentes étapes de la démarche de résolution, elles aussi semblaient échapper aux étudiants au point de sembler parfois hors de portée.

Au vu de son impact, il nous semble important d'approfondir ce rapport au problème. Pour cela, nous recourrons à la psychologie cognitive et à la notion de problème bien ou mal défini.

4.4.6 *Les différents types de problème et le paradoxe vécu par les étudiants*

En nous référant à Voss (1989), nous pouvons déterminer que les traits distinctifs d’une « situation-problème » sont l’existence d’un but à atteindre, l’existence d’un état initial (données permettant de se construire une représentation du problème), la présence de contraintes ou obstacles à surmonter dans la démarche de résolution ainsi que la non disponibilité a priori d’une stratégie efficace pour résoudre le problème. Ainsi, grâce à cette quatrième condition, la situation-problème relève d’un caractère très personnel : ce qui est un problème pour l'un peut ne pas être un problème pour un autre.

A l'instar de plusieurs chercheurs en psychologie cognitive, Tardif (1992) distingue deux catégories distinctes de problèmes :

- les problèmes « bien définis » dont le but est précis, les données initiales, contraintes et buts sont énoncés de façon explicite et opérationnelle ;
- les problèmes « mal définis » qui ne satisfont pas une ou plusieurs de ces conditions.

Par exemple, le problème dit des « missionnaires et des cannibales » est *bien défini*[44]. La question « Comment améliorer la production agricole en URSS ? » relève quant à elle plus d'un problème *mal défini*. La question qui demande de définir deux opérations sur l'ensemble K_2 de manière à faire de lui un corps correspond à un problème bien défini.

Parce qu'ils sont de nature différente, ces deux types de problème ne se résolvent pas exactement de la même manière. Un problème *mal défini* pourra être traité soit par analogie (à d'autres problèmes dont l'énoncé et les contraintes apparaissent similaires), soit en décomposant la question en sous problèmes, soit en cherchant à y apposer des variables ou des contraintes qui ne sont pas spécifiquement mentionnées dans l'énoncé. Un problème *bien défini* pourra également être traité en cherchant une décomposition en sous problèmes mais il permet une manipulation immédiate des variables ou des contraintes déjà clairement explicitées. Pour autant que l'on puisse les résoudre et que le problème ne soit pas spécifique au point de pouvoir être traité par analogie, les problèmes mal définis sont ainsi plus difficiles à résoudre (Chi & Glaser, 1985).

Si les problèmes de la séquence didactique en algèbre abstraite étudiés dans ce projet ont un caractère bien défini, ils n'en furent pas moins difficiles à résoudre pour les équipes rencontrées. Le degré d'abstraction, l'emploi de définitions essentielles, leur construction heuristique, la manipulation de notions *non représentables graphiquement,* l'usage de symboles polysémiques et l'entrée dans la preuve intellectuelle constituent autant de

---

[44] « Quatre missionnaires et autant de cannibales n'ont qu'une seule embarcation de deux places au maximum et doivent traverser un fleuve. Il est impératif que le nombre de cannibales n'excède pas le nombre de missionnaires, peu importe l'endroit où ils se trouvent. Comment les faire traverser ? »

nouveautés dans leur pratique mathématique qui rendent très difficile la représentation du problème.

On assiste alors à un paradoxe: alors que toutes les composantes du problème sont bien définies, les étudiants le perçoivent comme *mal défini*. L'enjeu du problème en devient flou, les étapes de résolution ne peuvent être identifiées, et la démarche, nécessitant souvent un processus de preuve, semble inconnue des étudiants.

5 Conclusion

Durant notre expérience d'enseignant au niveau suisse équivalent au niveau collégial au Québec, nous avions observé un taux d'échec important et de grosses difficultés de compréhension chez nos étudiants lors de la présentation des notions fondamentales de la théorie des groupes. Paradoxalement, les étudiants qui nous apparaissent les mieux outillés étaient ceux au profil plus littéraire, d'ordinaire peu enclins à se lancer dans une activité mathématique. A l'inverse, des étudiants au profil plus scientifique semblaient déroutés par cette nouvelle matière.

C'est en voulant identifier les raisons de cette apparente contradiction que nous avons cherché à déterminer quelles étaient les difficultés – ou les obstacles – rencontrés par les étudiants lors de l'étude de l'algèbre abstraite.

5.1 Quatre angles d'analyse

Nous avons tout d'abord identifié quatre familles d'obstacles et de difficultés, souvent inter reliés, sur lesquels nous nous sommes basés pour construire quatre angles d'analyse pour des activités algébriques. Ces quatre familles, que nous détaillerons ci-après, sont l'abstraction, les définitions, les registres (et les langages) de représentations ainsi que les processus de preuve. Chacune a été balisée ou graduée afin de bénéficier de mesures ou de repères pour chacune d'elles.

Afin d'illustrer les obstacles et les difficultés recensés dans notre cadre conceptuel et en souhaitant étudier la manière dont ceux-ci se déclinaient dans des productions d'étudiants, nous avons ensuite entrepris l'analyse d'une séquence didactique proposée à des étudiants de dernière année d'étude collégiale. Après avoir recensé les erreurs contenues dans les productions de 17 équipes, nous en avons sélectionné quatre d'entre elles que nous avons rencontrées en entrevue.

Relevons enfin que, pour déterminer quel était le bagage de ces étudiants, nous avions préalablement procédé à une analyse de contenu des manuels qu'ils avaient pu utiliser au secondaire et au collégial.

- L'abstraction :

Parce qu’il s’agit d’un modèle, abordé généralement de manière intra mathématique, sans référence au monde extérieur, la théorie des groupes peut être considérée comme très abstraite, suivant la *définition* de l’abstraction proposée par Aristote déjà.

Mais si les étudiants rencontrés trouvent l’énoncé de la séquence très abstrait, c’est aussi parce qu’il en va de même pour toutes les définitions proposées pour mesurer l’abstraction que nous avons pu rassembler. La discipline algébrique est abstraite an sens d’Aristote, car on y cherche la nature intelligible de concepts comme les groupes et on tend à effectuer des regroupements (rejoignant ainsi la notion de modèles proposée par Dupin, 1995).

La degré d’abstraction ressenti par les étudiants s’explique en partie par la position qu’ils occupent au regard du schéma APOS élaboré par Dubinsky (1991) ; une immense majorité d'entre eux ne possèdent que des conceptions algébriques en processus. En effet, un seul étudiant, parmi les sept rencontrés lors de nos entretiens, considérait les concepts mathématiques (les opérations sur un corps) en tant qu’objet. Tous les autres étudiants présentaient des conceptions de nature purement opératoire et procédurale.

Une autre piste nous est proposée par Dreyfus (2002) qui voit en l’abstraction l’aisance d'un étudiant à effectuer des transitions entre les différentes représentations du concept mathématique. Les étudiants que nous avons rencontrés, incapables de se représenter les structures élémentaires de l’algèbre abstraite autrement qu’en termes numériques, étaient ainsi contraints d’évoluer à un stade primitif de l’abstraction.

Mais avec le degré d’abstraction requis, c'est aussi le sens des mots et des symboles employés qui évolue. Ce changement de sens est source de grosses difficultés – ou d'obstacles – qui se traduisent par des erreurs de nature sémantique.

- Les définitions :

Nous avons relevé dans les manuels du secondaire et du collégial une présence très importante de définitions nominales. C'est d'ailleurs ce type de définition qui est généralement privilégié dans le langage courant (Ouvrier-Buffet, 2003). L'algèbre semble ainsi correspondre à l'introduction dans la pratique mathématique de définitions essentielles, de nature plutôt inclusive. Ainsi, l'emploi de définitions essentielles vient, d'une certaine manière, faire obstacle à la construction des connaissances des étudiants lesquels, peu familiers au sens des mots employés, risquent ainsi de pas comprendre les enjeux et les contraintes de l'énoncé. Cette incompréhension et cette transition – entre les deux types de définitions – peuvent être rapprochées de celle déjà vécue durant les premières années du secondaire lors de l'étude des polygones (et la grande difficulté pour les étudiants d'accepter qu'un carré soit un rectangle…)

L'obstacle linguistique à surmonter est d'autant plus important que la définition essentielle n'est pas figée, elle est construite. Servant de socle à une théorie, elle est constamment révisée par le chercheur jusqu'à ce que les cohérences interne et externe de la théorie soient les plus satisfaisantes possibles : sa construction répond ainsi à un processus heuristique.

Cette démarche expérimentale, cette recherche des caractéristiques essentielles et, par la suite, cette détermination de ce qui fait l'essence d'un concept, ne sont que rarement présentées à l'étudiant. Tous ces procédés lui échappent d'autant plus que la définition, présentée sous sa forme la plus aboutie, est généralement apposée par l'enseignant en amont de la théorie. Seul un étudiant rencontré en entrevue a spontanément évoqué ce processus de recherche.

> […] lorsque vient le temps de faire des justifications dans le travail, on pose certaines hypothèses, on commence à résoudre le problème et **on se rend compte que nos hypothèses parfois sont incomplètes. Donc ça nous force à retravailler nos hypothèses jusqu'à ce qu'elles soient complètes** pour ensuite faire la justification de notre travail. » (Equipe 3)

Notre étude de manuels a révélé que les définitions ne figurent pas toujours explicitement dans les manuels du secondaire et, lorsqu'elles le sont, leur typographie peut s'avérer parfois source de confusion ; les remarques et les propriétés des objets mathématiques sont en effet exprimées à l'aide de la même typographie que celle employée pour les définitions.

Les étudiants ont d'autant moins conscience de ce travail sur la définition que le fait d'y recourir ne leur est pas spontané. Plutôt qu'à une définition formelle, ceux-ci ont plutôt tendance à recours à l'image du concept (Tall et Vinner, 1981). Et ce d'autant plus que la plupart des concepts mathématiques étudiés jusqu'en fin d'études collégiales sont *représentables*, par exemple à l'aide de croquis, de graphe ou de tout autre système de représentation composé d'éléments du langage graphique. Les étudiants n'ont ainsi guère eu l'occasion de remettre leur image du concept en question ; ils n'ont que rarement été placés dans des situations où l'image du concept se révélait incohérente ou inadéquate.

- Les registres de représentations et les langages

Les étudiants ont ainsi fréquemment recours à une représentation du concept manipulé et peuvent donc être déroutés par l'introduction de concepts mathématiques dont la nature ou la dimension paraît empêcher tout schéma. Le côté handicapant de ce caractère non représentable est d'ailleurs évoqué en entrevue.

Cela rejoint la perspective de Duval (1995) pour qui les modes de représentations sont indispensables à la compréhension mathématique. Ou, pour reprendre la formulation originale, qu' « il n'y a pas de noesis sans semiosis ». Comme nous l'avons déjà mentionné, Dreyfus mesure d'ailleurs l'abstraction à l'aide des différents modes de représentations à la disposition de l'étudiant et des facilités de transition entre ceux-ci.

Une étude des manuels nous a montré que l'algèbre abstraite était la première branche des mathématiques pour laquelle le langage graphique n'était pas vraiment mis à contribution. A vrai dire, les étudiants ne semblent posséder aucune représentation des concepts mis en jeu. Ils ne peuvent donc effectuer de transition et, aussi bien au sens de Duval que de Dreyfus, sont incapables d'abstraire ou d'effectuer des opérations mentales sur les concepts mathématiques étudiés.

Le caractère polysémique des symboles employés en algèbre abstraite joue également un rôle important. Le fait d'octroyer aux symboles +, 0 et 1 des significations différentes de celles, usuelles, prévalant dans les ensembles numériques n'aide pas les étudiants qui continue d'attribuer à ces symboles les mêmes significations que celles qui prévalent depuis l'école primaire. Remédier à ce problème ne va pas de soi; il serait certainement lourd et couteux de réinventer et d'employer de nouveaux symboles. On risquerait également de perdre le caractère intuitif de résultats tels que 0+1 = 1. Mais cela permettrait peut-être d’envisager avec plus de sérénité une expression équivalente à 1+1=0 …

- Les démonstrations

Étant donné qu'il s'agit d'une théorie axiomatique, les preuves requises en algèbre abstraite reposent sur les propriétés des objets préalablement définis. Nous pouvons ainsi, en référence aux niveaux de preuve développés par Balacheff (1988), les faire correspondre au stade le plus abouti de la preuve, au *calcul sur les énoncés*. Une étude des programmes et une analyse de contenu des manuels en vigueur au secondaire et au collégial nous a pourtant appris que c'est durant le cours d'algèbre abstraite que les étudiants sont effectivement amenés à effectuer des démonstrations formelles et rigoureuses pour la première fois. Nous avons en effet relevé une quasi absence de preuve de nature intellectuelle dans les manuels[45].

Ce manque de pratique laisse penser que la démonstration n'est pas spontanée pour les étudiants. Devant se référer à des définitions dont ils ne comprennent pas le sens et à des pas de raisonnements auxquels ils ne sont pas familiers, les étudiants ne savent pas comment partir, comment amorcer leur démarche de preuve. Tout cela sans compter les difficultés rencontrées lors de la rédaction et des différentes justifications.

A vrai dire, c'est l'enjeu même de la démarche de preuve qui semble échapper aux étudiants qui assimile cette argumentation rigoureuse à un exercice linguistique propre au Français et bien éloigné des mathématiques (*ce n'est pas des maths, c'est du* Français – cf Equipe 6). Même s'il est délicat d'exprimer nos résultats de manière quantitative, des neuf familles d'erreur répertoriées suite à l'analyse des productions écrites de 17 équipes, la « non étude de tous les cas possibles » s'est avérée la plus fréquente. Le fait que la famille « Absence ou mauvaise formulation de conclusions intermédiaire » apparaissent en seconde position témoigne des grandes difficultés de raisonnement et de preuves rencontrées par les étudiants.

---

[45] Nous avons certes identifié quelques exercices destinés à travailler l'argumentation mais seul un des manuels étudiés proposait des exercices d'initiation à la preuve formelle.

5.2 Bilan

En définitive, les activités en algèbre abstraite nécessitent l'emploi explicite de plusieurs notions ou de concepts propre aux mathématiques avancées auxquelles les étudiants n'avaient été jusque-là que brièvement familiarisés. Parmi ces notions figure l'emploi de définitions essentielles, leur construction heuristique et le caractère expérimental de l'élaboration d'une théorie. On y trouve également la manipulation de notions qui, pour la première fois, sont *non représentables*. L'emploi du langage graphique s'avère en effet, dans la plupart des cas, inapproprié et les étudiants doivent donc composer avec les deux autres langages à leur disposition: le naturel et le symbolique. Alors que le premier est, à cause de l'emploi récurrent de définitions essentielles, une source d'obstacles importante, le second nécessite l'usage de symboles polysémiques dont le sens *commun* fait là encore obstacle au sens algébrique. Ne pouvant se référer de manière fiable à aucune des composantes du langage, les étudiants ne bénéficient d'aucune représentation des concepts mathématiques et ressentent ainsi le besoin d'effectuer un gros effort d'abstraction.

L'algèbre abstraite nécessite également, pour la première fois, l'élaboration de preuves d'un niveau de complexité important, pouvant être assimilées au *calcul sur les énoncés* (Balacheff, 1988). En effet, une étude des programmes et des manuels agréés nous a pourtant révélé que les étudiants n'avaient, au moment de leur étude des premières notions d'algèbre formelles, que très peu été entraînés à cet exercice. Ce sont ainsi les rapports au langage, au vocabulaire, aux définitions, à l’argumentation etc. qui sont sinon travaillés pour la première fois, du moins abordés sous un angle nouveau ou de manière particulièrement coordonnée. A bien y regarder, les étudiants au profil littéraire se découvrent peut-être des affinités plus prononcées envers ces composantes épistémiques que leurs homologues au profil dit plus *scientifique*.

Une des conséquences de toutes ces nouveautés est que la phase de représentation du problème chez les étudiants soumis à un problème d'algèbre abstraite devient lacunaire. On assiste alors à un paradoxe: alors que toutes les composantes du problème sont bien définies, les étudiants le perçoivent comme *mal défini* (au sens de Schoenfeld, 1985). L'enjeu du problème en devient flou, les étapes de résolution ne peuvent être identifiées et la démarche, nécessitant souvent un processus de preuve, semble inconnue des étudiants. Pour toutes ces raisons, nous pouvons donc rapprocher le comportement de l'étudiant à celui d'un novice tel que décrit par Schoenfeld (ibid).

Pour conclure ce bilan, nous nous risquons à une dernière hypothèse relative à notre questionnement original qui était de savoir pourquoi les étudiants littéraires semblaient plus apprécier l'algèbre abstraite que leurs homologues au profil plus scientifiques. Lors de nos entretiens, nous avons eu la chance de rencontrer une équipe (équipe 6) dans laquelle figurait une étudiante en double DEC au goût prononcé pour la littérature dont une des réflexions nous a peut-être fourni un élément de réponse. Contrairement à sa coéquipière, cette étudiante avait apprécié ce jeu de fiction, cette acceptation d'hypothèses a priori « invraisemblables ».

> « Au début, quand tu lis la première question, j'ai pas trippé, là. J'ai pas trouvé ça le fun pantoute. Mais après ça, **j'ai trouvé vraiment cool comment il a inventé une équation** (enfin il ne l'a pas inventé là) mais on avait jamais vu ça **et puis là on se rendait compte que ça marchait et puis, non, ça j'ai aimé**.
>
> **[…] Ouais, c'était le fun de voir qu'il y avait d'autres choses que 1+1=2** »

Sans vouloir effectuer de généralisation, nous pensons que c'est peut-être aussi ce caractère *rocambolesque* des hypothèses de départ qui déroute plusieurs étudiants au profil scientifique, peut-être moins enclins à se lancer dans un exercice de fiction que certains de leurs collègues au profil plus littéraire.

5.3 Les limites de la recherche

En dépit de la généralité des éléments d'analyse proposés dans ce mémoire, notre recherche comporte quelques limites. Tout d'abord, l'illustration des obstacles et des difficultés relevés dans notre cadre conceptuel ne repose que sur une seule séquence didactique au sein d'une même institution. Une nouvelle piste de recherche serait de poursuivre ce travail d'analyse sur d'autres séquences d'initiation à l'algèbre abstraite, toujours à l'aide des éléments développés dans ce mémoire, et d’identifier les façons les plus porteuses de surmonter les obstacles recensés. Rappelons à cet effet que près du quart des équipes ont très bien réussi à répondre aux questions et donc que la séquence, malgré le défi associé, a pu jouer, pour certains étudiants, le rôle attendu sur le plan des apprentissages.

Une autre piste serait de réutiliser cette même séquence dans d’autres contextes : institutions, systèmes, pays, et d’apprécier l’ampleur des obstacles recensés en fonction du contexte. Étant donnée la nature linguistique des obstacles et des difficultés relevés, il serait particulièrement intéressant d'effectuer un travail similaire dans une autre langue que le français. Cela permettrait de voir si la situation que nous avons pu dépeindre dans ce travail est transposable dans un contexte extérieur à la Francophonie et, si non, d'identifier les composantes linguistiques qui facilitent l'apprentissage de l'algèbre abstraite chez les étudiants d'autre pays.

Enfin, pour des raisons de nature méthodologique, nous n’avons assisté ni à l’enseignement situé en amont et en aval de la séquence, ni aux séances de soutiens proposées par l’enseignant durant la rédaction de devoir ici étudié. Il nous est donc impossible de déterminer la portée de la séquence sur les apprentissages réels des étudiants ni sur leur capacité de réinvestissement ou de transfert des notions étudiées.

5.4 Quelques recommandations et pistes de solutions

A la lumière des résultats recueillis dans notre étude, nous conclurons ce mémoire en proposant quelques suggestions de manière à rendre un peu plus aisé ce cap vécu difficilement par les étudiants, correspondant à l'introduction de l'algèbre abstraite.

Tout d'abord, il nous semble intéressant de recourir autant que possible à des supports visuels, manipulables, plus concrets, notamment à l'aide de groupes de transformations géométriques qui satisfont aux axiomes fondamentaux de l'algèbre formelle. Cette approche est déjà présente dans plusieurs cours ou recueils de théories des groupes, comme en témoignent les ouvrages de Carter (2009) ou Alsina et Nelsen (2006). Cette démarche évite ainsi d'amener les étudiants à généraliser les ensembles numériques comme étant les seuls exemples de structures algébriques.

Une question se pose toutefois : l’utilisation d’exemples familiers comme support au raisonnement renforce-t-elle chez les étudiants le recours à des validations basées sur l’observation et le simple constat ou, au contraire, stimule-t-elle le recours à d’autres sortes de preuves, en autant que ce soit possible ? Malgré cette question qui reste ouverte, l'emploi de tels groupes permettrait néanmoins d'effectuer des recherches de similitudes entre différents concepts mathématiques pour effectuer des rapprochements et ainsi réduire l'abstraction au sens d'Aritstote.

Enfin, il nous apparaît indispensable d'effectuer en amont un travail avec les étudiants sur les preuves intellectuelles et la construction de définitions. Nous sommes convaincu que cet effort ne sera pas bénéfique qu'aux seuls futurs étudiants en mathématiques mais, au vu de ses multiples applications et de son caractère transdisciplinaire, que cet exercice profitera au plus grand nombre.

6 Bibliographie

Alsina, C., & Nelsen, R. (2006). *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics.* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

Amyotte, L. (2003). *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications.* Saint-Laurent: Éditions du Renouveau pédagogique.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 241-286.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège* . Grenoble: Université Joseph-Fourier.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP, 366*, 591-620.

Bednarz, N. (1987). Conceptions inappropriées développées dans l'apprentissage de la numération: un exemple où l'enseignement est fortement en cause. *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématiques*, 214-220. Sherbrooke: 39ème Rencontres internationales de la CIEAEM.

Bérubé, N. (2007). Revoir l'art de bien penser: critique de l'approche argumentative en philosophie collégiale. *Pédagogie collégiale, 20*(4), 12-17.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19-36.

Breton, G. (1999). *Réflexions Mathématiques - 536.* Montréal: Les Editions CEC.

Briand, J., & Chevalier, M.-C. (1995). *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques.* Paris: Hatier.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Carter, N. (2009). *Visual Group Theory.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Charron, G., & Parent, P. (2004). *Calcul Intégral* (éd. 3ème). Montréal: Beauchemin - Chenelière Educations.

Chi, M. T., & Glaser, R. (1985). Problem-solving ability. Dans *Human abilities : An information processing approach* (pp. 227-248). New York: Freeman.

Cleary, J. J. (1985). On the Terminology of « Abstraction » in Aristotle. *Phronesis, 30*(1), 13-45.

Cyr, S. (2001). Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire. *Bulletin AMQ, 41*, 19-27.

De Serres, M., & Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages.* Montréal: Collège Jean-de-Brébeuf.

Département de l'Instruction Publique. (2006). *Plan d'Etude Cantonale.* Genève.

Dorier, J.-L. (1997). *L'algèbre linéaire en question.* Grenoble: La pensée Sauvage.

Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Process. Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking Process, 11*, pp. 25-41.

Dubinsky, E. (1991). *The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. Epistemological Foundations of Mathematical Experiences.* New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 267-305.

Dupin, J. (1995). Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques. *8ème École d'été de Didactique des Mathématiques.* Saint-Sauves d'Auvergne.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233-261.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang.

ERPI. (2009). *Hamel & Amyotte : Calcul intégral*. Consulté le 11 02, 2009, sur http://www.erpi.com/collegial/honneurs_n9812.html

Findell, B. (2001). *Learning and Understanding in Abstract Algebra.* University of New Hampshire.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Springer.

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1998). The Mathematical Concept of set and the « Collection » Model. *Educational Studies in Mathematics, 37*(1), 1-22.

Gallian, J. (1990). *Contemporary Abstract Algebra* (éd. 2e). D. C. Heath and Company.

Glaeser, G. (1971). *Mathématiques pour l'élève-professeur.* Hermann.

Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3).

Guay, S. (2006). *Point de vue Mathématiques 536.* Montréal: Grand Duc.

Hamel, J., & Amyotte, L. (2007). *Calcul intégral.* ERPI.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For the learning of Mathematics, 15*(3), 42-49.

Harel, G. (1989). Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*, pp. 139 - 148.

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.

Hazzan, O., & Leron, U. (1996). Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems:The Case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics, 16*(1), 23-26.

Kahane, J.-P. (1999). Quelques aspects des définitions mathématiques. *Bulletin de l'Union des professeurs de Spéciale, 189*, 10-14.

Lafortune, L. (1997). *Mathophilie - 536.* Montréal: Guérin Itée.

Lajoie, C. (2009). *Un groupe en quête de théorie : un problème pour les étudiants en maths!* Montréal: Éditions Bande didactique.

Leclerc, J. (1993). *Qu'est-ce que la langue?* Québec: Mondia Editeurs inc.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995). An abstract algebra story. *The American Mathematical Monthly, 102*(3), 227-242.

Ministère de l'Education. (2003). *Progamme de Sciences de la Nature du cégep.* Québec.

Ministère de l'Education. (2006). *Programme de formation du premier cycle du secondaire.* Québec: Bibliothèque Nationale du Québec.

Ministère de l'Education. (2009). *Ouvrages approuvées pour le degré Secondaire*. Consulté le octobre 21, 2009, sur https://www3.meq.gouv.qc.ca/bamd/second.asp?no=1

Ouvrier-Buffet, C. (2003). *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques.* Grenoble: Université Joseph-Fourier.

Papillon, V. (1993). *Vecteurs, matrices et nombres complexes.* Modulo.

Pfister, N. (2008). Les différents auteurs d'une situation d'apprentissage par problème: un exemple. *Bulletin AMQ, 47*(2), 25-43.

Piaget, J. (1970). *Psychologie et épistémologie.* Genève: Gonthiers Denoël.

Rouche, N. (1989). Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ? *Actes du 7ème colloque inter-IREM : Epistémologie et histoire des mathématiques*, (pp. 8-38). Besançon.

Selden, A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. *2nd International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics. 3*, pp. 456-471. New York: Cornell University.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin . *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Souris, P. (2009). *Tactiques et stratégies judiciaires.* Bruylant.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tanguay, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire . *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie, 2*(3), pp. 371-396.

Tanguay, D. (2004). La complexité du raisonnement déductif en géométrie. *Actes du colloque du Groupe des Didacticiens des Mathématiques du Québec* , (pp. 73-84).

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive.* Editions Logiques.

Traoré, K., Lajoie, C., & Mura, R. (2007). Quelques erreurs pouvant être liées à une difficulté à concevoir un ensemble comme un objet distinct de ses éléments chez des étudiants et des étudiantes universitaires. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 247-264.

Université de Montréal. (s.d.). *Progammes d'Etudes*. Consulté le Octobre 12, 2009, sur http://dms.umontreal.ca/EtudesBacc/indexPremierCycle.html

Vergnaud, G. (1988). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. Obstacles épistémologique et conflit socio-cognitif. *Colloque international CIRADE* (pp. 9-14). Université du Québec à Montréal.

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65-81.

Voss, J. F. (1989). Problem solving abd the educational process. Dans *Foundations for a psychology of education* (pp. 251-294). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

7 Annexes

7.1 Énoncé de la séquence didactique

Algèbre linéaire
Hiver 2006

Première partie

La définition de l'algèbre linéaire qui consiste à dire que c'est l'étude des phénomènes compatibles avec l'addition et avec la multiplication par un scalaire attire notre attention sur la nature de ces « phénomènes » et comme de fait, le cours commence par l'examen d' « objets » qu'on peut additionner et qu'on peut multiplier par un scalaire. Papillon propose (pages 40-41) de les appeler des vecteurs :

« Si vous cherchez dans un dictionnaire de mathématiques le mot vecteur, vous devriez trouver « élément d'un espace vectoriel… ». Alors qu'est-ce qu'un espace vectoriel ?»
Nous reformulerons la définition de Papillon ainsi :
Définition *Espace vectoriel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels*
Un espace vectoriel sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est la donnée

i) d'un ensemble V dont les éléments sont appelés des vecteurs et sont notés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, etc.;
ii) d'une opération appelée addition vectorielle qui associe à chaque paire de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ et appelé somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de telle façon que
   a) l'addition est commutative : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans V on a que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$,
   b) l'addition est associative : pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans V on a que $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$,
   c) il existe dans V un élément neutre noté $\vec{0}$, et appelé le vecteur nul pour lequel, pour tout $\vec{v}$ dans V, on a que $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$,
   d) pour chaque vecteur $\vec{v}$ dans V, il existe dans V un vecteur, noté $-\vec{v}$, et appelé l'opposé de $\vec{v}$, tel que $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$;
iii) d'une opération appelée multiplication par un scalaire qui associe à chaque nombre réel k et à chaque vecteur $\vec{v}$ un vecteur noté $k\vec{v}$ et appelé produit de k et de $\vec{v}$ de telle façon que
   a) la multiplication par un scalaire est pseudo-associative : pour tous nombres réels k et l, et pour tout vecteur $\vec{v}$ dans V on a que $k(l\vec{v})=(kl)\vec{v}$,
   b) la multiplication par un scalaire est distributive relativement à l'addition des réels : pour tous nombres réels k et l, et pour tout vecteur $\vec{v}$ dans V on a que $(k+l)\vec{v}=k\vec{v}+l\vec{v}$,
   c) la multiplication par un scalaire est distributive relativement à l'addition des vecteurs : pour tout nombre réel k et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans V on a que $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$,
   d) il existe dans $\mathbb{R}$ un élément neutre noté 1 pour lequel, pour tout $\vec{v}$ dans V on a que $1\vec{v}=\vec{v}$.

Ceux parmi nous qui sont plus curieux que d'autres remarqueront peut-être qu'on annonce « multiplication par un scalaire » et qu'on ne fait jamais que des multiplications par des nombres réels. Qu'est-ce réellement qu'un scalaire? Y a-t-il une distinction entre un « scalaire » et un « réel » ? Nous vous proposons ici un examen de cette question.

Il convient en premier lieu de regarder ce que l'on fait avec les scalaires dans le contexte de l'algèbre linéaire. Ils sont les coefficients des combinaisons linéaires. En particulier, lorsque la combinaison linéaire exprime un vecteur dans une base, ils sont les composantes de ce vecteur dans cette base.

Pour être en mesure d'effectuer les calculs pertinents sur les composantes d'un vecteur et/ou sur les coefficients d'une combinaison linéaire, il faut que :

1) On puisse additionner les scalaires
   A) la somme de deux scalaires k et l notée $k+l$ doit être un scalaire (fermeture de l'ensemble des scalaires pour l'addition),
   B) l'addition des scalaires doit être commutative : pour tous scalaires k et l on a que $k+l=l+k$,
   C) l'addition des scalaires doit être associative : pour tous scalaires k, l et m, on a que $(k+l)+m=k+(l+m)$,
   D) l'addition des scalaires doit admettre un élément neutre, noté 0, tel que : pour tout scalaire k, on a que $0+k=k$,
   E) tout scalaire k doit admettre un symétrique pour l'addition appelé opposé de k : pour tout scalaire k, il existe un scalaire noté k' tel que $k+k'=0$, où 0 est l'élément neutre défini en D).

2) On puisse multiplier les scalaires entre eux
   A) le produit de deux scalaires k et l noté kl doit être un scalaire (fermeture de l'ensemble des scalaires pour la multiplication),
   B) la multiplication des scalaires doit être commutative : pour tous scalaires k et l on a que $kl=lk$,
   C) la multiplication des scalaires doit être associative : pour tous scalaires k, l et m, on a que $(kl)m=k(lm)$,
   D) la multiplication des scalaires doit admettre un élément neutre, noté 1, tel que : pour tout scalaire k, on a que $1k=k$,
   E) tout scalaire k, **sauf 0 l'élément neutre pour l'addition**, doit admettre un symétrique pour la multiplication appelé inverse de k : pour tout scalaire k, il existe un scalaire noté k^* tel que $kk^*=1$, où 1 est l'élément neutre défini en D);

3) L'addition et la multiplication des scalaires soient compatibles : La multiplication des scalaires doit être distributive relativement à l'addition des scalaires : pour tous scalaires k, l et m, on a que $k(l+m)=kl+km$.

Nous conviendrons d'appeler « corps » tout ensemble muni de deux opérations (appelées addition et multiplication) qui vérifient les 11 propriétés précédentes.

Donc l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, muni de l'addition habituelle et de la multiplication habituelle, est un corps.

Définition : On appelle scalaire tout élément d'un corps.

Cela justifie que la définition de Papillon annonce une multiplication par un scalaire mais n'utilise plus que des réels : les réels sont des scalaires. Toutefois, il serait intéressant de savoir si tous les scalaires sont des réels ou s'il existe d'autres scalaires que les réels. Posons la question autrement : Existe-t-il d'autres corps que l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels?

Première question

Considérons l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$.

Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps.

Deuxième question

Considérons l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \left\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\right\}$.

Dans cet ensemble, deux éléments (α_1,β_1) et (α_2,β_2) sont égaux si et seulement si $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$.

a) Vos sympathiques professeurs ont vérifié que l'addition terme à terme de ces éléments (semblable à celle dans $\mathbb{R}^2$), satisfait bien les cinq premières propriétés caractéristiques des corps. Expliquer pourquoi la multiplication terme à terme de ces éléments, jumelée avec l'addition terme à terme, ne fait pas de $K_{(\alpha,\beta)}$ un corps.

b) Considérons maintenant l'opération suivante que nous appellerons multiplication sur $K_{(\alpha,\beta)}$: $(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. En admettant que cette opération est commutative et associative, démontrer que l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ muni de l'addition terme à terme et de cette multiplication est bien un corps.

Troisième question

Maintenant que nous savons que $K_{(\alpha,\beta)}$ muni des opérations définies à la question précédente est un corps et qu'il nous fournit des scalaires, nous sommes autorisés à parler d'espaces vectoriels sur $K_{(\alpha,\beta)}$. Par exemple, l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{v} = ((\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2))$, où les composantes (α_1,β_1) et (α_2,β_2) sont des scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$.

On effectue la somme de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ composante à composante et la multiplication par un scalaire $k\vec{v}$ (où $k = (\lambda,\mu)$ est un scalaire de $K_{(\alpha,\beta)}$) en multipliant chacune des composantes du vecteur $\vec{v}$ par le scalaire k.

a) Considérons l'ensemble ordonné $B = \left\langle((1,0),(0,0));((0,0),(0,1))\right\rangle$. Cet ensemble de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ constitue-t-il une base de $K^2_{(\alpha,\beta)}$?

b) Exprimer le vecteur $\vec{v} = ((1,2),(3,4))$ comme une combinaison linéaire des éléments de B.

Algèbre linéaire
Hiver 2006

Deuxième devoir

Dans la première partie du travail, les éléments du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ étaient représentés sous la forme de couples de nombres réels. Cette notation n'est toutefois pas des plus heureuses et peut s'avérer lourde et difficile à manipuler lorsque utilisée pour résoudre certains problèmes. Dans cette deuxième partie du travail, nous nous proposons de développer une nouvelle notation pour le corps $K_{(\alpha,\beta)}$. Cette nouvelle notation nous permettra, dans la troisième partie du travail, de définir la notion de produit scalaire sur l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$.

Pour commencer, nous allons nous intéresser à une partie de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$: considérons le sous-ensemble formé de tous les éléments de $K_{(\alpha,\beta)}$ dont le deuxième terme est nul. Ce sous-ensemble, que l'on peut noter $K_{(\alpha,0)}$, peut se définir formellement par l'expression $K_{(\alpha,0)} = \{(\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Nous allons examiner la possibilité que l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$, muni des opérations d'addition et de multiplication telles que définies sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$, forme lui-même un corps. De façon générale, pour avoir droit au titre de corps, un ensemble et les deux opérations qui lui sont associées doivent satisfaire les onze propriétés dont la liste à été présentée dans le premier travail. Toutefois, dans le cas de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ muni des opérations de $K_{(\alpha,\beta)}$, il n'est pas nécessaire de vérifier les onze, puisque $K_{(\alpha,\beta)}$ est lui-même un corps et que tous les éléments de $K_{(\alpha,0)}$ appartiennent aussi à $K_{(\alpha,\beta)}$. L'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ va donc hériter des propriétés du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ qui ne font pas appel à la présence d'un scalaire particulier. Ainsi, les propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité des deux opérations étant satisfaites pour les scalaires de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, elles le sont aussi pour les scalaires de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$.

<u>Première question</u>

Vérifier si les propriétés qui ne sont pas héritées du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ sont aussi satisfaites pour $K_{(\alpha,0)}$ muni de l'égalité et des opérations d'addition et de multiplication définies dans le premier travail. Conclure sur la nature de $K_{(\alpha,0)}$.

La deuxième étape de ce travail consiste à montrer que l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ muni de l'égalité et des opérations définies sur $K_{(\alpha,\beta)}$ se comporte de façon identique à l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication usuelles. Se comporter de façon identique, dans le contexte de ce problème, veut dire que (i) il existe une correspondance bi-univoque entre les éléments de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ et les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$ et que (ii) les deux opérations sur $K_{(\alpha,0)}$ correspondent à l'addition et la multiplication entre les nombres réels. La meilleure façon de répondre à cette question est d'établir une fonction *f* inversible (i.e. dont la réciproque existe) entre l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$ (son domaine) et l'ensemble $\mathbb{R}$ (son image) telle que cette fonction préserve l'addition et la multiplication. En d'autres mots, il s'agit de trouver une fonction $f : K_{(\alpha,0)} \to \mathbb{R}$ inversible telle que:

1. $f\left((\alpha_1,0)+(\alpha_2,0)\right) = f\left((\alpha_1,0)\right)+f\left((\alpha_2,0)\right)$
2. $f\left((\alpha_1,0)(\alpha_2,0)\right) = f\left((\alpha_1,0)\right)f\left((\alpha_2,0)\right)$

Une fonction qui possède ces propriétés porte le joli nom d'isomorphisme entre les ensembles $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$.

Deuxième question

Définir un isomorphisme entre $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$ permettant d'établir que les ensembles $K_{(\alpha,0)}$ et $\mathbb{R}$ munis de leurs opérations respectives se comportent de façon identique.

Ce résultat nous permet ainsi de noter plus simplement les éléments de l'ensemble $K_{(\alpha,0)}$. On représentera ainsi le couple $(\alpha,0)$ simplement par α. Formellement on se permettra d'écrire $(\alpha,0) \triangleq \alpha$.

Une question qui maintenant nous vient naturellement à l'esprit est de se demander si le sous-ensemble formé de tous les éléments de $K_{(\alpha,\beta)}$ dont la première composante est nulle, noté et défini par $K_{(0,\beta)} = \{(0,\beta) | \beta \in \mathbb{R}\}$, muni de l'égalité et des opérations définies sur $K_{(\alpha,\beta)}$, pourrait former un corps.

Troisième question

i) Calculer le produit $(0,1)^2$;

ii)Déterminer si le sous-ensemble $K_{(0,\beta)}$ muni de l'addition et de la multiplication telles que définies sur $K_{(\alpha,\beta)}$ est un corps.

Le comportement du scalaire $(0,1)$, lui confère le droit à une notation particulière : dorénavant ce scalaire sera noté *c*, comme la première lettre du mot compliqué. On peut ainsi écrire $(0,1) \triangleq c$.

Le résultat des premières questions va nous permettre d'obtenir une nouvelle notation pour les éléments de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$.

Quatrième question

Montrer que tout scalaire (α,β) du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ peut maintenant être noté par $\alpha+\beta c$, i.e. $(\alpha,\beta) \triangleq \alpha+\beta c$.

Cette nouvelle notation va nous permettre d'effectuer l'opération de multiplication sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$ sans avoir recours à la formule de calcul qui avait été définie dans le premier travail.

Cinquième question

Sans utiliser la formulation en couples, effectuer les produits suivants :

i) $(3-4c)\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}c\right)$;

ii) $(\alpha_1+\beta_1 c)(\alpha_2+\beta_2 c)$.

On se rappelle que dans le premier devoir, nous avions eu à déterminer le symétrique pour la multiplication. Soit $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ non nul, son symétrique pour la multiplication est l'élément $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$. Notre nouvelle notation va nous amener à réécrire le symétrique de $\alpha+\beta c$ comme

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}c$$

ou encore comme

$$\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha-\beta c)$$

Dans cette expression, le terme $\alpha-\beta c$ est appelé conjugué de $\alpha+\beta c$ que l'on note $\overline{\alpha+\beta c}$. Par exemple $\overline{2-3c}=2+3c$.

Sixième question

Toujours avec la nouvelle notation, montrer que pour tout scalaire du corps $K_{(\alpha,\beta)}$, le résultat de la multiplication par son conjugué est un nombre réel positif.

Nous disposons maintenant d'une notation appropriée pour nous permettre de définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$.

Algèbre linéaire
Hiver 2006

Troisième partie

Dans cette troisième partie nous considérons le problème de définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$.

Dans la deuxième section du chapitre deux de son livre, Papillon présente le produit scalaire entre deux vecteurs d'un espace vectoriel défini sur le corps des réels. Après avoir défini le produit scalaire, Papillon donne une formule pour calculer ce produit puis énonce ses propriétés. Il est toutefois possible de considérer que nous sommes en face de trois formulations différentes de la définition du produit scalaire: Une définition géométrique, une définition algébrique et une définition axiomatique. La définition géométrique (page 52) annonce que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le résultat du produit de leur norme avec le cosinus de l'angle entre les deux : $\vec{u}\bullet\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. La définition algébrique (page 54) présente le produit scalaire comme le résultat d'un calcul sur les composantes des vecteurs : $\vec{u}\bullet\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$ où $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ relativement à une base orthonormée. La définition axiomatique (page 59) nous dit qu'étant donné un espace vectoriel sur le corps des réels, un produit scalaire est une fonction qui associe à tout couple de vecteurs de cet espace vectoriel un et un seul scalaire (ici un réel) et qui respecte les quatre propriétés suivantes :

PS1 $\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$
PS2 $(k\vec{u})\bullet\vec{v} = \vec{u}\bullet(k\vec{v}) = k(\vec{u}\bullet\vec{v})$
PS3 $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{u}\bullet\vec{w}$
PS4 $\vec{u}\bullet\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

L'ordre dans lequel nous sont présentées ces trois définitions n'est pas un hasard : Chaque fois que l'on passe d'une définition à la suivante, le produit scalaire prend un sens plus large et son champ d'application augmente tout en restant compatible avec la définition précédente. La première, la définition géométrique s'appuie sur les concepts de longueur d'un vecteur et d'angle entre des vecteurs. Vraisemblablement, cela n'a de sens que si l'espace dans lequel se trouvent les vecteurs est $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. La seconde, la définition algébrique, va ensuite permettre d'étendre le calcul du produit scalaire aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Finalement, la troisième définition, celle axiomatique, ne nous dit même plus comment calculer le produit scalaire : en autant que celui-ci puisse être considéré une fonction qui prend deux vecteurs pour produire un scalaire (un réel dans notre cas) et que cette fonction satisfasse aux quatre propriétés, elle aura droit au titre de produit scalaire. La troisième définition généralise ainsi la deuxième, qui elle-même généralisait la première : L'ensemble des ensembles de vecteurs sur lequel une définition s'applique contient l'ensemble des ensembles sur lequel la définition précédente s'appliquait : sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ les trois définitions sont équivalentes, sur $\mathbb{R}^n$ seules la définition algébrique et la définition axiomatique sont équivalentes alors que pour des ensembles de vecteurs autres que $\mathbb{R}^n$ seule la définition axiomatique s'applique. L'objet de ce travail est de poursuivre ce processus de généralisation afin d'obtenir une façon de calculer le produit scalaire sur les vecteurs de l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ défini sur le corps des scalaires compliqués $K_{(\alpha,\beta)}$ tout en restant compatible avec les définitions précédentes.

Première question

Un grand nombre de résultats mathématiques peuvent être considérés comme une généralisation d'un autre résultat. Énoncez-en un.

La première observation qui doit être faite est que l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est lui-même une généralisation de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$.

Deuxième question

Montrer que $\mathbb{R}^2 \subset K^2_{(\alpha,\beta)}$.

Cette inclusion nous amène à nous poser la question suivante : La vieille formule algébrique du calcul du produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ est-elle encore applicable sur $K^2_{(\alpha,\beta)}$? Si oui, BINGO!, le troisième travail est terminé.

Troisième question

a) En considérant que les vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ sont donnés relativement à une base orthonormée de cet espace, effectuer les produits scalaires suivants à l'aide de la formule de la page 54 de Papillon.
   i) $(1,c)\bullet(1,c)$;
   ii) $(1+c,3)\bullet(2-3c,-5+2c)$;
   iii) $(1-c,2+2c)\bullet(1-c,2+2c)$;
   iv) $(5c,0)\bullet(5c,0)$;

b) Commenter sur les résultats obtenus en a);

c) Le troisième travail est-il terminé ?

Nous devons nous rendre à l'évidence que la généralisation du produit scalaire sur $K^2_{(\alpha,\beta)}$ va nous obliger à tenir compte de la nature compliquée des scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$ et en particulier la manière de les multiplier. Une façon intuitive de résoudre ce problème serait d'essayer différentes formules de calcul jusqu'à ce que nous tombions sur un produit scalaire pour l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ qui soit compatible avec le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. La nouvelle formule nous fournirait alors les propriétés nous permettant de généraliser la définition axiomatique du produit scalaire de vecteurs réels à des vecteurs sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$. Une façon plus systématique de résoudre ce problème est de généraliser les propriétés de la définition axiomatique en tenant compte des particularités des scalaires du corps $K_{(\alpha,\beta)}$ puis d'en déduire une formule de calcul. Nous nous proposons de suivre cette deuxième approche.

La généralisation de la définition axiomatique est la suivante :

Définition

Étant donné un espace vectoriel défini sur le corps $K_{(\alpha,\beta)}$, un produit scalaire est une fonction qui associe à tout couple de vecteurs de cet espace vectoriel un et un seul scalaire (ici un élément de $K_{(\alpha,\beta)}$) et respecte les quatre propriétés suivantes :

PS1* $\vec{u}\bullet\vec{v} = \overline{\vec{v}\bullet\vec{u}}$;

PS2* $(k\vec{u})\bullet\vec{v} = k(\vec{u}\bullet\vec{v})$;

PS3* $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v} + \vec{u}\bullet\vec{w}$;

PS4* $\vec{u}\bullet\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Dans cette nouvelle définition la propriété **PS1*** est à première vue la seule qui ait été modifiée par rapport à celle de la définition sur le corps des réels. Il nous faut donc nous assurer qu'elle n'est pas en contradiction avec **PS1** . Pour cela il faut montrer que dans le cas particulier où le résultat du produit scalaire $\vec{v}\bullet\vec{u}$ est un nombre réel alors les propriétés **PS1*** et **PS1** sont équivalentes.

Quatrième question

a) Montrer que tout nombre réel est son propre conjugué;

b) Montrer que si $\vec{v}\bullet\vec{u}$ est un nombre réel alors $\vec{u}\bullet\vec{v} = \overline{\vec{v}\bullet\vec{u}}$ si et seulement si $\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$.

La propriété **PS1*** indique qu'il est nécessaire de préserver l'ordre des vecteurs dans un produit scalaire. En effet, si on change l'ordre des vecteurs, on obtient comme produit scalaire le conjugué de ce qu'il était avant le changement d'ordre. Cette propriété peut donc avoir des conséquences lorsque sont appliquées les propriétés **PS2*** et **PS3*** . L'examen de ces éventuelles conséquences nécessite toutefois la réponse à une question préalable.

Cinquième question

Montrer que :

a) Le conjugué d'un produit de deux scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$ est le produit des conjugués de ces scalaires;
b) Le conjugué d'une somme de deux scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$ est la somme des conjugués de ces scalaires.

Nous pouvons maintenant passer à la question principale.

Sixième question

a) La propriété PS2* indique que $(k\vec{u})\bullet\vec{v} = k(\vec{u}\bullet\vec{v})$. Est-il vrai que $\vec{u}\bullet(k\vec{v}) = k(\vec{u}\bullet\vec{v})$ aussi?

b) La propriété PS3* indique que $\vec{u}\bullet(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$. Est-il vrai que $(\vec{v}+\vec{w})\bullet\vec{u} = \vec{v}\bullet\vec{u}+\vec{w}\bullet\vec{u}$ aussi?

Maintenant que les propriétés du produit scalaire sur le corps des réels ont été généralisées au corps $K_{(\alpha,\beta)}$, il nous est possible d'établir une formule de calcul du produit scalaire entre vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$. De la même façon que dans le cas de vecteurs de réels, il est toutefois nécessaire de disposer d'une base orthonormée. On rappelle ici qu'une base $B=\langle\vec{e}_1;\vec{e}_2\rangle$ de l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est dite orthonormée si et seulement si

1. $\vec{e}_1\bullet\vec{e}_2 = 0$ et $\vec{e}_2\bullet\vec{e}_1 = 0$ ($\vec{e}_1,\vec{e}_2$ orthogonaux);
2. $\vec{e}_1\bullet\vec{e}_1 = 1$ et $\vec{e}_2\bullet\vec{e}_2 = 1$ ($\vec{e}_1,\vec{e}_2$ unitaires).

Septième question

a) En admettant l'existence d'une base orthonormée $B=\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle$ de $K^2_{(\alpha,\beta)}$, établir une formule de calcul pour le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}=(k_1,k_2)$ et $\vec{v}=(l_1,l_2)$ de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ exprimés relativement à cette base;

b) Vérifier que dans le cas particulier où les composantes k_1, k_2, l_1 et l_2 des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des nombres réels, alors la formule obtenue en a) correspond à la définition du produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Il nous faut maintenant revenir au point où les problèmes sont apparus.

Huitième question

a) En considérant que les vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ sont donnés relativement à une base orthonormée de cet espace, effectuer les produits scalaires suivants à l'aide de la formule établie à la septième question :

i) $(1,c)\bullet(1,c)$;

ii) $(1+c,3)\bullet(2-3c,-5+2c)$;

iii) $(1-c,2+2c)\bullet(1-c,2+2c)$;

iv) $(5c,0)\bullet(5c,0)$;

b) Commenter sur les résultats obtenus en a);

c) Le troisième travail est-il terminé ?

7.2 Énoncé du premier devoir

Première question

Considérons l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$.

Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur l'ensemble $K_2 = \{0,1\}$ qui fassent de cet ensemble (muni de ces deux opérations) un corps.

Deuxième question

Considérons l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$.

Dans cet ensemble, deux éléments (α_1,β_1) et (α_2,β_2) sont égaux si et seulement si $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$.

a) Vos sympathiques professeurs ont vérifié que l'addition terme à terme de ces éléments (semblable à celle dans $\mathbb{R}^2$), satisfait bien les cinq premières propriétés caractéristiques des corps. Expliquer pourquoi la multiplication terme à terme de ces éléments, jumelée avec l'addition terme à terme, ne fait pas de $K_{(\alpha,\beta)}$ un corps.

b) Considérons maintenant l'opération suivante que nous appellerons multiplication sur $K_{(\alpha,\beta)}$: $(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$. En admettant que cette opération est commutative et associative, démontrer que l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ muni de l'addition terme à terme et de cette multiplication est bien un corps.

Troisième question

Maintenant que nous savons que $K_{(\alpha,\beta)}$ muni des opérations définies à la question précédente est un corps et qu'il nous fournit des scalaires, nous sommes autorisés à parler d'espaces vectoriels sur $K_{(\alpha,\beta)}$. Par exemple, l'espace vectoriel $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{v} = ((\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2))$, où les composantes (α_1,β_1) et (α_2,β_2) sont des scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$.

On effectue la somme de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ composante à composante et la multiplication par un scalaire $k\vec{v}$ (où $k = (\lambda,\mu)$ est un scalaire de $K_{(\alpha,\beta)}$) en multipliant chacune des composantes du vecteur $\vec{v}$ par le scalaire k.

a) Considérons l'ensemble ordonné $B = \langle ((1,0),(0,0));((0,0),(0,1)) \rangle$. Cet ensemble de deux vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ constitue-t-il une base de $K^2_{(\alpha,\beta)}$?

b) Exprimer le vecteur $\vec{v} = ((1,2),(3,4))$ comme une combinaison linéaire des éléments de B.

7.3 Formulaire de consentement

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT

Je, soussigné, ______________________________, consens par la présente à participer au projet de recherche suivant dans les conditions décrites ci-dessous.

Titre du projet: *Étude du travail d'équipe dans le cadre du cours d'algèbre linéaire*

Buts du projet : Comprendre davantage les apports, limites et difficultés associés à l'introduction du travail d'équipe de nature théorique dans le cadre du cours d'algèbre linéaire et contribuer à l'identification d'éléments susceptibles d'améliorer l'enseignement ainsi que l'apprentissage de notions d'algèbre linéaire.

Durée de ma participation : du 30 octobre 2006 au 30 novembre 2006.

Nature de ma participation : Octroi d'un droit d'accès au responsable nommé ci-dessous au travail que mon équipe a effectué dans le cadre du cours NYC de l'automne 2006 ; contribution d'éléments d'information sur mon expérience de ce travail par la voie d'une entrevue d'équipe (30 min environ) avec le responsable nommé ci-dessous.

Avantages et inconvénients pouvant découler de ma participation : Je bénéficierai de la communication des principaux résultats du projet. Il est entendu que ma participation n'aura aucun effet (ou interférence) sur l'évaluation au cours.

Risques : Il est entendu que ma participation à ce projet de recherche ne me fait courir aucun risque autre que ceux encourus dans la vie normale.

Information concernant le projet : On devra répondre, à ma satisfaction, à toute question que je poserai à propos du projet de recherche auquel j'accepte de participer.

Retrait du projet : Il est entendu que ma participation au projet de recherche décrit ci-dessus est tout à fait libre. Il est également entendu que je serai tout aussi libre d'accepter ou de refuser l'entrevue qu'on me proposera.

Confidentialité : Il est entendu que les observations et enregistrements audio effectués en ce qui me concerne dans le cadre du projet de recherche décrit ci-dessus demeureront strictement confidentiels ; seul le chercheur y aura accès. Il est également entendu que l'anonymat des participants sera protégé dans toute publication ou toute conférence rapportant les résultats de ce projet.

Je déclare avoir lu et compris les termes du présent formulaire.

____
signature de l'intéressé

____
adresse courriel

Fait à Sherbrooke, le ______________ 2006.

- -

Je certifie (a) avoir expliqué au signataire intéressé les termes de la présente formule, (b) avoir répondu aux questions qu'il m'a posées à cet égard et (c) lui avoir clairement indiqué qu'il reste à tout moment libre de mettre un terme à sa participation au projet de recherche décrit ci-dessus.

____
Ismaïl Mili, responsable du projet, [redacted]
Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, U. de Montréal

Fait à Sherbrooke, le ______________ 2006.

7.4 Tableau de recension des erreurs (analyse des productions écrites)

Les trois tableaux ci-dessous recensent les erreurs relevées dans les copies d'étudiants. Chaque nombre indique le numéro de la page dans laquelle l'erreur a été observée (ceci afin de pouvoir retrouver les erreurs). Ainsi, l'équipe 2 a commis deux erreurs de raisonnement où l'élément à démontrer a été en fait pris considéré comme prémisse, et ce aux pages 3 et 5 de leur production.

Erreurs & Catégories				Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3	Equipe 4	Equipe 5	Equipe 6
				Entretien		Entretien			Entretien
Macro- Raisonnement	Eléments à démontrer pris comme point de départ du rsmnt	Exo 1			3;5		1;4		1;4
		Exo 2		7	7;13	11			12;13(2x);18;15
		Exo 3						9	
	Non-étude de tous les cas possibles	Exo 1	Propriétés des ops non toutes vérifiées	1;2;3	3	2;3(2x)		3	
		Exo 2	Cas ou le paramètre = 0 (par ex. au dénom)	5;6;7	10(2x);11(3x	5;6;8;9(2x);10	5;8(2x)	7	13;16(2x);17(2x
			Autres						
		Exo 3							
	Vérification inutiles de propriétés	Exo 1							
		Exo 2		4	6				
		Exo 3		11					
Mirco-raisonnement	Absence de référence, réf. Inadéquate ou partielle, aux propriétés au oux définitions	Exo 1		2	3			2	
		Exo 2				6	5	7	
			Egalité	6;7	11	8;9	7(2x)		
		Exo 3							
			Egalité	10		14	11		
	Justification partielle du rsmnt employé	Exo 1				3		2;3	
		Exo 2		7		7	5;6	6	
		Exo 3			14(2x);15				
Respect des règles de réd.	Absence ou mauvaise formulation de conclusions intermédiaires	Exo 1			4;5	1(2x);2			2;3;5;7(2x);10
		Exo 2					9(2x)		
		Exo 3		10					
	Absence de conclusion génréale	Exo 1			5		5		
		Exo 2					9(2x)		
		Exo 3							
Erreurs sur le langage naturel	Vocabulaire inadapté (confusion sémantique)	Exo 1		1				2;3	
		Exo 2						5;6	15; 19
		Exo 3						9 (2x);10	
	Utilisation erronée de conn. logiques (et, donc,...)	Exo 1							
		Exo 2							
		Exo 3							
	Construction inadéquate (ou absente) de la déf. de l'op.	Exo 1						2	
		Exo 2						5	
		Exo 3							
	Erreur ou confusion sémantique (langage symbolique)	Exo 1		2(3x)				3	
		Exo 2	ensemble	3	6;9		6;9		
			élément symétrique / inverse	4;5(2x)	7			5(2x)	
			élément neutre		8			7;8	
			indices inutiles				6		
			écriture des éléments dans RxR						
			autres				8	10(2x)	11;15
		Exo 3						9(2x)	
	Preuve par l'exemple	Exo 2							
	Non mention de l'inconnue au sein du calcul	Exo 1							
		Exo 2							12;13;15;17
		Exo 3							
	Exercice incomplet	Exo 2						8	

Erreurs & Catégories				Equipe 1	Equipe 2	Equipe 3	Equipe 4	Equipe 5	Equipe 6
				Entretien		Entretien			Entretien
Macro- Raisonnement	Eléments à démontrer pris comme point de départ du rsmnt	Exo 1			3;5		1;4		1;4
		Exo 2		7	7;13	11			12; 13(2x); 18; 15
		Exo 3						9	
	Non-étude de tous les cas possibles	Exo 1	Propriétés des ops non toutes vérifiées	1;2;3	3	2;3(2x)		3	
		Exo 2	Cas ou le paramètre = 0 (par ex. au dénom.)	5;6;7	10(2x);11(3x	5;6;8;9(2x);10	5;8(2x)	7	13; 16(2x); 17(2x
			Autres						
		Exo 3							
	Vérification inutiles de propriétés	Exo 1							
		Exo 2		4	6				
		Exo 3		11					
Mirco-raisonnement	Absence de référence, réf. Inadéquate ou partielle, aux propriétés au oux définitions	Exo 1		2	3			2	
		Exo 2				6	5	7	
			Egalité	6;7	11	8;9	7(2x)		
		Exo 3							
			Egalité	10		14	11		
	Justification partielle du rsmnt employé	Exo 1				3		2;3	
		Exo 2		7		7	5;6	6	
		Exo 3			14(2x); 15				
Respect des règles de réd.	Absence ou mauvaise formulation de conclusions intermédiaires	Exo 1			4;5	1(2x);2			2;3;5;7(2x);10
		Exo 2					9(2x)		
		Exo 3		10					
	Absence de conclusion génréale	Exo 1			5		5		
		Exo 2					9(2x)		
		Exo 3							
Erreurs sur le langage naturel	Vocabulaire inadapté (confusion sémantique)	Exo 1		1				2;3	
		Exo 2						5;6	15; 19
		Exo 3						9 (2x); 10	
	Utilisation erronée de conn. logiques (et, donc,...)	Exo 1							
		Exo 2							
		Exo 3							
	Construction inadéquate (ou absente) de la déf. de l'op.	Exo 1						2	
		Exo 2						5	
		Exo 3							
	Erreur ou confusion sémantique (langage symbolique)	Exo 1		2(3x)				3	
		Exo 2	ensemble	3	6;9		6;9		
			élément symétrique / inverse	4;5(2x)	7			5(2x)	
			élément neutre		8			7;8	
			indices inutiles				6		
			écriture des éléments dans RxR						
			autres				8	10(2x)	11;15
		Exo 3						9(2x)	
	Preuve par l'exemple	Exo 2							
	Non mention de l'inconnue au sein du calcul	Exo 1							
		Exo 2							12; 13; 15; 17
		Exo 3							
	Exercice incomplet	Exo 2						8	

Erreurs & Catégories				Equipe 13	Equipe 14	Equipe 15	Equipe 16	Equipe 17
								3
Macro- Raisonnement	Eléments à démontrer pris comme point de départ du rsmnt	Exo 1		5				4
		Exo 2						
		Exo 3						
	Non-étude de tous les cas possibles	Exo 1	Propriétés des ops non toutes vérifiées		2			
		Exo 2	Cas ou le paramètre = 0 (par ex. au dénom.)	10;11;12	4	5;6;7;8	11;14;16	
			Autres					6
		Exo 3						
	Vérification inutiles de propriétés	Exo 1						
		Exo 2						
		Exo 3						
Mirco-raisonnement	Absence de référence, réf. Inadéquate ou partielle, aux propriétés au oux définitions	Exo 1						
		Exo 2				6	18 (2x)	
			Egalité	18				
		Exo 3				9		
			Egalité				22	
	Justification partielle du rsmnt employé	Exo 1				2;3;4(2x)		
		Exo 2			4		17	
		Exo 3			5;8			9
Respect des règles de réd.	Absence ou mauvaise formulation de conclusions intermédiaires	Exo 1			2			
		Exo 2						
		Exo 3						
	Absence de conclusion génréale	Exo 1						
		Exo 2						
		Exo 3						
Erreurs sur le langage naturel	Vocabulaire inadapté (confusion sémantique)	Exo 1						
		Exo 2				6		
		Exo 3						
	Utilisation erronée de conn. logiques (et, donc,...)	Exo 1						
		Exo 2						
		Exo 3						
	Construction inadéquate (ou absente) de la déf. de l'op.	Exo 1			2			
		Exo 2			3			
		Exo 3						
	Erreur ou confusion sémantique (langage symbolique)	Exo 1						
		Exo 2	ensemble	7				
			élément symétrique / inverse		4			
			élément neutre	7	3			
			indices inutiles					
			écriture des éléments dans RxR					
			autres					7
		Exo 3			5	9		
	Preuve par l'exemple	Exo 2			3			
	Non mention de l'inconnue au sein du calcul	Exo 1						
		Exo 2						
		Exo 3						
	Exercice incomplet	Exo 2						

7.5 Exemple de production complète d'étudiants (Equipe 13)

Question # 1

Hypothèse : considérons $K_2 = \{0,1\}$, un ensemble

enjeu : Démontrer que K_2 est un corps à l'aide des 11 propriétés des scalaires.

Solution :

Définissons l'opération d'addition :

$0+0=0$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=0$

Pour l'operation d'addition :

- Vérifions la fermeture :
  L'addition de 2 éléments de l'ensemble K_2 donne 1 élément de l'ensemble. Nous pouvons vérifier cette affirmation pour les différents cas d'addition possibles. Par exemple, l'addition de 0 avec 0, deux éléments de K_2, donne 0, qui est un élément de l'ensemble. L'ensemble K_2 est donc fermé pour l'addition.

- Vérifions la commutativité :
  Étant donné que l'addition d'un premier élément avec un deuxième donne la même réponse que l'addition du deuxième élément avec le premier, nous pouvons conclure que l'addition

1

est commutative.

En effet,

$$1+0 = 1 \quad \text{et}$$
$$0+1 = 1$$

- Vérifions l'associativité :

  Voici tous les cas possibles.

$$0+(0+0) = 0 \quad \text{et} \quad (0+0)+0 = 0$$
$$0+(0+1) = 1 \quad \text{et} \quad (0+0)+1 = 1$$
$$0+(1+1) = 0 \quad \text{et} \quad (0+1)+1 = 0$$
$$0+(1+0) = 1 \quad \text{et} \quad (0+1)+0 = 1$$
$$1+(0+0) = 1 \quad \text{et} \quad (1+0)+0 = 1$$
$$1+(0+1) = 0 \quad \text{et} \quad (1+0)+1 = 0$$
$$1+(1+1) = \Phi \quad \text{et} \quad (1+1)+1 = \Phi$$
$$1+(1+0) = 0 \quad \text{et} \quad (1+1)+0 = 0$$

Comme tous les cas possibles d'addition respectent l'associativité, cette propriété est satisfaite.

- Vérifions l'élément neutre :

  L'addition doit admettre un neutre, qui est l'élément 0 dans l'ensemble K_2. Nous pouvons le remarquer par ces opérations :

$$0+0 = 0$$
$$0+1 = 1$$
$$1+0 = 1$$

En effet, lorsque l'élément neutre 0 est additionné à un autre élément, la réponse est cet autre élément. L'élément 0 n'influence donc pas l'addition.

- Vérifions le symétrique :
  Dans cet ensemble, l'opposé de 1 est 1 et l'opposé de 0 est 0. En effet,
  $1+1=0$ et
  $0+0=0$
  Donc, il existe un symétrique pour chaque élément de l'ensemble K_2 tel que l'addition du symétrique et de l'élément qui lui est associé donne l'élément neutre, soit 0.

Définissons maintenant l'opération de multiplication :

$0 \times 0 = 0$
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 1 = 1$
$1 \times 0 = 0$

Pour l'opération de multiplication :

- Vérifions la fermeture :
  La multiplication de 2 éléments de l'ensemble K_2 donne un élément de l'ensemble. Nous pouvons vérifier cette affirmation pour les différents cas de multiplication possibles. Par exemple, la multiplication de 0 avec 0, deux éléments de K_2, donne 0, qui est un élément de l'ensemble. L'ensemble K_2 est donc fermé pour la multiplication

- Vérifions la commutativité :
  Étant donné que la multiplication d'un premier élément avec un deuxième donne la même réponse que la multiplication du deuxième élément avec le premier, nous pouvons conclure que la multiplication est commutative.

2

En effet,

$$0 \times 1 = 0 \text{ et}$$
$$1 \times 0 = 0$$

- Vérifions l'associativité:

  Voici tous les cas possibles:

  $0 \times (0 \times 0) = 0$ et $(0 \times 0) \times 0 = 0$
  $0 \times (0 \times 1) = 0$ et $(0 \times 0) \times 1 = 0$
  $0 \times (1 \times 1) = 0$ et $(0 \times 1) \times 1 = 0$
  $0 \times (1 \times 0) = 0$ et $(0 \times 1) \times 0 = 0$
  $1 \times (0 \times 0) = 0$ et $(1 \times 0) \times 0 = 0$
  $1 \times (0 \times 1) = 0$ et $(1 \times 0) \times 1 = 0$
  $1 \times (1 \times 1) = 1$ et $(1 \times 1) \times 1 = 1$
  $1 \times (1 \times 0) = 0$ et $(1 \times 1) \times 0 = 0$

  Comme tous les cas possibles respectent l'associativité, cette propriété est satisfaite.

- Vérifions l'élément neutre:

  La multiplication doit admettre un neutre, qui est l'élément 1 dans l'ensemble k_2. Nous pouvons le remarquer par ces opérations:

  $0 \times 1 = 0$
  $1 \times 0 = 0$
  $1 \times 1 = 1$

  En effet, lorsque l'élement neutre 1 est multiplié à un autre élément, la réponse est cet autre élément. L'élément 1 n'influence donc pas la multiplication.

4

- Vérifions le symétrique:
  Dans cet ensemble, l'inverse de 1 est 1.

  $1 \times 1 = 1$

  L'élément 0 n'a pas d'inverse, comme il est énoncé dans la définition de cette propriété. Il existe donc un symétrique pour chaque élément de l'ensemble K_2 tel que la multiplication du symétrique et de l'élément qui lui est associé donne l'élément neutre, soit 1.

- Vérifions que l'addition et la multiplication des éléments de l'ensemble soient compatibles.
  Voici tous les cas possibles:

$\boxed{0 \times (1+0) = 0 \times 1 + 0 \times 0} = 0$
$= 0 + 0 = 0$

Vous posez l'égalité à démontrer

$0 \times (0+1) = 0 \times 0 + 0 \times 1 = 0$
$= 0 + 0 = 0$

$0 \times (1+1) = 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$
$= 0 + 0 = 0$

$0 \times (0+0) = 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0$
$= 0 + 0 = 0$

$1 \times (0+0) = 1 \times 0 + 1 \times 0 = 0$
$= 0 + 0 = 0$

$1 \times (0+1) = 1 \times 0 + 1 \times 1 = 1$
$= 0 + 1 = 1$

5

$$1 \times (1+0) = 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1$$
$$= 1 + 0 = 1$$

$$1 \times (1+1) = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$$
$$= 1 + 1 = 0$$

Étant donné que la multiplication est distributive relativement à l'addition, et ce, pour tous les cas possibles de multiplication et d'addition d'éléments de l'ensemble K_2, celui-ci satifait cette propriété.

Conclusion : Nos opérations d'addition et de multiplication respectent les 11 propriétés qui doivent être satisfaite pour qu'un ensemble soit un corps. L'ensemble K_2 est munie de ces 2 opérations donc un corps.

10

Question #2

Partie A)

Hypothèse :

Considérons l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha, \beta) \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$

et $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$ ssi $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$

* Voir annexe pour l'élément neutre de l'addition : $(0,0)$

Enjeu : Montrer que l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ n'est pas un corps si on considère la multiplication terme à terme. Pour ce faire, nous devons trouver au moins une propriété que l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ ne satisfait pas.

Solution :

Pour l'opération de multiplication :

- Vérifions l'élément neutre :

Pour tout (α_1, β_1), on cherche (x, y)
où $(\alpha_1, \beta_1) \cdot (x, y) = (\alpha_1, \beta_1)$

$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (x, y) - (\alpha_1, \beta_1) = 0$ (addition de l'opposé)

$(\alpha_1, \beta_1)((x, y) - 1) = 0$ (mise en évidence)

alors $(\alpha_1, \beta_1) = \underline{0}$ ou $(x, y) - 1 = 0$
$(x, y) = (1, 1)$

Vous utilisez un neutre avant de l'avoir trouvé

ceci n'est pas un élément de $K(\alpha, \beta)$

Vous utilisez une égalité entre 2 ensembles différents

7

Pour l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, l'élément neutre de la multiplication est le couple (1,1). Cette propriété est donc satisfaite.

- Vérifions le symétrique:

Soit $(\alpha,\beta)^*$, l'inverse de $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ tel que

$$(\alpha,\beta)(\alpha,\beta)^* = (x,y)$$

où (x,y) est l'élément neutre, soit $(1,1)$

donc, $(\alpha,\beta)(\alpha,\beta)^* = (1,1)$ (multiplication terme à terme)

$$(\alpha\alpha^*, \beta\beta^*) = (1,1)$$

on a,

$$\alpha\alpha^* = 1 \quad \text{et} \quad \beta\beta^* = 1$$

définition de l'égalité

alors $\alpha^* = \frac{1}{\alpha}$ et $\beta^* = \frac{1}{\beta}$

si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$

car c'est le neutre de l'addition

Le fait qu'il n'existe pas d'inverse pour le couple (0,0) est acceptable puisqu'il est spécifié dans la définition de cette propriété. Cependant, cette propriété n'est pas satisfaite pour les couples où soit α ou β est égal à 0 (puisque la division par 0 est impossible).

et l'autre terme n'est pas nul

Conclusion: Étant donné que nous ne pouvons pas trouver d'inverse pour tous les couples de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$, la propriété du symétrique n'est pas satisfaite. Donc, comme les

8

Il propriétés ne sont pas satisfaite, l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ n'est pas un corps

pour ces opérations

Partie B)

Hypothèse : $K_{(\alpha,\beta)} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in \mathbb{R}\}$, un ensemble

- déf. de la multiplication sur $K_{(\alpha,\beta)}$:

$$(\alpha_1,\beta_1)(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

De plus, cette opération est commutative et associative.

- L'élément neutre de l'addition (défini en A)) : $(0,0)$

- L'addition terme à terme des éléments de l'ensemble satisfait les cinq premières propriétés caractéristiques des corps.

- L'opération de multiplication est commutative et associative

Enjeu : Démontrer que $K(\alpha,\beta)$, muni de l'opération de multiplication définie plus haut, est un corps.

Solution:

• Vérifions la fermeture :

Lorsque l'on multiplie deux couples de l'ensemble $K(\alpha,\beta)$, qui sont composés de réels, on obtient un couple formé de réels.

car ?

$$(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$$

• Verifions l'élément neutre :
posons l'élément neutre (x,y)

Comme l'élément neutre n'influence pas la multiplication, nous avons, Pour tout couple (α_1, β_1)

$$(\alpha_1,\beta_1)(x,y) = (\alpha_1,\beta_1)$$

$$(\alpha_1 x - \beta_1 y, \alpha_1 y + x\beta_1) = (\alpha_1, \beta_1)$$

① $\alpha_1 x - \beta_1 y = \alpha_1$
et
② $\alpha_1 y + x\beta_1 = \beta_1$

} par définition de l'égalité

Isolons x dans ① :

$$\alpha_1 x - \beta_1 y = \alpha_1$$
$$\alpha_1 x = \alpha_1 + \beta_1 y$$
$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y}{\alpha_1} \quad \alpha_1 \neq 0 ?$$

Isolons y dans ② :

$$\alpha_1 y + x\beta_1 = \beta_1$$
$$\alpha_1 y = \beta_1 - x\beta_1$$
$$y = \frac{\beta_1 - x\beta_1}{\alpha_1} \quad \alpha_1 \neq 0 ?$$

Remplaçons y dans ②

$$\alpha_1 y + \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 y}{\alpha_1}\right)\beta_1 = \beta_1$$

$$\alpha_1 y + \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_1^2 y}{\alpha_1} = \beta_1$$

$$\alpha_1 y + \frac{\beta_1^2 y}{\alpha_1} = 0$$

$$y\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1}\right) = 0$$

donc $\boxed{y = 0}$ ou $\alpha_1 + \frac{\beta_1^2}{\alpha_1} = 0$

10

Remplaçons $y=0$ dans ① (x isolé) :

$$x = \frac{\alpha_1 + \beta_1 y}{\alpha_1}$$

$$x = \frac{\alpha_1 + 0\beta_1}{\alpha_1}$$

$$x = \frac{\alpha_1}{\alpha_1}$$

donc $x = 1$

Nous pouvons conclure que l'élément neutre de la multiplication de l'ensemble $K_{(\alpha,\beta)}$ est $(1, 0)$

Ce neutre est-il acceptable si $\alpha_1 = 0$?

• Vérifions le symétrique (de la multiplication) :

$\neq (0,0)$

Posons l'inverse de (α_1, β_1) comme étant (α^*, β^*).
Par définition du symétrique, nous avons :

$$(\alpha_1, \beta_1)(\alpha^*, \beta^*) = (1, 0)$$

$$(\alpha_1\alpha^* - \beta_1\beta^*, \alpha_1\beta^* + \alpha^*\beta_1) = (1, 0)$$

Par définition de l'égalité,

① $(\alpha_1\alpha^* - \beta_1\beta^*) = 1$ et ② $\alpha_1\beta^* + \alpha^*\beta_1 = 0$

Isolons β^* dans ②

$$\alpha_1\beta^* + \alpha^*\beta_1 = 0$$
$$\alpha_1\beta^* = -\alpha^*\beta_1$$
$$\beta^* = \frac{-\alpha^*\beta_1}{\alpha}$$

et si $\alpha = 0$?

11

Remplaçons la valeur de β^* dans ①

① $\alpha_1 \alpha^* - \beta_1 \beta^* = 1$

$\alpha_1 \alpha^* - \beta_1 \left(\frac{-\alpha^* \beta_1}{\alpha_1} \right) = 1$

$\frac{\alpha_1^2 \alpha^*}{\alpha_1} + \frac{\alpha^* \beta_1^2}{\alpha_1} = 1$

$\alpha^* \left(\alpha_1 + \frac{\beta^2}{\alpha_1} \right) = 1$

$\alpha^* = \frac{1}{\left(\alpha_1 + \frac{\beta^2}{\alpha_1} \right)}$

$\boxed{\alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}}$

Remplaçons la valeur de α^* dans ② (β^* isolé)

② $\beta^* = \frac{-\alpha^* \beta_1}{\alpha_1}$

$\beta^* = -\frac{\alpha_1 \beta_1}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{1}{\alpha}$

$\boxed{\beta^* = \frac{-\beta_1}{\alpha^2 + \beta^2}}$

$\boxed{\text{et si } (\alpha_1, \beta_1) = (0,0)}$?

Nous pouvons donc conclure que l'inverse pour tous (α_1, β_1) est $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta_1}{\alpha^2 + \beta^2} \right)$. Cette propriété est donc satisfaite.

12

- Vérifions que l'addition et la multiplication sont compatibles

posons (a,b), (c,d), (e,f) 3 couples de $K_{(\alpha,\beta)}$

Montrons que

$$(a,b)((c,d)+(e,f)) = (a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)$$

premièrement,

$$\begin{aligned}(a,b)((c,d)+(e,f)) &= (a,b)(c+e,d+f)\\ &= (a(c+e)-b(d+f),\ a(d+f)+b(c+e))\\ &= ((ac+ae)-(bd+bf),\ (ad+af)+(bc+be))\\ &= (ac+ae-bd+bf,\ ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

deuxièmement,

$$\begin{aligned}(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f) &= (ac-bd,\ ad+cd)+(ae-bf,\ af+eb)\\ &= (ac-bd+ae-bf,\ ad+cb+af+eb)\\ &= (ac+ae-bd-bf,\ ad+af+bc+be)\end{aligned}$$

Comme les deux côtés de l'égalité sont identiques, la propriété 3 est satisfaite.

Conclusion: Comme toutes les propriétés sont satisfaites, l'ensemble, muni des deux opérations, est un corps.

13

Question 3.

a) Hypothèse : $K_{2(\alpha,\beta)}$, ensemble des vecteurs $\vec{v} = ((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$

(α_1, β_1) et (α_2, β_2) sont des scalaires de $K_{(\alpha,\beta)}$

enjeu : Considérons l'ensemble ordonné $B \langle ((1,0),(0,0) ; (0,0),(0,1)) \rangle$.
Est-ce que B est une base de $K^2_{(\alpha,\beta)}$?

· Pour que B soit une base de $K^2_{(\alpha,\beta)}$, il doit respecter les conditions suivantes :

1) Tout vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$ est combinaison linéaire des vecturs de la base B.

2) Aucun des vecteurs de B n'est combinaison linéaire des autres.

Solution de la propriété 1 : Soit $\vec{v} = ((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$ un vecteur donné

enjeu$_1$: trouver k_1 et k_2 tel que $\vec{v} = k_1((1,0),(0,0)) + k_2((0,0),(0,1))$

Posons $k_1 = (x,y)$ et $k_2 = (e,f)$

$\vec{v} = (x,y)((1,0),(0,0)) + (e,f)((0,0),(0,1))$ Multiplication par un scalaire

$\vec{v} = ((x,y)(1,0), (x,y)(0,0)) + ((e,f)(0,0), (e,f)(0,1))$

$\vec{v} = ((x1 - y0, x0 + 1y), (x0 - y0, x0 + 0y)) + ((e0 - f0, e0 + f0), (e0 - f1, e1 + f0))$

$\vec{v} = ((x - c, 0 - y), (0 - 0, 0 + 0)) + ((0 - 0, 0 + 0), (0 - f, e + 0))$

$\vec{v} = ((x,y),(0,0)) + ((0,0),(-f,e))$

14

$\vec{V} = ((x,y)(0,0), (0,0)(-f,e))$ par l'addition terme à terme.

$\vec{V} = ((x,y),(-f,e))$

Par hypothèse, $\vec{V} = ((\alpha_1, \beta_1),(\alpha_2, \beta_2))$
Alors,

$$((\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)) = ((x,y),(-f,e))$$

$$(\alpha_1,\beta_1) = (x,y) \qquad (\alpha_2,\beta_2) = (-f,e)$$

Par unicité des composant

Ainsi, $x = \alpha_1$
$y = \beta_1$

$f = -\alpha_2$
$e = \beta_2$

Définition de l'égalité

Nous arrivons à $K_1 = (x,y) = (\alpha_1, \beta_1)$
$K_2 = (e,f) = (\beta_2, -\alpha_2)$

la combinaison linéaire est $\vec{V} = (\alpha_1,\beta_1)((1,0),(0,0)) + (\beta_2,-\alpha_2)((0,0)(0,1))$
la première propriété est respectée. (ceci est valable pour tous les vecteurs de $K^2_{(\alpha,\beta)}$.

Solution de la propriété 2:

Enjeu$_2$: Trouver K tel que, $\vec{u} = K\vec{v}$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de B.

Posons $\vec{u} = ((1,0),(0,0))$ et $\vec{v} = ((0,0),(0,1))$
et Posons $K = (a,b)$.

$$\vec{u} = K\vec{v}$$

$$((1,0),(0,0)) = (a,b)((0,0),(0,1))$$

$$((1,0),(0,0)) = ((a,b)(0,0),(a,b)(0,1))$$

15

$((1,0),(0,0)) = ((a0-b0,\ a0+0b),\ (a0-b1,\ a1+0b))$

$((1,0),(0,0)) = ((0-0,\ 0+0),\ (0-b,\ a+0))$

$((1,0),(0,0)) = ((0,0),(-b,a))$

$(1,0) \boxed{\neq} (0,0)$ par unicité des composantes.

et $1=0$ par définition de l'égalité ce qui est faux

donc le n'existe pas

Les coordonnées devraient être égales pour que les vecteurs soient combinaisons linéaires, mais elles ne le sont pas donc la deuxième propriété de la base est respectée.

Conclusion: Comme les deux propriétés sont vérifiées et respectées, B est une base de $K^2_{(\alpha,B)}$.

b) Hypothèse: $\vec{v} = ((1,2),(3,4))$

$B = \langle((1,0),(0,0));(0,0),(0,1))\rangle$

$\vec{v} = ((\alpha_1,B_1),(\alpha_2,B_2))$

Enjeu: Trouver deux scalaires tel que

$\vec{v} = K_1((1,0),(0,0)) + K_2((0,0),(0,1))$

Solution: $\vec{v} = ((1,2),(3,4)) = ((\alpha_1,B_1),(\alpha_2,B_2))$

Par hypothèse.

Donc, $(1,2) = (\alpha_1,B_1)$ $\quad (3,4) = (\alpha_2,B_2)$

Par unicité des composan

$\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_2 = 3$

$B_1 = 2$ $\quad B_2 = 4$

Définition de l'égalité

11a

En a), on a trouvé des scalaires pour la combinaison linéaire de tous les vecteurs de l'ensemble $K^2_{(\alpha,\beta)}$.
Ceux-ci étaient
$K_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ et $K = (\beta_2, -\alpha_2)$

Alors, $K_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ et $K_2 = (\beta_2, -\alpha_2)$
$= (1, 2)$ $= (4, -3)$
Puisque $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $\beta_2 = 4$.

conclusion : Les scalaires K_1 et K_2 sont respectivement $(1,2)$ et $(4,-3)$. Donc, la combinaison linéaire recherchée est

$$\vec{v} = (1,2)((1,0),(0,0)) + (4,-3)((0,0),(0,1))$$

17

Annexe

Pour l'opération d'addition, vérifions l'élément neutre :

Pour tous (α_1, β_1), on cherche un scalaire (x, y) tel que

$$(\alpha_1, \beta_1) + (x, y) = (\alpha_1, \beta_1)$$

$$(\alpha_1 + x\ ,\ \beta_1 + y) = (\alpha_1, \beta_1)$$

définition de l'égalité

$\alpha_1 + x = \alpha_1$ $\quad$ $\beta_1 + y = \beta_1$

Par définition des ~~composantes~~.

ce ne sont pas des vecteurs

$x = \alpha_1 - \alpha_1$ $\quad$ $y = \beta_1 - \beta_1$

$x = 0$ $\quad$ $y = 0$

Alors, $(x, y) = (0, 0)$

Pour l'ensemble $K^2_{(\alpha,\beta)}$, l'élément neutre pour l'addition est le couple $(0,0)$. Cette propriété est donc satisfaite.

18

7.6 Certificat d'éthique

No de certificat
CPER-09-070-D(4)

Université de Montréal

Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche (CPÉR)

CERTIFICAT D'ÉTHIQUE
- RENOUVELLEMENT -

Le *Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche* (CPÉR), selon les procédures en vigueur et en vertu du formulaire de suivi qui lui a été fourni, conclu que le projet de recherche suivant respecte les règles d'éthique énoncées dans la *Politique sur la recherche avec des êtres humains* de l'Université de Montréal.

Titre du projet	**Identification d'obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite**
Étudiant requérant	**Ismaïl Régis MILI ([redacted])** Candidat à la maîtrise Didactique Faculté des sciences de l'éducation Université de Montréal
Direction	France CARON Professeure agrégée Didactique Faculté des sciences de l'éducation Université de Montréal
Financement	Non financé

MODALITÉS D'APPLICATION

Tout changement anticipé au protocole de recherche doit être communiqué au CPÉR qui en évaluera l'impact au chapitre de l'éthique.

Toute interruption prématurée du projet ou tout incident grave doit être immédiatement signalé au CPÉR.

Selon les règles universitaires en vigueur, un **suivi annuel** est minimalement exigé pour maintenir la validité de la présente approbation éthique, et ce, jusqu'à la fin du projet. Le questionnaire de suivi est disponible sur la page web du CPÉR.

[redacted]

Raphaëlle Stenne, conseillère en éthique
Comité plurifacultaire d'éthique de la recherche
Université de Montréal

14 / 08 / 2014
Date de délivrance*

01 / 09 / 2015
Date de fin de validité

* Le présent renouvellement est en continuité avec le précédent.

adresse postale
3744 Jean-Brillant, B-430-8
C.P. 6128, succ. Centre-ville
Montréal QC H3C 3J7
www.cper.umontreal.ca

Téléphone : 514-343-6111 poste 1896
cper@umontreal.ca