

Longue mémoire et dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées réalisées : Est-ce que le MSM est un modèle économique qui justifie ces faits empiriques?

Rapport de recherche remis à M. Benoit Perron par

Maxime Blais

C.P. BLAM16117900

Université de Montréal

Août 2007

Index

- **1. Introduction - p.3**
- **2. Contexte de la recherche - p.5**
 - *2.1 Markov switching multifractal - p.5*
 - *2.2 Cadre d'équilibre partiel p.7*
- **3. MSM et étude des faits empiriques - p.11**
 - *3.1 Analyse longue mémoire - p.11*
 - *3.2 Dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées - p.14*
- **4. Conclusion - p.19**
- **5. Annexes - p.20**
- **Références p.36**

1. Introduction

Le projet de cette recherche va être de tester si le MSM (Markov Switching Multifractal) L. Calvet & A. Fisher (2001) peut être un modèle qui reproduit deux observations empiriques particulières du rendement des actions sur les marchés financiers, soit la longue mémoire dans la volatilité et la dépendance de long terme entre les rendements en excès du taux sans risque et la volatilité passée.

Le premier fait empirique fut observé à plusieurs reprises dans les cahiers de recherche et plusieurs articles furent publiés sur ce sujet en finance et en économie financière. La longue mémoire dans la volatilité a été caractérisée en premier lieu en terme d'autocorrélation à long horizon. Cependant, dans les 15 à 20 dernières années, plusieurs auteurs ont faits des travaux empiriques sur des séries financières et ont conclu qu'il y avait preuve significative de longue mémoire dans la volatilité. En particulier, Baillie & al (1996) ont trouvé qu'il y avait de la longue mémoire dans la volatilité dans la série du taux de change DM-USD, Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2001) retrouvent également de la longue mémoire dans les volatilités et les corrélations dynamiques dans les série de taux change du DM, USD et du YEN. Une liste exhaustive de recherches a été faite sur le même sujet sur des indices boursiers et des taux de change. Alors tous ces travaux ont alors mené à un certain consensus sur la présence de longue mémoire dans les séries financières.

Le deuxième fait empirique est plus d'actualité et les travaux relatifs à la dépendance de long terme entre les rendements en excès au taux sans risque et la volatilité passée sont à être publiés prochainement. Ce fait est exposé essentiellement dans un « working paper » fait par B. Perron et F. M. Bandi (2007). Ils ont observé que la volatilité passée réalisée a une excellente capacité prédictive sur les rendements futurs en excès au taux sans risque. Comme ils en font mention dans leurs travaux, ils obtiennent de meilleurs résultats avec la volatilité passée réalisée qu'avec le taux de dividende sur les actions et le ratio consommation-richesse proposés par Lettau & Lundvigson (2001).

Le projet de recherche se divisera 3 sections. Tout d'abord, une mise en contexte de la recherche sera faite ainsi qu'une brève introduction du MSM. Ensuite, deux sections présenteront successivement l'étude faite sur la performance du MSM dans la reproduction des deux faite empiriques susmentionnés. Finalement, une synthèse des résultats et un portrait du MSM seront faits.

2. Contexte de la recherche

2.1 Markov switching multifractal

Dans cette section, le contexte de la recherche sera présenté. Tout d'abord, une présentation du MSM sera faite et ensuite une justification du choix de ce modèle pour la recherche. Ensuite, on expliquera brièvement l'application du MSM dans un modèle d'équilibre partiel, ce qui fera le lien entre les rendements en excès au taux sans risque et le modèle, qui se révéleront nécessaire à l'accomplissement de notre examen.

Le MSM sera ici exposé sur une forme discrète, qui est plus simple. D'après L. Calvet & A. Fisher (2001), le modèle dans sa forme discrète avec \bar{k} composantes de volatilité et en définissant $x_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}$ comme l'innovation où $\{P_t; 0 \leq t \leq T\}$ est le processus de prix d'un actif financier, on a alors que;

$$x_t = \sigma (M_{1,t} M_{2,t} \dots M_{\bar{k},t})^{1/2} \varepsilon_t$$

où σ est une constante positive et $\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0,1)$. Les composantes aléatoires $M_{k,t}$ de la volatilité sont persistantes, non-négatives et satisfont $E[M_{k,t}] = 1, \forall k, t$. Par simplicité, les auteurs ajoutent comme hypothèse que les $M_{k,t}$ sont markoviens de premier ordre et qu'ils sont indépendants à chaque instant t . Donc, σ est l'écart type inconditionnel de x_t . Tout au long de la recherche, le MSM aura toujours des composantes de volatilité ($M_{k,t}$) discrètes et de loi i.i.d binomiale \mathbf{M} . Certaines variantes ont été testées comme par exemple que les $M_{k,t}$ sont de loi continue et log-normal (L. Calvet & A. Fisher (2005)). Cependant, cette spécification n'est pas pertinente au but de la recherche car les principales caractéristiques du modèle sont reproduites aussi bien par le modèle discret que par le modèle continue (L. Calvet & A. Fisher (2004)). De plus, peu de recherches ont été faites sur ce cas. La seule différence entre chaque composante $M_{k,t}$ est seulement au niveau de la fréquence

des changements. Des probabilités de transition de chaque composante sont ainsi définies selon une spécification particulière pour reproduire une hétérogénéité dans les changements des composantes, créant ainsi les chocs de volatilités désirées. Ces définitions ne seront pas exposées ici dans pour ne pas alourdir le contexte et sont disponibles dans les articles de L. Calvet & A. Fisher (2001,2002, 2004).

Que seraient alors les améliorations du MSM par rapport aux modèles précédents? L. Calvet & A. Fisher (2001, 2004 ,2005) ont fait beaucoup de comparaisons avec plusieurs modèles dans leurs recherches. Premièrement, le MSM est un modèle qui génère les faits empiriques des données, en plus de reproduire l'invariance d'échelle dans la distribution, qui est caractéristique des données financières (Mandelbrot et al. (1997)). Les modèles multifractals, comme le MSM, reproduisent ce fait empirique. Aussi, avec peu de composantes de volatilité, le modèle imite très bien les sauts de la volatilité à diverses fréquences tout en demeurant persistante (L. Calvet & A. Fisher (2001)). Ces sauts à diverses fréquences peuvent être très bien associés aux cycles d'affaires, aux chocs technologiques et de liquidités, aux changements dans la consommation, aux mouvements macroéconomiques, etc. (L. Calvet & A. Fisher (2001, 2005, 2006)). Il y a aussi peu de paramètres à spécifier pour ce modèle ce qui facilite la modélisation et les simulations. Lors de comparaisons avec le GARCH, le MS-GARCH (Klaassen (2002)) et le FIGARCH, sur la prévision de la volatilité en utilisant les données sur le taux de change, le MSM a fait mieux que ces modèles dans les prévisions de 10 à 50 jours (L. Calvet & A. Fisher (2004)). Le modèle dans sa forme bivariée performe également aussi bien que le GARCH multivarié (L. Calvet & A. Fisher (2004)).

Donc, cette volatilité particulière générée par le MSM s'avère une candidate pertinente pour notre recherche. En effet, elle semble très bien dans la prévision des volatilités futures avec les données empiriques, donc semble convenable pour étudier la dépendance de long terme en les rendements futurs et la volatilité passée puisqu'elle la réplique mieux que celle des autres modèles. De plus, L. Calvet & A. Fisher (2001,2005) mentionnent aussi que les rendements générés par un modèle avec une spécification MSM sont très semblables à ceux réalisés par les actifs financiers. Cependant, la définition MSM d'un modèle génèrerait de la

non-stationnarité dans la distribution de la volatilité. Or, il y a présence d'une distribution stationnaire et de mémoire longue dans les données empiriques, d'où la pertinence de faire une analyse longue mémoire pour confirmer ou infirmer cette conjecture.

2.2 Cadre d'équilibre partiel

L. Calvet & A. Fisher (2005) ont alors appliqué le MSM dans un contexte d'équilibre multifréquentiel. Le processus des dividendes a ici une spécification MSM. En plus des faits empiriques susmentionnés que le modèle reproduit, il génère également du feedback de la volatilité, ce qui est la propriété qu'une augmentation anticipée de la volatilité tend à diminuer les rendements courants. Plusieurs ont déjà observé ce fait sous plusieurs horizons. Cet effet est de 10 à 40 fois plus grand avec le MSM en le comparant aux autres modèles (L. Calvet & A. Fisher (2006)). Cette spécification des dividendes génère aussi deux autres résultats importants (L. Calvet & A. Fisher (2005)). La précision du signal de la volatilité a peu d'impacts sur la variance et la moyenne inconditionnelle des rendements. Aussi, les changements des composantes les plus persistantes ont plus d'impacts sur les moments des rendements.

Le modèle d'équilibre partiel sera essentiellement repris de L. Calvet & A. Fisher (2005,2006). Les hypothèses de l'économie d'échanges sur un horizon infini sont que l'agent représentatif a une fonction d'utilité récursive isoélastique (Epstein & Zein (1989)), que les processus de consommation et de dividendes sont distincts et que l'information est parfaite sur les marchés (I_t). Alors, on a que l'utilité de l'agent est :

$${}_{(1)}U_t = \left\{ (1 - \delta)C_t^{\frac{1-\alpha}{\theta}} + \delta \left[E_t \left(U_{t+1}^{1-\alpha} \right) \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}^{\frac{\theta}{1-\alpha}}, t = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

où α est le coefficient d'aversion au risque, ψ est l'élasticité de substitution intertemporelle, $\theta = (1 - \alpha) / (1 - \psi^{-1})$ et alors quand $\alpha = \psi^{-1}$, on a que l'utilité se réduit à l'utilité attendue.

L'agent reçoit ici un flux de consommation exogène $\{C_t\}$. La log-consommation $c_t = \ln C_t$ suit une marche aléatoire avec une dérive et une volatilité constante :

$$(2) c_t - c_{t-1} = g_c + \sigma_c \varepsilon_{c,t}$$

où les $\varepsilon_{c,t} \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$. Le processus log-dividendes suit également une marche aléatoire mais avec une moyenne et une variance qui dépend de l'état du processus :

$$(3) d_t - d_{t-1} = \mu_d(M_t) - \frac{\sigma_d^2(M_t)}{2} + \sigma_d(M_t) \varepsilon_{d,t}$$

où les $\varepsilon_{d,t} \sim \text{i.i.d. } N(0,1)$ et sont corrélés avec les $\varepsilon_{c,t}$, μ_t et σ_t sont des fonctions déterminés par la variable d'état M_t , et le terme d'Itô $\sigma_d^2(M_t)/2$ garantit que la croissance espérée du dividende $E[D_{t+1}/D_t | M_t] = e^{\mu_d(M_t)}$ dépend seulement de $\mu_d(M_t)$. La variable d'état M_t suit le même processus que dans la section précédente et alors ne sera pas présentée ici.

Le modèle sépare alors les rendements sur les marchés financiers de la croissance de la consommation et du facteur d'actualisation stochastique. Les auteurs affirment que cette hypothèse commune en finance est conséquente avec de nombreux faits empiriques (Campbell (1996), Campbell & Cochrane (1999)). Ils justifient ce choix en arguant que la corrélation est faible entre la croissance de la consommation et du dividende, en plus que les profits ne sont qu'une petite partie du PIB par rapport à la consommation et alors les chocs sur la consommation et le dividende ne seront pas identiques.

Pour simplifier la présentation, on passera ici à la solution de l'équilibre partiel du cadre défini précédemment. La démarche est très bien détaillée dans L. Calvet & A. Fisher (2005, 2006). Donc, sous la contrainte budgétaire et les conditions de première ordre, on trouve à l'équilibre que (4) :

$$r_{t+1} = \ln(1 + R_{t+1}) - r_f = \ln \left[\frac{1 + Q(M_{t+1})}{Q(M_t)} \right] + g_d - r_f - \frac{\sigma_d^2(M_{t+1})}{2} + \sigma_d(M_{t+1}) \varepsilon_{d,t+1}$$

où r_t et $Q(M_t)$ sont respectivement le rendement en excès au taux sans risque et le ratio prix-dividende quotidien.

L. Calvet & A. Fisher (2005, 2006) ont approximé (4) par une log linéarisation du ratio prix-dividende :

$$(5) \ln Q(M_t) = \bar{q} - \sum_{k=1}^{\bar{k}} q_k (M_{k,t} - 1).$$

et par la condition de premier ordre, ont dérivé :

$$(6) q_k = \frac{\alpha \sigma_{c,d}}{2} \frac{1 - \gamma_k}{1 - (1 - \gamma_k) \rho}$$

où $(\gamma_k)_{k=1}^{\bar{k}}$ est l'ensemble des probabilités de transition défini pour le processus des dividendes. ρ , qui est empiriquement près de 1, est tel que :

$$(7) \ln \left(\frac{e^{\bar{q}}}{1 + e^{\bar{q}}} \right) \equiv \ln \rho \equiv E \left[\ln \frac{P_t}{(P_t + D_t)} \right] = g_d - r_f - \alpha \sigma_{c,d}$$

L'équation (7) est définie comme la moyenne inconditionnelle de l'inverse du feedback de la volatilité, et où $\sigma_{c,d} = \sigma_c \bar{\sigma}_d \rho_{c,d}$ est la covariance constante dans l'échantillon entre la consommation et les dividendes. Des équations (4), (5), (6) et (7), on trouve l'approximation log-linéaire (8):

$$r_{t+1} \approx \alpha \sigma_{c,d} + \sum_{k=1}^{\bar{k}} q_k \left[(M_{k,t} - 1) - \rho (M_{k,t+1} - 1) \right] + \sigma_d (M_{t+1}) \varepsilon_{d,t+1}$$

Par souci de cohérence avec la littérature et les études sur les faits étudiés dans la recherche, la variance quotidienne sera approximé par r_t^2 . On peut également justifier ce choix par le fait que la forme de la variance quotidienne du modèle est assez difficile à obtenir dans le cas où on utilise la forme log-linéaire du modèle.

Le cadre du modèle étant expliqué, il faut maintenant établir sur quelles données et par la suite quels paramètres seront utilisés pour poursuivre la recherche. Plutôt dans la recherche, il a été exposé que le MSM est un modèle parcimonieux qui facilite la simulation. En fait, la simplicité du modèle fait en sorte que la forme de la fonction de vraisemblance est facilement

obtenue. Dans le contexte présent, le modèle des rendements a seulement un ensemble de cinq paramètres à spécifier :

$$(9) \Omega = \{m_0, \gamma_{\bar{k}}, b, \bar{\mu}_d, \bar{\sigma}_d\} \in \mathbb{R}^5$$

où $m_0 \in [1, 2]$ est le paramètre de la distribution binomiale \mathbf{M} , $\gamma_{\bar{k}}$ est la probabilité de transition de la composante la plus volatile dans les dividendes, b est un paramètre de contrôle de la persistance, $\bar{\mu}_d$ et $\bar{\sigma}_d$ sont respectivement la dérive et la diffusion du processus des dividendes et $\bar{k} = 8$ est le nombre de composantes dans le processus de la volatilité des dividendes. $\bar{\mu}_d$ et $\bar{\sigma}_d$ sont des variables importantes dans tous les modèles de type CAPM, tandis que les autres variables sont seulement spécifiques au MSM. L. Calvet & A. Fisher (2006) ont fait des travaux sur le rendement en excès sur l'indice des actions américaines de Janvier 1926 à Décembre 2003. Toute la période contient 20765 observations. Ils ont alors inférés les paramètres $\bar{\mu}_d$ et $\bar{\sigma}_d$ des données empiriques pour avoir une certaine cohérence avec les résultats passés de la littérature. À partir des travaux de Fama & French (2002), Campbell (2003), Campbell & Cochrane (1999) et Bansal & Yaron (2004), ils ont justifiés le choix de $\bar{\mu}_d - r_f = 0.005\%$ et $\bar{\sigma}_d = 0.7\%$ comme valeurs quotidiennes (1.2% et 11% sont les valeurs annuelles respectives). L'analyse longue mémoire se fera sur les paramètres MSM inférés de cette série. Pour ce qui est de l'étude de la dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées, on utilisera les mêmes paramètres mais aussi ceux inférés de l'indice total NYSE /Amex 1954-2006 (Perron (2007)). Ce choix est justifié par le fait que les travaux sur ce fait empirique sont en partie fait sur cette période en plus d'être un bonne comparaison de l'effet du temps sur cette relation par un modèle de spécification MSM.

Dans la prochaine section, la recherche débutera par une analyse longue mémoire du processus des rendements suivi d'une étude du modèle dans la reproduction de la dépendance de long terme entre les rendements futurs en excès du taux sans risque et les volatilités passées réalisées.

3. MSM et étude des faits empiriques

3.1 Analyse longue mémoire

La première partie de la recherche sera consacrée à une analyse longue mémoire des données générées par le modèle élaboré précédemment. L. Calvet & A. Fisher (2002, 2005, 2006) font mention que la spécification MSM du processus des dividendes fait apparaître un comportement non-stationnaire de la volatilité des dividendes. Alors, il serait pertinent d'analyser la volatilité des dividendes, et par la bande l'impact de cette spécification sur la dépendance de long terme de la volatilité des rendements. Mandelbrot et al. (1997) font mention que les modèles multifractals produisent dans les rendements de la dépendance de long terme dans r_t^2 et $|r_t|$. Également, on étudiera la série de la volatilité mensuelle réalisée. Cette dernière est pertinente puisque que c'est celle-ci qui fera l'objet d'une étude complète dans la reproduction du fait empirique susmentionné. Alors, pour chacune des quatre séries mentionnées, c'est-à-dire $\sigma_{d,t}^2, \sigma_{t,t+1}^2, r_t^2$ et $|r_t|$, une analyse longue mémoire sera performée, où $\sigma_{t,t+1}^2$ est la volatilité mensuelle réalisée et est définie comme :

$$(10) \sigma_{t,t+1}^2 = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t+\frac{i}{n_t}}^2, \quad r_{t+\frac{i}{n_t}} \text{ est le rendement quotidien réalisé}$$

Dans cette recherche, on va faire de l'inférence statistique semi-paramétrique pour les séries chronologiques à longue mémoire. On va se concentrer sur l'estimation du paramètre de longue mémoire d basée seulement sur la régression du logarithme du périodogramme aux fréquences de Fourier près de l'origine. Cette méthode, qui fut proposée initialement par Geweke & Porter-Hudak (1983), est très populaire parce qu'elle est très intuitive et les calculs sont très simples. Cette approche a l'avantage par rapport aux méthodes paramétriques d'être robuste contre le manque de spécification du modèle et du comportement à court terme de la série (Robinson (1994)). Les modèles semi-paramétriques pour la longue mémoire se concentrent essentiellement sur les propriétés de l'autocovariance et de la densité spectrale. Ces propriétés sont respectivement la décroissance hyperbolique de

la fonction d'autocovariance et la singularité de la densité à la fréquence zéro. Ces modèles facilitent le travail dans le sens où on n'a pas d'autres hypothèses explicites à faire sur la densité spectrale et l'autocovariance. Ici, on va seulement assumer que les séries satisfont les critères de la densité spectrale suivante :

$$f(\lambda) \sim G\lambda^{-2d}, \lambda \rightarrow 0^+$$

où on a que $d \in (0, 0.5)$. Supposons qu'un processus à covariance stationnaire $\{X_t, t = 1, 2, 3, \dots\}$ respecte la condition précédente et aussi que $X_t, t = 1, 2, 3, \dots, N$ est connue. On introduit une transformation discrète de Fourier à la fréquence $\lambda_j = 2\pi j / N$, où $j \in \{1, 2, 3, \dots, m < n / 2\}$,

$$\omega(\lambda_j) = (2\pi N)^{\frac{-1}{2}} \sum_{t=1}^N X_t e^{it\lambda_j} \text{ et}$$

$$P(\lambda_j) = |\omega(\lambda_j)|^2$$

où $P(\lambda_j)$ est le périodogramme. Alors, on estime le paramètre de longue mémoire d en faisant les MCO sur

$$(11) \ln P(\lambda_j) = \alpha - d \ln \left(4 \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda_j}{2} \right) \right) \right) + \varepsilon$$

On a que la distribution asymptotique de \hat{d} est caractérisé par :

$$\sqrt{m}(\hat{d} - d) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\pi^2}{24}\right)$$

Dans le cadre d'analyse présent, on va seulement utiliser la méthode GPH. D'autres comme l'estimateur de Whittle (Robinson (1995)) auraient pu être utilisés puisque celle-ci en particulier est plus efficace que la GPH. Bien que cette méthode, dans certains cas, puisse mener à des estimateurs biaisés vers le haut dans le cas d'échantillon petit ou à dépendance de court terme positive, on s'attend avec la grandeur de l'échantillon que ce biais soit

fortement atténué. De plus, étant donné le grand nombre de simulations, la différence entre ces méthodes distinctes ne devraient pas altérés les conclusions.

Donc à partir de ces hypothèses, on va pouvoir présenter et conclure sur l'analyse des séries simulées par le modèle. Les équations utilisées pour à cette fin seront :

$$(12) \sigma_{d,t+1}^2 = \overline{\sigma}_d^{-2} (M_{1,t+1} M_{2,t+1} \dots M_{\bar{k},t+1}) \varepsilon_{d,t+1}^2$$

$$(8) r_{t+1} \approx \alpha \sigma_{c,d} + \sum_{k=1}^{\bar{k}} q_k \left[(M_{k,t} - 1) - \rho (M_{k,t+1} - 1) \right] + \sigma_d (M_{t+1}) \varepsilon_{d,t+1}$$

Les paramètres pour simuler les séries sont :

$$(13) \Omega = \left\{ \widehat{m}_0 = 1.435, \widehat{\gamma}_{\bar{8}} = 0.058, \widehat{b} = 2.19, \overline{\mu}_d - r_f = 0.005\%, \overline{\sigma}_d = 0.7\% \right\}.$$

Le travail consiste à simuler 2000 fois une série de 20765 données, ce qui exactement nombre d'observations que L. Calvet & A. Fisher (2006) ont utilisés, et ensuite de déterminer les paramètres propres des séries $\sigma_{d,t}^2, \sigma_{t,t+1}^2, r_t^2$ et $|r_t|$. Les choix de fenêtres (m) dans cette recherche seront standards à ce qu'on observe d'habitude dans les analyses longue mémoire, donc que $m = \{n^{0.4}, n^{0.5}, n^{0.6}, n^{0.7}\}$.

Les tableaux et les graphiques de l'analyse sont présentés en annexe. La première constatation en observant les résultats, c'est que le pattern de l'estimateur est le même à l'exception de la volatilité des dividendes. On voit que l'estimateur atteint son maximum à la fenêtre $m = n^{0.6}$ et que $d \in (0, 0.5)$ pour les séries $\sigma_{t,t+1}^2$ et r_t^2 , $d = 0.5123$ pour la série $|r_t|$. Donc, comme on sait que cette méthode cause du biais vers le haut, on peut conclure que la série $|r_t|$ semble stationnaire et il y présence de longue mémoire. La même conclusion s'applique pour les séries $\sigma_{t,t+1}^2$ et r_t^2 . Donc, la série des volatilités réalisées générée par l'équilibre partiel est bien de longue mémoire comme Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys (2001) l'avaient observé dans les données empiriques. Pour l'estimateur de la volatilité des

dividendes, on a que $d \in (0, 0.5)$ pour $m = n^{0.4}, n^{0.5}$ et pour les autres fenêtres que $d > 0.5$. À la fenêtre $m = n^{0.7}$, on a que $d = 0.679$. Alors, il y a bien apparence de non-stationnarité comme il le fut susmentionné.

Donc, le processus de la volatilité des dividendes de spécification MSM semble non-stationnaire tandis que les autres séries exhibent de la longue mémoire. Ainsi, cette définition des dividendes justifierait la présence de longue mémoire dans les autres séries étudiées.

3.2 Dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées

La 2^{ème} partie de la recherche sera consacrée à la dépendance de long terme entre les rendements en excès du taux sans risque et la volatilité passée. Les travaux performés pour cette analyse seront en ligne avec ceux fait par B. Perron et F. M. Bandi (2007) pour établir des bases de comparaisons entre leurs conclusions et la performance du MSM dans la reproduction du fait empirique susmentionné. Alors, un résumé des travaux de l'article de B. Perron et F. M. Bandi (2007) sera présenté en premier lieu et ensuite un cadre d'analyse en lien avec ces travaux sera exposé pour comparer les résultats du MSM. Ensuite, les résultats des simulations avec les conclusions seront amenés.

B. Perron et F. M. Bandi (2007) ont en quelque sorte trouvé cette dépendance de long terme entre les rendements en excès du taux sans risque et la volatilité passée. Ils ont fait des tests sur les données empiriques avec le modèle suivant :

$$(14) R_{t,t+h} = \alpha_h + \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \varepsilon_{t,t+h}$$

où $R_{t,t+h}$ est le rendement en excès sur le marché, $\sigma_{t-h,t}^2$ est la variance passée réalisée et $\varepsilon_{t,t+h}$ est l'erreur de prévision. Ils ont pris des valeurs de $h = 1, \dots, 120$ où h est le nombre de mois (de 1 mois à 10 ans), donc $R_{t,t+h}$ est le rendement pour h mois entre t et $t+h$, et la même logique s'applique aux autres composantes du modèle. Le paramètre β_h est le paramètre d'intérêt qui est le « risk return slope ». Comme ils le soulignent, leurs travaux s'inscrivent dans la lignée d'une liste exhaustive de recherches sur le « short-run risk-return trade-offs ». Certains ont

trouvés des valeurs positives et d'autres négatives, mais les conclusions sont que le paramètre (de la régression) de cette relation était majoritairement significatif. Ils poursuivent que selon les conclusions des travaux, s'ils continuent cette logique d'agrèger les variances sous un processus autorégressif, ils devraient avoir que le paramètre de la régression des rendements futurs sur les variances passées décroît avec l'augmentation du niveau d'agrégation. Les conclusions de B. Perron et F. M. Bandi (2007) contrastent totalement avec cette conclusion. Ils trouvent que le paramètre augmente avec l'horizon d'agrégation et n'est pas significatif dans les régressions dans le court terme. Comme cette recherche en fait mention en introduction, la variance passée, selon leurs trouvailles, serait un important substitut pour prédire le rendement futur, et même meilleur que le ratio dividendes-prix et consommation-richesse. Ils ajoutent que la variance passée se distingue des derniers dans le sens où ceux-ci sont meilleurs à l'intérieur du cycle d'affaire tandis que la variance passée va au-delà de ce même cycle. En appliquant leur résultat sur les modèles de type CAPM, ils ont aussi trouvé en conditionnant ce dernier sur les variances passées, que les erreurs sur les prix sont beaucoup plus faibles qu'avec le modèle standard.

Ils ont également travaillé sur des variantes du modèle (14) : celui excluant la constante, celui avec des estimateurs HAC pour la variance et celui avec le ratio dividendes-prix. Ici, tous ces cas seront considérés puisque le ratio prix-dividendes (5) est disponible via l'équilibre partiel spécifié auparavant.

Les données utilisés par B. Perron et F. M. Bandi (2007) sont ceux de l'indice total pondéré du NYSE /Amex. Ils ont travaillé sur le rendement en excès au taux sans risque sur le marché et ceci s'inscrit alors dans un contexte compatible au cadre d'équilibre partiel. La démarche sera sensiblement la même qu'employée dans l'analyse longue mémoire. Le travail consistera à simuler des séries à partir de l'équation d'équilibre partiel (8) déterminée plus haut. Donc, une première analyse se fera sur les paramètres du MSM utilisés pour faire l'analyse longue mémoire, donc sur les données de 1926-2004 (13). Ensuite, on fera le même processus mais sur les paramètres des séries 1954-2004, donc :

$$\Omega' = \left\{ \hat{m}_0 = 1.369, \hat{\gamma}_{\bar{g}} = 0.047, \hat{b} = 2.15, \bar{\mu}_d - r_f = 0.005\%, \bar{\sigma}_d = 0.7\% \right\}$$

Une comparaison avec les résultats empiriques sera ensuite faite pour voir la performance du MSM dans la reproduction de la relation étudiée.

Dans la première partie de l'examen, les modèles étudiés seront :

$$R_{t,t+h} = \alpha_h + \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \varepsilon_{t,t+h} \quad (14)$$

$$R_{t,t+h} = \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \varepsilon_{t,t+h} \quad (15)$$

où $\sigma_{t,t+1}^2 = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t+\frac{i}{n_t}}^2$ est la volatilité réalisée définie plus haut et $\sigma_{t,t+h}^2 = \sum_{i=1}^h \sigma_{t+i-1,t+i}^2$.

Dans la deuxième partie, les équations (14) et (15) seront étudiées mais dans le cas où on utilise l'estimateur HAC de la variance, c'est-à-dire :

$$(18) \sigma_{t,t+h}^2 = \sum_{j=1}^{n_{t,t+h}} r_{t+\frac{j}{n_{t,t+h}}}^2 + 2 \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{i}{k+1} \right) \sum_{j=1}^{n_{t,t+h}-i} r_{t+\frac{j}{n_{t,t+h}}} r_{t+\frac{j+i}{n_{t,t+h}}}$$

pour les fenêtres $k = 0, 1, 5$.

Dans la troisième partie, on inclura par l'équation (14) le ratio dividendes-prix, donc que :

$$(17) R_{t,t+h} = \alpha_h + \beta_h \sigma_{t-h,t}^2 + \delta \left(\frac{d}{p} \right)_{t-h,t} + \varepsilon_{t,t+h}$$

Les résultats auront la même justification asymptotique que dans le cas de l'analyse longue mémoire, c'est-à-dire que la distribution des paramètres d'intérêts $\lambda = \{\beta_h, \delta\}$ est définie comme :

$$\sqrt{T} (\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\lambda}^2).$$

Les résultats de la première partie qui examine (14) et (15) sont présentés en annexe. Les cas sans constantes et avec constantes ont été présentés séparément dans 2 graphiques (G1, G2) distincts. Les résultats empiriques et des simulations sont clairement identifiés dans la légende. Dans le cas avec constante (G1), on peut voir que les résultats empiriques et du modèle d'équilibre partiel ne semblent pas concorder. En effet, les « Risk Return Slope » générés par le modèle diminuent avec l'agrégation jusqu'à être négatifs tandis que les paramètres de l'empirique s'accroissent et deviennent positifs et significatifs à partir du niveau d'agrégation $h=84$. Dans les niveaux d'agrégation plus faible, vu que les paramètres empiriques sont presque tous non-significatifs (B. Perron et F. M. Bandi (2007)), alors on ne peut pas vraiment conclure sur la validité du modèle. Alors, le modèle ne justifierait pas cette relation dans le cas où il y a une constante. Cependant, on peut argumenter que la constante dans l'étude n'était pas significative, et comme il l'a été mentionné auparavant, que la constante pouvait alors dans certains cas corrompre les résultats. De plus, l'utilisation d'un modèle log-linéarisé, qui affectent les moments de la distribution des rendements, peut être une cause de ce fait.

Alors, suite à ces conclusions, regardons le cas avec constante. Premièrement, les paramètres empiriques dans le cas sans constantes sont quasiment tous significatifs pour les deux échantillons (B. Perron et F. M. Bandi (2007)). Au niveau des comparaisons entre les paramètres empiriques et du modèle, on a qu'ils sont positifs et augmentent avec le niveau d'agrégation. Ensuite, plus l'échantillon des données est grand, plus les paramètres semblent converger. Bien que la valeur des paramètres ne sont pas les mêmes, le modèle réplique bien dans le cas sans constante la dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées réalisées. Comme mentionné précédemment, l'utilisation du vrai processus au lieu de l'approximation log-linéaire aurait peut-être pu améliorer cette relation.

Dans la 2^{ème} partie, nous allons étudier la comparaison des paramètres dans le cas où on utilise (18) comme expression de la variance réalisée pour évaluer les modèles (14) et (15). Les deux graphiques (G3, G4) résument les résultats comme dans la partie précédente. Les données pour la fenêtre $k=0$ sont les mêmes qu'utilisés dans le graphique (G1). Pour ce qui est

du cas avec la constante de régression, aucune amélioration n'est apportée par rapport aux paramètres empiriques. Les paramètres du modèle changent un peu seulement au niveau d'agrégation plus faible, mais converge au niveau d'agrégation plus élevé. Dans le cas sans constante, une légère amélioration par rapport aux paramètres empiriques est perceptible pour la fenêtre $k=1$. Mais, malgré que l'utilisation de l'estimateur HAC pour la variance n'altère pas la relation, ce qui est cohérent avec ce que B. Perron et F. M. Bandi (2007) ont trouvé en faisant la même procédure, on a une indication que ce sont les composantes de moyennes et basses fréquences qui portent le fait empirique pour le modèle d'équilibre partiel.

Dans la 3^{ème} partie, le modèle (17) sera seulement traité ici pour mettre l'accent sur la capacité prédictive du ratio dividendes-prix et l'effet de l'inclusion de la variable sur la « Risk Return Slope ». On a que $\delta \in [0.005, 0.133]$ pour les différents niveaux d'agrégation. Le paramètre semble donc avoir une certaine capacité prédictive dans notre modèle. Cependant, l'inclusion de cette variable dans le modèle change le comportement de la « Risk Return Slope » (voir graphique G5). Aussi, on peut douter de la valeur de ce ratio puisque cela semble contraster avec ce qu'on fait B. Perron et F. M. Bandi (2007). Ils ont eu des changements dans les paramètres β_h mais le type de relation entre l'agrégation et le paramètre a été conservé. Ici, ce n'est pas le cas. De plus, par le fait qu'on travaille avec un ratio log-linéarisé, il est plus prudent dans ce cas de ne pas conclure sur la relation et laisser à une investigation future les résultats avec le modèle (17).

En somme, l'équilibre partiel avec une spécification MSM des dividendes semble plus ou moins bien reproduire les observations empiriques sur la dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées réalisées.

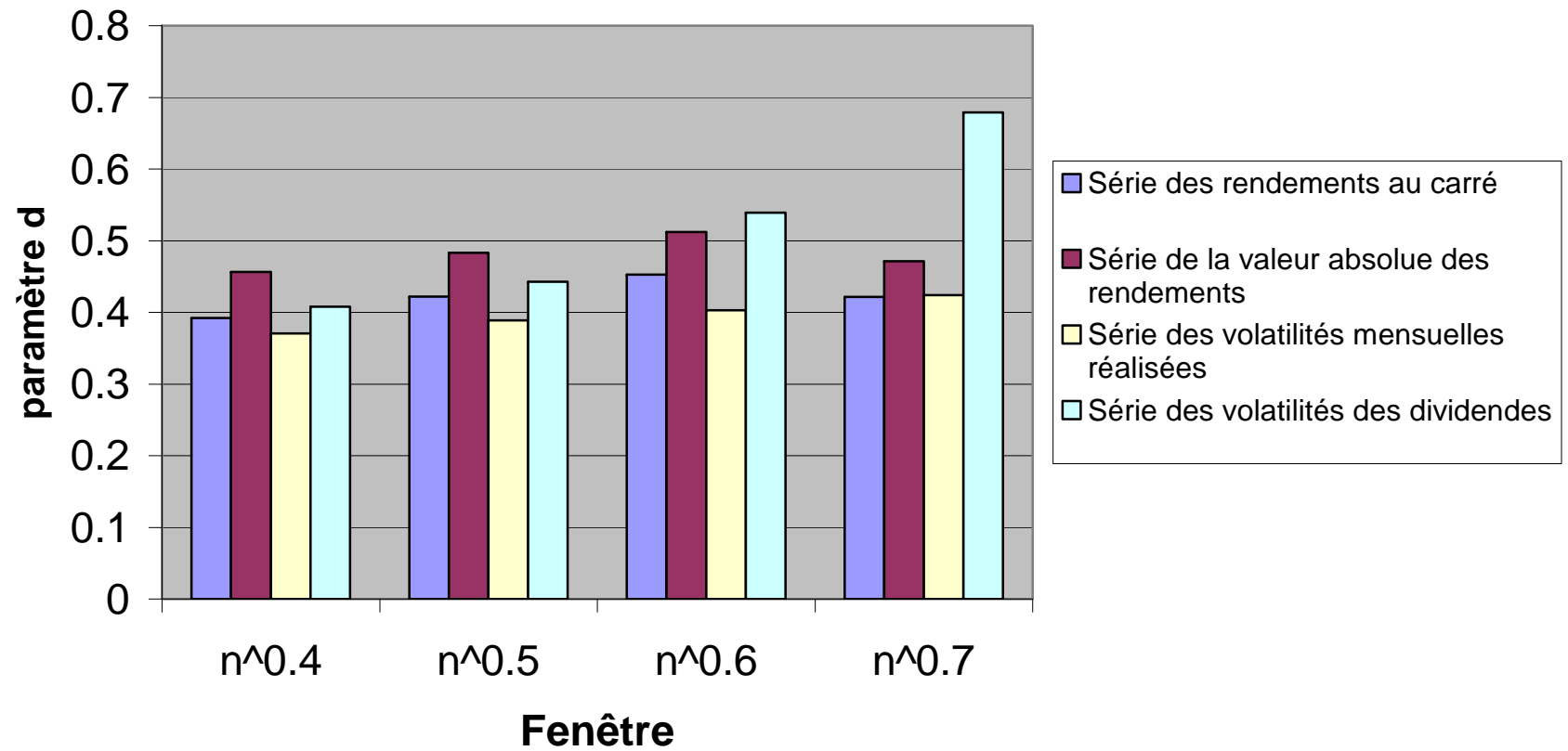
4. Conclusion

Le modèle d'équilibre partiel avec une spécification MSM du processus des dividendes reproduit le fait empirique de longue mémoire dans la volatilité et la volatilité réalisée mais reproduit plus ou moins bien les observations empiriques sur la dépendance de long terme entre les rendements futurs et les volatilités passées réalisés. Bien que le modèle utilisé à une performance questionnable dans la reproduction du dernier fait empirique, d'autres recherches comme l'utilisation du vrai modèle et/ou une investigation plus poussée dans sur des séries financières de longueurs différentes pourraient peut-être améliorer la reproduction du fait par le modèle. Cette recherche était une étude statistique pour évaluer la performance du MSM dans la reproduction des faits empiriques. Alors, il serait peut-être intéressant dans un avenir prochain de lier les causes empiriques de cette relation aux composantes du modèle pour avoir une plus grande connaissance des leviers ou des processus qui contrôlent le phénomène.

5. Annexe

Partie analyse longue mémoire

Analyse longue mémoire

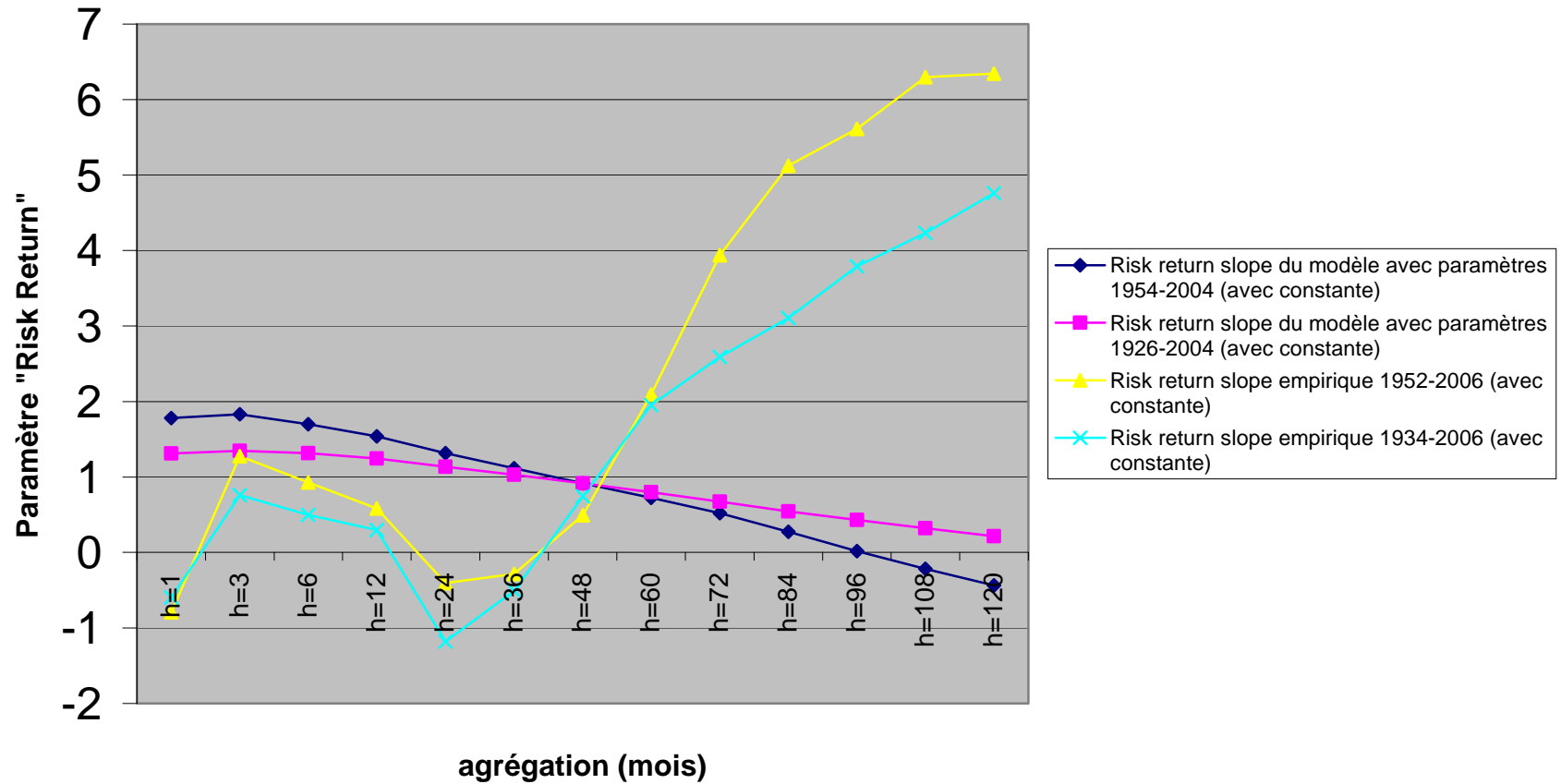


<i>Série des rendements au carré</i>					<i>Série des volatilités des dividendes</i>				
	with n ^{0.4}	with n ^{0.5}	with n ^{0.6}	with n ^{0.7}		with n ^{0.4}	with n ^{0.5}	with n ^{0.6}	with n ^{0.7}
Moyenne	0.392203	0.422064	0.452381	0.421344	Moyenne	0.4080	0.4426	0.5393	0.6790
Erreur	0.002607	0.001748	0.001271	0.000901	Erreur	0.0031	0.0020	0.0015	0.0011
Médiane	0.38695	0.41377	0.450105	0.41907	Médiane	0.4096	0.4356	0.5368	0.6785
Mode	0.37027	0.39649	0.42542	0.44447	Mode	0.7174	0.4178	0.4799	0.6451
Écart-type	0.116601	0.078192	0.056832	0.040292	Écart-type	0.1207	0.0779	0.0594	0.0444
Variance échantillonnale	0.013596	0.006114	0.00323	0.001623	Variance échantillonnale	0.0146	0.0061	0.0035	0.0020
Excès d'aplatissement	0.440151	0.478206	1.067377	0.471898	Excès d'aplatissement	0.3987	0.2646	1.5999	0.5251
Asymétrie	0.300729	0.433552	0.40818	0.290343	Asymétrie	0.1924	0.3414	0.5792	0.2375
Portée	0.876642	0.57974	0.52144	0.28973	Portée	0.8851	0.5254	0.4868	0.3398
Minimum	0.001229	0.19224	0.26735	0.29417	Minimum	-0.0055	0.2187	0.3755	0.5191
Maximum	0.87787	0.77198	0.78879	0.5839	Maximum	0.8796	0.7441	0.8622	0.8590

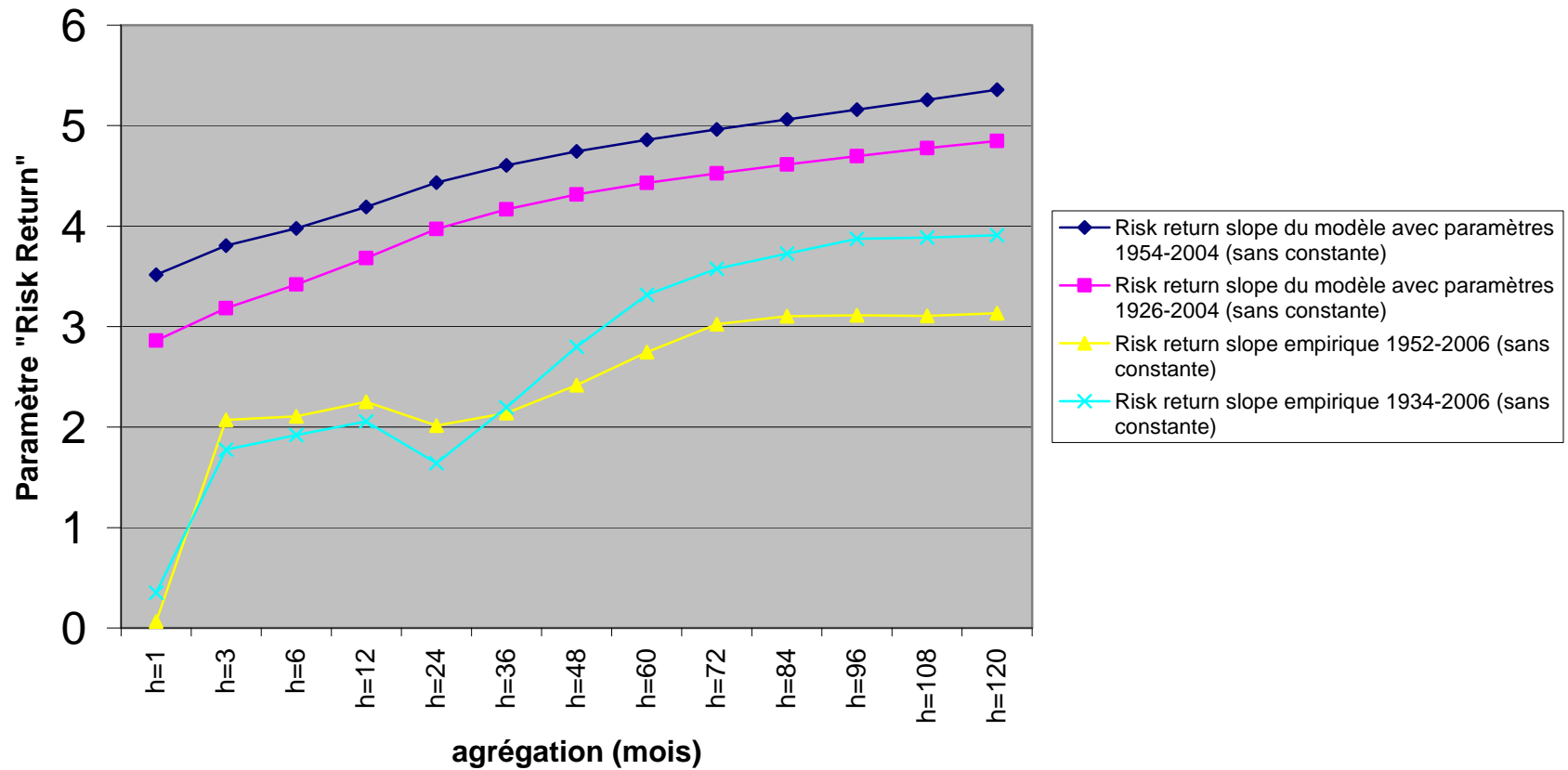
<i>Série de la valeur absolue des rendements</i>					<i>Série des volatilités mensuelles réalisées</i>				
	with n^0.4	with n^0.5	with n^0.6	with n^0.7		with n^0.4	with n^0.5	with n^0.6	with n^0.7
Moyenne	0.4561	0.4834	0.5123	0.4714	Moyenne	0.3705	0.3889	0.4030	0.4241
Erreur	0.0023	0.0013	0.0009	0.0005	Erreur	0.0051	0.0035	0.0026	0.0019
Médiane	0.4566	0.4821	0.5130	0.4705	Médiane	0.3707	0.3812	0.3987	0.4180
Mode	0.6370	0.4864	0.4775	0.4667	Mode	0.3859	0.3014	0.2832	0.4291
Écart-type	0.1018	0.0598	0.0381	0.0245	Écart-type	0.2284	0.1565	0.1152	0.0869
Variance échantillonnale	0.0104	0.0036	0.0015	0.0006	Variance échantillonnale	0.0522	0.0245	0.0133	0.0076
Excès d'aplatissement	0.0827	0.1213	-0.1567	-0.1020	Excès d'aplatissement	0.7678	0.3168	0.2043	0.6865
Asymétrie	-0.0588	-0.0306	0.0079	0.1427	Asymétrie	-0.0116	0.1662	0.2755	0.5195
Portée	0.7033	0.4462	0.2471	0.1668	Portée	2.0147	1.2082	0.7818	0.6448
Minimum	0.1107	0.2286	0.3951	0.3936	Minimum	-0.6277	-0.1696	0.0665	0.1821
Maximum	0.8140	0.6749	0.6422	0.5604	Maximum	1.3870	1.0386	0.8483	0.8269

**Partie dépendance de long
terme entre les rendements
futurs et les volatilités
passées réalisés**

G1. Comparaison "Risk- return slope" des données empiriques et du MSM (régressions avec constante)



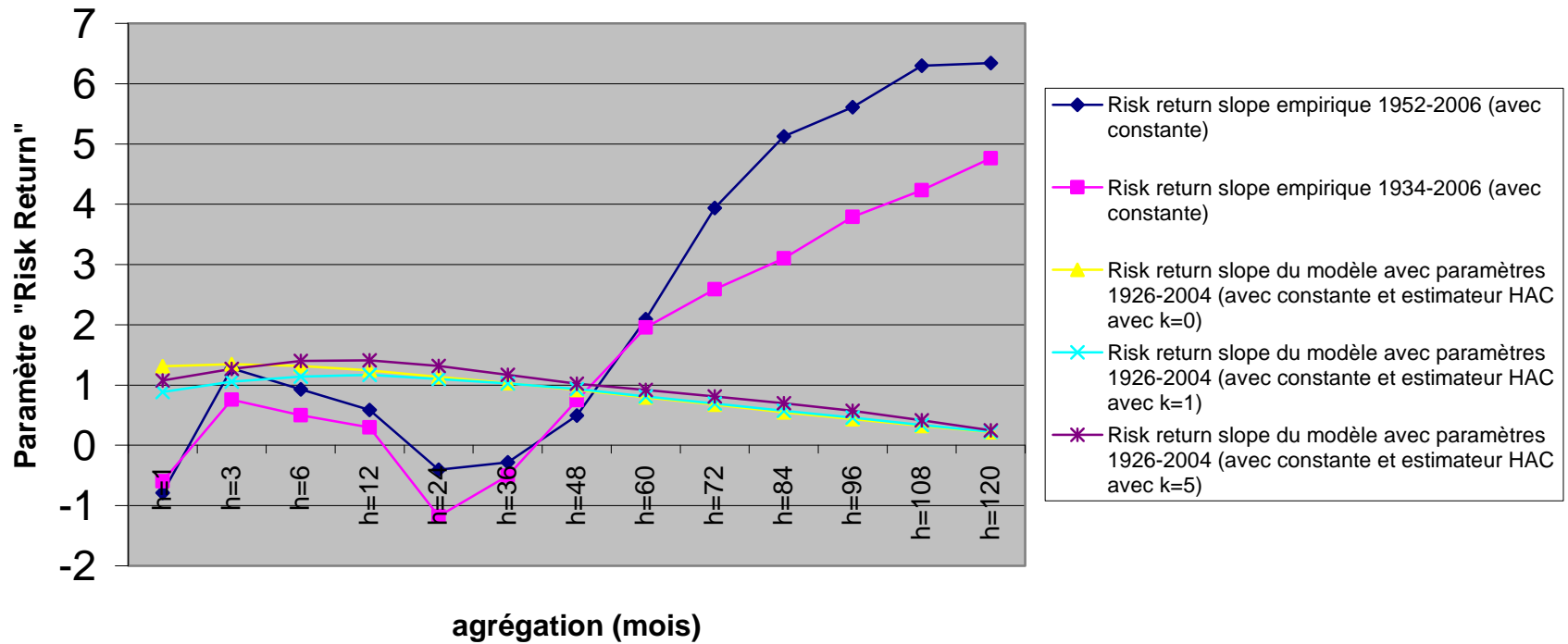
G2. Comparaison "Risk- return slope" des données empiriques et du MSM (régressions sans constante)



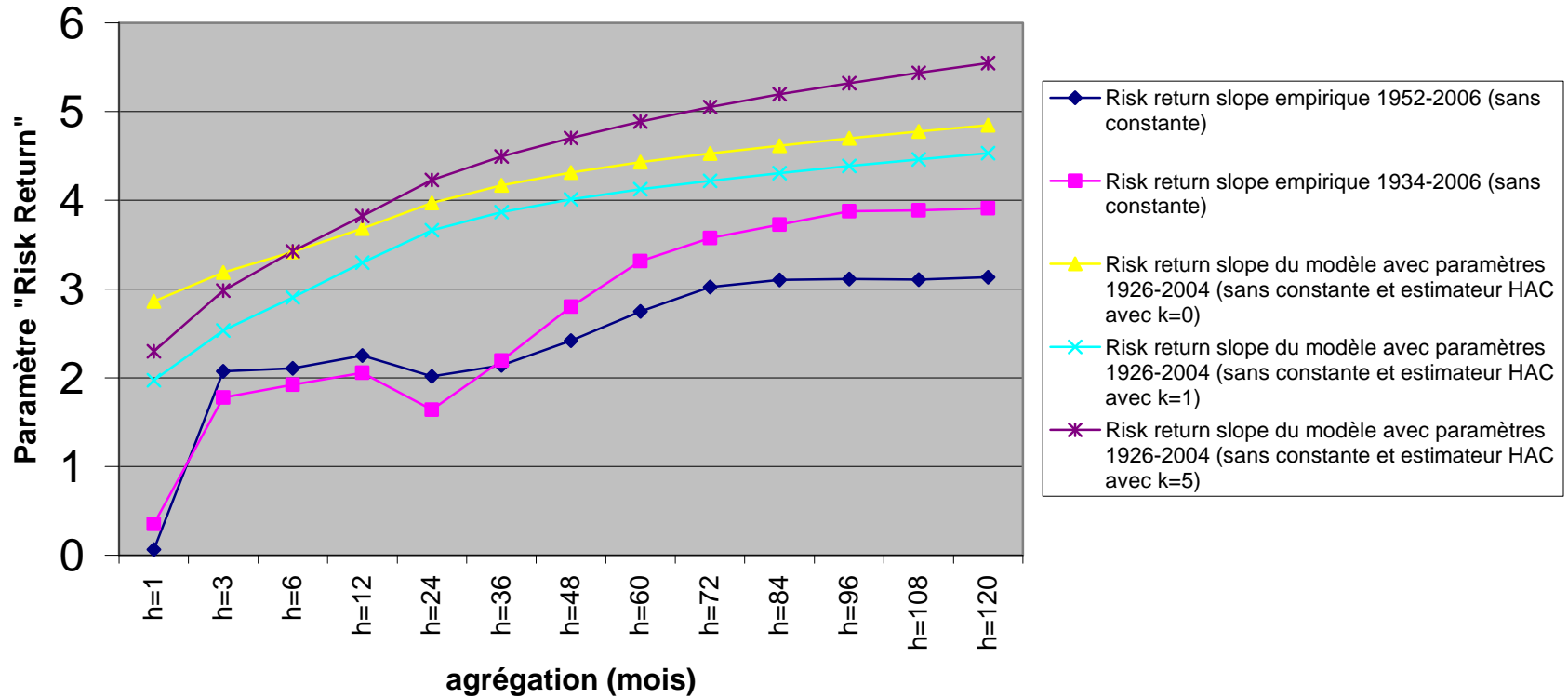
"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1954-2004 (sans constante)													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	3.516	3.807	3.980	4.190	4.435	4.605	4.744	4.859	4.964	5.063	5.160	5.259	5.360
Erreur	0.041	0.040	0.039	0.038	0.039	0.040	0.041	0.042	0.043	0.045	0.046	0.048	0.050
Médiane	3.390	3.647	3.855	4.036	4.288	4.456	4.574	4.658	4.734	4.814	4.887	4.983	5.043
Mode	3.350	5.400	5.417	2.722	4.113	3.290	4.097	3.987	5.137	3.735	5.902	4.482	5.239
Écart-type	1.836	1.780	1.745	1.715	1.738	1.777	1.820	1.872	1.930	1.995	2.067	2.146	2.228
Variance échantillonnale	3.370	3.168	3.043	2.942	3.020	3.158	3.313	3.506	3.726	3.982	4.273	4.605	4.965
Excès d'aplatissement	0.326	0.301	0.276	0.195	0.176	0.227	0.220	0.254	0.355	0.474	0.635	0.784	0.897
Asymétrie	0.351	0.388	0.415	0.421	0.419	0.473	0.490	0.526	0.572	0.624	0.681	0.737	0.787
Portée	12.909	13.653	12.380	12.972	12.425	12.433	12.182	12.145	12.331	13.980	15.081	15.717	16.491
Minimum	-2.806	-2.571	-1.849	-1.908	-1.700	-0.582	-0.020	-0.051	-0.137	-0.264	-0.383	-0.611	-1.082
Maximum	10.103	11.082	10.531	11.064	10.725	11.851	12.162	12.094	12.194	13.716	14.698	15.106	15.409
"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1954-2004 (avec constante)													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	1.779	1.832	1.698	1.539	1.314	1.116	0.916	0.726	0.522	0.276	0.019	-0.217	-0.436
Erreur	0.047	0.045	0.044	0.044	0.047	0.051	0.055	0.059	0.064	0.071	0.078	0.086	0.094
Médiane	1.682	1.761	1.665	1.452	1.208	0.999	0.801	0.670	0.504	0.270	-0.012	-0.215	-0.372
Mode	2.304	1.022	2.682	1.395	1.031	2.266	3.019	4.711	1.026	2.267	-1.346	-4.404	-3.949
Écart-type	2.083	2.003	1.956	1.984	2.095	2.272	2.478	2.660	2.871	3.164	3.500	3.844	4.187
Variance échantillonnale	4.340	4.011	3.825	3.936	4.388	5.162	6.140	7.077	8.240	10.008	12.251	14.773	17.529
Excès d'aplatissement	0.485	0.901	0.548	0.629	0.557	1.127	1.649	1.903	1.738	2.402	3.322	4.313	3.947
Asymétrie	0.299	0.395	0.252	0.331	0.321	0.314	0.243	0.190	0.118	-0.003	-0.093	-0.029	0.026
Portée	17.561	16.040	16.578	16.050	16.961	20.230	23.626	25.068	26.673	33.583	43.148	54.454	53.553
Minimum	-6.486	-5.090	-6.191	-5.364	-5.699	-7.589	-10.626	-11.852	-12.271	-17.697	-24.138	-26.937	-24.343
Maximum	11.075	10.950	10.387	10.686	11.262	12.641	13.000	13.216	14.402	15.886	19.010	27.517	29.210

"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (sans constante)													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	2.862	3.184	3.419	3.682	3.971	4.168	4.314	4.431	4.526	4.614	4.697	4.776	4.847
Erreur	0.034	0.032	0.032	0.033	0.034	0.035	0.036	0.037	0.037	0.038	0.039	0.040	0.041
Médiane	2.732	2.999	3.246	3.519	3.805	3.992	4.102	4.208	4.311	4.402	4.485	4.528	4.598
Mode	3.279	2.622	2.330	3.740	3.746	2.940	4.000	7.466	4.540	4.622	3.506	6.842	3.746
Écart-type	1.505	1.445	1.452	1.460	1.499	1.552	1.599	1.636	1.672	1.710	1.753	1.798	1.845
Variance échantillonnale	2.265	2.089	2.109	2.132	2.248	2.408	2.556	2.676	2.797	2.923	3.072	3.234	3.405
Excès d'aplatissement	1.089	1.121	0.992	0.689	0.563	0.587	0.728	0.756	0.851	0.881	0.857	0.840	0.837
Asymétrie	0.670	0.723	0.708	0.663	0.650	0.645	0.674	0.698	0.735	0.762	0.782	0.803	0.824
Portée	11.053	10.501	10.538	9.560	10.033	10.591	12.206	12.307	12.300	12.014	11.713	11.991	12.268
Minimum	-1.118	-0.443	-0.796	0.187	0.124	0.126	0.369	0.452	0.498	0.628	0.762	0.925	1.048
Maximum	9.935	10.058	9.742	9.747	10.157	10.717	12.575	12.759	12.798	12.642	12.475	12.916	13.316
"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (avec constante)													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	1.310	1.345	1.316	1.246	1.134	1.032	0.918	0.799	0.673	0.546	0.432	0.322	0.218
Erreur	0.033	0.030	0.030	0.029	0.029	0.030	0.032	0.034	0.037	0.039	0.042	0.045	0.048
Médiane	1.247	1.313	1.274	1.165	1.106	0.984	0.877	0.747	0.608	0.506	0.396	0.313	0.216
Mode	2.734	2.233	1.455	3.056	1.419	1.999	1.568	-0.622	2.381	-1.149	1.515	1.145	-1.693
Écart-type	1.491	1.363	1.344	1.312	1.315	1.363	1.434	1.533	1.634	1.747	1.880	2.009	2.131
Variance échantillonnale	2.224	1.857	1.807	1.720	1.730	1.859	2.058	2.349	2.671	3.052	3.533	4.037	4.540
Excès d'aplatissement	1.046	0.475	0.930	0.855	0.733	0.760	0.985	1.576	1.813	1.832	1.675	1.613	1.598
Asymétrie	0.244	0.287	0.426	0.351	0.175	0.172	0.217	0.250	0.233	0.199	0.173	0.110	0.049
Portée	15.916	10.912	11.802	11.221	11.484	11.877	13.064	14.697	15.397	16.843	16.195	16.990	17.489
Minimum	-6.394	-3.158	-2.905	-2.842	-3.150	-3.500	-5.067	-5.979	-6.353	-7.196	-6.490	-7.812	-8.648
Maximum	9.522	7.754	8.897	8.380	8.334	8.377	7.997	8.718	9.045	9.647	9.705	9.178	8.842

G3. Comparaison "Risk- return slope" des données empiriques et du MSM (régressions avec constante et estimateur HAC)



G4. Comparaison "Risk- return slope" des données empiriques et du MSM (régressions sans constante et estimateur HAC)



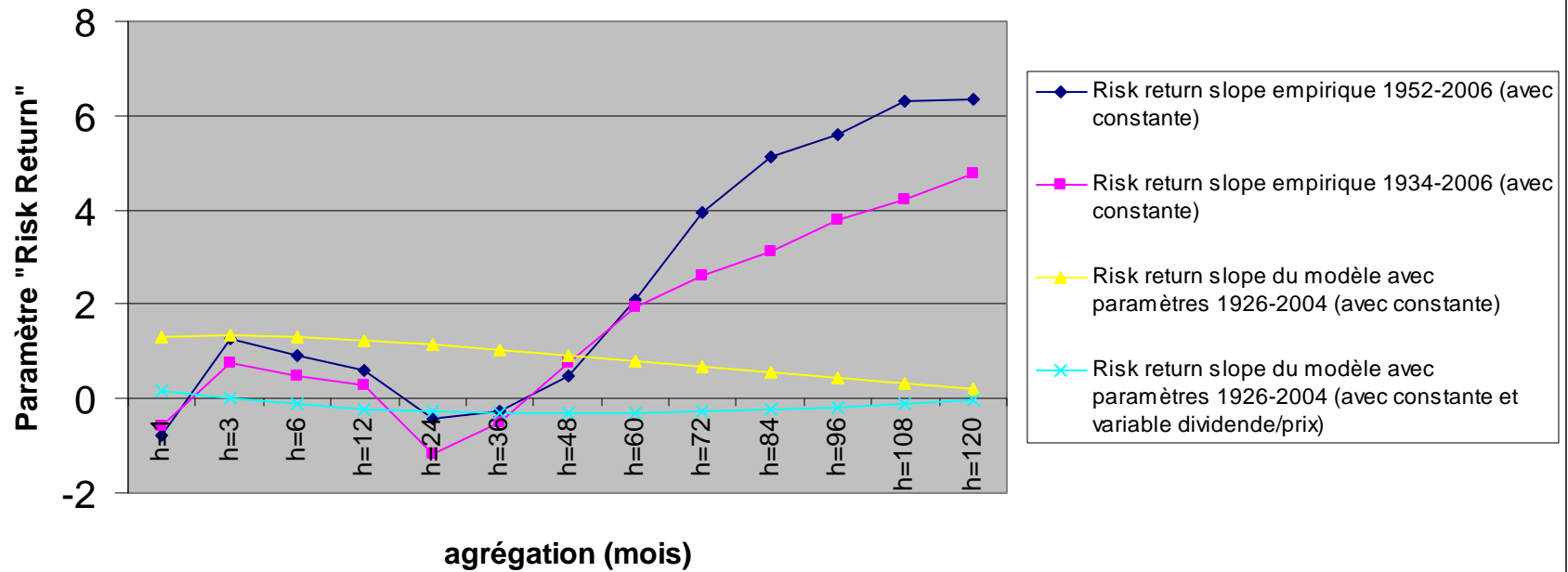
<i>"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (avec constante et estimateur HAC avec k=1)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	0.8861	1.0552	1.1396	1.1679	1.1026	1.0282	0.9329	0.8124	0.6922	0.5709	0.4586	0.3363	0.2222
Erreur	0.0261	0.0263	0.0276	0.0288	0.0305	0.0326	0.0347	0.0365	0.0382	0.0407	0.0438	0.047	0.0499
Médiane	0.8414	1.0085	1.0515	1.0697	0.9872	0.8938	0.8408	0.7367	0.5777	0.4924	0.3856	0.2883	0.2099
Mode	1.0833	1.5512	2.9909	1.4421	1.3424	1.1133	1.1195	1.2633	1.1875	1.6985	1.335	1.3716	1.0585
Écart-type	1.1694	1.1776	1.2324	1.2891	1.3624	1.4598	1.554	1.6307	1.7098	1.8195	1.9587	2.1021	2.2323
Variance échantillonnale	1.3676	1.3867	1.5189	1.6618	1.856	2.1312	2.415	2.6591	2.9233	3.3107	3.8366	4.419	4.9831
Excès d'aplatissement	0.555	0.6031	0.6333	1.5039	1.5807	1.4033	1.6191	1.6912	1.6609	1.7538	2.0378	2.3067	2.549
Asymétrie	0.3211	0.3281	0.4241	0.5457	0.6579	0.5005	0.4326	0.3375	0.2155	0.0955	0.0243	-0.0691	-0.1228
Portée	8.9902	10.212	9.6969	12.246	11.476	11.966	13.344	14.114	14.731	15.934	17.401	21.092	23.85
Minimum	-2.8383	-3.1722	-2.5574	-2.9277	-4.317	-4.6306	-5.2751	-6.3082	-6.9139	-7.626	-7.7965	-11.009	-13.63
Maximum	6.1519	7.0393	7.1395	9.3182	7.1593	7.3354	8.0692	7.8056	7.8173	8.3082	9.6041	10.083	10.22

<i>"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (sans constante et estimateur HAC avec k=1)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	1.9711	2.5336	2.9046	3.2971	3.6625	3.866	4.0103	4.1245	4.2205	4.3067	4.3856	4.4598	4.5311
Erreur	0.0267	0.028	0.0297	0.031	0.0322	0.0332	0.0342	0.035	0.0357	0.0364	0.0372	0.038	0.039
Médiane	1.8584	2.4254	2.7485	3.1133	3.4922	3.7037	3.8436	3.9151	4.0082	4.0667	4.1285	4.1919	4.2412
Mode	1.7765	1.9325	1.9239	2.8932	2.6449	4.1644	4.8852	4.1804	4.0084	4.434	4.7147	3.717	3.8319
Écart-type	1.1944	1.2507	1.3282	1.3866	1.4402	1.4855	1.529	1.5662	1.5963	1.6275	1.6631	1.7014	1.7454
Variance échantillonnale	1.4265	1.5643	1.764	1.9227	2.0742	2.2067	2.3377	2.453	2.5481	2.6486	2.766	2.8947	3.0465
Excès d'aplatissement	0.8013	0.6302	0.5481	0.5669	0.3881	0.5832	0.5855	0.5605	0.539	0.6094	0.6626	0.6035	0.6071
Asymétrie	0.4844	0.5779	0.6203	0.6419	0.6344	0.6693	0.6844	0.6925	0.695	0.7153	0.7393	0.7526	0.7776
Portée	9.9589	9.5543	9.6227	10.129	9.4893	10.274	10.063	10.781	11.463	12.261	12.7	12.587	12.221
Minimum	-2.2967	-1.8594	-1.2849	-0.412	-0.0913	0.195	0.2445	0.1502	0.0911	0.0307	0.033	0.1953	0.4043
Maximum	7.6622	7.6949	8.3378	9.7171	9.398	10.469	10.308	10.931	11.554	12.292	12.733	12.782	12.625

<i>"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (avec constante et estimateur HAC avec k=5)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	1.0757	1.2677	1.4026	1.4124	1.3195	1.1709	1.025	0.9176	0.8124	0.6978	0.57	0.4138	0.2472
Erreur	0.0416	0.0414	0.0419	0.0428	0.046	0.0494	0.0537	0.0588	0.0639	0.0707	0.0757	0.0777	0.0868
Médiane	1.0068	1.1659	1.2941	1.3221	1.2141	0.9994	0.8547	0.7576	0.652	0.5633	0.3525	0.3388	0.1527
Mode	1.3895	1.2617	1.914	2.0417	1.5022	1.6912	2.4773	-1.045	2.076	1.9275	1.9273	0.7611	-0.3472
Écart-type	1.3166	1.3101	1.3258	1.3525	1.4548	1.5608	1.6972	1.8586	2.0222	2.2355	2.3945	2.4561	2.7438
Variance échantillonnale	1.7334	1.7164	1.7576	1.8293	2.1163	2.4361	2.8806	3.4543	4.0894	4.9976	5.7339	6.0324	7.5284
Excès d'aplatissement	0.8734	0.6987	0.2837	0.3997	0.9498	1.1011	1.3532	1.5658	2.4665	7.0632	5.7055	2.4102	7.4464
Asymétrie	0.4559	0.3565	0.3419	0.2939	0.4493	0.3873	0.3977	0.4187	0.5485	0.8833	0.6539	0.0331	-0.5072
Portée	10.364	11.164	8.6073	9.5219	10.756	12.53	14.195	15.025	19.464	29.861	31.543	24.576	38.388
Minimum	-2.8631	-3.767	-2.5811	-2.6381	-3.422	-3.8911	-5.1329	-6.1159	-6.1845	-9.3593	-11.521	-13.781	-23.077
Maximum	7.501	7.3972	6.0262	6.8838	7.3343	8.6392	9.0617	8.9095	13.279	20.502	20.022	10.795	15.311

<i>"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (sans constante et estimateur HAC avec k=5)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	2.2966	2.9828	3.4259	3.8239	4.229	4.4937	4.7034	4.887	5.0519	5.1945	5.3204	5.4369	5.5465
Erreur	0.0326	0.0344	0.0366	0.0384	0.0402	0.0416	0.0427	0.044	0.0453	0.0466	0.0478	0.049	0.0503
Médiane	2.1685	2.7851	3.2343	3.5975	3.9569	4.2271	4.4151	4.5855	4.7383	4.919	5.033	5.1333	5.225
Mode	1.8207	2.3029	4.0847	4.2146	3.0665	3.804	3.4721	3.2649	3.3905	7.7285	5.9557	5.2374	5.5896
Écart-type	1.4563	1.537	1.6351	1.716	1.7992	1.8601	1.9106	1.9658	2.026	2.0832	2.1374	2.1929	2.251
Variance échantillonnale	2.1209	2.3622	2.6736	2.9448	3.237	3.46	3.6506	3.8644	4.1047	4.3397	4.5685	4.8088	5.067
Excès d'aplatissement	0.7056	0.7594	0.4339	0.4233	0.4074	0.4609	0.4517	0.4931	0.5143	0.4923	0.4645	0.4825	0.5355
Asymétrie	0.5251	0.6667	0.6034	0.6398	0.681	0.6869	0.7053	0.7361	0.7546	0.7604	0.7625	0.7731	0.7901
Portée	11.068	11.417	11.112	11.785	11.356	12.397	12.086	12.265	12.336	12.372	12.856	13.508	13.969
Minimum	-3.0642	-1.7187	-1.7664	-1.5584	-0.2237	0.1741	0.3674	0.492	0.6459	0.7875	0.8642	0.863	0.8522
Maximum	8.0036	9.6982	9.3455	10.227	11.132	12.571	12.453	12.757	12.982	13.159	13.72	14.371	14.821

G5. Comparaison "Risk- return slope" des données empiriques et du MSM (régressions avec constante et ratio dividendes-prix)



<i>"Risk return slope" du modèle avec paramètres 1926-2004 (avec constante et variable dividende/prix)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	0.150	0.014	-0.101	-0.218	-0.272	-0.307	-0.326	-0.318	-0.276	-0.235	-0.183	-0.092	-0.021
Erreur	0.052	0.049	0.051	0.055	0.062	0.074	0.084	0.096	0.107	0.118	0.131	0.148	0.164
Médiane	0.153	-0.014	-0.121	-0.236	-0.269	-0.339	-0.384	-0.266	-0.218	-0.278	-0.197	-0.132	-0.107
Mode	-1.820	1.379	-1.251	-2.171	-1.342	-2.415	-1.126	3.280	-1.581	2.113	-0.241	1.717	-3.271
Écart-type	2.022	1.885	1.970	2.116	2.395	2.853	3.257	3.728	4.163	4.585	5.092	5.738	6.350
Variance échantillonnale	4.090	3.553	3.882	4.478	5.735	8.142	10.606	13.897	17.328	21.026	25.926	32.921	40.318
Excès d'aplatissement	0.566	1.437	0.982	0.930	1.307	1.492	1.317	1.815	2.453	3.664	4.514	4.819	4.374
Asymétrie	0.097	0.232	0.016	0.046	0.159	0.109	0.068	0.007	-0.094	-0.050	-0.073	0.038	0.240
Portée	14.199	19.011	17.395	16.849	20.668	24.870	27.513	35.080	46.193	57.213	64.035	71.640	74.918
Minimum	-7.194	-6.988	-7.888	-7.666	-10.860	-11.939	-12.725	-16.270	-25.638	-32.964	-39.198	-43.587	-43.549
Maximum	7.005	12.023	9.507	9.184	9.808	12.931	14.788	18.810	20.555	24.249	24.837	28.053	31.369
<i>Paramètre de la variable dividende/prix du modèle avec paramètres 1926-2004 (avec constante et variable dividende/prix)</i>													
	<i>h=1</i>	<i>h=3</i>	<i>h=6</i>	<i>h=12</i>	<i>h=24</i>	<i>h=36</i>	<i>h=48</i>	<i>h=60</i>	<i>h=72</i>	<i>h=84</i>	<i>h=96</i>	<i>h=108</i>	<i>h=120</i>
Moyenne	0.005	0.015	0.027	0.050	0.083	0.108	0.125	0.133	0.132	0.125	0.112	0.089	0.066
Erreur	0.000	0.000	0.001	0.001	0.003	0.005	0.008	0.011	0.015	0.019	0.023	0.028	0.034
Médiane	0.005	0.015	0.028	0.050	0.087	0.117	0.134	0.148	0.156	0.150	0.122	0.104	0.067
Mode	0.006	0.014	0.047	0.055	0.124	0.225	0.192	-0.147	0.458	-0.970	-1.681	2.286	-0.724
Écart-type	0.004	0.010	0.021	0.046	0.111	0.200	0.304	0.428	0.570	0.719	0.886	1.091	1.321
Variance échantillonnale	0.000	0.000	0.000	0.002	0.012	0.040	0.092	0.183	0.325	0.517	0.785	1.191	1.745
Excès d'aplatissement	0.036	0.399	1.186	1.585	2.105	2.950	1.694	1.880	2.145	2.376	2.349	1.898	1.667
Asymétrie	0.137	-0.091	-0.175	-0.278	-0.426	-0.480	-0.347	-0.267	-0.235	-0.407	-0.446	-0.353	-0.211
Portée	0.023	0.076	0.181	0.457	1.126	2.220	2.651	4.018	5.433	7.207	9.071	10.823	12.049
Minimum	-0.006	-0.023	-0.076	-0.244	-0.679	-1.316	-1.327	-1.857	-2.506	-4.165	-5.759	-6.559	-6.622
Maximum	0.018	0.053	0.105	0.214	0.447	0.904	1.324	2.161	2.927	3.042	3.312	4.264	5.427

Références

- (1) TG Andersen, T Bollerslev, FX Diebold & P Labys , The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. - Journal of the American Statistical Association, 2001 - Journal of the American Statistical Association, 2001
- (2) Andersen, Bollerslev, Diebold & Labys, Modeling and Forecasting Realized Volatility - Econometrica, 2003 - Blackwell Synergy
- (4) F.M. Bandi & B. Perron (June 2007), Long-run risk-return trade-offs, Working paper (à publier)
- (5) Bansal, Ravi, and Amir Yaron (2004), Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles, Journal of Finance 49, 1481-1509.
- (6) Baillie, R.T., 1996. Long memory processes and fractional integration in econometrics. Journal of Econometrics 73, 5–59.
- (7) Calvet, Laurent E., and Adlai J. Fisher (2001), Forecasting Multifractal Volatility, Journal of Econometrics 105, 27-58.
- (8) Calvet, Laurent E., and Adlai J. Fisher (2002), Multifractality in Asset Returns: Theory and Evidence, Review of Economics and Statistics 84, 381-406.
- (9) Calvet, Laurent E., and Adlai J. Fisher (2004), How to Forecast Long-Run Volatility: Regime-Switching and the Estimation of Multifractal Processes, Journal of Financial Econometrics 2, 49-83.
- (10) Calvet, Laurent E., and Adlai J. Fisher (2005), Multifrequency News and Stock Returns, NBER Working Paper 11441.
- (11) Calvet, Laurent E., Adlai J. Fisher, and Samuel B. Thompson (2006), Volatility Comovement: A Multifrequency Approach, Journal of Econometrics 131, 179-215.
- (12) Campbell (1996), Understanding Risk and Return, Journal of Political Economy 104, 298-345.
- (13) Campbell, John Y. (2003), Consumption-Based Asset Pricing, in G. Constantinides and M. Harris eds., Handbook of the Economics of Finance, Amsterdam: North-Holland.

- (14) Campbell, John Y., and John Cochrane (1999), By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior, *Journal of Political Economy* 107, 205-251.
- (15) Epstein, Larry, and Stanley Zin (1989), Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework, *Econometrica* 57, 937-968.
- (16) Fama, Eugene, and Kenneth French (2002), The Equity Premium, *Journal of Finance* 57, 637-659.
- (17) Geweke, S Porter-Hudak (1983), The estimation and application of long memory time series models, Geweke, S Porter-Hudak - *Journal of Time Series Analysis*,
- (18) Klaassen, F. (2002). "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH." *Empirical Economics* 27, 363–394.
- (19) Lettau, M. and S.C. Ludvigson (2001a). Consumption, aggregate wealth, and expected stock returns. *Journal of Finance* 56, 815-849.
- (20) Lettau, M. and S.C. Ludvigson (2001b). Resurrecting the (C)CAPM: a cross-sectional test when risk premia are time-varying. *Journal of Political Economy* 109, 1238-1287.
- (21) Mandelbrot, B., Calvet, L., Fisher, A., 1997, Large deviation theory and the distribution of price changes. Cowles Foundation Discussion Paper #1165.
- (22) Mandelbrot, B., Fisher, A., Calvet, L., 1997. Multifractality of Deutsche Mark/US dollar exchange rate. Cowles Foundation Discussion Paper #1166.
- (23) Mandelbrot, B., Fisher, A., Calvet, L., 1997. A multifractal model of asset returns. Cowles Foundation Discussion Paper #1164.
- (24) Robinson, P.M. (1994a) Semiparametric analysis of long-memory time series, *Annals of Statistics* 22, 515–539.
- (25) Robinson, P.M. (1994b) Rates of convergence and optimal spectral bandwidth for long range dependence, *Probability Theory and Related Fields* 99, 443– 473.
- (26) Robinson, P.M. (1994c) Time series with strong dependence, *Advances in Econometrics: Sixth World Congress*, vol. 1, pp. 47–95. Cambridge: Cambridge University Press.

(27) Robinson, P.M. (1995a) Log-periodogram regression of time series with long range dependence, *Annals of Statistics* 23, 1048–1072.

(28) Robinson, P.M. (1995b) Gaussian semiparametric estimation of long range dependence, *Annals of Statistics* 23, 1630–1661.