Université de Montréal

Existence et multiplicité de solutions de systèmes d'équations et de systèmes d'inclusions différentielles avec opérateurs maximaux monotones

par

Emmanuel Montoki

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques, option Mathématiques

mars 2004

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Existence et multiplicité de solutions de systèmes d'équations et de systèmes d'inclusions différentielles avec opérateurs maximaux monotones

présentée par

Emmanuel Montoki

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

ROUSSEAU, Christiane
(président-rapporteur)

FRIGON, Marlène
(directeur de recherche)

SCHLOMIUK, Dana
(membre du jury)

O'REGAN, Donal
(examinateur externe)

nom du représentant du doyen
(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:
la date d'acceptation

SOMMAIRE

Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème d'existence et de multiplicité des solutions de systèmes d'équations différentielles et d'inclusions différentielles du premier ordre et du second ordre avec opérateur maximal monotone et avec des conditions aux limites de Sturm-Liouville ou périodiques.

Pratiquement aucun résultat de multiplicité pour les systèmes n'a été obtenu à ce jour compte tenu de la difficulté du problème.

Notre contribution porte sur la multiplicité des solutions de systèmes d'équations différentielles et l'existence de solutions d'inclusions différentielles du second et du premier ordre avec opérateur monotone.

Après avoir introduit une notion de tube-solution strict pour des systèmes d'équations différentielles, nous établissons les tous premiers résultats de multiplicité de solutions des systèmes d'équations différentielles. L'impact de ces résultats pourrait être aussi important que celui relié à la notion de sous et sur-solution strictes pour les équations différentielles qu'on retrouve dans la littérature. Il pourraient contribuer à ouvrir la voie à de nombreux autres résultats de multiplicité de solutions de systèmes d'équations difféntielles.

Notre seconde contribution porte sur l'existence de solutions de systèmes d'inclusions différentielles avec opérateurs maximaux monotones. Ici on introduit une notion de tube-solution (voir définition 4.0.1) qui généralise de façon considérable l'hypothèse imposée par Kandilakis et Papagiorgiou dans leurs résultats contenus dans **[37]**. Nous obtenons par la suite des résultats d'existence généralisant ceux obtenus dans **[37]** pour une même condition aux limites, et plusieurs autres résultats d'existence en imposant des conditions de croissance différentes.

Enfin nous considérons un problème pour un système d'inclusions différentielles du premier ordre avec opérateur maximal monotone plus général que ceux formulés dans la littérature. Pour ce problème aussi, nous définissons une notion de tube-solution qui nous permet d'établir l'existence de solution.

Nos résultats sont basés sur la théorie du degré de Leray-Schauder pour ce qui est des problèmes de second ordre, et sur le théorème de Kakutani pour le problème du premier ordre.

Mots clés : Systèmes d'équations et d'inclusions différentielles, opérateurs maximals monotones, tube-solution, tube-solution strict, degré de Leray-Schauder, théorème de Kakutani, points fixes.

SUMMARY

In this thesis, we study the existence and the multiplicity of solutions to systems of differential equations as well as differential inclusions of first and second order with maximal monotone operator and with Sturm-Liouville or periodic boundary conditions.

Pratically no multiplicity results for systems of differential equations have been obtained up to day because of the difficulty of the problem.

Our contribution concerns the multiplicity of solutions to systems of differential equations, as well as the existence of solutions to systems of differential inclusions of first and second order with monotone operators.

At first, we introduce the notion of strict solution-tube for systems of differential equations. Using this notion, we establish the first results of multiplicity of solutions to systems of differential equations. The consequence of those results could be also important than the results related to the notion of strict lower and upper-solutions of differential equations found in the literature. It would permit us to have other results of multiplicity.

Our second contribution concerns the existence of solutions to systems of differential inclusions of second order with maximal monotone operator. Here we introduce a notion of solution-tube (see definition 4.0.1) for those systems which generalize the hypothesis given by Kandilakis and Papageorgiou in their results contained in [**37**]. We generalize theirs results for the same boundary conditions, and we obtain other existence results by considering other growth conditions.

Finally we consider differential inclusions of first order with monotone operators more general than those considered in the literature. Again we introduce a notion of solution-tube which allows us to establish the existence of solutions.

For the second order problem, our results rely on the Leray-Schauder degree theory. For the first order problem, we apply Kakutani's theorem in order to obtain our result.

Key words : Systems of differential equation and inclusions, maximal monotone operators, solution-tube, Leray-Schauder's degree, Kakutani's theorem, fixed points.

REMERCIEMENTS

Ce travail est l'aboutissement des efforts conjugués de plusieurs organismes et personnes qui ont contribué à développer en moi ce que j'ai reçu du divin créateur pour la réalisation de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements aux gouvernements du Canada et du Cameroun, aux Universités de Montréal, de Yaoundé et à l'Institut de Mathématiques et des Sciences Physiques de Porto-novo (IMSP) au Benin pour leurs déterminantes contributions à ma formation mathématique. Je remercie aussi l'Institut des Sciences Mathématiques de Montréal (ISM) et l'International Center For Theoretical Physics (ICTP) de Trieste pour leurs contributions financières respectivement pour la réalisation de ce travail et ma formation en mathématiques au Benin.

A ma directrice Frigon Marlène, l'usage équilibré de tes qualités humaines, pédagogiques et académiques ont été d'un apport inestimable à ma personne et un moteur d'encouragement face à toutes les difficultés que j'ai connues. J'ai beaucoup apprécié le goût en toi du travail très bien fait. Au delà des mathématiques, j'ai beaucoup appris de toi : savoir parler peu et utilement, savoir apporter la parole qui libère et véhicule l'espoir.

Mes remerciements s'adressent maintenant aux professeurs, aux administrateurs du système informatique, au personnel non enseignant et aux étudiants du département de mathématiques et de statistique qui ont su créer et entretenir un climat propice et agréable pour la recherche. Merci particulièrement aux professeurs Gauthier et Véronique Hussin pour leurs encouragements. Merci également à Pascal Turbis et Magnifo Florence pour avoir relu ce travail.

Ce travail n'aurait jamais pu être réalisé sans le secours de tous ceux que Dieu a utilisés pour générer en moi la foi chrétienne. Cette foi qui m'a permis de vaincre les adversités de la vie, qui a généré en moi l'assurance de la victoire face aux problèmes paranormaux et devant lesquels la médecine a été impuissante. Grâce à cette foi j'ai pu aller jusqu'au bout de cette thèse. C'est à ce titre que je remercie : le pasteur Lopiko, George Pazaï, Marcellin Diha, les pasteurs Fernand Beaulieu, Dulfour, Levis, Serge Hounsou, Eugène Aïssi, l'église du plein Héritage et tous ceux qui m'ont apporté leur soutien spirituel. Que Dieu vous bénisse de ce que vous lui avez permis de vous utiliser pour me secourir.

Merci à Bertrand Blais, David Okomono et Ottou Nguini pour avoir toujours été à mes côtés chaque fois que j'avais besoin de votre aide.

A mon père, mort et enterré sans ma présence, pendant la rédaction de cette thèse, toi qui depuis mon enfance ne cessait de me dire que la prière et le travail sont les clés du succès, je te dédie cette thèse et te dis merci pour ce que tu as fait pour moi. A ma mère, mes frères et beaux parents, merci pour ce que vous avez fait pour moi et continuerez encore à faire pour cet amour naturel qui nous unit.

Merci enfin à mon épouse et mes enfants Winnie, Mat-Uriel, Elrik et Yvie-Amy que la rédaction de cette thèse a régulièrement privés de ma présence et de mon soutien chaque fois que vous en aviez besoin. Merci pour votre patience et compréhension.

Table des matières

Sommaire iii

Summary v

Remerciements vii

Introduction 1

0.1. Multiplicité de solutions de systèmes d'équations différentielles ... 1

0.1.1. Existence 2

0.1.2. Multiplicité 4

0.2. Inclusions différentielles du second ordre avec opérateur maximal monotone 7

0.3. Inclusions différentielles du premier ordre avec opérateur maximal monotone 10

Chapitre 1. Notations et préliminaires 12

1.1. Notations et rappels 12

1.2. Degré de Leray-Schauder 15

1.3. Fonctions multivoques 16

1.4. Opérateurs monotones 17

Chapitre 2. Majoration a priori des dérivées des solutions d'inclusions différentielles avec un opérateur monotone 30

2.1. Notations et hypothèses 30

2.2. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. 32

2.3. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans L^1 33

2.4. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. 39

Chapitre 3. Multiplicité de solutions de systèmes d'équations différentielles du second ordre 43

3.1. Théorème d'existence et de multiplicité avec des conditions aux limites de Sturm-Liouville.. 45

3.2. Autres résultats de multiplicité.................................. 52

3.3. Cas scalaire.. 57

Chapitre 4. Inclusions différentielles avec opérateur maximal monotone 62

4.1. Théorème d'existence de type Papageorgiou...................... 64

4.2. Autres résultats d'existence 73

Chapitre 5. Inclusions différentielles du premier ordre avec opérateur maximal monotone 78

5.1. Résultat d'existence pour le problème périodique................. 79

Conclusion.. 85

Bibliographie 87

INTRODUCTION

Nous présentons dans cette thèse des résultats d'existence et de multiplicité (i.e pluralité) de solutions des systèmes d'équations différentielles et des résultats d'existence de solutions d'inclusions différentielles avec opérateurs monotones. L'étude des systèmes d'équations différentielles impose la connaissance du nombre de solutions ou du nombre minimal de solutions : on veut savoir si le système n'a pas de solutions, a une solution ou a plusieurs solutions et dans ce cas, si on ne peut trouver le nombre précis de solutions, on veut trouver le nombre minimal de solutions. D'où l'importance des résultats de multiplicité (pluralité) de solutions.

Le présent travail se compose en trois volets : multiplicité des solutions de systèmes d'équations différentielles, existence de solutions de systèmes d'inclusions différentielles de second ordre avec opérateur maximal monotone ; existence de solutions de systèmes d'inclusions différentielles du premier ordre avec un opérateur maximal monotone et un opérateur multivoque.

0.1. Multiplicité de solutions de systèmes d'équations différentielles

Rappelons que par *multiplicité de solutions d'un système d'équations différentielles*, on entend l'existence de plusieurs solutions de ce système d'équations différentielles pour les mêmes conditions aux limites.

Dans cette partie nous traitons de l'existence et de la multiplicité de solutions des systèmes d'équations différentielles de la forme :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) & \text{p.p. } t \in I, \\ x \in BC, \end{cases} \tag{$*$}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory (voir définition 1.1.6) et où I := [0,1], BC désigne les conditions aux limites de Sturm-Liouville ou périodiques :

$$\begin{cases} A_0 x(0) - \beta_0 x'(0) = r_0, \\ A_1 x(1) + \beta_1 x'(1) = r_1; \end{cases} \tag{SL}$$

$$\begin{cases} x(0) = x(1), \\ x'(0) = x'(1); \end{cases} \tag{P}$$

où pour $i = 0$ ou 1, A_i est une matrice $(n \times n)$ telle qu'il existe $\alpha_i \geq 0$ tel que $\langle x, A_i x\rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\beta_i \in \{0, 1\}$ et $\alpha_i + \beta_i > 0$, r_0, $r_1 \in \mathbb{R}^n$.

L'existence et la multiplicité de solutions du problème $(*)$ ont été abordées dans le passé par plusieurs auteurs par la méthode de sous et sur-solutions. Dans ce qui suit, nous faisons un bref rappel de ces travaux et présentons notre contribution.

0.1.1. Existence

La littérature sur l'existence de solutions du problème $(*)$ est volumineuse ; nous référons à **[6, 8, 16, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 31, 35, 36, 38, 39, 44, 47, 48]** et les références qui y sont contenues.

Dans le cas scalaire $(n = 1)$, beaucoup de résultats d'existence reliés à l'hypothèse de la forme suivante ont été obtenus :

$$x f(t, x, 0) \geq 0 \quad \text{pour} \quad |x| = M. \tag{0.1.1}$$

Cette hypothèse a été généralisée par l'hypothèse de l'existence de sous et sur-solutions suivantes :

$$\begin{cases} \text{il existe } \phi \leq \psi \in W^{2,1}(I) \ \text{ tels que} \\ \phi''(t) \geq f(t, \phi(t), \phi'(t)) \text{ et } \psi''(t) \leq f(t, \psi(t), \psi'(t)) \text{ pour tout } t \in I. \end{cases} \tag{0.1.2}$$

qui a conduit à plusieurs autres résultats.

Dans le cas des systèmes d'équations différentielles, en commençant par le travail de Hartman [38], plusieurs résultats d'existence [6, 22, 35, 44], ont été obtenus par la généralisation de l'hypothèse (0.1.1) par

$$\begin{cases} \text{il existe une constante } M > 0 \text{ telle que} \\ \langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2 \geq 0 \text{ pour } \|x\| = M \text{ et } \langle x, p\rangle = 0. \end{cases} \tag{0.1.3}$$

L'hypothèse (0.1.2) a aussi été généralisée aux systèmes, mais dans un premier temps sans grand succès. Voici l'hypothèse de cette généralisation qu'on trouve par exemple dans [8].

$$\begin{cases} \text{Il existe } \phi \leq \psi \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n) \text{ tels que,} \\ \phi_i''(t) \geq f_i(t, x_1, \cdots, x_{i-1}, \phi_i(t), x_{i+1}, \cdots, x_n, p_1 \cdots, p_{i-1}, \phi_i'(t), p_{i+1}, \cdots, p_n), \\ \psi_i''(t) \leq f(t, x_1, \cdots, x_{i-1}, \psi_i(t), p_1 \cdots, p_{i-1}, \psi_i'(t), p_{i+1}, \cdots, p_n) \\ \text{pour } \phi_j(t) \leq x_j \leq \psi_j(t), -c_j \leq p_j \leq c_j \text{ pour tout } j \neq i, \\ \text{et } c \text{ étant un vecteur quelconque vérifiant, } |\phi_i(t)|, |\psi_i(t)| < c_i. \end{cases} \tag{0.1.4}$$

Au début des années 90, Frigon [26, 27] généralise les hypothèses (0.1.2) et (0.1.3) simultanément aux systèmes d'équations différentielles en introduisant la notion de tube-solution suivante :

$$\begin{cases} \text{il existe } v \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n), M \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}) \text{ tels que} \\ \langle x - v(t), f(t,x,p) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 \geq M(t)M''(t) + (M'(t))^2 \\ \text{ p.p. } t \in I \text{ et tout } (x,p) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ tels que } \|x - v(t)\| = M(t) \\ \text{et } \langle x - v(t),\ p - v'(t)\rangle = M(t)M'(t); \\ v''(t) = f(t,\ v(t),\ v'(t)) \text{ p.p. sur } \{t \in I : M(t) = 0\}. \end{cases} \tag{0.1.5}$$

Elle apporta ainsi un grand progrès dans la résolution du problème $(*)$ dans le cas des systèmes d'équations différentielles où l'existence d'une solution x de $(*)$ vérifiant $\|x(t) - v(t)\| \leq M(t)$ est établie.

Il convient de rappeler que toutes ces hypothèses sont accompagnées d'autres hypothèses qui sont reliées aux conditions initiales.

0.1.2. Multiplicité

Dans le cas scalaire, plusieurs résultats de multiplicité sont reliés aux hypothèses de sous et sur-solutions strictes suivantes (voir [**16, 20, 25, 33, 39, 48**]). Dans le cas où f est continue et ne depend pas de x', l'hypothèse s'écrit :

$$\begin{cases} \text{il existe } \phi \leq \psi \in C^2(I) \ \text{ tels que} \\ \phi''(t) > f(t,\phi(t)) \text{ et } \psi''(t) < f(t,\psi(t)) \text{ pour tout } t \in I. \end{cases} \tag{0.1.6}$$

Dans le cas où la fonction f n'est pas continue, mais est de Carathéodory, l'hypothèse précédente est insuffisante pour obtenir des résultats de multiplicité. On retrouve dans la littérature essentiellement deux approches : la première imposant des inégalités dans des intervalles contenant ϕ et ψ [**16**], la seconde approche précisant les inégalités strictes [**20, 33**]. La seconde approche permet de considérer des fonctions dépendant de x'. Voici d'abord des hypothèses correspondant à cette première approche :

$$\begin{cases} \text{il existe } \phi \leq \psi \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n) \ \text{ tels que} \\ \text{pour tout } t_0 \in I, \text{ il existe} \\ \text{un voisinage } I_0 \text{ de } t_0 \text{ , } \epsilon_0 > 0 \text{ tels que} \\ \phi''(t) \geq f(t,u) \text{ et } \psi''(t) \leq f(t,v) \text{ pour tout } t \in I_0, \\ \text{pour tous } u \text{ et } v \text{ tels que} \\ \phi(t_0) \leq u \leq \phi(t_0) + \epsilon_0 \text{ et } \psi(t_0) - \epsilon_0 \leq v \leq \psi(t_0), \end{cases} \tag{0.1.7}$$

et lorsque la condition aux limites est de Dirichlet et $I = [0,\pi]$:

$$\begin{cases} \text{il existe } \phi \leq \psi \in W^{2,1}(I) \ \text{ tels que} \\ \phi''(t) \geq f(t,u) \text{ et } \psi''(t) \leq f(t,v) \text{ pour tout } t \in I, \\ \text{pour tous } u \text{ et } v \text{ tels que} \\ \phi(t) \leq u \leq \phi(t) + \epsilon_0 sint, \\ \psi(t) - \epsilon_0 sint \leq v \leq \psi(t). \end{cases} \tag{0.1.8}$$

Voici, maintenant une hypothèse correspondant à la deuxième approche :

$$\begin{cases} \text{il existe } \phi \leq \psi \in W^{2,1}(I) \text{ tels que} \\ \operatorname{ess\,inf}_{t\in I} \left(\phi''(t) + f(t,\phi(t),\phi'(t))\right) > 0, \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in I} \left(\psi''(t) + f(t,\psi(t),\psi'(t))\right) < 0. \end{cases} \tag{0.1.9}$$

Toutes les hypothèses ci-dessus sont reliées à d'autres hypothèses portant sur les conditions aux limites.

Dans le cas des systèmes d'équations différentielles, très peu de résultats de multiplicité existent dans la littérature. On note quelques résultats de multiplicité faisant intervenir les propriétés d'élasticité, l'estimation du nombre de zéros des composantes des solutions de la famille d'opérateurs associée et le théorème de continuation appliqué à la famille d'opérateurs associée, voir [**14, 15, 49**]. Mais on ne trouve qu'un seul résultat [**5**] de multiplicité de solutions pour les systèmes de dimension 2 (n=2) avec les conditions de Dirichlet, relié à la méthode de sous et sur-solutions (0.1.4). Dans [**5**], Barutello, Cappietto et Habets montrent par la méthode de sous et sur-solutions l'existence et la multiplicité des solutions du problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} u''(t) + sf(t,u(t)) = 0 \text{ p.p. } t \in [0,\pi], \\ u(0) = u(\pi); \end{cases} \tag{0.1.10}$$

où $f : [0,\pi] \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ est de Carathéodory, $s \in \mathbb{R}_+$. Ils prouvent le résultat suivant :

il existe $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que :

(a) pour tout $s \in]0, s_0[$, (0.1.10) a au moins deux solutions,

(b) pour $s = s_0$, (0.1.10) a au moins une solution,

(c) pour $s > s_0$ (0.1.10) n'a pas de solution.

Le vide qu'on observe en ce qui a trait aux résultats de multiplicité de solutions des systèmes d'équations différentielles par la méthode de sous et sur-solutions ou de tube-solution, est dû au fait qu'aucune hypothèse dans le cas des systèmes, semblable aux hypothèses de sous et sur-solutions strictes formulées dans le cas scalaire, n'a été formulée dans la littérature. En introduisant la notion de tube-solution strict, (voir définition 3.0.3) au chapitre 3, nous établissons les tous premiers résultats de multiplicité des solutions de systèmes d'équations différentielles reliés aux hypothèses généralisant les hypothèses de sous et sur-solutions strictes qu'on retrouve dans le cas scalaire. Ces premiers résultats de multiplicité et la notion de tube-solution strict sont un point de départ sur l'étude de la multiplicité des systèmes d'équations différentielles; sujet jusqu'ici peu traité compte tenu de sa difficulté. Notons que dans le cas scalaire, si f est continue, la notion de tube-solution strict contient la notion de sous et sur-solutions strictes introduite par El Khattabi [**20**].

En supposant l'existence d'un tube-solution (v_0, M_0) et de deux tubes-solutions stricts (v_i, M_i), $i \in \{1, 2\}$ convenables, on montre que

$(*)$ *possède au moins trois solutions distinctes.*

Il convient de noter que contrairement au résultat de Barutello, Capietto et Habets, notre résultat ne limite pas la dimension du système, i.e. qu'il est valide dans $\mathbb{R}^n$ pour tout n.

En considérant différentes conditions de croissance sur f (Bernstein, Nagumo, Nagumo-Wintner), on a pu établir plusieurs résultats de multiplicité (voir théorèmes 3.2.3 et 3.2.4).

Notons enfin que notre résultat dans le cas scalaire s'apparente à celui de Henderson et Thompson [**39**] qui étudient la multiplicité du problème

$$\begin{cases} x''(t) + f(t, x(t), x'(t)) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{0.1.11}$$

et établissent le résultat de multiplicité suivant :

Théorème 0.1.1. *Soient $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et supposons qu'il existe $\alpha_1, \ \alpha_2 \in C^1(I)$ deux sous-solutions et $\beta_1, \ \beta_2 \in C^1(I)$ deux sur-solutions du problème précédent vérifiant :*

(i) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$

(ii) $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$;

(iii) $\alpha_2 \not\leq \beta_1$;

(iv) si x est une solution de (0.1.11) telle que $\alpha_1(t) \leq x(t) \leq \beta_1(t)$ alors $\alpha_1(t) < x(t) < \beta_1(t)$;

(v) il existe $h \in C([0,\infty[;]0,\infty[)$ et $N > 0$ tel que $|f(t,x,p)| \leq h(|p|)$, pour tout $(t,x,p) \in I \times [\alpha(t),\beta(t)] \times \mathbb{R}$ et $\int_0^N \frac{s\,ds}{h(s)} > \max\beta - \min\alpha$.

Alors le problème (0.1.11) a trois solutions distinctes x_1, x_2 et x_3 telles que $\alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1$, $\alpha_2 \leq x_2 \leq \beta_2$, et $x_3 \not\leq \beta_1$, $x_3 \not\geq \alpha_2$.

Si $s \leq h(s)$ p.p. $s \in [0,\infty[$, alors notre résultat devient plus général (voir corollaire 3.3.2).

0.2. Inclusions différentielles du second ordre avec opérateur maximal monotone

Dans ce volet, nous étudions l'existence de solutions du problème

$$\begin{cases} x''(t) \in Bx(t) + f(t,x(t),x'(t)) & \text{p.p. } t \text{ sur } I, \\ x \in \ HBC \end{cases} \qquad (*)_B$$

où $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ est maximal monotone et HBC désigne la condition périodique (P) ou la condition de Sturm-Liouville homogène (SL) avec $r_0 = r_1 = 0$.

Dans le cas des systèmes, le problème $(*)_B$ a été étudié dans les années 1972 par Brezis **[12]** où il montre l'existence et l'unicité de la solution du problème

$$\begin{cases} u''(t) \in Bu(t), \quad t > 0, \\ u'(0) \in \partial j(u(0) - a); \end{cases}$$

où ∂j est le sous-différentiel de j et $a \in D(B)$, B opérateur maximal monotone défini dans un sous-ensemble d'un espace de Hilbert H. Ce problème est repris plus tard par Aftabizadeh et Pavel qui dans **[1]** étudient l'existence et l'unicité de la solution des problèmes aux limites suivants :

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) \in Bu(t) + f(t) \quad t \in [0,T], \\ u(0) = u(T), \\ u'(0) - u'(T) \in \gamma\big(u(0)\big); \end{cases} \tag{0.2.1}$$

$$\begin{cases} u''(t) + u'(t) \in Bu(t) + f(t) \quad t \in [0,T], \\ u'(0) = u'(T), \\ u(0) - u(T) \in \delta\big(u'(0)\big); \end{cases} \tag{0.2.2}$$

où B, γ, δ sont des opérateurs maximaux monotones (possiblement multivoques) de l'espace de Hilbert H ; $T > 0$, $f \in L^2([0,T], H)$.

Remarquons que la formulation du problème $(*)_B$ avec B maximal monotone multivoque, incorpore le cas des systèmes du second ordre avec un potentiel convexe, étudié en détail par Mawhin et Willem dans **[45]** où la fonction de potentiel est non autonome mais dérivable. Le fait que B est multivoque contient aussi les problèmes avec un potentiel non différentiable. La formulation $(*)_B$ inclut aussi les inégalités variationnelles du second ordre qui sont très utiles en mécanique et ingénierie [voir **[4]** chapitre 6].

Mais c'est par les travaux de Papageorgiou et ses collaborateurs qu'on connait des développements importants dans l'étude de l'existence de solutions de $(*)_B$.

En 2000 dans **[37]**, Halidas et Papageorgiou établissent l'existence de solutions du problème $(*)_B$ avec des conditions aux limites plus générales suivantes

$$(x'(0), -x'(1)) \in \Psi(x(0), x(1)),$$

où Ψ est un opérateur maximal monotone.

Dans **[37]** Halidas et Papageorgiou considèrent les hypothèses suivantes :

(HI0) Pour presque tout $t \in I$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|f(t,x,y)\| \leq \gamma_1(t, \|x\|) + \gamma_2(t, \|x\|)\|y\|$$

avec $\sup_{0\leq r\leq k} \gamma_1(t,r) \leq \eta_{1,k}(t)$ p.p. $t \in I$, $\eta_{1,k}(t) \in L^2(I)$ et $\sup_{0\leq r\leq k} \gamma_2(t,r) \leq \eta_{2,k}(t)$ p.p. $t \in I$, $\eta_{2,k}(t) \in L^\infty(I)$.

(HI1) il existe $M > 0$ tel que si $\|x_0\| > M$ et $\langle x_0, y_0\rangle = 0$, alors il existe $\delta > 0$, $c > 0$ tels que pour tout $t \in I$, on a :

$$\inf\left\{\langle f(t,x,y), x\rangle + \|x\|^2 : \|x - x_0\| + \|y - y_0\| < \delta\right\} \geq c,$$

(HI2) pour tout $t \in I$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\langle f(t,x,y), x\rangle \geq -\alpha\|x\|^2 - \beta\|x\|\|y\| - c(t)\|x\|$$

avec $\alpha, \beta \geq 0, c \in L^1(I, [0, \infty[)$.

Avec ces hypothèses, ils prouvent l'existence d'une solution x qui vérifie $\|x\| \leq M$.

Au chapitre quatre, on introduit la notion de tube-solution suivante du problème $(*)_B$ qui nous permet d'appliquer un principe du maximum afin de montrer qu'une solution x de $(*)_B$ vérifie $\|x(t) - v(t)\| \leq M(t)$:

(HI3) Il existe $(v, M) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I, [0, \infty[)$ tels qu'il existe $b \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que $b(t) \in Bv(t)$, p.p. $t \in I$ et

$$\langle x - v(t), f(t,x,p) + b(t) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 - M(t)M''(t) - (M'(t))^2 \geq 0,$$

pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour presque tout $t \in I$ tels que

$$\|x - v(t)\| = M(t) \quad \text{et} \quad \langle x - v(t), p - v'(t)\rangle = M(t)M'(t).$$

Cette hypothèse généralise considérablement $(HI1)$.

Remarque 0.2.1. Remarquons que si $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ est solution de $(*)_B$ alors l'hypothèse $(HI3)$ entraîne que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\|x(t) - v(t)\|^2 - M(t)^2\right) \geq 0.$$

En effet

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|x(t) - v(t)\|^2 - M(t)^2\right) =& 2\big(\langle x(t) - v(t), x''(t) - v''(t)\rangle\big) \\ &+ 2\big(\|x'(t) - v'(t)\|^2 - M''(t)M(t) - M^2(t)\big).\end{aligned}$$

et comme $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$, en prenant $p = x'(t)$, on obtient l'inéqualité voulue.

Ainsi comme on le verra dans la preuve, par le principe du maximum, l'hypothèse $(HI3)$ auquelle on ajoute des conditions aux limites sur (v, M), permet d'établir que pour tout $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ solution de $(*)_B$, on a $\|x(t) - v(t)\| \leq M(t)$.

Nous remplaçons l'hypothèse $(HI0)$ par l'hypothèse suivante :

(HI4) Pour tout $r \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$, il existe $R \in L^2(I)$ tel que pour tous $x, y \in L^2(I)$ vérifiant $\|x(t)\|$, $\|y(t)\| \leq r(t)$ p.p. $t \in I$, on a $\|f(t,\ x(t),\ y(t))\| \leq R(t)$ p.p. $t \in I$.

Enfin nous généralisons l'hypothèse de croissance $(HI2)$ en considérant l'hypothèse de croissance suivante :

(HI5) Il existe $h \in L^1(I, [0, \infty[)$ et $k > 0$ tels que

$$0 \leq \langle x, f(t, x, p)\rangle + k\|p\|^2 + h(t).$$

On obtient ainsi avec ces hypothèses un résultat d'existence dans le cas des conditions aux limites périodiques et de Sturm-Liouville homogène. On établit que $(*)_B$ a au moins une solution x qui vérifie

$$\|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \text{ p.p. } t \in I.$$

Par la suite, nous affaiblissons l'hypothèse $(HI0)$ en prenant f de Carathéodory. En contrepartie des conditions de croissance plus fortes sont imposées à f.

0.3. Inclusions différentielles du premier ordre avec opérateur maximal monotone.

Au chapitre 5 nous établissons l'existence d'une solution de l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} x'(t) \in -Bx(t) + F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ x(0) = x(1); \end{cases} \tag{$(*)_1$}$$

où F est une fonction multivoque et B un opérateur monotone.

Dans [7], Benilan et Brezis établissent l'existence d'une solution de l'inclusion

$$\begin{cases} f(t) \in u'(t) + Bu(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ u \in BC, \end{cases} \tag{0.3.1}$$

où BC désigne soit la condition de Dirichlet, soit la condition périodique, B est un opérateur maximal monotone ou coercif. Par la suite dans son livre **[10]**, Brezis étudie en détail (0.3.1). En 1992 dans **[43]**, Kandilakis et Papagiorgiou prouvent l'existence de solution de l'inclusion suivante

$$\begin{cases} -x'(t) \in \partial\rho(t, x(t)) + F(t, x(t)), & \text{p.p. } t \in I \\ x(0) = x_0(1) \in H, \end{cases}$$

où H est un espace de Hilbert et $\partial\rho$ est le sous-différentiel de ρ.

En considérant l'inclusion $(*)_1$ avec F multivoque et B maximal monotone, nous considérons un problème plus général. Nous introduisons une notion de tube-solution associé au problème $(*)_1$. En ce sens, nos hypothèses sont diffèrentes de celles de **[10, 43]** et nous permettent d'établir l'existence d'une solution de $(*)_1$. Nous avons supposé que F est semi-continue supérieurement à valeurs convexes, compactes.

En terminant, disons quelques mots sur les démonstrations. Dans les chapitres trois et quatre, nous utilisons la théorie du degré topologique de Leray-Schauder alors qu'au chapitre cinq, le résultat établi découle du théorème de point fixe de Kakutani. Notre démarche s'articule sur la méthode de la majoration a priori des solutions. À cette fin, le chapitre deux qui est plus technique, traite de la majoration a priori des dérivées des solutions de la famille des systèmes

$$\begin{cases} x''(t) \in Bx(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in I, \\ x \in BC; \end{cases}$$

où $\lambda \in I$, $f: I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $g: I \times \mathbb{R}^{2n} \times I \to \mathbb{R}^n$, fonctions de Carathéodory, et $B: dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ opérateur maximal monotone.

Nous commençons par fixer quelques notations et rappeler quelques résultats utiles.

Chapitre 1

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

1.1. Notations et rappels

Pour $A \subset \mathbb{R}$, $\mu(A)$ désigne la mesure de Lebesgue de A. Si E est un espace topologique et $\Omega \subset E$, $\text{int}(\Omega)$, $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ et $co\Omega$ désignent respectivement l'intérieur, la frontière, la fermeture et l'enveloppe convexe de Ω. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace normé, $x \in E$, $A \subset E$ et $r > 0$, la boule ouverte centrée en x de rayon r est notée par $B(x, r)$ alors que

$$B(A, r) = \bigcup_{x \in A} B(x, r).$$

Si E et F sont deux espaces topologiques et $f \; : E \to F$, on dit que f est *compacte* si $\overline{f(E)}$ est compact. Si E est un espace normé, nous disons que f est *complètement continue* si $\overline{f(B)}$ est compact pour tout B sous-ensemble borné de E.

Dans cette thèse, dans le cas où cela ne prête pas à confusion, nous notons I :=[0,1], et nous considérerons les espaces suivants :

- $C(I, \mathbb{R}^n) = \{x : I \to \mathbb{R}^n : x \text{ est continue}\}$ muni de la norme usuelle notée $\|\cdot\|_0$.
- $C_0(I, \mathbb{R}^n) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : x(0) = 0\}$.
- $C^k(I, \mathbb{R}^n) = \{x : I \to \mathbb{R}^n : x$ est continûment différentiable jusqu'à l'ordre $k\}$ muni de la norme $\|x\|_k = \max\{\|x\|_0, \|x'\|_0 \ldots, \|x^{(k)}\|_0\}$.
- $C^k_B(I, \mathbb{R}^n) = \{x \in C^k(I, \mathbb{R}^n) : x \in BC\}$, où BC désigne les conditions aux limites qui seront considérées plus loin.

- $L^k(I,\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions mesurables x telles que $\|x\|^k$ est intégrable, muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_{L^k}$, et quand il n'y aura pas de confusion, $\|\cdot\|_{L^k}$ sera noté $\|\cdot\|_k$.
- $W^{k,p}(I,\mathbb{R}^n) = \{x \in C^{k-1}(I,\mathbb{R}^n) : x^{(k)} \in L^p(I,\mathbb{R}^n)\}$ est l'espace de Sobolev des fonctions $x \in C^{k-1}(I,\mathbb{R}^n)$ dont la dérivée d'ordre k au sens des distributions est dans $L^p(I,\mathbb{R}^n)$. Cet espace est muni de la norme usuelle

$$\|x\|_{k,p} = \sum_{0\leq j\leq k} \|x^{(j)}\|_p.$$

- $W_B^{k,p}(I,\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(I,\mathbb{R}^n) \cap C_B^1(I,\mathbb{R}^n)$

Pour $\varepsilon \geq 0$, on définit $L_\varepsilon : C_B^1(I,\mathbb{R}^n) \to C_0(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$L_\varepsilon(x)(t) = x'(t) - x'(0) - \varepsilon \int_0^t x(s)\,ds. \tag{1.1.1}$$

Pour ε convenablement choisi, L_ε sera un opérateur linéaire inversible.

Définition 1.1.1. On dit qu'une fonction $F : C^k(I,\mathbb{R}^n) \to L^1(I,\mathbb{R}^n)$ est *intégrablement bornée* s'il existe une fonction intégrable $h \in L^1(I,\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\|F(x)(t)\| \leq h(t) \quad \text{p. p. } t \in I \text{ et tout } x \in C^k(I,\mathbb{R}^n).$$

À $F : C^k(I,\mathbb{R}^n) \to L^1(I,\mathbb{R}^n)$, on associe l'opérateur $N_F : C^k(I,\mathbb{R}^n) \to C_0(I,\mathbb{R}^n)$ défini par

$$N_F(x)(t) = \int_0^t F(x)(s)\,ds.$$

Lemme 1.1.2. *Si $F : C^k(I,\mathbb{R}^n) \to L^1(I,\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue et intégrablement bornée sur les ensembles bornés alors l'opérateur associé N_F est continu et complètement continu.*

Le lecteur intéressé pourra trouver une démonstration de ce résultat dans **[36]**. Les résultats suivants seront utilisés dans ce qui suit, pour la majoration a priori des solutions. Le lecteur intéressé pourra trouver les démonstrations respectivement dans [**46**], [**28**], [**30**].

Lemme 1.1.3. *Soit $x : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction absolument continue et E un sous-ensemble négligeable de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\mu(E) = 0$). Alors*

$$\mu(\{t \in I : x(t) \in E \quad \text{et } x'(t) \neq 0\}) = 0.$$

Lemme 1.1.4. (Principe du maximum) *Soit $u \in W^{2,1}(I, \mathbb{R})$ et $\varepsilon \geq 0$. Supposons qu'une des propriétés suivantes est satisfaite*

(i) $u''(t) - \varepsilon u(t) \geq 0$ p.p. $t \in I$; $a_0 u(0) - b_0 u'(0) \leq 0$, $a_1 u(1) + b_1 u'(1) \leq 0$, où a_i, $b_i \geq 0$, $\max\{a_i, b_i\} > 0$, $\max\{a_0, a_1, \varepsilon\} > 0$, $i \in \{0, 1\}$;

(ii) $u''(t) - \varepsilon u(t) \geq 0$ p.p. $t \in I$; $\varepsilon > 0$, $u(0) = u(1)$, $u'(1) - u'(0) \leq 0$;

(iii) $u''(t) - \varepsilon u(t) \geq 0$ p.p. $t \in [0,\ t_1] \cup [t_2,\ 1]$; $\varepsilon > 0$, $u(0) = u(1)$, $u'(1) - u'(0) \leq 0$ et $u(t) \leq 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$.

Alors $u(t) \leq 0$ pour tout $t \in I$.

Lemme 1.1.5. (Règle de changement de variables dans une intégrale) *Soit $f \in W^{1,1}[a, b]$ telle que $f(t) \in [c, d]$ pour tout $t \in [a, b]$ et soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ mesurable au sens de Borel telle que $g \in L^1[c, d]$ et $g(f)f' \in L^1[a, b]$. Alors*

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(s)\, ds = \int_a^b g(f(t)) f'(t)\, dt.$$

Définition 1.1.6. On dit qu'une fonction $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est *L^p-Carathéodory* si

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^m$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable ;

(ii) la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continue p.p. $t \in I$;

(iii) pour tout $k > 0$, il existe $h_k \in L^p(I, \mathbb{R})$ telle que $\|f(t, x)\| \leq h_k(t)$ pour tout x tel que $\|x\| \leq k$ et p.p. $t \in I$.

Si $p = 1$, on dit tout simplement que f est de *Carathéodory.*

Nous énonçons aussi les deux lemmes suivants qui nous seront utiles au chapitre 5. Le lecteur intéressé trouvera la démonstration dans **[11, 40]**.

Lemme 1.1.7. *Si E est un espace de Hilbert, F un espace topologique $f : E \to F$ continue, et si pour toute suite $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, $f(x_n) \to f(x)$ alors f est complètement continue. Si de plus f est linéaire, il y a équivalence entre f complètement continue et pour toute suite $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, $f(x_n) \to f(x)$.*

Lemme 1.1.8. *Si X est un espace de Banach réflexif et si $\{y_n\}$ est une suite de points de X qui converge faiblement vers y, alors il existe une suite $\{v_n\}$ telle que $v_n \in co\{y_n, y_{n+1} \cdots\}$ qui converge fortement vers y dans X.*

1.2. Degré de Leray-Schauder

Nous utiliserons dans ce travail la théorie du degré qui nous permettra d'établir l'existence de solutions.

Rappelons d'abord que la notion générale du degré topologique pour une application entre des variétés orientées de dimension finie fut introduite pour la première fois par Brouwer en 1912. Il en donna quelques propriétés et les utilisa pour établir les questions telles que l'invariance de domaine dans $\mathbb{R}^n$. Par la suite en 1927, Schauder élargie la notion aux applications de la forme $T = I - F$ avec F compacte définie sur un domaine compact convexe d'un espace de Banach. Ce qui permit d'utiliser cette notion pour établir les résultats d'existence de solutions d'équations différentielles. Cette théorie jouera un rôle clé dans les preuves de nos résultats. En dehors de la définition analytique du degré topologique, cette notion peut être définie de façon axiomatique de la façon suivante.

Soient E un espace de Banach et $U \subset E$ un ouvert borné. On note $K_{\partial U}(\overline{U}, E)$ l'ensemble des applications $F : U \to E$ continues et compactes sans point fixe sur la frontière, $CK(U)$ l'ensemble des applications $T : \overline{U} \to E$ telles que $T = I - F$ où $F \in K_{\partial U}(\overline{U}, E)$. À $T \in CK(U)$, on associe un entier noté $d(T, U, 0)$ appelé *degré de T sur U*, et vérifiant les propriétés suivantes (pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [**18, 34, 50**]) :

(1) (existence) Si $d(T, U, 0) \neq 0$ alors il existe $x \in U$ tel que $T(x) = 0$.

(2) (normalisation) Si $c \in E$ et $T = I - c$, alors

$$d(T, U, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c \in U, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) (invariance par homotopie) Si $H : \overline{U} \times [0,1] \to E$ est une fonction continue et compacte telle que $x \neq H(x, \lambda)$ pour tout $x \in \partial U$ et tout $\lambda \in [0,1]$ et si $T : \overline{U} \times [0,1] \to E$ est définie par $T(x, \lambda) = x - H(x, \lambda)$, alors l'application $\lambda \mapsto d(T(\cdot, \lambda), U, 0)$ est constante.

(4) (excision) Si $V \subset U$ est un ouvert tel que $T(x) \neq 0$ pour tout $x \in \overline{U} \backslash V$ alors $d(T, U, 0) = d(T, V, 0)$.

(5) (addition) Si $U_1, U_2 \subset U$ sont des ouverts disjoints tels que $\overline{U} = \overline{U_1 \cup U_2}$ et $T(x) \neq 0$ pour tout $x \in \partial U_1 \cup \partial U_2$, alors

$$d(T, U, 0) = d(T, U_1, 0) + d(T, U_2, 0).$$

1.3. Fonctions multivoques

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques résultats de la théorie des fonctions multivoques.

Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter **[2, 9]**. Soient X un espace normé, Y un espace vectoriel topologique et $G : X \to 2^Y$ une fonction multivoque à valeurs fermées non vides.

Définition 1.3.1. On dira que

(1) G est mesurable si $\{x \in X : G(x) \cap A \neq \emptyset\}$ est mesurable pour tout fermé $A \subset Y$.

(2) G est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si $\{x \in X : G(x) \cap A \neq \emptyset\}$ est fermé pour tout fermé $A \subset Y$.

(3) G est compacte si $G(X) = \bigcup_{x \in X} G(x)$ est relativement compact, et G est complètement continue si pour tout $A \subset X$ borné, $\overline{G(A)}$ est compact.

Théorème 1.3.2. *Soit Z un espace topologique $F : X \to 2^Y$ une application s.c.s. à valeurs compactes et $g : Y \to Z$ une application continue et complètement continue, alors $g \circ F$ est s.c.s. et complètement continue.*

Théorème 1.3.3. *Soit $F: X \to 2^Y$ une application multivoque à valeurs compactes. Alors F est s.c.s. si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}$ convergeant vers x et toute suite $\{y_n\}$ telle que $y_n \in F(x_n)$, il existe $y \in F(x)$ et une sous-suite $\{y_{n_k}\}$ telle que $y_{n_k} \to y$.*

Théorème 1.3.4. *Si $F, G : X \to 2^Y$ sont deux fonctions s.c.s. à valeurs compactes, alors $F + G : X \to 2^Y$ est s.c.s.*

Théorème 1.3.5. (Théorème de sélection de Kuratowski Ryll-Nardzewski). *Si X est un espace de Banach séparable et $F : I \to 2^X$ une application multivoque mesurable, alors il existe une fonction mesurable $f : I \to X$ telle que $f(t) \in F(t)$ p.p. $t \in I$.*

Théorème 1.3.6. (Théorème de Kakutani.) *Soit X un espace normé et $C \subset X$ sous-ensemble convexe et $F : C \to 2^C$ une fonction multivoque s.c.s., compacte et à valeurs convexes compactes, alors F a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in C$ tel que $x \in F(x)$.*

1.4. Opérateurs monotones

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques notions et résultats concernant les opérateurs maximaux monotones multivoques. Les résultats démontrés sont ceux qui ont été modifiés et adaptés à nos besoins.

Historiquement la notion d'opérateur maximal monotone multivoque fut introduite pour la première fois en 1961 par Minty qui établit la proposition 1.4.8. Cette notion joue un rôle essentiel dans la mesure où

(i) une théorie cohérente des semi-groupes de contractions non linéaires fait nécessairement intervenir des opérateurs maximaux monotones multivoques ;

(ii) certains problèmes aux limites non linéaires (en particulier les inéqualités variationnelles où interviennent des fonctions convexes non différentiables) peuvent être formulées très commodément en termes d'équations multivoques où interviennent des opérateurs monotones multivoques.

Pour plus de détails, consulter [**10, 40, 50**].

Soit H un espace de Hilbert, par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on désigne le produit scalaire dans H et par $(H, \sigma(H, H))$, l'espace H muni de la topologie faible.

Définition 1.4.1. Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ un opérateur multivoque, où $dom(B) = \{x \in H : B(x) \neq \emptyset\}$.

(1) B est dit *monotone* si pour tout $x, y \in dom(B)$, $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0$ dès que $x^* \in B(x)$ et $y^* \in B(y)$.

(2) Un opérateur monotone pour lequel l'inégalité $\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0$ pour tout $(y, y^*) \in GrB$ entraîne $(x, x^*) \in GrB$ est dit *maximal monotone*. Ici GrB désigne le graphe de B i.e. $GrB = \{(y, y^*) \in H \times H : y^* \in B(y)\}$.

De cette définition, on voit que B est maximal monotone si et seulement si son graphe est maximal par rapport à l'inclusion dans l'ensemble des graphes des applications monotones i.e. si B' monotone et $GrB \subset GrB'$ alors $B = B'$.

Proposition 1.4.2. *Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ un opérateur multivoque. Si B est maximal monotone alors pour tout $x \in dom(B)$, $B(x)$ est convexe et fermé; et l'ensemble GrB est fermé dans $\Big(H, \|\cdot\|\Big) \times \Big(H, \sigma(H, H)\Big)$ et dans $\Big(H, \sigma(H, H)\Big) \times \Big(H, \|\cdot\|\Big)$.*

Proposition 1.4.3. *Soit H un espace de Hilbert, $B : H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone, localement borné, alors B est semi-continue supérieurement de H muni de la toplogie forte dans H muni de la topologie faible, à valeurs convexes, compactes pour la topologie faible.*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 1.4.2, $B(x)$ est convexe et fermé pour tout x dans H. Montrons que B est semi-continue supérieurement. Soit $C \subset H$ un faiblement fermé de H et $B^-(C) = \{x \in H : B(x) \cap C \neq \emptyset\}$, montrons que $B^-(C)$ est fortement fermé. Soit donc $\{x_n\} \subset B^-(C)$ une suite telle que $x_n \to x$, montrons que $x \in B^-(C)$. Puisque x_n converge, il existe M_1 tel que $\|x_n\| \leq M_1$. Soient $y_n \in B(x_n) \cap C$ et

$$M_2 = \sup \|B\big(\overline{B(0, M_1)}\big)\| := \sup\{\|y\| : y \in B(x) \ \text{ avec } \|x\| \leq M_1\},$$

on a $\|y_n\| \leq M_2$; donc $y_n \rightharpoonup y$ faiblement à une sous-suite près. L'opérateur B étant monotone, on a $\langle y_n - y_m, x_n - x_m \rangle \geq 0$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre m à l'infini, à la limite on a $\langle y_n - y, x_n - x \rangle \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit donc $(v, u) \in GrB$ et par la monotonicité de B, on a $\langle v - y_n, u - x_n \rangle \geq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, et à la limite on a $\langle v - y, u - x \rangle \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout couple (v, u) dans GrB; on conclut en vertu de la maximalité de B que $y \in B(x)$. Comme $y_n \in C$ et C étant faiblement fermé, on conclut que $y \in C$. Donc $y \in B(x) \cap C$ et par conséquent $x \in B^{-}(C)$.

L'opérateur B étant à valeurs convexes, fermées pour la topologie de H et localement borné, B est à valeurs compactes pour la topologie faible de H. □

Proposition 1.4.4. *Soit $B : H \to H$. Si B est monotone continue, alors B est maximale monotone.*

Donnons maintenant un critère de surjectivité des opérateurs monotones.

Définition 1.4.5. Une application $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ est dite *faiblement coercive*, si $\inf\{\|x^*\| : x^* \in B(x)\} \to \infty$, quand $\|x\| \to \infty$, $x \in dom(B)$.

Proposition 1.4.6. *Une application maximale monotone faiblement coercive $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ est surjective, i.e. $Im(B) := \bigcup_{x \in H} B(x) = H$. En particulier une application univoque monotone, continue et faiblement coercive, $B : H \to H$ est surjective.*

Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ une application maximale monotone et $\lambda > 0$. On définit les opérateurs bien connus suivants :

$$J_\lambda = (I + \lambda B)^{-1} \qquad \text{(la résolvante de } B\text{)},$$

$$B_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda) \qquad \text{(l'approximation de Yosida de } B\text{)},$$

où $(I + \lambda B)^{-1}$ désigne la réciproque de $I + \lambda B$ pour la composition d'applications.

Proposition 1.4.7. *Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ une application maximale monotone. Pour tout $\lambda > 0$, $dom(J_\lambda) = dom(B_\lambda) = H$, J_λ et B_λ sont univoques,*

J_λ est non-expansif, B_λ est monotone et $B_\lambda(x) \in B(J_\lambda(x))$ pour tout $x \in H$, B_λ est lipschitzien de constante de Lipschitz $\frac{1}{\lambda}$.

Proposition 1.4.8. *Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ un opérateur monotone. Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) B est maximal monotone,

(2) B est monotone et $Im(B+I) = H$,

(3) pour tout $\lambda > 0$, J_λ est non expansif.

Rappelons quelques résultats concernant la somme de deux opérateurs maximaux.

Lemme 1.4.9. *Soient $B : dom(B) \subset H \to 2^H$, $C : dom(C) \subset H \to 2^H$ deux opérateurs maximaux monotones. Si $int(domB) \cap dom(C) \neq \emptyset$, alors $B + C$ est un opérateur maximal monotone.*

Lemme 1.4.10. *Soit $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ un opérateur maximal monotone et $C : H \to H$ un opérateur monotone lipschitzien. Alors $B + C$ est maximal monotone.*

Soient B, C deux opérateurs maximaux monotones et $\lambda > 0$. Comme C_λ est monotone lipschitzien en vertu de la proposition 1.4.7, par le lemme 1.4.10 et la proposition 1.4.8, $Im(I + B + C_\lambda) = H$. Soit donc $y \in H$, il existe x_λ tel que $y \in x_\lambda + Bx_\lambda + C_\lambda x_\lambda$. Considérons la famille $\{x_\lambda\}_{\lambda>0}$.

Lemme 1.4.11. *Si $B : dom(B) \subset H \to 2^H$ et $C : dom(C) \subset H \to 2^H$ sont des opérateurs monotones maximaux, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $y \in Im(I + B + C)$,

(2) la famille $\{C_\lambda x_\lambda\}_{\lambda>0}$ est bornée lorsque $\lambda \to 0$, où x_λ est tel que $y \in x_\lambda + Bx_\lambda + C_\lambda x_\lambda$.

Si l'une des propriétés précédentes est vérifiée, alors $x_\lambda \to x$, $(C_\lambda x_\lambda) \to g \in Cx \cap \{y - x - Bx\}$, lorsque $\lambda \to 0$, où x est solution de $y \in x + Bx + Cx$.

Nous allons prouver quelques résultats auxiliaires qui nous permettrons d'établir les preuves des résultats d'existence.

Soit $G: dom(G) \subset \mathbb{R}^{2n} \to 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ un opérateur maximal monotone . Posons

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) : (x'(0), -x'(1)) \in G(x(0), x(1))\},$$

et définissons

$$\hat{L} : W_B^{2,2} \subseteq L^2(I, \mathbb{R}^n) \to L^2(I, \mathbb{R}^n) \quad \text{par} \quad \hat{L}(x) = -x''.$$

Proposition 1.4.12. *L'application $\hat{L}$ définie ci-dessus est maximale monotone, si* $(0,0) \in G(0,0)$.

DÉMONSTRATION. Il est évident que $\hat{L}$ est monotone. Pour montrer la maximalité de $\hat{L}$, en vertu de la proposition 1.4.8, il nous suffit de montrer que $Im(\hat{L}+I) = L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Pour cela, soit $h \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$, $v,\ w \in \mathbb{R}^n$ et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -x''(t) + x(t) = h(t) \text{ p.p. sur } I, \\ x(0) = v, \ x(1) = w. \end{cases} \tag{1.4.1}$$

Il est bien connu que (1.4.1) a une solution unique $x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$: voir par exemple [**11**]. On la note $\theta(v, w)$.

Soit $\rho : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ défini par $\rho(v, w) = (-\theta(v, w)'(0),\ \theta(v, w)'(1))$.

Montrons que ρ est monotone. Pour cela, soient $x = \theta(v, w)$ et $x_1 = \theta(v_1, w_1)$. En appliquant l'identité de Green, et en tenant compte de (1.4.1) on a

$$\begin{aligned}
&\langle \rho(v, w) - \rho(v_1,\ w_1), (v - v_1, w - w_1)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} \\
&= -\langle x'(0) - x_1'(0),\ v - v_1\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle x'(1) - x_1'(1),\ w - w_1\rangle_{\mathbb{R}^n} \\
&= \int_0^1 \langle x'(t) - x_1'(t),\ x'(t) - x_1'(t)\rangle dt + \int_0^1 \langle x''(t) - x_1''(t),\ x(t) - x_1(t)\rangle dt \\
&= \|x' - x_1'\|_2^2 + \|x - x_1\|_2^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

D'où la monotonie de ρ.

Montrons que ρ est continue. Soient $v_n \to v$ et $w_n \to w$ dans $\mathbb{R}^n$. Notons $x_n = \theta(v_n, w_n)$ et $x = \theta(v, w)$. Posons $\zeta_n(t) = (1-t)v_n + tw_n$, $n \geq 1$ et soit

$y_n = x_n - \zeta_n$. On a

$$\begin{cases} -y_n''(t) + y_n(t) = h(t) - \zeta_n(t) \text{ p.p. sur } I, \\ y_n(0) = 0,\ y_n(1) = 0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

En appliquant le produit scalaire avec $y_n(t)$ et en intégrant sur I, on obtient

$$\int_0^1 -\langle y_n''(t), y_n(t)\rangle dt + \int_0^1 \|y_n(t)\|^2 dt = \int_0^1 \langle h(t) - \zeta_n(t), y_n(t)\rangle dt.$$

En appliquant l'intégration par partie au premier membre et l'inégalité de Schwarz au second, on obtient :

$$\|y_n'\|_2^2 + \|y_n\|_2^2 \leq (\|h\|_2 + k_1)\|y_n\|_2 \quad \text{pour un } k_1 > 0,$$

ceci entraîne que $\{y_n\}_{n\geq 1} \subseteq W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ est bornée, donc $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. En combinant ceci avec (1.4.1), on obtient que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$. Donc en passant à une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $x_n \rightharpoonup \hat{x}$ faiblement dans $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$ quand $n \to \infty$. L'injection de $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ étant compacte, on a $x_n \to \hat{x}$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Puisque $-x_n'' + x_n = h$, on obtient que $\{-x_n''\}_{n\in N}$ converge vers g ; on vérifie facilement que $g = \hat{x}''$ et on obtient $-\hat{x}'' + \hat{x} = h$ et $\hat{x}(0) = v$, $\hat{x}(1) = w$. Donc $\hat{x} = \theta(v, w) = x$. Nous avons donc prouvé que $x_n \to x$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Par la définition de ρ, il s'ensuit que ρ est continue.

Montrons que ρ est faiblement coercive. Pour cela, il suffit de montrer que

$$\|\rho(v, w)\| \geq k\|(v, w)\| - \|h\|_2$$

pour tout $(v, w) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $k > 0$. Soit donc $(v, w) \in \mathbb{R}^{2n}\backslash(0,\ 0)$,

$$\begin{aligned}
\|\rho(v, w)\| &\geq \frac{\langle \rho(v, w), (v, w)\rangle_{\mathbb{R}^{2n}}}{\|(v, w)\|} \\
&= \frac{\langle \theta(v, w)'(1), w\rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \theta(v, w)'(0), v\rangle_{\mathbb{R}^n}}{\|(v, w)\|} \\
&= \frac{\int_0^1 \langle \theta(v, w)''(t), \theta(v, w)(t)\rangle dt + \|\theta(v, w)'\|_2^2}{\|(v, w)\|} \\
&= \frac{\|\theta(v, w)\|_2^2 + \|\theta(v, w)'\|_2^2 - \int_0^1 \langle h(t),\ \theta(v,\ w)(t)\rangle dt}{\|(v, w)\|} \\
&\geq \frac{\|\theta(v, w)\|_2^2 + \|\theta(v, w)'\|_2^2 - \|h\|_2\|\theta(v, w)\|_2}{\|(v, w)\|}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{\|\theta(v,w)\|_{1,2}^2 - \|h\|_2\|\theta(v,w)\|_{1,2}}{c\|\theta(v,w)\|_{1,2}}\\
&= \frac{1}{c}(\|\theta(v,w)\|_{1,2} - \|h\|_2)\\
&\geq \frac{1}{c_1}(\|(v,\ w)\| - \|h\|_2).
\end{aligned}$$

car l'inclusion $W^{1,2}(I) \to C(I)$ est continue et $\|(v,w)\| = \|(\theta(0),\theta(1))\|$. Donc

$$\|(\rho(v,w))\| \geq \hat{c}(\|(v,w)\| - \|h\|_2).$$

Ce qui prouve que ρ est faiblement coercive. Comme ρ est monotone, continue et faiblement coercive, il résulte des propositions 1.4.4 et 1.4.6 que c'est une application maximale monotone et $Im(\rho) = \mathbb{R}^n$. Posons $\chi(v,w) = G(v,w) + \rho(v,w)$. Puisque G et ρ sont maximales monotones et $\mathrm{dom}(\rho) = \mathbb{R}^{2n}$, χ est maximale monotone en vertu du lemme 1.4.9. De plus puisque ρ est maximale monotone faiblement coercive, G est maximale monotone et $(0,0) \in G(0,0)$, il en résulte que χ est faiblement coercive et donc surjective en vertu de la proposition 1.4.6. On peut donc trouver $(v,w) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $(0,0) \in \chi(v,w)$. Donc

$$(\theta(v,w)'(0), -\theta(v,w)'(1)) \in G(\theta(v,w)(0),\ \theta(v,w)(1)).$$

Il s'ensuit que pour $x = \theta(v,w) \in W_B^{2,2}$, $\hat{L}(x) + x = h$. Puisque $h \in L^2(I,\mathbb{R}^n)$ est arbitraire, on déduit que $\mathrm{Im}(\hat{L} + I) = L^2(I,\mathbb{R}^n)$, ce qui implique la maximalité de $\hat{L}$. □

Étant donnée un opérateur monotone B sur un domaine de H, il est possible de le prolonger en un opérateur monotone défini dans l'espace $L^2(I,H)$. C'est ce qui fait l'objet du lemme ci-dessous.

Définition 1.4.13. Soit $B:\ dom(B) \subset H \to 2^H$. On définit

$$\hat{B}:\ dom(\hat{B}) \subset L^2(I,H) \to 2^{L^2(I,H)}$$

par $v \in \hat{B}(u)$ si et seulement si $v \in L^2(I,H)$ et $v(t) \in Bu(t)$ p.p. sur I.

Lemme 1.4.14. *Si $B:\ dom(B) \subset H \to 2^H$ est un opérateur maximal monotone, alors $\hat{B} : dom(\hat{B}) \subset L^2(I,H) \to 2^{L^2(I,H)}$ défini plus haut est un opérateur maximal monotone.*

Soit maintenant $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ un opérateur maximal monotone et $\hat{B} : dom(\hat{B}) \subset L^2(I,\ \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$ l'opérateur maximal monotone introduit à la définition 1.4.13 ci-dessus.

Soit

$$K = \hat{L} + \hat{B} :\ dom(K) \subset L^2(I, \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)}.$$

On obtient le résultat suivant.

Proposition 1.4.15. *Soient $G :\ dom(G) \subset \mathbb{R}^{2n} \to 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ et $B :\ dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ deux opérateurs maximaux monotones tels que $(0,0) \in G(0,0)$, $0 \in B(0)$, et $\langle B_\lambda(a), a'\rangle + \langle B_\lambda(b), b'\rangle \geq 0$ pour tous $(a,b) \in dom(G)$, $(a',b') \in G(a,b)$ et tout $\lambda > 0$. Alors K est un opérateur maximal monotone .*

DÉMONSTRATION. En vertu de la proposition 1.4.8, il suffit de montrer que $\hat{L} + \hat{B} + I$ est surjective. Pour cela, soit $h \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -x''(t) + B_\lambda x(t) + x(t) = h(t) \text{ p.p. sur } I, \\ (x'(0),\ -x'(1)) \in G(x(0), x(1)). \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Soit $\hat{B}_\lambda$ l'approximation de Yosida de $\hat{B}$ introduit plus haut. On sait que $\hat{B}_\lambda$ est aussi l'opérateur de Niemytzki correspondant à B_λ, i.e. $(\hat{B}_\lambda x)(\cdot) = B_\lambda x(\cdot)$. Donc le problème (1.4.3) est équivalent à l'équation fonctionnelle suivante $(\hat{L} + \hat{B}_\lambda + I)(x) = h$. Puisqu'en vertu de la proposition 1.4.4, $\hat{B}_\lambda$ est univoque, monotone, lipschitzien, donc maximal monotone, le lemme 1.4.10 implique que $\hat{L} + \hat{B}_\lambda$ est maximal monotone. Il découle de la proposition 1.4.8 que $\hat{L} + \hat{B}_\lambda + I$ est surjective. Donc il existe $x \in \mathrm{dom}(\hat{L}) \cap \mathrm{dom}(\hat{B}_\lambda)$ solution du problème (1.4.3). En prenant le produit scalaire de (1.4.3) avec $B_\lambda x(t)$ et en intégrant sur I, on a

$$\int_0^1 \langle -x''(t),\ B_\lambda x(t)\rangle dt + \|\hat{B}_\lambda x\|_2^2 + \int_0^1 \langle x(t),\ B_\lambda x(t)\rangle dt \tag{1.4.4}$$
$$= \int_0^1 \langle h(t),\ B_\lambda x(t)\rangle dt.$$

Puisque $B_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne, elle est différentiable au sens de Gâteaux sur $\mathbb{R}^n \backslash E$, (voir [**23**]) où E est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$. Par [[**17**], théorèmes 2.1 et 3.1 pp. 154 et 167], B_λ est aussi différentiable au sens de Fréchet sur $\mathbb{R}^n \backslash E$. Puisque B_λ est monotone, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et $s \in]0, 1]$, on a

$$\langle \frac{B_\lambda(x+sy) - B_\lambda(x)}{s},\ y \rangle \geq 0.$$

Donc en laissant tendre $s \to 0$, on a $\langle DB_\lambda(x)y,\ y\rangle \geq 0$. Puisque $x \in C^1(I,\ \mathbb{R}^n)$, en appliquant le théorème de la dérivation composée on a

$$\frac{d}{dt} B_\lambda(x(t)) = DB_\lambda(x(t))x'(t) \text{ p.p. sur } I.$$

En utilisant la lipschitzité de B_λ, il ressort que $\frac{d}{dt} B_\lambda(x)$ est intégrable. En utilisant l'intégration par parties et l'hypothèse sur B_λ, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \langle -x''(t),\ B_\lambda x(t)\rangle dt \qquad (1.4.5)\\ &= \int_0^1 \langle x'(t), \frac{d}{dt} B_\lambda(x(t))\rangle dt + \langle x'(0), B_\lambda x(0)\rangle - \langle x'(1), B_\lambda x(1)\rangle \\ &\geq \int_0^1 \langle x'(t),\ \frac{d}{dt} B_\lambda(x(t))\rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle x'(t), DB_\lambda(x(t))x'(t)\rangle dt \geq 0. \end{aligned}$$

Aussi de la monotonicité de B_λ, on a

$$\int_0^1 \langle x(t),\ B_\lambda x(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (1.4.6)$$

En combinant, (1.4.4), (1.4.5) et (1.4.6), on obtient

$$\|\hat{B}_\lambda x\|_2^2 \leq \|h\|_2 \|\hat{B}_\lambda x\|_2.$$

Donc

$$\|\hat{B}_\lambda(x)\|_2 \leq \|h\|_2.$$

Ce qui précède est également vrai pour tout $\lambda > 0$, puisque x dépend de λ, notons le x_λ. Il s'ensuit que $\{\hat{B}_\lambda x_\lambda\}_{\lambda>0}$ est bornée dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Par le lemme 1.4.11, il s'ensuit que $h \in Im(\hat{L} + \hat{B} + I)$. Puisque $h \in L^2(I,\ \mathbb{R}^n)$ est arbitraire, on a que $Im(\hat{L} + \hat{B} + I) = L^2(I,\ \mathbb{R}^n)$ et par conséquent on conclut que $K = \hat{L} + \hat{B}$ est maximal monotone. □

Considérons maintenant l'opérateur

$$S_1 =: j \circ (K + I)^{-1} : \ dom(S_1) \subset L^2(I,\ \mathbb{R}^n) \to dom\hat{L} \cap dom\hat{B} \to C^1(I,\ \mathbb{R}^n).$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.4.16. *Soient $G : dom(G) \subset \mathbb{R}^{2n} \to 2^{\mathbb{R}^{2n}}$ et $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ des opérateurs maximaux monotones tels que $(0,0) \in G(0,0)$, $0 \in B(0)$, et $\langle B_\lambda(a),\ a'\rangle + \langle B_\lambda(b),\ b'\rangle \geq 0$ pour tous $(a,b) \in dom(G)$, $(a',b') \in G(a,b)$ et tout $\lambda > 0$. Alors, $S_1 : dom(S_1) \subset L^2(I,\mathbb{R}^n) \to C^1(I,\mathbb{R}^n)$ est complètement continu ; de même $S_2 = i \circ S_1 : dom(S_2) \subset L^2(I,\mathbb{R}^n) \to W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ est complètement continu, où i est l'inclusion continue de $C^1(I,\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Parce que $L^2(I,\mathbb{R}^n)$ est un espace de Hilbert, c'est suffisant de montrer que si $y_n \to y$ faiblement dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$, $S_1(y_n) \to S_1(y)$ dans $C^1(I,\mathbb{R}^n)$. Soient donc $x_n = S_1(y_n)$, $n \geq 1$, et $x = S_1(y)$. Donc $y_n = x_n + u_n$, $u_n \in K(x_n)$, $n \geq 1$. On a

$$\int_0^1 \langle y_n(t), x_n(t)\rangle dt = \|x_n\|_2^2 + \int_0^1 \langle u_n(t), x_n(t)\rangle dt. \tag{1.4.7}$$

Mais $u_n = \hat{L}(x_n) + g_n$, $g_n \in \hat{B}(x_n)$, $n \geq 1$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \langle u_n(t), x_n(t)\rangle dt = \int_0^1 \langle -x_n''(t), x_n(t)\rangle dt + \int_0^1 \langle g_n(t), x_n(t)\rangle dt.$$

En intégrant par parties et en tenant compte de la maximalité de G, on a $\int_0^1 \langle -x_n''(t), x_n(t)\rangle dt \geq \|x_n'\|_2^2$ et puisque $0 \in B(0)$ et B monotone, on a $\int_0^1 \langle g_n(t), x_n(t)\rangle dt \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \langle u_n(t), x_n(t)\rangle dt \geq \|x'\|_2^2. \tag{1.4.8}$$

En utilisant (1.4.7) et (1.4.8), on obtient

$$\|x_n\|_2^2 + \|x_n'\|_2^2 \leq \|y_n\|_2 \|x_n\|_2,$$

il s'ensuit que $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est bornée dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$. Puisque l'injection $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n) \subset L^2(I,\mathbb{R}^n)$ est compacte, en passant à une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ et $x_n \to x$ dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$ quand $n \to \infty$. Pour tout $n \geq 1$, $(x_n, y_n) \in Gr(K+I)$ et $K+I$ est maximal monotone dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$. Donc son graphe est fermé dans $\Big(L^2(I,\mathbb{R}^n), \sigma\big(L^2(I,\mathbb{R}^n), L^2(I,\mathbb{R}^n)\big)\Big) \times \Big(L^2(I,\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2\Big)$ en vertu de la proposition 1.4.2 . Par conséquent, on a $(x,y) \in Gr(K+I)$. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$y_n = \hat{L}(x_n) + g_n + x_n$ avec $g_n \in \hat{B}(x_n)$, $n \geq 1$. Soit x_n^λ, $(\lambda > 0)$ l'unique solution de l'équation $y_n = \hat{L}(x_n^\lambda) + \hat{B}_\lambda(x_n^\lambda) + x_n^\lambda$. Par le lemme 1.4.11, $\hat{B}_\lambda(x_n^\lambda) \to g_n \in \hat{B}(x_n) \cap \{y - x - \hat{L}(x_n)\}$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ quand $\lambda \to 0$. De plus par la preuve de la proposition 1.4.15, on sait que $\|\hat{B}_\lambda(x_n^\lambda)\|_2 \leq \|y_n\|_2$ pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$. Donc $\|\hat{B}_\lambda(x_n^\lambda)\|_2 \leq \sup \|y_n\|_2 = M_1 < \infty$ pour tout $\lambda > 0$ et $n \geq 1$. Il s'ensuit que pour tout $n \geq 1$, $\|g_n\|_2 \leq M_1$. Puisque

$$-x_n''(t) + g_n(t) + x_n(t) = y_n(t) \quad \text{p.p. sur I},$$

il s'ensuit que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ est bornée dans $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$. Puisque l'injection de $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ est compacte, il existe une sous-suite encore notée $\{x_n\}_{n \geq 0}$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans $W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)$ et $x_n \to x$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$; donc aussi dans $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. De plus parce que $\{g_n\}_{n \geq 1} \subset L^2(I, \mathbb{R}^n)$ est bornée, on a $g_n \rightharpoonup g$ faiblement dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ à une sous-suite près. On a $(x_n, g_n) \in Gr\hat{B}$ qui est fermé dans

$$\Big(L^2(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2\Big) \times \Big(L^2(I, \mathbb{R}^n), \sigma(L^2(I, \mathbb{R}^n), L^2(I, \mathbb{R}^n))\Big),$$

car $\hat{B}$ est maximal monotone. Il s'ensuit que $(x, g) \in Gr\hat{B}$. Donc, à la limite, on a $y = -x'' + g + x$ avec $g \in \hat{B}(x)$ et $(x'(0), -x'(1)) \in G(x(0), x(1))$ (puisque $x_n \to x$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, et $GrG \subset \mathbb{R}^{2n}$ est fermé). Donc $S_1(x_n) \to S_1(x)$ dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et $S_2(x_n) \to S_2(x)$ dans $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Remarque 1.4.17. Examinons maintenant ce que devient l'hypothèse du théorème précédent : *pour tout* $(a, b) \in dom(G)$, *tout* $(a', b') \in G(a, b)$ *et tout* $\lambda > 0$ *on a* $\langle B_\lambda(a), a' \rangle + \langle B_\lambda(b), b' \rangle \geq 0$, pour les différents opérateurs G qui retiendront notre attention dans cette thèse et ce que devient aussi l'ensemble $W_B^{2,2}$.

1^{er} **cas :** Conditions périodiques.

Soit $G : \mathbb{R}^{2n} \to 2^{\mathbb{R}^n}$ défini par

$$G(a, b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad a \neq b, \\ \{(a', b') \in \mathbb{R}^{2n} : a' = -b'\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, G est maximal monotone, $dom(G) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2n} : a = b\}$ et $(0,0) \in G(0,0)$. Pour $(a', -a') \in G(a,a)$, on a toujours $\langle \hat{B}_\lambda(a), a'\rangle + \langle \hat{B}_\lambda(a), -a'\rangle = 0$ et dans ce cas :

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n)\ \ x(0) = x(1),\ x'(0) = x'(1)\}.$$

2^e **cas :** Condition de Neumann.

Si $G(a,b) = (0,0)$, $(a', b') \in G(a,b)$ équivaut à $a' = b' = 0$ et notre condition est toujours satisfaite. Dans ce cas :

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) :\ x'(0) = x'(1) = 0\}.$$

3^e **cas :** Condition de Dirichlet homogène.

Si

$$G(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad (a,b) \neq (0,0), \\ \mathbb{R}^{2n} & \text{si} \quad (a,b) = (0,0), \end{cases}$$

$dom(G) = \{(0,0)\}$, et G est maximal monotone. L'hypothèse devient

$$\langle B_\lambda(0), a'\rangle + \langle B_\lambda(0), b'\rangle \geq 0,$$

pour tout $(a', b') \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda > 0$. Ceci est toujours vrai car $B_\lambda(0) = 0$. Dans ce cas :

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) :\ x(0) = x(1) = 0\}.$$

4^e **cas :** Condition de Sturm-Liouville homogène avec $\beta_0 = \beta_1 = 1$.

Si $G(a,b) = (A_0 a, A_1 b)$, avec A_0, $A_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaires et $\langle A_i x, x\rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$, $\alpha_i \geq 0$; $i = 0,\ 1$, alors G est maximal monotone faiblement coercive et la condition sur B_λ devient :

$$\langle B_\lambda(a),\ A_0 a\rangle + \langle B_\lambda(b), A_1 b\rangle \geq 0,$$

pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda > 0$. Dans ce cas

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) :\ A_0 x(0) - x'(0) = 0,\ A_1 x(1) + x'(1) = 0\}.$$

5^e **cas :** Condition de Sturm-Liouville homogène avec $\beta_0 = 1$ et $\beta_1 = 0$, (resp. $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$).

L'autre cas de figure qui concerne notre étude est le suivant : $G(a, b) = (A_0 a, 0)$, $\big($resp. $G(a, b) = (0, A_1 b)\big)$. L'hypothèse dans ce cas devient : pour tout $\lambda > 0$

$$\langle B_\lambda(a),\ A_0 a\rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}^n$$
$$\Big(\text{resp. } \langle B_\lambda(b), A_1 b\rangle \geq 0, \quad \text{pour tout } b \in \mathbb{R}^n\Big).$$

Donc on obtient en définitive

$$W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) :\ A_0 x(0) - x'(0) = 0,\ x'(1) = 0\}.$$
$$\Big(\text{resp.} \quad W_B^{2,2} = \{x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) :\ x'(0) = 0,\ A_1 x(1) + x'(1) = 0\}\Big).$$

Chapitre 2

MAJORATION A PRIORI DES DÉRIVÉES DES SOLUTIONS D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC UN OPÉRATEUR MONOTONE

L'idée principale qui a conduit à la construction d'hypothèses dans ce chapitre est la majoration à priori des dérivées d'éventuelles solutions de l'inclusion différentielle. Les conditions de croissance permettent d'obtenir la majoration a priori des dérivées des solutions. Cette majoration a pour but de construire des domaines ouverts dans lesquels appartiennent les supposées solutions de notre inclusion différentielle. L'application de la théorie du degré sur ces domaines et à des opérateurs judicieusement choisis permet d'exhiber des points fixes qui sont solutions de l'inclusion différentielle .

La plupart des résultats de majoration de ce chapitre sont des généralisations au cas des inclusions différentielles dont la partie multivoque est un opérateur maximal monotone, des résultats qu'on trouve dans la littérature dans le cas des équations et systèmes d'équations différentielles.

Ces conditions de croissance considérées dans ce chapitre sont celles qui seront imposées aux chapitres 3 et 4.

2.1. Notations et hypothèses

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats techniques qui traitent de la majoration a priori de la dérivée des solutions d'inclusions différentielles du second ordre dont le terme multivoque est un opérateur maximal monotone. Considérons le problème :

$$\begin{cases} x''(t) \in Bx(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda) & \text{p.p. } t \in I, \\ x \in BC, \end{cases} \qquad (*)_\lambda$$

où $\lambda \in I$, $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $g : I \times \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est monotone avec $0 \in B(0)$ et BC désigne les conditions aux limites de Sturm-Liouville ou périodiques :

$$\begin{cases} A_0 x(0) - \beta_0 x'(0) = r_0, \\ A_1 x(1) + \beta_1 x'(1) = r_1; \end{cases} \qquad (SL)$$

$$\begin{cases} x(0) = x(1), \\ x'(0) = x'(1); \end{cases} \qquad (P)$$

où pour $i = 0$ ou 1, A_i est une matrice $(n \times n)$ telle qu'il existe $\alpha_i \geq 0$ tel que $\langle x, A_i x \rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\beta_i \in \{0, 1\}$ et $\alpha_i + \beta_i > 0$. Une solution de $(*)_\lambda$ est une fonction $x \in W_B^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $(*)_\lambda$. Dans ce qui suit, nous nous intéresserons à la majoration a priori de la dérivée des solutions x de $(*)_\lambda$.

Dans toute la suite, pour $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$, on note

$$T(v, M) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \quad \text{pour tout } t \in I\},$$

et on suppose les hypothèses suivantes :

(H2.1) L'opérateur $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ est monotone, borné sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ et $0 \in B(0)$.

(H2.2) La fonction $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory.

(H2.3) La fonction $g : I \times \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de Carathéodory.

Lorsque les hypothèses $(H2.1)$ et $(H2.3)$ ont lieu, pour $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$ fixé, on peut poser

$$L = \sup\{\|z\|,\ z \in B(\overline{B(0, M_1)})\}; \qquad (2.1.1)$$

et on peut trouver $l \in L^1(I)$ tel que

$$\|g(t, x, \lambda)\| \leq l(t) \quad \text{p.p. } t \in I, \text{ et pour tout } \ x \in B(\overline{B(0, M_1)}), \qquad (2.1.2)$$

où

$$M_1 = \|v\|_0 + \|M\|_0.$$

Ces notations seront utilisées dans la suite de ce chapitre.

2.2. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$.

Dans cette section, nous donnons un résultat de majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$.

Théorème 2.2.1. *Soit $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$. Supposons que BC désigne (P) ou (SL) avec $(1-\beta_i)r_i M(i) = 0$ pour $i = 0, 1$ et que sont satisfaites les hypothèses $(H2.1) - (H2.3)$ et*

(H2.4) il existe une constante $k \in [0, 1[$ et une fonction $h \in L^1(I)$ telles que pour presque tout $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$, on a

$$0 \leq \langle x, f(t, x, p)\rangle + k\|p\|^2 + h(t).$$

Alors il existe une constante K telle que toute solution x de $(*)_\lambda$ pour $\lambda \in I$ tel que $x \in T(v, M)$ vérifie

$$\|x'\|_{L^2} \leq K.$$

Démonstration. Soit x une solution de $(*)_\lambda$ pour $\lambda \in I$ telle que $x \in T(v, M)$. Alors il existe $x_B \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que p.p. $t \in I$, $x_B(t) \in Bx(t)$ et

$$x''(t) = x_B(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda).$$

Par l'hypothèse $(H2.1)$ on obtient

$$\langle x''(t), x(t)\rangle \geq \lambda\langle x(t), f(t, x(t), x'(t))\rangle + \langle x(t), g(t, x(t), \lambda)\rangle$$

et

$$\|x'(t)\|^2 \leq -\lambda\langle x(t), f(t, x(t), x'(t))\rangle - \langle x(t), g(t, x(t), \lambda)\rangle + \langle x(t), x'(t)\rangle'.$$

En tenant compte de l'hypothèse $(H2.4)$, on obtient

$$(1-k)\|x'\|_{L^2}^2 \leq \langle x'(1), x(1)\rangle - \langle x'(0), x(0)\rangle + \|h\|_{L^1} - \int_0^1 \langle x(t), g(t, x(t), \lambda)\rangle dt.$$

Par l'hypothèse sur les conditions aux limites, il existe k_0 tel que

$$\langle x'(1), x(1)\rangle - \langle x'(0), x(0)\rangle \leq k_0,$$

et par (2.1.2), on a

$$(1-k)\|x'\|_{L^2} \leq k_0 + \|h\|_{L^1} + \|l\|_{L^1},$$

et on obtient l'existence d'un $K > 0$ tel que

$$\|x'\|_{L^2} \leq K$$

pour tout x solution de $(*)_\lambda$. D'où le théorème. □

Remarque 2.2.2. Il ressort de la preuve de ce théorème qu'il reste vrai même si dans l'hypothèse $(H2.1)$, on ne suppose pas que B est borné sur les bornés de $\mathbb{R}^n$.

2.3. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans L^1

Dans cette section, notre objectif est de trouver des hypothèses permettant de trouver des constantes $c > 0$ et $K > 0$ telles que $\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c$ et $\|x'\|_{L^1} \leq K$ pour toute solution x de $(*)_\lambda$.

Théorème 2.3.1. *Soit $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$. On suppose $(H2.1) - (H2.3)$ et*

(H2.5) il existe une constante $a > 0$ et $h \in L^1(I)$ tels que pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$, on a

$$\|f(t,x,p)\| \leq 2a\big(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2\big) + h(t).$$

Alors il existe des constantes $c > 0$ et $K > 0$ telles que pour toute solution x de $(*)_\lambda$ dans $T(v, M)$ pour $\lambda \in I$, on a

$$\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c \quad \textit{et} \quad \|x'\|_{L^1} \leq K.$$

DÉMONSTRATION. Soit x solution de $(*)_\lambda$ pour $\lambda \in I$, telle que $x \in T(v, M)$. Il existe $x_B \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que p.p. $t \in I$, $x_B(t) \in Bx(t)$ et

$$x''(t) = x_B(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda). \tag{2.3.1}$$

En utilisant cette égalité et la relation suivante,

$$x(t+\frac{1}{2}) - x(t) - \frac{x'(t)}{2} = \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)x''(s)ds \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

on obtient l'égalité suivante

$$\frac{x'(t)}{2} = x(t+\frac{1}{2}) - x(t) - \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)(x_B(s) + \lambda\, f(s, x(s), x'(s))ds$$
$$- \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s) g(s, x(s), \lambda) ds.$$

Par (2.1.1) et (2.1.2), il s'ensuit que

$$\frac{\|x'(t)\|}{2} \leq 2M_1 + L + \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s) l(s) ds$$
$$+ \lambda \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\|f(s, x(s), x'(s))\| ds.$$

Par l'hypothèse $(H2.5)$, il résulte que

$$\frac{\|x'(t)\|}{2} \leq 2M_1 + L + \|l\|_{L^1} + 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\langle x(s), \lambda f(s, x(s), x'(s))\rangle ds$$
$$+ 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\|x'(s)\|^2 ds + \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s) h(s) ds.$$

De l'égalité (2.3.1), il découle que

$$\frac{\|x'(t)\|}{2} \leq 2M_1 + L + \|l\|_{L^1} + \|h\|_{L^1} + 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\|x'(s)\|^2 ds$$
$$+ 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\langle x(s),\ x''(s) - x_B(s)\rangle ds$$
$$- 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\langle x(s),\ g(s, x(s), \lambda)\rangle ds.$$

Par $(H2.1)$, on obtient

$$\frac{\|x'(t)\|}{2} \leq 2M_1 + L + \|l\|_{L^1} + \|h\|_{L^1} + 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t+\frac{1}{2}-s)\|x'(s)\|^2 ds$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t + \frac{1}{2} - s)\big(\langle x'(s), x(s)\rangle' - \|x'(s)\|^2\big) ds \\
&- 2a \int_t^{t+\frac{1}{2}} (t + \frac{1}{2} - s)\langle x(s),\ g(s, x(s), \lambda)\rangle ds \\
\leq\ & 2M_1 + L + \|l\|_{L^1} + \|h\|_{L^1} \\
&+ a \int_t^{t+\frac{1}{2}} \Big((t + \frac{1}{2} - s)(\|x(s)\|^2)''\Big)\, dt + aM_1\|l\|_{L^1} \\
=\ & 2M_1 + L + \|l\|_{L^1} + \|h\|_{L^1} \\
&+ a\Big(\|x(t + \frac{1}{2})\|^2 - \|x(t)\|^2 - \frac{(\|x(t)\|^2)'}{2}\Big) + aM_1\|l\|_L^1 \\
\leq\ & 2M_1(1 + \frac{a\|l\|_{L^1}}{2}) + L + \|l\|_{L^1} + \|h\|_{L^1} + aM_1^2 - \frac{a}{2}(\|x(t)\|^2)'.
\end{aligned}
$$

En posant $K_1 = 4M_1 + 2aM_1^2 + 2L + 2(M_1 a + 1)\|l\|_{L^1} + 2\|h\|_{L^1}$, on conclut que

$$\|x'(t)\| \leq K_1 - a(\|x(t)\|^2)', \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \tag{2.3.2}$$

Par le même raisonnement et de la relation

$$x(t) - x(t - \frac{1}{2}) - \frac{x'(t)}{2} = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t} (t + \frac{1}{2} - s)x''(s), \qquad \frac{1}{2} \leq t \leq 1,$$

on obtient

$$\|x'(t)\| \leq K_1 + a(\|x(t)\|^2)', \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \tag{2.3.3}$$

En prenant $t = \frac{1}{2}$ et en additionnant (2.3.2) et (2.3.3), il découle que

$$\|x'(\frac{1}{2})\| \leq 2K_1. \tag{2.3.4}$$

Finalement en combinant (2.3.2) et (2.3.3), et en intégrant, on arrive à l'inégalité suivante

$$
\begin{aligned}
\|x'\|_{L^1} &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \|x'(s)\|\, ds + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \|x'(s)\|\, ds \\
&\leq K_1 - a\int_0^{\frac{1}{2}} (\|x(s)\|^2)'\, ds + a\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\|x(s)\|^2)'\, ds \\
&= K_1 + a\big(\|x(1)\|^2 - 2\|x(\frac{1}{2})\|^2 + \|x(0)\|^2\big) \\
&\leq K_1 + 2M_1^2,
\end{aligned}
$$

d'où l'existence d'un $K > 0$ tel que $\|x'\|_{L^1} \leq K$. □

Remarque 2.3.2. Dans le théorème suivant, nous supposons une hypothèse garantissant l'existence d'une borne pour $\min\{\|x'(t)\| : t \in I\}$. Toutefois une borne dans L^1 des dérivées ne sera obtenue que sur des intervalles appropriés. Énonçons d'abord un lemme obtenu par Frigon **[27]**.

Lemme 2.3.3. *Soient* $l_1, l_2 \in L^1(I)$, $\quad b_1, b_2, b_3 > 0, b_4 \geq 0$. *Si* $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ *satisfait pour presque tout* $t \in \{s \in I : \|x'(s)\| \geq b_3\}$,

$$(i)\ \frac{\langle x(t), x''(t)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x''(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}$$

$$\geq b_1\|x'(t)\| - b_4|\langle x(t), x'(t)\rangle| - l_1(t),$$

$$(ii)\ \|x(t)\|\Big(\frac{\langle x(t), x''(t)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x''(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}\Big)$$

$$+\frac{\langle x(t), x'(t)\rangle^2}{\|x(t)\|\|x'(t)\|} \geq b_2|\langle x(t), x'(t)\rangle| - l_2(t),$$

alors il existe $K_1(\|x\|_0)$ *tel que pour tout intervalle* $[t_1, t_2]$ *sur lequel* $\|x'(t)\| \geq b_3$, *on a*

$$\|x'\|_{L^1[t_1,t_2]} \leq K_1(\|x\|_0).$$

De plus il existe $t \in I$ *tel que* $\|x'(t)\| \leq max(b_3, K_1(\|x\|_0))$.

Ce lemme nous conduit naturellement au théorème suivant qui adapte un résultat de Frigon ([**27**], Lemme 3.3) à nos besoins.

Théorème 2.3.4. *Soit* $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$. *Suppons* $(H2.1) - (H2.3)$ *et*

(H2.6) il existe $b, c_1, c_2 > 0, c_3 \geq 0$, $h_1, h_2 \in L^1(I)$ *tels que pour presque tout* $t \in I$ *et tout* $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ *avec* $\|x - v(t)\| \leq M(t)$, $\|p\| \geq b$, *on a*

$$(i)\ \frac{\langle x, f(t, x, p)\rangle + \|p\|^2}{\|p\|} - \frac{\langle p, f(t, x, p)\rangle\langle x, p\rangle}{\|p\|^3}$$

$$\geq c_1\|p\| - c_3|\langle x, p\rangle| - h_1(t),$$

$$(ii)\ \|x\|\Big(\frac{\langle x(t), f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2)}{\|p\|} - \frac{\langle p, f(t,x,p)\rangle\langle x,p\rangle)}{\|p\|^3}\Big) + \frac{\langle x,p\rangle^2}{\|x\|\,\|p\|}$$

$$\geq c_2|\langle x,p\rangle| - h_2(t).$$

Alors il existe des constantes $c, K > 0$ telles que pour toute solution x de $(*)_\lambda$ dans $T(v,M)$ pour $\lambda \in I$, on a

$$\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c,$$

et

$$\|x'\|_{L^1([t_1,t_2])} \leq K,$$

pour tout intervalle $[t_1, t_2]$ sur lequel $\|x'(t)\| \geq b$.

DÉMONSTRATION. Soit x solution du problème $(*)_\lambda$ telle que $x \in T(v,M)$. Il existe $x_B \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que p.p. $t \in I$, $x_B(t) \in Bx(t)$ et

$$x''(t) = x_B(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), x'(t)).$$

Montrons qu'il existe $c_1', c_2' > 0$, c_3', l_1, $l_2 \in L^1(I)$ tels que pour presque tout $t \in \{s \in I : \|x'(s)\| \geq b\}$:

$$\frac{\langle x(t), x''(t)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x''(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}$$
$$\geq c_1'\|x'(t)\| - c_3'|\langle x(t), x'(t)\rangle| - l_1(t),$$

et

$$\|x(t)\|\Big(\frac{\langle x(t), x''(t)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x''(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}\Big) + \frac{\langle x(t), x'(t)\rangle^2}{\|x(t)\|\|x'(t)\|}$$
$$\geq c_2'|\langle x(t), x'(t)\rangle| - l_2(t).$$

Posons

$$\Gamma(t) = \frac{\langle x(t), x''(t)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x''(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}.$$

On a p.p. $t \in \{s \in I : \|x'(s)\| \geq b\}$ que

$$\Gamma(t) = \frac{\langle x(t), x_B(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda)\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|}$$

$$- \frac{\big(\langle x'(t), x_B(t) + \lambda f(t,x(t),x'(t)) + g(t,x(t),\lambda)\rangle\big)\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}$$

$$= \frac{\langle x(t), x_B(t)\rangle}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), x_B(t)\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3} + (1-\lambda)\|x'(t)\|$$

$$+ \lambda \frac{\langle x(t), f(t,x(t),x'(t))\rangle + \|x'(t)\|^2}{\|x'(t)\|}$$

$$- \lambda \frac{\langle x'(t), f(t,x(t),x'(t))\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}$$

$$+ \frac{\langle x(t), g(t,x(t),\lambda)\rangle}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), g(t,x(t),\lambda)\rangle}{\|x'(t)\|^3}\langle x(t), x'(t)\rangle.$$

Cette égalité, (2.1.1), (2.1.2) combinés avec $(H2.6)(i)$, implique que

$$\Gamma(t) \geq -\frac{M_1 L}{b} + (1-\lambda)\|x'(t)\| + \lambda c_1\|x'(t)\|$$

$$- \lambda c_3|\langle x(t), x'(t)\rangle| - \lambda h_1(t) - 2\frac{\|x(t)\|\|g(t,x(t),\lambda)\|}{\|x'(t)\|}$$

$$\geq -\frac{M_1 L}{b} + (1-\lambda+\lambda c_1)\|x'(t)\| - c_3|\langle x(t), x'(t)\rangle| - h_1(t) - \frac{2M_1 l(t)}{b}.$$

En posant $c_1' = \min\{c_1, 1\}$, $h_1'(t) = \frac{M_1 L}{b} + h_1(t) + \frac{2M_1 l(t)}{b}$, on obtient

$$\Gamma(t) \geq c_1'\|x'(t)\| - c_3|\langle x(t), x'(t)\rangle| - h_1'(t). \tag{2.3.5}$$

D'autre part, p.p. $t \in \{s \in I : \|x'(s)\| \geq b\}$,

$$\|x(t)\|\Gamma(t) + \frac{\langle x(t), x'(t)\rangle^2}{\|x(t)\|\|x'(t)\|}$$

$$\geq -\frac{\|x_B(t)\|\|x(t)\|^2}{b} + (1-\lambda)\|x'(t)\|\|x(t)\|$$

$$+ \lambda \frac{\langle x(t), f(t,x(t),x'(t))\rangle}{\|x'(t)\|}\|x(t)\|$$

$$- \lambda \frac{\langle x'(t), f(t,x(t),x'(t))\rangle\langle x(t), x'(t)\rangle}{\|x'(t)\|^3}\|x(t)\|$$

$$+ \|x(t)\|\Big(\frac{\langle x(t), g(t,x(t),\lambda)\rangle}{\|x'(t)\|} - \frac{\langle x'(t), g(t,x(t),\lambda)\rangle}{\|x'(t)\|^3}\langle x(t), x'(t)\rangle\Big).$$

De l'hypothèse $(H2.6)(ii)$, il découle que

$$\|x(t)\|\Gamma(t) + \frac{\langle x(t), x'(t)\rangle^2}{\|x(t)\|\|x'(t)\|}$$

$$\geq -M_1^2\Big(\frac{L+2l(t)}{b}\Big) + (1-\lambda+\lambda c_2)|\langle x(t), x'(t)\rangle| - h_2(t).$$

En posant

$$c_2' = \min\{c_2, 1\} \quad \text{et} \quad h_2'(t) = M_1^2\Big(\frac{L + 2l(t)}{b}\Big) + h_2(t),$$

il revient que

$$\|x(t)\|\Gamma(t) + \frac{\langle x(t), x'(t)\rangle^2}{\|x(t)\|\|x'(t)\|} \geq c_2'(t)|\langle x(t), x'(t)\rangle| - h_2'(t). \tag{2.3.6}$$

De (2.3.5), (2.3.6) et par le lemme 2.3.3, on arrive à la conclusion de notre théorème. □

2.4. Majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.

Dans cette section, nous établissons des résultats qui nous donnent la majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)_\lambda$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$. Le premier résultat traite le cas où f vérifie une condition de type Wintner.

Théorème 2.4.1. *Soient $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$ et $c \geq 0$. Supposons $(H2.1) - (H2.3)$; supposons aussi qu'il existe $\gamma \in L^1(I, [0, \infty[)$ et $\phi : [0, \infty[\to [1, \infty[$ mesurable au sens de Borel telles que*

(i) $\|f(t, x, p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|)$, p.p $t \in I$, pour tous p, $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$,

(ii) $\int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} > C$ où $C = \|\gamma\|_{L^1} + \|l\|_{L^1} + L$.

Alors il existe $K > 0$ tel que tout $x \in T(v, M)$ solution de $(*)_\lambda$ (pour un certain $\lambda \in I$) telle que $\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c$ *vérifie* $\|x'(t)\| < K$ *pour tout $t \in I$.*

Démonstration. Soit $K > 0$ tel que $\int_c^K \frac{ds}{\phi(s)} > C$. S'il existe $t_1 \in I$ tel que $\|x'(t_1)\| \geq K$, il existe $t_0 \in I$ tel que $\|x'(t_0)\| = c$ et $\|x'(t)\| > c$ pour tout t entre t_0 et t_1. Sans perte de généralité, supposons que $t_0 < t_1$. Or $x \in T(v, M)$ est solution de $(*)_\lambda$, donc p.p. $t \in [t_0, t_1]$,

$$\|x'(t)\|' = \frac{\langle x'(t),\ x''(t)\rangle}{\|x'(t)\|}$$

et

$$\|x'(t)\|' \leq \|x''(t)\| \leq \|x_B(t)\| + \|\lambda f(t, x(t), x'(t))\| + \|g(t, x(t), \lambda)\|$$

$$\leq L + \|\gamma(t)\|\phi(\|x'(t)\|) + \|l(t)\|.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\|x'(t)\|'}{\phi(\|x'(t)\|)} dt \leq C.$$

D'autre part, par le lemme 1.1.5 et par hypothèse,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\|x'(t)\|'}{\phi(\|x'(t)\|)} dt = \int_{\|x(t_0)\|}^{\|x(t_1)\|} \frac{ds}{\phi(s)} \geq \int_{c}^{K} \frac{ds}{\phi(s)} > C;$$

ce qui est contradictoire. □

Dans le résultat suivant, f vérifie une condition de croissance combinant des conditions de type Nagumo et de type Wintner.

Théorème 2.4.2. *Soient $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$ et des constantes $b > 0, c, C \geq 0$. Supposons $(H2.1) - (H2.3)$ et*

(H2.7) il existe $\phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ mesurable au sens de Borel et $\gamma \in L^1(I)$ tels que

(i) pour tout $d \geq 0$, $\int_d^\infty \frac{sds}{\phi(s)+s} = \infty$,

(ii) pour presque tout $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$

$$|\langle p, f(t, x, p)\rangle| \leq \phi(\|p\|)(\|p\| + \gamma(t)).$$

Alors il existe $K \geq 0$ tel que $\|x'\|_0 \leq K$ pour toute solution $x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ de $(*)_\lambda$ telle que $x \in T(v, M)$, $\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c$ et $\|x'\|_{L^1[t_1,t_2]} \leq C$ pour tout intervalle $[t_1, t_2]$ tel que $\|x'(t)\| \geq b$ sur $[t_1, t_2]$.

Démonstration. Soit x solution de $(*)_\lambda$ telle que $x \in T(v, M)$. Il existe $x_B \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que p.p. $t \in I$, $x_B(t) \in Bx(t)$ et

$$x''(t) = x_B(t) + f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t), \lambda).$$

Posons $d = \max\{c, b\}$. Soit $K > d$ tel que

$$\int_d^K \frac{s\,ds}{s + \phi(s)} > C + L + \|l\|_{L^1} + \|\gamma\|_{L^1},$$

où L et l sont donnés en (2.1.1) et (2.1.2) respectivement. Si $\max\{\|x'(t)\| : t \in I\} \geq K$, alors l'hypothèse $\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \leq c$ implique qu'il existe $t_1,\ t_2 \in I$

tels que $\|x'(t_1)\| = d$, $\|x'(t_2)\| = K$ et $d < \|x'(t)\| < K$ entre t_1 et t_2. Sans perte de généralité, on peut supposer que $t_1 < t_2$. Comme x est solution de $(*)_\lambda$, on a

$$\begin{aligned}
\|x'(t)\|\|x'(t)\|' = \langle x'(t), x''(t)\rangle &\leq |\langle x'(t), x''(t)\rangle| \\
&= |\langle x'(t), x_B(t) + \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g(t, x(t))\rangle| \\
&\leq \Big(\|x'(t)\| + \gamma(t)\Big)\phi(\|x'(t)\|) + \|x'(t)\|(L + l(t)) \\
&\leq \Big(\|x'(t)\| + \phi(\|x'(t)\|)\Big)\Big(\|x'(t)\| + \gamma(t) + L + l(t)\Big).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\|x'(s)\|\|x'(s)\|'\, ds}{\phi(\|x'(s)\|) + \|x'(s)\|} \leq C + L + \|l\|_{L^1} + \|\gamma\|_{L^1}.$$

D'autre part, par le lemme 1.1.5 et par le choix de C, on a

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\|x'(t)\|\|x'(t)\|'\, dt}{\phi(\|x'(t)\|) + \|x'(t)\|} = \int_{\|x'(t_1)\|}^{\|x'(t_2)\|} \frac{s\, ds}{\phi(s) + s} &= \int_d^K \frac{s\, ds}{\phi(s) + s} \\
&> C + L + \|l\|_{L^1} + \|\gamma\|_{L^1};
\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. Donc on a

$$\|x'\|_0 \leq K.$$

$\square$

Remarque 2.4.3. Intuitivement

$$\|f(t,x,p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|), \text{ avec } \int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} = \infty$$

est une hypothèse qui signifie que f satisfait une condition de croissance un peu plus générale que linéaire. Cette hypothèse est généralisée par une condition de croissance un peu plus générale que quadratique suivante

$$|\langle p, f(t,x,p)\rangle| \leq \phi(\|p\|)(\|p\| + \gamma(t)) \text{ avec } \int_d^\infty \frac{sds}{\phi(s) + s} = \infty.$$

Pour prendre une condition de croissance plus générale, il y a un prix à payer qui correspond aux autres hypothèses que nous avons imposées. Ces hypothèses permettent intuivement d'obtenir une borne a priori de $\|x'\|$ dans L^1

Corollaire 2.4.4. *Soit* $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$. *Supposons que les hypothèses* $(H2.1) - (H2.4)$, $(H2.7)$ *et* $BC = (P)$ *ou* (SL) *avec* $(1-\beta_i)r_i M(i) = 0$, $i = 0, 1$, *sont satisfaites. Alors il existe une constante* K *telle que toute solution* x *de* $(*)_\lambda$, *vérifie*

$$\|x'\|_0 < K.$$

Corollaire 2.4.5. *Soit* $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$. *Supposons que les hypothèses* $(H2.1) - (H2.3)$ *et* $(H2.7)$ *sont satisfaites. Supposons de plus que l'une des hypothèses* $(H2.5)$ *ou* $(H2.6)$ *est satisfaite. Alors il existe une constante* K *telle que toute solution* x *de* $(*)_\lambda$ *vérifie*

$$\|x'\|_0 < K.$$

Remarque 2.4.6. Les résultats précédents restent vrais si à la place de l'hypothèse $(H2.6)$ on supposait

(H2.6)' il existe $k, \theta, \gamma > 0, m \geq 0, h_1, h_2 \in L^1(I)$, tels que pour presque tout $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v(t)\| \leq M(t), \|p - v'(t)\| \geq k$, on a

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} &\frac{\langle x - v(t), f(t,x,p) + b(t) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2}{\|p - v'(t)\|} \\ &- \frac{\langle p - v'(t), f(t,x,p) + b(t) - v''(t)\rangle \langle x - v(t), p - v'(t)\rangle}{\|p - v'(t)\|^3} \\ &\geq \theta\|p - v'(t)\| - m|\langle x - v(t), p - v'(t)\rangle|; \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} &\frac{\|x - v(t)\|(\langle x(t) - v(t), f(t,x,p) + b(t) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2)}{\|p - v'(t)\|} \\ &- \frac{\|x - v(t)\|(\langle p - v'(t), f(t,x,p) + b(t) - v''(t)\rangle \langle x - v(t), p - v'(t)\rangle)}{\|p - v'(t)\|^3} \\ &+ \frac{\langle x - v(t), p - v'(t)\rangle^2}{\|x - v(t)\|\|p - v'(t)\|} \\ &\geq \gamma|\langle x - v(t), p - v'(t)\rangle| - h_2(t). \end{aligned}$$

Cette hypothèse est une généralisation au cas des inclusions différentielles avec opérateurs monotones de l'hypothèse donnée par Frigon au cas des systèmes différentiels. Pour plus de détails, voir **[27]**.

Chapitre 3

MULTIPLICITÉ DE SOLUTIONS DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

Dans ce chapitre, nous établissons des théorèmes de multiplicité des systèmes d'équations du second ordre avec conditions aux limites. Soit $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory. Nous considérons ici le problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) & \text{p.p. } t \in I, \\ x \in BC, \end{cases} \tag{$*$}$$

où BC désigne les conditions aux limites de Sturm-Liouville, ou périodiques :

$$\begin{cases} A_0x(0) - \beta_0 x'(0) = r_0, \\ A_1x(1) + \beta_1 x'(1) = r_1; \end{cases} \tag{SL}$$

$$\begin{cases} x(0) = x(1), \\ x'(0) = x'(1); \end{cases} \tag{P}$$

où pour $i = 0$ ou 1, A_i est une matrice $(n \times n)$ telle qu'il existe $\alpha_i \geq 0$ tel que $\langle x, A_i x\rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $\beta_i \in \{0, 1\}$ et $\alpha_i + \beta_i > 0$.

L'existence et la multiplicité découlera de la théorie du degré. Pour ce faire nous devrons à partir de cette équation lui associer une famille de problèmes à laquelle nous associeront une homotopie compacte sur les ensembles bornés. Nous devrons alors établir l'existence d'un ouvert borné tel que l'homotopie est sans points fixes sur la frontière. Pour obtenir cet ensemble borné, nous allons établir la majoration a priori d'éventuelles solutions de la famille de problèmes. Les notions de tube-solution et tube-solution strict dont nous allons donner ci-dessous les définitions, seront les conditions qui permettront d'obtenir la majoration a priori d'éventuelles solutions .

Rappelons la définition introduite dans **[26]**.

Définition 3.0.1. **(Tube-solution)** Soient $v \in W^{2,1}(I,\ \mathbb{R}^n)$, $M \in W^{2,1}(I,\ \mathbb{R})$. On dit que (v, M) est un *tube-solution de* $(*)$ si

(i) $\langle x - v(t), f(t, x, p) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 \geq M(t)M''(t) + (M'(t))^2$ p.p. $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\|x - v(t)\| = M(t)$ et $\langle x - v(t),\ p - v'(t)\rangle = M(t)M'(t)$,

(ii) $v''(t) = f(t, v(t), v'(t))$ p.p. sur $\{t \in [0, 1] : M(t) = 0\}$,

(iii) si $BC = (SL)$ alors $\|r_0 - (A_0 v(0) - \beta_0 v'(0))\| \leq \alpha_0 M(0) - \beta_0 M'(0)$, $\|r_1 - (A_1 v(1) + \beta_1 v'(1))\| \leq \alpha_1 M(1) + \beta_1 M'(1)$; et si $BC = (P)$, alors $M(0) = M(1)$, $v(0) = v(1)$, $\|v'(0) - v'(1)\| \leq M'(1) - M'(0)$.

Remarque 3.0.2. Comme nous le verrons, la condition de tube-solution permet d'appliquer le principe du maximum afin de montrer que si x est solution de $(*)$, alors pour tout $t \in I$ on a :

$$\|x(t) - v(t)\| \leq M(t).$$

En effet si x est solution de $(*)$, de la condition (i) de la définition, on obtient pour presque tout $t \in I$ que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\|x(t) - v(t)\|^2 - M(t)^2\right) \geq 0.$$

Introduisons la définition de tube-solution strict.

Définition 3.0.3. **(Tube-solution strict)**. Un couple $(v, M) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I, \mathbb{R})$ est un *tube-solution strict de* $(*)$ si :

(i) pour tout $t \in I$, $M(t) > 0$;

(ii) pour tout $t \in I$, il existe $\varepsilon > 0$ et $O \subset I$ un voisinage de t tels que $\Gamma(t, x, p) \geq 0$ p. p. $t \in O$ et pour tout $(x, p) \in B(A_t, \varepsilon)$; où

$$A_t = \{(x,\ p) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x - v(t)\| = M(t), \langle x - v(t),\ p - v'(t)\rangle = M(t)M'(t)\},$$

$$\Gamma(t,\ x,\ p) = \langle x - v(t),\ f(t,x,p) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 - M(t)M''(t) - (M'(t))^2;$$

(iii) si $BC = (SL)$, alors $\|r_0 - (A_0 v(0) - \beta_0 v'(0))\| < \alpha_0 M(0) - \beta_0 M'(0)$, $\|r_1 - (A_1 v(1) + \beta_1 v'(1))\| < \alpha_1 M(1) + \beta_1 M'(1)$; si $BC = (P)$, alors $M(0) = M(1)$, $v(0) = v(1)$, $\|v'(0) - v'(1)\| < M'(1) - M'(0)$.

Remarque 3.0.4. On remarque que si $(0, M)$ est un tube-solution de $(*)$ avec $M > 0$ étant constant, alors $\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2 \geq 0$ p.p. $t \in I$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x\| = M$ et $\langle x,p\rangle = 0$. Cette condition a été utilisée par plusieurs auteurs, mentionnons [**6, 22, 38, 47**].

Remarque 3.0.5. On remarque aussi que dans le cas scalaire, si (v, M) est tube-solution de $(*)$, alors $\alpha = v - M$ et $\beta = v + M$ sont respectivement sous et sur-solutions de $(*)$ et réciproquement.

Remarque 3.0.6. Si, comme il a été supposé dans [**20**], $\phi < \psi$ sont respectivement sous et sur-solutions strictes de $(*)$ au sens de El Khattabi et pour tous $R > 0$, et $\varepsilon' > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que p.p. $t \in I$,

$$\|f(t,x,p) - f(t,y,q)\| \leq \varepsilon'$$

dès que $\|(x,p) - (y,q)\| < \delta$ et $(x,p), (y,q) \in B(0,R)$, alors $(\frac{\phi+\psi}{2}, \frac{\psi-\phi}{2})$ est tube solution-strict de $(*)$.

Pour $(v, M) \in C(I, \mathbb{R}^n) \times C(I, [0, \infty[)$, notons

$$T(v, M) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in I\}. \qquad (3.0.1)$$

3.1. Théorème d'existence et de multiplicité avec des conditions aux limites de Sturm-Liouville.

Nous considérons le problème $(*)$ avec $BC = (SL)$ et $\max\{\beta_0, \beta_1\} > 0$. Nous imposons les hypothèses suivantes :

(H3.1) La fonction $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ est de Carathéodory.

(H3.2) Il existe (v_0, M_0) un tube-solution de $(*)$.

(H3.3) Il existe (v_1, M_1), (v_2, M_2) deux tubes-solutions stricts de $(*)$ tels que

(i) $T(v_i, M_i) \subset T(v_0, M_0)$, pour $i \in \{1,2\}$,

(ii) $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$.

(H3.4) Il existe $\gamma \in L^1(I, [0,\infty[)$ et $\phi : [0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$ une fonction mesurable au sens de Borel tels que

(i) $\|f(t,x,p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|)$ p.p. $t \in I$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$,

(ii) pour tout $c \geq 0$

$$\int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} = \infty.$$

Théorème 3.1.1. *Soit BC la condition aux limites (SL) avec* $\max\{\beta_0, \beta_1\} > 0$. *Sous les hypothèses $(H3.1) - (H3.4)$, le problème $(*)$ possède au moins trois solutions distinctes x_i, i=0,1,2. De plus, $x_i \in T(v_i,\ M_i)$ et $x_i \notin T(v_j,\ M_j)$, $i \neq j$, $i = 0,\ 1,\ 2$, $j = 1,\ 2$.*

La preuve de ce théorème est basée sur la théorie du degré. Elle consiste à définir à partir de la fonction f et des tube-solutions (v_i, M_i), $i = 0,1,2$, des familles de systèmes d'équations associées $((*)^\lambda_{(v_i,M_i)})_{\lambda\in I}$. On montre que les solutions de $((*)^\lambda_{(v_i,M_i)})_{\lambda\in I}$ sont bornées a priori. Ce qui nous permet de construire des ouverts U_i, $i = 0,1,2$ dans lesquels se trouvent les solutions de $((*)^\lambda_{(v_i,M_i)})_{\lambda\in I}$, si elles existent.

La théorie du degré nous permet enfin d'établir l'existence de solutions distinctes de $(*)^1_{(v_i,M_i)}$, $i = 0,1,2$, qui sont aussi des solutions distinctes de $(*)$. La preuve de ce théorème étant longue, elle découlera d'une suite de lemmes. Pour cela, introduisons les notations suivantes. Soit $\varepsilon \geq 0$ qui sera fixé plus loin. Pour $\lambda \in I$ et $(v,M) \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I,[0,\infty[)$, on définit $f^\lambda_{(v,M)} : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ par

$$f^\lambda_{(v,M)}(t,x,p) = \begin{cases} \lambda\Big(\frac{M(t)}{\|x-v(t)\|}f(t,\tilde{x},\tilde{p}) - \varepsilon\tilde{x}\Big) - \varepsilon(1-\lambda)v(t) & \text{si } \|x-v(t)\| > M(t), \\ \quad +(1-\frac{\lambda M(t)}{\|x-v(t)\|})\Big(v''(t) + \frac{M''(t)}{\|x-v(t)\|}(x-v(t))\Big) & \\ \lambda(f(t,x,p) - \varepsilon x) - \varepsilon(1-\lambda)v(t) & \\ \quad +(1-\lambda)(v''(t) + \frac{M''(t)}{M(t)}(x-v(t))) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= v(t) + \frac{M(t)}{\|x - v(t)\|}(x - v(t)),\\ \bar{p} &= p + \Big(M'(t) - \frac{\langle x - v(t), p - v'(t)\rangle}{\|x - v(t)\|}\Big)\Big(\frac{x - v(t)}{\|x - v(t)\|}\Big),\end{aligned}$$

et on pose

$$\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) = 0 \quad \text{p.p. } t \in \{t \in I : M(t) = 0\}.$$

Considérons maintenant la famille de problèmes suivants

$$\begin{cases} x''(t) - \varepsilon x(t) = f^{\lambda}_{(v,M)}(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p. } t \in I. \\ x \in BC \end{cases} \qquad (*)^{\lambda}_{(v,M)}$$

Les lemmes suivants permettent d'obtenir une majoration a priori des solutions. Énonçons d'abord ce résultat qui a été établi dans [**27**].

Lemme 3.1.2. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory. Si (v, M) est un tube-solution de $(*)$, $\lambda \in I$ et si x est une solution de $(*)^{\lambda}_{(v,M)}$, alors $\|x(t) - v(t)\| \le M(t)$ pour tout $t \in I$.*

Dans le lemme suivant l'hypothèse de tube-solution strict nous permet d'obtenir l'inégalité stricte dans l'inégalité du lemme précédent.

Lemme 3.1.3. *Soit $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory . Supposons que (v, M) est un tube-solution strict de $(*)$. Si $x \in T(v, M)$ est une solution de $(*)$ alors*

$$\|x(t) - v(t)\| < M(t) \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Démonstration. Définissons $\omega(t) = \|x(t) - v(t)\|^2 - M(t)^2$.

En supposant l'existence d'un tube-solution (v_0, M_0) et de tubes-solutions stricts (v_i, M_i), $i \in \{1, 2\}$ tels que $T(v_i, M_i) \subset T(v_0, M_0)$, $i = 1,\ 2$ et $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$ où

$$T(v, M) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) \text{ tel que } \|x(t) - v(t)\| \le M(t) \text{ pour tout } t \in I\},$$

on montre que

$$\begin{cases} (*) \textit{ possède au moins trois solutions distinctes } x_i,\ i \in \{0,1,2\} \\ \textit{qui vérifient } x_i \in T(v_i, M_i) \textit{ et } x_i \notin T(v_j, M_j)\ i \neq j \text{ et } i \in \{0,1,2\},\ j \in \{1,2\}. \end{cases}$$

1^{er} *cas :* $t \in \{0,1\}$.

Vérifions d'abord que $\|x(t) - v(t)\| < M(t)$ pour $t \in \{0,1\}$.

Si $BC = (P)$, alors $\|x(0) - v(0)\| < M(0)$ si et seulement si $\|x(1) - v(1)\| < M(1)$. En supposant que $\|x(0)-v(0)\| = M(0)$, on déduit que $\omega(0) = \omega(1)$, $\omega'(0) \leq 0$ et $\omega'(1) \geq 0$. Du fait que (v, M) est un tube-solution strict, on obtient

$$\begin{aligned} &\langle x(1) - v(1), x'(1) - v'(1)\rangle - \langle x(0) - v(0), x'(0) - v'(0)\rangle \\ &\quad = \langle x(1) - v(1), v'(0) - v'(1)\rangle \\ &\quad \leq \|x(1) - v(1)\| \|v'(1) - v'(0)\| \\ &\quad < M(1)M'(1) - M(0)M'(0). \end{aligned}$$

ce qui implique que $\omega'(1) < \omega'(0)$, ce qui est contradictoire.

Si $BC = (SL)$, supposons que $\|x(0) - v(0)\| = M(0)$. On a $\omega(0) = 0$ et $\omega'(0) \leq 0$. Puisque (v, M) est un tube-solution strict,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|x(0) - v(0)\|^2 \leq \langle A_0(x(0) - v(0)), x(0) - v(0)\rangle& \\ = \langle r_0 - (A_0 v(0) - \beta_0 v'(0)), x(0) - v(0)\rangle& \\ + \beta_0 \langle x'(0) - v'(0),\ x(0) - v(0)\rangle& \\ < \big(\alpha_0 M(0) - \beta_0 M'(0)\big) M(0) + \beta_0 \langle x'(0) - v'(0),\ x(0) - v(0)\rangle&. \end{aligned}$$

D'où

$$0 = \alpha_0 \omega(0) < \beta_0 \big(\langle x'(0) - v'(0),\ x(0) - v(0)\rangle - M'(0)M(0)\big) = \frac{\beta_0}{2}\omega'(0) \leq 0;$$

contradiction. De façon similaire, on montre que $\|x(1) - v(1)\| < M(1)$.

2^{ieme} *cas :* $t \in]0,1[$.

Montrons que $\{t \in]0,1[: \|x(t) - v(t)\| = M(t)\} = \emptyset$. Si ce n'est pas le cas, compte tenu de la première étape,

$$t_1 = \inf\{t \in I : \|x(t) - v(t)\| = M(t)\} \in]0,1[,$$

et donc $\omega(t_1) = 0$ et $\omega'(t_1) = 0$, car ω atteint un minimum en t_1. Puisque (v, M) est un tube-solution strict de $(*)$, il existe $\varepsilon_1 > 0$ et $O_1 \subset I$ voisinage de t_1 tels que

$$\Gamma(t, y, p) = \langle y - v(t), f(t, y, p) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 - M(t)M''(t) - M'(t)^2 \geq 0$$

p.p. $t \in O_1$ et pour tout $(y, p) \in B(A_{t_1}, \varepsilon_1)$, où

$$A_{t_1} = \{(y, p) \in \mathbb{R}^{2n} : \|y - v(t_1)\| = M(t_1), \langle y - v(t_1), p - v'(t_1)\rangle = M(t_1)M'(t_1)\}.$$

Remarquons que $(x(t_1), x'(t_1)) \in A_{t_1}$. Fixons $O_0 \subset O_1$ un voisinage de t_1 tel que $(x(t), x'(t)) \in B(A_{t_1}, \varepsilon_1)$ pour tout $t \in O_0$. Par ailleurs, il existe $t_0 \in O_0$ tel que $t_0 < t_1$ et $\omega'(t_0) > 0$, sinon ça contredirait la minimalité de t_1. Ainsi

$$\begin{aligned}
0 &> \frac{1}{2}(\omega'(t_1) - \omega'(t_0)) \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \omega''(s)ds \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Big\{\langle x - v(t), x''(t) - v''(t)\rangle + \|x'(t) - v'(t)\|^2 - M(t)M''(t) - (M'(t))^2\Big\}dt \\
&= \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(t, x(t), x'(t))dt \geq 0,
\end{aligned}$$

contradiction. □

Fixons $\varepsilon \geq 0$ tel que l'opérateur $L_\varepsilon : C^1_B(I, \mathbb{R}^n) \to C_0(I, \mathbb{R}^n)$ défini en (1.1.1) soit inversible. Il est bien connu qu'un tel ε existe. Pour $(v, M) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I, [0, \infty[)$ et $\lambda \in I$, définissons

$$F^\lambda_{(v,M)} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to L^1(I, \mathbb{R}^n), \quad N^\lambda_{(v,M)} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to C_0(I, \mathbb{R}^n)$$

et

$$H_{(v,M)} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \times I \to C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

par

$$\begin{aligned}
F^\lambda_{(v,M)}(x)(t) &= f^\lambda_{(v,M)}(t, x(t), x'(t)), \\
N^\lambda_{(v,M)}(x)(t) &= \int_0^t F^\lambda_{(v,M)}(x)(s)ds, \\
H_{(v,M)}(x, \lambda) &= L_\varepsilon^{-1} \circ N^\lambda_{(v,M)}(x).
\end{aligned}$$

Le résultat suivant est démontré dans **[27]**.

Proposition 3.1.4. *Si f est de Carathéodory et (v, M) est un tube-solution de $(*)$, alors pour tout $\lambda \in I$, $F^{\lambda}_{(v,M)}$ est continu et intégralement borné sur les bornés et $N^{\lambda}_{(v,M)}$ est continu et complètement continu. Si de plus $F^{\lambda}_{(v,M)}$ est intégralement borné alors $N^{\lambda}_{(v,M)}$ est compact.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.1. Pour alléger la notation, pour $i = 0, 1, 2$, notons $H^i = H_{(v_i,M_i)}$ et $H^i_\lambda = H_{(v_i,M_i)}(\cdot, \lambda)$, et définissons

$$\hat{H}^i : C^1(I, \mathbb{R}^n) \times I \to C^1(I, \mathbb{R}^n)$$

par

$$\hat{H}^i(x, \lambda) = \lambda H^i_0(x).$$

Il découle de la proposition 3.1.4 que H^i est complètement continu et que $\hat{H}^i$ est compact car $F^0_{(v_i,M_i)}$ est intégralement borné. En particulier, on peut trouver W un ouvert borné de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que $\hat{H}^i\Big(C^1(I, \mathbb{R}^n) \times I\Big) \subset W$. Donc

$$1 = d(I, W, 0) = d(I - \hat{H}^i(\cdot, 1),\ W, 0) = d(I - H^i_0, W, 0). \tag{3.1.1}$$

Par ailleurs, il découle du lemme 3.1.2 que

$$x \in T(v_i,\ M_i) \quad \text{pour tout } x \text{ solution de} \quad (*)^{\lambda}_{(v_i,\ M_i)} \quad \text{pour} \quad \lambda \in I. \tag{3.1.2}$$

Ceci et le fait que $T(v_i, M_i) \subset T(v_0, M_0)$ impliquent que si x est solution de $(*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}$ pour $\lambda \in I$ et si $\beta_j \neq 0$ pour $j = 0$ ou 1, alors

$$\begin{aligned}\|x'(j)\| &\leq \|r_j\| + \|A_j\|\|x(j)\| \\ &\leq \|r_j\| + \|A_j\|(\|x(j) - v_0(j)\| + \|v_0(j)\|) \\ &\leq \|r_j\| + \|A_j\|(M_0(j) + \|v_0(j)\|).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}&\min\{\|x'(t)\| : t \in I\} \\ &\leq c = \min\{\|r_j\| + \|A_j\|(M_0(j) + \|v_0(j)\|) : \beta_j \neq 0, j = 0, 1\}.\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Si x est solution de $(*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}$, il découle de (3.1.2) que x vérifie

$$x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)) + g_{(v,M)}(t, x(t), \lambda) \quad \text{p.p. } t \in I \tag*{$(*)_{(\lambda,v,M)}$}$$

où $g_{(v,M)} : I \times \mathbb{R}^n \times I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par

$$g_{(v,M)}(t,x,\lambda) = \big(1-\lambda)(v''(t) + (\varepsilon + \frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t))\big)$$

et on a posé $\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) = 0$ sur $\{s : M(s) = 0\}$. On vérifie aisément que $g_{(v,M)}$ est de Carthéodory.

Par (3.1.3) et le théorème 2.4.1, on déduit l'existence d'une constante $K > 0$ telle que pour $i = 0, 1, 2$,

$$\|x'(t)\| < K \quad \text{pour tout} \quad t \in I \quad \text{et tout } x \text{ solution de} \quad (*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}. \tag{3.1.4}$$

Pour $i = 0, 1, 2$, posons

$$\begin{aligned} U_i &= \{x \in C^1(I,\mathbb{R}^n) : \|x(t) - v_i(t)\| < M_i(t) + 1, \quad \|x'(t)\| < K \quad \forall t \in I\}, \\ V_i &= \{x \in C^1(I,\mathbb{R}^n) : \|x(t) - v_i(t)\| < M_i(t), \quad \|x'(t)\| < K \quad \forall t \in I\}. \end{aligned}$$

De (3.1.2) et (3.1.4), on a que $x \in U_i$ pour tout x solution de $(*)^{\lambda}_{(v_i,\, M_i)}$ pour $\lambda \in I$. Puisque les solutions de $(*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}$ sont les points fixes de H^i_λ, $d(I - H^i_\lambda,\ U_i,\ 0)$ est bien défini et

$$d(I - H^i_1, U_i, 0) = d(I - H^i_0, U_i,\ 0) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2. \tag{3.1.5}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $U_i \subset W$. En utilisant la propriété de l'additivité du degré, et en combinant (3.1.1), (3.1.2), (3.1.4) et (3.1.5), on déduit que

$$1 = d(I - H^i_1, U_i, 0) \quad \text{pour } i = 0, 1, 2. \tag{3.1.6}$$

Pour $i = 1, 2$, remarquons que si $x \in T(v_i, M_i)$ est solution de $(*)^1_{(v_i,M_i)}$, alors x est solution de $(*)$. Il découle de (3.1.2), (3.1.4) et du lemme 3.1.3 que si x solution de $(*)^1_{(v_i,M_i)}$ alors $x \in V_i$. Donc ,

$$d(I - H^i_1, U_i, 0) = d(I - H^i_1, V_i, 0) \quad \text{pour } i = 1, 2. \tag{3.1.7}$$

Par ailleurs, puisque $T(v_i, M_i) \subset T(v_0, M_0)$, $F^1_{(v_i,M_i)}(x) = F^1_{(v_0,M_0)}(x)$ pour tout $x \in \overline{V}_i$. D'où,

$$d(I - H^0_1, V_i, 0) = d(I - H^i_1, V_i, 0) \quad \text{pour } i = 1, 2. \tag{3.1.8}$$

Combinant (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.8), on a

$$d(I - H_1^0, V_i, 0) = 1 \text{ pour } i = 1, 2. \tag{3.1.9}$$

En particulier, il existe $x_i \in T(v_i, M_i)$ solution de $(*)^1_{(v_0,M_0)}$ et donc de $(*)$ pour $i = 1, 2$. Ces solutions sont distinctes car $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$. Finalement après avoir remarqué que $V_1 \cup V_2 \subset U_0$, de (3.1.6) et (3.1.9), on obtient

$$\begin{aligned} d(I - H_1^0, U_0 \backslash \overline{V_1 \cup V_2}, 0) = d(I - H_1^0, U_0, 0) \\ - d(I - H_1^0, V_1, 0) - d(I - H_1^0, V_2, 0) \\ = 1 - 1 - 1 = -1. \end{aligned}$$

Il existe donc $x_0 \in U_0 \backslash \overline{V_1 \cup V_2}$ solution de $(*)^1_{(v_0,M_0)}$, et donc en vertu du lemme 3.1.2 de $(*)$ garantissant ainsi que les trois solutions sont distinctes. □

Remarque 3.1.5. En examinant la preuve du théorème 3.1.1, on constate que l'hypothèse $(H3.4)(ii)$ peut être affaiblie par

$$\int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} > C, \quad \text{où}$$

$$C = \|\gamma\|_{L^1} + \max_{i=0,1,2}\{\varepsilon\|M_i\|_{L^1} + \|M_i''\|_{L^1} + \|v_i''\|_{L^1}\ i = 0, 1, 2\},$$

$$c = \min\{\|r_i\| + \|A_i\|(M_0(i) + \|v_0(i)\|) : \beta_i \neq 0, i = 0, 1\},$$

et $\varepsilon > 0$ tel que l'opérateur $L_\varepsilon : C_B^1(I, \mathbb{R}^n) \to C_0(I, \mathbb{R}^n)$ défini par

$$L_\varepsilon(x)(t) = x'(t) - x'(0) - \varepsilon \int_0^t x(t)ds$$

soit inversible.

3.2. Autres résultats de multiplicité.

Dans cette section, nous présentons d'autres résultats de multiplicité, où la condition $(H3.4)$ sera affaiblie. Pour ce faire, d'autres hypothèses sont imposées. Aussi, d'autres conditions aux limites sont considérées. Il ressort de la preuve du théorème 3.1.1 le résultat général suivant :

Théorème 3.2.1. *On suppose que les hypothèses* $(H3.1)-(H3.3)$ *sont satisfaites. On suppose de plus que* *(i) il existe $K > 0$ tel que toute solution x de $(*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}$ vérifie*

$$\|x'(t)\| < K \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Alors le problème $(*)$ possède au moins trois solutions distinctes $x_i \in T(v_i, M_i)$ telles que $x_i \notin T(v_j, M_j)$, $i = 0, 1, 2, j = 1, 2, i \neq j$.

Nous voulons maintenant donner des hypothèses permettant d'assurer que la condition (i) du théorème précédent soit satisfaite. A cette fin, au théorème 3.1.1, nous avions imposé l'hypothèse de croissance :

(H3.4) Il existe $\gamma \in L^1(I, [0, \infty[)$ et $\phi : [0, \infty[\longrightarrow [1, \infty[$ une fonction mesurable au sens de Borel tels que

(i) $\|f(t, x, p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|)$ p.p. $t \in I$ et pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $\|x - v_0(t)\| \leq M_0(t)$.

(ii)
$$\int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} = \infty,$$
pour tout $c \geq 0$.

On comprend que l'élément clé pour obtenir de nouveaux résultats consiste à obtenir la majoration a priori de la dérivée des solutions de $(*)^{\lambda}_{(v_i,M_i)}$. Les résultats généraux de majoration a priori présentés au chapitre 2 nous seront donc d'une grande utilité à cette fin.

Considérons les hypothèses suivantes :

(H3.5) Il existe une fonction mesurable au sens de Borel $\phi : [0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ et une fonction $\gamma \in L^1(I, [0, 1[)$ telles que

(i) $|\langle p, f(t, x, p)\rangle| \leq \phi(\|p\|)(\gamma(t) + \|p\|)$ p.p. $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v_0(t)\| \leq M_0(t)$;

(ii) pour tout $c \geq 0$, $\int_c^\infty \frac{sds}{\phi(s)+s} = \infty$.

(H3.6) Il existe une constante $k \in [0, 1[$ et une fonction $h \in L^1(I, [0, \infty[)$ telles que

$$0 \leq \langle x, f(t, x, p)\rangle + k\|p\|^2 + h(t);$$

p.p. $t \in I$ et tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v_0(t)\| \leq M_0(t)$.

(H3.7) Il existe une constante $a \geq 0$ et une fonction $l \in L^1(I, [0, \infty[)$ telles que

$$\|f(t,x,p)\| \leq 2a(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2) + l(t),$$

p.p. $t \in I$ et tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v_0(t)\| \leq M_0(t)$.

(H3.8) Il existe $b, c_1, c_2 > 0, c_3 \geq 0$, $h_1, h_2 \in L^1(I)$ tels que pour presque tout $t \in I$ et tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v_0(t)\| \leq M_0(t)$, $\|p\| \geq b$, on a

(i) $$\frac{\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2}{\|p\|} - \frac{\langle p, f(t,x,p)\rangle\langle x,p\rangle}{\|p\|^3}$$

$$\geq c_1\|p\| - c_3|\langle x,p\rangle| - h_1(t)$$

(ii) $$\frac{\|x\|(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2)}{\|p\|} - \frac{\|x\|(\langle p, f(t,x,p)\rangle\langle x,p\rangle)}{\|p\|^3} + \frac{\langle x,p\rangle^2}{\|x\|\|p\|}$$

$$\geq c_2|\langle x,p\rangle| - h_2(t),$$

Remarque 3.2.2. Rappelons comme nous l'avons dejà fait remarquer au chapitre 2 qu'intuitivement

$$\|f(t,x,p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|), \text{ avec } \textstyle\int_c^\infty \frac{ds}{\phi(s)} = \infty$$

est une hypothèse qui traduit le fait que f satisfait une condition de croissance un peu plus générale que linéaire. On généralise cette hypothèse par la condition de croissance un peu plus générale que quadratique suivante

$$|\langle p, f(t,x,p)\rangle| \leq \phi(\|p\|)(\|p\| + \gamma(t)) \quad \text{avec} \quad \int_c^\infty \frac{sds}{\phi(s)+s} = \infty,$$

En prenant une condition de croissance plus générale, nous avons été obligé d'imposer d'autres hypothèses.

Avec les hypothèses précédentes, nous obtenons trois corollaires du théorème 3.2.1 que nous regroupons en deux résultats. Dans ces résultats, l'hypothèse $(H3.4)$ est généralisée. En contre partie, une hypothèse supplémentaire doit être imposée.

Théorème 3.2.3. *On suppose que les hypothèses* $(H3.1)$-$(H3.3)$, $(H3.5)$ *et* $(H3.6)$ *sont satisfaites. Alors si* $BC = (P)$ *ou* $BC = (SL)$ *et* $(1-\beta_i)r_i = 0,\ i = 0, 1,$ *le* *problème* $(*)$ *possède au moins trois solutions distinctes* $x_i \in T(v_i, M_i)$ *telles que* $x_i \notin T(v_j, M_j),\ \ i = 1,2,3,\ j = 1,2,\ i \neq j.$

Théorème 3.2.4. *On suppose que les hypothèses* $(H3.1)$-$(H3.3)$, $(H3.5)$ *sont satisfaites. Supposons de plus que* $(H3.7)$ *ou* $(H3.8)$ *est satisfaite. Alors le problème* $(*)$ *possède au moins trois solutions distinctes* $x_i \in T(v_i, M_i)$ *telles que* $x_i \notin T(v_j, M_j),\ \ i = 1,2,3,\ j = 1,2,\ i \neq j.$

Les démonstrations de ces théorèmes découlent directement du lemme 3.1.2, du théorème 3.2.1 et des corollaires 2.4.4 et 2.4.5 respectivement où on a posé pour $(v, M) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^{2n}) \times W^{2,1}(I, [0, \infty[)$,

$$g_{(v,M)}(t, x, \lambda) = \big(1 - \lambda\big)\big(v''(t) + \varepsilon + \frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)\big).$$

avec : $\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) = 0$ sur $\{s : M(s) = 0\}$.

Remarque 3.2.5. Remarquons que,

(i) $(H3.8)$ est trivialement satisfaite dans le cas scalaire $(n = 1)$. Il suffit de choisir $b > 0,\ c_1 = \frac{1}{2},\ c_2 = 1\ c_3 = 0$, et $h_1 = h_2 = 0$. Donc les hypothèses $(H3.6)$, $(H3.7)$ qui, combinées à $(H3.5)$, servent aussi à avoir la majoration de $\|x'\|_0$ pour x solution de $(*)$ deviennent dans le cas scalaire inutiles.

(ii) Si $s \leq \phi(s)$ p.p. $s \in [0, \infty[$, alors $(H3.5)(ii)$ équivaut à

$$\int_c^{\infty} \frac{sds}{\phi(s)} = \infty$$

pour tout $c \geq 0$.

Il arrive qu'à partir de deux tubes-solutions, nous puissions en obtenir un troisième. Lorsque cela se produit, nous pouvons obtenir des corollaires des théorèmes précédents. Soient (v_1, M_1) et (v_2, M_2) deux tubes-solutions de $(*)$. Posons

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(v_1(t) + v_2(t) + (M_1(t) - M_2(t))\big(\frac{v_1(t)-v_2(t)}{\|v_1(t)-v_2(t)\|}\big)\Big) & \text{si } v_1(t) \neq v_2(t), \\ v_1(t) & \text{si } v_1(t) = v_2(t). \end{cases}$$

$$M_0(t) = \frac{1}{2}\big(\|v_1(t) - v_2(t)\| + M_1(t) + M_2(t)\big). \tag{3.2.1}$$

Voici un corollaire du théorème 3.1.1 (des corollaires des théorèmes 3.2.3, 3.2.4 pourraient aussi être énoncés).

Corollaire 3.2.6. *Soient $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory et BC la condition aux limites (SL) avec $\max\{\beta_0, \beta_1\} > 0$. Supposons qu'il existe (v_1, M_1) et (v_2, M_2) deux tubes-solutions stricts de $(*)$ tels que*

(i) $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$;

(ii) pour tout $t \in I$, $|M_1(t) - M_2(t)| \leq \|v_1(t) - v_2(t)\|$.

Si (v_0, M_0) défini dans (3.2.1) est un tube-solution de $(*)$ et que $(H3.4)$ est satisfaite, alors le problème $(*)$ a au moins trois solutions distinctes.

Démonstration. Les hypothèses $(H3.1)$, $(H3.2)$, $(H3.3)(ii)$, et $(H3.4)$ étant satisfaites, il suffit de vérifier que $T(v_i, M_i) \subset T(v_0, M_0)$ pour $i \in \{1, 2\}$. Montrons que $x \in T(v_1, M_1) \subset T(v_0, M_0)$. L'autre inclusion se montre de façon similaire. Pour $t \in I$ tel que $v_1(t) \neq v_2(t)$, en tenant compte de la relation (3.2.1), du fait que $x \in T(v_1, M_1)$, et de l'hypothèse $|M_1(t) - M_2(t)| \leq \|v_1(t) - v_2(t)\|$ on a :

$$
\begin{aligned}
\|x(t) - v_0(t)\| &\leq \|x(t) - v_1(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\| \\
&\leq M_1(t) + \left\| \frac{1}{2}\Big(\|v_1(t) - v_2(t)\| - M_1(t) + M_2(t)\Big)\Big(\frac{v_1(t) - v_2(t)}{\|v_1(t) - v_2(t)\|}\Big) \right\| \\
&\leq M_1(t) + \frac{1}{2}\Big(\Big|\|v_1(t) - v_2(t)\| - M_1(t) + M_2(t)\Big|\Big) \\
&= M_1(t) + \frac{1}{2}\Big(\|v_1(t) - v_2(t)\| - M_1(t) + M_2(t)\Big) = M_0(t).
\end{aligned}
$$

Si $v_1(t) = v_2(t)$, il est évident que $x \in T(v_0, M_0)$. Ce qui prouve que $x \in T(v_0, M_0)$ pour tout $x \in T(v_i, M_i)$ $i = 1, 2$. $\square$

Il est naturel de se poser la question : *quand est-ce que (v_0, M_0) défini en (3.2.1) est un tube-solution ?* La réponse est positive sous certaines conditions pour n=1.

3.3. Cas scalaire

Dans cette section, notre objectif est de donner des hypothèses qui nous garantissent que (v_0, M_0) défini en (3.2.1) est un tube-solution. Après, nous donnons un corollaire qui découle de ce résultat et de ceux de la section précédente.

Proposition 3.3.1. *Soient (v_1, M_1) et (v_2, M_2) deux tubes-solutions de $(*)$ tels que*

(1) $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$,

(2) $|M_1(t) - M_2(t)| \leq |v_1(t) - v_2(t)|$ pour tout $t \in I$,

(3) si $v_1(t) = v_2(t)$ alors $M_1'(t) = M_2'(t)$ et $v_1'(t) = v_2'(t)$.

Alors (v_0, M_0) défini dans (3.2.1) est un tube-solution de $(*)$.

Démonstration. Pour montrer que (v_0, M_0) est un tube-solution de $(*)$, montrons que (v_0, M_0) vérifie les propriétés de la définition 3.0.1. On a

$$v_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(v_1(t) + v_2(t) + M_1(t) - M_2(t)\big) & \text{si } v_1(t) \geq v_2(t), \\ \frac{1}{2}\big(v_1(t) + v_2(t) + M_2(t) - M_1(t)\big) & \text{sinon;} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

et

$$M_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(v_1(t) - v_2(t) + M_1(t) + M_2(t)\big) & \text{si } v_1(t) \geq v_2(t), \\ \frac{1}{2}\big(v_2(t) - v_1(t) + M_2(t) + M_1(t)\big) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Posons

$$J = \{t \in I : v_1(t) = v_2(t) \text{ et } M_1''(t) \neq M_2''(t)\}.$$

Par les hypothèses (2), (3), la définition de (v_0, M_0) et le lemme 1.1.3, il ressort que

$$\begin{aligned} J &= \{t \in I : v_1(t) = v_2(t) \text{ et } M_1''(t) \neq M_2''(t)\} \\ &\subset \{t \in I : M_1(t) = M_2(t), M_1'(t) = M_2'(t) \text{ et } M_1''(t) \neq M_2''(t)\} \end{aligned}$$

est de mesure nulle. Donc on conclut par la définition de (v_0, M_0), que $(v_0, M_0) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^{2n}) \times W^{2,1}(I, [0, \infty[)$.

Soit $E \subset I$ tel que $I \setminus E$ soit négligeable, et pour tout $t \in E$, on a

$$(x - v_1(t))(f(t,x,p) - v_1''(t)) + |p - v_1'(t)|^2 \geq M_1(t)M_1''(t) + (M_1'(t))^2, \quad (3.3.3)$$

pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$|x - v_1(t)| = M_1(t), \ (x - v_1(t))(p - v_1(t)) = M_1(t)M_1'(t);$$

on a aussi

$$(x - v_2(t))(f(t,x,p) - v_2''(t)) + |p - v_2'(t)|^2 \geq M_2(t)M_2''(t) + (M_2'(t))^2 \quad (3.3.4)$$

pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$|x - v_2(t)| = M_2(t), \ (x - v_2(t))(p - v_2(t)) = M_2(t)M_2'(t);$$

et on a également

$$v_0''(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(v_1''(t) + v_2''(t) + M_1''(t) - M_2''(t)\big) & \text{si} \quad v_1(t) \geq v_2(t), \\ \frac{1}{2}\big(v_1''(t) + v_2''(t) + M_2''(t) - M_1''(t)\big) & \text{sinon;} \end{cases} \quad (3.3.5)$$

et

$$M_0''(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(v_1''(t) - v_2''(t) + M_1''(t) + M_2''(t)\big) & \text{si} \quad v_1(t) \geq v_2(t), \\ \frac{1}{2}\big(v_2''(t) - v_1''(t) + M_2''(t) + M_1''(t)\big) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Soient $t \in E$ et $(x,p) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|x - v_0(t)| = M_0(t)$ et $\big(x - v_0(t)\big)\big(p - v_0'(t)\big) = M_0(t)M_0'(t)$. Sans perte de généralité, supposons que $v_1(t) \geq v_2(t)$ et $x - v_0(t) = M_0(t)$; les autres cas se traitant similairement. Remarquons que $p - v_0'(t) = M_0'(t)$, $x - v_1(t) = M_1(t)$ et $p - v_1'(t) = M_1'(t)$. Il découle de (3.3.1), (3.3.3), (3.3.5) et (3.3.6) que

$$\begin{aligned} f(t,x,p) - v_0''(t) &= f(t,x,p) - \frac{1}{2}\big(v_1''(t) + v_2''(t) + M_1''(t) - M_2''(t)\big) \\ &= f(t,x,p) - v_1''(t) + \frac{1}{2}\big(v_1''(t) - v_2''(t) - M_1''(t) + M_2''(t)\big) \\ &\geq M_1''(t) + \frac{1}{2}\big(v_1''(t) - v_2''(t) - M_1''(t) + M_2''(t)\big) \end{aligned}$$

$$= M_0(t).$$

D'où

$$\big(x - v_0(t)\big)\big(f(t,x,p) - v_0''(t)\big) + |p - v_0'(t)|^2 \geq M_0(t)M_0''(t) + \big(M_0(t)\big)^2.$$

Vérifions que les conditions aux limites de tube-solution sont vérifiées pour (v_0, M_0).

Supposons que $BC = (SL)$. Sans perte de généralité, supposons que $v_1(0) \geq v_2(0)$ et $A_0 = \alpha_0$. On a

$$\begin{aligned}
&|r_0 - (A_0 v_0(0) - \beta_0 v_0'(0))| \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\Big|r_0 - \Big(A_0(v_1(0) + M_1(0)) - \beta_0\big(v_1'(0) + M_1'(0)\big)\Big)\Big| \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\Big|r_0 - \Big(A_0(v_2(0) - M_2(0)) - \beta_0\big(v_2'(0) - M_2'(0)\big)\Big)\Big|. \qquad (3.3.7)
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions aux limites de la définition de tube-solution pour (v_1, M_1) et (v_2, M_2), on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|r_0 - \Big(A_0 v_1(0) + \alpha_0 M_1(0)\big) - \beta_0\big(v_1'(0) + M_1'(0)\big)\Big)\Big| \\
&= \big|r_0 - \big(A_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0)\big) - \big(\alpha_0 M_1(0) - \beta_0 M_1'(0)\big)\big| \\
&= \alpha_0 M_1(0) - \beta_0 M_1'(0) - \big(r_0 - \big(A_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0)\big)\big) \\
&= -r_0 + \alpha_0 M_1(0) - \beta_0 M_1'(0) + \alpha_0 v_1(0) - \beta_0 v_1'(0), \qquad (3.3.8)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\Big|r_0 - \Big(A_0 v_2(0) - M_2(0) - \beta_0\big(v_2'(0) - M_2'(0)\big)\Big)\Big| \\
&\leq \Big|r_0 - \Big(A_0 v_2(0) - \beta_0 v_2'(0)\Big) + \alpha_0 M_2(0) - \beta_0 M_2'(0)\Big| \\
&= r_0 + \alpha_0 M_2(0) - \beta_0 M_2'(0) - \big(\alpha_0 v_2(0) - \beta_0 v_2'(0)\big). \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

En combinant (3.3.7), (3.3.8) et (3.3.9), on obtient :

$$|r_0 - (A_0 v_0(0) - \beta_0 v_0'(0))| \leq \alpha_0 M_0(0) - \beta_1 M_0'(0).$$

De même, par un raisonnement identique, on obtient :

$$|r_1 - (A_1 v_0(1) + \beta_1 v_0'(1))| \leq \alpha_1 M_0(1) + \beta_1 M_0'(1).$$

Si $BC = (P)$, (v_1, M_1), (v_2, M_2) étant des tubes-solutions, de l'hypothèse $v_1(0) \geq v_2(0)$, on a :

$$v_1(0) = v_1(1) \geq v_2(0) = v_2(1),$$

donc :

$$\begin{aligned}
v_0(0) &= \frac{1}{2}\Big(v_1(0) + v_2(0) + M_1(0) - M_2(0)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(v_1(1) + v_2(1) + M_1(1) - M_2(1)\Big) = v_0(1), \\
M_0(0) &= \frac{1}{2}\Big(v_1(0) - v_2(0) + M_1(0) + M_2(0)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(v_1(1) - v_2(1) + M_1(1) + M_2(1)\Big) = M_0(1),
\end{aligned}$$

et en tenant compte de l'inégalité des conditions aux limites dans la définition de tube-solution (3.0.1) pour (v_1, M_1), (v_2, M_2), on obtient

$$\begin{aligned}
|v_0'(0) - v_0'(1)| &= \frac{1}{2}\Big(|v_1'(0) + v_2'(0) + M_1'(0) - M_2'(0) \\
&\qquad - \big(v_1'(1) + v_2'(1) + M_1'(1) - M_2'(1)\big)|\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|v_1'(0) - v_1'(1) + M_1'(0) - M_1'(1) \\
&\qquad + v_2'(0) - v_2'(1) - \big(M_2'(0) - M_2'(1)\big)|\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big(|v_1'(0) - v_1'(1) + M_1'(0) - M_1'(1)|\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(|v_2'(0) - v_2'(1) - \big(M_2'(0) - M_2'(1)\big)|\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\Big(v_1'(0) - v_1'(1) + \big(M_1'(0) - M_1'(1)\big)\Big) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(v_2'(0) - v_2'(1) - \big(M_2'(0) - M_2'(1)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(v_1'(1) - v_2'(1) + M_1'(1) + M_2'(1)\Big) \\
&\qquad - \quad \frac{1}{2}\Big(v_1'(0) - v_2'(0) + M_1'(0) + M_2'(0)\Big) \\
&= M_0'(1) - M_0'(0).
\end{aligned}$$

Ainsi donc, de ce qui précède, on conclut que toutes les conditions aux limites sont vérifiées et la proposition est démontrée. $\square$

Corollaire 3.3.2. *Soient* $f : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory,* (v_1, M_1) *et* (v_2, M_2) *deux tubes-solutions stricts de* $(*)$ *tels que*

(1) $T(v_1, M_1) \cap T(v_2, M_2) = \emptyset$,

(2) $|M_1(t) - M_2(t)| \leq |v_1(t) - v_2(t)|$ *pour tout* $t \in I$,

(3) si $v_1(t) = v_2(t)$ *alors* $M_1'(t) = M_2'(t)$ *et* $v_1'(t) = v_2'(t)$.

Si l'hypothèse $(H3.5)$ *est satisfaite, alors le système* $(*)$ *a trois solutions* $x_i \in T(v_i, M_i)$, $i = 0, 1, 2$, *et* $x_i \notin T(v_j, M_j), i \neq j, i = 0, 1, 2, j = 1, 2$.

Remarque 3.3.3. Henderson et Thompson **[39]** ont obtenu un résultat similaire à celui du corollaire 3.3.2 pour le problème $(*)$ avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes $(x(0) = x(1) = 0)$. Mais les hypothèses du corollaire 3.3.2 sont plus générales. Dans leur résultat, ils considèrent f continue alors qu'on considère f de Carathéodory. En prenant $\beta_1 = v_1 + M_1$, $\alpha_1 = v_1 - M_1$, $\beta_2 = v_2 + M_2$, $\alpha_2 = v_2 - M_2$, ils considèrent les hypothèses suivantes

(i) $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2$,

(ii) $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$,

(iii) $\alpha_2 \not\leq \beta_1$.

Les hypothèses (1), (2), (3) sont équivalentes à (i), (ii), (iii).

D'autre part $(H3.5)(i)$ est plus générale que leur hypothèse : $|f(t, x, p)| \leq \phi(|p|)$, tandis que notre hypothèse $(H3.5)(ii)$ est plus forte. Toutefois, si $s \leq \phi(s)$ p.p. $s \in I$ ou si $(H3.5)(ii)$ est équivalente à leur hypothèse : $\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\phi(s)} = \infty$.

Chapitre 4

INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES AVEC OPÉRATEUR MAXIMAL MONOTONE

Dans ce chapitre, nous traitons de l'existence de solutions des systèmes d'inclusions différentielles du second ordre où le terme mutivoque qui intervient est un opérateur maximal monotone. Dans le chapitre un, nous avons évoqué l'utilité des inclusions différentielles avec opérateurs maximaux monotones multivoques.

Considérons le problème :

$$\begin{cases} x''(t) \in Bx(t) + f(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p. } t \text{ sur } I, \\ x \in \ BC \end{cases} \tag{$(*)_B$}$$

où $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $B : \ dom(B) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ est maximal monotone, et BC désigne les conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} x(0) = x(1), \\ x'(0) = x'(1); \end{cases} \tag{(P)}$$

ou de Sturm-Liouville homogènes

$$\begin{cases} A_0x(0) - \beta_0 x'(0) = 0 \\ A_1x(1) + \beta_1 x'(1) = 0; \end{cases} \tag{$(SL)_H$}$$

où A_i est une matrice $n \times n$ telle qu'il existe $\alpha_i \geq 0$ telle que $\langle x, A_i x\rangle \geq \alpha_i \|x\|^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n; \beta_i = 0, 1; \alpha_i + \beta_i > 0\,;$

Une solution de $(*)_B$ est une fonction $x \in W_B^{2,1}(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $(*)_B$.

Remarquons que $(SL)_H$ contient la condition de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ x(1) = 0, \end{cases} \tag{$(D)_H$}$$

et la condition de Neumann homogène

$$\begin{cases} x'(0) = 0, \\ x'(1) = 0. \end{cases} \tag{$(N)_H$}$$

Introduisons maintenant la notion de tube-solution pour le problème $(*)_B$. Cette notion joue un rôle essentiel dans la majoration a priori des solutions.

Définition 4.0.1. Un tube-solution du problème $(*)_B$ est un couple de fonctions $(v, M) \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{2,1}(I, [0, \infty[)$ tel que :

(i) il existe $b \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ tel que $b(t) \in Bv(t)$, p.p. $t \in I$ et

$$\langle x - v(t), f(t, x, p) + b(t) - v''(t)\rangle + \|p - v'(t)\|^2 \geq M(t)M''(t) + (M'(t))^2,$$

pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour presque tout $t \in I$ tels que

$$\|x - v(t)\| = M(t) \quad \text{et} \quad \langle x - v(t), p - v'(t)\rangle = M(t)M'(t);$$

(ii) $v''(t) = b(t) + f(t, v(t), v'(t))$ pour presque tout t dans $\{t \in I : M(t) = 0\}$;

(iii) si $BC = (SL)_H$, alors

$$\|(A_0 v(0) - \beta_0 v'(0))\| \leq \alpha_0 M(0) - \beta_0 M'(0),$$

$$\|(A_1 v(1) + \beta_1 v'(1))\| \leq \alpha_1 M(1) + \beta_1 M'(1);$$

et si BC désigne (P),

$$v(0) = v(1), \; M(0) = M(1), \|v'(1) - v'(0)\| \leq M'(1) - M'(0).$$

Comme au chapitre 2, posons :

$$T(v, M) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \quad \forall t \in I\}.$$

Remarque 4.0.2. Le couple (v, M) est un tube-solution de $(*)_B$ si et seulement s'il existe $b \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$ avec $b(t) \in Bv(t)$ p.p. $t \in I$ et tel que (v, M) est un tube-solution de

$$\begin{cases} x''(t) = b(t) + f(t, x(t), x'(t)), \\ x \in BC. \end{cases}$$

4.1. Théorème d'existence de type Papageorgiou

Dans cette section, on prouve des théorèmes d'existence du problème $(*)_B$. Pour cela considérons les hypothèses suivantes :

(H4.1) La fonction $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de L^2–Carathéodory.

(H4.2) L'opérateur $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$ est maximal monotone et $0 \in B(0)$. On suppose de plus que si $BC = (SL)_H$, on a

$$\beta_0 \langle B_\lambda(a), A_0(a) \rangle + \beta_1 \langle B_\lambda(b), A_1(b) \rangle \geq 0 \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{R}^n,\ \lambda > 0\,;$$

où B_λ est l'approximation de Yosida de B introduite dans le chapitre un.

(H4.3) Il existe (v, M) tube-solution de $(*)_B$ tel que

$$(v, M) \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{2,2}(I, [0, \infty[).$$

(H4.4) Pour tout $r \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$, il existe $R \in L^2(I)$ tel que pour tous $x, y \in L^2(I)$ vérifiant $\|x(t)\|,\ \|y(t)\| \leq r(t)$ p.p. $t \in I$, on a $\|f(t,\ x(t),\ y(t))\| \leq R(t)$ p.p. $t \in I$.

(H4.5) Il existe une constante $k \in [0, 1[$, une fonction $h \in L^1(I, [0, \infty[)$ telles que

$$0 \leq \langle x, f(t, x, p) \rangle + k\|p\|^2 + h(t),$$

pour presque tout $t \in I$ et pour tout $(x, p) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $\|x - v(t)\| \leq M(t)$.

Remarque 4.1.1. L'hypothèse $(H4.5)$ est plus générale que l'hypothèse

(H4.6) il existe $\alpha,\ \beta \geq 0,\ c \in L^1(I, [0, \infty[)$ tels que p.p. $t \in I$, tous $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$, on a

$$\langle f(t, x, y), x \rangle \geq -\alpha\|x\|^2 - \beta\|x\|\|y\| - c(t)\|x\|,$$

utilisée par Halidas et Papageorgiou dans [**37**].

Théorème 4.1.2. *Soient $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ un opérateur. Supposons que les hypothèses $(H4.1) - (H4.5)$ sont satisfaites. Alors le problème $(*)_B$ a une solution $x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) \cap T(v, M)$.*

Avant de démontrer ce théorème, introduisons quelques notations et rappelons des résultats auxiliaires.

Pour $\lambda \in I$, B l'opérateur monotone maximal, f la fonction de Carathéodory, et (v, M) un tube-solution de l'équation $(*)_B$, définissons

$$f^{\lambda}_{(v,M,B)} : I \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n},$$

par

$$f^{\lambda}_{(v,M,B)}(t,x,p) = \begin{cases} \lambda\left(\frac{M(t)}{\|x-v(t)\|} f(t,\tilde{x},\bar{p}) - \tilde{x}\right) - (1-\lambda)v(t) & \\ \quad +\left(1 - \frac{\lambda M(t)}{\|x-v(t)\|}\right)(-b(t) + v''(t)) & \\ \quad +\left(1 - \frac{\lambda M(t)}{\|x-v(t)\|}\right)\left(\frac{M''(t)}{\|x-v(t)\|}(x - v(t))\right) & \text{si } \|x - v(t)\| > M(t), \\ \lambda(f(t,x,p) - x) - (1-\lambda)v(t) & \\ \quad +(1-\lambda)\left(-b(t) + v''(t) + \frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t))\right) & \text{si } \|x - v(t)\| \leq M(t). \end{cases}$$

où on a posé : $\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) = 0$ si $t \in \{s \in I : M(s) = 0\}$, et

$$\tilde{x} = \frac{M(t)}{\|x - v(t)\|}(x - v(t)) + v(t),$$

$$\bar{p} = p + \Big(M'(t) - \frac{\langle x - v(t),\, p - v'(t)\rangle}{\|x - v(t)\|}\Big)\Big(\frac{x - v(t)}{\|x - v(t)\|}\Big).$$

À la fonction $f^{\lambda}_{(v,M,B)}$, on associe l'opérateur $F^{\lambda}_{(v,M,B)} : W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) \to L^2(I, \mathbb{R}^n)$ défini par :

$$F^{\lambda}_{(v,M,B)}(x)(t) = -f^{\lambda}_{(v,M,B)}(t, x(t), x'(t)).$$

Remarque 4.1.3. On vérifie facilement que si $\|x - v(t)\| > M(t)$, alors

(i) $\|\tilde{x} - v(t)\| = M(t)$;

(ii) $\langle \tilde{x} - v(t), \bar{p} - v'(t)\rangle = M(t)M'(t)$;

(iii) $\|\bar{p} - v'(t)\|^2 = \|p - v'(t)\|^2 + (M'(t))^2 - \frac{\langle x-v(t),\, p-v'(t)\rangle^2}{\|x-v(t)\|^2}$.

Considérons la famille de problèmes modifiés suivante

$$\begin{cases} x''(t) - x(t) \in Bx(t) + f^{\lambda}_{(v,M,B)}(t, x(t), x'(t)) \quad \text{p.p. } t \in I, \\ x \in BC; \end{cases} \qquad (*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$$

Le principe de la preuve consiste en la majoration a priori des solutions de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ et en l'utilisation de la théorie du degré pour trouver des points fixes parmi lesquels se trouveront des solutions de notre problème $(*)_B$.

Avant de donner la preuve du théorème, énonçons les deux lemmes suivants dont les preuves seront données après la preuve du théorème.

Lemme 4.1.4. *Soit $f : I\times\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ une fonction de Carathéodory, $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ un opérateur monotone. Si (v, M) est un tube-solution de $(*)_B$, et si x est une solution de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ pour un certain $\lambda \in I$, alors $x \in T(v, M)$.*

Remarque 4.1.5. Le lemme 4.1.4 reste vrai si BC désigne les conditions aux limites non homogènes énoncées dans le chapitre 3 et si dans la définition de tube-solution de $(*)_B$, on remplace les conditions aux limites par celles énoncées dans la définition de tube-solution du chapitre 3.

Lemme 4.1.6. *Soient $f : I \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ et $B : dom(B) \subset \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$. Sous les hypothèses $(H4.1) - (H4.4)$, l'opérateur $F^{\lambda}_{(v,M,B)}$ est continu et les images des bornés de $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ sont bornées dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. De plus $F^{0}_{(v,M,B)}$ est à image bornée.*

Avant la preuve du théorème, rappelons les notations suivantes introduites à la section 1.4.

$$\hat{L} : \; W^{2,2}_B(I, \mathbb{R}^n) \to L^2(I, \mathbb{R}^n), \quad \hat{L}(x) = -x'',$$

$$\hat{B} : dom(\hat{B}) \subset L^2(I, \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)},$$

$$\hat{B}(x) = \{g \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : g(t) \in Bx(t) \quad \text{p.p. sur} \quad I\},$$

$$K = \hat{L} + \hat{B},$$

$$S_1 = j \circ (I + K)^{-1} : \; L^2(I, \mathbb{R}^n) \to C^1(I, \mathbb{R}^n),$$

$$S_2 = i \circ S_1,$$

où i et j sont les inclusions

$$i: \ C^1(I;\mathbb{R}^n) \to W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n); \qquad j: \ dom(\hat{L}) \to C^1(I,\mathbb{R}^n),$$

et

$$W_B^{2,2}(I,\mathbb{R}^n) := \Big\{x \in W^{2,2}(I,\mathbb{R}^n) : x \in BC\Big\}.$$

Démonstration du théorème 4.1.2. Définissons l'opérateur $N \ : \ W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n) \times I \to W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$N(x,\lambda)(t) = S_2 \circ F^{\lambda}_{(v,M,B)}(x)(t).$$

Posons $N_\lambda = N_{(v,M,B)}(\cdot,\lambda)$ et définissons $\hat{N} : W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n) \times I \to W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ par

$$\hat{N}(x,\lambda) = \lambda N_0.$$

Le théorème 1.4.16, la remarque 1.4.17 et le lemme 4.1.6 impliquent que N est complètement continu et que $\hat{N}$ est compact.

Par le lemme 4.1.4, pour toute solution x de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ on a $x \in T(v,M)$ et donc

$$\|x - v\|_{L^2} < \|M\|_{L^2} + 1,$$

et

$$x''(t) \in Bx(t) + \lambda f(t,x(t),x'(t)) + g_{(\lambda,v,M,B)}(t,x(t),\lambda) \quad \text{p.p. } t \in I, \qquad (*)_{(\lambda,v,M)}$$

où $g: \ I \times \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ est définie par

$$g(t,x,\lambda) = \big(1-\lambda\big)\big(-b(t) + v''(t) + (1 + \frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t))\big), \tag{4.1.1}$$

où on a posé :

$$\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) = 0 \quad \text{sur} \quad \{s : M(s) = 0\}.$$

On vérifie facilement que g est de Carathéodory. Par le théorème 2.2.1 et la remarque 2.2.2, il existe k tel que

$$\|x'\|_{L^2} < k.$$

Posons donc

$$U = \Big\{x \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) : \|x - v\|_2 < \|M\|_2 + 1, \|x'\|_2 < k\Big\}.$$

Toute solution de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ est un point fixe de N_λ et réciproquement. Par ce qui précède, les points fixes de N_λ sont dans U. Par la compacité de $\hat{N}$, il existe un ouvert borné V de $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ (on peut supposer que $U \subset V$) tel que $\hat{N}(W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) \times I) \subset V$. Donc $\hat{N}(\cdot, \lambda)$ est sans point fixe sur ∂V pour tout $\lambda \in I$. Comme $U \subset V$, on a aussi que N_λ est sans point fixe sur ∂V. Il s'ensuit par les propriétés d'excision, de l'invariance du degré par homotopie que

$$\begin{aligned} d(I - N_1, U, 0) &= d(I - N_0, U, 0) \\ &= d(I - \hat{N}(\cdot, 1), V, 0) \\ &= d(I - \hat{N}(\cdot, 0), V, 0) \\ &= d(I, V, 0) = 1. \end{aligned}$$

Par la propriété d'existence du degré, on conclut que N_1 a un point fixe $x \in T(v, M)$ qui est une solution de $(*)^{1}_{(v,M,B)}$ et de $(*)_B$. $\square$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1.4. Soit x solution de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$. Soit $\delta > 0$, posons $C_\delta = \{t \in I : \|x - v(t)\| > M(t) + \delta\}$. Si $C_\delta \neq \emptyset$ pour un certain $\delta > 0$, alors pour tout intervalle $]t_0, t_1[\subset C_\delta$, tel que $\|x(t_0) - v(t_0)\| = M(t_0) + \delta$ ou $t_0 = 0$, et $\|x(t_1) - v(t_1)\| = M(t_1) + \delta$, ou $t_1 = 1$, la fonction $t \mapsto \|x(t) - v(t)\|$ appartient à $W^{2,1}([t_0, t_1], \mathbb{R})$. Pour tout $t \in [t_0, t_1]$, posons $\omega(t) = \|x(t) - v(t)\| - (M(t) + \delta)$, on a

$$\begin{aligned} \omega''(t) - \omega(t) &= \frac{\langle x(t) - v(t), x''(t) - v''(t)\rangle + \|x'(t) - v'(t)\|^2}{\|x(t) - v(t)\|} \\ &\quad - \frac{\langle x(t) - v(t), x'(t) - v'(t)\rangle^2}{\|x(t) - v(t)\|^3} - \|x(t) - v(t)\| \\ &\quad + (M(t) + \delta) - M''(t) \\ &= \frac{\langle x(t) - v(t), f^{\lambda}_{(v,\, M,\, B)}(t, x(t), x'(t)) + x(t) + x_B(t) - v''(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\ &\quad + \frac{\|x'(t) - v'(t)\|^2}{\|x(t) - v(t)\|} - \frac{\langle x(t) - v(t), x'(t) - v'(t)\rangle^2}{\|x(t) - v(t)\|^3} \end{aligned}$$

$$- \|x(t)-v(t)\| + (M(t)+\delta) - M''(t),$$

où $x_B(t) \in Bx(t)$ et $x''(t) - x(t) = x_B(t) + f^{\lambda}_{(v,\,M,\,B)}(t, x(t), x'(t))$. D'où

$$\begin{aligned}
\omega''(t) - \omega(t) = {} & \frac{\langle x(t)-v(t), \frac{\lambda M(t)}{\|x(t)-v(t)\|} f(t,\tilde{x}(t),\bar{x}'(t)) + x_B(t) - v''(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& - \frac{\langle x(t)-v(t), (1-\lambda)v(t) - (x(t)-\lambda\tilde{x}(t))\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& + \frac{(1-\frac{\lambda M(t)}{\|x(t)-v(t)\|})\langle x(t)-v(t), -b(t)+v''(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& + (1-\frac{\lambda M(t)}{\|x(t)-v(t)\|})M''(t) + \frac{\|x'(t)-v'(t)\|^2}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& - \frac{\langle x(t)-v(t), x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} \\
& - \|x(t)-v(t)\| + (M(t)+\delta) - M''(t) \\
= {} & \frac{\lambda\langle \tilde{x}(t)-v(t), f(t,\tilde{x}(t),\bar{x}'(t)) + b(t) - v''(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& + (1-\frac{\lambda M(t)}{\|x(t)-v(t)\|})\|x(t)-v(t)\| \\
& + \frac{\langle x(t)-v(t), x_B(t)-b(t))\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& + \frac{(1-\frac{\lambda M(t)}{\|x(t)-v(t)\|})M''(t)\|x(t)-v(t)\| + \|x'(t)-v'(t)\|^2}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& - \frac{\langle x(t)-v(t), x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} \\
& - \|x(t)-v(t)\| + (M(t)+\delta) - M''(t) \\
= {} & \frac{\lambda\big(\langle \tilde{x}(t)-v(t),\ f(t,\tilde{x}(t),\bar{x}'(t)) + b(t) - v''(t) + \|\bar{x}'(t)-v'(t)\|^2\rangle\big)}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& + \frac{\langle x(t)-v(t),\ x_B(t)-b(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|} + (1-\lambda)M(t) \\
& - \frac{\lambda M(t)M''(t)}{\|x(t)-v(t)\|} + \frac{\|x'(t)-v'(t)\|^2 - \lambda\|\bar{x}'(t)-v'(t)\|}{\|x(t)-v(t)\|} \\
& - \frac{\langle x(t)-v(t),\ x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} + \delta \\
\geq {} & \frac{+\lambda M(t)M''(t) + \lambda(M'(t))^2 - \lambda M(t)M''(t)}{\|x(t)-v(t)\|}
\end{aligned}$$

$$+ (1-\lambda)M(t) + \frac{\langle x(t)-v(t),\ x_B(t)-b(t)\rangle}{\|x(t)-v(t)\|}$$
$$+ \frac{\|x'(t)-v'(t)\|^2 - \lambda\|\bar{x}'(t)-v'(t)\|^2}{\|x(t)-v(t)\|}$$
$$- \frac{\langle x(t)-v(t),\ x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} + \delta,$$

car (v, M) est un tube-solution de $(*)_B$. Il s'ensuit que

$$\omega''(t) - \omega(t) \geq \frac{\lambda(M'(t))^2 + \|x'(t)-v'(t)\|^2 - \lambda\|\bar{x}'(t)-v'(t)\|^2}{\|x(t)-v(t)\|} - \frac{\langle x(t)-v(t),\ x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} + \delta + (1-\lambda)M(t),$$

car $x_B(t) \in Bx(t)$, $b(t) \in Bv(t)$ pour presque tout $t \in [0, 1]$ et B est monotone. Par la remarque 4.1.3(iii), on obtient que

$$\omega''(t) - \omega(t) \geq \frac{\lambda(M'(t))^2 + \|x'(t)-v'(t)\|^2 - \lambda\|x'(t)-v'(t)\|^2 - \lambda(M'(t))^2}{\|x(t)-v(t)\|} + (\lambda-1)\frac{\langle x(t)-v(t), x'(t)-v'(t)\rangle^2}{\|x(t)-v(t)\|^3} + \delta + (1-\lambda)M(t),$$

et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\omega''(t) - \omega(t) \geq \delta + (1-\lambda)M(t) > 0.$$

D'où

$$\omega''(t) - \omega(t) \geq 0 \ \text{ p.p. } t \in [t_0, t_1]. \tag{4.1.2}$$

Dans le but d'appliquer le principe du maximum (lemme 1.1.4), vérifions les conditions aux limites.

Considérons le cas où $BC = (SL)_H$. Alors soit $\omega(t_0) \leq 0$, soit $t_0 = 0$. Si $t_0 = 0$ et $\|x(0) - v(0)\| = 0$ alors

$$\omega(0) \leq 0. \tag{4.1.3}$$

Si $t_0 = 0$ et $\|x(0) - v(0)\| \neq 0$ alors

$$\alpha_0\omega(0) - \beta_0\omega'(0) = \alpha_0\Big(\|x(0)-v(0)\| - (M(0)+\delta)\Big) - \beta_0\Big(\|x(0)-v(0)\|' - M'(0)\Big)$$
$$= \frac{\alpha_0(\|x(0)-v(0)\|^2 - \beta_0\langle x(0)-v(0), x'(0)-v'(0)\rangle}{\|x(0)-v(0)\|}$$
$$- (\alpha_0 M(0) + \alpha_0\delta - \beta_0 M'(0))$$

$$\leq \frac{\langle x(0)-v(0), A_0(x(0)-v(0)) - \beta_0(x'(0)-v'(0))\rangle}{\|x(0)-v(0)\|}$$
$$- \big(\alpha_0 M(0) + \alpha_0\delta - \beta_0 M'(0)\big)$$
$$= \frac{\langle x(0)-v(0), A_0 v(0) - \beta_0 v'(0)\rangle}{\|x(0)-v(0)\|}$$
$$- \big(\alpha_0 M(0) + \alpha_0\delta - \beta_0 M'(0)\big).$$

Car $\alpha_0\|x\|^2 \leq \langle A_0 x, x\rangle$, et x vérifie les conditions aux limites. De l'hypothèse de tube-solution, on déduit

$$\alpha_0\omega(0) - \beta_0\omega'(0) \leq \alpha_0\delta \leq 0. \tag{4.1.4}$$

De même, on a soit $\omega(t_1) \leq 0$, soit $t_1 = 0$ et on montre que

$$\omega(1) \leq 0, \text{ ou } \alpha_1\omega(1) + \beta_1\omega'(1) \leq 0. \tag{4.1.5}$$

Considérons maintenant le cas où $BC = (P)$. Si $\omega(t_0) \leq 0$ et $\omega(t_1) \leq 0$, on raisonne comme dans le cas $BC = (SL)_H$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Sinon, soit $[t_0, t_1] = [0, 1]$, soit $]t_0, t_1[\, \subset\,]0, t_2[\, \cup\,]t_3, 1[\, \subseteq C_\delta$, et $\omega(t_2) = \omega(t_3) = 0$, $\omega(t) \leq 0$ sur $[t_2, t_3]$. Remarquons que $\|x(0)-v(0)\| = \|x(1)-v(1)\|$ et $M(0) = M(1)$, donc $\omega(0) = \omega(1)$;

$$\omega'(1) - \omega'(0) = \frac{\langle x(1)-v(1), x'(1)-v'(1)\rangle}{\|x(1)-v(1)\|}$$
$$- \frac{\langle x(0)-v(0), x'(0)-v'(0)\rangle}{\|x(0)-v(0)\|} - M'(1) + M'(0)$$
$$= \frac{\langle x(0)-v(0), v'(0)-v'(1)\rangle}{\|x(0)-v(0)\|} - M'(1) + M'(0)$$
$$\leq \|v'(1)-v'(0)\| - M'(1) + M'(0) \leq 0,$$

par définition de tube-solution ; donc

$$\omega'(1) - \omega'(0) \leq 0. \tag{4.1.6}$$

Par le lemme 1.1.4, et par (4.1.2)-(4.1.6), on conclut que

$$\{t \in I : \|x(t)-v(t)\| > M(t) + \delta\} = \emptyset.$$

Puisque δ est arbitraire, on conclut que

$$\|x(t)-v(t)\| \leq M(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in I. \tag{4.1.7}$$

$\square$

DÉMONTRATION DU LEMME 4.1.6. Par les hypothèses $(H4.1) - (H4.4)$, il est évident que $F^\lambda_{(v,M,B)}$ est borné sur les bornés de $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$ indépendamment de $\lambda \in I$. Donc il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$,

$$f^\lambda_{(v,M,B)}(t, x_n(t), x_n'(t)) \to f^\lambda_{(v,M,B)}(t, x(t), x'(t)) \text{ p.p. } t \in I. \tag{4.1.8}$$

La conclusion découlera du théorème de la convergence dominée de Lebesgue. Soit donc une suite $\{x_n\}$ telle que $x_n \longrightarrow x$ dans $W^{1,2}(I,\mathbb{R}^n)$, alors $x_n \longrightarrow x$ et $x_n' \longrightarrow x'$ dans $L^2(I,\mathbb{R}^n)$. Donc il existe une sous-suite, qu'on note encore (sans perte de généralité) $\{x_n\}$ et une fonction $r \in L^2(I)$ telle que $x_n(t) \longrightarrow x(t)$ et $x_n'(t) \longrightarrow x'(t)$, $\|x_n(t)\| \le r(t)$, et $\|x_n'(t)\| \le r(t)$ p.p. $t \in I$. Par $(H4.1)$, et la définition de $f^\lambda_{(v,M,B)}$, on obtient (4.1.8) presque partout dans $\{t \in I : \|x(t) - v(t)\| \neq M(t)\}$. D'autre part, par le lemme 1.1.3, $\langle x(t) - v(t), x'(t) - v'(t)\rangle = M(t)M'(t)$ presque partout dans $\{t \in I : \|x(t) - v(t)\| = M(t) > 0\}$. Donc, il est facile de vérifier que presque partout dans cet ensemble, $\bar{x_n}'(t) \longrightarrow \bar{x}'(t)$; donc, la relation (4.1.8) est satisfaite dans cet ensemble. Finalement, sur $\{t \in I : \|x(t) - v(t)\| = 0 = M(t)\}$, $x(t) = v(t)$, $x'(t) = v'(t)$, $M'(t) = 0$, et $M''(t) = 0$ presque partout sur cet ensemble. Donc,

$$\begin{aligned}
f^\lambda_{(v,M,B)}(t, x(t), x'(t)) &= \lambda(f(t, x(t), x'(t)) - x(t)) + (1-\lambda)(-b(t) - v(t) + v''(t)) \\
&= \lambda(f(t, v(t), v'(t)) - v(t)) + (1-\lambda)(-b(t) - v(t) + v''(t) \\
&= \lambda\big(v''(t) - b(t) - v(t)\big) + (1-\lambda)(-b(t) - v(t) + v''(t)) \\
&= v''(t) - v(t) - b(t)
\end{aligned}$$

presque partout dans cet ensemble. Donc dans cet ensemble la relation (4.1.8) est satisfaite. En définitive on a (4.1.8) satisfait pour p.p. $t \in I$.

Pour $\lambda = 0$, on a

$$f^0_{(v,M,B)}(t,x,p) = \begin{cases} -v(t) - b(t) + v''(t) & \\ +\frac{M''(t)}{\|x-v(t)\|}(x - v(t)) & \text{si } \|x - v(t)\| > M(t), \\ -v(t) - b(t) + v''(t) & \\ +\frac{M''(t)}{M(t)}(x - v(t)) & \text{si } \|x - v(t)\| \leq M(t). \end{cases}$$

Il apparait donc évident que $F^0_{(v,M,B)}$ est borné sur $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. $\square$

4.2. Autres résultats d'existence

Dans le théorème 4.1.2, grâce à l'hypothèse $(H4.4)$, nous avons pu obtenir une solution comme point fixe d'un opérateur complètement continu défini sur $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$. Il est naturel de se poser la question de savoir si on peut obtenir une solution sans imposer $(H4.4)$. Pour ce faire d'autres hypothèses seront imposées et l'espace $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ sera considéré.

Théorème 4.2.1. *Supposons que les hypothèses $(H4.1) - (H4.3)$, $(H4.5)$ sont satisfaites, ainsi que*

(H4.7) B est borné sur les bornés ;

(H4.8) il existe une constante $\gamma \in L^1(I)$, et une fonction mesurable au sens de Borel $\phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ telles que :

(i) $\displaystyle\int_d^\infty \frac{s}{\phi(s) + s} ds = \infty$ pour tout $d \geq 0$,

(ii) $|\langle p,\ f(t,x,p)\rangle| \leq \phi(\|p\|)(\|p\| + \gamma(t))$ p.p $t \in I$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $\|x - v(t)\| \leq M(t)$.

Alors l'inclusion différentielle $(*)_B$ a au moins une solution x telle que :

$$x \in W^{2,1}(I, \mathbb{R}^n) \cap T(v, M).$$

Soit

$$\mathcal{F}^\lambda : C^1(I, \mathbb{R}^n) \to L^2(I, \mathbb{R}^n)$$

définie par $\mathcal{F}^\lambda(x)(t) = -f^\lambda_{(v,M,B)}(t, x(t), x'(t))$ et $\mathcal{F} :\ C^1(I, \mathbb{R}^n) \times I \to L^2(I, \mathbb{R}^n)$ définie par $\mathcal{F}(x, \lambda) = \mathcal{F}^\lambda(x)$

Nous avons la proposition suivante dont la preuve est analogue à celle de la proposition 3.1.4.

Proposition 4.2.2. *Sous les hypothèses* $(H4.1)-(H4.3)$,$(H4.6)$, $\mathcal{F}$ *est continue et bornée sur les bornées.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.4.2.1. Posons

$$H(x,\lambda) = S_1 \circ \mathcal{F}(x,\lambda).$$

Définissons $\hat{H} : C^1(I,\mathbb{R}^n) \times I \to C^1(I,\ \mathbb{R}^n)$ par

$$\hat{H}(x,\lambda) = \lambda H(\cdot,0).$$

Le théorème 1.4.16, la remarque 1.4.17, le lemme 4.1.6 et la proposition 4.2.2 implique que H est continue et complètement continue et que $\hat{H}$ est continue et compact. Par le lemme 4.1.4, pour toute solution x de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ on a $x \in T(v,M)$, et donc

$$\|x-v\|_0 < \|M\|_0 + 1,$$

et

$$\begin{cases} x''(t) \in Bx(t) + \lambda f(t,x(t),x'(t)) + g(t,x(t),\lambda), \\ x \in BC \end{cases} \qquad (*)_{(\lambda,v,M)}$$

où g est défini en (4.1.1).

Par le corollaire 2.4.4, il existe une constante k telle que

$$\|x'\|_0 < k, \qquad \text{pour toute solution } x \text{ de } (*)^{\lambda}_{(v,M,B)}.$$

Posons donc

$$U = \Big\{x \in W^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^n) : \|x-v\|_0 < \|M\|_0 + 1, \|x'\|_0 < k\Big\}.$$

Toute solution de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ est un point fixe de $H(\cdot,\lambda)$ et réciproquement ; donc les points fixes de $H(\cdot,\lambda)$ sont dans U. En utilisant la théorie du degré et en procédant comme dans la preuve du théorème 4.1.2 on obtient la conclusion. □

Comme dans le chapitre 3, il ressort de la preuve du théorème 4.2.1, le résultat général suivant.

Théorème 4.2.3. *Supposons que les hypothèses $(H4.1)-(H4.3)$, $(H4.6)$ sont satisfaites. On suppose de plus que*

(i) il existe $k>0$ tel que toute solution x de $(*)^{\lambda}_{(v,M,B)}$ vérifie

$$\|x'(t)\| < k \quad \textit{pour tout } t \in I.$$

Alors l'inclusion différentielle $(*)_B$ a au moins une solution x telle que :

$$x \in W^{2,1}(I,\mathbb{R}^n) \cap T(v,M).$$

En utilisant les résultats établis dans le chapitre 2, nous pouvons obtenir des corollaires du théorème 4.2.3. Pour cela, considérons les hypothèses suivantes.

(H4.9) Il existe $\gamma \in L^1(I,[0,\infty[)$ et une fonction mesurable au sens de Borel $\phi : [0,\infty[\longrightarrow [1,\infty[$ telles que

(i) $\displaystyle\int_c^{\infty} \frac{ds}{\phi(s)} = \infty$, pour tout $c \geq 0$.

(ii) $\|f(t,x,p)\| \leq \gamma(t)\phi(\|p\|)$ p.p.$t \in I$ et pour tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\|x - v(t)\| \leq M(t)$.

(H4.10) Il existe une constante $a \geq 0$ et une fonction $l \in L^1(I,[0,\infty[)$ telles que

$$\|f(t,x,p)\| \leq 2a(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2) + l(t),$$

p.p. $t \in I$ et tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v(t)\| \leq M(t)$.

(H4.11) Il existe $b, c_1, c_2 > 0, c_3 \geq 0$, $h_1, h_2 \in L^1(I)$ tels que pour presque tout $t \in I$ et tout $(x,p) \in \mathbb{R}^{2n}$ avec $\|x - v(t)\| \leq M(t)$, $\|p\| \geq b$, on a

(i) $$\frac{\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2}{\|p\|} - \frac{\langle p, f(t,x,p)\rangle\langle x,p\rangle}{\|p\|^3} \geq c_1\|p\| - c_3|\langle x,p\rangle| - h_1(t)$$

(ii) $$\frac{\|x\|(\langle x, f(t,x,p)\rangle + \|p\|^2)}{\|p\|} - \frac{\|x\|(\langle p, f(t,x,p)\rangle\langle x,p\rangle)}{\|p\|^3} + \frac{\langle x,p\rangle^2}{\|x\|\,\|p\|} \geq c_2|\langle x,p\rangle| - h_2(t),$$

Avec ces hypothèses et les résultats du chapitre 2, nous obtenons les corollaires suivants du théorème 4.2.3.

On suppose l'existence d'un tube-solution (v, M) du problème $(*)_B$. Pour $i = 0, 1$ on pose :

$$p_i = \begin{cases} \|A_i\|(M(i) + \|v(i)\|) & si \quad BC = (SL), \beta_i \neq 0, \\ \infty & ailleurs; \end{cases}$$

$$p_2 = \begin{cases} \min\{\|M'(t)\| : M(t) = 0\} & si \quad \{t \in I : M(t) = 0\} \neq \emptyset, \\ \infty & sinon; \end{cases}$$

et

$$c = \min\{p_0, p_1, p_2\}. \tag{4.2.1}$$

Théorème 4.2.4. *Supposons que* $(H4.1) - (H4.3)$, $(H4.6)$ *et* $(H4.8)$ *sont satisfaites et que le c défini dans (4.2.1) est fini. Alors le problème* $(*)_B$ *a au moins une solution x telle que*

$$x \in W^{2,2}(I, \mathbb{R}^n) \cap T(v, M).$$

DÉMONSTRATION. Soit x solution de $(*)^{\lambda}_{(v,\, M,\, B)}$; en vertu du lemme 4.1.4, $x \in T(v, M)$.

Par hypothèse, $c < \infty$. Si $c = p_i$ pour $i = 0$ ou 1, on a

$$\begin{aligned} \|x'(i)\| = \|A_i x(i)\| &\leq \|A_i(x(i) - v(i))\| + \|A_i v(i)\| \\ &\leq \|A_i\|(M(i) + \|v(i)\|) = p_i = c. \end{aligned}$$

Si $c = |M'(t_0)|$ avec $M(t_0) = 0$ alors comme $\|x(t_0) - v(t_0)\| = 0$, on a que $x(t_0) = v(t_0)$ et $\|x'(t_0)\| \leq |M'(t_0)| = c$. On déduit qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $\|x'(t_0)\| \leq c$. Ce qui permet d'appliquer le théorème 2.4.1 du chapitre 2 et le théorème 4.2.3. □

Théorème 4.2.5. *Supposons que les hypothèses* $(H4.1) - (H4.3)$, $(H4.7)$, $(H4.8)$ *et* $(H4.10)$ *ou* $(H4.11)$ *sont satisfaites. Alors l'inclusion différentielle* $(*)_B$ *a au moins une solution* $x \in T(v, M)$.

DÉMONSTRATION. La preuve de ce théorème est similaire à celui du théorème 4.2.1.

□

Chapitre 5

INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE AVEC OPÉRATEUR MAXIMAL MONOTONE

Dans ce chapitre, nous considérons le système d'inclusions différentielles du premier ordre suivant

$$\begin{cases} x'(t) \in -Bx(t) + F(t, x(t)) & \text{p.p. } t \in I; \\ x(0) = x(1); \end{cases} \qquad (*)_1$$

où $B : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est un opérateur monotone et $F : I \times \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est une fonction multivoque.

Une solution de $(*)_1$ est un élément de $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ qui vérifie $(*)_1$.

Introduisons la définition suivante de tube-solution pour le problème $(*)_1$

Définition 5.0.1. Le couple (v, M) de $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{1,2}(I, [0, \infty[)$ est un *tube-solution* du problème $(*)_1$ s'il existe $b \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$ tel que

(i) $-b(t) \in Bv(t)$ p.p. $t \in I$;

(ii) $\langle x - v(t), b(t) + y(t) - v'(t) \rangle \leq M(t)M'(t)$, p.p. $t \in \{s \in I : M(s) > 0\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x - v(t)\| = M(t)$, pour tout $y \in F(t, x)$;

(iii) $\{v'(t) - b(t)\} = F(t, v(t))$ pour p.p. $t \in \{s \in I : M(s) = 0\}$;

(iii) $\|v(1) - v(0)\| \leq M(0) - M(1)$.

Notons toujours comme aux chapitres précédents, $T(v, M) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|x(t) - v(t)\| \leq M(t) \text{ pour tout } t \in I\}$.

5.1. Résultat d'existence pour le problème périodique

Avant de donner les hypothèses et le résultat principal de ce chapitre, nous avons la définition suivante.

Définition 5.1.1. La fonction F est L^2-intégralement bornée sur les bornés, si pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in L^2(I)$ telle que $\sup \|F(t,x)\| \leq h_r(t)$ p.p. $t \in I$ et pour tout $x \in B(0,r)$.

Nous imposons les hypothèses suivantes :

(H5.1) $B : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est un opérateur maximal monotone ;

(H5.2) F est s.c.s. en x, à valeurs convexes compactes, non vides ; pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'application $t \mapsto F(t,x)$ est mesurable ; F est L^2-intégralement bornée sur les bornées ;

(H5.3) il existe $(v, M) \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) \times W^{1,2}(I, [0,\infty[)$ un tube-solution de $(*)_1$.

Théorème 5.1.2. *Si les hypothèses $(H5.1) - (H5.3)$ sont satisfaites, alors le problème $(*)_1$ a au moins une solution $x \in T(v, M)$.*

Soit (v, M) un tube-solution de $(*)_1$ et $x \in \mathbb{R}^n$, posons

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{\|x-v(t)\|}(x - v(t)) + v(t) & \text{si } \|x - v(t)\| > M(t), \\ x & \text{si } \|x - v(t)\| \leq M(t); \end{cases}$$

Considérons le problème

$$\begin{cases} x'(t) + x(t) \in -B\tilde{x}(t) + F(t, \tilde{x}(t)) + \tilde{x}(t) & \text{p.p. } t \in I; \\ x(0) = x(1). \end{cases} \qquad (\hat{*})_1$$

Remarque 5.1.3. On observe que si x est solution de $(\hat{*})_1$ telle que $x \in T(v, M)$, alors x est solution de $(*)_1$. Donc nous allons établir l'existence d'une solution de $(\hat{*})_1$ dans $T(v, M)$. La preuve de l'existence découlera de la suite de résultats suivants que nous allons établir.

Proposition 5.1.4. *Sous les hypothèses $(H5.1) - (H5.3)$ toute solution x de $(\hat{*})_1$ est dans $T(v, M)$.*

DÉMONSTRATION. Soit x solution de $(\hat{*})_1$, montrons que $x \in T(v, M)$. Pour cela, posons

$$J = \{t \in I : \|x(t) - v(t)\| > M(t)\}.$$

On remarque que p.p. $t \in J$, on a $\|\tilde{x}(t) - v(t)\| = M(t)$ et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x(t) - v(t)\| &= \frac{\langle x(t) - v(t), x'(t) - v'(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\
&= \frac{\langle x(t) - v(t), x_B(t) + y(t) + \tilde{x}(t) - x(t) - v'(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\
&= \frac{\langle x(t) - v(t), x_B(t)) - b(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\
&\quad + \frac{\langle x(t) - v(t), b(t) + y(t) + \tilde{x}(t) - x(t) - v'(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|},
\end{aligned}$$

où $x_B(t) \in -B\tilde{x}(t)$ $y(t) \in F(t, \tilde{x}(t))$ et $-b(t) \in Bv(t)$ est donné dans la définition 5.0.1. Puisque B est monotone, $\langle x(t) - v(t), x_B(t) - b(t)\rangle \leq 0$. De plus, p.p. $t \in \{s \in I : M(s) = 0\}$, $y(t) = v'(t) - b(t)$. Donc, p.p. $t \in J \cap \{s \in I : M(s) > 0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|x(t) - v(t)\| &\leq \frac{\langle x(t) - v(t), b(t) + y(t) + \tilde{x}(t) - x(t) - v'(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\
&= \frac{1}{M(t)}\langle \tilde{x}(t) - v(t), b(t) + y(t) - v'(t)\rangle + \frac{\langle x(t) - v(t), \tilde{x}(t) - x(t)\rangle}{\|x(t) - v(t)\|} \\
&= \frac{1}{M(t)}\langle \tilde{x}(t) - v(t), b(t) + y(t) - v'(t)\rangle + \Big(M(t) - \|x(t) - v(t)\|\Big).
\end{aligned}$$

Le couple (v, M) étant un tube-solution de $(*)_1$, de la définition 5.0.1, on conclut que p.p. $t \in J$

$$\frac{d}{dt}\|x(t) - v(t)\| \leq (M(t) - \|x(t) - v(t)\|) + M'(t)$$

car $M'(t) = 0$ p.p. $t \in \{s, M(s) = 0\}$. Donc

$$\frac{d}{dt}\Big(\|x(t) - v(t)\| - M(t)\Big) \leq M(t) - \|x(t) - v(t)\| < 0. \quad \text{p.p. } t \in J. \tag{5.1.1}$$

Conséquemment, $t \mapsto \|x(t) - v(t)\| - M(t)$ est strictement décroissante sur J.

Vérifions que $J \neq [0, 1]$. En effet si c'était le cas, on aurait :

$$\|x(0) - v(0)\| - M(0) > \|x(1) - v(1)\| - M(1),$$

et comme par hypothèse $x(0) = x(1)$, en tenant compte de la définition 5.0.1 ceci entraînerait,

$$M(0)-M(1) \geq \|v(0)-v(1)\| \geq \|x(0)-v(0)\|-\|x(0)-v(1)\| > M(0)-M(1).$$

Donc $M(0) - M(1) < M(0) - M(1)$, ce qui serait contraditoire.

Montrons que si $1 \notin J$, alors $0 \notin J$. En effet si $1 \notin J$ alors $\|x(1) - v(1)\| \leq M(1)$. Donc

$$\begin{aligned}\|x(0) - v(0)\| &\leq \|x(0) - v(1)\| + \|v(1) - v(0)\| \\ &= \|x(1) - v(1)\| + \|v(1) - v(0)\| \\ &\leq M(1) + M(0) - M(1) = M(0)\end{aligned}$$

car par hypothèse $\|v(0) - v(1)\| \leq M(0) - M(1)$, et $x(0) = x(1)$. Il s'ensuit donc que $0 \notin J$.

Montrons que $1 \notin J$. Si ce n'est pas le cas, il existe un $t_2 < 1$ tel que $\|x(t_2) - v(t_2)\| = M(t_2)$ et $]t_2, 1] \subset J$. Par l'inégalité

$$0 < \|x(t) - v(t)\| - M(t) < \|x(t_2) - v(t_2)\| - M(t_2) = 0,$$

pour $t \in]t_2, 1]$, on a une contradiction. Il ressort de ce qui précède que 0 et 1 n'appartiennent pas à J.

Si $J \neq \emptyset$, alors il existerait $t_0 \notin J$ et $t_1 \in J$ tels que $]t_0, t_1] \subset J$ et $\|x(t_0) - v(t_0)\| = M(t_0)$. De nouveau, le fait que $t \mapsto \|x(t) - v(t)\| - M(t)$ soit strictement décroissante sur $]t_0, t_1]$ entraîne que

$$0 < \Big(\|x(t_1) - v(t_1)\| - M(t_1)\Big) < \Big(\|x(t_0) - v(t_0)\| - M(t_0)\Big) = 0$$

ce qui est absurde. Par conséquent, $J = \emptyset$ et $x \in T(v, M)$. $\square$

Proposition 5.1.5. *Soit $\mathcal{N} : C(I, \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$ l'application multivoque définie par :*

$$\mathcal{N}(x) = \Big\{f \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : f(t) \in F(t, x(t)) \;\; p.p. \; t \in I\Big\}.$$

Sous les hypothèses $(H5.1)$ et $(H5.2)$, si ${}^2(I, \mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie faible, alors $\mathcal{N}$ est semi-continue supérieurement, à valeurs convexes, compactes et envoie les bornés sur les bornés.

DÉMONSTRATION. Par le théorème de sélection de Kuratowski Ryll-Nardzewski (théorème 1.3.5), pour tout $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$, il existe une sélection mesurable f telle que $f(t) \in F(t, x(t))$ pour p.p. $t \in I$. Donc de l'hypothèse que F est L^2-intégralement bornée sur les bornés, il découle que pour tout $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ et que $\mathcal{N}$ envoie les bornés sur les bornés. Soit $C \subset L^2(I, \mathbb{R}^n)$ un fermé de $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ pour la topologie faible, et $\mathcal{N}^-(C) = \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : \mathcal{N}(x) \cap C \neq \emptyset\}$. Soit $\{x_n\}$ une suite de $\mathcal{N}^-(C)$ telle que $x_n \to x$, montrons que $x \in \mathcal{N}^-(C)$. Comme $x_n \to x$, il existe M telle que $\|x_n\| \leq M$. Soit $y_n \in \mathcal{N}(x_n) \cap C$, alors $y_n(t) \in F(t, x_n(t))$ p.p. $t \in I$. En vertu de l'hypothèse sur F, il existe $\phi_M \in L^2(I)$ tel qu'on a $\|y_n\|_{L^2} \leq \|\phi_M\|_{L^2}$. Donc il existe une sous-suite encore notée $\{y_n\}$ qui converge faiblement vers y dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Par le lemme 1.1.8, il existe $v_n \in co\{y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+m}, \cdots\}$ telle que $v_n \to y$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Donc à une sous-suite près, on peut supposer que $v_n(t) \to y(t)$ p.p. $t \in I$. Pour p.p. $t \in I$, posons

$$B_n(t) = \bar{co}\{\bigcup_{m \geq n} \{y_m(t)\}\}.$$

et

$$A_n(t) = \overline{\{v_m(t) : m \geq n\}}$$

Par la définition de $B_n(t)$ et $A_n(t)$, on a $v_m(t) \in A_n(t)$ pour tout $m \geq n$; $A_n(t)$ étant fermé, on déduit que $y(t) \in A_n(t)$ pour tout n et donc on déduit que $y(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n(t)$. Comme $A_n(t) \subset B_n(t)$ pour tout n entier, il découle de la semi-continuité de $F(t, \cdot)$ que

$$y(t) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n(t) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{co}\{\bigcup_{m \geq n} \{y_n(t)\}\} \subset \bigcap_{n \in N} \bar{co}\{\bigcup_{m \geq n} F(t, x_m(t))\} \subset F(t, x(t)).$$

L'ensemble C étant faiblement fermé, on conclut que $y \in C$; donc $y \in \mathcal{N}(x) \cap C$. Il s'ensuit que $\mathcal{N}$ est semi-continue supérieurement.

Montrons que $\mathcal{N}$ est à valeurs fermées dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ munie de la topologie faible. Soit $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$, et $y_n \in \mathcal{N}(x)$, tel que $y_n \rightharpoonup y$ dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$, l'argument précédent permet de conclure que $y(t) \in F(t, x(t))$ p.p. $t \in I$ et que $y \in \mathcal{N}(x)$. L'application $x \mapsto F(t, x)$ étant à valeurs convexes et compactes, pour presque tout $t \in I$, et $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ étant un espace de Hilbert, il est facile de voir que $\mathcal{N}$ est à valeurs convexes et compactes pour la topologie faible de $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Définissons

$$\bar{B} : dom(\bar{B}) \subset C(I, \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)}$$

par

$$\bar{B}(x) = \{y \in L^2(I, \mathbb{R}^n) : y(t) \in B(x(t)) \text{ p.p. } t \in I\}$$

et

$$S := -\bar{B} + \mathcal{N} + I : C(I, \mathbb{R}^n) \to 2^{L^2(I,\mathbb{R}^n)}.$$

On a $\bar{B} = \hat{B} \circ i$, où $i : dom(\bar{B}) \to dom(\hat{B})$,

$$\begin{aligned} dom(\bar{B}) &= \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) : x \in dom(\hat{B})\} \\ &= \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) \text{ tel qu'il existe } h \in L^2(I, \mathbb{R}^n) \\ &\qquad \text{tel que } h(t) \in B(x(t)) \text{ p.p. } t \in I\}, \end{aligned}$$

et $\hat{B}$ est défini au chapitre un

Proposition 5.1.6. *En munissant $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ de la topologie faible, sous les hypothèses $(H5.1) - (H5.2)$, l'application S définie ci-desssus est semi-continue supérieurement, à valeurs convexes, fermées. De plus, S envoie les bornés sur les bornés .*

Démonstration. La preuve de la convexité et de la fermeture des valeurs de S est évidente. De même il est aussi évident que S est borné sur les bornés. Prouvons donc la semi-continuité.

On note que $Dom(\bar{B}) = C(I,\ \mathbb{R}^n)$. En effet puisque B a pour domaine $\mathbb{R}^n$, B est localement borné, et en vertu de la proposition 1.4.3, B est s.c.s., à valeurs convexes, fermées, bornées. Si $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $B \circ x\ : I \to 2^{\mathbb{R}^n}$ est s.c.s. et donc est mesurable. Du théorème de sélection 1.3.5, on déduit qu'il existe une fonction mesurable h telle que $h(t) \in B(x(t))$. Il est clair que $h \in L^2(I, \mathbb{R}^n)$ car $B \circ x$ est bornée. Par le lemme 1.4.14, $\bar{B}$ est maximal monotone, donc $\bar{B}$ est s.c.s. à valeurs compactes dans $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ muni de la topologie faible; $\mathcal{N}$, I étant s.c.s. à valeurs compactes, par le théorème 1.3.4, S est s.c.s. □

Posons

$$W_p^{1,2} = \{x \in W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1)\}$$

et définissons

$$L : W_p^{1,2} \to L^2(I, \mathbb{R}^n)$$

par $L(x) = x' + x$ pour tout $x \in W_p^{1,2}$. Avant de donner la preuve du théorème, énonçons le résultat suivant. Le lecteur interessé trouvera une preuve dans **[42]**.

Proposition 5.1.7. *L'application $L : W_p^{1,2} \to L^2(I, \mathbb{R}^n)$ est bijective et $L^{-1} : L^2(I, \mathbb{R}^n) \to W_p^{1,2}$ est continue et est complètement continue.*

Remarque 5.1.8. Par la proposition 5.1.7 et le lemme 1.1.7, $i \circ L^{-1} : L^2(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ est continue et complètement continue ; où $L^2(I, \mathbb{R}^n)$ est muni de la topologie faible, $C(I, \mathbb{R}^n)$ de la topologie forte et i étant l'inclusion compacte de $W^{1,2}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $C(I, \mathbb{R}^n)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1.2. Pour $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$, posons $\tilde{S}(x) = S(\tilde{x})$. L'opérateur $\tilde{S}$ est s.c.s., borné à valeurs convexes, fermées, non vides et $i \circ L^{-1}$ est complètement continue. Par le théorème 1.3.2, $V = i \circ L^{-1} \circ \tilde{S}$ est s.c.s., compacte et à valeurs convexes, compactes. Par le théorème de Kakutani 1.3.6, V a au moins un point fixe x qui est solution de $(\hat{*})_1$. Par la remarque 5.1.3, $x \in T(v, M)$, donc x est une solution du problème $(*)_1$. □

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons traité de la multiplicité des solutions des systèmes d'équations différentielles, de l'existence d'une solution des inclusions différentielles du second ordre où le terme multivoque est un opérateur maximal monotone et des inclusions différentielles du premier ordre où un terme est un opérateur maximal monotone multivoque et l'autre terme est un opérateur multivoque, compact et semi-continu supérieurement.

La multiplicité de solutions des systèmes d'équations différentielles est un sujet peu traité à cause de la difficulté du problème. Par contre on trouve de nombreux résultats dans le cas des équations différentielles. L'étude des solutions des systèmes d'équations différentielles impose la connaissance du nombre minimal de solutions. En introduisant la notion de tube-solution strict, nous avons pu obtenir les premiers résultats significatifs de multiplicité pour les systèmes d'équations différentielles. Nous pouvons espérer que plusieurs autres résultats de multiplicités pourront être établis dans le futur. Il serait par exemple intéressant de généraliser à des systèmes, les résultats de multiplicité pour les équations différentielles obtenus par El Khattabi et Goudreau respectivement dans leurs thèses de doctorat et mémoire de maîtrise. Ces équations étant largement utilisées en biologie et en physique.

En introduisant la notion de tube-solution pour les inclusions différentielles où le terme multivoque est un oppérateur maximal monotone, nous avons généralisé considérablement la condition généralement imposée dans la littérature. Les résultats trouvés aux chapitres quatre et cinq s'appliquent à un plus grand nombre d'inclusions différentielles.

Il serait maintenant intéressant de définir la notion de tube-solution strict pour les inclusions différentielles et établir des résultats de multiplicité pour les inclusions différentielles en dimension supérieure à un.

Au chapitre quatre, nous avons abordé le problème d'existence de solution de l'inclusion différentielle $(*)_B$ avec f univoque ; nous examinerions aussi avec profit le cas où f est multivoque et le cas quasilinéaire étudié par Bader et Papageorgiou [**3**].

Dans le chapitre cinq, la considération du cas où F est semi-continue inférieurement est une avenue possible.

Nous pourrions enfin aborder le problème de multiplicité pour les inclusions $(*)_B$ et $(*)_1$ en définissant des notions de tube-solutions stricts pour $(*)_B$ et $(*)_1$.

Notons enfin que la condition $\int_c^\infty \frac{s\,ds}{\phi(s)+s} = \infty$, introduite dans nos résultats aux chapitres trois et quatre est moins générale que celle rencontrée dans la littérature $\int_c^\infty \frac{s\,ds}{\phi(s)} = \infty$. Mais elle devient équivalente si $s \leq \phi(s) \quad$ p.p. $s \in I$. Des résultats avec cette condition plus générale pourraient être obtenus en utilisant la théorie des fonctions multivoques comme Frigon l'a fait dans [**27**].

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. R. Aftabizadeh et N. H. Pavel, *Boundary value problems for second order differential equations and a convex problem of Bolza,* Differential Integral Equations **2** (1989), 495-509.

[2] J. P. Aubin et A. Cellina, *Differential inclusions,* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[3] R. Bader et N. Papageorgiou, *Nonlinear multivalued boundary value problems,* Discuss. Math. Diff. Incl. Control Optim. **21** (2001), 127-148.

[4] C. Baiocchi et A. Pazy, *Variational and quasivariational inequalities,* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[5] V. Barutello, A. Capietto et P. Habets, *Existence and multiplicity of positive solutions for a Dirichlet boundary value problem in* $\mathbb{R}^2$, Adv. Nonlinear Stud. **2** (2002), 263-278.

[6] J. W. Bebernes et Kd'eventuelles. Schmitt, *Periodic boundry value problems for systems of second order differential equations,* J. Differential Equations **13** (1973), 32-47.

[7] P. Benilan et H. Brezis, *Solution faibles d'équations d'évolution dans les espaces de Hilbert,* Ann. Int. Fourier (Grenoble) **22** (1972), 311-329.

[8] S. R. Bernfeld et V. Lakshmikantham, *An introduction to nonlinear boundary value problems,* Academic Press Inc., New York, 1974.

[9] G. Yu Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Myshkis, et V. V. Obukhowskii, *Multivalued mappings,* Itogi Nauki i Tekhniki, ser. Mat. Anal. **19** (1982), 127-230 (Russe) ; traduction anglaise : J. Soviet Math. **24** (1982), 719-791.

[10] d'eventuelles H. BREZIS, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1973.

[11] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications,* Masson, Paris 1983.

[12] H. BREZIS, *Équations d'évolution du second ordre associées à des opérateurs monotones,* Israel J. Math. **12** (1972), 51-60.

[13] H. BREZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilatérales dépendant du temps,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **274** (1972), 310-312.

[14] A. CAPIETTO ET W. DAMBROSIO, *Multiplicity results for systems of superlinear second order equations,* J. Math. Anal. Appl. **248** (2000), 532-548.

[15] A. CAPIETTO ET F. DALBONO, *Multiplicity results for systems of asymptotically linear second order equations,* Adv. Nonlinear Stud. **2** (2002), 325-356.

[16] C. DE COSTER ET P. HABETS, *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : Clasical and recent results.* Non-linear analysis and boundary value problems for ordinary differential equations (Udine), 1-78, CISM Courses and Lectures, **371**, Springer, Vienna, 1996.

[17] M. C. DELFOUR ET J. P. ZOLÉSIO, *Shapes and geometries. Analysis, differential calculus, and optimization,* Advances in Design and Control, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2001.

[18] K. DEIMLING, *Nonlinear functional analysis,* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.

[19] G. DINCA ET L. SANCHEZ, *Multiple solutions of boundary value problems : an elementary approach via the shooting method,* NoDEA Nonlinear Differential Equation Appl. **1** (1994), 163-178.

[20] N. EL KHATTABI, *Existence et multiplicité de solutions périodiques au sens de Carathéodory pour des équations différentielles nonlinéaires,* Thèse de Doctorat, Université de Montréal, 1993.

[21] L. H. ERBE ET K. SCHMITT, *On solvability of boundary value problems for systems of differential equations,* Z. Angew. Math. Phys. **38** (1987), 184-192.

[22] L. H. ERBE ET PALAMIDES, *Boundary value problems for second order differential systems,* J. Math. Appl. **127** (1987), 80-92.

[23] L. C. EVANS ET R. F. GARIEPY, *Measure theory and the properties of functions,* CRC Press, Boca Raton, 1992.

[24] C. FABRY ET P. HABET, *The Picard boundary value problem for second order vector differential equations,* J. Differential Equations **42** (1981), 186-198.

[25] C. FABRY, J. MAWHIN ET M. N. NKASHAMA, *A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equation,* Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 173-180.

[26] M. FRIGON, *Boundary and periodic value problems for systems of nonlinear second order differential equations,* Topol. Methods Nonlinear Anal. **1** (1993), 259-274.

[27] M. FRIGON, *Boundary and periodic value problems for systems of differential equations under Bernstein-Nagumo growth condition,* Differential Integral Equations **8** (1995), 1789-1849.

[28] M. FRIGON, *Application de la théorie de la transversalité topologique à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires,* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **296** (1990),1-75.

[29] M. FRIGON, *Théorèmes d'existence de solutions d'inclusions différentielles,* Topological methods in differential equation and inclusions, 51-87, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci. **472**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.

[30] M. FRIGON ET A. GRANAS, ET Z. GUENNOUN, *Sur l'intervalle d'existence de solutions pour les inclusions différentielles,* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **310** (1990), 819-822.

[31] R. GAINES ET J. MAWHIN, *Coincidence degree and nonlinear differential equation,* Lecture Notes in Math. **568**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[32] L. GASIŃSKI ET N. S. PAPAGEORGIOU, *On the existence of multiple periodic solutions for equation driven by the p-Laplacian and with a non-smooth potential,* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **46** (2003), 229-249.

[33] K. GOUDREAU, *Existence et mutiplicité de solutions d'équations différentielles nonlinéaires et non continues,* Mémoire de Maîtrise, Université de Montréal, 1996.

[34] A. GRANAS ET J. DUGUNDJI, *Fixed point theory,* Springer, New York, 2003.

[35] A. Granas, R. B. Guenther, et J. W. Lee, *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations,* Dissertationes Math.(Rozprawy Mat.) **244** (1985), 1-128.

[36] A. Granas, R. B. Guenther, et J. W. Lee, *Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems,* J. Math. Pures Appl. **70** (1991), 153-196.

[37] N. Halidias et N. S. Papageorgiou, *Nonlinear boundary value problems with maximal monotone terms,* Aequationes Mathematicae **59** (2000), 93-107.

[38] P. Hartman, *On boundary value problems for systems of ordinary nonlinear second order differential equations,* Trans. Amer. Math. Soc. **96** (1960), 493-509.

[39] J. Henderson et J. B. Thompson, *Existence of multiple solutions for second order boundary value problems,* J. Differential Equations **166** (2000), 443-454.

[40] S. Hu et N. S. Papageorgiou, *Handbook of multivalued analysis, Vol. I. Theory,* Kluwer, Dordrecht, 1997.

[41] S. Hu et N. S Papageorgiou, *Periodic solutions for nonlinear differential equations with maximal monotone terms,* Nonlinear Anal. **52** (2003), 1317-1330.

[42] S. Hu, D. A. Kandilakis et N. S. Papageorgiou, *Periodic solutions for nonconvex differential inclusions,* Proc. Amer. Math. Soc **127** (1999), 89-94.

[43] D. A. Kandilakis et N.S. Papageorgiou, *Evolution inclusions of the subdifferential type depending on a parameter,* Comment. Math. Carolin. **33** (1992), 437-449.

[44] A. Lasota et J. A. Yorke, *Existence of solution of two-point boundary value problems for nonlinear systems,* J. Differential Equations **11** (1972), 509-518.

[45] J. Mawhin et M. Willem, *Critical point theory and Hamiltonian systems,* Springer-Verlag, New York, 1989.

[46] I. P. Natanson, *The theory of functions of real variable,* Ungar, New-York 1955.

[47] P. K. PALAMIDES, *Boundary and periodic value problems for differential systems via Sperner's Lemma,* Math. Japon. **34** (1989), 89-110.

[48] I. RACHUNKOVÀ, *Multiplicity results for four-point boundary value problems,* Nonlinear Anal. **18** (1992), 497-505.

[49] C. ROBELO ET F. ZANOLIN, *Existence and multiplicity for O.D.E. with non-linear condition,* Differential Equations Dynam. Systems **3** (1995), 383-396.

[50] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications, fixed-point theorems,* vol. 1, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1986.