

Université de Montréal

Éléments réguliers du groupe H_4

par

Dimitri Zuchowski

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Algèbre

octobre 2004



Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Éléments réguliers du groupe H_4

présenté par

Dimitri Zuchowski

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

SABIDUSSI Gert

(président-rapporteur)

BROER Abraham

(directeur de recherche)

PATERA Jiri

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

RÉSUMÉ

Ce mémoire présente le calcul des nombres réguliers pour le groupe de Coxeter de type H_4 laissé au lecteur dans l'article de T. A. Springer *Regular Elements of Finite Reflection Groups*. Pour faire cela et pour comprendre les résultats de Springer liés aux éléments réguliers, on va devoir introduire quelques idées sur les groupes de réflexion et la théorie des invariants. Les systèmes de racines et les séries de Hilbert sont deux exemples de telles idées. De plus, puisqu'on s'intéressera plus particulièrement au groupe H_4 , on trouvera ses classes de conjugaison tout en exposant son lien avec le 120-cellule.

MOTS CLÉS

Groupe de Réflexion, Groupe de Coxeter, Groupe de Coxeter de type H_4 , 120-Cellules, Éléments de Coxeter, Éléments Réguliers, Système de Racines, Série de Hilbert, Théorie des invariants, Algèbre Linéaire.

ABSTRACT AND KEY WORDS

ABSTRACT

This thesis explicits a way to find the regular numbers for the Coxeter group H_4 which was left to the reader in T. A. Springer's article *Regular Elements of Finite Reflexion Groups*. To do this and to better understand the results of Sringer concerning regular elements, we will introduce some ideas from reflexion groups and invariant theory. Root system and Hilbert series are examples of such ideas. Furthermore, since we are particulary interested in the group H_4 , we will find its conjugacy classes while exposing its link to the 120-cell.

KEY WORDS

Reflexion Group, Coxeter Group, Coxeter Group of type H_4 , 120-Cell, Coxeter Elements, Regular Elements, Root System, Hilbert Series, Invariant Theory, Linear Algebra.

REMERCIEMENTS

Je voudrais commencer par remercier chaleureusement mon directeur de recherche, Bram Broer, pour avoir su cibler mes intérêts, pour m'avoir inspiré, pour avoir été si généreux de son temps et pour m'avoir soutenu financièrement.

Un gros merci à Gabriel Chênevert pour son aide, ses conseils et corrections pour mon mémoire mais surtout pour sa bonne humeur et son humour qui ont fait de notre bureau un endroit agréable à vivre.

Merci aussi à Christiane Zuchowski et Françoise Cloutier qui m'ont aidé à maintes reprises avec le français.

Je tiens aussi à remercier mes amis : Sébastien Manka, Olivier Rousseau, Hughes Boulanger, Christian Côté, Etienne Dauphin, Jérôme Fournier, Étienne Ayotte-Sauvé, Daniel Audet, Nicolas Beauchemin, Alexandre Girouard, Rémi Lelerc, Baptiste Chantraine, Clément Hyvrier, Anik Soulière, Émilie Duheme et Julie Picard qui ont tous contribué à rendre mes études stimulantes et agréables.

Merci à Gert Sabidussi et Jiri Patera pour m'avoir éclairé sur certains points de mon mémoire.

Un gros merci à toute ma famille pour tout.

Finalement, mais non le moindre, merci à Andréanne Cloutier pour son amour, sa patience et son support mais surtout pour avoir mis un soleil dans ma vie.

Table des matières

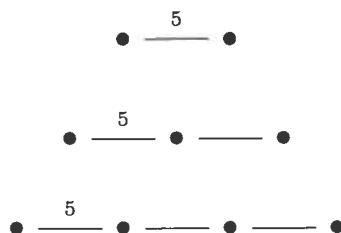
| | |
|---|-----|
| Résumé et mots clés | iii |
| Résumé..... | iii |
| Mots clés | iii |
| Abstract and key words | iv |
| Abstract | iv |
| Key words..... | iv |
| Remerciements | v |
| Introduction | 1 |
| Chapitre 1. Groupes de réflexion | 3 |
| 1.1. Introduction | 3 |
| 1.2. Groupes de réflexions | 4 |
| 1.3. Systèmes de racines..... | 6 |
| 1.4. Groupes de Coxeter..... | 11 |
| 1.5. Groupes de Weyl | 17 |
| 1.6. Éléments de Coxeter | 19 |
| 1.7. Sous-groupes paraboliques | 21 |
| 1.8. Éléments réguliers | 24 |
| 1.9. Nombre de Coxeter | 27 |

| | | |
|--------------------|---|----|
| Chapitre 2. | H_4 | 30 |
| 2.1. | Introduction | 30 |
| 2.2. | H_3 | 30 |
| 2.3. | H_4 et les quaternions..... | 32 |
| 2.4. | Classes de conjugaison du groupe H_4 | 35 |
| Chapitre 3. | Théorie des invariants | 40 |
| 3.1. | Introduction | 40 |
| 3.2. | Quelques propriétés de $S(V)^G$ | 42 |
| 3.3. | Série de Hilbert (ou de Poincaré)..... | 44 |
| 3.4. | Théorie des invariants et groupes de réflexion | 46 |
| 3.5. | Invariant gauche | 50 |
| 3.6. | Série de Hilbert de $[S(V) \otimes A(V)]^G$ | 55 |
| Chapitre 4. | Valeurs propres | 60 |
| 4.1. | Introduction | 60 |
| 4.2. | Valeurs propres d'éléments d'un groupe linéaire | 60 |
| Chapitre 5. | Nombre régulier | 72 |
| 5.1. | Introduction | 72 |
| 5.2. | Calcul des nombres réguliers pour A_n | 72 |
| 5.3. | Calcul des nombres réguliers pour H_4 | 74 |
| 5.4. | Généralisation | 78 |
| Annexe A. | Formule de dérivation en chaîne | 80 |

| | |
|---|----|
| Annexe B. Code en mathematica | 84 |
| B.1. Code utilisé pour les tableaux 5.2.1 et 5.2.2 | 84 |
| B.2. Code utilisé pour vérifier que les éléments de C_{21} sont réguliers ... | 85 |
| Bibliographie | 87 |

INTRODUCTION

Les groupes de réflexion finis jouent un rôle important en mathématique. Par exemple, lorsqu'un groupe de réflexion fini stabilise un treillis, on obtient un groupe de Weyl. Les groupes de Weyl ont une grande importance dans la théorie des groupes de Lie car ils sont liés aux algèbres de Lie semi-simples. Or ce n'est pas tous les groupes de réflexion finis qui sont de Weyl. Les groupes diédraux D_n pour $n \geq 7$ et les icosiens H_2, H_3 et H_4



ne stabilisent pas de treillis. Ces groupes de réflexion non-cristallographiques ne sont pas sans importance pour autant. En fait, ils jouent un rôle important en physique dans l'étude des quasi-cristaux, voir [L,P,S]. De plus, le groupe H_4 , qui nous intéresse plus particulièrement ici, est étroitement lié au plus gros groupe de Lie exceptionnel E_8 , ou plus particulièrement $E_8 \times E_8$, qui à son tour, joue un rôle important en théorie des supercordes en physique.

Lorsqu'on étudie les groupes de Coxeter, les éléments de Coxeter y jouent un rôle de premier plan. Dans l'article de T.A. Springer intitulé *Regular Elements of Finite Reflection Groups*, il généralise le concept d'élément de Coxeter à celui d'élément régulier. L'ordre d'un élément de Coxeter joue aussi un rôle important dans la théorie. Or, contrairement aux éléments de Coxeter, les éléments réguliers d'un groupe de réflexion n'ont pas tous le même ordre. Dans son article, Springer trouve les nombres réguliers des groupes de réflexion irréductibles finis. Or il ne

fait qu'énoncer les nombres réguliers pour le groupe H_4 sans expliciter comment il s'y prend pour les trouver. Nous allons donc, dans ce mémoire, expliciter les détails nécessaires pour trouver les nombres réguliers du groupe H_4 .

Le chapitre 1 sera consacré à introduire les notions nécessaires entourant les groupes de réflexion. Au deuxième chapitre, on va entreprendre de mieux comprendre le groupe H_4 , qui est de taille non négligeable (14400 éléments). Pour faire cela, on va trouver toutes ses classes de conjugaison. Nous enchaînerons au chapitre 3 avec une petite introduction à la théorie des invariants et nous y verrons aussi à quel point cette théorie se simplifie dans le cas où le groupe est de pseudo-réflexion. Ce chapitre servira aussi de prélude au chapitre suivant puisque plusieurs des résultats qui seront démontrés, le sont dans cette optique. Le chapitre 4 est le coeur théorique du mémoire. On y analysera les espaces propres associés à des vecteurs propres réguliers. En fait, ce chapitre reprend les résultats principaux de l'article de Springer, tout en détaillant un peu plus les démonstrations. Finalement, au chapitre 5, on va faire le calcul des nombres réguliers pour H_4 .

Chapitre 1

GROUPES DE RÉFLEXION

1.1. INTRODUCTION

À la fin de son oeuvre monumentale, Euclide conclut avec le fait qu'il n'existe que 5 polyèdres réguliers convexes. Ce résultat est assez surprenant étant donné qu'il existe des polygones réguliers avec autant de côtés qu'on le désire. Ces polyèdres sont : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

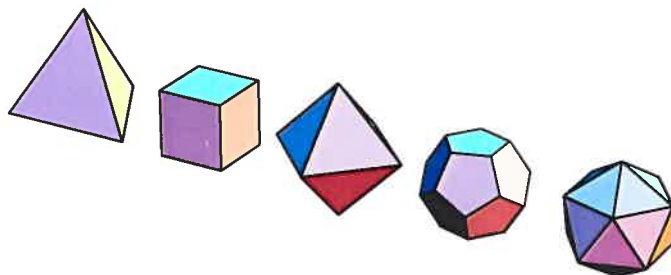


FIG. 1. Les polyèdres réguliers convexes

Avant l'apparition des mathématiques modernes, on étudiait ces objets en regardant les angles entre deux arêtes, l'aire des faces, le volume des solides, etc. De nos jours, il est plutôt coutume d'analyser les transformations de l'espace qui laissent ces objets invariants. La figure suivante donne un exemple d'une telle transformation. On y voit un cube et un plan de réflexion qui le fixe.

Le but de ce point de vue est de permettre de jongler entre l'algèbre et la géométrie. L'ensemble des transformations qui laissent un objet invariant donne

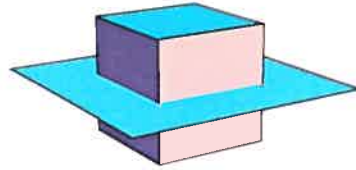


FIG. 2. Cube et plan de réflexion

une structure algébrique. Nos connaissances en géométrie nous permettent de déduire de l'information sur la structure algébrique et vice versa. Le fait que l'algèbre vienne au secours de la géométrie est d'autant plus intéressant lorsqu'on passe aux dimensions supérieures à 3 puisque nos sens ne nous permettent pas d'avoir une bonne intuition de ce qui s'y passe.

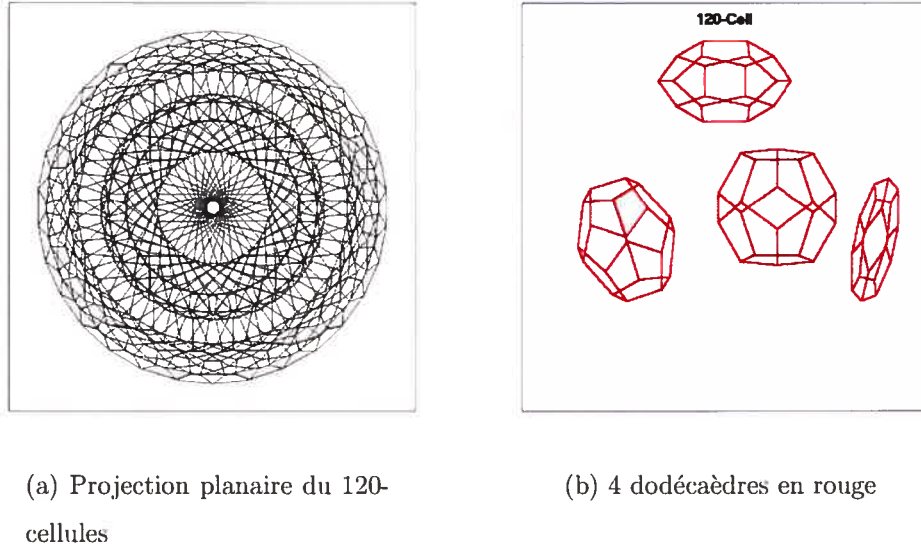
Dans cet ouvrage, nous allons nous attarder plus particulièrement à un polytope (généralisation de polyèdre en dimensions supérieures) régulier en 4 dimensions nommé 120-cellules ou hecatonicosaèdre. Ce polytope possède 120 3-cellules (face en 3 dimensions) formées de dodécaèdres. On peut voir une projection du 120-cellules dans le plan à la figure 3.

1.2. GROUPES DE RÉFLEXIONS

Dans cette section, on va formaliser le concept de réflexion et la structure algébrique que l'on construit avec.

Définition 1.2.1. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Une **réflexion** est une transformation linéaire qui fixe les points d'un hyperplan H , et qui envoie chaque élément $x \in H^\perp$ sur $-x$.*

Il est possible de définir, un peu plus généralement, une réflexion sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps quelconque. Il est à noter que certains auteurs appellent cette généralisation une pseudo-réflexion tandis que d'autres



(a) Projection planeaire du 120-cellules

(b) 4 dodécaèdres en rouge

FIG. 3

l'appellent tout simplement réflexion. Dans cet ouvrage, nous ferons cette distinction.

Définition 1.2.2. Une *pseudo-réflexion* est un automorphisme linéaire d'un espace vectoriel V de dimension finie qui n'est pas l'identité et qui fixe un hyperplan $H \subset V$ point par point.

En remarquant qu'une réflexion s est en fait élément de $GL(V)$ ou plus précisément élément de $O(V)$, il est naturel de définir un groupe de réflexion de la manière suivante.

Définition 1.2.3. Un *groupe de réflexion* (ou de *pseudo-réflexion*) est un groupe $G \subset GL(V)$ ayant comme générateurs des réflexions (respectivement des pseudo-réflexions) dont l'hyperplan invariant passe par 0 .

On dira qu'un groupe de réflexion $W \subset O(V)$ est réductible s'il peut s'écrire comme $W = W_1 \times W_2$ où $W_1 \subset O(V_1)$ et $W_2 \subset O(V_2)$ sont des groupes de réflexion non triviaux engendrés par des réflexions de W et que $V = V_1 \times V_2$. Sinon, on dira qu'il est irréductible.

Exemple 1.2.1. Si on considère \mathbb{R}^2 et deux droites (hyperplan), passant par l'origine, ayant un angle de $\frac{2\pi}{k}$ entre les deux et qu'on considère le groupe engendré par ces deux hyperplans de réflexion, on obtient le groupe diédral D_k qui est en fait le groupe de symétrie d'un k -gone régulier.

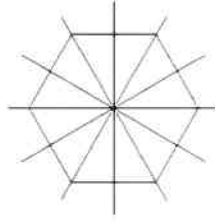


FIG. 4. Hexagone et droite de réflexion

Soit $\alpha \in V$ où $\alpha \neq 0$, on va noter H_α l'hyperplan perpendiculaire à α (i.e. $H_\alpha = \{x \in V \mid (x, \alpha) = 0\}$). On peut donc redéfinir une réflexion comme étant l'application linéaire suivante.

$$s_\alpha : V \rightarrow V \text{ t.q. } s_\alpha(x) = x \text{ si } x \in H_\alpha \text{ et } s_\alpha(\alpha) = -\alpha$$

Voici quelques propriétés intéressantes de s_α :

(1)

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x, \alpha)\alpha}{(\alpha, \alpha)} \quad \forall x \in V$$

(2)

$$(s_\alpha(x), s_\alpha(y)) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$$

(3)

$$\det(s_\alpha) = -1$$

(4)

$$\phi \in O(V) \implies \phi(H_\alpha) = H_{\phi(\alpha)} \text{ et } \phi \circ s_\alpha \circ \phi^{-1} = s_{\phi(\alpha)}$$

1.3. SYSTÈMES DE RACINES

Les systèmes de racines nous permettent d'utiliser l'algèbre linéaire pour déduire des résultats sur les groupes de réflexion. Soit W un groupe de réflexion. À chaque réflexion $s \in W$ on peut y associer l'hyperplan invariant H . Et à chaque hyperplan H , on peut y associer ses deux vecteurs unitaires perpendiculaires. Notons $\Delta = \{\alpha \in V \mid s_\alpha \text{ est une réflexion de } W \text{ et } \|\alpha\| = 1\}$. En fait, on obtient un ensemble de vecteurs qui détermine entièrement le groupe W puisque

$$W = \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle.$$

On peut remarquer que la norme des vecteurs (ici elle est de 1) importe peu. Ce qui importe, est de prendre un vecteur perpendiculaire α à chaque hyperplan H et moins ce vecteur. Ce qui nous amène à la définition plus générale suivante :

Définition 1.3.1. Un **système de racines** est un ensemble fini de vecteurs non nuls $\Delta \subset V$ tel que les deux propriétés suivantes sont satisfaites.

$$(1) \alpha \in \Delta \Rightarrow (\lambda\alpha \in \Delta \Leftrightarrow \lambda = \pm 1)$$

$$(2) \alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow s_\alpha(\beta) \in \Delta$$

On peut raffiner un peu le concept de système de racines afin de ne conserver que l'essentiel de l'information et aussi, pour simplifier quelques détails techniques.

Définition 1.3.2. Étant donné un système de racines $\Delta \subset V$, on dit que $\Sigma \subset \Delta$ est un **système fondamental** ou **système simple** de Δ si

(1) Σ est linéairement indépendant.

(2) tout $\alpha \in \Delta$ est une combinaison linéaire d'éléments de Σ où tous les coefficients sont soit tous positifs ou tous négatifs.

Exemple 1.3.1. Si on considère le groupe de réflexion D_6 vu à la section précédente, on a les vecteurs perpendiculaires aux droites de réflexion de la figure 5., qui forment un système de racines. On y a aussi explicité un système simple.



FIG. 5. Système de racine et système simple associé pour le groupe D_6

L'exemple précédent met en évidence que les racines n'ont pas besoin d'être de même norme.

A priori, il n'est pas évident du tout que pour un système de racines Δ donné, il existe un système simple Σ de Δ . Que l'on puisse extraire de Δ un sous-ensemble

linéairement indépendant est trivial, mais qu'il y en existe un avec la propriété (2) l'est beaucoup moins. Pour une preuve de l'existence d'un système simple, voir [K] p.37.

Définition 1.3.3. Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ un système simple pour Δ et $\beta \in \Delta$.

$\beta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$. On appelle **hauteur de β** :

$$h(\beta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

On peut remarquer ici que $h(\alpha)$ est bien défini puisque les α_i sont linéairement indépendants. La condition (2) de la définition d'un système simple nous dit, entre autre, que les hauteurs des racines sont soit négatif soit positif. On dira donc qu'une racine $\alpha \in \Delta$ est positive si $h(\alpha)$ est positif ou négative si $h(\alpha)$ est négatif. En particulier, les racines d'un système simple, sont toujours positives.

La proposition suivante, nous montre que, du point de vue des groupes de réflexion, on ne perd pas d'information si on utilise un système simple Σ associé à Δ plutôt que Δ lui-même pour décrire un groupe.

Proposition 1.3.1. Étant donné un système fondamental Σ de Δ , on a que

$$W = W(\Delta) := \langle s_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle$$

est engendré par $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$

DÉMONSTRATION. Soit W_0 le sous-groupe de W engendré par $\{s_\alpha \mid \alpha \in \Sigma\}$. Soit s_α avec $\alpha \in \Delta$. Montrons que $s_\alpha \in W_0$.

On a que $\alpha = \varphi \cdot \alpha_t$ pour un certain $\varphi \in W_0$ et $\alpha_t \in \Sigma$. Pour voir ceci on peut réduire au cas où $\alpha > 0$ car sinon $-\alpha = \varphi \cdot (-\alpha_t) = (\varphi s_{\alpha_t}) \cdot \alpha_t$. Procédons par induction sur $h(\alpha)$. Si $h(\alpha) = 1$ alors $\alpha \in \Sigma$ et on peut choisir $\varphi = 1$. Si $h(\alpha) > 1$ on a que $\alpha \in \Delta_+ - \Sigma$ et donc dans l'expression $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i$, les coefficients sont tous non-négatifs et au moins deux des λ_i seront > 0 . On peut choisir $\alpha_t \in \Sigma$ tel que $(\alpha, \alpha_t) > 0$ car sinon $(\alpha, \alpha) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\alpha, \alpha_i) \leq 0$ ce qui forcerait $(\alpha, \alpha) = 0$ et

donc $\alpha = 0$. Il découle de $s_{\alpha_t} \cdot \alpha = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha_t)\alpha_t}{(\alpha_t, \alpha_t)}$ que

$$(1) \quad s_{\alpha_t} \cdot \alpha > 0$$

$$(2) h(s_{\alpha_t} \cdot \alpha) < h(\alpha).$$

Par induction, $s_{\alpha_t} \cdot \alpha = \varphi \cdot \alpha_{t'}$ pour un $\varphi \in W_0$ et donc $\alpha = (s_{\alpha_t} \varphi) \cdot \alpha_{t'}$.

Par la dernière propriété des réflexions de la section 1.2 on a que $\alpha = \varphi \cdot \alpha_t$ force $s_\alpha = \varphi s_{\alpha_t} \varphi^{-1}$ et donc $s_\alpha \in W_0$. \square

On vient donc de voir que les groupes de réflexion ont comme générateurs les réflexions associées aux systèmes simples. Or, lorsqu'on connaît des générateurs d'un groupe, il est naturel de s'interroger sur la nature des relations entre les générateurs. Dans cette optique de trouver une présentation des groupes de réflexion, on va terminer cette section en introduisant certaines notions et quelques résultats nous permettant de le faire.

Étant donné un élément $\varphi \in W(\Delta) = W(\Sigma)$, on a a priori que φ peut s'écrire de plusieurs façons comme produit de générateurs ($\in \Sigma$).

Définition 1.3.4. *On dira d'une **expression** qu'elle est **réduite** si son écriture en terme de générateurs est minimale (i.e. qu'elle ne peut pas s'écrire avec moins de générateurs).*

Définition 1.3.5. *Étant donné un élément $\varphi \in W(\Delta)$, on appelle le nombre de générateurs d'une expression réduite la **longueur de** φ que l'on notera $l(\varphi)$.*

Étant donné un système simple Σ on peut décomposer Δ en ses racines positives Δ_+ et ses racines négatives Δ_- (i.e. $\Delta = \Delta_+ \amalg \Delta_-$). On peut ainsi définir $n(\varphi) := \text{Card}(\Delta_+ \cap \varphi^{-1} \Delta_-)$ le nombre de racines positives envoyées sur des racines négatives par φ .

Lemme 1.3.1. *Soit Σ un système simple de Δ et Δ_+ les racines positives de Δ par rapport à Σ . Si $\alpha \in \Sigma$ alors*

$$s_\alpha(\Delta_+ \setminus \{\alpha\}) = \Delta_+ \setminus \{\alpha\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\beta \in \Delta_+$ et $\beta \neq \alpha$. On a que $\beta = \sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \alpha_i$ avec les $\lambda_{\alpha_i} \geq 0$. De plus, il existe au moins un $\alpha_i \neq \alpha$ tel que $\lambda_{\alpha_i} > 0$ car les seuls multiples de α dans Δ sont α et $-\alpha$. En appliquant s_α , on a

$$s_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \beta - 2 \frac{(\sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \alpha_i, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha = \beta - 2 \sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \frac{(\alpha_i, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \alpha_i - 2 \sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \frac{(\alpha_i, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \\
&= \sum_{\alpha_i \in \Sigma, \alpha_i \neq \alpha} \lambda_{\alpha_i} \alpha_i + \left(\lambda_{\alpha} - 2 \sum_{\alpha_i \in \Sigma} \lambda_{\alpha_i} \frac{(\alpha_i, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \right) \alpha
\end{aligned}$$

Étant donné que $s_{\alpha}(\beta)$ est une combinaison linéaire d'éléments de Σ ayant tous le même signe, $s_{\alpha}(\beta)$ doit être positif. De plus $s_{\alpha}(\beta) \neq \alpha$ car sinon, on aurait que

$$\beta = s_{\alpha} s_{\alpha}(\beta) = s_{\alpha}(\alpha) = -\alpha \in \Delta_-.$$

Donc $s_{\alpha}(\beta) \in \Delta_+ \setminus \{\alpha\}$. □

Lemme 1.3.2. Soit $\alpha \in \Sigma$ où Σ est un système simple et $\varphi \in W(\Sigma)$ alors

(1)

$$\varphi \cdot \alpha > 0 \implies n(\varphi s_{\alpha}) = n(\varphi) + 1$$

(2)

$$\varphi \cdot \alpha < 0 \implies n(\varphi s_{\alpha}) = n(\varphi) - 1$$

DÉMONSTRATION. Posons $\Delta(\varphi) = \Delta_+ \cap \varphi^{-1} \Delta_-$ et donc $n(\varphi) = \text{Card}(\Delta(\varphi))$. Si $\varphi \cdot \alpha > 0$ alors $\varphi \cdot \alpha \notin \Delta_-$ i.e. $\alpha \notin \varphi^{-1} \Delta_-$ i.e. $-\alpha = s_{\alpha} \alpha \notin s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_-$. On déduit que

$$\begin{aligned}
s_{\alpha} \Delta(\varphi) &= s_{\alpha} \Delta_+ \cap s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_- \\
&= s_{\alpha} (\Delta_+ \setminus \{\alpha\} \cup \{\alpha\}) \cap s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_-
\end{aligned}$$

et par le lemme 1.3.1, on a

$$\begin{aligned}
&= (\Delta_+ \setminus \{\alpha\} \cup \{-\alpha\}) \cap s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_- \\
&= \Delta_+ \setminus \{\alpha\} \cap s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_-
\end{aligned}$$

Mais $\alpha \in s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_-$ et donc

$$\Delta(\varphi s_{\alpha}) = \Delta_+ \cap s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_- = s_{\alpha} \Delta(\varphi) \cup \{\alpha\}$$

Or $\text{Card}(s_{\alpha} \Delta(\varphi)) = \text{Card}(\Delta(\varphi))$ d'où $n(\varphi s_{\alpha}) = n(\varphi) + 1$ ce qui démontre (1).

Si $\varphi \alpha < 0$ alors $\varphi \alpha \in \Delta_-$ i.e. $\alpha \in \varphi^{-1} \Delta_-$ i.e. $-\alpha = s_{\alpha} \alpha \in s_{\alpha} \varphi^{-1} \Delta_-$. Par un raisonnement analogue on a que

$$\Delta(\varphi s_{\alpha}) = s_{\alpha} \Delta(\varphi) \setminus \{\alpha\}.$$

D'où $n(\varphi s_{\alpha}) = n(\varphi) - 1$. □

Corollaire 1.3.1. *Soit $\varphi \in W$ alors $n(\varphi) \leq l(\varphi)$*

DÉMONSTRATION. Par la proposition précédente, chaque réflexion simple s_{α_i} augmente $n(\varphi)$ au plus de 1. \square

Théorème 1.3.1 (Condition d'échange). *Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ un système simple et $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_t}$ une expression quelconque de $\varphi \in W$ où les s_{α_i} sont des réflexions simples. Si $n(\varphi) < t$ alors il existe des indices $1 \leq i < j \leq t$ tels que :*

- (1) $\alpha_i = (s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}}) \alpha_j$
- (2) $s_{\alpha_{i+1}} s_{\alpha_{i+2}} \dots s_{\alpha_j} = s_{\alpha_i} s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}}$
- (3) $\varphi = s_{\alpha_1} \dots \hat{s}_{\alpha_i} \dots \hat{s}_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_t}$ (où le chapeau désigne l'omission)

DÉMONSTRATION. (1) Si on avait pour chaque $1 \leq k \leq t$ que $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{k-1}}(\alpha_k) > 0$, le lemme 1.3.2. (1) donnerait une contradiction avec l'hypothèse que $n(\varphi) < t$. Donc, il existe un j tel que $s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_{j-1}}(\alpha_j) < 0$. Puisque $\alpha_j > 0$, il existe un certain $i < j$ tel que $s_{\alpha_i}(s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}})(\alpha_j) < 0$ et $(s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}})(\alpha_j) > 0$ (en posant $s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}} = 1$ si $i = j - 1$). Or puisque $s_{\alpha_i}((s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}})(\alpha_j)) < 0$ le lemme 1.3.1 implique que $(s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}})(\alpha_j) = \alpha_i$.

(2) Par les propriétés des réflexions, on a que $(s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}}) s_{\alpha_j} (s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}})^{-1} = s_{(s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}}) \alpha_j} = s_{\alpha_i}$ et en multipliant les deux côtés de cette équation par $s_{\alpha_{i+1}} \dots s_{\alpha_{j-1}}$ par la droite, on obtient (2).

(3) est une réécriture de (2). \square

Corollaire 1.3.2. *Soit $\varphi \in W$ alors $n(\varphi) = l(\varphi)$*

DÉMONSTRATION. Par le corollaire 1.2.1. on a que $n(\varphi) \leq l(\varphi)$ or si on avait que $n(\varphi) < l(\varphi) = t$ et que $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_t}$ une expression réduite, on aurait par le théorème de Condition d'échange que $\varphi = s_{\alpha_1} \dots \hat{s}_{\alpha_i} \dots \hat{s}_{\alpha_j} \dots s_{\alpha_t}$ contredisant $l(\varphi) = t$. \square

1.4. GROUPES DE COXETER

Pour finalement trouver une présentation des groupes de réflexion, on va voir dans cette section que les groupes de Coxeter sont exactement l'outil nécessaire.

Définition 1.4.1. Un groupe W est un **groupe de Coxeter** s'il existe $S \subset W$ tel que W a la présentation suivante :

$$W = \langle s \in S \mid (ss')^{m_{ss'}} = 1 \rangle$$

$$\text{où } m_{ss} = 1 \text{ et } m_{ss'} \in \{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\} \text{ si } s \neq s'$$

Définition 1.4.2. On appelle la paire (W, S) un **système de Coxeter**.

À un système de Coxeter, on peut associer le graphe construit de la manière suivante :

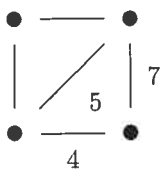
- Les sommets du graphe sont les éléments de S
- Il n'y a pas de boucle (i.e. pas d'arête entre s et s)
- Si $m_{ss'} = 2$ il n'y a pas d'arête entre s et s'
- Si $m_{ss'} = 3$ il y a une arête entre s et s'
- Si $m_{ss'} > 3$ il y a une arête entre s et s' étiquetée par $m_{ss'}$

qu'on appelle le graphe de Coxeter de (W, S)

Exemple 1.4.1. Le graphe du groupe

$$W = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \mid m_{12} = m_{13} = 3, m_{14} = 2, m_{23} = 5, m_{24} = 7, m_{34} = 4 \rangle$$

est :



Définition 1.4.3. On dit que le système de Coxeter (W, S) a **rang** n si $n = |S|$

Théorème 1.4.1 (Coxeter). Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \subset \Delta$ un système fondamental et $W = W(\Delta)$ alors

$$W(\Delta) \simeq \langle \{s_i\}_{i=1}^k \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle,$$

c'est à dire que les groupes de réflexion sont des groupes de Coxeter.

DÉMONSTRATION. Posons $G = \langle \{s_i\}_{i=1}^k \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$. La proposition 1.3.1 dit que Σ est un ensemble de générateurs pour $W(\Delta)$. On va donc définir l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow W \\ s_i &\longmapsto s_{\alpha_i} \end{aligned}$$

qui applique les générateurs de G sur les générateurs de W pour ensuite vérifier qu'on a bien un isomorphisme. Supposons que le noyau, $\ker(\psi)$, ne soit pas trivial. Soit $w = s_1 s_2 \dots s_k \neq 1$ un élément de $\ker(\psi)$ écrit avec un nombre minimale de générateurs. Puisque $\psi(s_1 s_2 \dots s_k) = \psi(s_1) \psi(s_2) \dots \psi(s_k) = 1$ et que les $\psi(s_i) = s_{\alpha_i}$ sont d'ordre 2, en conjugant $\psi(w)$ par $\psi(s_1)$ on obtient $\psi(s_1) \psi(s_1) \psi(s_2) \dots \psi(s_k) \psi(s_1) = \psi(s_1 s_1 s_2 \dots s_k s_1) = \psi(s_2 s_3 \dots s_k s_1) = 1$ et donc que $s_2 s_3 \dots s_k s_1 \in \ker(\psi)$. En fait, en répétant le même argument, on voit que toute permutation cyclique de $s_1 s_2 \dots s_k$ sera dans $\ker(\psi)$. De plus, puisque $\det(s_{\alpha_i}) = -1$ on doit avoir que $k = 2r$. On va montrer que $\psi(s_1) = \psi(s_3) = \dots = \psi(s_{k-1})$ et $\psi(s_2) = \psi(s_4) = \dots = \psi(s_k)$, ce qui nous donnera que $w = (s_1 s_2)^r$ et donc que $w = 1$ puisqu'il est une relation de Coxeter, entraînant ainsi la contradiction désirée. Pour faire cela, il suffit de montrer que $\psi(s_1) = \psi(s_3)$, les autres cas suivront de la remarque faite plus haut. Pour faire ceci, on va montrer les deux égalités suivantes :

$$(1) \quad \psi(s_1) \psi(s_2) \dots \psi(s_r) = \psi(s_2) \psi(s_3) \dots \psi(s_{r+1})$$

$$(2) \quad \psi(s_3) \psi(s_2) \dots \psi(s_r) = \psi(s_2) \psi(s_3) \dots \psi(s_{r+1})$$

L'égalité $\psi(s_1 s_2 \dots s_k) = 1$ peut se récrire comme $\psi(s_1 s_2 \dots s_{r+1}) = \psi(s_{2r} s_{2r-1} \dots s_{r+2})$. Il s'ensuit que $l(\psi(s_1 s_2 \dots s_{r+1})) < r + 1$ et donc par le théorème 1.3.1. il existe $1 \leq i < j \leq r$ tel que $\psi(s_i) \psi(s_{i+1}) \dots \psi(s_j) = \psi(s_{i+1}) \dots \psi(s_{j+1})$. Il suffit de montrer que $i = 1$ et $j = r$ pour montrer (1). Si ce n'était pas le cas, on obtiendrait une relation de longueur plus courte que k , contredisant ainsi la minimalité de w . Pour montrer (2), considérons l'égalité $\psi(s_2 s_3 \dots s_k s_1) = 1$ et par le même argument que pour (1) on a que $\psi(s_2 s_3 \dots s_{r+1}) = \psi(s_3 \dots s_{r+2})$. Cette équation peut se récrire sous la forme $\psi(s_3 (s_2 \dots s_{r+1}) s_{r+2} s_{r+1} \dots s_4) = 1$ et en réappliquant l'argument fait pour prouver (1) on obtient que $\psi(s_3 s_2 \dots s_r) = \psi(s_2 \dots s_{r+1})$. En

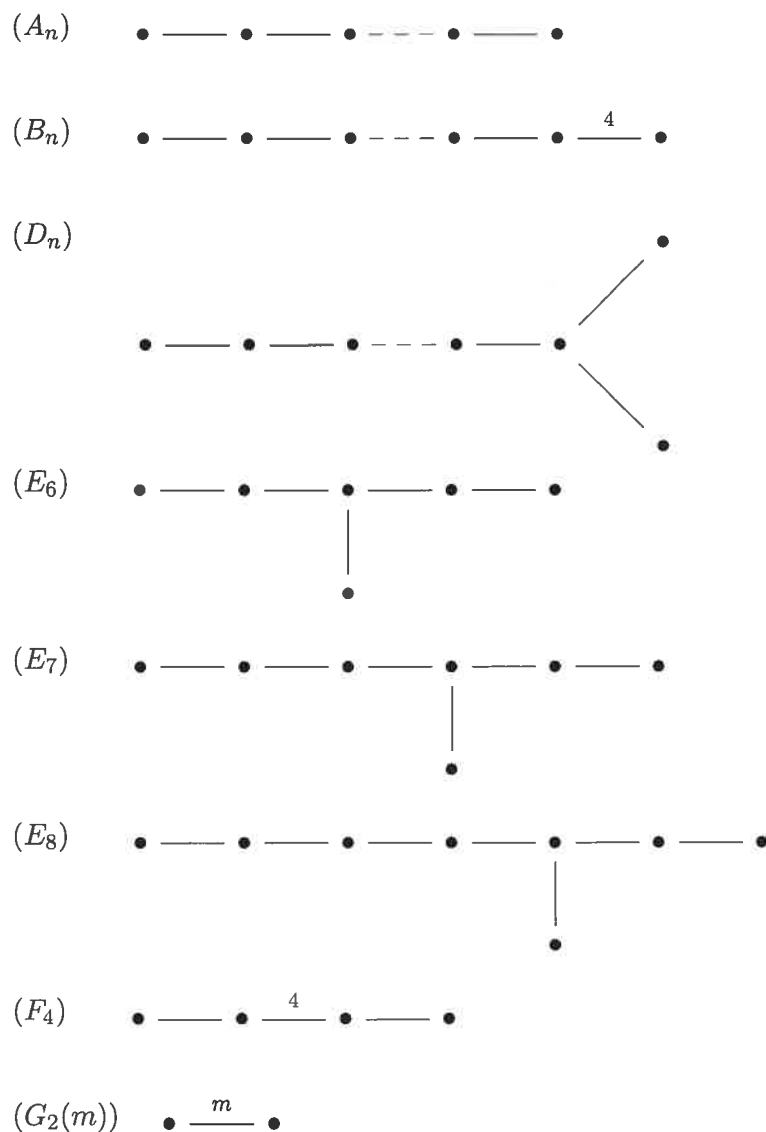
égalant les équations (1) et (2) et en multipliant de chaque côté par $\psi(s_r \dots s_2)$ par la droite, on obtient que $\psi(s_1) = \psi(s_3)$.

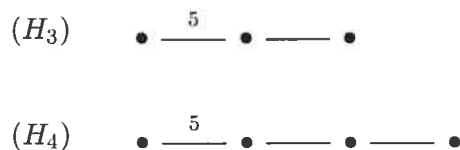
□

On dira qu'un système de Coxeter est réductible si $W = W_1 \times W_2$ et $S = S_1 \amalg S_2$.

Le théorème suivant donne une classification des groupes de Coxeter irréductibles finis. Pour une preuve de ce théorème voir [Hu] chapitre 2.

Théorème 1.4.2. *Si (W, S) est un groupe irréductible fini de Coxeter, alors son graphe de Coxeter est un des suivants :*





Pour aider à mieux se familiariser avec ces groupes de Coxeter on va donner quelques exemples de groupes de réflexion qui stabilisent des polytopes réguliers.

Lorsqu'on fait le produit de 2 réflexions, on obtient une rotation du double de l'angle entre les deux hyperplans de réflexion. On peut donc interpréter les étiquettes des arêtes des graphes de Coxeter comme l'ordre d'un sous-groupe de rotation du groupe. Ceci donne une bonne indication des 2-cellules (polygone) du polytope stabilisé. On voit assez facilement que le groupe de type A_2 correspond au groupe de réflexion d'un triangle équilatéral et le groupe de type A_3 au groupe de réflexion du tétraèdre. En fait les groupes de type A_n correspondent aux généralisation du tétraèdre en dimension n .

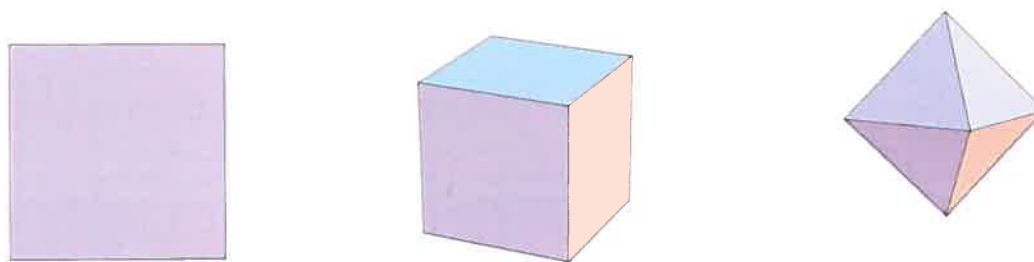


FIG. 6. Types A_2 et A_3

De la même façon, on voit que les groupes de type B_n sont les groupes de réflexion des généralisations du cube en n dimensions ou de l'octaèdre qui a les mêmes symétries.

Les groupes de type $G_2(m)$ correspondent aux groupes de réflexion des polygones réguliers.

Le groupe de type H_3 correspond au groupe de réflexion du dodécaèdre ou de l'icosaèdre.

FIG. 7. Types B_2 et B_3 FIG. 8. Type H_3

Et H_4 , le groupe qui nous intéresse plus particulièrement dans cet ouvrage, correspond au groupe de réflexion du 120-cellules, un polytope régulier en 4 dimensions ayant 120 dodécaèdres comme 3-cellules. À la figure 9., on y voit une projection en trois dimensions du 120-cellules. Les 120 dodécaèdres y sont aplatis et empilés, mais en 4 dimensions ils sont tous comme à la figure 8. et on les verraient tous en même temps.

Une autre façon de voir le 120-cellules est d'en faire une projection sur S^3 suivie d'une projection stéréographique sur \mathbb{R}^3 . On peut voir une représentation artistique de ceci à la figure 10.¹

¹Il existe un applet sur internet qui permet de voir stéréoscopiquement et faire tourner dans les 4 dimensions plusieurs polytopes, dont le 120-cellules, à l'URL suivant : <http://members.aol.com/jmtsgibbs/draw4d.htm>.

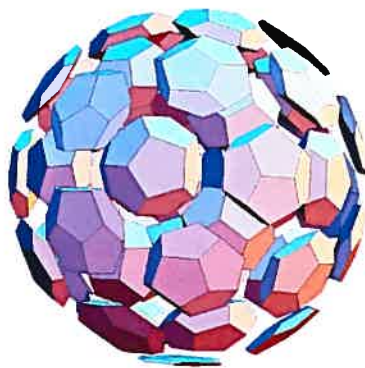


FIG. 9. Type H_4 (une projection en 3 dimensions du 120-cellules)



FIG. 10. Projection stéréographique du 120-cellules

1.5. GROUPES DE WEYL

Dans le plan, le triangle, le carré et l'hexagone sont les seuls polygones réguliers à posséder la propriété particulière de le paver . D'ailleurs, l'artiste Maurits Cornelis Escher (1898-1972) a beaucoup utilisé ce fait pour créer des pavages du plan sublimes (fig.11).

Ce concept de remplir l'espace n'est pas exclusif à la dimension deux (fig.12).

Cette propriété supplémentaire de paver l'espace que certains polytopes possèdent donne lieu à un type de groupe de réflexion particulier.



(a) Pavage avec
des triangles



(b) Pavage avec
des carrés



(c) Pavage avec
des hexagones

FIG. 11. Pavages du plan par M.C. Escher



FIG. 12. Remplissage de l'espace avec des cubes par Escher

Définition 1.5.1. *Un groupe de Weyl est un groupe de réflexion fini $W \subset O(V)$ qui admet un treillis $\mathcal{L} \subset V$ tel que W agisse \mathbb{Z} -linéairement sur \mathcal{L} . En d'autres mots, on peut écrire $V = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

Cette condition de stabiliser un treillis, fait en sorte que les groupes de Weyl ont tendance à relativement bien se comporter. Or, pas tous les groupes de réflexion sont des groupes de Weyl. Les groupes H_3 , H_4 et les groupes diédraux (sauf ceux d'ordre 2, 3, 4 et 6) ne sont pas des groupes de Weyl. Les groupes diédraux sont généralement assez faciles à étudier. Par contre, les groupes H_3 et H_4 demandent souvent à être traités à part. On a aussi que H_3 est un sous-groupe

de H_4 , et par conséquent une étude de H_4 implique souvent celle de H_3 . C'est un peu ce caractère particulier de H_4 qui motive cette présente étude.

1.6. ÉLÉMENTS DE COXETER

Les éléments de Coxeter jouent un rôle important dans les applications des groupes de réflexion puisqu'ils sont liés à plusieurs invariants numériques.

Définition 1.6.1. Soit $W = W(\Delta)$ un groupe de réflexion fini et $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ un système fondamental de Δ , alors

$$\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k} \text{ est un élément de Coxeter.}$$

De plus, l'ordre de φ est appelé **nombre de Coxeter** et est habituellement noté par h .

Exemple 1.6.1. Le groupe de Coxeter de type H_3 a comme présentation :

$$H_3 = \langle s_1, s_2, s_3 \mid (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = 1 \rangle$$

et $w_1 = s_1 s_2 s_3$, $w_2 = s_2 s_1 s_3$ et $w_3 = s_2 s_3 s_1$ sont quelques éléments de Coxeter.

Puisque pour un groupe de réflexion donné, il peut y avoir plusieurs systèmes simples associés à un système de racines donné, on voit donc, qu'à chaque groupe de réflexion il y a plusieurs éléments de Coxeter. On peut voir les éléments de Coxeter comme des rotations d'ordre h . Pour voir ceci, on va décomposer un élément de Coxeter de la manière suivante. Puisque le graphe de Coxeter d'un groupe de réflexion irréductible fini est un arbre, on peut diviser inductivement les racines simples en deux sous-ensembles contenant chacun des racines mutuellement orthogonales i.e. $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \amalg \{\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_k\}$. Si on note $\tau_1 = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_s}$ et $\tau_2 = s_{\alpha_{s+1}} \dots s_{\alpha_k}$, on a que $w = \tau_1 \tau_2$ est un élément de Coxeter. De plus, puisque les α_i avec $1 \leq i \leq s$ sont orthogonaux entre eux, ils commutent entre eux et donc $(\tau_1)^2 = 1$. De manière analogue, on voit que $(\tau_2)^2 = 1$. Si on pose $o(w) = h$ l'ordre de w on a donc le groupe diédral

$$D_h = \langle \tau_1, \tau_2 \mid (\tau_1)^2 = (\tau_2)^2 = (\tau_1 \tau_2)^h = 1 \rangle.$$

Proposition 1.6.1. Il existe un plan \mathbf{P} sur lequel τ_1 et τ_2 agissent comme des réflexions.

DÉMONSTRATION. Comme on est dans un groupe de réflexion, on peut poser $V = \mathbb{R}^k$ et posons aussi

$$V = V^{\tau_1} \oplus V_{\tau_1}$$

les décompositions orthogonales en espaces propres pour les valeurs propres 1 (V^{τ_1}) et -1 (V_{τ_1}) des τ_1 ($i = 1, 2$). Remarquons que si on trouve un plan \mathbf{P} sur lequel les τ_i agissent comme des réflexions, \mathbf{P} devra nécessairement avoir une intersection non triviale avec chacun des V^{τ_i} et des V_{τ_i} . Posons $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}$ la base duale à $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ i.e.

$$(\alpha_i, \bar{\alpha}_j) = \delta_{i,j}$$

où le $\delta_{i,j}$ représente le delta de Kronecker. Étant donné notre sous-division des racines, on a que pour $1 \leq i, j \leq s$,

$$s_{\alpha_i} \cdot \alpha_j = \begin{cases} \alpha_j & \text{pour } i \neq j \\ -\alpha_j & \text{pour } i = j \end{cases}$$

et donc que $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ est une base de V_{τ_1} . Analoguement, on voit que $\{\alpha_{s+1}, \dots, \alpha_k\}$ est une base pour V_{τ_2} . Puisque $(\alpha_i, \bar{\alpha}_j) = 0$ si $i \neq j$ on a que $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_s\}$ est une base de V^{τ_2} et $\{\bar{\alpha}_{s+1}, \dots, \bar{\alpha}_k\}$ est une base de V^{τ_1} .

Posons $M = [(\alpha_i, \alpha_j)]_{l \times l}$ la matrice de passage de la base α_i à la base $\bar{\alpha}_i$. Par la discussion précédente, on a que M induit les isomorphismes $V^{\tau_1} \cong V_{\tau_2}$ et $V^{\tau_2} \cong V_{\tau_1}$. Par notre partition des racines simples, on a que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} I_s & A \\ A^t & I_{k-s} \end{pmatrix}$$

d'où

$$I - M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ -A^t & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $I - M$ applique V^{τ_1} sur V^{τ_2} et vice versa. M et $I - M$ ont les mêmes vecteurs propres mais pas les mêmes valeurs propres. On a la relation

$$(I - M) \cdot x = \lambda x \quad \text{si et seulement si} \quad M \cdot x = (-\lambda + 1)x.$$

On peut trouver une matrice orthogonale T qui diagonalise M i.e. $TMT^t = D$ (voir [K] Appendix C). Or, ceci implique que M et $I - M$ possèdent un vecteur

propre ayant ses coefficients, par rapport à la base $\{\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_k\}$, tous positifs (voir [K] Appendix C).

On va construire le plan \mathbf{P} dans lequel τ_1 et τ_2 agissent comme réflexion à partir du vecteur propre précédemment obtenu, notons-le x . On a que $(I - M) \cdot x = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$ et $x = x_1 \bar{\alpha}_1 + \dots + x_k \bar{\alpha}_k$ avec $x_i > 0$. De plus, on a déjà vu que $V = V^{\tau_1} \oplus V^{\tau_2}$. Si on décompose x dans cette décomposition orthogonale, on a que $x = y + z$ avec $y \in V^{\tau_1}$ et $z \in V^{\tau_2}$. Posons $\mathbf{P} = \mathbb{R}y + \mathbb{R}z$. Par construction, on a que \mathbf{P} intersecte V^{τ_1} et V^{τ_2} . Il reste donc à voir que \mathbf{P} intersecte V_{τ_1} et V_{τ_2} . Or l'identité $x = y + z$ combinée avec $(I - M) \cdot x = \lambda x$ nous donne

$$(I - M) \cdot y + (I - M) \cdot z = \lambda y + \lambda z$$

et puisque $I - M$ applique V^{τ_1} sur V^{τ_2} et vice versa, on a que

$$(I - M) \cdot y = \lambda z \text{ et } (I - M) \cdot z = \lambda y$$

et en réécrivant ces identités combinées avec le fait que $V^{\tau_1} \cong V_{\tau_2}$ et $V^{\tau_2} \cong V_{\tau_1}$ on a que

$$y - \lambda z = M \cdot y \in V_{\tau_1}$$

$$z - \lambda y = M \cdot z \in V_{\tau_2}.$$

On conclut que \mathbf{P} est bien le plan cherché. □

1.7. SOUS-GROUPES PARABOLIQUES

Lorsqu'on travaille avec des groupes en général, il est naturel de regarder leurs sous-groupes pour mieux les comprendre. Si ces groupes ont une propriété particulière, il est aussi naturel d'essayer de trouver des sous-groupes ayant cette même propriété.

Définition 1.7.1. Soit $W = W(\Delta)$ un groupe de réflexion et $\Delta \subset V$ un système de racines. Si Σ est un système fondamental, on a que W est engendré par les réflexions fondamentales $\{s_{\alpha_1}, \dots, s_{\alpha_k}\}$. Soit $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$, le sous-groupe $W_I < W$ engendré par $\Delta_I = \{s_{\alpha_i} | i \in I\}$ est appelé un **sous-groupe parabolique**.

Exemple 1.7.1. *Un exemple qui va particulièrement nous intéresser est que le groupe de réflexions*

$$H_4 : \bullet_{s_1} \xrightarrow{5} \bullet_{s_2} \text{ --- } \bullet_{s_3} \text{ --- } \bullet_{s_4}$$

possède comme sous-groupe parabolique, le groupe

$$H_3 : \bullet_{s_1} \xrightarrow{5} \bullet_{s_2} \text{ --- } \bullet_{s_3}$$

D'autres sous-groupes d'importance dans la théorie des groupes de réflexion sont les groupes d'isotropie.

Définition 1.7.2. *Soit $\Gamma \subset V$, le **groupe d'isotropie** de Γ est*

$$W_\Gamma = \{\varphi \in W \mid \varphi \cdot x = x \ \forall x \in \Gamma\}.$$

Le résultat suivant montre que les groupes d'isotropie sont un cas particulier des sous-groupes paraboliques. Mais avant de faire cela, introduisons quelques notions qui vont nous être utiles pour sa preuve.

Définition 1.7.3. *Une **chambre (de Weyl)** est une composante connexe de*

$$V - \left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} H_\alpha \right)$$

En particulier on a la chambre de Weyl fondamentale qui est

$$C_0 = \{t \in V \mid (\alpha_i, t) > 0 \text{ et } \alpha_i \in \Sigma\}.$$

On note aussi

$$C_I = \left\{ t \in V \mid \begin{array}{l} (\alpha_i, t) = 0 \text{ si } i \in I, \\ (\alpha_i, t) > 0 \text{ si } i \notin I. \end{array} \right\}.$$

On peut donc remarquer que

$$\begin{aligned} \bar{C}_0 &= \{t \in V \mid (\alpha_i, t) \geq 0\} \\ &= \prod_I C_I. \end{aligned}$$

Lemme 1.7.1. *Soit $W = W(\Sigma)$ avec $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ et $I \subset \{1, \dots, k\}$. Soit $1 \neq \varphi \in W^I$ où*

$$W^I = \{\varphi \in W \mid \varphi \cdot \alpha_i > 0 \ \forall i \in I\} = \{\varphi \in W \mid l(\varphi s_{\alpha_i}) = l(\varphi) + 1 \ \forall i \in I\}$$

alors $(\varphi \cdot C_I) \cap \bar{C}_0 = \emptyset$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in C_I$. Supposons que $\varphi \cdot x \in \bar{C}_0$. Puisque $\varphi \neq 1$, on a que $\varphi \cdot \alpha_j < 0$ pour un certain $1 \leq j \leq k$ mais $\varphi \in W^I$ et donc $j \notin I$. On a que

$$(*) \quad 0 < (\alpha_j, x) = (\varphi \cdot \alpha_j, \varphi \cdot x).$$

De plus $\varphi \cdot \alpha_j < 0$ entraîne que $(\varphi \cdot \alpha_j, t) < 0, \forall t \in C_0$ ou plus précisément $(\varphi \cdot \alpha_j, t) \leq 0, \forall t \in \bar{C}_0$. Mais ceci contredit (*). \square

Lemme 1.7.2. *Soit W un groupe de réflexion et $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ un système simple pour W . Soit $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ alors $W_I = W(\Sigma_I)$ (où $\Sigma_I = \{\alpha_i \mid i \in I\}$) est le groupe d'isotropie de C_I i.e. $W_I = W_{C_I}$. On a aussi que $W_I = W_x$ pour tout $x \in C_I$.*

DÉMONSTRATION. Clairement, on a que $W_I \subset W_{C_I}$. Soit maintenant $\varphi_0 \in W_{C_I}$ i.e. $\varphi_0 \cdot C_I = C_I$. Or on a que $\bar{C}_0 = \coprod_I C_I$ et donc $\bar{C}_0 \cap C_I \neq \emptyset$

Avant de continuer, regardons les translatés de W/W_I . Pour chaque $\varphi \in W$ on a que $\varphi = \varphi^I \varphi_I$ avec $\varphi^I \in W^I$ et $\varphi_I \in W_I$. On peut voir ceci par induction sur la longueur de φ . On peut supposer que $\varphi \notin W_I$ car sinon on aurait que $\varphi = \varphi \cdot 1$. Par la définition de W_I et la section 1.3, on a qu'il existe $i \in I$ tel que $l(\varphi s_{\alpha_i}) = l(\varphi) - 1$. Par l'hypothèse d'induction, $\varphi s_{\alpha_i} = \varphi^I \varphi_I$ et donc $\varphi = \varphi^I (\varphi_I s_{\alpha_i})$.

On en déduit que

$$\varphi C_I = \varphi^I \varphi_I C_I = \varphi^I C_I.$$

Et donc que

$$\varphi C_I \cap \bar{C}_0 = \varphi^I \varphi_I C_I \cap \bar{C}_0 = \varphi^I C_I \cap \bar{C}_0.$$

Et ceci est non vide si et seulement si $\varphi^I = 1$, or par le lemme 1.7.1., si $(\varphi_0)^I = 1$ alors $\varphi_0 = (\varphi_0)_I \in W_I$ et on a terminé. \square

Théorème 1.7.1. *Soit W un groupe de réflexion et Σ un système simple pour W . Pour tout $\Gamma \subset V$, on a que $W_\Gamma \subset W$ est un sous-groupe parabolique.*

DÉMONSTRATION. Par linéarité, on peut réduire Γ à un ensemble fini. On peut donc faire un argument inductif sur $|\Gamma|$. On a que $\Gamma = \Gamma' \coprod \{x\}$ et cette décomposition nous donne $W_\Gamma = (W_x)_{\Gamma'}$ car

$$\begin{aligned}
W_\Gamma &= \{\varphi \in W \mid \varphi \cdot x = x, \forall x \in \Gamma\} \\
&= \{\varphi \in W \mid \varphi \cdot x = x, \varphi \cdot y = y, \forall y \in \Gamma'\} \\
&= \{\varphi \in W_x \mid \varphi \cdot y = y, \forall y \in \Gamma'\} \\
&= (W_x)_{\Gamma'}
\end{aligned}$$

Or, être un sous-groupe parabolique est une relation transitive. Donc, si on montre que $W_x \subset W$ est parabolique (notre premier pas d'induction), on aura par hypothèse d'induction que $(W_x)_{\Gamma'} \subset W_x$ l'est aussi et par transitivité on aura terminé. Montrons que W_x est parabolique. Il suffit de le montrer pour $x \in \bar{C}_0$ car chaque orbite de W intersecte \bar{C}_0 et donc $x = \varphi \cdot y$ pour un certain $y \in \bar{C}_0$. De ceci, on obtient que $W_x = \varphi W_y \varphi^{-1}$ et si W_y est un sous-groupe parabolique par rapport à Γ alors W_x est un sous-groupe parabolique par rapport à $\Gamma' = \varphi \Gamma$. Reste à voir que W_x est parabolique pour tout $x \in \bar{C}_0$ mais le lemme précédent fait justement cela.

□

Ce résultat va nous être très utile plus loin lorsque nous donnerons deux définitions équivalentes d'éléments réguliers dans un groupe de réflexion.

1.8. ÉLÉMENTS RÉGULIERS

Dans cette section W sera un groupe de pseudo-réflexion et V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{F} de caractéristique 0.

Définition 1.8.1. $x \in V$ est dit **régulier** s'il n'appartient à aucun hyperplan de réflexion d'aucune pseudo-réflexion de W .

Définition 1.8.2. $\varphi \in W$ est **régulier** si φ possède un vecteur propre régulier.

Définition 1.8.3. Si $\varphi \cdot x = \xi x$ pour un vecteur régulier x alors $\xi \in \mathbb{F}$ sera dite une **valeur propre régulière**.

La proposition suivante donne une définition équivalente de vecteur régulier.

Proposition 1.8.1. $x \in V$ est régulier si et seulement si $W_{\{x\}} = \{Id\}$.

Avant de faire la preuve de cette proposition on va introduire quelques notions et prouver un lemme. Comme la définition de vecteur régulier fait intervenir tous les hyperplans de réflexions et donc toutes les réflexions d'un groupe donné,

il devient moins naturel de considérer les systèmes de racines simples comme générateurs du groupe. On revient donc à considérer un groupe de réflexion W comme étant engendré par toutes ses réflexions. Dans ce cadre d'idées, on peut adapter la notion de longueur en conséquence.

Définition 1.8.4. Soit $\varphi \in W$ où W est un groupe de réflexion associé à un système de racine Δ . Si $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$, où les s_i sont dans Δ , est une écriture de φ où k est aussi petit que possible, on dira que cette expression est minimale et k sera dite la **longueur minimale de φ** noté $L(\varphi) = k$

Il est à noter qu'on peut lier les deux notions de longueur par l'inégalité suivante :

$$L(\varphi) \leq \min_{\Sigma} \{l(\varphi)\}$$

où Σ parcourt tous les systèmes simples.

Considérons maintenant $V^\varphi = \{x \in V \mid \varphi \cdot x = x\}$ et V_φ son complément orthogonal. Le groupe W_{V^φ} , étant un groupe d'isotropie, est par le théorème 1.7.1. parabolique. En particulier $\varphi \in W_{V^\varphi}$. Puisque le rang d'un groupe de réflexion est le rang de son système de racines, posons

$$l = \text{rang}(W) = \text{rang}(\Delta).$$

Si $V^\varphi \neq \{0\}$ alors par la preuve du théorème 1.7.1. on a que W_{V^φ} est de rang strictement inférieur au rang de W . Plus précisément on a que

$$\text{rang}(W_{V^\varphi}) \leq \dim(V_\varphi).$$

Pour voir cela, il suffit de voir qu'un système de racines pour W_{V^φ} est inclus dans V^φ . Puisque W_{V^φ} agit trivialement sur V^φ on a que $V^\varphi \subset H_{\alpha_i}$ pour toute réflexion $s_{\alpha_i} \in W_{V^\varphi}$. Donc α_i est orthogonale à V^φ et donc $\alpha_i \in V_\varphi$.

Lemme 1.8.1. $L(\varphi) \leq \text{rang}(W) := l$

DÉMONSTRATION. La preuve est par induction sur le rang de W . Si le rang de W est 1 alors $W = \langle s_\alpha \mid s_\alpha^2 = 1 \rangle$ et donc $L(\varphi) \leq 1$ pour tout φ . Supposons vrai pour le rang $(W) = l - 1$. Si $V^\varphi \neq \{0\}$ alors $\text{rang}(W_{V^\varphi}) < \text{rang}(W)$ et par hypothèse d'induction φ peut s'écrire avec au plus $l - 1$ réflexions dans W_{V^φ} et donc aussi dans W . On peut donc supposer que $V^\varphi = \{0\}$ ce qui entraîne que

$\varphi - 1$ est injective et donc inversible. Soit $\alpha \in \Delta$. Il suffit de montrer que $s_\alpha \varphi$ peut se décomposer en au plus $l - 1$ réflexions. Puisque $\varphi - 1$ est inversible, on peut trouver un $x \in V$ tel que $(\varphi - 1) \cdot x = \alpha$ ou bien

$$\varphi \cdot x = \alpha + x.$$

Or puisque $(x, x) = (\varphi \cdot x, \varphi \cdot x) = (x + \alpha, x + \alpha) = (x, x) + 2(x, \alpha) + (\alpha, \alpha)$ on a que $\frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -1$. En remplaçant ceci dans $s_\alpha \cdot x = x - \frac{2(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$ on obtient que

$$s_\alpha \cdot x = x + \alpha.$$

En combinant les deux expressions pour $x + \alpha$ on a que $\varphi \cdot x = s_\alpha \cdot x$. En d'autres termes, $s_\alpha \varphi \cdot x = x$ et donc $s_\alpha \varphi \in W_x$ et par hypothèse d'induction $s_\alpha \varphi$ s'écrit avec au plus $l - 1$ réflexions. □

Lemme 1.8.2. Soit $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$ une expression minimale pour φ alors

$$(1) \dim(V_\varphi) = L(\varphi) = k$$

$$(2) V^\varphi = \bigcap_{i=1}^k H_{\alpha_i} \text{ et } V_\varphi = \text{vect}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

DÉMONSTRATION. Posons $H = \text{vect}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ et $H^\perp = \bigcap_{i=1}^k H_{\alpha_i}$ son complément orthogonal. On a que $H^\perp \subset V^\varphi$ et puisque V^φ est orthogonal à V_φ on a aussi que $V_\varphi \subset H$. D'où $\dim(V_\varphi) \leq \dim(H) \leq k$ et donc

$$\dim(V_\varphi) \leq L(\varphi).$$

De plus, puisque $\varphi \in W_{V^\varphi}$ on a que $\text{rang}(W_{V^\varphi}) \leq \dim(V^\varphi)$. En faisant appel au lemme précédent, on obtient que $L(\varphi) \leq \text{rang}(W_{V^\varphi}) \leq \dim(V^\varphi)$ ce qui démontre (1). L'inclusion $V_\varphi \subset H$ et l'inégalité $L(\varphi) \leq \dim(V^\varphi) \leq \dim(H) \leq k$ forcent $V^\varphi = H$ lorsque $L(\varphi) = k$ i.e. lorsque la décomposition est minimale. Par orthogonalité on a aussi que $V^\varphi = H^\perp$. □

On est maintenant prêt pour la preuve de la proposition 1.8.1.

DÉMONSTRATION. (Proposition 1.8.1.)

(\implies) Soit $1 \neq \varphi \in W$ avec $\varphi = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \dots s_{\alpha_k}$ une décomposition minimale pour φ et x un vecteur régulier. On a que $x \notin H_{\alpha_i}$ pour chaque i et donc $x \notin \bigcap_{i=1}^k H_{\alpha_i} =$

V^φ i.e. $\varphi \notin W_{\{x\}}$

(\Leftarrow) Si pour tout $\varphi \in W$, $\varphi \neq 1$, on a que $\varphi \cdot x \neq x$ on a en particulier pour tout s_{α_i} que $s_{\alpha_i} \cdot x \neq x$. Donc $x \notin V^{s_{\alpha_i}} = H_{\alpha_i}$ \square

Proposition 1.8.2. *Les éléments de Coxeter sont réguliers*

DÉMONSTRATION. On a trouvé à la section 1.6. un plan \mathbf{P} dans lequel $w = \tau_1\tau_2$ agit comme une rotation de $\frac{2\pi}{h}$ où h est l'ordre de w dans $W(\Sigma)$. Si on passe aux nombres complexes, on peut trouver $v \in \mathbf{P} \otimes \mathbb{C}$ tel que

$$w \cdot v = e^{\frac{2\pi i}{h}} v.$$

Puisque les vecteurs propres des rotations ne sont pas réels, $\{v, \bar{v}\}$ forme une \mathbb{C} -base de $\mathbf{P} \otimes \mathbb{C}$. Supposons que $(v, \alpha) = 0$ pour une racine $\alpha \in \Delta$. Alors $(\bar{v}, \alpha) = \overline{(v, \alpha)} = 0$ puisque α est réel et donc $\alpha = \bar{\alpha}$. Or, puisque $\{v, \bar{v}\}$ est une base de $\mathbf{P} \otimes \mathbb{C}$, on a que $(t, \alpha) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{P}$. La chambre de Weyl fondamentale

$$C_0 = \{t \in \mathbf{P} \mid (t, \alpha_i) > 0, \alpha_i \in \Sigma\}$$

contient $x = x_1\bar{\alpha}_1 + \dots + x_k\bar{\alpha}_k \in \mathbf{P}$ puisque $(x, \alpha_i) = x_i > 0$. Mais ceci nous donne une contradiction car $x \in \mathbf{P} \otimes \mathbb{C}$. Donc pour chaque $\alpha \in \Delta$ on a que $(v, \alpha) \neq 0$, ce qui est équivalent à dire que v est régulier. \square

1.9. NOMBRE DE COXETER

On a vu à la section précédente que les éléments de Coxeter étaient des éléments réguliers. Il serait donc pratique de voir quel est l'ordre de tels éléments.

Théorème 1.9.1. *Soit G un groupe de réflexion irréductible, alors l'ordre de chacun de ses éléments de Coxeter est $\frac{2N}{k}$ où $2N$ est le nombre d'éléments dans Δ un système de racine pour G et k est le nombre d'éléments dans $\Sigma \subset \Delta$ un système simple.*

DÉMONSTRATION. Puisque tous les éléments de Coxeter sont conjugués, il suffit donc de le prouver pour un élément de Coxeter en particulier. Étant donné un

système simple $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, on a vu à la section 1.6. qu'on pouvait trouver un plan \mathbf{P} dans lequel le groupe diédrale

$$D_m = \langle \tau_1, \tau_2 \mid (\tau_1)^2 = (\tau_2)^2 = (\tau_1\tau_2)^m = 1 \rangle,$$

où $w = \tau_1\tau_2$ est un élément de Coxeter, agit comme groupe de réflexions. Il suffit donc de trouver l'ordre de $w \in D_m$.

Posons $H_1 = \mathbb{R}y$ et $H_2 = \mathbb{R}z$ les droites de réflexion de D_m dans \mathbf{P} . Si θ est l'angle entre H_1 et H_2 alors $w = \tau_1\tau_2$ est une rotation d'angle 2θ et donc $\theta = \frac{\pi}{m}$ où $m = o(w)$. Si on regarde l'action de w sur les droites de réflexion, on a que si m est pair alors on aura 2 orbites de $\frac{m}{2}$ éléments, soit celle de H_1 et celle de H_2 , si par contre m est impair, alors on aura qu'une orbite de m éléments.

En conservant les notations de la section 1.6. on a $x = x_1\bar{\alpha}_1 + \dots + x_k\bar{\alpha}_k$ et $x = y + z$ d'où $y = x_{s+1}\bar{\alpha}_{s+1} + \dots + x_k\bar{\alpha}_k$ et $z = x_1\bar{\alpha}_1 + \dots + x_s\bar{\alpha}_s$. Si on prend une racine $\alpha \in \Delta$ on a que

- $(\alpha, y) = 0$ si et seulement si $\alpha = \pm\alpha_i$ pour $1 \leq i \leq s$
- $(\alpha, z) = 0$ si et seulement si $\alpha = \pm\alpha_i$ pour $s+1 \leq i \leq k$

car de l'écriture de y on a directement que $(y, \alpha_i) = 0$ pour $0 \leq i \leq s$. Inversement, si $(y, \alpha) = 0$ pour une racine α (qu'on peut supposer positive par rapport au système simple), où $\alpha = c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k$ avec les $c_i \geq 0$. On a que $x_1c_1 + \dots + x_sc_s = (y, \alpha) = 0$ mais puisque les $x_i > 0$ on a que $c_{s+1} = \dots = c_k = 0$. Donc α est une combinaison linéaire des $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq s}$ et puisque ces α_i sont mutuellement orthogonales, le sous-système de racines engendré par eux consiste en $\{\pm\alpha_i\}_{1 \leq i \leq s}$ et donc que α est un de ceux là. L'argument pour z est analogue.

Soit maintenant H un hyperplan de réflexion de G . La dimension de H est $k-1$ et celle de \mathbf{P} est de 2. Donc $H \cap \mathbf{P}$ est soit une droite, soit tout \mathbf{P} . Or le paragraphe précédent démontre que y et z ne peuvent pas appartenir à H simultanément. De plus, on a que $H \cap \mathbf{P}$ est une droite de réflexion de D_m puisque w agit transitivement sur les chambres et peut donc envoyer $H \cap \mathbf{P}$ entre H_1 et H_2 . Or, si elle ne concorde ni avec H_1 ni avec H_2 alors H devra contenir un point sur la droite entre les points y et z qui soit distinct de ces deux points. Or, cela impliquerait que ce point serait dans la chambre fondamentale, ce qui est impossible.

Finalement, on a que le nombre d'hyperplans se restreignant à H_1 est s et le nombre d'hyperplans se restreignant à H_2 est $k - s$. Donc si m est pair on a que

$$N = (k - s)\binom{m}{2} + s\binom{m}{2} = \frac{km}{2}$$

et si m est impair, on a que

$$N = \binom{k}{2}m = \frac{km}{2}.$$

Et donc on a que $m = \frac{2N}{k}$.

□

Chapitre 2

H_4

2.1. INTRODUCTION

En conservant en tête notre objectif, soit de trouver les nombres réguliers pour le groupe H_4 , nous allons trouver l'information qui nous sera utile sur H_4 . Pour le moment, nous n'avons qu'une description géométrique et une présentation de H_4 . Étant donné qu'on va avoir besoin d'utiliser un logiciel de manipulation symbolique, trouver une représentation matricielle de H_4 va être très utile.

Nous verrons dans les chapitres subséquents, que si un élément d'un groupe de réflexions est régulier alors tous les éléments de sa classe de conjugaison le seront aussi. Si on trouve les classes de conjugaison de H_4 , notre tâche sera donc restreinte aux classes de conjugaison.

2.2. H_3

Avant de s'attaquer à H_4 qui est un groupe relativement compliqué, on va regarder de plus près son sous-groupe, beaucoup plus simple, H_3 . Comme mentionné au chapitre 1, le groupe H_3 est le groupe de réflexion de l'icosaèdre ou, de manière équivalente, son dual le dodécaèdre. Une première étape pour étudier le groupe de réflexion de l'icosaèdre est de regarder le groupe de rotation de l'icosaèdre.

Le groupe de rotation de l'icosaèdre est engendré par les rotations autour de trois axes de rotation. Le premier axe de rotation passe par deux sommets diamétralement opposés de l'icosaèdre et les rotations sont d'ordre 5. Le deuxième axe

est au centre de deux arêtes diamétralement opposés et les rotations sont d'ordre deux. Le troisième axe est au centre de deux faces diamétralement opposées et les rotations sont d'ordre trois.

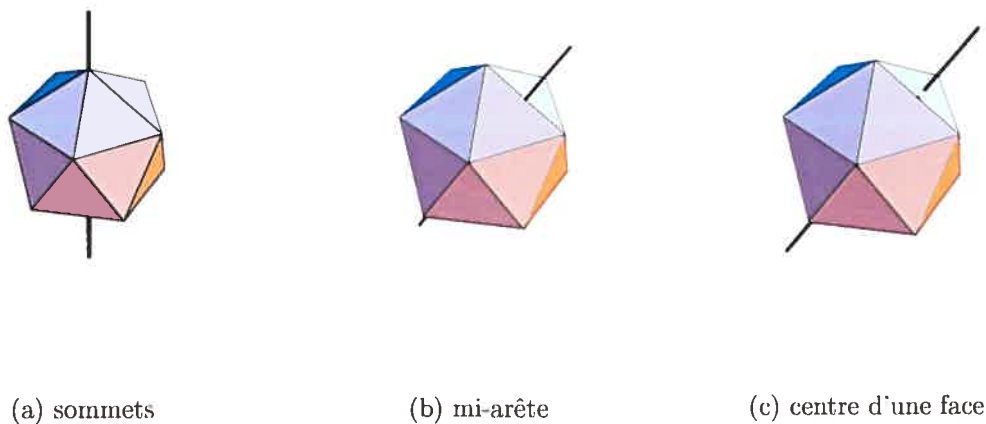


FIG. 1. Axes de rotation qui fixent l'icosaèdre

On peut voir que le groupe de rotation de l'icosaèdre, qui est le même que celui du dodécaèdre, est isomorphe au groupe alterné Alt_5 en regardant comment les rotations permutent les 5 cubes inscrits dans le dodécaèdre (voir fig.2).

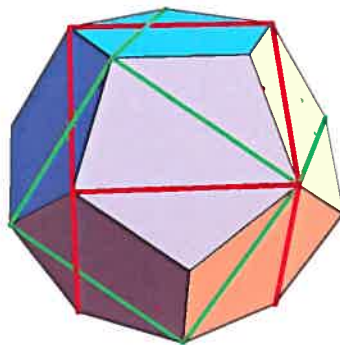


FIG. 2. deux des cinq cubes inscrits dans le dodécaèdre

Finalement, on peut voir assez facilement que le groupe de réflexions de l'icosaèdre est isomorphe à $Alt_5 \times \mathbb{Z}_2$. Comme mentionné au chapitre 1, on peut lire les 3 types de rotation, soit d'ordre 2, 3 et 5, sur le graphe de Coxeter :

$$H_3 : \bullet_{s_1} \overset{5}{\text{---}} \bullet_{s_2} \text{---} \bullet_{s_3}$$

où s_1s_2 , s_2s_3 et s_1s_3 sont respectivement des rotations d'ordre 5, 3 et 2.

Puisqu'il est presque impossible de bien voir géométriquement ce que sont les éléments de Coxeter dans H_4 , on va en profiter pour le montrer explicitement pour H_3 . Un élément de Coxeter est une rotation de $\frac{2\pi}{10}$ autour de l'axe passant par deux sommets opposés suivi d'une réflexion par rapport au plan perpendiculaire à l'axe de rotation (voir fig. 3).

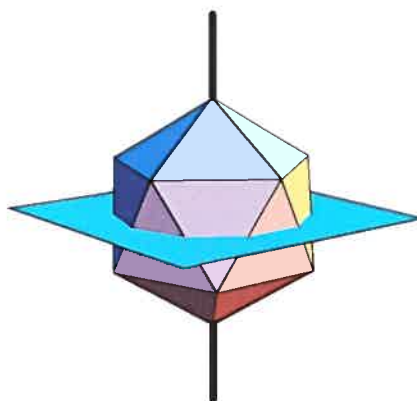


FIG. 3. Élément de Coxeter

2.3. H_4 ET LES QUATERNIONS

Pour bien comprendre le groupe de réflexions de type H_4 , il est utile de le voir en terme de multiplication de quaternions. On peut définir un homomorphisme entre le groupe des quaternions unitaires $\tilde{\mathbb{H}}$ et le groupe de rotation $SO(3, \mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\phi : \tilde{\mathbb{H}} \longrightarrow SO(3, \mathbb{R}).$$

Où $\phi(a, b, c, d) : (0, x, y, z) \mapsto (a, b, c, d)(0, x, y, z)\overline{(a, b, c, d)}$. En notant un élément $a + bi + cj + dk$ de $\tilde{\mathbb{H}}$ comme (a, b, c, d) et en considérant le vecteur $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ comme le quaternion pur $(0, x, y, z)$. On a que

$$\begin{aligned}\phi(a, b, c, d)(0, 1, 0, 0) &= (0, a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2bc + 2ad, -2ac + 2bd) \\ \phi(a, b, c, d)(0, 0, 1, 0) &= (0, 2bc - 2ad, a^2 - b^2 + c^2 - d^2, 2ab + 2cd) \\ \phi(a, b, c, d)(0, 0, 0, 1) &= (0, 2ac + 2bd, -2ab + 2cd, a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\end{aligned}$$

On a donc que la matrice associée à $\phi(a, b, c, d)$ dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2ac + 2bd \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & -2ab + 2cd \\ -2ac + 2bd & 2ab + 2cd & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

et $\det(\phi(a, b, c, d)) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^3 = 1$ puisque (a, b, c, d) est un quaternion unitaire. Le noyau de ϕ est ± 1 ce qui entraîne que la préimage d'un sous-groupe fini $G < SO(3, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\tilde{\mathbb{H}}$ d'ordre deux fois celui de G .

Si on considère un icosaèdre judicieusement positionné dans \mathbb{R}^3 alors son groupe de rotation, qui est isomorphe à Alt_5 (et que l'on notera H_3^+), aura comme préimage le sous-groupe $\phi^{-1}(H_3^+) < \tilde{\mathbb{H}}$, qu'on notera \mathcal{I} constitué des éléments suivants :

$$\phi^{-1}(H_3^+) = \mathcal{I} = \{((\pm 1, 0, 0, 0)), \frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), \frac{1}{2}((\pm \tau, \pm 1, \pm \tau', 0))\}$$

(voir [Gr]) où les parenthèses doubles signifient qu'on prend toutes les permutations paires des entrées et où

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

est le nombre d'or et où

$$\tau' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

On vérifie facilement que $\text{Card}(\{((\pm 1, 0, 0, 0))\}) = 8$, $\text{Card}(\{\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)\}) = 16$ et $\text{Card}(\{\frac{1}{2}((\pm \tau, \pm 1, \pm \tau', 0))\}) = 96$ et donc que $O(\mathcal{I}) = 120$.

Si on voit les éléments de \mathcal{I} comme des vecteurs de \mathbb{R}^4 on a que ces 120 vecteurs forment les sommets d'un polytope régulier nommé 120-cellules. En fait, le groupe

de symétrie du 120-cellules est H_4 et les 120 vecteurs en forment un système de racine. Pour une explication de ceci, voir [Gr]. De plus :

$$\Gamma = \left\{ \frac{1}{2}(\tau, -1, -\tau', 0), \frac{1}{2}(-\tau, 1, -\tau', 0), \frac{1}{2}(1, -\tau', -\tau, 0), \frac{1}{2}(-1, -\tau, 0, -\tau') \right\}$$

forme un système de racine simple. Plus précisément, on peut voir H_4 de la manière suivante. Soit

$$\psi : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$$

$$(l, r) \longmapsto (\psi_{l,r} : q \longmapsto lq\bar{r})$$

et

$$\bar{\psi} : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$$

$$(a, b) \longmapsto (\bar{\psi}_{a,b} : q \longmapsto a\bar{q}b)$$

Bien que $l, r, a, b \in \mathbb{H}$ et que $q \in \mathbb{R}^4$ on peut jongler entre $x+yi+zj+wk \in \mathbb{H}$ et $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ pour que tout fonctionne bien. En identifiant (l, r) avec $(-l, -r)$ et (a, b) avec $(-a, -b)$, on a que les éléments de $\psi_{l,r}$ représentent les rotations et les $\bar{\psi}_{-a,a}$ les réflexions ou si on veut, les éléments de det égale à 1 et les éléments de det égale à -1.

On a donc la représentation matricielle des réflexions associées au système simple Γ suivante :

$$s_1 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & 0 & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3.1. $G := \{\psi_{l,r}, \bar{\psi}_{a,b} | a, b, l, r \in \mathcal{I}\}$ forme un groupe

DÉMONSTRATION. On a que

$$\psi_{l,r}\psi_{s,t}(q) = \psi_{l,r}(sq\bar{t}) = (ls)q\bar{t}\bar{r} = (ls)q(\bar{r}\bar{t}) = \psi_{ls,rt}(q)$$

$$\bar{\psi}_{a,b}\psi_{l,r}(q) = \bar{\psi}_{a,b}(lq\bar{r}) = a\bar{l}\bar{q}\bar{r}\bar{b} = (ar)\bar{q}(\bar{l}\bar{b}) = \bar{\psi}_{ar,\bar{l}\bar{b}}(q)$$

$$\psi_{l,r}\bar{\psi}_{a,b}(q) = \psi_{l,r}(a\bar{q}\bar{b}) = la\bar{q}\bar{b}\bar{r} = (la)\bar{q}(\bar{b}\bar{r}) = \bar{\psi}_{la,\bar{b}\bar{r}}(q)$$

$$\bar{\psi}_{a,b}\bar{\psi}_{c,d}(q) = \bar{\psi}_{a,b}(c\bar{q}\bar{d}) = a\bar{c}\bar{q}\bar{d}\bar{b} = (a\bar{d})\bar{q}(\bar{c}\bar{b}) = \bar{\psi}_{a\bar{d},\bar{c}\bar{b}}(q)$$

et donc l'opération est interne. De plus

$$\psi_{1,1}(q) = 1q\bar{1} = q$$

et

$$\psi_{l,r}^{-1} = \psi_{\bar{l},\bar{r}}, \quad \bar{\psi}_{a,b}^{-1} = \bar{\psi}_{b,a}.$$

L'associativité découle de la composition de fonctions. \square

Le groupe G est en fait le groupe H_4 voir [Gr].

2.4. CLASSES DE CONJUGAISON DU GROUPE H_4

Pour pouvoir construire les classes de conjugaison de H_4 on va se baser sur les classes de conjugaison des groupes utilisés lors de sa construction dans la section précédente. Le groupe de rotation de l'icosaèdre, H_3^+ , possède cinq classes, soit la classe de l'identité (K_1), la classe des rotations d'un angle de π (K_2), d'un angle de $\pm \frac{2\pi}{3}$ (K_3), d'un angle de $\pm \frac{2\pi}{5}$ (K_4) et d'un angle de $\pm \frac{4\pi}{5}$ (K_5) (voir section 2.2).

Pour voir comment on peut trouver les classes de conjugaison de \mathcal{I} à partir de celle de H_3^+ , on remarque que si $p_1, p_2 \in \mathcal{I}$ alors $\phi(p_1)$ est conjugué à $\phi(p_2)$ si et seulement si

$$\phi_q \phi_{p_1} \phi_{\bar{q}} = \phi_{qp_1\bar{q}} = \phi_{p_2}$$

pour un certain q . Ceci revient donc à dire que $\phi(p_1)$ est conjugué à $\phi(p_2)$ si et seulement si il existe un $q \in \mathcal{I}$ tel que $qp_1\bar{q} = \pm p_2$. Donc $\phi^{-1}(K_i)$ est soit une classe de conjugaison de \mathcal{I} ou l'union de deux classes, dépendamment si p et $-p$ sont conjugués. Ceci revient donc à déterminer quand il existe un $q \in \mathcal{I}$ tel que

$qp\bar{q} = -p$ ou, en réarrangeant les termes, quand $qp + pq = 0$. Si on considère $p = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$, on peut l'écrire sous la forme $p = (w, v)$ où $w = a$ et $v = (b, c, d)$. Donc, si on écrit $p = (w_1, v_1)$ et $q = (w_2, v_2)$ on a que

$$pq = (w_1w_2 - v_1 \cdot v_2, w_1v_2 + w_2v_1 + v_1 \times v_2)$$

et l'équation $pq + qp = 0$ devient

$$(2w_1w_2 - 2v_1 \cdot v_2, 2w_1v_2 + 2w_2v_1 + v_1 \times v_2 + v_2 \times v_1) = (2w_1w_2 - 2v_1 \cdot v_2, 2w_1v_2 + 2w_2v_1) = 0$$

On a donc les deux équations :

$$w_1w_2 = v_1 \cdot v_2, \quad w_1v_2 = w_2v_1$$

En faisant le produit scalaire avec v_2 de chaque côté de la deuxième équation, on obtient que

$$w_1|v_2|^2 = w_2v_1 \cdot v_2$$

et en remplaçant w_1w_2 par $v_1 \cdot v_2$ on a

$$w_1|v_2|^2 + w_2w_1w_2 = w_1(|v_2|^2 + w_2^2) = w_1|q|^2$$

d'où on a que $w_1 = 0$. Avec un raisonnement analogue on obtient que $w_2 = 0$. Finalement, on a que $v_1 \cdot v_2 = 0$.

En appliquant ce critère, on voit que seul $\phi^{-1}(K_2)$ est une seule classe de conjugaison. Le tableau 2.4.1. liste les neuf classes de conjugaison de \mathcal{I} , un représentant de chacune et leur cardinalité.

Si on identifie le sous-groupe de rotation de H_4 , i.e. son sous-groupe composé des éléments de det égale à 1, qu'on notera H_4^+ , avec $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ en identifiant (l, r) avec $(-l, -r)$, on a que

$$\psi_{s,t}\psi_{l,r}\psi_{s,t}^{-1} = \psi_{s,t}\psi_{l,r}\psi_{\bar{s},\bar{t}} = \psi_{sl\bar{s},tr\bar{t}}$$

et donc la classe de conjugaison de $\psi_{l,r}$ est :

$$cl(l) \times cl(r) = cl(-l) \times cl(-r).$$

En se rappelant que $\mathcal{K}_1 = -\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3 = -\mathcal{K}_3$, $\mathcal{K}_4 = -\mathcal{K}_5$, $\mathcal{K}_6 = -\mathcal{K}_7$ et $\mathcal{K}_8 = -\mathcal{K}_9$ on obtient 41 classes de conjugaisons pour le groupe de rotation de H_4^+ . On a que $[H_4 : H_4^+] = 2$ et donc que $H_4^+ \triangleleft H_4$. Ce qui entraîne qu'une classe de conjugaison

TAB. 2.4.1

| | |
|------------------------|--|
| $ \mathcal{K}_1 = 1$ | $p_1 = (1, 0, 0, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_2 = 1$ | $p_2 = (-1, 0, 0, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_3 = 30$ | $p_3 = (0, 1, 0, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_4 = 20$ | $p_4 = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_5 = 20$ | $p_5 = \frac{1}{2}(-1, \tau', -\tau, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_6 = 12$ | $p_6 = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ |
| $ \mathcal{K}_7 = 12$ | $p_7 = \frac{1}{2}(-\tau, -1, \tau', 0)$ |
| $ \mathcal{K}_8 = 12$ | $p_8 = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| $ \mathcal{K}_9 = 12$ | $p_9 = \frac{1}{2}(\tau', -\tau, -1, 0)$ |

de H_4^+ peut soit rester une classe de conjugaison dans H_4 soit faire partie d'une classe de conjugaison de H_4 qui est l'union de deux classes de H_4^+ . Si on regarde l'action par conjugaison de $\bar{\psi}_{-1,1} \in H_4 - H_4^+$, on a que $\bar{\psi}_{-1,1} \psi_{l,r} \bar{\psi}_{-1,1}^{-1} = \psi_{r,l}$. Donc les classes de conjugaison suivantes :

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_3 \times \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4 \times \mathcal{K}_4, \mathcal{K}_6 \times \mathcal{K}_6, \mathcal{K}_8 \times \mathcal{K}_8,$$

$$\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_4 \times \mathcal{K}_5, \mathcal{K}_6 \times \mathcal{K}_7, \mathcal{K}_8 \times \mathcal{K}_9$$

sont des classes de conjugaison de H_4 et les 32 autres classes de H_4^+ s'unissent pour donner 16 classes de conjugaison de la forme

$$(\mathcal{K}_i \times \mathcal{K}_j) \cup (\mathcal{K}_j \times \mathcal{K}_i).$$

Pour trouver les classes de conjugaison dans $H_4 - H_4^+$ on commence par considérer les orbites de l'action par conjugaison de H_4^+ sur le translaté $\bar{\psi}_{-1,1} H_4^+$. On peut trouver la taille de ces orbites en trouvant l'index du (H_4^+) -centralisateur d'un représentant dans H_4^+ . Soit $\bar{\psi}_{a,b} \in \bar{\psi}_{-1,1} H_4^+$ et $\psi_{l,r} \in H_4^+$ on voit que

$$\psi_{l,r} \bar{\psi}_{a,b} \psi_{l,r}^{-1} = \bar{\psi}_{la\bar{r}, lb\bar{r}}$$

et donc on a que

$$\mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b}) = \{\psi_{l,r} \in H_4^+ \mid la\bar{r} = \pm a, lb\bar{r} = \pm b\}$$

où le $\pm a$ et le $\pm b$ sont de même signe. En d'autres termes, on a que $\psi_{l,r} \in \mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b})$ si et seulement si

$$r = \pm \bar{a}la = \pm \bar{b}lb \quad \text{ou} \quad l(a\bar{b}) = (a\bar{b})l$$

ce qui revient à dire que l est dans le centralisateur de $a\bar{b}$ dans \mathcal{I} . Et donc on a que

$$\mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b}) = \{\psi_{l,r} \in H_4^+ \mid l \in \mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(a\bar{b}) \text{ et } r = \pm \bar{a}la\}.$$

Plus particulièrement, puisque $\psi_{l,r} = \psi_{-l,-r}$, on a que

$$|\mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b})| = |\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(a\bar{b})|.$$

On peut finalement trouver l'ordre d'une orbite comme suit :

$$\begin{aligned} |\text{Orb}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b})| &= [H_4^+ : (H_4^+)_{\bar{\psi}_{a,b}}] = [H_4^+ : \mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b})] \\ &= \frac{|H_4^+|}{|\mathcal{Z}_{H_4^+}(\bar{\psi}_{a,b})|} = \frac{|H_4^+|}{|\mathcal{Z}_{\mathcal{I}}(a\bar{b})|} \\ &= \frac{|H_4^+|}{\left(\frac{|\mathcal{I}|}{cl(a\bar{b})}\right)} = \frac{7200}{120} |cl(a\bar{b})| \\ &= 60 |cl(a\bar{b})|. \end{aligned}$$

On a vu que \mathcal{I} possédait 9 classes de conjugaison ce qui nous donne un total de $9+9+16 = 34$ classes de conjugaison pour H_4 . Soit $p_i \in \mathcal{K}_i$ un représentant d'une des 9 classes de \mathcal{I} . Si $\bar{\psi}_{p_i,1}$ et $\bar{\psi}_{p_j,1}$ sont conjugués par l'entremise d'un élément de H_4^+ alors, il existe $l, r \in \mathcal{I}$ tel que $lp_i\bar{r} = p_j$ et $l\bar{r} = 1$ et donc que $lp_i\bar{l} = p_j$. Si, par contre, ils sont conjugués par un élément de $H_4 - H_4^+$ alors il existe $a, b \in \mathcal{I}$ tel que $ba = p_j$ et $b\bar{p}_i a = 1$ ou $p_i = ab$. En fait, dans les deux cas on a que p_i et p_j sont conjugués dans \mathcal{I} et donc on a que $i = j$. Finalement, on a que $\bar{\psi}_{p_i,1}$ pour $1 \leq i \leq 9$ est un représentant d'une des 9 classes de conjugaison de $H_4 - H_4^+$. En conclusion, le tableau 2.4.2 liste les 34 classes de conjugaison de H_4 avec un représentant.

TAB. 2.4.2

| Classes | $\psi_{l,r}$ ou $\bar{\psi}_{p,1}$ | Classes | $\psi_{l,r}$ ou $\bar{\psi}_{p,1}$ |
|----------|---|----------|---|
| C_1 | $l = r = 1$ | C_{18} | $l = i, r = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ |
| C_2 | $l = -r = 1$ | C_{19} | $l = i, r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_3 | $l = r = i$ | C_{20} | $l = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0), r = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ |
| C_4 | $l = r = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ | C_{21} | $l = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0), r = -\frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ |
| C_5 | $l = -r = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ | C_{22} | $l = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0), r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_6 | $l = r = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ | C_{23} | $l = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0), r = -\frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_7 | $l = -r = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ | C_{24} | $l = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0), r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_8 | $l = r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ | C_{25} | $l = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0), r = -\frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_9 | $l = -r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ | C_{26} | $p = 1$ |
| C_{10} | $l = 1, r = (0, 1, 0, 0)$ | C_{27} | $p = -1$ |
| C_{11} | $l = 1, r = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ | C_{28} | $p = i$ |
| C_{12} | $l = 1, r = -\frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ | C_{29} | $p = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ |
| C_{13} | $l = 1, r = \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ | C_{30} | $p = -\frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ |
| C_{14} | $l = 1, r = -\frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau', 0)$ | C_{31} | $p = \frac{1}{2}(\tau, -\tau', 1, 0)$ |
| C_{15} | $l = 1, r = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ | C_{32} | $p = -\frac{1}{2}(\tau, -\tau', 1, 0)$ |
| C_{16} | $l = 1, r = -\frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ | C_{33} | $p = \frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |
| C_{17} | $l = i, r = \frac{1}{2}(1, -\tau', \tau, 0)$ | C_{34} | $p = -\frac{1}{2}(-\tau', \tau, 1, 0)$ |

Chapitre 3

THÉORIE DES INVARIANTS

3.1. INTRODUCTION

Pour mieux comprendre les éléments réguliers d'un groupe de réflexion, on va devoir étudier les espaces propres des éléments du groupe, et la théorie des invariants va être un outil crucial pour faire cela. De plus, les éléments de Coxeter et leurs généralisations, les éléments réguliers, ont un intérêt, en outre, pour leurs rôles dans la théorie des invariants des groupes de réflexions.

La théorie des invariants a pour but d'étudier les éléments qui sont laissés inchangés par une action de groupe. Étant donné un groupe G et une représentation $\rho : G \rightarrow GL(V)$ ou V est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{F} , on obtient une action de G sur V soit $g \cdot v = \rho(g)(v)$. On peut aussi étendre cette action à l'anneau que nous décrirons à l'instant.

Question de fixer un peu les notations, pour le reste du mémoire \mathbb{F} désignera un corps de caractéristique 0 et V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{F} ¹. À partir de V on peut construire naturellement l'algèbre symétrique et l'algèbre alternée de V .

$$S(V) = \text{Sym}(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} S^i V = \mathbb{F} \oplus V \oplus S^2 V \oplus S^3 V \dots$$

$$A(V) = \text{Alt}(V) := \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\wedge i} = \mathbb{F} \oplus V \oplus (V \wedge V) \oplus (V \wedge V \wedge V) \dots$$

¹Bien qu'à plusieurs reprises les définitions et les résultats seront vrais en caractéristique autre que 0, on va s'y restreindre ici pour ne pas alourdir le mémoire inutilement.

Cette écriture met en évidence le fait que ces algèbres sont graduées. Puisque l'action de G est définie sur V , on peut étendre l'action de G sur tout $S(V)$ ou tout $A(V)$.

Définition 3.1.1. *Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel et $G \subset GL(V)$ alors l'anneau des invariants est*

$$S(V)^G = \{f \in S(V) \mid \varphi \cdot f = f, \forall \varphi \in G\}$$

De plus, l'action de G sur $S(V)$ respecte la graduation de telle sorte que

$$S(V)^G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i(V)^G$$

Il est souvent plus convivial de travailler avec l'anneau des invariants de $S(V^*)$. L'algèbre symétrique $S(V^*)$ correspond à l'algèbre des polynômes lorsque la caractéristique du corps \mathbb{F} est 0. En caractéristique p , différente de zéro, il y a un problème car il se peut qu'il n'y ait pas suffisamment d'éléments pour différencier x de x^p . On peut remédier à cela si on laisse l'évaluation prendre des valeurs dans $\bar{\mathbb{F}}$. Or dans les cas qui vont nous intéresser, les groupes seront de réflexions et donc les espaces vectoriels seront sur des corps de caractéristique 0. Par contre, plusieurs résultats que l'on verra seront vrais dans le cadre plus général des groupes de pseudo-réflexions, qui peuvent être définis sur des espaces vectoriels sur des corps de caractéristique p . L'action de G sur V^* est donnée comme suit. Soit $v \in V, p \in V^*$ et $\varphi \in G$ alors

$$\varphi \cdot p(v) = p(\varphi^{-1} \cdot v).$$

Pour démontrer des propositions qui vont nous servir à démontrer le théorème de Piazola-Weiss (théorème 4.2.1) on va utiliser plutôt l'anneau des invariants étendu.

Définition 3.1.2. *Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel et $G \subset GL(V)$ alors l'anneau des invariants étendu est*

$$[S(V) \otimes A(V)]^G.$$

La proposition suivante va être très utile dans le chapitre 4.

Proposition 3.1.1. *Soit G un groupe fini et $v, w \in V$ alors les deux énoncés suivants sont équivalents.*

(1) *Il existe $g \in G$ tel que $g \cdot v = w$*

(2) *Pour tout $f \in S(V^*)^G$ on a que $f(v) = f(w)$*

DÉMONSTRATION. ((1) \implies (2)) Puisque $g \cdot v = w$ on a que pour $f \in S(V^*)^G$

$$f(v) = g^{-1} \cdot f(v) = f(g \cdot v) = f(w)$$

((2) \implies (1)) Supposons $f(v) = f(w)$ pour tout $f \in S(V^*)^G$. Si on fixe $a \in V$, on peut définir l'application évaluation suivante

$$e_a : S(V^*) \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$f \longmapsto f(a).$$

On a que $\ker(e_a)$ est l'idéal maximal de $S(V^*)$ engendré par

$$H_a := \{f \in V^* \mid f(a) = 0\}.$$

Si on prend $g \in G$ on a que $g \cdot a = b$ si et seulement si $g \cdot H_a = H_b$ car

$$0 = f(a) = f(g^{-1} \cdot b) = g \cdot f(b).$$

Et donc, on a que $g \cdot a = b$ si et seulement si $g \cdot \ker(e_a) = \ker(e_b)$, ce qui revient à dire que $\ker(e_a)$ détermine a uniquement. Notre supposition du départ revient donc à dire que

$$S(V^*)^G \cap \ker(e_v) = S(V^*)^G \cap \ker(e_w).$$

Par le théorème d'évitement de premier (prime avoidance)(voir [A, M]), on a que $\ker(e_w) \subset g \cdot \ker(e_v) = \ker(e_{g \cdot v})$. Par la maximalité de ces idéaux, on a que $\ker(e_w) = \ker(e_{g \cdot v})$ et donc $w = g \cdot v$. \square

3.2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE $S(V)^G$

Voici quelques propriétés de $S(V)^G$ qui vont nous être utile, plus tard.

Proposition 3.2.1. *Soit $G \subset GL(V)$ fini, alors $S(V)$ est entier sur $S(V)^G$.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in S(V)$ et posons

$$f(T) = \prod_{\varphi \in G} (T - \varphi \cdot x).$$

On a que

$$f(x) = (x - 1 \cdot x) \prod_{\varphi \in G, \varphi \neq 1} (x - \varphi \cdot x) = 0.$$

Reste à voir que les a_i sont dans $S(V)^G$ où $f(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$.

Chaque a_i est un polynôme symétrique en les $\varphi \cdot x$. Mais puisque G permute les $\varphi \cdot x$ il s'ensuit que ces polynômes symétriques sont dans $S(V)^G$ \square

Lemme 3.2.1. *Soit A et B des \mathbb{F} -algèbres telles que $A \subset B$ est entière et B est une A -algèbre de type finie alors B est fini sur A .*

DÉMONSTRATION. Soit $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ des générateurs de B comme A -algèbre.

On a la suite d'inclusion :

$$A \subset A[a_1] \subset A[a_1, a_2] \subset \dots \subset A[a_1, a_2, \dots, a_n] = B.$$

Puisque chaque a_i est entier, il suit que chaque extension est finie et donc B est fini sur A . \square

Théorème 3.2.1. (Hilbert-Noether) *Si $G \subset GL(V)$ est fini, alors $S(V)^G$ est une \mathbb{F} -algèbre de type finie.*

DÉMONSTRATION. Pour faire la preuve on va trouver une algèbre de type fini $A \subset S(V)^G$ telle que l'extension soit finie. $S(V)^G$ sera donc de type fini. La proposition précédente nous disait que $S(V)$ est entier et fini sur $S(V)^G$. Définissons A comme étant l'algèbre engendrée par les a_i , qui sont en nombre fini, définis dans la preuve de la proposition précédente. Pour voir que l'extension $A \subset S(V)^G$ est finie, il suffit de montrer que $A \subset S(V)$ l'est car A est Noetherien et tout sous-module d'un A -module de type fini est de type fini. Par définition, $S(V)$ est entier sur A et on a que $S(V)$ est de type fini. Le lemme suffit pour terminer la preuve. \square

Définition 3.2.1. *Soit $G \subset GL(V)$ ou V est un espace vectoriel sur \mathbb{F} , alors on dit que G est **modulaire** si la caractéristique de \mathbb{F} divise $|G|$ et **non-modulaire** sinon.*

3.3. SÉRIE DE HILBERT (OU DE POINCARÉ)

Les séries de Hilbert sont des outils extrêmement utiles qui joueront un rôle crucial dans tout le reste de cet ouvrage.

Définition 3.3.1. Soit M un espace vectoriel sur \mathbb{F} gradué et tel que $\dim M_i < \infty$ et que $\dim M_i = 0$ pour $i < 0$. On définit la **série de Hilbert** ou **série de Poincaré** comme étant :

$$H_t(M) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{F}} M_i) t^i$$

Les séries de Hilbert possèdent, entre autres, les propriétés d'être multiplicatives et additives. La multiplicativité dit que

$$H_t(M \otimes_{\mathbb{F}} M') = H_t(M)H_t(M').$$

Et l'additivité dit que si la suite

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

est exacte, alors

$$H_t(M) = H_t(M') + H_t(M'')$$

Lorsqu'on veut calculer la série de Hilbert de l'anneau des invariants, le théorème suivant s'avère très utile.

Théorème 3.3.1. (Molien) Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{F} de caractéristique 0 et soit $G \subset GL(V)$ un sous-groupe fini, alors

$$H_t(S(V)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)}$$

Avant de faire la preuve du théorème de Molien, on va montrer deux lemmes.

Lemme 3.3.1. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : V \rightarrow V$ une transformation linéaire avec $\varphi_i : S_i(V) \rightarrow S_i(V)$ son extension à $S_i(V)$. Alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{tr}(\varphi_i) t^i = \frac{1}{\det(1 - \varphi t)}.$$

DÉMONSTRATION. Si on se met dans $\overline{\mathbb{F}}$, la clôture algébrique de \mathbb{F} , on peut trouver une base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de V telle que la matrice de φ par rapport à cette base soit triangulaire supérieure i.e.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On a que $S(V) = \overline{\mathbb{F}}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ de telle sorte que $S_i(V)$ a comme base $\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \mid k_1 + k_2 + \dots + k_n = i\}$. En ordonnant cette base de manière lexicographique, on obtient que φ_i est triangulaire supérieur avec $\{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n} \mid k_1 + k_2 + \dots + k_n = i\}$ sur la diagonale. D'où

$$\text{tr}(\varphi_i) = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = i} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \text{tr}(\varphi_i) t^i &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = i} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n} \right) t^i \\ &= \left(\sum_{k_1} \lambda^{k_1} t^{k_1} \right) \dots \left(\sum_{k_n} \lambda^{k_n} t^{k_n} \right) = \left(\frac{1}{1 - \lambda_1 t} \right) \dots \left(\frac{1}{1 - \lambda_n t} \right) = \frac{1}{\det(1 - \varphi t)} \end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.2. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie et $G \subset GL(V)$ un sous-groupe fini. Alors

$$\dim_{\mathbb{F}} V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi)$$

DÉMONSTRATION. L'hypothèse que G soit non-modulaire assure que le théorème de Maschke s'applique et donc V se décompose en une somme directe de G -modules irréductibles. Posons χ comme étant le caractère de la représentation associée à l'action considérée et $\mathbb{1}$ la représentation triviale. Le produit scalaire standard

$$(\chi, \mathbb{1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi) \mathbb{1}(\varphi)$$

compte le nombre de fois que la représentation triviale apparaît dans la représentation et donc la dimension sur \mathbb{F} de V^G d'où

$$\dim_{\mathbb{F}} V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi) \mathbb{1}(\varphi) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi)$$

□

DÉMONSTRATION. (Théorème de Molien) Pour chaque application linéaire $\varphi : V \rightarrow V$ et son application induite φ_i sur $S_i(V)$ on a

$$\dim_{\mathbb{F}} S_i^G(V) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi_i).$$

Et donc

$$\begin{aligned} H_t(S(V)^G) &= \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{F}} S_i^G(V)) t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \chi(\varphi_i) \right) t^i \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \text{tr}(\varphi_i) t^i \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)} \end{aligned}$$

□

3.4. THÉORIE DES INVARIANTS ET GROUPES DE RÉFLEXION

Proposition 3.4.1. *Soit $G \subset GL(V)$ un sous-groupe, alors*

$$H_t(S(V)^G) = \frac{1}{|G|} \left(\frac{1}{(1-t)^n} + \frac{C_{n-1}}{(1-t)^{n-1}} + \dots \right)$$

où $n = \dim_{\mathbb{F}} V$ et $2C_{n-1} = \#$ de pseudo-réflexions dans G

DÉMONSTRATION. Par le théorème de Molien on a que

$$H_t(S(V)^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)}.$$

On va donc développer $\frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)}$ en série de Laurent en $(t-1)$ et regarder les premiers coefficients. On a pour chaque $\varphi \in G$ une décomposition en facteurs irréductibles de la forme $\det(1 - \varphi t) = f(t)(1-t)^k$ où $k = \dim_{\mathbb{F}} V^\varphi$. En particulier, on a pour s , une pseudo-réflexion, que $\det(1 - st) = (1 - \xi_s t)(1-t)^{n-1}$,

où ξ_s est une valeur propre non triviale de s , étant donné que s fixe un hyperplan. On peut donc écrire

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)} = \frac{1}{|G|} \frac{1}{(1-t)^n} + \sum_s \frac{1}{(1 - \xi_s t)(1-t)^{n-1}} + \dots$$

où s varie sur les pseudo-réflexions de G . Donc, dans la série de Laurent

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{1}{\det(1 - \varphi t)} = \frac{1}{|G|} \frac{1}{(1-t)^n} + \frac{C_{n-1}}{(1-t)^{n-1}} + \dots,$$

où le coefficient C_{n-1} apparaît dans le développement de

$$\sum_s \frac{1}{(1 - \xi_s t)(1-t)^{n-1}} = \frac{C_{n-1}}{(1-t)^{n-1}} + \frac{C_{n-2}}{(1-t)^{n-2}} + \dots$$

Enfin pour déterminer la valeur de C_{n-1} , il suffit de multiplier chaque côté de cette dernière équation par $(1-t)^{n-1}$ et ensuite poser $t = 1$ pour obtenir

$$\sum_s \frac{1}{1 - \xi_s} = C_{n-1}.$$

Et puisque s est une pseudo-réflexion si et seulement si s^{-1} l'est, on a aussi que

$$\sum_s \frac{1}{1 - \xi_s^{-1}} = C_{n-1}.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{1 - \xi_s} + \frac{1}{1 - \xi_s^{-1}} = \frac{1 - \xi_s^{-1} + 1 - \xi_s}{(1 - \xi_s)(1 - \xi_s^{-1})} = 1$$

on voit que $2C_{n-1}$ est égale au nombre de pseudo-réflexions de G . \square

Théorème 3.4.1. *Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{F} de dimension finie et $G \subset GL(V)$ un sous-groupe fini. Supposons que*

$$S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

où les x_i sont algébriquement indépendants et $d_i = \deg(x_i)$. Alors

$$(1) |G| = d_1 d_2 \dots d_n$$

$$(2) \text{ le nombre de pseudo-réflexions dans } G \text{ est } (d_1 - 1) + \dots + (d_n - 1)$$

DÉMONSTRATION. Puisque

$$S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n] = \mathbb{F}[x_1] \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x_2] \otimes_{\mathbb{F}} \dots \mathbb{F}[x_n],$$

car les x_i sont algébriquement indépendants, et que

$$H_t(\mathbb{F}[x]) = 1 + t^d + t^{2d} + \dots = \frac{1}{1 - t^d}$$

où $d = \deg(x)$, la multiplicativité des séries de Hilbert nous donne que

$$H_t(S(V)^G) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})} = \frac{1}{(1 - t)^n \prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{d_i-1})}.$$

La proposition précédente disait que

$$H_t(S(V)^G) = \frac{1}{|G|} \left(\frac{1}{(1 - t)^n} + \frac{C_{n-1}}{(1 - t)^{n-1}} + \dots \right).$$

En égalant ces deux expressions et en multipliant de chaque côté par $(1 - t)^n$ on obtient

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{d_i-1})} = \frac{1}{|G|} (1 + C_{n-1}(1 - t) + \dots)$$

et on peut réécrire ceci comme

$$|G| = \left(\prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{d_i-1}) \right) (1 + C_{n-1}(1 - t) + \dots).$$

Finalement en posant $t = 1$ on a $|G| = \prod_{i=1}^n d_i$ ce qui démontre la première partie.

Si on prend l'équation :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{d_i-1})} = \frac{1}{|G|} (1 + C_{n-1}(1 - t) + \dots)$$

et qu'on différencie par rapport à t (en utilisant la différentiation logarithmique) on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 + t + \dots + t^{d_i-1})} \left(- \sum_{i=1}^n \frac{1 + 2t + \dots + (d_i - 1)t^{d_i-2}}{1 + t + \dots + t^{d_i-1}} \right) \\ &= \frac{1}{|G|} (-C_{n-1} - 2C_{n-2}(1 - t) - \dots). \end{aligned}$$

En posant $t = 1$ on a

$$\frac{1}{|G|} C_{n-1} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n d_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{d_i(d_i - 1)}{2d_i} \right)$$

et donc

$$2C_{n-1} = \sum_{i=1}^n (d_i - 1).$$

Puisque $2C_{n-1}$ est le nombre de pseudo-réflexions dans G on a donc le résultat recherché. \square

Théorème 3.4.2. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{F} et $G \subset \text{Gl}(V)$ un groupe fini non modulaire. Étant donné $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \subset S(V)^G$ où les x_i sont algébriquement indépendants, si $S(V)^G$ est fini sur $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ et que l'on pose $\deg(x_i) = d_i$ alors*

$$(1) |G| \text{ divise } d_1 \dots d_n$$

$$(2) \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] = S(V)^G \text{ si et seulement si } |G| = d_1 \dots d_n$$

DÉMONSTRATION. On a que $S(V)^G$ est libre sur $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ (voir [K] p.176) et on peut donc écrire

$$S(V)^G = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] \alpha_i$$

d'où

$$H_i(S(V)^G) = \frac{t^{\deg(\alpha_1)} + \dots + t^{\deg(\alpha_r)}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{d_i})}.$$

Avec une preuve quasi identique à celle du théorème précédent on obtient que

$$s|G| = d_1 \dots d_n.$$

\square

Le théorème suivant nous dit, en particulier, que lorsque le groupe qu'on considère est en fait un groupe de pseudo-réflexion la condition que $S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ du théorème précédent est toujours vérifiée et donc que son résultat est toujours vrai.

Définition 3.4.1. *Les entiers $\{d_1, \dots, d_n\}$ définis dans le théorème précédent sont les **degrés de G** . Et si on pose $p_i = d_i - 1$ alors les entiers $\{p_1, \dots, p_n\}$ sont les **exposants de G** .*

À titre de référence, le tableau 3.4.1. donne les degrés des groupes de Coxeter irréductibles.

TAB. 3.4.1. Degré des groupes de Coxeter irréductibles

| Groupe | degrés |
|----------|--------------------------------|
| A_n | $2, 3, \dots, n + 1$ |
| B_n | $2, 4, 6, \dots, 2n$ |
| D_n | $2, 4, 6, \dots, 2n - 2, n$ |
| E_6 | $2, 5, 6, 8, 9, 12$ |
| E_7 | $2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$ |
| E_8 | $2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$ |
| F_4 | $2, 6, 8, 12$ |
| $G_2(2)$ | $2, 6$ |
| $G_2(m)$ | $2, m$ |
| H_3 | $2, 6, 10$ |
| H_4 | $2, 12, 20, 30$ |

Théorème 3.4.3. (Chevalley-Shephard-Todd-Bourbaki) Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{F} de dimension finie et $G \subset GL(V)$ un sous-groupe fini non-modulaire alors G est un groupe de pseudo-réflexion si et seulement si $S(V)^G$ est une algèbre polynomiale.

Pour une preuve de ce théorème voir [K] chapitre 18.

3.5. INVARIANT GAUCHE

Avant de passer à la section suivante on va devoir introduire quelques résultats qui vont nous permettre d'y ajouter une "saveur" de groupe de pseudo-réflexions.

On a déjà vu que lorsqu'on avait une action de groupe sur un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{F} on pouvait considérer l'anneau de tous les éléments de $S(V)$ invariants sous cette action. On peut aussi considérer d'autres ensembles. Si on a un homomorphisme :

$$\psi : G \longrightarrow \mathbb{F}^*,$$

on dit que $f \in S(V)$ est un invariant relatif à ψ si

$$\varphi \cdot f = \psi(\varphi)f.$$

Dans ce qui suit, on va s'intéresser plus particulièrement au cas où l'homomorphisme est l'inverse du déterminant.

Définition 3.5.1. $f \in S(V)$ est dit un *invariant gauche* si f est un invariant relatif à $(\det)^{-1}$ i.e.

$$\varphi \cdot f = (\det)^{-1}(\varphi)f$$

Pour chaque pseudo-réflexion s d'un groupe de pseudo-réflexion, on peut choisir un $\alpha_s \in V$ et $\Delta_s : V \rightarrow \mathbb{F}$ tel que

$$s \cdot x = x + \Delta_s(x)\alpha_s$$

pour tout $x \in V$. En particulier, l'élément α_s est un vecteur propre pour s car :

$$s \cdot \alpha_s = (1 + \Delta_s(\alpha_s))\alpha_s = \xi\alpha_s.$$

On peut donc définir un invariant gauche très particulier, en considérant les α_s comme des éléments de $S_1(V) = V$, comme suit :

$$\Omega := \prod_s \alpha_s \in S(V).$$

On va maintenant entreprendre de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 3.5.1. Ω est un invariant gauche.

Proposition 3.5.2. Ω divise tous les invariants gauche.

Mais avant de les démontrer, on va montrer quelques lemmes. Le lemme suivant va nous servir à simplifier la décomposition de Ω .

Lemme 3.5.1. Deux pseudo-réflexions s_1 et s_2 ont les mêmes hyperplans invariants H si et seulement si α_{s_1} est un multiple de α_{s_2} .

DÉMONSTRATION. Soit $K = \langle s_1, s_2 \rangle \leq G$ le sous-groupe de G engendré par s_1 et s_2 . Étant donné qu'on considère que les groupes dont la caractéristique de \mathbb{F} ne divise pas l'ordre de G on aura qu'elle ne divise pas l'ordre de K non plus. Donc, par le théorème de Maschke l'action de K sur V est complètement réductible. Si α_{s_1} est un multiple de α_{s_2} alors on a que $\mathbb{F}\alpha_{s_1} = \mathbb{F}\alpha_{s_2} = L$. Puisque α_{s_1} et α_{s_2} sont des valeurs propres de s_1 et s_2 respectivement, on a que L est invariant sous l'action de K . On peut donc trouver un hyperplan H tel que $V = L \oplus H$.

Étant donné un vecteur propre v de s_1 , on peut le décomposer en le projetant

sur L et sur H , i.e. $v = v_L + v_H$. On a que v_L et v_H sont vecteurs propres de s_1 respectivement sur L et sur H . La valeur propre de v_L sera une racine de l'unité non triviale tandis que celles de v_H seront 1. On aura donc que l'hyperplan invariant de s_1 sera entièrement dans H . Puisque H et l'hyperplan invariant ont la même dimension, ils n'auront pas le choix que de coïncider. Puisque le même résultat s'applique pour s_2 , on a que s_1 et s_2 ont le même hyperplan invariant. Supposons maintenant que s_1 et s_2 aient un hyperplan invariant H en commun. On peut donc choisir une droite L invariante sous l'action de K tel que $V = H \oplus L$. Les vecteurs propres α_{s_1} et α_{s_2} ne peuvent pas être dans H et donc ils doivent être multiples l'un de l'autre. \square

On peut remarquer que si H est un hyperplan de V et que G_H est le groupe engendré par les pseudo-réflexions de G ayant H comme hyperplan invariant alors, G_H est un groupe cyclique. Pour voir ceci, il suffit de remarquer que les éléments de G_H correspondent à une multiplication par une racine n 'ième de l'unité sur L . Donc G_H sera un groupe cyclique d'ordre le plus petit multiple commun. Cette dernière remarque nous permet d'écrire

$$\Omega = \prod_H \alpha_H^{|G_H|-1}$$

puisque pour chaque hyperplan H on peut choisir un α_H pour tous les s l'ayant comme hyperplan invariant.

On peut diviser les hyperplans invariants $\{H\}$ en leurs orbites sous l'action d'une pseudo-réflexion s . Si on prend le vecteur propre spécial α_{H_s} de s défini plus haut, on a que

$$s \cdot \alpha_{H_s} = (\det s) \alpha_{H_s}$$

et l'orbite de H_s n'est formée que d'un seul élément.

Lemme 3.5.2. *Si $\{H_1, \dots, H_k\}$ est une orbite différente de $\{H_s\}$ alors*

$$s \cdot (\alpha_{H_1} \dots \alpha_{H_k}) = \alpha_{H_1} \dots \alpha_{H_k}$$

DÉMONSTRATION. (de la proposition 3.5.1)

On a vu que $\Omega = \prod_H \alpha_H^{|G_H|-1}$, et aussi que $s \cdot \alpha_{H_s} = (\det s) \alpha_{H_s}$ d'où

$$\begin{aligned} s \cdot (\alpha_{H_s}^{|G_H|-1}) &= (\det s)^{|G_H|-1} \alpha_{H_s}^{|G_H|-1} = (\det s^{|G_H|}) (\det s)^{-1} \alpha_{H_s}^{|G_H|-1} \\ &= (\det s)^{-1} \alpha_{H_s}^{|G_H|-1} \end{aligned}$$

et par le lemme précédent

$$s \cdot \left(\prod_{H \neq H_s} \alpha_H^{|G_H|-1} \right) = \left(\prod_{H \neq H_s} \alpha_H^{|G_H|-1} \right)$$

et donc

$$s \cdot \Omega = (\det s)^{-1} \Omega$$

□

DÉMONSTRATION. (de la proposition 3.5.2)

Soit f un polynôme gauche, si on montre que pour chaque hyperplan de réflexion H , f est divisible par $\alpha_H^{|G_H|-1}$ on aura que f est divisible par Ω puisque $S(V)$ est à factorisation unique et que les α_H sont relativement premiers par le lemme 3.5.1.

Soit H un hyperplan de réflexion, et s une pseudo-réflexion d'ordre $|G_H|$ ayant H comme hyperplan invariant. On a que $s \cdot \alpha_H = (\det s) \alpha_H$. Si on pose $\alpha_H = v_1$, on peut compléter la base de V en $\{v_1, \dots, v_n\}$. On a donc que $f \in S(V) = \mathbb{F}[v_1, \dots, v_n]$. Puisque f a été choisi comme étant gauche, on a $s \cdot f = (\det s) f$. De plus $s \cdot (v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}) = (\det s)^{k_1} (v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n})$ par notre choix de v_1 . On peut donc développer f en terme des monômes $v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$ où $k_1 \equiv -1 \pmod{|G_H|}$. Et en particulier, $k_1 \geq |G_H| - 1$.

□

On va maintenant appliquer ces résultats sur un invariant gauche particulier que l'on va définir sous peu.

Soit $x \in V$, posons dx comme étant l'image de x dans $A_1(V) = V$. L'application

$$d : V \longrightarrow A(V)$$

s'étend à l'application différentielle

$$d : S(V) \otimes A(V) \longrightarrow S(V) \otimes A(V)$$

définie par

$$d(x) = 0 \text{ pour tout } x \in A(V)$$

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \text{ pour tout } x, y \in S(V) \otimes A(V).$$

De plus, l'application d est compatible avec la graduation de $S(V) \otimes A(V)$ et peut donc se restreindre à

$$d : S_i(V) \otimes A_j(V) \longrightarrow S_{i-1}(V) \otimes A_{j+1}(V).$$

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de V et $G \subset Gl(V)$ un groupe de pseudo-réflexion fini et non modulaire. Alors on a que

$$S(V) = \mathbb{F}[v_1, v_2, \dots, v_n]$$

et par le théorème de Chevalley-Shephard-Todd-Bourbaki (théorème 3.4.3) on a

$$S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

On peut développer les $\{dx_i\}$ dans $S(V) \otimes A(V)$ en utilisant la formule de dérivée partielle

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial v_j} dv_j.$$

Soit maintenant

$$J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial v_j} \right]$$

le jacobien.

Proposition 3.5.3. $J = \lambda \Omega$ pour un $\lambda \in \mathbb{F}$

DÉMONSTRATION. La démonstration est similaire à celle de la proposition 3.5.2. on conservera donc les mêmes notations. Soit maintenant $f \in S(V)^G = \mathbb{F}[v_1, \dots, v_n]^G$ avec les v_i comme dans le lemme 3.5.2. On peut développer f en terme des monômes $v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$ avec $k_1 \equiv 0 \pmod{|G_H|}$ puisque

$$s \cdot f = f$$

et

$$s \cdot (v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}) = (\text{dets})^{k_1} (v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}).$$

Donc f est divisible par $v_1^{|G_H|}$ et par conséquent $\frac{\partial f}{\partial v_1}$ est divisible par $t_1^{|G_H|-1}$. On a donc que la première colonne de $\left[\frac{\partial x_i}{\partial v_j} \right]$ est divisible par $t_1^{|G_H|-1}$ et donc que J l'est aussi. Par un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition 3.5.2. on a que J est divisible par Ω . De plus J et Ω ont le même degré puisque le degré de Ω est le nombre de pseudo-réflexions de G tandis que

$$\text{deg} J = (d_1 - 1) + \dots + (d_n - 1)$$

où les d_i sont les degrés de G et par le théorème 3.4.1. $(d_1 - 1) + \dots + (d_n - 1)$ est le nombre de pseudo-réflexions de G . Il s'ensuit que

$$J = \lambda \Omega.$$

□

Proposition 3.5.4. $J = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial v_j} \right] \neq 0$

DÉMONSTRATION. Pour montrer que $J \neq 0$ on va montrer que cette matrice est inversible en trouvant explicitement son inverse avec la règle de dérivation en chaîne (voir annexe)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial z}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

En posant $z = x_i$ on obtient :

$$\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \delta_{i,j}.$$

De ceci on voit que $J^{-1} = \det \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right]$

□

3.6. SÉRIE DE HILBERT DE $[S(V) \otimes A(V)]^G$

Comme mentionné au début du chapitre, pour démontrer le théorème de Piazola-Weiss, on va avoir besoin de l'anneau des invariants étendu et, plus particulièrement, on va avoir besoin de connaître sa série de Hilbert. On va maintenant entreprendre de montrer que les $\{dx_i\}$, introduits à la section précédente,

forment une sous-algèbre alternée

$$A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \subset S(V) \otimes A(V).$$

Lemme 3.6.1. Soit $J = \det\left[\frac{\partial x_i}{\partial v_j}\right]$ le jacobien, alors dans $S(V) \otimes A(V)$ on a

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = J(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \dots \wedge dv_n)$$

DÉMONSTRATION. Ceci suit de la propriété anticommutative des $\{dv_j\}$ □

Lemme 3.6.2. $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$

DÉMONSTRATION. Puisque les dx_i s'écrivent sous la forme

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial v_j} dv_j$$

la présence des facteurs $\{dv_i\}$ force l'anticommutativité des $\{dx_i\}$ □

Finalement, pour conclure que les $\{dx_i\}$ engendrent une sous-algèbre alternée, on pose, pour chaque $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$,

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

avec $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$.

Lemme 3.6.3. Les $\{dx_I\}$ sont linéairement indépendants.

DÉMONSTRATION. Étant donné une relation

$$\sum_I a_I dx_I = 0$$

avec les $a_I \in \mathbb{F}$ fixons un $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ le complément de J . Puisque $dx_I \wedge dx_K = 0$ si $I \cup K \neq \emptyset$, on obtient que

$$a_J(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n) = 0.$$

Or par le lemme 3.6.1. $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = J(dv_1 \wedge dv_2 \wedge \dots \wedge dv_n)$ mais le jacobien ne peut pas être nul. Donc $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \neq 0$ et ceci force $a_J = 0$. □

Étant donné que l'application

$$d : S(V) \otimes A(V) \longrightarrow S(V) \otimes A(V)$$

commute avec l'action de G , elle définit une application

$$d : [S(V) \otimes A(V)]^G \longrightarrow [S(V) \otimes A(V)]^G$$

Théorème 3.6.1. (Solomon) *Soit $G \subset Gl(V)$ un groupe de pseudo-réflexion fini alors*

$$[S(V) \otimes A(V)]^G = \mathbb{F}[x_1, x_2, \dots, x_n] \otimes A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

Pour faire la démonstration de ce théorème, on va démontrer quelques lemmes. Soit $F(S(V))$ le corps de fractions de $S(V)$. L'action de G sur $S(V)$ s'étend à une action sur $F(S(V))$ de la manière suivante :

$$\varphi \cdot \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\varphi \cdot x}{\varphi \cdot y}.$$

Lemme 3.6.4. $F(S(V)) \otimes A(V) = F(S(V)) \otimes A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$

DÉMONSTRATION. Considérons $F(S(V)) \otimes A(V)$ comme espace vectoriel sur le corps $F(S(V))$. On va montrer que l'ensemble $\{dx_I \mid I \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$ forme une $F(S(V))$ base de $F(S(V)) \otimes A(V)$. On a déjà vu au lemme 3.6.3. que les $\{dx_I\}$ sont linéairement indépendants. De plus, puisque les $\{dv_I\}$ forment une $F(S(V))$ base de $F(S(V)) \otimes A(V)$, n'importe quel ensemble de 2^n éléments linéairement indépendants vont aussi en former une base. \square

Lemme 3.6.5. $[F(S(V)) \otimes A(V)]^G = F(S(V))^G \otimes A(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$

DÉMONSTRATION. Comme au lemme précédent, on considère $[F(S(V)) \otimes A(V)]^G$ comme espace vectoriel sur le corps $F(S(V))^G$. On va montrer que l'ensemble $\{dx_I \mid I \subset \{1, 2, \dots, n\}\}$ forme une $F(S(V))^G$ base de $[F(S(V)) \otimes A(V)]^G$. Or par le lemme précédent, il ne reste qu'à voir que les $\{dx_I\}$ engendrent $[F(S(V)) \otimes A(V)]^G$. Soit $z \in [F(S(V)) \otimes A(V)]^G \subset F(S(V)) \otimes A(V)$. Par le lemme précédent, on a que :

$$z = \sum_I a_I dx_I$$

où les a_I sont dans $F(S(V))$. En appliquant l'opérateur de moyenne on a :

$$z = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \varphi \cdot z = \sum_{\varphi \in G} \varphi \cdot \left(\sum_I a_I dx_I \right) = \sum_I \left(\sum_{\varphi \in G} \varphi \cdot a_I \right) dx_I.$$

Donc, les coefficients $\sum_{\varphi \in G} \varphi \cdot a_I$ sont bien dans $F(S(V))^G$. \square

DÉMONSTRATION. (Du théorème de Solomon) Par le lemme précédent, il nous reste seulement à montrer que les $\{dx_I\}$ engendrent le $S(V)^G$ -module $[S(V) \otimes A(V)]^G$. Soit $z \in [S(V) \otimes A(V)]^G$, on a que :

$$z = \sum_I a_I dx_I$$

par le lemme précédent et où les a_I sont dans $F(S(V))^G$. Il reste donc qu'à voir que les a_I sont en fait dans $S(V)^G$. En fait, il suffit juste de voir que les a_I sont dans $S(V)$. Si $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ est le complément de I et qu'on multiplie l'équation précédente par dx_K , on obtient :

$$dx_K z = a_I$$

$$a_I(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = a_I J(dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n).$$

Puisque le membre de gauche de cette équation appartient à $[S(V) \otimes A(V)]^G$ il s'ensuit que le membre de droite aussi. En particulier, le membre de droite appartient à $S(V) \otimes A(V)$ et donc

$$a_I J \in S(V).$$

Il nous reste donc à vérifier que $a_I \in S(V)$. Puisque $\varphi \cdot a_I = a_I$ et que $\varphi \cdot J = (\det \varphi)^{-1} J$ on a que $a_I J$ est un invariant gauche de $S(V)$. Donc, puisque $J = \lambda \Omega$, $J \neq 0$ et que Ω divise tous les invariants gauches, on a que $a_I J$ est divisible par J et donc $a_I \in S(V)$. \square

On est finalement prêt pour trouver la série de Hilbert de l'anneau des invariants étendu. Puisque

$$S(V) \otimes A(V) = \bigoplus_{i,j} S_i(V) \otimes A_j(V)$$

possède une bigraduation, $[S(V) \otimes A(V)]^G$ en possède une aussi. On a donc que la série de Hilbert est une série de puissance en deux variables

$$H = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$$

où

$$a_{ij} = \dim[S_i(V) \otimes A_j(V)]^G$$

Proposition 3.6.1. *La série de Hilbert de $[S(V) \otimes A(V)]^G$ est :*

$$H = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + Y X^{d_i-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - X^{d_i})} = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{\det(1 + Y\varphi)}{\det(1 - X\varphi)}.$$

où les d_i sont les degrés des x_i .

DÉMONSTRATION. Par le théorème de Solomon, on a que :

$$H = \frac{\prod_{i=1}^n (1 + Y X^{d_i-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - X^{d_i})}.$$

On a aussi qu'une simple adaptation du théorème de Molien nous donne

$$H = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{\det(1 + Y\varphi)}{\det(1 - X\varphi)}.$$

On voit ceci en considérant un analogue au lemme 3.3.1 où l'on remplace

$$\varphi_i : S_i(V) \longrightarrow S_i(V)$$

par

$$\varphi_i : A_i(V) \longrightarrow A_i(V)$$

d'où on obtient l'identité

$$\sum_{i=0}^{\infty} \text{tr}(\varphi_i) t^i = \det(1 + \varphi t)$$

qui, combinée avec le lemme 3.3.1. et 3.3.2., nous donne l'adaptation désirée. \square

Chapitre 4

VALEURS PROPRES

4.1. INTRODUCTION

Puisque les groupes que nous considérons sont tous finis, on a en particulier que l'ordre de chaque élément est fini. Soit $v \in V$, un vecteur propre de $g \in G$ ayant comme valeur propre $\lambda \in \overline{\mathbb{F}}$, on a que $g \cdot v = \lambda \cdot v$ et $g^r = 1$. Donc $v = g^r \cdot v = \lambda^r \cdot v$ d'où $\lambda^r = 1$. En d'autres termes, toute valeur propre d'un élément d'un groupe fini doit être une racine de l'unité.

4.2. VALEURS PROPRES D'ÉLÉMENTS D'UN GROUPE LINÉAIRE

Dans cette section, on va considérer seulement les espaces vectoriels V sur des corps \mathbb{F} algébriquement clos. G sera un groupe fini et non-modulaire de pseudo-réflexions et $S(V)^G$ son anneau d'invariants sera engendré par les invariants homogènes $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ et on notera $d_i = \deg(f_i)$. De plus, on va utiliser certains résultats de la géométrie algébrique. En fait, on peut considérer notre espace vectoriel V comme variété algébrique. Soit H_i les variétés algébriques définies comme suit :

$$H_i = \{v \in V \mid f_i(v) = 0\}.$$

Si on fixe $\xi \in \mathbb{F}^*$ une racine de l'unité d'ordre d et $g \in G$ on pose

$$V(g, \xi) = \{v \in V \mid g \cdot v = \xi v\}$$

Proposition 4.2.1. *Soit $\xi \in \mathbb{F}$, une racine d -ième de l'unité. Étant donné $v \in V$ alors on a que $g \cdot v = \xi v$ pour un $g \in G$ si et seulement si $f(v) = 0$ pour tout $f \in S(V^*)^G$ de degré non congru à 0 mod(d)*

DÉMONSTRATION. Supposons que $g \cdot v = \xi v$, étant donné $f \in S(V^*)^G$ de degré k , on a

$$f(v) = g^{-1} \cdot f(v) = f(g \cdot v) = f(\xi v) = \xi^k f(v).$$

Donc si k n'est pas congru à 0 mod(d) alors $\xi^k \neq 1$ et $f(v) = 0$. Inversement, supposons que $f(v) = 0$ pour tout $f \in S(V^*)^G$ de degré non congru à 0 mod(d). Lorsque $k \equiv 0 \pmod{d}$ on a que $\xi^k = 1$ et donc $f(\xi v) = \xi^k f(v) = f(v)$. Si par contre, k n'est pas congru à 0 mod(d), notre supposition que $f(v) = 0$ nous donne que $f(\xi v) = \xi^k f(v) = 0 = f(v)$. Donc dans tout les cas on a que $f(\xi v) = f(v)$, et par la proposition 3.1.1 on a qu'il existe $g \in G$ tel que $g \cdot v = \xi v$. \square

Proposition 4.2.2. *On a que*

$$\bigcup_{g \in G} V(g, \xi) = \bigcap_{d \nmid d_i} H_i$$

et que les composantes irréductibles de $\bigcap_{d \nmid d_i} H_i$ sont les $V(g, \xi)$ maximales.

DÉMONSTRATION. On a que $x \in \bigcup_{g \in G} V(g, \xi)$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = \xi x$. Or par la proposition précédente, on a que ceci est vrai si et seulement si $w_i(x) = 0$ pour chaque $w_i \in S(V^*)^G$ dont le degré n'est pas congru à 0 modulo d mais ceci est équivalent à dire que $x \in \bigcap_{d \nmid d_i} H_i$. \square

Avant de montrer le prochain théorème, on va énoncer un théorème qui va nous servir lors de sa démonstration.

Théorème 4.2.1. (Pianzola-Weiss) *Soit $\xi \in \mathbb{F}$ une racine d -ième de l'unité. Posons*

$$h_i(\xi) = |\{g \in G \mid \dim V(g, \xi) = i\}|$$

$$\pi(d) = \prod_{d \nmid d_i} d_i$$

$$P_d(T) = \prod_{d \nmid d_i} (T + p_i)$$

où les p_i sont les exposant de G , alors on a l'identité suivante :

$$\pi(d)P_d(T) = h_0(\xi) + h_1(\xi)T + \cdots + h_n(\xi)T^n.$$

DÉMONSTRATION. On a trouvé à la proposition 3.6.1. l'identité

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1 + YX^{d_i-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - X^{d_i})} = \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{\det(1 + Y\varphi)}{\det(1 - X\varphi)}$$

pour la série de Hilbert de l'anneau des invariants étendu. On va regarder chaque membre de cette équation pour déduire le résultat.

Pour le membre de droite, si $\dim V(\varphi, \xi) = k$, et supposons que $\{\zeta_1, \dots, \zeta_{n-k}\}$ sont les autres valeurs propres de φ alors

$$\frac{\det(1 + Y\varphi)}{\det(1 - X\varphi)} = \frac{(1 + \xi Y)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 + \zeta_i Y)}{(1 - \xi X)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i X)}.$$

Si on pose $Y = -\xi^{-1} + (1 - \xi X)T$ on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{\det(1 + (-\xi^{-1} + (1 - \xi X)T)\varphi)}{\det(1 - X\varphi)} = \\ & \frac{(1 + \xi(-\xi^{-1} + (1 - \xi X)T))^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 + \zeta_i(-\xi^{-1} + (1 - \xi X)T))}{(1 - \xi X)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i X)} = \\ & \frac{(\xi T)^k \prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i \xi^{-1} + \zeta_i(1 - \xi X)T)}{\prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i X)} \end{aligned}$$

Posons maintenant $X = \xi^{-1}$, ce qui nous donne :

$$\frac{\det(1 + (-\xi^{-1} + (1 - \xi X)T)\varphi)}{\det(1 - (\xi^{-1})\varphi)} = (\xi T)^k \frac{\prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i \xi^{-1} + \zeta_i(1 - \xi \xi^{-1})T)}{\prod_{i=1}^{n-k} (1 - \zeta_i \xi^{-1})} = (\xi T)^k$$

Si on regarde maintenant le membre de gauche de l'équation de départ, soit :

$$\frac{\prod_{i=1}^n (1 + YX^{d_i-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - X^{d_i})} = \prod_{i=1}^n \frac{(1 + YX^{d_i-1})}{(1 - X^{d_i})}.$$

Si d ne divise pas d_i , alors en substituant $Y = -\xi^{-1} + (1 - \xi X)T$ et $X = \xi^{-1}$ on obtient que

$$\frac{(1 + YX^{d_i-1})}{(1 - X^{d_i})} = \frac{(1 + (-\xi^{-1} + (1 - \xi\xi^{-1})T)(\xi^{-1})^{d_i-1})}{(1 - (\xi^{-1})^{d_i})} = \frac{1 - \xi^{-d_i}}{1 - \xi^{-d_i}} = 1.$$

La dernière égalité est vraie car $1 - \xi^{-d_i} \neq 0$ puisque d ne divise pas d_i . Par contre, si d divise d_i on a que $\xi^{d_i} = 1$, ce qui nous donne que $1 - \xi^{-d_i} = 0$. Il faut donc utiliser un autre argument. Posons, encore un fois, $Y = -\xi^{-1} + (1 - \xi X)T$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{(1 + YX^{d_i-1})}{(1 - X^{d_i})} &= \frac{(1 + (-\xi^{-1} + (1 - \xi X)T)X^{d_i-1})}{(1 - X^{d_i})} \\ &= \frac{(1 - (\xi X)^{d_i-1} + (1 - \xi X)TX^{d_i-1})}{(1 - (\xi X)^{d_i})} \\ &= \frac{1 + \xi X + \dots + (\xi X)^{d_i-2} + TX^{d_i-1}}{1 + \xi X + (\xi X)^2 + \dots + (\xi X)^{d_i-1}} \end{aligned}$$

et en posant $X = \xi^{-1}$, on obtient

$$\frac{(1 + YX^{d_i-1})}{(1 - X^{d_i})} = \frac{(d_i - 1) + \xi T}{d_i}.$$

Par le fait que $|G| = \prod_{i=1}^n d_i$ et la définition de $h_i(\xi)$ on a que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{\varphi \in G} \frac{\det(1 + Y\varphi)}{\det(1 - X\varphi)} &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n d_i} (h_0(\xi) + h_1(\xi)(\xi T) + \dots + h_n(\xi)(\xi T)^n) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 + YX^{d_i-1})}{\prod_{i=1}^n (1 - X^{d_i})} = \prod_{d|d_i} \frac{(d_i - 1) + \xi T}{d_i} = \prod_{d|d_i} \frac{p_i + \xi T}{d_i}. \end{aligned}$$

Finalement, en multipliant de chaque côté par $\prod_{i=1}^n d_i$ on obtient :

$$h_0(\xi) + h_1(\xi)(\xi T) + \cdots + h_n(\xi)(\xi T)^n = \left(\prod_{d \nmid d_i} d_i \right) \prod_{d \mid d_i} (p_i + \xi T) = \pi(d) P_d(\xi T)$$

On termine la preuve en remplaçant ξT par T .

□

Définition 4.2.1. Pour chaque entier d posons $\mathbf{a}(d)$ le nombre de d_i divisible par d .

Théorème 4.2.2. $\max_{g \in G} \dim V(g, \xi) = \mathbf{a}(d)$. En particulier, il existe $g \in G$ avec valeur propre ξ si et seulement si, d divise un des d_i .

DÉMONSTRATION. À la lumière du théorème de Piazola-Weiss, il suffit de montrer que le degré de $P_d(T) = \mathbf{a}(d)$. Or le nombre de multipliants dans l'expression $\prod_{d \mid d_i} (T + p_i)$ est le nombre de d_i divisible par d et donc $\mathbf{a}(d)$. □

Avant d'énoncer le prochain théorème, on va fixer les notations. Puisque G est un groupe de pseudo-réflexions, on a par le théorème de Chevalley-Shephard-Todd-Bourbaki que

$$S(V^*)^G = \mathbb{F}[f_1, f_2, \dots, f_n]$$

où $\deg(f_i) = d_i$. Si on fixe d , on peut réarranger les $\{f_i\}$ de telle sorte que ceux que leur degré sont divisible par d soit en premier, i.e. $d \mid \deg(f_i)$ pour $1 \leq i \leq r$ et $d \nmid \deg(f_i)$ pour $r + 1 \leq i \leq n$.

Théorème 4.2.3. Pour chaque $g \in G$ il existe $h \in G$ tel que $V(h, \xi)$ a une dimension maximale $\mathbf{a}(d)$ et $V(g, \xi) \subset V(h, \xi)$

DÉMONSTRATION. Premièrement, on a que

$$\bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$$

puisque si $x \in \bigcap_{i=1}^n H_i$ alors $f_i(x) = 0$ pour tout i et donc par la proposition 3.1.1. on a qu'il existe un $g \in G$ tel que $g \cdot 0 = x$ et donc que $x = 0$. Il s'ensuit que les hypersurfaces $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$ s'intersectent proprement, i.e., étant donné des

composantes irréductibles $C_k \subset H_k$, alors pour tout sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_r}$ a dimension $n - r$. En particulier, on a que la dimension de $\bigcap_{d \nmid d_i} H_i$ est $a(d)$ en chaque point. En utilisant la proposition 4.2.2. on a que si $V(h, \xi)$ n'est pas contenu dans un autre $V(g, \xi)$ alors on a qu'il est une composante irréductible de $\bigcap_{d \nmid d_i} H_i$ et donc de dimension $a(d)$. \square

Lemme 4.2.1. *Si $V(g, \xi) = a(d)$, alors les $\{f_i\}_{1 \leq i \leq r}$ restreints à $V(g, \xi)$ sont algébriquement indépendants.*

DÉMONSTRATION. Puisque $f_{r+1} = \dots = f_n = 0$ quand $d \nmid d_i$, on a qu'il le sont aussi sur $\bigcap_{d \nmid d_i} H_i$ et donc aussi sur $V(g, \xi)$. L'application de variété algébrique

$$F : V(g, \xi) \longrightarrow \mathbb{F}^r$$

$$x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_r(x))$$

a comme fibre $F^{-1}(0) = \bigcap_{i=1}^n H_i = \{0\}$. Or étant donné un morphisme

$$K : U \longrightarrow W$$

de variété algébrique, on a que (voir [Ha] p.95) pour tout $x \in K(U) \subset W$

$$\dim K^{-1}(x) \geq \dim U - \dim K(U).$$

Or dans notre cas, $0 \geq a(d) - \dim F(V(g, \xi))$ et donc $\dim F(V(g, \xi)) \geq a(d)$. \square

Théorème 4.2.4. *Si $\dim V(g_1, \xi) = \dim V(g_2, \xi) = a(d)$ alors il existe $h \in G$ tel que $h \cdot V(g_1, \xi) = V(g_2, \xi)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\dim V(g_1, \xi) = \dim V(g_2, \xi) = a(d)$. Posons

$$U_1 = V(g_1, \xi) - \left(\bigcup_{g \neq g_1} V(g, \xi) \right)$$

$$U_2 = V(g_2, \xi) - \left(\bigcup_{g \neq g_2} V(g, \xi) \right).$$

On a que $U_i \subset V(g_i, \xi)$ sont des ouverts denses de Zariski. Posons maintenant

$$F_i : V(g_i, \xi) \longrightarrow \mathbb{F}^r$$

$$x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_r(x)).$$

Ces applications sont en fait des applications ouvertes (voir [A, M] chap. 5 ou [E] p. 303). Le lemme précédent montre que les $F_i(U_1) \subset \mathbb{F}^r$ sont des ouverts non vides de Zariski et donc qu'ils ont une intersection non triviale. On peut donc trouver $x \in U_1 \subset V(g_1, \xi)$ et $y \in U_2 \subset V(g_2, \xi)$ tel que $F(x) = F(y)$. Puisque par la définition de $\bigcap_{d \nmid i} H_i$ on a que $f_{r+1} = \dots = f_n = 0$ sur $V(g_i, \xi)$ on a que $f_j(x) = f_j(y)$ pour $1 \leq j \leq n$. Par la proposition 3.1.1, on a donc qu'il existe $h \in G$ tel que $y = h \cdot x$. On a que

$$y \in h \cdot V(g_1, \xi) = V(hg_1h^{-1}, \xi).$$

Or on a aussi que $y \in U_2 \subset V(g_2, \xi)$ ce qui entraîne que si $k \neq g_2$ alors $y \notin V(k, \xi)$. Donc, on en conclue que $h \cdot V(g_1, \xi) = V(g_2, \xi)$. \square

Théorème 4.2.5. (Springer) Soit $g \in G$ tel que l'espace propre $V(g, \xi)$, où ξ est une racine d -ième de l'unité, contienne un vecteur régulier. Alors on a que

$$(1) \quad g^d = 1.$$

$$(2) \quad \dim V(g, \xi) = a(d).$$

(3) $V(h, \xi) = a(d)$ si et seulement si g et h sont conjugués. Donc, les éléments de $k \in G$ tels que $V(k, \xi) = a(d)$ forment une seule classe de conjugaison.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in V(g, \xi)$ régulier. C'est-à-dire que $g \cdot v = \xi v$ et donc que $g^d \cdot v = \xi^d v = v$ i.e. g^d fixe v . Par la proposition 1.6.1. on a que $g^d = 1$, ce qui nous donne (1). Par le Théorème 3.1.1 (2), il existe un h tel que $\dim V(h, \xi) = a(d)$ et $V(g, \xi) \subset V(h, \xi)$. Ce qui entraîne que $h^{-1}g$ fixe v et donc par la proposition 1.6.1 $h = g$, ce qui nous donne (2). Si $h = kgk^{-1}$ alors on a que $g \cdot x = \xi x$ et donc $h \cdot (k \cdot x) = k \cdot (g \cdot x) = \xi k \cdot x$ ce qui entraîne que $k \cdot V(h, \xi) \subset V(g, \xi)$. De plus $h \cdot (k^{-1} \cdot x) = k^{-1} \cdot (g \cdot \xi) = \xi(k^{-1} \cdot x)$ ce qui entraîne que $V(g, \xi) \subset k \cdot V(h, \xi)$ et donc que $V(g, \xi) = k \cdot V(h, \xi)$. Or ceci implique que $\dim V(g, \xi) = \dim V(h, \xi)$. Inversement, si $\dim V(h, \xi) = a(d)$, par le théorème 3.1.1 (3), on a qu'il existe $k \in G$ tel que $V(h, \xi) = k \cdot V(g, \xi)$. Mais $k \cdot V(g, \xi) = V(kgk^{-1}, \xi)$ et donc $(kgk^{-1}) \cdot x = h \cdot x$ mais x est régulier donc $kgk^{-1} = h$. \square

Théorème 4.2.6. (Springer) Soit $g \in G$ un élément régulier d'ordre d et ξ une racine d -ième de l'unité qui est valeur propre régulière. Si $\{p_1, \dots, p_n\}$ sont les exposants de G alors on a que les valeurs propres de g sont

$$\{\xi^{-p_1}, \dots, \xi^{-p_n}\}.$$

DÉMONSTRATION. Soit x un vecteur propre régulier pour g de valeur propre ξ . Puisque g est diagonalisable, on peut trouver une base $\{t_1, \dots, t_n\}$ de V où $t_1 = x$. Soit $\{\xi^{k_1}, \dots, \xi^{k_n}\}$ les valeurs propres associées aux vecteurs propres $\{t_1, \dots, t_n\}$ i.e.

$$g \cdot t_i = \xi^{k_i} t_i.$$

Soit maintenant, $\{f_1, \dots, f_n\}$ la base de V^* de la base $\{t_1, \dots, t_n\}$. On a :

$$f_i(t_j) = \delta_{ij}$$

et aussi par l'action de G sur $S(V^*)$:

$$g^{-1} \cdot f(t_i) = f(g \cdot t_i)$$

ce qui entraîne que

$$g \cdot f_i = \xi^{-k_i} f_i.$$

On peut écrire que $S(V^*) = \mathbb{F}[f_1, \dots, f_n]$ et que $S(V^*)^G = \mathbb{F}[w_1, \dots, w_n]$ où les f_i sont de degré 1 et les w_i sont de degré d_i , les degrés de G . On a donc que les w_i sont des polynôme en les f_i . Posons

$$J^* = \left[\frac{\partial w_i}{\partial f_j} \right]_{n \times n}$$

le jacobien dual de celui défini à la section 3.5. On a aussi vu dans cette dernière section que $J^* = \lambda \Omega^*$ où $\lambda \neq 0$ et $\Omega^* = \prod f_{\alpha_s}$ où les f_{α_s} sont les duals des vecteurs α_s associés au réflexions s . Puisque t_1 est régulier, on a que pour toute réflexion s , $f_{\alpha_s}(t_1) \neq 0$. Donc $\Omega^*(t_1) \neq 0$ et par le fait même, $J^*(t_1) \neq 0$. Ce qui entraîne qu'on peut manipuler la matrice jacobienne pour obtenir une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ tel que

$$\frac{\partial w_i}{\partial f_{\sigma(i)}}(t_1) \neq 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n.$$

On obtient donc, à une constante non nulle près, que

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha_{\sigma(i)}} = \alpha_1^{d_i-1} + \text{autres termes}$$

et donc que

$$w_i = \alpha_1^{d_i-1} \alpha_{\sigma(i)} + \text{autres termes.}$$

Si on fait agir g , on a que

$$g \cdot w_i = (\xi^{-(d_i-1)} \alpha^{d_i-1}) (\xi^{-k_{\sigma(i)}} \alpha_{\sigma(i)}) + \text{autres termes}$$

mais $w_i \in S(V^*)^G$ et donc $g \cdot w_i = w_i$. Or ceci force

$$\xi^{-(d_i-1)} \xi^{-k_{\sigma(i)}} = 1$$

et donc

$$\xi^{k_{\sigma(i)}} = \xi^{-(d_i-1)} = \xi^{-p_i}$$

□

Théorème 4.2.7. *Soit $g \in G$ un élément régulier d'ordre d et ξ une valeur propre de g , alors le centralisateur de g dans G (noté $\mathcal{Z}(g)$) est isomorphe à un groupe de réflexions dans $V(g, \xi)$ ayant comme degré les d_i divisibles par d et comme ordre $\prod_{d|d_i} d_i$.*

Avant de montrer ce résultat, on va démontrer quelques lemmes.

Lemme 4.2.2. *Soit $g \in G$ un élément régulier d'ordre d et ξ une valeur propre de g , alors*

$$\mathcal{Z}(g) = \{h \in G \mid h \cdot V(g, \xi) = V(g, \xi)\}$$

DÉMONSTRATION. Si $h \in \mathcal{Z}(g)$ et $x \in V(g, \xi)$ alors $g \cdot (h \cdot x) = h \cdot (g \cdot x) = \xi h \cdot x$. Dans la preuve du théorème 4.2.5 (3) on a, entre autres, démontré que $V(g, \xi) = k \cdot V(h, \xi)$ si et seulement si $kgk^{-1} = h$. Et donc on a que $V(g, \xi) = h \cdot V(g, \xi)$ si et seulement si $hgh^{-1} = g$ i.e. $h \in \mathcal{Z}(g)$. □

Lemme 4.2.3. (1) $|\mathcal{Z}(g)|$ divise $\prod_{d|d_i} d_i$.

(2) $S(V(g, \xi)^*)^{\mathcal{Z}(g)} = \mathbb{F}[f_1, \dots, f_r]$ si et seulement si $|\mathcal{Z}(g)| = \prod_{d|d_i} d_i$

DÉMONSTRATION. On a que

$$\mathbb{F}[f_1, \dots, f_r] \subset S(V(g, \xi)^*)^{\mathcal{Z}(g)}$$

puisque $f_{r+1} = \dots = f_n = 0$ sur $\bigcap_{d \mid d_i} H_i$ et même sur $V(g, \xi)$ car ils sont ses composantes irréductibles et on a que les $\{f_i\}_{i=1}^r$ sont algébriquement indépendants par lemme 3.1.1. De plus, on a que $S(V(g, \xi)^*)^{\mathcal{Z}(g)}$ est un $\mathbb{F}[f_1, \dots, f_r]$ module de type fini. Ceci vient du fait que $S(V^*)^G$ est un $\mathbb{F}[f_1, \dots, f_n]$ module de type fini par le lemme 2.2.1. et que l'application

$$\psi : S(V^*) \longrightarrow S(V(g, \xi)^*)$$

est surjective et que ψ envoie les $\{f_i\}_{i=r+1}^n$ sur zéro. Il s'ensuit que $\mathbb{F}[f_1, \dots, f_r] \subset S(V(g, \xi)^*)$ est aussi de type fini. Et donc, il en est de même pour $\mathbb{F}[f_1, \dots, f_r] \subset S(V(g, \xi)^*)^{\mathcal{Z}(g)}$. On est donc dans les conditions du théorème 2.4.2. \square

Lemme 4.2.4. $|\mathcal{Z}(g)| = \prod_{d \mid d_i} d_i$

Passons de V à l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ pour pouvoir utiliser le théorème de Bezout.

Théorème 4.2.8. (Bezout) *Étant donné des hypersurfaces projectives qui s'intersectent proprement, alors le nombre de composantes irréductibles de l'intersection (avec multiplicités) est le produit des degrés des hypersurfaces.*

Le théorème de Bezout est très connu et on peut facilement trouver une preuve dans la littérature, en particulier voir [C,L,O] ou [Ha].

DÉMONSTRATION. (du lemme 4.2.4) Si on prend les hypersurfaces H_i , qui s'intersectent proprement, on peut passer aux hypersurfaces projectives associées $\overline{H}_i \subset \mathbb{P}(V)$ qui s'intersecteront aussi proprement. Par le théorème 4.2.4., on a que G agit transitivement sur les composantes irréductibles maximales de $\bigcap_{d \mid d_i} \overline{H}_i$.

On déduit de ceci et du lemme 4.2.2. que $\frac{|G|}{|\mathcal{Z}(G)|}$ est le nombre de composantes de $\bigcap_{d \mid d_i} \overline{H}_i$. La transitivité de l'action nous assure que toutes les composantes ont la même multiplicité. On est donc dans les hypothèses du théorème de Bezout et

donc

$$\prod_{d \mid d_i} d_i = m \frac{|G|}{\mathcal{Z}(G)}.$$

Or puisque G est un groupe de réflexions, on a que

$$|G| = \prod d_i.$$

En combinant les deux dernières équations on obtient que

$$|\mathcal{Z}(g)| = m \frac{\prod d_i}{\prod_{d \mid d_i} d_i} = m \prod_{d \mid d_i} d_i.$$

Or par le lemme 4.2.3. (1), on a aussi que

$$|\mathcal{Z}(g)| \leq \prod_{d \mid d_i} d_i$$

ce qui nous donne que $m = 1$. □

DÉMONSTRATION. (du théorème 4.2.7.) En combinant les deux lemmes précédents, on obtient que

$$S(V(g, \xi)^*)^{\mathcal{Z}(g)} = \mathbb{F}[f_1, \dots, f_r].$$

En combinant le théorème de Chevalley-Shephard-Todd-Bourbaki avec cette dernière équation, on obtient le résultat désiré. □

Théorème 4.2.9. *Soit W un groupe de Weyl. Alors les éléments réguliers d'un ordre donné de W forme une unique classe de conjugaison.*

Avant de démontrer ceci on va montrer un lemme

Lemme 4.2.5. *Soit W un groupe de Weyl et g un élément d'ordre d alors chaque racine primitive d -ième de l'unité apparaît comme valeur propre de g avec la même multiplicité.*

DÉMONSTRATION. Soit $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$ le polynôme caractéristique de g . Lorsqu'on passe à $\mathbb{C}[T]$ le polynôme $p(T)$ se factorise en facteurs linéaires

$$p(T) = (T - \lambda_1)^{n_1} \dots (T - \lambda_r)^{n_r}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de g et les n_i leurs multiplicités. On a que

$$n_i = \dim V(g, \lambda_i).$$

Puisque g est d'ordre d les valeurs propres doivent être des racines d'ième de l'unité car si $g \cdot v = \lambda_i v$ alors $g^d \cdot v = v = \lambda_i^d v$. Lorsqu'on travaille dans $\mathbb{Z}[T]$ on a le polynôme cyclotomique $\Phi_k(T)$ défini récursivement de la manière suivante :

$$\prod_{k|n} \Phi_k(T) = T^n - 1.$$

Ces polynômes sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[T]$ mais se décomposent dans $\mathbb{C}[T]$ de la manière suivante :

$$\Phi_k(T) = \prod (T - \zeta)$$

où les ζ sont les racines primitives d-ième de l'unité. Puisque toutes les racines de $p(T)$ sont des racines d'ième de l'unité, $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$ est un produit de polynômes cyclotomiques. Lorsqu'on passe à $\mathbb{C}[T]$ on a que les multiplicités des racines de $p(T)$ sont les mêmes et correspondent au nombre de copies du polynôme cyclotomique $\Phi_d(T)$ qu'il y a dans la décomposition de $p(T)$ en polynôme cyclotomique. \square

DÉMONSTRATION. (du théorème 4.2.9) Soit $g \in W$, un élément régulier d'ordre d ayant ξ comme valeur propre régulière. Soit $h \in W$, un autre élément régulier d'ordre d . Pour montrer que g et h sont conjugués, il suffit par le théorème 3.1.5.(3) de montrer que $\dim V(h, \xi) = a(d)$. Puisque h est régulier, il existe $v \in V$ régulier et $\zeta \in \mathbb{F}$ tel que $h v = \zeta v$. Mais par le théorème 3.1.5 (2) on a que $\dim V(h, \zeta) = a(d)$. Or le lemme précédent nous dit que dans un groupe de Weyl, chaque valeur propre apparaît avec la même multiplicité et donc $a(d) = \dim V(h, \zeta) = \dim V(h, \xi)$. \square

Chapitre 5

NOMBRE RÉGULIER

5.1. INTRODUCTION

Étant donné un élément régulier g d'ordre d d'un groupe de Weyl, on a par le théorème 3.1.3 que la classe de conjugaison de g est uniquement déterminée par d . Ceci motive l'intérêt qu'on pourrait avoir de connaître les ordres possibles pour un élément régulier. Donc si g est un élément régulier d'ordre d d'un groupe de réflexions G on dira que d est un nombre régulier pour G .

Malheureusement, un analogue au théorème 3.1.3 n'est pas valide pour un groupe de réflexions qui n'est pas un groupe de Weyl. Néanmoins, il n'en demeure pas moins intéressant de connaître les nombres réguliers pour de tels groupes. En fait, ce chapitre est consacré justement à trouver les nombres réguliers pour le groupe de réflexions de type H_4 . Puisque, a priori, les éléments réguliers d'un ordre donné ne sont pas tous dans la même classe de conjugaison, on va trouver à combien de classes de conjugaison ces éléments appartiennent.

5.2. CALCUL DES NOMBRES RÉGULIERS POUR A_n

Avant de passer au calcul des nombres réguliers pour le groupe H_4 , on va faire un exemple de calcul de nombres réguliers, dans le cas plus simple où le groupe est de Weyl, soit le groupe A_n . Posons

$$V = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$$

et $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ la base canonique de \mathbb{C}^{n+1} . On a que les vecteurs $\{e_i - e_j\}_{i \neq j}$ forment un système de racines pour A_n qui est isomorphe au groupe symétrique S_{n+1} . L'action de A_n sur V est la restriction de l'action de S_{n+1} sur \mathbb{C}^{n+1} définie par

$$\sigma \cdot e_i = e_{s(i)}$$

où $s \in S_{n+1}$. Les degrés de A_n sont $\{2, 3, \dots, n+1\}$ d'où on tire que

$$a(d) = \left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor$$

où les $\lfloor \cdot \rfloor$ représentent la partie entière inférieure. Soit $\sigma \in S_{n+1}$, si on décompose $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$ en cycles disjoints, on notera $c_\sigma(j)$ le nombre de cycles de longueur j dans σ . Si on regarde la représentation de S_{n+1} par des matrices $(n+1) \times (n+1)$ de permutation, on a que le polynôme caractéristique de σ est :

$$P_\sigma(T) = \prod_{1 \leq j} \frac{(T^j - 1)^{c_\sigma(j)}}{(T - 1)}$$

Or par le théorème 4.2.6., si $g \in G$ est régulier d'ordre d de valeur propre régulière ξ , où ξ est racine d -ième de l'unité, alors ses valeurs propres sont $\{\xi^{-p_1}, \dots, \xi^{-p_n}\}$ et donc

$$\begin{aligned} P_g(T) &= \prod (T - \xi^{-p_i}) \\ &= \prod_{i=1}^n (T - \xi^{-i}) \\ &= (T - \xi^{-1}) \dots (T - \xi^{-d})(T - \xi^{-(d+1)}) \dots (T - \xi^{-2d}) \dots \\ &\quad (T - \xi^{-((a(d)-1)d+1)}) \dots (T - \xi^{-a(d)d})(T - \xi^{-(a(d)d+1)}) \dots (T - \xi^{-(a(d)d+r)}) \\ &= ((T - \xi^{-1}) \dots (T - \xi^{-d}))^{a(d)} ((T - \xi^{-1}) \dots (T - \xi^{-r})) \\ &= (T^d - 1)^{a(d)} ((T - \xi^{-1}) \dots (T - \xi^{-r})) \end{aligned}$$

où r est le reste de la division de n par d , i.e. $n = a(d)d + r$. Or si

$$\left\lfloor \frac{n+1}{d} \right\rfloor < \frac{n}{d},$$

ξ^{-1} aurait une multiplicité supérieure à $a(d)$, ce qui est impossible. Donc, seuls deux cas sont possibles, soit

$$P_g(T) = (T^d - 1)^{a(d)}$$

ou

$$P_g(T) = (T^d - 1)^{a(d)}(T - 1).$$

Finalement les nombres réguliers de A_n sont soit les d qui divisent $n + 1$ ou les d qui divisent n . Dans le premier cas, ils correspondent aux puissances d'éléments de Coxeter, tandis que dans le second, ils correspondent aux puissances d'éléments de Coxeter du sous-groupe A_{n-1} .

5.3. CALCUL DES NOMBRES RÉGULIERS POUR H_4

On a vu au théorème 3.1.2 que si g est un élément régulier d'ordre d alors $\dim V(g, \xi) = a(d)$. Or au théorème 3.1.1 on a que pour qu'un élément $g \in G$ ait comme valeur propre ξ , il faut que d divise un des d_i . Dans H_4 , les degrés sont 2, 12, 20 et 30. Il s'ensuit que les degrés réguliers possibles sont 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 et 30.

Si on a un élément régulier $g \in H_4$ d'un certain ordre $O(g) = d$ alors on a que $g \cdot x = \xi x$. Ce qui entraîne que la valeur propre ξ est une racine d -ième de l'unité car on a que $x = id \cdot x = g^d \cdot x = \xi^d x$.

On a vu dans la section précédente que $w \in H_4$ un élément de Coxeter a comme ordre $O(w) = \frac{2(120)}{4} = 30$. On sait que w est régulier et donc que 30 est un nombre régulier. De plus, on a que w^2 est aussi régulier puisque $w \cdot x = \xi x$ implique que $(w^2) \cdot x = \xi^2 x$ et donc w^2 a un vecteur propre régulier. Ceci nous donne donc que $O(w^2) = 15$ est aussi un nombre régulier. En fait, le tableau 5.4.1 nous donne les éléments ainsi que les ordres réguliers qui découlent de la régularité de w .

Du simple fait qu'un élément de Coxeter soit régulier, on obtient que 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30 sont des nombres réguliers. Il reste donc à voir si 4, 12 et 20 sont aussi réguliers.

Étant donné qu'on a trouvé, au chapitre 4, les classes de conjugaison de H_4 ainsi qu'un représentant explicitement, on peut utiliser un logiciel de manipulation symbolique pour trouver l'ordre des représentants, leurs valeurs propres ainsi que la dimension de leurs espaces propres. En voici le résultat obtenu avec

TAB. 5.3.1. Éléments réguliers déduits d'un élément de Coxeter w

| | |
|----------|-----------------|
| w | $O(w) = 30$ |
| w^2 | $O(w^2) = 15$ |
| w^3 | $O(w^3) = 10$ |
| w^5 | $O(w^5) = 6$ |
| w^6 | $O(w^6) = 5$ |
| w^{10} | $O(w^{10}) = 3$ |
| w^{15} | $O(w^{15}) = 2$ |

TAB. 5.3.2

| Classe | $O(g)$ | $\dim V(g, \xi)$ | $a(d)$ | Classe | $O(g)$ | $\dim V(g, \xi)$ | $a(d)$ |
|----------|--------|------------------|--------|----------|--------|------------------|--------|
| C_1 | 1 | 4 | 4 | C_{18} | 20 | 1 | 1 |
| C_2 | 2 | 4 | 4 | C_{19} | 20 | 1 | 1 |
| C_3 | 2 | 2 | 4 | C_{20} | 15 | 1 | 1 |
| C_4 | 3 | 1 | 2 | C_{21} | 30 | 1 | 1 |
| C_5 | 6 | 1 | 2 | C_{22} | 30 | 1 | 1 |
| C_6 | 5 | 1 | 2 | C_{23} | 15 | 1 | 1 |
| C_7 | 10 | 1 | 2 | C_{24} | 10 | 1 | 2 |
| C_8 | 5 | 1 | 2 | C_{25} | 5 | 1 | 2 |
| C_9 | 10 | 1 | 2 | C_{26} | 2 | 1 | 4 |
| C_{10} | 4 | 2 | 2 | C_{27} | 2 | 3 | 4 |
| C_{11} | 6 | 2 | 2 | C_{28} | 4 | 1 | 2 |
| C_{12} | 3 | 2 | 2 | C_{29} | 6 | 1 | 2 |
| C_{13} | 10 | 2 | 2 | C_{30} | 6 | 1 | 2 |
| C_{14} | 5 | 2 | 2 | C_{31} | 10 | 1 | 2 |
| C_{15} | 5 | 2 | 2 | C_{32} | 10 | 1 | 2 |
| C_{16} | 10 | 2 | 2 | C_{33} | 10 | 1 | 2 |
| C_{17} | 12 | 1 | 1 | C_{34} | 10 | 1 | 2 |

MATHEMATICA[®] dont le code se retrouve en annexe.

TAB. 5.3.3

| Classe | $O(g)$ | $\dim V(g, \xi)$ | $a(d)$ | valeurs propres |
|----------|--------|------------------|--------|---|
| C_2 | 2 | 4 | 4 | $-1, -1, -1, -1$ |
| C_{10} | 4 | 2 | 2 | $-i, -i, i, i$ |
| C_{11} | 6 | 2 | 2 | $e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{\pi i}{3}}, -e^{\frac{2\pi i}{3}}, -e^{\frac{2\pi i}{3}}$ |
| C_{12} | 3 | 2 | 2 | $-e^{\frac{\pi i}{3}}, -e^{\frac{\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}$ |
| C_{13} | 10 | 2 | 2 | $e^{\frac{\pi i}{5}}, e^{\frac{\pi i}{5}}, -e^{\frac{4\pi i}{5}}, -e^{\frac{4\pi i}{5}}$ |
| C_{14} | 5 | 2 | 2 | $e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}, -e^{\frac{\pi i}{5}}, -e^{\frac{\pi i}{5}}$ |
| C_{15} | 5 | 2 | 2 | $e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{5}}, -e^{\frac{3\pi i}{5}}, -e^{\frac{3\pi i}{5}}$ |
| C_{16} | 10 | 2 | 2 | $e^{\frac{3\pi i}{5}}, e^{\frac{3\pi i}{5}}, -e^{\frac{2\pi i}{5}}, -e^{\frac{2\pi i}{5}}$ |
| C_{17} | 12 | 1 | 1 | $-e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{\pi i}{6}}, -e^{\frac{5\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$ |
| C_{18} | 20 | 1 | 1 | $e^{\frac{7\pi i}{10}}, -e^{\frac{3\pi i}{10}}, e^{\frac{3\pi i}{10}}, -e^{\frac{7\pi i}{10}}$ |
| C_{19} | 20 | 1 | 1 | $e^{\frac{9\pi i}{10}}, -e^{\frac{\pi i}{10}}, e^{\frac{\pi i}{10}}, -e^{\frac{9\pi i}{10}}$ |
| C_{20} | 15 | 1 | 1 | $e^{\frac{8\pi i}{15}}, -e^{\frac{7\pi i}{15}}, e^{\frac{2\pi i}{15}}, -e^{\frac{13\pi i}{15}}$ |
| C_{21} | 30 | 1 | 1 | $e^{\frac{7\pi i}{15}}, -e^{\frac{8\pi i}{15}}, e^{\frac{13\pi i}{15}}, -e^{\frac{2\pi i}{15}}$ |
| C_{22} | 30 | 1 | 1 | $e^{\frac{\pi i}{15}}, -e^{\frac{14\pi i}{15}}, e^{\frac{11\pi i}{15}}, -e^{\frac{4\pi i}{15}}$ |
| C_{23} | 15 | 1 | 1 | $e^{\frac{14\pi i}{15}}, -e^{\frac{\pi i}{15}}, e^{\frac{4\pi i}{15}}, -e^{\frac{11\pi i}{15}}$ |

Du tableau 5.4.2. on voit que seuls ceux du tableau 5.4.3 sont potentiellement réguliers étant donné que $\dim V(g, \xi) = a(d)$.

On sait que les éléments de Coxeter sont réguliers et d'ordre 30. Au chapitre 2, on a explicité les réflexions associées au système simple. On peut donc expliciter l'élément de Coxeter suivant :

$$w = s_1 s_2 s_3 s_4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & 0 \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix}$$

qui a comme valeurs propres $e^{\frac{11\pi i}{15}}, -e^{\frac{14\pi i}{15}}, -e^{\frac{4\pi i}{15}}$ et $e^{\frac{\pi i}{15}}$. Puisque les éléments de H_4 d'ordre 30 sont soit dans la classe de conjugaison C_{21} soit dans la classe C_{22} et que des éléments conjugués ont les mêmes valeurs propres, on en déduit que $w \in C_{22}$. Trouvons maintenant à quelle classe appartiennent w^2, w^3 et w^6 .

w^2 a comme valeur propre $e^{\frac{8\pi i}{15}}, e^{\frac{2\pi i}{15}}, -e^{\frac{7\pi i}{15}}$ et $-e^{\frac{13\pi i}{15}}$ et donc $w^2 \in C_{20}$. w^3 a comme valeur propre $-e^{\frac{4\pi i}{5}}, -e^{\frac{4\pi i}{5}}, e^{\frac{\pi i}{5}}$ et $e^{\frac{\pi i}{5}}$ et donc $w^3 \in C_{13}$. w^6 a comme valeur propre $-e^{\frac{3\pi i}{5}}, -e^{\frac{3\pi i}{5}}, e^{\frac{2\pi i}{5}}$ et $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ et donc $w^6 \in C_{15}$. Finalement w^{10} et w^{15} sont respectivement dans C_{12} et C_2 car ils sont tous deux réguliers et il n'y a qu'une classe de conjugaison où les éléments sont d'ordre 3 et qu'une d'ordre 2 ayant ses éléments réguliers.

Pour vérifier si les éléments de la classe C_{21} sont réguliers, on prend un représentant de la classe g , une valeur propre ξ et on prend un vecteur propre v . Puisque $\dim V(g, \xi) = 1$, on a qu'à vérifier si v est régulier. Pour se faire, on vérifie que v n'appartient à aucun hyperplan de réflexion en faisant le produit scalaire de v avec les racines de H_4 . Ceci a été fait avec *MATHEMATICA*[®] et le code se trouve en Annexe.

Après vérification, on confirme que les éléments de C_{21} sont bien réguliers. Pour voir que ceci entraîne que les éléments de C_{23}, C_{16} et C_{14} sont réguliers, on procède de la même façon qu'avec l'élément de Coxeter w . On a choisi le représentant de C_{21} suivant

$$h = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{4} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{4} & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de h^2 sont $-e^{\frac{\pi i}{15}}, e^{\frac{4\pi i}{15}}, -e^{\frac{14\pi i}{15}}$ et $-e^{\frac{11\pi i}{15}}$, celles de h^3 sont $-e^{2\frac{\pi i}{5}}, -e^{\frac{2\pi i}{5}}, e^{\frac{3\pi i}{5}}$ et $e^{\frac{3\pi i}{5}}$ et celles de h^6 sont $-e^{\frac{\pi i}{5}}, -e^{\frac{\pi i}{5}}, e^{\frac{4\pi i}{5}}$ et $e^{\frac{4\pi i}{5}}$. Ce qui confirme bien que les éléments des classes C_{23}, C_{16} et C_{14} sont réguliers.

On confirme que les éléments des classes C_{17}, C_{18} et C_{19} sont réguliers en procédant de la même manière qu'avec C_{21} et ceci entraîne que les éléments de la classe C_{10} et C_{11} le sont aussi.

Finalement, le tableau 5.2.4 donne les nombres réguliers de H_4 ainsi que les degrés des centralisateurs et le nombre de classes de conjugaison ayant ce nombre régulier.

TAB. 5.3.4

| d | degré du centralisateur | Nombre de classe |
|-----|-------------------------|------------------|
| 2 | 2, 12, 20, 30 | 1 |
| 3 | 12, 30 | 1 |
| 4 | 12, 30 | 1 |
| 5 | 20, 30 | 2 |
| 6 | 12, 30 | 1 |
| 10 | 20, 30 | 2 |
| 12 | 12 | 1 |
| 15 | 30 | 2 |
| 20 | 20 | 2 |
| 30 | 30 | 2 |

5.4. GÉNÉRALISATION

T.A. Springer, dans son article, après avoir fait ce que nous venons de détailler, enchaîne avec une généralisation. Soit G un groupe de réflexions sur un espace vectoriel de dimension finie V et $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ les générateurs de l'anneau des invariants et $d_i = \deg(f_i)$ leurs degrés. Soit maintenant $\varphi \in Gl(V)$ tel que

$$\varphi G \varphi^{-1} = G.$$

Les résultats du chapitre 4 concernant les valeurs propres d'éléments de G peuvent se généraliser pour les valeurs propres d'éléments de $G\varphi$. Springer, après avoir démontré ces généralisations, trouve les analogues aux nombres réguliers pour les groupes de réflexions finis. Or dans son article, il n'est aucunement mentionné de ce qu'il en est pour le groupe de type H_4 . On va donc voir pourquoi il en a fait ainsi.

Si $\varphi \in G$, on se retrouve dans la situation où $G\varphi = G$ et donc dans la même situation qu'au chapitre 4. Donc, pour être dans une situation non triviale, il faut trouver les automorphismes externes de H_4 . Soit $\psi \in Aut(H_4)$, puisque ψ doit envoyer les générateurs sur des générateurs et préserver les relations entre eux, il

doit donc envoyer un système simple sur un système simple. Or le résultat suivant nous donne de l'information sur de tels éléments.

Proposition 5.4.1. *Étant donné deux systèmes simples d'un groupe de réflexion, l'un peut être envoyé sur l'autre par conjugaison.*

Pour une démonstration de ceci, voir [Hu] chapitre 1. On voit donc que tout automorphisme qui envoie un système simple sur un autre est interne. Donc, pour que ψ soit externe, il doit envoyer un système simple sur lui-même. Or ψ doit aussi préserver les relations entre les générateurs et va donc correspondre à un automorphisme de graphe du graphe de Coxeter de H_4 i.e. :



or ce graphe ne possède aucun automorphisme non trivial. Ce qui nous permet de conclure que la généralisation ne s'applique pas à H_4 .

Annexe A

FORMULE DE DÉRIVATION EN CHAÎNE

Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V et G un groupe de pseudo-réflexions. Alors,

$$S(V) = \mathbb{F}[v_1, \dots, v_n]$$

et par le théorème de Chevalley-Shephard-Todd-Bourbaki on a aussi

$$S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n].$$

On a vu à la section 3.5. comment définir les dérivés partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial z}{\partial v_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

où $z \in S(V)$. Le but de cette annexe est de montrer la validité de la formule de dérivation en chaîne,

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial z}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

pour tout $z \in S(V)$, dans ce cas particulier. Avant de faire cela, on va démontrer un lemme.

Lemme A.0.1. *Soit $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une extension finie et séparable. Soit $f_i \in \mathbb{F}[T]$, pour $1 \leq i \leq n$, les polynômes minimaux des α_i dans \mathbb{F} . Supposons que les $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sont algébriquement indépendants sur \mathbb{F} et que $g \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui satisfait*

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0.$$

Alors, il existe un polynôme $h \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ tel que

$$(1) \quad h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$$

(2) gh appartient à l'idéal de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$ engendré par $\{f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)\}$.

DÉMONSTRATION. La preuve est par induction sur n . Si $n = 1$ alors on peut prendre $h = 1$, et puisque si m est un polynôme minimale pour α , alors m divisera tout polynôme $g \in \mathbb{F}[T]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Donc, on a que $h = h(\alpha) = 1 \neq 0$ et que $gh = g \in \langle m \rangle$. Soit la tour d'extension :

$$\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\alpha_1) \subset \mathbb{F}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Si on travaille sur l'anneau polynômial $\mathbb{F}(\alpha_1)[T]$, les polynômes minimaux f_2, \dots, f_n , par hypothèse d'induction, pourront se factoriser comme $f_i = f'_i f''_i$ où $f'_i, f''_i \in \mathbb{F}(\alpha_1)[T]$, f'_i est le polynôme minimale de α_i sur $\mathbb{F}(\alpha_1)$ et $f''_i(\alpha_i) \neq 0$. Posons $g' = g(\alpha_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{F}(\alpha_1)[X_2, \dots, X_n]$, par hypothèse d'induction, il existe un $h' \in \mathbb{F}(\alpha_1)[X_2, \dots, X_n]$ tel que $h'(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ et $g'h' \in \langle f'_2(X_2), \dots, f'_n(X_n) \rangle$. Posons maintenant $H = f'_2(X_2) \dots f'_n(X_n)h'$, il s'ensuit que $H(\alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ et que $g'H \in \langle f_2(X_2), \dots, f_n(X_n) \rangle$. Le résultat suit du fait que $\mathbb{F}(\alpha_1) = \mathbb{F}(X_1)/f_1(X_1)$. \square

On va appliquer ce lemme à l'extension séparable

$$F(S(V)^G) \subset F(S(V))$$

où le $F(X)$ représente le corps de fractions de X . On peut remarquer que $F(S(V)) = F(S(V)^G)(v_1, \dots, v_n)$. Étant donné $z \in S(V)$, on peut l'écrire comme polynôme en les v_i , et soit

$$g \in \mathbb{F}[V_1, \dots, V_n, Z]$$

le polynôme qui exprime cette relation i.e. $g(v_1, \dots, v_n, z) = 0$. Soit maintenant

$$f, f_1, \dots, f_n \in F(S(V)^G)[V]$$

les polynômes minimaux sur $F(S(V)^G)$ de z, v_1, \dots, v_n respectivement. Le lemme précédent nous dit qu'il existe un

$$h \in F(S(V)^G)[V_1, \dots, V_n, Z]$$

tel que

$$(1) h(v_1, \dots, v_n, z) \neq 0$$

$$(2) \quad gh \in \langle f(Z), f_1(V_1), \dots, f_n(V_n) \rangle \leq F(S(V)^G)[V_1, \dots, V_n, Z].$$

On a donc, dans $F(S(V)^G)[V_1, \dots, V_n, Z]$, une relation de la forme

$$gh = \alpha f + \sum_j \alpha_j f_j. \quad (1)$$

Les coefficients de α et des α_i sont dans $F(S(V)^G) = \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n)$. En enlevant les dénominateurs, on peut supposer que les coefficients sont en fait dans l'anneau polynômial $S(V)^G = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. En remplaçant $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ par l'anneau polynômial abstrait $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$, on peut voir l'équation (1) comme donnant une identité dans $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n, Z]$. Chaque polynôme apparaissant dans l'équation (1) appartient à un sous-anneau de $\mathbb{F}[X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n, Z]$ soit :

$$\alpha, \alpha_i \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n]$$

$$f \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n, Z]$$

$$f_i \in \mathbb{F}[X_1, \dots, X_n, V_i]$$

$$g \in \mathbb{F}[V_1, \dots, V_n, Z].$$

Si on note la substitution $X_i = x_i, V_i = v_i$ et $Z = z$ par le chapeau, on a que

$$\widehat{f} = \widehat{f}_j = \widehat{g} = 0. \quad (2)$$

On a aussi que les équations définissant $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial z}{\partial v_j}$ et $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ peuvent se réécrire comme

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\widehat{\partial f}}{\partial X_i} \quad (3)$$

$$\frac{\widehat{\partial g}}{\partial Z} \frac{\partial z}{\partial v_j} = -\frac{\widehat{\partial g}}{\partial V_j} \quad (4)$$

$$\frac{\widehat{\partial f_j}}{\partial Z} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = -\frac{\widehat{\partial f_j}}{\partial X_i}. \quad (5)$$

Si on différentie formellement l'équation (1) par rapport aux $\{X_1, \dots, X_n, V_1, \dots, V_n, Z\}$ et ensuite qu'on substitue $X_i = x_i, V_j = v_j$ et $Z = z$, on obtient en utilisant les identités (2) :

$$\frac{\widehat{\partial g}}{\partial T_j} \widehat{h} = \widehat{\alpha}_j \frac{\widehat{\partial f_j}}{\partial T_i} \quad (6)$$

$$0 = \widehat{\alpha} \frac{\widehat{\partial f}}{\partial X_i} + \sum_j \widehat{\alpha}_j \frac{\widehat{\partial f_j}}{\partial X_i} \quad (7)$$

$$\frac{\widehat{\partial f}}{\partial Z} \hat{h} = \hat{\alpha} \frac{\widehat{\partial g}}{\partial Z} \quad (8)$$

Finalement, on peut utiliser ces équations pour déduire la formule de dérivation en chaîne de la manière suivante :

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \left(\hat{\alpha} \frac{\widehat{\partial f}}{\partial X_i} \right) / \left(\hat{\alpha} \frac{\widehat{\partial f}}{\partial Z} \right) \quad \text{par (3)}$$

$$= - \sum_j \left(\hat{\alpha}_j \frac{\widehat{\partial f}_j}{\partial X_i} \right) / \left(\hat{h} \frac{\widehat{\partial g}}{\partial Z} \right) \quad \text{par (7) et (8)}$$

$$= \sum_j \left(\hat{h} \frac{\widehat{\partial g}}{\partial V_j} \frac{\widehat{\partial f}_j}{\partial X_i} \right) / \left(\hat{h} \frac{\widehat{\partial g}}{\partial Z} \frac{\widehat{\partial f}_j}{\partial V_i} \right) \quad \text{par (6)}$$

$$= \sum_j \frac{\partial z}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \text{par (4) et (5).}$$

Annexe B

CODE EN MATHEMATICA

B.1. CODE UTILISÉ POUR LES TABLEAUX 5.2.1 ET 5.2.2

```
a := (1 + Sqrt[5])/4
```

```
b := (Sqrt[5] - 1)/4
```

```
<< Algebra 'Quaternions '
```

```
l := Quaternion[1,0,0,0]
```

```
r := Quaternion[a,1/2,b,0]
```

```
A := Simplify[ l ** Quaternion[1,0,0,0] ** Conjugate[r]]
```

```
B := Simplify[ l ** Quaternion[0,1,0,0] ** Conjugate[r]]
```

```
F := Simplify[ l ** Quaternion[0,0,1,0] ** Conjugate[r]]
```

```
G := Simplify[ l ** Quaternion[0,0,0,1] ** Conjugate[r]]
```

```
S := {{A[[1]],B[[1]],F[[1]],G[[1]]}, {A[[2]],B[[2]],F[[2]],G[[2]]},
      {A[[3]],B[[3]],F[[3]],G[[3]]} ,{A[[4]],B[[4]],F[[4]],G[[4]]}}
```

```
Table[Simplify[MatrixPower[S,i]] == IdentityMatrix[4],{1,30}]
```

```
FullSimplify[Eigenvalues[S]]
```

```
FullSimplify[NullSpace[S- (% [[1]] IdentityMatrix[4])]]
```

B.2. CODE UTILISÉ POUR VÉRIFIER QUE LES ÉLÉMENTS DE C_{21} SONT RÉGULIERS

```
a := (1 + Sqrt[5])/4
```

```
b := (Sqrt[5] - 1)/4
```

```
<< Algebra 'Quaternions '
```

```
l := Quaternion[1/2,b,a,0]
```

```
r := Quaternion[-a,-1/2,-b,0]
```

```
A := Simplify[ l ** Quaternion[1,0,0,0] ** Conjugate[r]]
```

```
B := Simplify[ l ** Quaternion[0,1,0,0] ** Conjugate[r]]
```

```
F := Simplify[ l ** Quaternion[0,0,1,0] ** Conjugate[r]]
```

```
G := Simplify[ l ** Quaternion[0,0,0,1] ** Conjugate[r]]
```

```
S := {{A[[1]],B[[1]],F[[1]],G[[1]]}, {A[[2]],B[[2]],F[[2]],G[[2]]},
      {A[[3]],B[[3]],F[[3]],G[[3]]} ,{A[[4]],B[[4]],F[[4]],G[[4]]}}
```

```
FullSimplify[Eigenvalues[S]]
```

```
v := Simplify[NullSpace[S- (% [[1]] IdentityMatrix[4])]]
```

```
T := {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {1/2,
1/2, 1/2, 1/2}, {-1/2, 1/2, 1/2, 1/2}, {1/2, -1/2, 1/2, 1/2}, {1/2,
1/2, -1/2, 1/2}, {1/2, 1/2, 1/2, -1/2}, {-1/2, -1/2, 1/2, 1/2}, {-
1/2, 1/2, -1/2, 1/2}, {-1/2, 1/2, 1/2, -1/2}, {1/2, b, 0, a}, {-1/2,
b, 0, a}, {1/2, -b, 0, a}, {1/2, b, 0, -a}, {0, a, 1/2, b}, {0, -a,
1/2, b}, {0, a, -1/2, b}, {0, a, 1/2, -b}, {a, 0, b, 1/2}, {-a, 0,
b, 1/2}, {a, 0, -b, 1/2}, {a, 0, b, -1/2}, {1/2, a, b, 0}, {-1/2, a,
b, 0}, {1/2, -a, b, 0}, {1/2, a, -b, 0}, {a, b, 1/2, 0}, {-a, b, 1/2,
0}, {a, -b, 1/2, 0}, {a, b, -1/2, 0}, {1/2, 0, a, b}, {-1/2, 0, a, b},
{1/2, 0, -a, b}, {1/2, 0, a, -b}, {a, 1/2, 0, b}, {-a, 1/2, 0, b}, {a,
-1/2, 0, b}, {a, 1/2, 0, -b}, {b, a, 0, 1/2}, {-b, a, 0, 1/2}, {b, -
a, 0, 1/2}, {b, a, 0, -1/2}, {b, 0, 1/2, a}, {-b, 0, 1/2, a}, {b, 0,
-1/2, a}, {b, 0, 1/2, -a}, {0, 1/2, b, a}, {0, -1/2, b, a}, {0, 1/2,
-b, a}, {0, 1/2, b, -a}, {0, b, a, 1/2}, {0, -b, a, 1/2}, {0, b, -a,
1/2}, {0, b, a, -1/2}, {b, 1/2, a, 0}, {-b, 1/2, a, 0}, {b, -1/2, a,
0}, {b, 1/2, -a, 0},}
```

```
Table[T[[i]] . v[[1]] == 0, {i, 60}]
```


BIBLIOGRAPHIE

- [A, M] M. F. ATIYAH, I. G. MACDONALD, *Introduction to commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [B, G] C. T. BENSON, L. C. GROVE, *Finite Reflection Groups*, Graduate Texts in Mathematics no. 99, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [B] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématique : Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 4, 5 et 6*, Masson, Paris, 1981.
- [C,L,O] D. COX, J. LITTLE, D. O'SHEA, *Ideals, Varieties, and Algorithms*, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [C] H. M. S. COXETER, *Regular Polytopes*, 3rd edn., Dover, New York, 1973.
- [C] H. M. S. COXETER, *The product of the generators of a finite group generated by reflexions.*, Duke Math. J. 18 (1951), p.765-782.
- [E] D. EISENBUD, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics no. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [F, H] W. FULTON, J. HARRIS, *Representation Theory, A First Course*, Graduate Texts in Mathematics no. 129, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [G] P. GARRETT, *Buildings and Classical Groups*, Chapman and Hall, 1997.
- [Go,L] J. GORDON, M. LIEBECK, *Representations and Characters of Groups*, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Gr] L. C. GROVE, *The characters of the hecatonicosahedroidal group*, J. Reine Angew. Math. 265 (1974), 160-169.
- [Ha] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics no. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

- [Hu] J. E. HUMPHREYS, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics vol. 29, Cambridge University press, Cambridge, 1990.
- [K] R. KANE, *Reflection Groups and Invariant Theory*, CMS Books in Mathematics vol. 5, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [L,P,S] C. S. LAM, J. PATERA, R. T. SHARP, *Generating functions for the Coxeter group H_4* , J. Phys. A : Math. Gen. 29 (1996), 7705-7719.
- [P,W] A. PIANZOLA, A. WEISS, *Monstrous E_{10} 's and a Generalization of a Theorem of L. Solomon*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 11 (1989), no. 5, 189-194.
- [Sm] L. SMITH, *Polynomial Invariant of Finite Groups*, Research Notes in Mathematics no. 6, A. K. Peters, 1995.
- [Sp] T. A. SPRINGER, *Regular Elements of Finite Reflection Groups*, Invent. Math. 25 (1974), 159-198.
- [Sp] T. A. SPRINGER, *Invariant Theory*, Lecture Notes in Mathematics vol. 585, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [St] B. STURMFELS, *Algorithms in Invariant Theory*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag /Wien, New York, 1993.