2m11.3149.2

V.008
11494706

Université de Montréal

# SYSTÈMES INTÉGRABLES ET SUPERINTÉGRABLES CLASSIQUES ET QUANTIQUES AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

par

Josée Bérubé

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

août 2003

Faculté des études supérieures
Grade conféré
à compter du
2004 JAN. 08
Université de Montréal

© Josée Bérubé, 2003

QA
3
U54
2004
v.008

Université de Montréal

Direction des bibliothèques

## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

# SYSTÈMES INTÉGRABLES ET SUPERINTÉGRABLES CLASSIQUES ET QUANTIQUES AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

présenté par

**Josée Bérubé**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Véronique Hussin*
(président-rapporteur)

*Pavel Winternitz*
(directeur de recherche)

*Yvan Saint-Aubin*
(membre du jury)

Mémoire accepté le:

# SOMMAIRE

De façon générale, le présent travail porte sur la classification des systèmes mécaniques intégrables et superintégrables. Nous nous intéressons particulièrement aux systèmes à deux degrés de liberté avec champs magnétiques, classiques et quantiques, dont les intégrales du mouvement sont des polynômes dans les vitesses.

En premier lieu, nous définissons les propriétés d'intégrabilité et de superintégrabilité au sens de Liouville. Nous présentons ensuite une contribution originale à la recherche des systèmes intégrables et superintégrables dont les intégrales sont des polynômes de degré un ou deux dans les vitesses. Nous identifions les conditions qui garantissent l'existence de constantes du mouvement linéaires et quadratiques en mécanique quantique. Le cas des systèmes intégrables avec intégrale linéaire est complètement résolu, tandis que nous nous concentrons précisément aux formes cartésienne et polaire des intégrales quadratiques. En outre, nous identifions les systèmes superintégrables parmi tous ces systèmes, tant en mécanique classique qu'en mécanique quantique.

Mots-clés : intégrabilité, superintégrabilité, champ magnétique, potentiel vecteur, mécanique classique, mécanique quantique, groupes de symétries, algèbres de Lie.

# SUMMARY

This work is devoted to the classification of integrable and superintegrable mechanical systems. We are interested in two-dimensional classical and quantum systems with magnetic fields that possess integrals of motion which are polynomials in the velocities.

We first define the properties of integrability and superintegrability in the Liouville sense. Next, we present an original contribution to the search for integrable and superintegrable systems that possess integrals which are first and second-order polynomials in the velocities. We identify the conditions that ensure the existence of linear and quadratic constants of motion in quantum mechanics. The case of integrable systems with first order integrals is completely solved. We then concentrate on the cartesian and polar forms of the quadratic integrals. We finally identify superintegrable systems among the integrable ones, both in classical and quantum mechanics.

Mots-clés : integrability, superintegrability, magnetic field, velocity-dependent potential, classical mechanics, quantum mechanics, symmetry groups, Lie algebras.

# TABLE DES MATIÈRES

*"In mathematics, you don't understand things, you just get used to them."*

John Von Neumann

# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, le professeur Pavel Winternitz, qui a été l'initiateur de ce travail. Il fait preuve d'une grande expérience et d'un sens de l'intuition remarquable qui suscitent mon admiration. Les connaissances que j'ai acquises au cours des deux années sous sa direction sont pour moi inestimables.

Je ne pourrais passer sous silence le dynamisme et le professionnalisme du personnel du Centre de Recherches Mathématiques, dont le travail contribue grandement à fournir une ambiance propice à la recherche. J'ai aussi beaucoup apprécié leur accueil lors de mon arrivée à l'université de Montréal.

J'aimerais ensuite remercier les membres du jury pour le temps consacré à l'évaluation de ce travail.

Enfin, je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance envers mon conjoint, ma famille et mes amis pour leurs encouragements, et tout simplement pour leur présence à mes côtés. En particulier, je ne peux manquer de souligner l'appui constant de mon père et de ma mère, qui croient en moi depuis toujours et qui m'ont surnommé il y a déjà longtemps "Maître quatre-et-pouce", mais ça, c'est une longue histoire...

# INTRODUCTION

L'étude des systèmes intégrables et superintégrables ne date pas d'hier. Lors du développement de la théorie de la mécanique classique au cours des dix-huitième et dix-neuvième siècles, on croyait que tous les systèmes mécaniques étaient intégrables. C'est à la fin du dix-neuvième siècle que l'on commence à entrevoir l'existence de systèmes non-intégrables. On réalisera par la suite que l'intégrabilité est en fait une propriété rare et que la superintégrabilité l'est encore plus.

Une recherche systématique des systèmes intégrables et superintégrables débute alors. La principale motivation de cette quête est fournie par le théorème de Liouville, qui stipule que les systèmes intégrables ont des comportements très réguliers. Parmi les techniques servant à identifier ceux-ci, on retrouve celle qui consiste à faire l'hypothèse que les intégrales du mouvement sont des polynômes dans les vitesses. Dans un article qu'il publie en 1901 [**D**], G. Darboux utilise cette méthode pour classifier les systèmes à deux degrés de liberté avec potentiel indépendant des vitesses dont l'intégrale est quadratique, mais sa solution est incomplète.

À la fin des années soixante, des chercheurs parmi lesquels on trouve P. Winternitz, J. Smorodinsky et B. Dorizzi, généralisent les notions d'intégrabilité et de superintégrabilité aux systèmes mécaniques quantiques. Les systèmes à deux degrés de liberté possédant un potentiel indépendant des vitesses et une intégrale linéaire ou quadratique sont identifiés, autant en mécanique classique qu'en mécanique quantique. On constate alors que les systèmes intégrables et superintégrables classiques et quantiques de ce type coïncident toujours. (Voir [**FMSUW**],

**[DGR]** et **[MSVW]**.) En outre, l'existence d'une intégrale d'ordre deux est associée à la séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi ou de Schrödinger. Beaucoup plus récemment, on s'est intéressé à ces mêmes systèmes, mais en recherchant cette fois des intégrales d'ordre trois. (Voir par exemple **[GW]** et **[H1]**.) Des différences se sont alors révélées entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Des résultats partiels sont aussi obtenus pour des intégrales d'ordre supérieur.

Dans un article publié en 1985 **[DGRW]**, B. Dorizzi, B. Grammaticos, A. Ramani et P. Winternitz abordent le cas des systèmes intégrables classiques à deux degrés de liberté dont le potentiel dépend des vitesses, c'est-à-dire lorsqu'il s'y trouve un champ magnétique. Ils identifient les conditions qui garantissent l'existence d'une intégrale linéaire, puis d'une intégrale quadratique. Les deux systèmes intégrables avec intégrale linéaire sont identifiés et le problème de l'intégrale quadratique est séparé en plusieurs cas à l'aide de transformations euclidiennes du plan, car il s'avère être beaucoup plus difficile à résoudre. En effet, l'intégrale est réduite à l'une des quatre formes réelles standard que l'on qualifie de cartésienne, polaire, parabolique ou elliptique pour des raisons que nous expliquerons à la fin du chapitre 1. Le cas des systèmes intégrables possédant une intégrale de forme cartésienne est étudié. Nous le complétons dans ce travail.

Ce mémoire est consacré à la version quantique des systèmes mécaniques intégrables à deux degrés de liberté avec champ magnétique. Dans le premier chapitre, nous établissons des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une intégrale linéaire dans les vitesses, puis d'une intégrale quadratique. Le cas d'une intégrale d'ordre un est complètement résolu et nous identifions ensuite les systèmes superintégrables parmi ceux-ci, autant en mécanique classique qu'en mécanique quantique. Dans les chapitres 2 et 4, nous procédons à une recherche des systèmes intégrables classiques et quantiques possédant une intégrale quadratique de forme cartésienne et polaire respectivement. Les chapitres 3 et 5 sont quant à eux consacrés à l'identification des systèmes superintégrables parmi ces derniers systèmes.

# Chapitre 1

## PRÉSENTATION DU SUJET

### 1.1. Systèmes intégrables et superintégrables

Dans la formulation de Hamilton de la mécanique classique, un système mécanique est décrit par son Hamiltonien. En particulier, les systèmes composés d'une particule de charge électrique $e$ et de masse $m$ se déplaçant dans un champ magnétique ont un Hamiltonien de la forme

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}[p_i - eA_i(\vec{q})]^2 + eU(\vec{q}), \tag{1.1.1}$$

où $U$ et $\vec{A} = (A_1, ..., A_n)$ sont les potentiels scalaire et vecteur qui décrivent le champ magnétique. Les vecteurs $\vec{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ et $\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ($n$ est le nombre de degrés de liberté) sont les coordonnées et les moments qui forment l'espace des phases dans lequel sont considérées les $2n$ équations du mouvement, soit

$$\dot{q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{1.1.2}$$

Ce Hamiltonien et les équations du mouvement qui lui sont associées seront utilisés tout au long de ce travail. Comme $H$ ne dépend pas explicitement du temps, nous avons

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p_i} = 0. \tag{1.1.3}$$

Ainsi, le Hamiltonien fera toujours partie des intégrales du mouvement des systèmes étudiés dans ce mémoire. Définissons maintenant les notions d'intégrabilité et de superintégrabilité en mécanique classique et en mécanique quantique.

### 1.1.1. Mécanique classique

Il existe en mécanique classique un puissant théorème qui stipule qu'un système à $n$ degrés de liberté qui possède $n$ intégrales du mouvement $C_i = C_i(\vec{q}, \vec{p})$ en involution et indépendantes entre elles a les propriétés suivantes :

*(i)* $M = \{(\vec{q}, \vec{p}), C_i(\vec{q}, \vec{p}) = k_i\}$ est une variété invariante sous le flot. (Les $k_i$ sont des constantes.)

*(ii)* Si $M$ est compacte et connexe, alors elle est difféomorphe à un tore de dimension n.

*(iii)* Le mouvement sur $M$ est quasi-périodique, c'est-à-dire une combinaison de n mouvement périodiques.

*(iv)* Les équations du mouvement sont intégrables par quadratures, c'est-à-dire en utilisant des primitives de fonctions connues.

Un tel système exhibe donc un comportement très régulier et facilement prévisible sur de longues périodes de temps. Ce résultat important est le théorème de Liouville, dont les hypothèses correspondent à la définition de l'intégrabilité classique.

**Définition 1.1.1** (Intégrabilité classique). *Un système mécanique à $n$ degrés de liberté est dit intégrable s'il existe $n$ fonctions $C_i = C_i(\vec{q}, \vec{p})$ (où $C_1 = H$) bien définies telles que*

$$\begin{aligned} \{H, C_i\} &= 0, \\ \{C_i, C_j\} &= 0, \\ rang(\tfrac{\partial(C_1,\ldots,C_n)}{\partial(q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n)}) &= n, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

*où*

$$\{X, Y\} \equiv \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i}) \tag{1.1.5}$$

*est le crochet de Poisson et i,j=1, ..., n.*

Le premier item de la définition indique que les $n$ fonctions $C_i$ sont des constantes du mouvement :

$$\{H, C_i\} = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial C_i}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial C_i}{\partial q_j}) = -\sum_{j=1}^{n} (\dot{p}_j \frac{\partial C_i}{\partial p_j} + \dot{q}_j \frac{\partial C_i}{\partial q_j}) = -\frac{dC_i}{dt} = 0. \tag{1.1.6}$$

Le deuxième et le troisième traduisent respectivement les propriétés d'involution et d'indépendance fonctionnelle. L'expression "bien définies" figurant dans la définition et qui sera utilisée ultérieurement signifie que les intégrales du mouvement doivent être des fonctions définies sur tout l'espace des phases, ou du moins sur un ouvert fini de l'espace des phases. En effet, il existe des théorèmes d'existence et d'unicité qui garantissent que l'on peut toujours, pour des conditions initiales données, trouver $2n - 1$ constantes du mouvement définies localement dans un voissinage de ces conditions initiales. Ainsi, la définition de l'intégrabilité que nous venons de donner exige que les intégrales soient globales plutôt que locales.

Ce théorème de la mécanique classique motive donc l'étude des systèmes intégrables classiques, puisqu'ils possèdent de bonnes propriétés physiques. L'étude de phénomènes complexes est simplifiée si elle est restreinte aux systèmes intégrables et permet donc une meilleure compréhension de la physique en général, mais aussi des autres systèmes mécaniques, comme par exemple les systèmes chaotiques.

Il est possible d'aller plus loin encore dans la recherche de systèmes mécaniques dont le comportement est très régulier. Pour ce faire, nous introduisons maintenant la notion de superintégrabilité. En effet, un système à $n$ degrés de liberté peut très bien posséder plus de $n$ intégrales du mouvement. (Le maximum est de $2n-1$ et on parle alors de superintégrabilité maximale.) Il est donc très tentant de conjecturer qu'un système qui a plus de constantes du mouvement que de degrés de liberté aura un comportement encore plus régulier qu'un système intégrable. Donnons en exemple le potentiel de Kepler $V=\alpha r^{-1}$ et l'oscillateur harmonique $V=\omega^2 r^2$, qui sont certainement les systèmes maximalement superintégrables les plus connus. Le théorème de Bertrand [**B**] affirme que ce sont les seuls potentiels à symétrie sphérique dans lesquels toutes les trajectoires finies sont fermées. Ce résultat est lié de très près à la superintégrabilité de ces deux systèmes et illustre bien l'importance de l'étude de cette propriété.

**Définition 1.1.2** (Superintégrabilité classique). *Un système à $n$ degrés de liberté est dit superintégrable s'il possède plus de $n$ intégrales du mouvement bien définies et fonctionnellement indépendantes parmi lesquelles il est possible de former un ensemble de cardinalité $n$ en involution.*

### 1.1.2. Mécanique quantique

Avant de définir les notions d'intégrabilité et de superintégrabilité quantiques, il importe de décrire brièvement les liens entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Mentionnons qu'il s'agit ici d'une approche très sommaire qui s'en tient au minimum requis pour la compréhension de ce mémoire et que la théorie complète se trouve dans les volumes d'introduction à la mécanique quantique. (Voir [**CDL**].)

La mécanique classique est une bonne approximation de la mécanique quantique pour les phénomènes d'échelle macroscopique. À l'intérieur du modèle mathématique quantique, cette approximation classique s'effectue en faisant tendre la constante de Planck, notée par $\hbar$, vers zéro. En effet, les prédictions des théories classique et quantique coïncident alors.

À l'inverse, lorsqu'un problème est formulé dans le cadre de la mécanique classique, il est possible d'en obtenir la version quantique en utilisant des règles dites de quantification, qui sont construites de manière à satisfaire aux différents postulats de la mécanique quantique. La première vise à transformer les grandeurs physiques classiques en opérateurs quantiques appelés observables :

$$\vec{p} \longrightarrow -i\hbar\partial_{\vec{q}}. \tag{1.1.7}$$

Il faut ensuite lever l'ambiguïté qui survient alors et qui est en lien avec l'ordre des termes. En effet, si par exemple la quantité $F(x_1)p_1$ peut aussi s'écrire $p_1F(x_1)$ dans le modèle classique, une fois la règle (1.1.7) appliquée, il devient impératif de choisir d'écrire $-i\hbar F(x_1)\partial_{x_1}$ ou $-i\hbar\partial_{x_1}F(x_1) = -i\hbar(F(x_1)\partial_{x_1} + F_{x_1}(x_1))$, puisque ces quantités ne sont pas égales. Pour régler ce problème, nous appliquons la formule de symétrisation suivante, qui est en quelque sorte une moyenne entre les deux possibilités :

$$ab \longrightarrow \frac{1}{2}(AB + BA) \tag{1.1.8}$$

où $a$ et $b$ représentent deux grandeurs physiques classiques, et $A$ et $B$ les deux opérateurs quantiques obtenus après avoir appliqué (1.1.7) sur $a$ et $b$ respectivement. On appele cette opération l'anti-commutateur de deux opérateurs. Avec ces règles de quantification, nous pourrons passer du modèle classique au modèle quantique dans la suite de ce travail.

Revenons maintenant à l'objet de notre étude en mentionnant d'abord qu'il n'y a pas d'analogue quantique au théorème de Liouville. Or, comme la définition même de l'intégrabilité classique en découle, la notion d'intégrabilité quantique, quant à elle, consiste donc en une transposition naturelle de la définition classique. Cela peut paraître étrange a priori, puisque les concepts de la mécanique quantique, en tant que théorie plus générale, ne devraient pas avoir à reposer sur ceux de la mécanique classique. Cependant, faute de "théorème de Liouville quantique", nous pouvons conjecturer que les systèmes intégrables et superintégrables classiques sont des approximations de systèmes quantiques qui possèdent effectivement des propriétés de régularité intéressantes et qu'en "quantifiant" les hypothèses du théorème de Liouville, nous obtiendrons de tels systèmes. Qui sait, une bonne compréhension et une classification de ces systèmes mèneront peut-être un jour à la découverte du "théorème de Liouville quantique".

**Définition 1.1.3** (Intégrabilité quantique). *Un système mécanique quantique à $n$ degrés de liberté est dit intégrable s'il possède $n$ intégrales du mouvement $C_i$ (où $C_1 = H$) bien définies, en involution et indépendantes entre elles, c'est-à-dire*

$$[C_i, C_j] = 0, \tag{1.1.9}$$

*où $[X, Y] \equiv XY - YX$ est le commutateur et i,j=1, ..., n.*

Si l'analogie entre le crochet de Poisson et le commutateur est naturelle, un problème se pose cependant pour ce qui est du critère d'indépendance entre les intégrales. En effet, nous ne pouvons plus recourir au jacobien comme dans le cas classique. De plus, le commutateur induisant lui-même une relation polynomiale entre deux opérateurs, le choix d'une autre définition d'indépendance n'est pas facile. Parmi les chercheurs s'intéressant l'intégrabilité, il en est qui ont étudié cette question, mais aucune conclusion définitive n'est encore acceptée. (Voir par exemple **[HG]** et **[W]**.) De plus, il a été démontré que des opérateurs qui commutent entre eux peuvent être utiles même si leur limite classique sont fonctionnellement dépendantes. (Voir **[H1]**, **[H2]** et **[HG]**.) Dans ce mémoire, nous considérerons que des opérateurs sont dépendants s'il est possible d'exprimer l'un d'eux comme un polynôme dans les autres.

**Définition 1.1.4** (Superintégrabilité quantique). *Un système mécanique quantique à $n$ degrés de liberté est dit superintégrable s'il possède plus de $n$ intégrales du mouvement bien définies et indépendantes parmi lesquelles il est possible de former un ensemble de cardinalité $n$ en involution.*

### 1.1.3. Recherche et classification des systèmes intégrables

Comme nous l'avons déjà mentionné, les raisons qui motivent l'étude des systèmes intégrables vont dans le sens d'une meilleure compréhension de certains phénomènes physiques comme le chaos. Une question se pose maintenant : comment identifie-t-on les systèmes intégrables ? Dans le cadre de ces travaux, comme dans bien d'autres sur le sujet, nous effectuons une recherche systèmatique des intégrales du mouvement pour un Hamiltonien donné en spécifiant qu'elles sont des polynômes dans les vitesses. Évidemment, nous ne visons ainsi qu'un ensemble bien particulier de systèmes intégrables, puisqu'une intégrale peut être a priori n'importe quelle fonction continue et différentiable des coordonnées et des moments. La méthode n'en demeure pas moins très puissante pour une intégrale polynomiale de degré assez bas.

## 1.2. Formulation du problème

Ce mémoire porte sur les systèmes intégrables et superintégrables avec champ magnétique à deux degrés de liberté. Le Hamiltonien classique qui sera donc considéré tout au long de ce travail est celui de l'équation (1.1.1) avec $n = 2$, qui peut s'écrire sous la forme

$$H_{class} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + A(x,y)p_x + B(x,y)p_y + V(x,y), \tag{1.2.1}$$

où le potentiel vecteur est $\vec{A} = (A, B)$. La charge $q$ et la masse $m$ de la particule sont considérées égales à un sans perte de généralité, puisque ces paramètres n'ont pas d'influence sur l'intégrablilité d'un système. Nous avons aussi adopté la notation $\vec{q} = (q_1, q_2) = (x, y)$ et $\vec{p} = (p_1, p_2) = (p_x, p_y)$. Les équations du mouvement (1.1.2) associées à ce Hamiltonien sont donc

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_x} = p_x + A, \\
\dot{y} &= \tfrac{\partial H}{\partial p_y} = p_y + B, \\
\dot{p}_x &= -\tfrac{\partial H}{\partial x} = -V_x - A_x p_x - B_x p_y, \\
\dot{p}_y &= -\tfrac{\partial H}{\partial y} = -V_y - A_y p_x - B_y p_y.
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Nous pouvons éliminer les moments de ces équations pour obtenir un système plus concis en dérivant d'abord les deux premières par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{p}_x + A_x\dot{x} + A_y\dot{y}, \\ \ddot{y} &= \dot{p}_y + B_x\dot{x} + B_y\dot{y}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

Nous pouvons ensuite remplacer $\dot{p}_x$ et $\dot{p}_y$ par les troisième et quatrième équations de (1.2.2) :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -V_x - A_xp_x - B_xp_y + A_x\dot{x} + A_y\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -V_y - A_yp_x - B_yp_y + B_x\dot{x} + B_y\dot{y}, \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

puis, sachant que $p_x = \dot{x} - A$ et $p_y = \dot{y} - B$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -V_x + AA_x + BB_x + \dot{y}(A_y - B_x) = -W_x + \Omega\dot{y}, \\ \ddot{y} &= -V_y + AA_y + BB_y - \dot{x}(A_y - B_x) = -W_y - \Omega\dot{x}, \\ H &= \tfrac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + W, \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

où

$$\Omega = A_y - B_x \tag{1.2.6}$$

est le champ magnétique et

$$W = V - \frac{1}{2}(A^2 + B^2). \tag{1.2.7}$$

Mentionnons qu'une fois les fonctions $\Omega$ et $W$ identifiées, il est possible de construire $\vec{\Lambda} = (A, B)$ et $V$ à une transformation de jauge près, soit

$$\begin{bmatrix} V \\ \vec{\Lambda} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} V + (\vec{\Lambda}, grad(\phi)) + \frac{1}{2}(grad(\phi))^2 \\ \vec{\Lambda} + grad(\phi) \end{bmatrix}, \tag{1.2.8}$$

où $\phi = \phi(x, y)$ est une fonction arbitraire des coordonnées.

La technique de quantification (1.1.7) s'écrit maintenant

$$p_x \longrightarrow -i\hbar\partial_x, \quad p_y \longrightarrow -i\hbar\partial_y. \tag{1.2.9}$$

En appliquant cette transformation et la règle de symétrisation (1.1.8) sur le Hamiltonien (1.2.1), nous obtenons

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) - i\hbar(A\partial_x + B\partial_y) - \frac{i\hbar}{2}(A_x + B_y) + V. \tag{1.2.10}$$

C'est ce Hamiltonien qui sera utilisé dans toute la suite de ce mémoire.

### 1.2.1. Intégrale linéaire

Nous nous intéressons dans ce travail à la classification des systèmes intégrables et superintégrables décrits par le Hamiltonien $H$ et dont les constantes du mouvement sont sous la forme de polynômes de degré un ou deux dans les vitesses. Nous commençons donc par traiter le cas où l'intégrale est linéaire, c'est-à-dire où

$$C_{class} = f_0(x,y)\dot{x} + f_1(x,y)\dot{y} + m(x,y). \tag{1.2.11}$$

La version classique de ce problème, où nous posons alors $dC_{class}/dt = 0$, a déjà été traitée dans [**DGRW**]. La première contribution originale de ce mémoire consiste à en étudier la version quantique. Après avoir écrit l'intégrale sous la forme

$$C_{class} = f_0(p_x + A) + f_1(p_y + B) + m \tag{1.2.12}$$

à l'aide des deux premières équations de (1.2.2), nous appliquons les règles de quantification (1.1.7) et (1.1.8) pour obtenir

$$\begin{aligned} C &= -\tfrac{i\hbar}{2}(f_0\partial_x + \partial_x f_0) + f_0 A - \tfrac{i\hbar}{2}(f_1\partial_y + \partial_y f_1) + f_1 B + m, \\ C &= -i\hbar(f_0\partial_x + f_1\partial_y) - \tfrac{i\hbar}{2}(f_{0x} + f_{1y}) + f_0 A + f_1 B + m. \end{aligned} \tag{1.2.13}$$

Les conditions qui garantissent l'intégrabilité quantique sont ensuite obtenues en exigeant que le commutateur de $H$ et $C$ s'annule, tel que l'indique la définition. Nous obtenons six équations correspondant aux coefficients des différentes puissances de $\partial_x$ et $\partial_y$, soit

$$\begin{aligned} f_{0x} &= 0, \\ f_{1y} &= 0, \\ f_{0y} + f_{1x} &= 0, \\ f_1\Omega - m_x &= 0, \\ f_0\Omega + m_y &= 0, \\ f_0 W_x + f_1 W_y &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Il s'agit du même système d'équations que celui obtenu dans l'article **[DGRW]**, où le cas classique a été étudié. Les conditions à remplir pour garantir l'existence d'une intégrale linéaire sont donc les mêmes en mécanique classique et en mécanique quantique. Ainsi, nous écrirons les intégrales trouvées sous leur forme classique seulement pour alléger le texte, puisque les solutions pour $f_0$, $f_1$ et $m$ seront les mêmes. (La forme quantique pourra alors être obtenue à l'aide de la formule (1.2.13).)

La résolution du système (1.2.14) est refaite ici. Des trois premières équations, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha y + \beta, \\ f_1 &= -\alpha x + \gamma. \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Ainsi, l'intégrale cherchée prend la forme

$$C_{class} = -\alpha(x\dot{y} - y\dot{x}) + \beta\dot{x} + \gamma\dot{y} + m. \tag{1.2.16}$$

La condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$ issue des quatrième et cinquième équations de (1.2.14) est

$$f_0\Omega_x + f_1\Omega_y = 0. \tag{1.2.17}$$

Nous pouvons ensuite simplifier le problème à résoudre en effectuant des translations bien choisies, sauf dans le cas où $\alpha = 0$.

**Premier cas :** $\alpha = 0$

Nous avons alors

$$f_0 = \beta, \quad f_1 = \gamma. \tag{1.2.18}$$

La condition de compatibilité (1.2.17) et la dernière équation du système (1.2.14) deviennent

$$\begin{aligned} \beta\Omega_x + \gamma\Omega_y &= 0, \\ \beta W_x + \gamma W_y &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Ces deux équations se résolvent par la méthode des caractéristiques :

$$\beta dy = \gamma dx \tag{1.2.20}$$

et cela nous mène à la solution $\Omega = \Omega(\xi)$ et $W = W(\xi)$, qui sont deux fonctions de $\xi = \gamma x - \beta y$ arbitraires et indépendantes. Il reste alors deux équations pour $m$, soit les quatrième et cinquième équations de (1.2.14) :

$$\begin{aligned} m_x - \gamma\Omega &= 0, \\ m_y + \beta\Omega &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.21}$$

dont la solution est

$$m = m(\xi) = \int \Omega(\xi) d\xi. \tag{1.2.22}$$

L'intégrale est donc

$$C_\xi = \beta\dot{x} + \gamma\dot{y} + \int \Omega(\xi) d\xi. \tag{1.2.23}$$

**Deuxième cas :** $\alpha \neq 0$ **et** $\beta = \gamma = 0$

Dans ce cas, nous avons

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha y, \\ f_1 &= -\alpha x. \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

La condition de compatiblité (1.2.17) et la dernière équation du système (1.2.14) sont alors

$$\begin{aligned} \alpha(y\Omega_x - x\Omega_y) &= 0, \\ \alpha(yW_x - xW_y) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

Comme $\alpha \neq 0$, il faut en fait résoudre

$$\begin{aligned} y\Omega_x - x\Omega_y &= 0, \\ yW_x - xW_y &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

par la méthode des caractéristiques :

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega(\rho), \\ W &= W(\rho), \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

qui sont deux fonctions de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ arbitraires et indépendantes. (Il est à noter que nous aurions pu dès le départ normaliser ce cas en posant $\alpha = 1$.) Il reste ensuite deux équations pour $m$, soit

$$\begin{aligned} m_x + x\Omega &= 0, \\ m_y + y\Omega &= 0, \end{aligned} \tag{1.2.28}$$

dont la solution est

$$m = m(\rho) = -\int \rho\Omega(\rho)d\rho. \tag{1.2.29}$$

L'intégrale est donc

$$C_\rho = -(x\dot{y} - y\dot{x}) - \int \rho\Omega(\rho)d\rho. \tag{1.2.30}$$

Ainsi, nous obtenons que dans le cas classique comme dans le cas quantique, une intégrale du mouvement linéaire dans les vitesses existe si et seulement si le champ magnétique $\Omega$ et le potentiel $W$ sont tous les deux invariants soit sous l'action de translations, soit sous l'action de rotations autour d'un point.

### 1.2.2. Superintégrabilité linéaire

Exigeons maintenant que les deux systèmes intégrables que nous venons d'obtenir possèdent une intégrale supplémentaire, c'est-à-dire qu'ils soient superintégrables. Ceci consiste cette fois en une contribution originale autant dans le cas classique que dans le cas quantique. Nous devons donc résoudre le même système d'équations (1.2.14), mais la tâche est simplifiée par la connaissance des fonctions $\Omega$ et $W$. Nous cherchons ainsi une intégrale supplémentaire de la forme

$$C = f_0\dot{x} + f_1\dot{y} + m, \tag{1.2.31}$$

où $f_0$ et $f_1$ doivent satisfaire aux trois premières équations de (1.2.14), c'est-à-dire $f_0 = a_1 y + a_2$ et $f_1 = -a_1 x + a_3$.

Dans le cas où le champ magnétique et le potentiel sont invariants par rapport aux translations ($\Omega = \Omega(\xi)$, $W = W(\xi)$, $\xi = \gamma x - \beta y$), la condition de compatibilité (1.2.17) et la dernière équation du système (1.2.14) sont

$$\begin{aligned} \Omega_\xi(a_1\gamma y + a_2\gamma + a_1\beta x - a_3\beta) &= 0, \\ W_\xi(a_1\gamma y + a_2\gamma + a_1\beta x - a_3\beta) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

Si nous exigeons que $(a_1\gamma y + a_2\gamma + a_1\beta x - a_3\beta) = 0$, alors soit $\beta = \gamma = 0$, soit $a_1 = a_2\gamma - a_3\beta = 0$. Dans le premier cas, l'intégrale (1.2.23) n'est qu'une constante. Dans le deuxième cas, nous retrouvons exactement l'intégrale $C_\xi$ de l'équation (1.2.23). Le seul espoir d'obtenir une constante du mouvement additionnelle réside donc dans la possibilité d'avoir $\Omega_\xi = W_\xi = 0$, c'est-à-dire si $\Omega$ et $W$ sont constants. Nous y reviendrons bientôt.

Quand le champ magnétique et le potentiel sont invariants par rapport aux rotations autour d'un point, c'est-à-dire $\Omega = \Omega(\rho)$, $W = W(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, la condition de compatibilité (1.2.17) et la dernière équation du sytème sont

$$\begin{aligned} \Omega_\rho(a_2x + a_3y) &= 0, \\ W_\rho(a_2x + a_3y) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

Si $a_2x + a_3y = 0$, c'est-à-dire si $a_2 = a_3 = 0$, nous retrouvons $C_\rho$. Il reste donc la possibilité où $\Omega$ et $W$ sont constants, comme dans le cas précédent. Revenons donc à cette possibilité. Il ne reste alors qu'à résoudre les quatrième et cinquième équations de (1.2.14) pour $m$, à une constante additive près, en posant $\Omega = \Omega_0$ et $W = 0$ (ce qui peut se faire sans perte de généralité, puisqu'il n'apparaît que des dérivées de $W$ dans le système d'équations) :

$$\begin{aligned} m_x &= (-a_1x + a_3)\Omega_0, \\ m_y &= -(a_1y + a_2)\Omega_0, \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

donc

$$m = -\frac{a_1\Omega_0}{2}(x^2+y^2) + \Omega_0(a_3x - a_2y). \tag{1.2.35}$$

L'intégrale cherchée est ainsi

$$C = -a_1(x\dot{y} - y\dot{x}) + a_2\dot{x} + a_3\dot{y} - \frac{a_1\Omega_0}{2}(x^2+y^2) + \Omega_0(a_3x - a_2y), \tag{1.2.36}$$

et il s'agit d'une combinaison linéaire des trois intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= \dot{x} - \Omega_0 y, \\ C_2 &= \dot{y} + \Omega_0 x, \\ C_3 &= x\dot{y} - y\dot{x} + \tfrac{\Omega_0}{2}(x^2+y^2). \end{aligned} \tag{1.2.37}$$

Comme un système à deux degrés de liberté ne peut posséder plus de trois intégrales indépendantes et que le Hamiltonien a déjà été identifié comme une constante du mouvement, celui-ci doit nécessairement pouvoir s'écrire en termes des intégrales $C_1$, $C_2$ et $C_3$. Les fonctions $A(x,y)$, $B(x,y)$ et $V(x,y)$ sont d'abord construites à l'aide de $\Omega = \Omega_0$ et $W = 0$, ainsi que des équations (1.2.6) et (1.2.7), à une transformation de jauge près :

$$\begin{aligned} A(x,y) &= \Omega_0 y, \\ B(x,y) &= 0, \\ V(x,y) &= \tfrac{\Omega_0^2 y^2}{2}. \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Le Hamiltonien du système superintégrable est donc

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \Omega_0 y p_x + \frac{\Omega_0^2 y^2}{2} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{1.2.39}$$

et il peut effectivement être écrit en termes des trois intégrales linéaires (1.2.37) :

$$2H = C_1^2 + C_2^2 - 2\Omega_0 C_3. \tag{1.2.40}$$

Sous forme quantique, les résultats s'énoncent ainsi :

$$\begin{aligned} C_{1q} &= -i\hbar\partial_x, \\ C_{2q} &= -i\hbar\partial_y + \Omega_0 x, \\ C_{3q} &= -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) + \tfrac{\Omega_0}{2}(x^2 - y^2), \\ H_q &= -\tfrac{\hbar}{2}(\partial_x^2 + \partial_y^2) - i\hbar\Omega_0 y\partial_x + \tfrac{\Omega_0^2 y^2}{2}, \end{aligned} \tag{1.2.41}$$

avec $2H_q = C_{1q}^2 + C_{2q}^2 - 2\Omega_0 C_{3q}$.

Ainsi, chaque fois que nous discuterons du système avec champ magnétique et potentiel constants, que ce soit pour la recherche d'intégrales d'ordre deux, comme dans la suite de ce mémoire, ou même celles de degrés supérieurs, toutes ces intégrales, sous forme classique (respectivement quantique), pourront s'écrire comme des polynômes en $C_1$, $C_2$ et $C_3$ (respectivement $C_{1q}$, $C_{2q}$ et $C_{3q}$).

Calculons maintenant les relations de commutations entre $C_1$, $C_2$ et $C_3$ à l'aide du crochet de Poisson pour identifier le groupe de symétries du système super-intégrable, c'est-à-dire le groupe de transformations qui laissent le Hamiltonien invariant :

$$\begin{aligned}\{C_1, C_2\} &= -\Omega_0,\\ \{C_1, C_3\} &= -C_2,\\ \{C_2, C_3\} &= C_1,\\ \{C_i, \Omega_0\} &= 0.\end{aligned} \tag{1.2.42}$$

Les trois intégrales et le champ magnétique $\Omega_0$ forment donc une algèbre de Lie qui est l'extension centrale de $e(2)$, l'algèbre des transformations euclidiennes du plan. Il en est de même dans le cas quantique.

### 1.2.3. Intégrale quadratique

De la même manière que dans la section précédente, nous élaborerons les conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'une constante du mouvement ayant la forme d'un polynôme de degré deux dans les vitesses, c'est-à-dire

$$C_{class} = g_0(x,y)\dot{x}^2 + g_1(x,y)\dot{x}\dot{y} + g_2(x,y)\dot{y}^2 + k_0(x,y)\dot{x} + k_1(x,y)\dot{y} + m(x,y). \tag{1.2.43}$$

La quantification de cette intégrale donne

$$\begin{gathered}C = -\hbar^2(g_0\partial_x^2 + g_{0x}\partial_x + g_1\partial_x\partial_y + g_2\partial_y^2 + g_{2y}\partial_y) - \tfrac{\hbar^2}{2}(g_{0xx} + g_{1y}\partial_x\\ +g_{1x}\partial_y + g_{1xy} + g_{2yy}) - i\hbar(2g_0A\partial_x + g_{0x}A + g_0A_x + g_1A\partial_y + g_1B\partial_x +\\ 2g_2B\partial_y + g_{2y}B + g_2B_y + k_0\partial_x + k_1\partial_y) - \tfrac{i\hbar}{2}(g_1A_y + g_{1y}A + g_{1x}B + g_1B_x +\\ k_{0x} + k_{1y}) + g_0A^2 + g_1AB + g_2B^2 + k_0A + k_1B + m.\end{gathered} \tag{1.2.44}$$

Nous exigeons que le commutateur de $H$ et $C$ s'annule. Les termes d'ordre trois en $\partial x$ et $\partial y$ impliquent alors que $g_{0x} = 0$, $g_{2y} = 0$, $g_{0y} + g_{1x} = 0$ et $g_{1y} + g_{2x} = 0$.

Ainsi, nous avons

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \alpha y^2 - \beta y + \delta, \\
g_1 &= -2\alpha xy + \beta x - \gamma y + \xi, \\
g_2 &= \alpha x^2 + \gamma x + \zeta.
\end{aligned} \tag{1.2.45}
$$

Le reste de la condition $[H, C] = 0$ est équivalent à

$$
\begin{aligned}
k_{0x} - g_1 \Omega &= 0, \\
k_{1y} + g_1 \Omega &= 0, \\
2\Omega(g_0 - g_2) + k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\
2g_0 W_x + g_1 W_y + k_1 \Omega - m_x &= 0, \\
2g_2 W_y + g_1 W_x - k_0 \Omega - m_y &= 0, \\
\tfrac{\hbar^2}{4}(g_{2x}\Omega_y - g_{0y}\Omega_x) + k_0 W_x + k_1 W_y &= 0.
\end{aligned} \tag{1.2.46}
$$

Il est intéressant de noter que la limite classique de ce système d'équations, c'est-à-dire lorsque $\hbar$ tend vers zéro, correspond exactement au système d'équations obtenu dans le cas classique pour une intégrale d'ordre deux. (Voir [**DGRW**].) Pour identifier les systèmes intégrables quantiques et leur intégrale, il faut maintenant identifier les fonctions $\Omega$, $W$, $k_0$, $k_1$ et $m$ à l'aide des équations (1.2.46). Ces dernières ne sont cependant pas faciles à résoudre et certaines simplifications sont nécessaires. Puisque les solutions (1.2.45) pour les fonctions $g_i$ sont les mêmes dans les cas classique et quantique, l'intégrale classique (1.2.43) à quantifier prend en fait la forme

$$C_{class} = \alpha(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + (x\dot{y} - y\dot{x})(\beta\dot{x} + \gamma\dot{y}) + \delta\dot{x}^2 + \zeta\dot{y}^2 + \xi\dot{x}\dot{y} + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \tag{1.2.47}$$

Comme la partie quadratique de cette intégrale est un élément d'ordre deux de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $e(2)$, nous pouvons appliquer certaines transformations euclidiennes du plan, et parfois une combinaison linéaire avec le Hamiltonien, pour réduire l'intégrale à l'une des quatre formes réelles standard suivantes :

$$C_C = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m, \tag{1.2.48}$$

$$C_R = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m, \tag{1.2.49}$$

$$C_P = \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m, \tag{1.2.50}$$

$$C_E = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \sigma(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \tag{1.2.51}$$

Il a été démontré que l'existence de chacun de ces invariants est relié à la séparation des variables dans l'équation de Hamilton-Jacobi (et dans l'équation de Schrödinger en mécanique quantique) en coordonnées cartésiennes, polaires, paraboliques et elliptiques respectivement dans le cas d'un potentiel indépendant des vitesses. (Voir **[DGR]**, **[FMSUW]**.) Nous utiliserons donc ces différentes formes de l'intégrale pour simplifier notre problème, comme cela a déjà été fait pour l'intégrale cartésienne classique (1.2.48). (Voir **[DGRW]**.) Dans ce mémoire, nous traitons les cas quantiques cartésien et polaire.

# Chapitre 2

## INTÉGRABILITÉ CARTÉSIENNE

### 2.1. Présentation

Dans ce chapitre, nous considérons l'intégrale cartésienne (1.2.48). Nous supposerons donc que nous avons débuté par la quantification de cette intégrale avant d'exiger $[H, C] = 0$, ce qui revient à poser $\alpha = \beta = \gamma = \xi = \zeta = 0$ et $\delta = \frac{1}{2}$ dans les équations (1.2.46) :

$$\begin{aligned} k_{0x} &= 0, \\ k_{1y} &= 0, \\ \Omega + k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\ W_x + k_1\Omega - m_x &= 0, \\ k_0\Omega + m_y &= 0, \\ k_0 W_x + k_1 W_y &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Comme le seul terme qui contenait $\hbar$ disparaît, nous retrouvons exactement le même système d'équations que dans le cas classique et les résultats sont déjà connus (Voir [**DGRW**].). Ainsi, pour une intégrale quadratique de forme cartésienne, les systèmes intégrables classiques et quantiques sont les mêmes. Mentionnons qu'il a déjà été démontré que lorsque des intégrales d'ordre deux sont considérées pour un potentiel scalaire, les systèmes quantiques intégrables et superintégrables coïncident toujours. Nous présentons dans ce chapitre les détails de la solution obtenue dans [**DGRW**], car nous avons identifié au cours de nos travaux deux cas particuliers de solution qui ne figuraient pas dans cet article.

Le cas d'un système sans champ magnétique, correspondant à $\Omega = k_0 = k_1 = 0$, donne un potentiel séparable $W = W_0(y) + m(x)$, comme prévu. Nous avons en effet déjà mentionné que l'existence de l'intégrale $C_C$ est associée à la séparation des variables en coordonnées cartésiennes. Ainsi, la solution obtenue dans [**DGRW**], que nous reprenons ici en incluant les cas particuliers, est pour $\Omega \neq 0$. Les trois premières équations du système (2.1.1) donnent

$$\begin{aligned} k_0 &= -g_y(y), \\ k_1 &= -f_x(x), \\ \Omega &= f_{xx} + g_{yy}. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

L'équation de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$ issue des quatrième et cinquième équations de (2.1.1) est

$$W_{xy} + k_1\Omega_y + k_0\Omega_x = W_{xy} - f_x g_{yyy} + g_y f_{xxx} = 0, \tag{2.1.3}$$

et elle peut être intégrée par rapport à $y$, puis par rapport à $x$, pour donner

$$W = f(x)g_{yy}(y) + g(y)f_{xx}(x) + u(x) + v(y). \tag{2.1.4}$$

La dernière équation du système (2.1.1) est donc réduite à

$$g_y(gf_{xxx} + f_x g_{yy} + u_x) + f_x(fg_{yyy} + g_y f_{xx} + v_y) = 0. \tag{2.1.5}$$

Si nous posons $F(x) = u(x) + \frac{f_x^2}{2}$ et $G(y) = v(y) + \frac{g_y^2}{2}$, cette dernière équation prend la forme

$$\frac{F_x}{f_x} + \frac{G_y}{g_y} + g\frac{f_{xxx}}{f_x} + f\frac{g_{yyy}}{g_y} = 0. \tag{2.1.6}$$

Il faudra cependant considérer les cas $f_x = 0$ et $g_y = 0$ séparément.

## 2.2. Cas général

Supposons d'abord que $f_x \neq 0$ et $g_y \neq 0$. Si nous prenons la dérivée mixte $\partial/\partial x \partial y$ de l'équation (2.1.6) et que nous procédons à une séparation des variables, nous obtenons

$$\frac{1}{f_x}\frac{d}{dx}\frac{f_{xxx}}{f_x} = -\frac{1}{g_y}\frac{d}{dy}\frac{g_{yyy}}{g_y} = 2a. \tag{2.2.1}$$

Il en résulte

$$f_{xx} = af^2 + bf + c, \; g_{yy} = -ag^2 + dg + e. \tag{2.2.2}$$

Ainsi, si nous résumons ce que nous avons pour l'instant, cela donne

$$\begin{aligned} k_0 &= -g_y, \\ k_1 &= -f_x, \\ \Omega = f_{xx} + g_{yy} &= a(f^2 - g^2) + bf + dg + c + e, \\ W &= fg_{yy} + gf_{xx} + u(x) + v(y) \\ &= f(-ag^2 + dg + e) + g(af^2 + bf + c) + u(x) + v(y). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Il reste à trouver les fonctions $u(x)$, $v(y)$ et $m(x, y)$. La dernière équation du système (2.1.1) est maintenant

$$\frac{f_x}{f_x(af^2 + bf + df + c) + u_x} = -\frac{g_y}{g_y(-ag^2 + bg + dg + e) + v_y} = -\frac{1}{h}, \tag{2.2.4}$$

où $h$ est une constante choisie pour obtenir la même forme de solution que dans **[DGRW]**. Les solutions pour $u$ et $v$ sont donc

$$\begin{aligned} u &= -\tfrac{a}{3}f^3 - \tfrac{b+d}{2}f^2 - cf - hf, \\ v &= \tfrac{a}{3}g^3 - \tfrac{b+d}{2}g^2 - eg + hf, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

ce qui nous permet finalement d'écrire $W$ en termes de $f$ et $g$ :

$$W = \frac{a}{3}(g - f)^3 - \frac{b+d}{2}(g - f)^2 + (c + h - e)(g - f). \tag{2.2.6}$$

Les quatrième et cinquième équations de (2.1.1) ont ensuite pour solution

$$m = -\frac{a}{3}(g^3+2f^3-3gf^2)+b(fg-f^2)+\frac{d}{2}(g^2-f^2)+c(g-2f)+eg-hf. \quad (2.2.7)$$

Ainsi, l'intégrale $C_C$ de l'équation (1.2.48) est

$$C_C = \frac{\dot{x}^2}{2}-g_y\dot{x}-f_x\dot{y}-\frac{a}{3}(g^3+2f^3-3gf^2)+b(fg-f^2)+\frac{d}{2}(g^2-f^2)+c(g-2f)+eg-hf, \quad (2.2.8)$$

où $f(x)$ et $g(y)$ satisfont aux équations (2.2.2).

## 2.3. Premier cas particulier

Supposons maintenant que $g_y = 0$. Nous avons ici

$$\begin{aligned} k_0 &= 0, \\ k_1 &= -f_x, \\ \Omega &= f_{xx}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

La condition de compatiblité issue des quatrième et cinquième équations de (2.1.1) est alors $W_{xy} = 0$, d'où nous tirons que

$$W = u(x) + v(y). \quad (2.3.2)$$

La dernière équation du système est $-f_x v_y = 0$. Comme $f_x$ ne peut être nul (cela entraînerait un champ magnétique nul), il faut poser $v_y = 0$. Le potentiel est donc $W = u(x)$. Nous devons ensuite résoudre les deux équations restantes pour $m$, soit

$$\begin{aligned} u_x - f_x f_{xx} - m_x &= 0, \\ m_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

à une constante d'intégration près :

$$m = -\frac{f_x^2}{2} + u(x). \quad (2.3.4)$$

L'intégrale cherchée est donc

$$C_C = \frac{\dot{x}^2}{2} - f_x\dot{y} - \frac{f_x^2}{2} + u(x). \tag{2.3.5}$$

## 2.4. Deuxième cas particulier

Si $f_x = 0$, nous pouvons appliquer la même technique de résolution que pour le premier cas particulier, mais la structure des équations du système (2.1.1) entraînera une différence dans la forme de la solution. C'est pourquoi nous présentons quand même les détails des calculs. Nous avons donc

$$\begin{aligned} k_0 &= -g_y \\ k_1 &= 0 \\ \Omega &= g_{yy}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Des quatrième et cinquième équations de (2.1.1), nous obtenons la condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$, soit $W_{xy} = 0$. Nous avons donc

$$W = u(x) + v(y). \tag{2.4.2}$$

La dernière équation du système est $-g_y u_x = 0$. Comme $g_y$ ne peut être nul (cela entraînerait un champ magnétique nul), il faut poser $u_x = 0$, d'où nous tirons que le potentiel est $W = v(y)$. Il reste ensuite à résoudre les quatrième et cinquième équations de (2.1.1), soit

$$\begin{aligned} m_x &= 0, \\ g_y g_{yy} + m_y &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Nous obtenons finalement, à une constante d'intégration près,

$$m = \frac{g_y^2}{2}, \tag{2.4.4}$$

d'où

$$C_C = \frac{\dot{x}^2}{2} - g_y\dot{x} + \frac{g_y^2}{2}. \tag{2.4.5}$$

En résumé, nous avons démontré que les systèmes intégrables classiques et quantiques qui possèdent une intégrale de forme cartésienne $C_C$ coïncident et qu'ils sont au nombre de trois, soit

$$\begin{aligned} \Omega &= f_{xx} + g_{yy}, \\ W &= \tfrac{a}{3}(g-f)^3 - \tfrac{b+d}{2}(g-f)^2 + (c+h-e)(g-f), \\ C_C &= \tfrac{\dot{x}^2}{2} - g_y\dot{x} - f_x\dot{y} - \tfrac{a}{3}(g^3+2f^3-3gf^2) \\ &\quad + b(fg-f^2) + \tfrac{d}{2}(g^2-f^2) + c(g-2f) + eg - hf, \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

où $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $h$ sont des constantes, et où $f = f(x)$ et $g = g(y)$ sont des fonctions satisfaisant $f_{xx} = af^2 + bf + c$ et $g_{yy} = -ag^2 + dg + e$,

$$\begin{aligned} \Omega &= f_{xx}(x), \\ W &= u(x), \\ C_C &= \tfrac{\dot{x}^2}{2} - f_x\dot{y} - \tfrac{f_x^2}{2} + u(x), \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

et

$$\begin{aligned} \Omega &= g_{yy}(y), \\ W &= v(y), \\ C_C &= \tfrac{\dot{x}^2}{2} - g_y\dot{x} + \tfrac{g_y^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

# Chapitre 3

## SUPERINTÉGRABILITÉ CARTÉSIENNE

Nous connaissons maintenant les systèmes intégrables possédant une intégrale quadratique de forme cartésienne. Dans ce chapitre, nous déterminerons lesquels parmi ceux-ci sont superintégrables, plus précisément ceux qui possèdent une intégrale d'ordre un ou deux supplémentaire. Pour ce faire, nous devons de nouveau résoudre le système d'équations (1.2.46) en considérant que nous connaissons déjà le Hamiltonien du système mécanique, soit les fonctions $\Omega$ et $W$. Nous pouvons ici réduire l'intégrale que nous cherchons à deux formes simplifiées, que nous considérerons en deux cas séparés, soit $\alpha \neq 0$ et $\alpha = 0$. Dans le premier cas, nous pourrons par une normalisation poser $\alpha = 1$. Par des translations bien choisies, nous pourrons ensuite poser $\beta = \gamma = 0$, et une combinaison linéaire avec le Hamiltonien et l'intégrale permettra de poser finalement $\delta = \zeta = 0$. Dans le deuxième cas, soit $\alpha = 0$, nous aurons $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, que nous écrirons $\beta^2 + \gamma^2 = 1$ après normalisation. Par des translations et une combinaison linéaire avec le Hamiltonien et l'intégrale, nous pourrons ensuite poser $\beta = \zeta = \xi = 0$.

### 3.1. Premier cas

Considérons d'abord $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = \zeta = 0$ et $\xi = \xi$, c'est-à-dire

$$C = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \xi\dot{x}\dot{y} + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m, \tag{3.1.1}$$

dans le système (1.2.46).

Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
k_{0x} - (-2xy + \xi)\Omega &= 0, \\
k_{1y} + (-2xy + \xi)\Omega &= 0, \\
2\Omega(y^2 - x^2) + k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\
2y^2 W_x + (-2xy + \xi)W_y + k_1\Omega - m_x &= 0, \\
2x^2 W_y + (-2xy + \xi)W_x - k_0\Omega - m_y &= 0, \\
\tfrac{h^2}{2}(x\Omega_y - y\Omega_x) + k_0 W_x + k_1 W_y &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

### 3.1.1. Premier système intégrable

Nous prenons ici pour point de départ la première solution obtenue dans le chapitre précédent, soit

$$
\begin{aligned}
\Omega &= f_{xx} + g_{yy}, \\
W &= \tfrac{a}{3}(g-f)^3 - \tfrac{b+d}{2}(g-f)^2 + (c+h-e)(g-f), \\
f_{xx} &= af^2 + bf + c, \\
g_{yy} &= -ag^2 + dg + e.
\end{aligned}
\tag{3.1.3}
$$

Rappelons que dans ce cas, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ et $h$ sont des constantes, et que $f = f(x)$ et $g = g(y)$. Les deux premières équations du système (3.1.2) peuvent facilement être résolues pour $k_0$ et $k_1$ :

$$
\begin{aligned}
k_0 &= -2y(xf_x - f) - x^2 y g_{yy} + \xi f_x + \xi x g_{yy} + C_1(y), \\
k_1 &= xy^2 f_{xx} + 2x(yg_y - g) - \xi y f_{xx} - \xi g_y + C_2(x).
\end{aligned}
\tag{3.1.4}
$$

La troisième équation du système devient alors

$$
\begin{aligned}
2(f_{xx} + g_{yy})(y^2 - x^2) - 2(xf_x - f) - x^2(g_{yy} + yg_{yyy}) + \xi x g_{yyy} + C_{1y} \\
+ y^2(f_{xx} + xf_{xxx})2(yg_y - g) - \xi y f_{xxx} + C_{2x} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

Si nous dérivons cette équation trois fois par rapport à $x$, nous obtenons

$$
2F''(y^2 - x^2) - 14xF' - 16F + y^2(4F'' + xF''') - \xi y F''' + C_2^{(4)} = 0, \tag{3.1.6}
$$

où $F = f'''$. Comme $F$ ne dépend que de $x$, chaque coefficient des différentes puissances de $y$ doit s'annuler séparément :

$$\begin{aligned} 6F'' + xF''' &= 0, \\ \xi F'''' &= 0, \\ -2x^2F'' - 14xF' - 16F + C_2^{(4)} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

De la même façon, nous pouvons dériver (3.1.5) trois fois par rapport à $y$ pour obtenir

$$C_1^{(4)} + 16G + 14yG' + 2G''(y^2 - x^2) - x^2(4G'' + yG''') + \xi xG''' = 0, \tag{3.1.8}$$

avec $G = g'''$, et exiger que chaque coefficient des différentes puissances de $x$ s'annule séparemment :

$$\begin{aligned} 6G'' + yG''' &= 0, \\ \xi G''' &= 0, \\ C_1^{(4)} + 16G + 14yG' + 2y^2G'' &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Les équations $\xi F''' = 0$ et $\xi G''' = 0$ nous forcent à considérer deux possibilités, soit $\xi = 0$ et $F''' = G''' = 0$.

**Première possibilité : $\xi \neq 0$**

Des équations (3.1.7) et (3.1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} F &= a_1x + a_2, \\ f &= \tfrac{a_1x^4}{24} + \tfrac{a_2x^3}{6} + \tfrac{a_3x^2}{2} + a_4x + a_5, \\ C_2 &= \tfrac{a_1x^5}{4} + \tfrac{2a_2x^4}{3} + \tfrac{a_6x^3}{6} + \tfrac{a_7x^2}{2} + a_8x + a_9, \\ G &= b_1y + b_2, \\ g &= \tfrac{b_1y^4}{24} + \tfrac{b_2y^3}{6} + \tfrac{b_3y^2}{2} + b_4y + b_5, \\ C_1 &= -\tfrac{b_1y^5}{4} - \tfrac{2b_2y^4}{3} + \tfrac{b_6y^3}{6} + \tfrac{b_7y^2}{2} + b_8y + b_9. \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Maintenant que nous connaissons $f$ et $g$, nous pouvons exiger que les équations (2.2.2) et (3.1.5) soient aussi satisfaites. Elles prennent la forme de polynômes en $x$ et $y$ à coefficients constants. Cela impose quatre possibilités pour les constantes $a_i$, $b_j$, $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ :

$$\begin{aligned}\Omega &= a_8,\\ f &= \tfrac{a_8x^2}{2} + a_9x + a_{10},\\ C_2 &= a_8x^3 + (-b_9 - 2a_{10} + 2b_6)x + a_7,\\ g &= b_6,\\ C_1 &= -a_8y^3 + b_9y + b_{10},\\ a = b = 0,&\ c = a_8,\ e = -db_6,\ d = d,\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= a_8 + b_4,\\ f &= \tfrac{a_8x^2}{2} + a_9x + a_{10},\\ C_2 &= (a_8 + b_4)x^3 + (-b_9 - 2a_{10} + 2b_6)x + a_7,\\ g &= \tfrac{b_4y^2}{2} + b_5y + b_6,\\ C_1 &= -(a_8 + b_4)y^3 + b_9y + b_{10},\\ a = b = 0,&\ c = a_8,\ d = 0,\ e = b_4,\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= b_4,\\ f &= a_{10},\\ C_2 &= b_4x^3 + a_6x + a_7,\\ g &= \tfrac{b_4y^2}{2} + b_5y + b_6,\\ C_1 &= -b_4y^3 + (-a_6 - 2a_{10} + 2b_6)y + b_{10},\\ a = 0,&\ b = b,\ c = -ba_{10},\ d = 0,\ e = b_4,\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

et

$$\begin{aligned}f &= a_{10},\\ g &= b_6,\\ \Longrightarrow \Omega &= f_{xx} + g_{yy} = 0.\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Nous reviendrons sur les conclusions que nous tirons de chacun de ces cas plus loin.

**Deuxième possibilité :** $\xi = 0$

Des équations (3.1.7) et (3.1.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{a_1}{x^4} + a_2 x + a_3 = f''', \\ C_2 &= \tfrac{a_2 x^5}{4} + \tfrac{2a_3 x^4}{3} + \tfrac{a_4 x^3}{6} + \tfrac{a_5 x^2}{2} + a_6 x + a_7, \\ f &= \tfrac{a_2 x^4}{24} - \tfrac{a_1}{6x} + \tfrac{a_3 x^3}{6} + \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

et

$$\begin{aligned} G &= \tfrac{b_1}{y^4} + b_2 y + b_3 = g''', \\ g &= \tfrac{b_2 y^4}{24} - \tfrac{b_1}{6y} + \tfrac{b_3 y^3}{6} + \tfrac{b_4 y^2}{2} + b_5 y + b_6, \\ C_1 &= \tfrac{b_7 y^3}{6} + \tfrac{b_8 y^2}{2} + b_9 y + b_{10} - \tfrac{b_2 y^5}{4} - \tfrac{2b_3 y^4}{3}, \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

ce qui à première vue semble différent du cas $\xi \neq 0$. Cependant, si nous entrons les fonctions $f$ et $g$ dans les équations (2.2.2) et (3.1.5), nous obtenons les quatre mêmes possibilités que précédemment, c'est-à-dire (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13) et (3.1.14).

Ainsi, le cas $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \delta = \zeta = 0$ mène à quatre conclusions, dont une est dès maintenant éliminée, soit (3.1.14), car elle entraîne un champ magnétique nul. Les trois possibilités pertinentes, c'est-à-dire (3.1.11), (3.1.12) et (3.1.13), sont ensuite entrées dans la dernière équation du système (3.1.2), qui devient alors un polynôme en $x$ et $y$ à coefficients constants.

Dans les trois cas, nous devons conclure que $W$ est constant. Nous pourrons donc reprendre la résolution du système d'équations général (1.2.46) en posant $\Omega = \Omega_0$ et $W = 0$. Cela sera fait à la fin du présent chapitre, puisque nous aboutirons à cette solution dans toutes les situations à venir.

### 3.1.2. Deuxième système intégrable

Nous allons maintenant résoudre le système (3.1.2) en stipulant que le Hamiltonien est celui qui découle des résultats du cas $g_y = 0$ du chapitre précédent, soit

$$\begin{aligned} \Omega &= f_{xx}, \\ W &= u(x). \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Les deux premières équations du système (3.1.2) ont pour solution

$$\begin{aligned} k_0 &= -2y(xf_x - f) + \xi f_x + C_1(y), \\ k_1 &= xy^2 f_{xx} - \xi y f_{xx} + C_2(x). \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

La troisième équation devient alors

$$2(y^2 - x^2)f_{xx} - 2xf_x + 2f + C_{1y} + xy^2 f_{xxx} + y^2 f_{xx} - \xi y f_{xxx} + C_{2x} = 0, \tag{3.1.19}$$

et sa dérivée deuxième en $y$ donne

$$C_{1yyy} = -6f_{xx} - 2xf_{xxx} = a_1, \tag{3.1.20}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{a_1 y^3}{6} + \tfrac{a_2 y^2}{2} + a_3 y + a_4, \\ f &= -\tfrac{a_1 x^2}{12} + \tfrac{a_5}{2x} + a_6 x + a_7. \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

En particulier, le champ magnétique devient

$$\Omega = -\frac{a_1}{6} + \frac{a_5}{x^3}. \tag{3.1.22}$$

Si on écrit de nouveau la troisième équation de (3.1.2) avec cette information, nous obtenons la condition suivante :

$$(2a_2x^4 + 6a_5\xi)y + a_1x^6 + 4a_7x^4 + 2a_3x^4 + 2x^4C_{2x} = 0. \tag{3.1.23}$$

Le coefficient de $y$ nous indique que $a_2 = a_5\xi = 0$ et le reste de l'équation donne

$$C_2 = -\frac{a_1x^3}{6} - (2a_7 + a_3)x + b_1. \tag{3.1.24}$$

**Cas 3.1.2(a) : $\xi = 0$**

Des quatrième et cinquième équations du système (3.1.2), nous obtenons la condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$, soit

$$a_1a_5xy^3 + (-12x^5u_x - 4x^6yu_{xx} + a_1a_5x^3 + 12a_1a_7x + 6a_3a_5x + 12a_5^2)y + 6a_4a_5 = 0. \tag{3.1.25}$$

Les coefficients de $y^3$ et de $y^0$ impliquent alors que

$$a_1a_5 = 0, a_4a_5 = 0. \tag{3.1.26}$$

**Cas 3.1.2(a)(i) :** $a_5 = 0$ $(\Omega = -\frac{a_1}{6})$

Le reste de l'équation de compatibilité donne alors

$$u = c_1 + \frac{c_2}{x^2}. \tag{3.1.27}$$

Maintenant que nous connaissons $W$, la dernière équation du système à résoudre entraîne la condition

$$c_2(a_1x^2y + 12a_7y + a_1y^3 + 6a_3y + 6a_4) = 0. \tag{3.1.28}$$

Si nous exigeons que le contenu de la parenthèse soit nul, il faut poser $a_1 = 0$ et cela entraîne un champ magnétique nul. Si nous exigeons plutôt que $c_2 = 0$, alors nous retrouvons la même situation précédemment, à savoir que $\Omega$ et $W$ sont constants, et nous avons déjà fait le choix d'en reparler plus tard.

**Cas 3.1.2(a)(ii) :** $a_1 = a_4 = 0$ $(\Omega = \frac{a_5}{x^3})$

Dans ce cas, l'équation (3.1.25) entraînera la forme suivante pour $u$ :

$$u = \frac{a_5(2a_7 + a_3)}{2x^3} - \frac{c_1}{2x^2} + \frac{3a_5^2}{8x^4} + c_2. \tag{3.1.29}$$

La dernière équation du système (3.1.2) entraîne ensuite la condition

$$\begin{gathered}(-4a_7c_1 - 2a_3c_1)x^3 + (-4a_5c_1 - 3\hbar^2a_5 + 12a_7^2a_5 + 12a_7a_5a_3 + 3a_3^2a_5)x^2 \\ +(18a_5^2a_7 + 9a_5^2a_3)x + 6a_5^3 = 0.\end{gathered} \tag{3.1.30}$$

Le coefficient de $x^0$ implique que $a_5 = 0$, donc $\Omega = 0$.

**Cas 3.1.2(b) :** $a_5 = 0$ $(\xi \neq 0)$ $(\Omega = -\frac{a_1}{6})$

Les trois premières équations du système (3.1.2) sont déjà satisfaites. Il faut maintenant reconstruire la condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$ à l'aide des quatrième et cinquième équations :

$$(6u_x + 2xu_{xx})y - \xi u_{xx} = 0. \tag{3.1.31}$$

Chacun des deux coefficients de ce polynôme en $y$ devant s'annuler séparément, nous obtenons deux équations pour $u$ dont la solution est

$$u = c_1. \tag{3.1.32}$$

Ainsi, nous obtenons encore la condition $\Omega$ et $W$ constants, qui sera traitée plus loin.

### 3.1.3. Troisième système intégrable

Ici, nous recommencons la résolution du système (3.1.2) avec

$$\begin{aligned} \Omega &= g_{yy}, \\ W &= v(y). \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

La technique est exactement la même que dans la sous-section précédente et les résultats analogues, puisque les équations à résoudre se comporte de la même façon. Nous omettons donc les détails et concluons qu'il existe une intégrale du mouvement supplémentaire si et seulement si $\Omega$ et $W$ sont constants.

## 3.2. Deuxième cas

Considérons maintenant $\alpha = \delta = \zeta = \xi = 0$ et $\beta^2 + \gamma^2 = 1$, c'est-à-dire

$$C = (x\dot{y} - y\dot{x})(\beta\dot{x} + \gamma\dot{y}) + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \tag{3.2.1}$$

Le système (1.2.46) devient alors

$$\begin{aligned}
&k_{0x} - (\beta x - \gamma y)\Omega = 0, \\
&k_{1y} + (\beta x - \gamma y)\Omega = 0, \\
&2\Omega(-\beta y - \gamma x) + k_{0y} + k_{1x} = 0, \\
&-2\beta y W_x + (\beta x - \gamma y)W_y + k_1\Omega - m_x = 0, \\
&2\gamma x W_y + (\beta x - \gamma y)W_x - k_0\Omega - m_y = 0, \\
&\tfrac{\hbar^2}{4}(\gamma\Omega_y + \beta\Omega_x) + k_0 W_x + k_1 W_y = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

### 3.2.1. Premier système intégrable

Comme pour le premier cas, nous prenons pour débuter la première solution (2.4.6) obtenue pour le Hamiltonien dans le chapitre précédent, soit

$$\begin{aligned}
\Omega &= f_{xx} + g_{yy}, \\
W &= \tfrac{a}{3}(g-f)^3 - \tfrac{b+d}{2}(g-f)^2 + (c+h-e)(g-f), \\
f_{xx} &= af^2 + bf + c, \\
g_{yy} &= -ag^2 + dg + e.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Les deux premières équations de (3.2.2) peuvent être résolues pour $k_0$ et $k_1$ :

$$\begin{aligned}
k_0 &= \beta(xf_x - f) + \tfrac{\beta x^2}{2} g_{yy} - \gamma y f_x - \gamma x y g_{yy} + C_1(y), \\
k_1 &= \tfrac{\gamma y^2}{2} f_{xx} + \gamma(y g_y - g) - \beta x y f_{xx} - \beta x g_y + C_2(x).
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

La troisième équation devient alors

$$\begin{aligned}
2(f_{xx} + g_{yy})(-\beta y - \gamma x) + \tfrac{\beta x^2}{2} g_{yyy} - \gamma f_x - \gamma x(y g_{yyy} + g_{yy}) + C_{1y} \\
+ \tfrac{\gamma y^2}{2} f_{xxx} - \beta g_y - \beta y(x f_{xxx} + f_{xx}) + C_{2x} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Si nous dérivons cette équation trois fois par rapport à $x$, nous obtenons

$$2F'(-\beta y - \gamma x) - 7\gamma F + \frac{\gamma y^2}{2} F'' - \beta y(4F' + xF'') + C_2^{(4)} = 0, \tag{3.2.6}$$

où $F = f^{(4)}$ et où chaque coefficient des différentes puissances de $y$ doit s'annuler séparément, donnant lieu aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma F'' &= 0, \\ \beta(6F' + xF'') &= 0, \\ C_2^{(4)} - 2\gamma x F' - 7\gamma F &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

De la même manière, si nous dérivons (3.2.5) par rapport à $y$, nous obtenons

$$2G'(-\gamma x - \beta y) - 7\beta G + \frac{\beta x^2}{2} G'' - \gamma x(4G' + yG'') + C_1^{(4)} = 0, \tag{3.2.8}$$

ce qui entraîne les conditions

$$\begin{aligned} \beta G'' &= 0, \\ \gamma(6G' + yG'') &= 0, \\ C_1^{(4)} - 2\beta y G' - 7\beta G &= 0. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

où $G = g^{(4)}$.

**Première possibilité :** $\gamma = 0$ et $\beta = 1$

Les équations (3.2.7) et (3.2.9) ont pour solution

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{a_1}{x^5} + a_2 = f^{(4)}, \\ C_2 &= \tfrac{a_3 x^3}{6} + \tfrac{a_4 x^2}{2} + a_5 x + a_6, \\ f &= \tfrac{a_1}{24x} + \tfrac{a_2 x^4}{24} + \tfrac{a_7 x^3}{6} + \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

et

$$\begin{aligned} G &= b_1 y + b_2 = g^{(4)}, \\ C_1 &= \tfrac{3b_1 y^5}{40} + \tfrac{7b_2 y^4}{24} + \tfrac{b_3 y^3}{6} + \tfrac{b_4 y^2}{2} + b_5 y + b_6, \\ g &= \tfrac{b_1 y^5}{120} + \tfrac{b_2 y^4}{24} + \tfrac{b_7 y^3}{6} + \tfrac{b_8 y^2}{2} + b_9 y + b_{10}. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Maintenant que nous connaissons $f$ et $g$, nous pouvons exiger que les équations (2.2.2) et (3.2.5) soient aussi satisfaites. Elles prennent la forme de polynômes en $x$ et $y$ à coefficients constants. Cela impose quatre possibilités pour les constantes $a_i$, $b_j$, $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ :

$$\begin{aligned}
\Omega &= a_8, \\
f &= \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \\
C_2 &= a_5 x + a_6, \\
g &= b_{10}, \\
C_1 &= \tfrac{3 a_8 y^2}{2} - a_5 y + b_6, \\
a = b = 0,\ c &= a_8,\ d = d,\ e = -d b_{10},
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= a_8 + b_8, \\
f &= \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \\
C_2 &= a_5 x + a_6, \\
g &= \tfrac{b_8 y^2}{2} + b_9 y + b_{10}, \\
C_1 &= \tfrac{3(a_8+b_8)y^2}{2} - a_5 y + b_6, \\
a = b = 0,\ c &= a_8,\ d = 0,\ e = b_8,
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$\begin{aligned}
\Omega &= b_8, \\
f &= a_{10}, \\
C_2 &= a_5 x + a_6, \\
g &= \tfrac{b_8 y^2}{2} + b_9 y + b_{10}, \\
C_1 &= \tfrac{3 b_8 y^2}{2} - a_5 y + b_6, \\
a = 0,\ b = b,\ c &= -b a_{10},\ d = 0,\ e = b_8,
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

et

$$\begin{aligned}
f &= a_{10}, \\
g &= b_{10}, \\
\Longrightarrow \Omega &= f_{xx} + g_{yy} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Si nous entrons les trois premières possibilités dans la dernière équation du système (3.2.2), nous obtenons un polynôme en $x$ et $y$ dont les coefficients s'annuleront si $W$ est constant. Nous reviendrons sur la solution complète pour $\Omega = \Omega_0$ et $W = 0$ à la fin du chapitre.

Si la première possibilité que nous venons de traiter n'est pas satisfaite, c'est-à-dire si $\gamma \neq 0$, les équations (3.2.7) et (3.2.9) deviennent alors

$$
\begin{aligned}
F'' &= 0, \\
a_1\beta &= 0, \qquad\qquad (3.2.16) \\
-2\gamma x F' - 7\gamma F + C_2^{(4)} &= 0,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\beta G'' &= 0, \\
6G' + yG'' &= 0, \qquad\qquad (3.2.17) \\
-2\beta y G' - 7\beta G + C1^{(4)} &= 0.
\end{aligned}
$$

**Deuxième possibilité :** $\beta = 0$ et $\gamma = 1$

Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
f &= \tfrac{a_1 x^5}{120} + \tfrac{a_2 x^4}{24} + \tfrac{a_3 x^3}{6} + \tfrac{a_4 x^2}{2} + a_5 x + a_6, \\
C_2 &= \tfrac{3 a_1 x^5}{40} + \tfrac{7 a_2 x^4}{24} + \tfrac{a_7 x^3}{6} + \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \qquad (3.2.18) \\
g &= \tfrac{b_1}{24 y} + \tfrac{b_2 y^4}{24} + \tfrac{b_3 y^3}{6} + \tfrac{b_4 y^2}{2} + b_5 y + b_6, \\
C_1 &= \tfrac{b_7 y^3}{6} + \tfrac{b_8 y^2}{2} + b_9 y + b_{10}.
\end{aligned}
$$

Ce cas se traite de la même facon que nous l'avons fait pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1$ à l'aide des équations (2.2.2), (3.2.5) et la dernière équation du système (3.2.2), et mène à la conclusion que $\Omega$ et $W$ doivent être constants. Nous y reviendrons.

**Troisième possiblité :** $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$

Les équations (3.2.7) et (3.2.9) ont cette fois pour solution

$$
\begin{aligned}
f &= \tfrac{a_2 x^4}{24} + \tfrac{a_3 x^3}{6} + \tfrac{a_4 x^2}{2} + a_5 x + a_6, \\
C_2 &= \tfrac{7\gamma a_2 x^4}{24} + \tfrac{a_7 x^3}{6} + \tfrac{a_8 x^2}{2} + a_9 x + a_{10}, \qquad (3.2.19) \\
g &= \tfrac{b_1 y^4}{24} + \tfrac{b_6 y^3}{6} + \tfrac{b_7 y^2}{2} + b_8 y + b_9, \\
C_1 &= \tfrac{7\beta b_1 y^4}{24} + \tfrac{b_2 y^3}{6} + \tfrac{b_3 y^2}{2} + b_4 y + b_5.
\end{aligned}
$$

Les équations (3.2.5) et (2.2.2) entraînent encore quatre possibilités :

$$
\begin{aligned}
\Omega &= a_4 + b_7, \\
f &= \tfrac{a_4 x^2}{2} + a_5 x + a_6, \\
C_2 &= \tfrac{3\gamma}{2}(a_4 + b_7)x^2 + (\gamma a_5 - b_4 + \beta b_8)x + a_{10}, \\
g &= \tfrac{b_7 y^2}{2} + b_8 y + b_9, \\
C_1 &= \tfrac{3\beta}{2}(a_4 + b_7)y^2 + b_4 y + b_5, \\
a &= b = 0,\ c = a_4,\ d = 0,\ e = b_7,
\end{aligned}
\tag{3.2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega &= a_4, \\
f &= \tfrac{a_4 x^2}{2} + a_5 x + a_6, \\
C_2 &= \tfrac{3\gamma}{2} a_4 x^2 + (\gamma a_5 - b_4)x + a_{10}, \\
g &= b_9, \\
C_1 &= \tfrac{3\beta}{2} a_4 y^2 + b_4 y + b_5, \\
a &= b = 0,\ c = a_4,\ d = 0,\ e = -d b_9,
\end{aligned}
\tag{3.2.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega &= b_7, \\
f &= a_6, \\
C_2 &= \tfrac{3\gamma}{2} b_7 x^2 + (-b_4 + \beta b_8)x + a_{10}, \\
g &= \tfrac{b_7 y^2}{2} + b_8 y + b_9, \\
C_1 &= \tfrac{3\beta}{2} b_7 y^2 + b_4 y + b_5, \\
a &= 0,\ b = b,\ c = -b a_6,\ d = 0,\ e = b_7,
\end{aligned}
\tag{3.2.22}
$$

et

$$
\begin{aligned}
f &= a_6, \\
g &= b_9, \\
\Omega &= f_{xx} + g_{yy} = 0.
\end{aligned}
\tag{3.2.23}
$$

Pour ce qui est des trois premières possibilités, si nous nous en servons pour écrire la dernière équation de (3.2.2), nous devons conclure que $W = 0$ pour qu'elle soit satisfaite. Ainsi, les cas $\gamma = 0$ et $\beta = 0$ étaient tout simplement inclus dans la troisième possibilité.

### 3.2.2. Deuxième système intégrable

Nous allons maintenant résoudre le système (3.2.2) en stipulant que le Hamiltonien est celui qui découle des résultats du cas $g_y = 0$ du chapitre précédent (2.4.7), soit

$$\begin{aligned} \Omega &= f_{xx}, \\ W &= u(x). \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

Les deux premières équations du système (3.2.2) ont pour solution

$$\begin{aligned} k_0 &= \beta(xf_x - f) - \gamma y f_x + C_1(y), \\ k_1 &= \tfrac{\gamma y^2}{2} f_{xx} - \beta xy f_{xx} + C_2(x). \end{aligned} \tag{3.2.25}$$

La troisième équation du système devient alors

$$-2(\beta x + \gamma y) f_{xx} - \gamma f_x + C_{1y} + \frac{\gamma y^2}{2} f_{xxx} - \beta xy f_{xxx} - \beta y f_{xx} + C_{2x} = 0. \tag{3.2.26}$$

Lorsque nous la dérivons deux fois par rapport à $y$, nous obtenons

$$C_{1yyy} = -\gamma f_{xxx} = a_1, \tag{3.2.27}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{a_1 y^3}{6} + \tfrac{a_2 y^2}{2} + a_3 y + a_4, \\ f &= -\tfrac{a_1 x^3}{6\gamma} + \tfrac{a_5 x^2}{2} + a_6 x + a_7. \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

**Cas 3.2.2(a) :** $\gamma \neq 0$ $(\Omega = -\frac{a_1 x}{\gamma} + a_5)$

Si nous écrivons de nouveau la troisième équation de (3.2.2), nous obtenons maintenant la condition

$$(8a_1\beta x - 6a_5\gamma\beta + 2a_2\gamma)y + 5a_1\gamma x^2 - 6a_5\gamma^2 x - 2a_6\gamma^2 + 2a_3\gamma + 2\gamma C_{2x} = 0. \tag{3.2.29}$$

Les deux coefficients de ce polynôme en $y$ doivent s'annuler séparément, entraînant en particulier

$$\begin{aligned} a_1\beta &= 0, \\ C_2 &= -\tfrac{5a_1}{6}x^3 + \tfrac{3a_5\gamma}{2}x^2 + (a_6\gamma - a_3)x + b_1. \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

**Cas 3.2.2(a)(i) :** $\beta = 0$ et $\gamma = 1$

La troisième équation devient

$$2a_2 y = 0. \tag{3.2.31}$$

Nous posons donc $a_2 = 0$. Des quatrième et cinquième équations, nous obtenons la condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$, soit

$$-\frac{a_1^2}{6}y^3 + (u_{xx} - \frac{a_1^2 x^2}{2} + a_1 a_6 - a_1 a_3 + a_1 a_5 x)y - a_1 a_4 = 0. \tag{3.2.32}$$

Nous devons poser $a_1 = 0$, donc $\Omega = a_5$. Le coefficient de $y$ doit aussi s'annuler :

$$u = c_1 x + c_2. \tag{3.2.33}$$

La dernière équation du système devient alors

$$k_0 u_x = c_1(-y(a_5 x + a_6) + a_3 y + a_4) = 0. \tag{3.2.34}$$

Si $c_1 = 0$, nous retrouvons le cas $\Omega$ et $W$ constants. Si la parenthèse est nulle, alors $a_5 = 0$, c'est-à-dire $\Omega = 0$.

**3.2.2(a)(ii) :** $a_1 = 0$ ($\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$) ($\Omega = a_5$)

La troisième équation est

$$(2a_2\gamma - 6a_5\gamma\beta)y = 0. \tag{3.2.35}$$

Nous devons poser $a_2 = 3a_5\beta$. Des quatrième et cinquième équations du système, nous obtenons la condition de compatiblité

$$-3\beta u_x - \beta x u_{xx} + \gamma y u_{xx} = 0, \tag{3.2.36}$$

ce qui implique que $u = c_1$. Encore une fois, nous trouvons que $\Omega$ et $W$ doivent être constants.

**Cas 3.2.2(b) :** $\gamma = 0$ et $\beta = 1$

La troisième équation devient

$$-3y f_{xx} + C_{1y} - xy f_{xxx} + C_{2x} = 0. \tag{3.2.37}$$

En la dérivant une fois par rapport à $y$, nous obtenons

$$-3f_{xx} + C_{1yy} - x f_{xxx} = 0, \tag{3.2.38}$$

d'où

$$\begin{aligned} C_1 &= \tfrac{a_1}{2}y^2 + a_2 y + a_3, \\ f &= \tfrac{a_4}{2x} + \tfrac{a_1}{6}x^2 + a_5 x + a_6, \\ \Omega &= \tfrac{a_4}{x^3} + \tfrac{a_1}{3}. \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

La troisième équation devient $C_{2x} + a_2 = 0$, donc

$$C_2 = -a_2 x + b_1. \tag{3.2.40}$$

Les quatrième et cinquième équations du système à résoudre entraînent la condition de compatiblité

$$6x^5 u_x 2x^6 u_{xx} - 6a_4^2 + a_4 a_1 x^3 - 6a_4 a_6 x + 3a_4 a_1 x y^2 + 6a_4 a_2 x y + 6_a 4a_3 x = 0. \tag{3.2.41}$$

**Cas 3.2.2(b)(i) :** $a_4 = 0$ $(\Omega = \frac{a_1}{3})$

Cette dernière équation devient $3u_x + x u_{xx} = 0$, donc

$$u = c_1 + \frac{c_2}{x^2}, \tag{3.2.42}$$

et la dernière équation du système entraîne ensuite

$$c_2(a_1x^2 - 6a_6 + 3a_1y^2 + 6a_2y + 6a_3) = 0, \tag{3.2.43}$$

ce qui implique que $W$ est constant ou $\Omega = 0$.

**Cas 3.2.2(b)(ii) :** $a_1 = a_2 = 0$ ($\Omega = \frac{a_4}{x^3}$)

La condition de compatiblité est alors

$$6x^5u_x + 2x^6u_{xx} - 6a_4^2 - 6a_4a_6x + 6a_4a_3x = 0, \tag{3.2.44}$$

donc $u = \frac{3a_4^2}{8x^4} - \frac{c_1}{2x^2} - \frac{a_4(a_3-a_6)}{x^3} + c_2$. La dernière équation du système à résoudre est

$$\begin{aligned}(4a_3c_1 - 4a_6c_1)x^3 + (-4a_4c_1 - 3\hbar^2a_4 + 12a_3^2a_4 + 12a_6^2a_4 - 24a_6a_4a_3)x^2 \\ +(18a_4^2a_6 - 18a_4^2a_3)x + 6a_4^3 = 0,\end{aligned} \tag{3.2.45}$$

ce qui implique que $a_4 = 0$, donc que $\Omega = 0$.

### 3.2.3. Troisième système intégrable

Nous posons ici

$$\begin{aligned}\Omega &= g_{yy}, \\ W &= v(y),\end{aligned} \tag{3.2.46}$$

comme dans la solution (2.4.8). Ce cas se traite de la même facon que pour la deuxième forme de solution et mène aussi à $\Omega$ et $W$ constants.

## 3.3. Conclusion de la superintégrabilité cartésienne

Comme nous l'avons constaté dans les différentes sections de ce chapitre, le seul système superintégrable qui possède une intégrale cartésienne supplémentaire est celui où $\Omega$ et $W$ sont constants, que nous avons déjà rencontré lorsque nous avons étudié la superintégrabilité linéaire. Nous allons vérifier que l'intégrale d'ordre deux (1.2.47) s'écrit bien en termes des trois intégrales linéaires (1.2.37) en posant $\Omega = \Omega_0$ et $W = 0$ dans le système d'équations général (1.2.46). Nous obtiendrons ainsi une intégrale de la forme

$$C_{class} = \alpha(x\dot{y}-y\dot{x})^2+(x\dot{y}-y\dot{x})(\beta\dot{x}+\gamma\dot{y})+\delta\dot{x}^2+\zeta\dot{y}^2+\xi\dot{x}\dot{y}+k_0\dot{x}+k_1\dot{y}+m, \tag{3.3.1}$$

où les fonctions $k_0(x,y)$, $k_1(x,y)$ et $m(x,y)$ devront satisfaire aux équations

$$\begin{aligned} k_{0x} - g_1\Omega_0 &= 0, \\ k_{1y} + g_1\Omega_0 &= 0, \\ 2\Omega_0(g_0 - g_2) + k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\ k_1\Omega_0 - m_x &= 0, \\ k_0\Omega_0 + m_y &= 0, \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

avec

$$\begin{aligned} g_0 &= \alpha y^2 - \beta y + \delta, \\ g_1 &= -2\alpha xy + \beta x - \gamma y + \xi, \\ g_2 &= \alpha x^2 + \gamma x + \zeta. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

La solution se calcule par intégration directe des équations et est

$$k_0 = \frac{1}{2}(\Omega_0(-2\alpha x^2 y + \beta x^2 + 2\xi x - 2\gamma xy - 2\alpha y^3 + 3\beta y^2) + 2a_1 y + 2a_2), \tag{3.3.4}$$

$$k_1 = \frac{1}{2}(\Omega_0(2\alpha x^3 + 3\gamma x^2 - 2\beta xy + 2\alpha xy^2 + 4(\zeta - \delta)x + \gamma y^2 - 2\xi y) - 2a_1 x + 2a_3), \tag{3.3.5}$$

et

$$m = \frac{1}{4}(\Omega_0^2(\alpha x^4 + 2\gamma x^3 + (-2\beta y + 2\alpha y^2 - 4\delta + 4\zeta)x^2 + (-4\xi y + 2\gamma y^2)x$$
$$+(\alpha y - 2\beta)y^3) + \Omega_0(4a_3 x - 4a_2 y - 2a_1 y^2 - 2a_1 x^2)). \tag{3.3.6}$$

L'intégrale obtenue peut donc bel et bien s'écrire comme un polynôme des trois intégrales linéaires :

$$C = \alpha C_3^2 + C_3(C_1 + C_2) + \xi C_1 C_2 + \zeta C_2^2 - a_1 C_3 + \delta(C_1^2 - 2\Omega_0 C_3). \tag{3.3.7}$$

# Chapitre 4

## INTÉGRABILITÉ POLAIRE

### 4.1. Présentation

Considérons maintenant que nous quantifions la forme $C_R$ de l'équation (1.2.49), c'est-à-dire posons $\alpha = 1$ et $\beta = \delta = \gamma = \xi = \zeta = 0$ dans les équations (1.2.45). Le système d'équations (1.2.46) prend donc la forme suivante après un passage en coordonnées polaires ($x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$) :

$$P_r = 0,\ P + Q_\phi = 0, \tag{4.1.1}$$

$$2r^3\Omega - P_\phi - rQ_r + Q = 0, \tag{4.1.2}$$

$$m_\phi - 2r^2W_\phi + rP\Omega = 0,\ m_r - Q\Omega = 0, \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\hbar^2}{2}\Omega_\phi + PW_r + \frac{1}{r}QW_\phi = 0, \tag{4.1.4}$$

où

$$P = k_0\cos\phi + k_1\sin\phi,\ Q = -k_0\sin\phi + k_1\cos\phi.$$

Le terme en $\hbar^2$ de la dernière équation rend le problème très intéressant, car comme nous l'avons déjà mentionné, sans champ magnétique, il n'y a pas de différence entre les systèmes intégrables classiques et quantiques qui possèdent un invariant linéaire ou quadratique. Nous sommes donc en présence d'une situation complètement nouvelle. Notons que si nous avions posé $dC_R/dt = 0$, comme cela se fait habituellement pour traiter le cas classique, nous aurions obtenu le même système d'équations, avec $\hbar$ tendant vers zéro. Ainsi, les solutions que nous obtiendrons dans ce chapitre seront quantiques, mais leur limite classique donnera du coup les solutions classiques. De plus, il y aura de nouvelles intégrales quantiques sans "équivalents classiques" seulement si celles-ci représentent un système mécanique où le champ magnétique dépend de $\phi$.

Des équations (4.1.1), nous obtenons

$$P = -f'(\phi), \;\; Q = f(\phi) + R(r), \tag{4.1.5}$$

où $f$ et $R$ sont arbitraires pour le moment. Dans la suite de ces calculs, les apostrophes et les points dénoteront respectivement les dérivées par rapport à $r$ et $\phi$.

Le cas d'un potentiel purement scalaire peut facilement être retrouvé si nous posons $\Omega = P = Q = 0$. Le potentiel est alors $W = W_0(r) + (1/r^2)m(\phi)$ et il est effectivement séparable.

Écrivons maintenant l'équation (4.1.2) pour $\Omega \neq 0$ :

$$\Omega = -\frac{1}{2r^3}(f'' + f + R - r\dot{R}). \tag{4.1.6}$$

Des équations (4.1.3), nous obtenons la condition de compatibilité $m_{r\phi} = m_{\phi r}$, soit

$$2r^2 W_{r\phi} + 4rW_\phi + \frac{3f'}{2r^3}(f'' + f + R - r\dot{R}) + \frac{f'\ddot{R}}{2r} + \frac{1}{2r^3}(f+R)(f''' + f') = 0. \tag{4.1.7}$$

Si nous isolons $W_\phi$ dans l'équation (4.1.4) et que nous le substituons dans cette dernière équation, elle devient

$$\begin{gathered} W_{rr} + \tfrac{(3(f+R)-r\dot{R})}{r(f+R)} W_r - \tfrac{\hbar^2 \dot{R}(f'''+f')}{4r^3 f'(f+R)} + \tfrac{3(f+R)}{4r^6}(f'' + f + R - r\dot{R}) + \tfrac{(f+R)\ddot{R}}{4r^4} \\ + \tfrac{(f+R)^2}{4r^6 f'}(f''' + f') = 0. \end{gathered} \tag{4.1.8}$$

Nous pouvons ensuite la résoudre pour $W$ :

$$\begin{gathered} W = \tfrac{\hbar^2(f'''+f')}{8r^2 f'} - \tfrac{3f(f''+f)}{32r^4} - \tfrac{f'''}{8f'} r^6 \dot{u}^2 - \tfrac{r^2}{8}(r^3\ddot{u} + 3r^2\dot{u})^2 - \tfrac{f^2(f'''+f')}{32f'r^4} \\ - \tfrac{Ff}{2r^2} + (\tfrac{3f''}{8} + \tfrac{ff'''}{8f'}) r\dot{u} + \tfrac{3f''}{4}u - \tfrac{f}{4r}(r^3\ddot{u} + 3r^2\dot{u}) + Fr^3\dot{u} + W_0, \end{gathered} \tag{4.1.9}$$

où $F = F(\phi)$ et $W_0 = W_0(\phi)$ sont des constantes d'intégration, et où $W$ a été écrite en termes d'une fonction $u = u(r)$ telle que $R = r^3\dot{S}(r)$ et $S = r^3\dot{u}(r)$. Il y a deux cas particuliers à traiter, soit $f + R = 0$ et $f' = 0$. Nous y reviendrons dans la dernière section du chapitre.

## 4.2. Solutions générales

Résolvons maintenant le cas général, c'est-à-dire considérons que $f + R \neq 0$ et $f' \neq 0$ dans la suite des calculs. Nous pouvons donc remplacer $W$ par (4.1.9) dans les équations (4.1.3) et (4.1.4) pour obtenir les relations suivantes :

$$m = \frac{ff''}{4r^2} + \frac{f^2}{4r^2} + \frac{fR}{2r^2} - \frac{f''S}{2} + \frac{R^2}{4r^2} + m_0(\phi), \tag{4.2.1}$$

$$m_0' = 2f'F \tag{4.2.2}$$

et

$$\dddot{u} + \frac{6}{r}\ddot{u} - \frac{r^3\dot{u}^2}{2}(\frac{f'''}{f'})'\frac{1}{f'} + (\frac{6}{r^2} + \frac{C}{2r^2f'} + \frac{4F'}{f'})\dot{u} + \frac{3f'''}{r^3f'}u + \frac{4A}{r^7f'} + \frac{4B}{r^5f'} + \frac{4W_0'}{r^3f'} = 0, \tag{4.2.3}$$

où

$$\begin{aligned} A &= -\tfrac{9ff'''}{32} - \tfrac{f^2}{32}(\tfrac{f'''}{f'})' - \tfrac{15f'f''}{32} - \tfrac{3ff'}{4}, \\ B &= \tfrac{\hbar^2}{8}(\tfrac{f'''}{f'})' - \tfrac{fF'}{2} - \tfrac{3f'F}{2}, \\ C &= 6f''' + f(\tfrac{f'''}{f'})', \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

ne dépendent pas de $r$.

La prochaine étape consiste à résoudre (4.2.3). Pour y parvenir, nous établissons des conditions nécessaires pour satisfaire l'équation en la dérivant plusieurs fois par rapport $\phi$. Une première dérivation donne

$$-\frac{r^3\dot{u}^2}{2}((\frac{f'''}{f'})'\frac{1}{f'})' + (\frac{C}{2r^2f'} + \frac{4F'}{f'})'\dot{u} + \frac{3}{r^3}(\frac{f'''}{f'})'u + \frac{4}{r^7}(\frac{A}{f'})' + \frac{4}{r^5}(\frac{B}{f'})' + \frac{4}{r^3}(\frac{W_0'}{f'})' = 0. \tag{4.2.5}$$

Avant de dériver de nouveau, il serait judicieux de diviser toute l'équation par le coefficient de $-r^3\dot{u}^2/2$, de manière à faire disparaître le terme non linéaire en $\dot{u}$. Cependant, il faut d'abord considérer le cas où ce coefficient est nul.

### 4.2.1. Première forme de solution générale

Considérons donc que

$$((\frac{f'''}{f'})'(\frac{1}{f'}))' = 0, \tag{4.2.6}$$

c'est-à-dire

$$f'' = \frac{K_1 f^2}{2} + K_2 f + K_3. \tag{4.2.7}$$

Si nous remplacons toutes les dérivées de $f$ d'ordre supérieur ou égal à deux dans (4.2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}\tfrac{7K_1 f'}{2r^2}\dot{u} + 4(\tfrac{F'}{f'})'\dot{u} + \tfrac{3K_1 f'}{r^3}u + \tfrac{4}{r^7}(-\tfrac{35}{32}K_1 f f' - \tfrac{3}{4}(K_2+1)f') \\ +\tfrac{4}{r^5}(-\tfrac{1}{2}(\tfrac{F'f}{f'})' - \tfrac{3F'}{2}) + \tfrac{4}{r^3}(\tfrac{W_0'}{f'})' = 0.\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Encore une fois, pour poursuivre notre suite de dérivations, il faut considérer les cas $K_1 = 0$ et $K_1 \neq 0$.

**Cas 1.1 :** $K_1 = 0$ $(\frac{f'''}{f'} = K_2)$

L'équation devient

$$4(\frac{F'}{f'})'\dot{u} - \frac{3}{r^7}(K_2+1)f' - \frac{2}{r^5}((\frac{F'f}{f'})' + 3F') + \frac{4}{r^3}(\frac{W_0'}{f'})' = 0. \tag{4.2.9}$$

**Cas 1.1.1 : $(\frac{F'}{f'})' = 0$ $(K_1 = 0)$**

Nous avons alors $F = K_4 f + K_5$ et le reste de l'équation est un polynôme de Laurent en $r$ dont chacun des trois coefficients devra s'annuler séparément pour donner les conditions

$$\begin{aligned} K_2 = -1 &\Longrightarrow f = C_0 + C_1\cos(\phi) + C_2\sin(\phi), \\ K_4 = 0 &\Longrightarrow F = K_5, \\ W_0 &= K_6 f + K_7. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

La résolution associée à ce cas sera faite plus loin.

**Cas 1.1.2 : $(\frac{F'}{f'})' \neq 0$**

Divisons (4.2.9) par cette quantité et dérivons par rapport à $\phi$ :

$$\frac{4}{r^7}\left(\frac{-\frac{3}{4}(K_2+1)f'}{(\frac{F'}{f'})'}\right)' + \frac{4}{r^5}\left(\frac{-\frac{1}{2}(\frac{F'f}{f'})' - \frac{3F'}{2}}{(\frac{F'}{f'})'}\right)' + \frac{4}{r^3}\left(\frac{(\frac{W_0'}{f'})'}{(\frac{F'}{f'})'}\right)' = 0. \tag{4.2.11}$$

Si nous exigeons que le coefficient de $\frac{4}{r^7}$ soit nul, nous obtenons

$$F = -\frac{3(K_2+1)f^2}{8D_1} + \frac{D_2 f}{D_1} + D_3. \tag{4.2.12}$$

**Cas 1.1.2.1 : $D_1 \neq 0$**

Le coefficient de $\frac{4}{r^5}$ devient alors un polynôme de degré deux en $f(\phi)$, qui rappelons-le, n'est pas une fonction constante :

$$\frac{15}{16D_1}(K_2+1)f^2 + \frac{3D_4(K_2+1) - 8D_2}{4D_1}f - \frac{3D_3}{2} - \frac{D_4 D_2}{D_1} - D_5 = 0. \tag{4.2.13}$$

Ainsi, les trois coefficients doivent s'annuler séparemment et cela entraîne $K_2 = 1$, $D_2 = 0$, $D_4 = D_4$ et $D_5 = -\frac{3D_3}{2}$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} F &= D_3, \\ f &= C_0 + C_1\cos(\phi) + C_2\sin(\phi). \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Il reste à exiger que le coefficient de $\frac{4}{r^3}$ s'annule aussi :

$$W_0 = D_3 D_6 + D_7 f + D_8. \tag{4.2.15}$$

Comme $f$, $F$ et $W_0$ ont exactement la même forme que ceux trouvés dans le cas (1.1.1), nous nous arrêtons ici.

**Cas 1.1.2.2 :** $D_1 = 0$

Dans ce cas, le coefficient de $\frac{4}{r^7}$ de l'équation (4.2.11) s'annule si $K_2 = -1$, donc nous avons encore $f = C_0 + C_1 \cos(\phi) + C_2 \sin(\phi)$. Le coefficient de $\frac{4}{r^5}$ est une équation d'où nous tirons

$$F = -\frac{2\alpha_2}{3} + \frac{\alpha_3}{(2\alpha_1 + f)^3}. \tag{4.2.16}$$

Le coefficient de $\frac{4}{r^3}$ donne

$$W_0 = \beta_1 F + \beta_2 f + \beta_3. \tag{4.2.17}$$

Si nous entrons $F$ et $W_0$ dans l'équation (4.2.3) et que nous la dérivons par rapport à $\phi$, nous obtenons la condition

$$48 f' \alpha_3 (r^5 \dot{u} + \alpha_1 + r^2 \beta_1) = 0. \tag{4.2.18}$$

Dans le cas où $\alpha_3 = 0$, nous avons que $F = -\frac{2\alpha_2}{3}$ et $W_0 = \beta_2 f + \beta_3 - \frac{2\beta_1\alpha_2}{3}$ et il s'agit encore d'un cas ayant la même forme que le cas où $(\frac{F'}{f'})' = 0$ étudié précédemment. Si $(r^5 \dot{u} + \alpha_1 + r^2 \beta_1) = 0$, alors

$$u = \frac{\beta_1}{2r^2} + \frac{\alpha_1}{4r^4} + \beta_4. \tag{4.2.19}$$

En substituant ce $u$ dans (4.2.3), nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} u &= -\tfrac{4\alpha_2}{3r^2} - \tfrac{C_0}{8r^4} + \tfrac{4\beta_2}{3}, \\ S = r^3\dot{u} &= \tfrac{16r^2\alpha_2+3C_0}{6r^2}, \\ R = r^3\dot{S} &= -C_0. \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

Or, d'après l'équation (4.1.6) pour $\Omega$, nous avons $\Omega = 0$ et nous ne conservons donc pas ce cas.

**Cas 1.2 :** $K_1 f' \neq 0$

Nous pouvons diviser (4.2.8) par cette quantité et la dériver par rapport à $\phi$ :

$$4\left(\frac{(\frac{F'}{f'})'}{f'}\right)'\dot{u}+\frac{4}{r^7}\left(-\frac{35}{32}K_1 f'\right)+\frac{4}{r^5}\left(-\frac{1}{2f'}\left(\frac{F'f}{f'}\right)'-\frac{3F'}{2f'}\right)'+\frac{4}{r^3}\left(\frac{1}{f'}\left(\frac{W_0'}{f'}\right)'\right)' = 0. \tag{4.2.21}$$

**Cas 1.2.1 :** $\left(\frac{(\frac{F'}{f'})'}{f'}\right)' = 0$

L'équation (4.2.21) devient alors un polynôme de Laurent dont les trois coefficients doivent s'annuler séparemment. En particulier, $K_1 f' = 0$, ce qui est une contradiction dans le cas présent.

**Cas 1.2.2 :** $\left(\frac{(\frac{F'}{f'})'}{f'}\right)' = \Gamma' \neq 0$

Divisons (4.2.21) par cette quantité et dérivons par rapport à $\phi$ :

$$\frac{4}{r^7}\left(\frac{-\frac{35}{32}K_1 f'}{\Gamma'}\right)' + \frac{4}{r^5}\left(\frac{(-\frac{1}{2f'}(\frac{F'f}{f'})' - \frac{3F'}{2f'})'}{\Gamma'}\right)' + \frac{4}{r^3}\left(\frac{(\frac{1}{f'}(\frac{W_0'}{f'})')'}{\Gamma'}\right)' = 0. \tag{4.2.22}$$

Le coefficient de $\frac{4}{r^7}$ implique que

$$F = \frac{K_1 f^3}{6C_1} - \frac{C_2 f^2}{2C_1} - \frac{C_3 f}{C_1} + C_4. \tag{4.2.23}$$

**Cas 1.2.2.1 :** $C_1 \neq 0$

Le coefficient de $\frac{1}{r^5}$ est alors un polynôme de degré trois pour $f$ :

$$-\frac{6K_1}{12C_1}f^3+\frac{5C_2-2C_5K_1}{4C_1}f^2+\frac{1}{2C_1}(4C_3+2C_2C_5-2C_1C_6)f-\frac{3C_4}{2}-C_7+\frac{C_3C_5}{C_1}=0. \tag{4.2.24}$$

Le coefficient de $f^3$ implique $K_1 = 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ du cas (1.2).

**Cas 1.2.2.2 :** $C_1 = 0$

Nous avons ici $K_1 f' = 0$, c'est-à-dire $K_1 = 0$, ce qui est encore une contradiction. Ainsi, de facon générale, le cas (1) donne lieu a une solution :

$$\begin{aligned} f &= C_0 + C_1\cos(\phi) + C_2\sin(\phi), \\ F &= K_2, \\ W_0 &= K_3 f + K_4. \end{aligned} \tag{4.2.25}$$

L'équation (4.2.3) devient finalement

$$\dddot{u} + \frac{6}{r}\ddot{u} + \frac{3}{r^2}\dot{u} - \frac{3}{r^3}u - \frac{15C_0}{8r^7} - \frac{6K_2}{r^5} + \frac{4K_3}{r^3} = 0, \tag{4.2.26}$$

dont la solution se calcule à l'aide de la méthode de variation des paramètres :

$$\begin{aligned} u &= -\tfrac{C_0}{8r^4} + \tfrac{2K_2}{r^2} + \tfrac{4K_3}{3} + ar + \tfrac{b}{r} + \tfrac{c}{r^3}, \\ S &= r^3\dot{u} = \tfrac{C_0}{2r^2} - 4K_2 + ar^3 - br - \tfrac{3c}{r}, \\ R &= r^3\dot{S} = -C_0 + 3ar^5 - br^3 + 3cr, \end{aligned} \tag{4.2.27}$$

où $a$, $b$ et $c$ sont des constantes d'intégration.

Des équations (4.1.6), (4.1.9), (4.2.1) et (4.2.2) pour $\Omega$, $W$ et $m$ nous obtenons

$$\Omega = 6ar^2 - b, \tag{4.2.28}$$

$$W = C_0K_3 + K_4 - 2K_2^2 - 2aC_1r\cos(\phi) - 2aC_2r\sin(\phi) + \frac{abr^4}{2} - 3acr^2 - a^2r^6 + \frac{3bc}{2}, \tag{4.2.29}$$

et, à une constante additive près,

$$m = \frac{fC_0}{4r^2} + \frac{rf\dot{S}}{2} + \frac{fS}{2} - \frac{C_0S}{2} + \frac{r^4\dot{S}^2}{4} + 2K_2f, \tag{4.2.30}$$

c'est-à-dire

$$\begin{gathered} m = -\tfrac{3bcr^2}{2} + \tfrac{9acr^4}{2} - \tfrac{3abr^6}{2} + 2C_1ar^3\cos(\phi) - C_1br\cos(\phi) \\ +2C_2ar^3\sin(\phi) - C_2br\sin(\phi) + \tfrac{9a^2r^8}{4} + \tfrac{b^2r^4}{4} + \tfrac{9c^2}{4}. \end{gathered} \tag{4.2.31}$$

Comme $\Omega$ ne dépend pas de $\phi$, le système d'équations (4.1.1) à (4.1.4) ne se distingue plus du cas classique. C'est pourquoi nous écrirons ici l'intégrale sous sa forme classique seulement :

$$\begin{gathered} C_R = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + (-C_2 - (3ar^5 - br^3 + 3cr)\sin(\phi))\dot{x} \\ +(C_1 + (3ar^5 - br^3 + 3cr)\cos(\phi))\dot{y} - \tfrac{3bcr^2}{2} + \tfrac{9acr^4}{2} \\ -\tfrac{3abr^6}{2} + 2C_1ar^3\cos(\phi) - C_1br\cos(\phi) + 2C_2ar^3\sin(\phi) \\ -C_2br\sin(\phi) + \tfrac{9a^2r^8}{4} + \tfrac{b^2r^4}{4} + \tfrac{9c^2}{4} \end{gathered} \tag{4.2.32}$$

### 4.2.2. Deuxième forme de solution générale

Dans le deuxième cas, soit celui où $((\frac{f'''}{f'})'(\frac{1}{f'}))' = \omega' \neq 0$, nous pouvons diviser l'équation (4.2.5) par cette quantité et dériver par rapport à $\phi$ :

$$\left(\frac{(\frac{C}{2r^2f'} + \frac{4F'}{f'})'}{\omega'}\right)'\dot{u} + \frac{3}{r^3}\left(\frac{(\frac{f'''}{f'})'}{\omega'}\right)'u + \frac{4}{r^7}\left(\frac{(\frac{A}{f'})'}{\omega'}\right)' + \frac{4}{r^5}\left(\frac{(\frac{B}{f'})'}{\omega'}\right)' + \frac{4}{r^3}\left(\frac{(\frac{W_0'}{f'})'}{\omega'}\right)' = 0. \tag{4.2.33}$$

Adoptons une notation plus concise pour cette dernière équation :

$$T_1'\dot{u} + \frac{3}{r^3}T_2'u + \frac{4}{r^7}T_3' + \frac{4}{r^5}T_4' + \frac{4}{r^3}T_5' = 0. \tag{4.2.34}$$

**Cas 2.1 :** $T_1' = 0$ $(T_1 = K_1)$

Nous avons alors

$$F = \frac{K_1}{4}(\frac{f'''}{f'}) + \frac{K_2 f}{4} + K_3 \tag{4.2.35}$$

et

$$(\frac{f'''}{f'})' = -\frac{6f'''}{f}. \tag{4.2.36}$$

**Cas 2.1.1 :** $T_2' = 0$ $(T_2 = C_1)$

Cela implique que

$$\frac{f'''}{f'} = (\frac{f'''}{f'})'(\frac{1}{f'})C_1 + C_2. \tag{4.2.37}$$

Nous avons donc maintenant deux équations pour $f$. Si nous posons $g = \frac{f'''}{f'}$, elles deviennent

$$g = C_1(\frac{1}{f'})g' + C_2 \tag{4.2.38}$$

et

$$\frac{g'}{g} = -6\frac{f'}{f}. \tag{4.2.39}$$

De l'équation (4.2.39), nous obtenons $g = \frac{K_0}{f^6}$. Si nous écrivons de nouveau l'équation (4.2.38) en y substituant ce $g$, nous obtenons la condition

$$C_2 f^7 - K_0 f - 6C_1 K_0 = 0. \tag{4.2.40}$$

Comme nous sommes dans le cas général où $f + R \neq 0$ et $f' \neq 0$, cela implique que $K_0 = C_2 = 0$, donc que $g = \frac{K_0}{f^6} = 0$. Ainsi, nous concluons que $\omega' = 0$, ce qui est une contradiction de l'hypothèse de départ du cas (2).

**Cas 2.1.2 :** $T_2' \neq 0$

L'équation (4.2.34) devient

$$u = -\frac{4}{3T_2'}(\frac{T_3'}{r^4} + \frac{T_4'}{r^2} + T_5'), \tag{4.2.41}$$

et $u$ ne dépend que de $r$, $\frac{T_3'}{T_2'}$, $\frac{T_4'}{T_2'}$ et $\frac{T_5'}{T_2'}$ devront être des constantes. La fonction $u$ prendra donc la forme

$$u = \frac{a}{r^4} + \frac{b}{r^2} + c \tag{4.2.42}$$

pour $a$, $b$ et $c$ constants. Nous reviendrons sur la solution engendrée par ce cas plus loin.

**Cas 2.2 :** $T_1' \neq 0$

Posons $T_1' = \frac{S_1'}{2r^2} + 4S_2'$ pour bien tenir compte de la dépendance en $r$ des différents termes à manipuler. Nous avons donc

$$\frac{S_1'}{2r^2}\dot{u} + 4S_2'\dot{u} + \frac{3}{r^3}T_2'u + \frac{4}{r^7}T_3' + \frac{4}{r^5}T_4' + \frac{4}{r^3}T_5' = 0. \tag{4.2.43}$$

**Cas 2.2.1 :** $S_1' = 0$ ($S_2' \neq 0$)

L'équation (4.2.43) prend alors la forme

$$\dot{u} + f_1(\phi)\frac{u}{r^3} + \frac{f_2(\phi)}{r^7} + \frac{f_3(\phi)}{r^5} + \frac{f_4(\phi)}{r^3} = 0. \tag{4.2.44}$$

Nous pouvons dériver cette équation par rapport à $\phi$ et isoler $u$ :

$$u = -\frac{f_2'}{r^4 f_1'} - \frac{f_3'}{r^2 f_1'} - \frac{f_4'}{f_1'}. \tag{4.2.45}$$

Comme la fonction $u$ ne dépend que de $r$, les fonctions $\frac{f_2'}{f_1'}$, $\frac{f_3'}{f_1'}$ et $\frac{f_4'}{f_1'}$ devront être des constantes. Ainsi, $u$ aura la forme

$$u = \frac{a}{r^4} + \frac{b}{r^2} + c, \tag{4.2.46}$$

comme dans le cas (2.1.2). Il faut maintenant envisager la possibilité où $f_1' = 0$, c'est-à-dire où $f_1 = c_1$. L'équation (4.2.45) implique alors

$$\frac{f_2'}{r^7} + \frac{f_3'}{r^5} + \frac{f_4'}{r^3} = 0. \tag{4.2.47}$$

c'est-à-dire $f_2 = c_2$, $f_3 = c_3$ et $f_4 = c_4$. La solution de (4.2.44) prend donc la forme

$$u = \frac{a}{r^4} + \frac{b}{r^2} + c + de^{\frac{c_1}{2r^2}} \tag{4.2.48}$$

si $c_1 \neq 0$, et

$$u = \frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^2} + d \tag{4.2.49}$$

si $c_1 = 0$.

Dans les deux cas, si nous entrons la fonction $u$ dans l'équation (4.2.3), celle-ci devient un polynôme en $r$ à coefficients constants (par rapport à $r$). Chacun des coefficients devant s'annuler séparément, nous devons conclure que $d = 0$ dans le premier cas et $a = 0$ dans le deuxième cas pour éviter de contredire les hypothèses en vigueur. Ainsi, la fonction $u$ prend la finalement la même forme que celle obtenue précédemment dans le cas (2.1.2) et nous avons déjà fait le choix d'en reparler plus tard.

**Cas 2.2.2 : $S_1' \neq 0$**

Divisons (4.2.43) par $S_1'$ et dérivons par rapport à $\phi$ :

$$4(\frac{S_2'}{S_1'})'\dot{u} + \frac{3}{r^3}(\frac{T_2'}{T_1'})'u + \frac{4}{r^7}(\frac{T_3'}{S_1'})' + \frac{4}{r^5}(\frac{T_4'}{S_1'})' + \frac{4}{r^3}(\frac{T_5'}{S_1'})' = 0. \tag{4.2.50}$$

**Cas 2.2.2.1 : $(\frac{S_2'}{S_1'})' \neq 0$**

L'équation prend alors la forme

$$\dot{u} + f_1(\phi)\frac{u}{r^3} + \frac{f_2(\phi)}{r^7} + \frac{f_3(\phi)}{r^5} + \frac{f_4(\phi)}{r^3} = 0, \tag{4.2.51}$$

ce qui est exactement la forme obtenue dans le cas (2.2.1) et nous en tirons donc la même conclusion.

**Cas 2.2.2.2 :** $(\frac{S_2'}{S_1'})' = 0$

L'équation pour $u$ est dans ce cas

$$\frac{3}{r^3}(\frac{T_2'}{S_1'})'u + \frac{4}{r^7}(\frac{T_3'}{S_1'})' + \frac{4}{r^5}(\frac{4}{r^5}(\frac{T_4'}{S_1'})' + \frac{4}{r^3}(\frac{T_5'}{S_1'})' = 0. \tag{4.2.52}$$

Si $(\frac{T_2'}{S_1'})' \neq 0$, alors $u$ prend la forme $u = \frac{a}{r^4} + \frac{b}{r^2} + c$. Autrement, nous avons au total

$$\begin{aligned} &(a)\ (\tfrac{S_2'}{S_1'})' = 0\\ &(b)\ (\tfrac{T_2'}{S_1'})' = 0\\ &(c)\ (\tfrac{T_3'}{S_1'})' = 0\\ &(d)\ (\tfrac{T_4'}{S_1'})' = 0\\ &(e)\ (\tfrac{T_5'}{S_1'})' = 0 \end{aligned} \tag{4.2.53}$$

L'équation $(b)$ de (4.2.53) implique que

$$\frac{f'''}{f'} = K_1(\frac{6f'''}{f'} + \frac{f}{f'}(\frac{f'''}{f'})') + K_2(\frac{f'''}{f'})'(\frac{1}{f'}) + K_3. \tag{4.2.54}$$

Si nous posons $g = \frac{f'''}{f'}$, elle devient

$$g' + \frac{(6K_1 - 1)f'}{K_1 f + K_2} g + \frac{K_3 f'}{K_1 f + K_2} = 0, \tag{4.2.55}$$

où $K_1 f + K_2 \neq 0$, sinon l'hypothèse du cas (2) est contredite. Il y a trois cas à considérer pour la solution de cette équation.

**(A)** Si $K_1 \neq 0$ et $6K_1 - 1 \neq 0$, alors

$$g = -\frac{K_3}{6K_1 - 1} + K_4(K_1 f + K_2)^{\frac{1-6K_1}{K_1}}. \tag{4.2.56}$$

Cela implique deux possibilités, soit $K_1 \neq 1/5$ **(A.1)**, auquel cas

$$f'' = -\frac{K_3 f}{6K_1 - 1} + \frac{K_1 K_4}{1 - 5K_1}(K_1 f + K_2)^{1-5K_1}. \tag{4.2.57}$$

ou alors $K_1 = 1/5$ **(A.2)** et

$$f'' = 5K_4 \ln(f + 5K_2) - 5K_3 f + K_5. \tag{4.2.58}$$

**(B)** Si $K_1 = 0$, nous avons

$$g = K_3 + K_4 e^{\frac{f}{K_2}} \tag{4.2.59}$$

et cela implique que

$$f'' = K_3 f + K_2 K_4 e^{\frac{f}{K_2}} + K_5. \tag{4.2.60}$$

**(C)** Si $K_1 = 1/6$, alors

$$g = -6K_3 \ln(f + 6K_2) + K_4 \tag{4.2.61}$$

et nous avons

$$f'' = -6K_3((f + 6K_2)\ln(f + 6K_2) - (f + 6K_2)) + K_4 f + K_5. \tag{4.2.62}$$

Nous avons donc quatre cas à considérer, soit **(A.1)**, **(A.2)**, **(B)** et **(C)**. Pour chacun d'eux, nous substituerons les fonctions $g$ et $f''$ obtenues dans l'équation $(c)$ de (4.2.53), c'est-à-dire

$$(\frac{32C_1 f + 32C_2 + f^2}{32f'})g' + (6C_1 + \frac{9f}{32})g + \frac{15f''}{32} + \frac{3f}{4} + C_3 = 0, \tag{4.2.63}$$

et nous obtiendrons une équation algébrique à coefficients constants pour $f$. Comme $f$ n'est pas constante, les coefficients devront s'annuler séparément. En résumé, cela implique que $K_1 = 0$ dans les cas **(A.1)**, **(A.2)** et **(B)**, et $K_3 = 0$ dans le cas **(C)**. Ainsi, nous tirons de ces quatre cas une seule conclusion, soit

$$(\frac{f'''}{f'})' = 0, \tag{4.2.64}$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ, à savoir $\omega' \neq 0$.

Nous demeurons donc avec une seule forme possible pour la fonction $u$, soit

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{a}{8r^4} + \tfrac{b}{2r^2} + c, \\ S &= r^3\dot{u} = -\tfrac{a}{2r^2} - b, \\ R &= r^3\dot{S} = a. \end{aligned} \tag{4.2.65}$$

L'équation (4.2.3) devient alors un polynôme de Laurent où trois puissances de $r$ apparaissent :

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{r^7}(-\tfrac{a^2}{8}(\tfrac{f'''}{f'})'(\tfrac{1}{f'}) - 3a - \tfrac{aC}{4f'} + \tfrac{3af'''}{8f'} + \tfrac{4A}{f'}) + \tfrac{1}{r^5}(-\tfrac{ab}{2}(\tfrac{f'''}{f'})'(\tfrac{1}{f'}) - \tfrac{bC}{2f'} - \tfrac{4aF'}{2f'} + \tfrac{3ff'''}{2f'} + \tfrac{4B}{f'}) \\ +\tfrac{1}{r^3}(-\tfrac{b^2}{2}(\tfrac{f'''}{f'})'(\tfrac{1}{f'}) - \tfrac{4bF'}{f'} + \tfrac{3cf'''}{f'} + \tfrac{4W_0'}{f'}) = 0. \end{gathered} \tag{4.2.66}$$

Chacun de ces coefficients doit s'annuler séparément et cela entraîne les trois conditions suivantes :

$$\begin{aligned} (f+a)^2(\tfrac{f'''}{f'})' + 24f'(f+a) + 9f'''(f+a) + 15f'f'' &= 0, \\ F = -\tfrac{bf'''}{4f'} + \tfrac{\hbar^2}{4(f+a)^3}((f+a)^2\tfrac{f'''}{f'} - 2(f+a)f'' + (f')^2) &+ \tfrac{C_1}{(f+a)^3}, \\ W_0 = \tfrac{b^2f'''}{8f'} + bF - \tfrac{3cf''}{4} &+ C_2. \end{aligned} \tag{4.2.67}$$

La première équation est pour $f$ et peut être intégrée deux fois :

$$\begin{gathered} (f+a)^3f'' + 2(f')^2(f+a)^2 + 3(f+a)^4 = \tfrac{\delta_1}{2}(f+a)^2 + \delta_2, \\ y^3y'' + 2y^2(y')^2 + 3y^4 - \tfrac{\delta_1 y^2}{2} - \delta_2 = 0, \quad y = f+a. \end{gathered} \tag{4.2.68}$$

Cette dernière équation est invariante sous l'action des translations de $\phi$ puisque la variable indépendante $\phi$ n'y apparaît pas explicitement. Cette symétrie nous permet de réduire l'ordre de l'équation et de la résoudre implicitement. Posons d'abord $u = y$ et $w = \phi$, d'où nous tirons

$$y' = \frac{1}{w_u} \text{ et } y'' = -\frac{w_{uu}}{w_u^3}. \tag{4.2.69}$$

L'équation à résoudre devient donc

$$-u^3(\frac{w_{uu}}{w_u^3}) + 2u^2(\frac{1}{w_u})^2 + 3u^4 - \frac{\delta_1 u^2}{2} - \delta_2 = 0. \tag{4.2.70}$$

Si nous posons ensuite $z = w_u$, nous obtenons

$$z_u - \frac{2z}{u} + z^3(-3u + \frac{\delta_1}{2u} + \frac{\delta_2}{u^3}) = 0. \tag{4.2.71}$$

La solution de cette équation est

$$z = \frac{\pm 2u^2}{(-4u^6 + \delta_1 u^4 + 4\delta_2 u^2 + 4C_1)^{(1/2)}}, \tag{4.2.72}$$

d'où

$$w = \int \frac{\pm 2u^2}{(-4u^6 + \delta_1 u^4 + 4\delta_2 u^2 + 4C_1)^{(1/2)}} du + C_2, \tag{4.2.73}$$

et finalement

$$\int^{y(\phi)} \frac{\pm 2u^2}{\sqrt{-4u^6 + \delta_1 u^4 + 4\delta_2 u^2 + 4C_1}} du - \phi + C_2 = 0. \tag{4.2.74}$$

Cependant, cette solution implicite ne sera pas utile dans la suite puisqu'elle ne nous renseigne pas de façon pratique sur $f$.

Des équations (4.1.6), (4.1.9) et (4.2.1), nous obtenons finalement

$$\Omega = -\frac{f'' + f + a}{2r^3}, \tag{4.2.75}$$

$$W = \frac{\hbar^2}{8r^2}(1 + \frac{2f''}{f+a} - \frac{(f')^2}{(f+a)^2}) - \frac{(f+a)^2}{32r^4}(\frac{f'''}{f'} + 4) - \frac{3f''(f+a)}{32r^4} - \frac{C_1}{2r^2(f+a)^2} + C_2, \tag{4.2.76}$$

et

$$m = \frac{ff''}{4r^2} + \frac{(f+a)^2}{4r^2} - \frac{f''S}{2} + m_0, \tag{4.2.77}$$

où $m_0$, à une constante additive près, satisfait à l'équation (4.2.2) :

$$m_0 = -\frac{bf''}{2} - \frac{C_1}{(f+a)^2} + \frac{\hbar^2 f''}{2(f+a)} - \frac{\hbar^2 (f')^2}{4(f+a)^2}. \tag{4.2.78}$$

Ainsi,

$$m = \frac{ff''}{4r^2} + \frac{(f+a)^2}{4r^2} + \frac{af''}{4r^2} - \frac{C_1}{(f+a)^2} + \frac{\hbar^2 f''}{2(f+a)} - \frac{\hbar^2 (f')^2}{4(f+a)^2}. \tag{4.2.79}$$

Nous sommes ici en présence du seul cas où apparaissent des termes de correction en $\hbar^2$ dans la solution pour passer de la mécanique classique à la mécanique quantique. Il serait donc intéressant d'obtenir une solution particulière de l'équation (4.2.68). Pour ce faire, nous écrivons cette dernière équation sous la forme

$$y'' = -\frac{2}{y}(y')^2 - 3y + \frac{4A}{y} + \frac{B^2 - A^2}{y^3}, \tag{4.2.80}$$

où nous avons posé $\delta_1 = 8A$ et $\delta_2 = B^2 - A^2$, pour des constantes $A$ et $B$ arbitraires. Cette équation possède une intégrale première $K$, en termes de laquelle nous avons

$$(y')^2 = -y^2 + 2A + \frac{B^2 - A^2}{y^2} + \frac{K}{y^4}, \tag{4.2.81}$$

qui est intégrable par quadratures, mais nous nous intéresserons plutôt ici au cas particulier où $K = 0$, question de donner un exemple de solution. Nous obtenons ainsi une fonction élémentaire qui est périodique par rapport à $\phi$, donc qui a du sens du point de vue physique :

$$f(\phi) = -a + \sqrt{A + B\sin 2(\phi - \phi_0)}. \tag{4.2.82}$$

## 4.3. Solution particulière

Deux cas particuliers se présentent ici, soit $f + R = 0$ et $f' = 0$. Le premier a pour solution $f = K$ et $R = -K$ pour une certaine constante $K$, mais l'équation (4.1.6) implique alors un champ magnétique nul, ce que nous ne considérons pas dans le cadre de ces travaux. Dans le cas où $f' = 0$, la solution est tout simplement

$$\begin{aligned} P = 0,\ Q &= Q(r), \\ \Omega &= -\tfrac{1}{2r^3}(Q - rQ_r), \\ W &= W(r), \\ m &= \tfrac{Q^2}{4r^2}. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Encore une fois, $\Omega$ ne dépend pas de $\phi$, donc il y concordance entre les cas classique et quantique. L'intégrale classique est ici

$$C_R = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{Q}{r}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{Q^2}{4r^2}. \tag{4.3.2}$$

Il est intéressant de remarquer (voir équation (1.2.30)) que $C_R = C_\rho^2$ . En effet, dans les deux cas, $\Omega$ et $W$ sont des fonctions quelconques de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ seulement.

Ainsi, nous avons démontré dans ce chapitre qu'il y a une distinction à faire entre les cas classique et quantique lorsque nous avons affaire à des systèmes possédant une intégrale de forme polaire $C_R$. Nous avons identifié trois types de systèmes intégrables polaires, dont un arborait des termes de correction en $\hbar^2$. Rappelons que sans champ magnétique, les conditions d'existence d'intégrales d'ordre un et deux ne présentaient aucune différence entre la mécanique classique et la mécanique quantique. Il est fort à parier que des termes en $\hbar^2$ apparaîtront aussi dans certaines des solutions des systèmes d'équations associés aux intégrales de forme parabolique et elliptique.

# Chapitre 5

## SUPERINTÉGRABILITÉ POLAIRE

### 5.1. Présentation

Maintenant que nous connaissons les systèmes intégrables possédant une intégrale quadratique de forme polaire, nous nous intéressons à trouver lesquels parmi ceux-ci sont superintégrables. La constante du mouvement supplémentaire que nous cherchons prendra donc la forme classique

$$C = (x\dot{y} - y\dot{x})(\beta\dot{x} + \gamma\dot{y}) + \delta\dot{x}^2 + \zeta\dot{y}^2 + \xi\dot{x}\dot{y} + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \tag{5.1.1}$$

Il est à noter que nous la laissons en coordonnées cartésiennes car il n'y a pour l'instant aucune raison de croire que cette intégrale s'écrira simplement en coordonnées polaires. Après avoir quantifié $C$ et imposé la condition $[H, C] = 0$, avec $H$ provenant de l'équation (1.2.10), nous obtenons le système d'équations

$$k_{0x} - \Omega(\beta x - \gamma y + \xi) = 0, \tag{5.1.2}$$

$$k_{1y} + \Omega(\beta x - \gamma y + \xi) = 0, \tag{5.1.3}$$

$$2\Omega(-\beta y + \delta - \gamma x - \zeta) + k_{0y} + k_{1x} = 0, \tag{5.1.4}$$

$$2(-\beta y + \delta)W_x + (\beta x - \gamma y + \xi)W_y + k_1\Omega - m_x = 0, \tag{5.1.5}$$

$$2(\gamma x + \zeta)W_y + (\beta x - \gamma y + \xi)W_x - k_0\Omega - m_y = 0, \tag{5.1.6}$$

$$\frac{\hbar^2}{4}(\gamma\Omega_y + \beta\Omega_x) + k_0 W_x + k_1 W_y = 0, \tag{5.1.7}$$

qui est en fait le système (1.2.46) avec $\alpha = 0$.

## 5.2. Premier système intégrable

Nous sommes ici dans le cas où $\Omega = 6ar^2 - b$ et $W = W(r, \phi)$ (voir (4.2.29)). Nous commencons par écrire $\Omega$ et $W$ en coordonnées cartésiennes avant de les mettre dans les équations (5.1.2) et (5.1.3) et de les résoudre pour $k_0$ et $k_1$ :

$$\begin{aligned} k_0 = {} & \tfrac{3a\beta x^4}{2} - 2x^3 a\gamma y + 2x^3 a\xi - \tfrac{x^2 b\beta}{2} + 3x^2 ay^2\beta - 6xay^3\gamma \\ & +6xay^2\xi + xb\gamma y - xb\xi + k_{0h}(y), \\ k_1 = {} & \tfrac{3\gamma ay^4}{2} - 2y^3 a\beta x - 2y^3 a\xi + 3y^2 ax^2\gamma - \tfrac{y^2 b\gamma}{2} - 6yax^3\beta \\ & -6yax^2\xi + yb\beta x + yb\xi + k_{1h}(x). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Pour identifier la fonction $k_{1h}(y)$, nous dérivons (5.1.4), soit

$$\begin{aligned} & -24a\beta x^2 y + 12a\delta x^2 - 14a\gamma x^3 - 12a\zeta x^2 - 14a\beta y^3 + 12a\delta y^2 - 24a\gamma xy^2 - 12a\zeta y^2 \\ & +3b\beta y - 2b\delta + 3b\gamma x + 2b\zeta + k_{0y} + k_{1x} = 0, \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

deux fois par rapport à $x$ :

$$-48a\beta y + 24a\delta - 84a\gamma x - 24a\zeta + k_{1hxxx} = 0, \tag{5.2.3}$$

ce qui implique que $a\beta = 0$. Commençons par poser $\beta = 0$ ($a \neq 0$). Nous avons ensuite

$$k_{1h} = \frac{7a\gamma x^4}{2} + 4a(\zeta - \delta)x^3 + \frac{\alpha_1 x^2}{2} + \alpha_2 x + \alpha_3. \tag{5.2.4}$$

De même, si nous dérivons (5.1.4) deux fois par rapport à $y$, nous avons

$$-48a\gamma x + 24a\delta - 24a\zeta + k_{0hyyy} = 0, \tag{5.2.5}$$

ce qui nous amène à poser $\gamma = 0$. Nous obtenons alors

$$k_{0h} = 4ay^3(\zeta - \delta) + \frac{\beta_1 y^2}{2} + \beta_2 y + \beta_3. \tag{5.2.6}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} k_0 &= 2x^3a\xi + 6xay^2\xi - xb\xi + 4ay^3(\zeta - \delta) \\ &\quad + \tfrac{\beta_1 y^2}{2} + \beta_2 y + \beta_3, \\ k_1 &= -2y^3a\xi - 6yax^2\xi + yb\xi + 4a(\zeta - \delta)x^3 \\ &\quad + \tfrac{\alpha_1 x^2}{2} + \alpha_2 x + \alpha_3. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Si nous écrivons de nouveau l'équation (5.1.4), nous obtenons

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \beta_2 + \alpha_2 + 2b(\zeta - \delta) = 0, \tag{5.2.8}$$

donc $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ et $2b(\zeta - \delta) + \beta_2 + \alpha_2 = 0$. La condition de compatibilité $m_{xy} = m_{yx}$ qui découle des équations (5.1.5) et (5.1.6), c'est-à-dire

$$2(-\beta y+\delta-\gamma x-\zeta)W_{xy}+(\beta x-\gamma y+\xi)(W_{yy}-W_{xx})-3\beta W_x-3\gamma W_y+k1\Omega_y+k0\Omega_x = 0, \tag{5.2.9}$$

devient alors

$$\begin{aligned} &-24\xi a^2y^4 + (48\zeta a^2x - 48\delta a^2x)y^3 + 4\xi ay^2b + (-8\zeta abx \\ &+48\zeta a^2x^3 - 48\delta a^2x^3 + 8\delta abx)y + 24\xi a^2x^4 - 4\xi ax^2b = 0, \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

ce qui entraine $\xi = 0$ et $\zeta = \delta$.

**Première possiblité :** $\beta = \gamma = \xi = 0$ et $\zeta = \delta$

Si nous reprenons la résolution du système, nous avons

$$\begin{aligned} k_{0x} &= 0, \\ k_{1y} &= 0, \\ k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\ 2\delta W_x + k_1\Omega - m_x &= 0, \\ 2\delta W_y - k_0\Omega - m_y &= 0, \\ k_0W_x + k_1W_y &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Les trois premières équations impliquent que

$$\begin{aligned} k_0 &= \alpha_1 y + \alpha_2, \\ k_1 &= -\alpha_1 x + \alpha_3, \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

et la dernière équation donne ensuite

$$\begin{gathered}
-6\alpha_3 a^2 y^5 - 6\alpha_2 x a^2 y^4 + (-12\alpha_3 x^2 a^2 + 2\alpha_3 ab) y^3 \\
+(-12\alpha_2 x^3 a^2 + 2\alpha_2 x ab) y^2 + (2\alpha_3 x^2 ab - 6\alpha_3 x^4 a^2 \\
-6\alpha_3 ac - 2\alpha_1 C_1 a) y - 2\alpha_2 C_1 a + 2\alpha_2 x^3 ab \\
-2\alpha_3 a C_2 - 6\alpha_2 x ac + 2\alpha_1 x a C_2 - 6\alpha_2 a^2 x^5 = 0.
\end{gathered} \tag{5.2.13}$$

Nous obtenons donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, donc $k_0 = k_1 = 0$. Les quatrième et cinquième équations sont ensuite résolues pour $m$, à une constante additive près :

$$m = a\delta(-2a(x^2+y^2)^3 + by^4 + (2bx^2 - 6c)y^2 - 4C_2 y + x(bx^3 - 6cx - 4C_1). \tag{5.2.14}$$

L'intégrale $C$ est donc

$$C = \delta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m = 2\delta(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{2\delta}) = 2\delta H. \tag{5.2.15}$$

En effet,

$$W - \frac{m}{2\delta} = -K_4 + 2K_2^2 - K_3 C_0 - \frac{3bc}{2}. \tag{5.2.16}$$

Ainsi, nous avons simplement retrouvé le Hamiltonien, que nous savions depuis le début être une intégrale du mouvement. Il n'y a donc pas de système superintégrable associé à cette possibilité.

**Deuxième possibilité : $a = 0$**

L'autre moyen de satisfaire à l'équation (5.2.9) est de poser $a = 0$, c'est-à-dire $\Omega = -b = \Omega_0$. L'équation (4.2.29) implique alors que $W$ est constant et nous retrouvons donc le cas qui a été résolu de facon générale à la fin du chapitre trois.

## 5.3. Deuxième système intégrable

Ici, nous avons

$$\Omega = -\frac{f'' + f + a}{2r^3}, \tag{5.3.1}$$

et

$$W = \frac{\hbar^2}{8r^2}(1+\frac{2f''}{f+a}-\frac{(f')^2}{(f+a)^2})-\frac{(f+a)^2}{32r^4}(\frac{f'''}{f'}+4)-\frac{3f''(f+a)}{32r^4}-\frac{C_1}{2r^2(f+a)^2}+C_2, \tag{5.3.2}$$

où

$$(f+a)^2(\frac{f'''}{f'})' + 24f'(f+a) + 9f'''(f+a) + 15f'f'' = 0, \tag{5.3.3}$$

que l'on peut intégrer deux fois pour obtenir

$$y^3y'' + 2y^2(y')^2 + 3y^4 - \frac{\delta_1 y^2}{2} - \delta_2 = 0, \quad y = f + a. \tag{5.3.4}$$

Ce cas est plus complexe que le précédent, puisque $\Omega$ et $W$ sont exprimés en termes de la fonction $f$ qui n'est pas connue explicitement. Nous appliquons donc des transformations euclidiennes du plan et des combinaisons linéaires avec le Hamiltonien pour réduire le système à résoudre à deux formes plus simples, soit $\beta = \gamma = \xi = 0$ et $\zeta = -\delta$, puis $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\zeta = -\delta$ et $\xi = \xi$.

### 5.3.1. Premier cas

Dans le premier cas, c'est-à-dire $\beta = \gamma = \xi = 0$ et $\zeta = -\delta$, le système à résoudre est

$$\begin{gathered} k_{0x} = 0, \\ k_{1y} = 0, \\ 4\delta\Omega + k_{0y} + k_{1x} = 0, \\ 2\delta W_x + k_1\Omega - m_x = 0, \\ -2\delta W_y - k_0\Omega - m_y = 0, \\ k_0 W_x + k_1 W_y = 0. \end{gathered} \tag{5.3.5}$$

Les deux premières équations donnent

$$\begin{aligned} k_0 &= k_0(y) = k_0(r\sin(\phi)), \\ k_1 &= k_1(x) = k_1(r\cos(\phi)). \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

La troisième équation est

$$-2\delta(f'' + f + a) + r^3(k_{0y} + k_{1x}) = 0 \tag{5.3.7}$$

et une dérivation par rapport à $r$ donne

$$3k_{0y} + yk_{0yy} = -3k_{1x} - xk_{1xx} = \lambda_0. \tag{5.3.8}$$

Cette dernière équation peut être résolue pour $k_0$ et $k_1$ :

$$\begin{aligned} k_0 &= \lambda_0 r\sin(\phi) + \tfrac{\lambda_1}{r^2\sin^2(\phi)} + \lambda_2, \\ k_1 &= -\lambda_0 r\cos(\phi) + \tfrac{\lambda_3}{r^2\cos^2(\phi)} + \lambda_4. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Si nous écrivons de nouveau la troisième équation, nous obtenons

$$\delta(f'' + f + a) + \frac{\lambda_1}{\sin^3(\phi)} + \frac{\lambda_3}{\cos^3(\phi)} = 0. \tag{5.3.10}$$

**Première possibilité :** $\delta \neq 0$

Nous pouvons résoudre cette dernière équation pour $f$ :

$$f = a_1\cos(\phi) + a_2\sin(\phi) + \frac{-2a\delta\sin(2\phi) - \lambda_1\cos(\phi) + \lambda_3\sin(3\phi) - \lambda_3\sin(\phi) - \lambda_1\cos(3\phi)}{2\delta\sin(2\phi)}. \tag{5.3.11}$$

Cependant, $f$ (écrite en termes de $\phi$ seulement) doit aussi satisfaire (5.3.3), qui est un polynôme en $\cos(\phi)$ et $\sin(\phi)$. Le seul moyen d'y parvenir est de poser $\Omega = 0$.

**Deuxième possibilité : $\delta = 0$**

Nous avons alors $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et la condition $m_{r\phi} = m_{\phi r}$ devient

$$(f''' + f')(r\lambda_0 - \lambda_4 \cos(\phi) + \lambda_2 \sin(\phi)) + 3(f'' + f + a)(\lambda_2 \cos(\phi) + \lambda_4 \sin(\phi)) = 0. \tag{5.3.12}$$

Si nous dérivons par rapport à $r$, nous obtenons

$$\lambda_0(f''' + f') = 0. \tag{5.3.13}$$

Dans les deux cas qui se présentent ici, c'est-à-dire $\lambda_0 = 0$ et $f''' + f' = 0$, l'équation (5.3.3), la condition de compatibilité $m_{r\phi} = m_{\phi r}$ et la dernière équation du système à résoudre impliquent que $\Omega = 0$, $C = 0$ ou $f' = 0$. (Rappelons que le cas $f' = 0$ a été traité séparemment.) Ainsi, il n'y a pas d'intégrale additionnelle de la forme

$$C = \delta(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + k0\dot{x} + k1\dot{y} + m \tag{5.3.14}$$

dans ce cas.

### 5.3.2. Deuxième cas

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\zeta = -\delta$ et $\xi = \xi$, tout ce dont nous avons besoin pour démontrer qu'il n'existe pas d'intégrale supplémentaire de la forme

$$C = (x\dot{y} - y\dot{x})\dot{x} + \delta(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + \xi\dot{x}\dot{y} + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m \tag{5.3.15}$$

sont les trois premières équations du système à résoudre. En coordonnées polaires, elles sont

$$\begin{gathered} rk_{0r}\cos(\phi) - k_{0\phi}\sin(\phi) - r\Omega(r\cos(\phi) + \xi) = 0, \\ rk_{1r}\sin(\phi) + k_{1\phi}\cos(\phi) + r\Omega(r\cos(\phi) + \xi) = 0, \\ 2r\Omega(-r\sin(\phi) + 2\delta) + rk_{0r}\sin(\phi) + k_{0\phi}\cos(\phi) + rk_{1r}\cos(\phi) - k_{1\phi}\sin(\phi) = 0. \end{gathered} \tag{5.3.16}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous pouvons résoudre les deux premières :

$$\begin{aligned} k_0 &= \tfrac{F_1(\phi)}{2r\sin(\phi)} + \tfrac{\xi F_2(\phi)}{2r^2\sin^2(\phi)} + F_0(r\sin(\phi)), \\ k_1 &= \tfrac{1}{2r\cos(\phi)}(1+\tfrac{\xi}{r\cos(\phi)})F_1(\phi) + F_3(r\cos(\phi)). \end{aligned} \tag{5.3.17}$$

où

$$F_1 = \int \cos(\phi)(f'' + f + a)d\phi \tag{5.3.18}$$

et

$$F_2 = \int \sin(\phi)(f'' + f + a)d\phi. \tag{5.3.19}$$

La prochaine étape consiste à insérer $k_0$ et $k_1$ dans la troisième équation et à éliminer $\Omega$ en utilisant les relations

$$\Omega\cos(\phi) = -\frac{F_{1\phi}}{2r^3}, \quad \Omega\sin(\phi) = -\frac{F_{2\phi}}{2r^3}. \tag{5.3.20}$$

Le résultat prend la forme

$$G_1(r,\phi) + rG_2(\phi) + G_3(\phi) = 0, \tag{5.3.21}$$

où, en particulier,

$$G_1 = 2r^2\cos^3(\phi)((2\cos^2(\phi)-1-\cos^4(\phi))(rF_{0r}-F_{3\phi})-\sin^3(\phi)\cos(\phi)(rF_{3r}+F_{0\phi})). \tag{5.3.22}$$

Si nous dérivons (5.3.21) deux fois par rapport à $r$, nous trouvons que $G_1 = \sigma_1 r + \sigma_2$. Si nous passons en coordonnées cartésiennes pour tenir compte du fait que $F_0 = F_0(y)$ et $F_3 = F_3(x)$, nous obtenons

$$F_{0y} + F_{3x} + \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2x^3y^3}(\sqrt{x^2+y^2}\sigma_1 + \sigma_2) = 0. \tag{5.3.23}$$

Une dérivation par rapport à $x$ donne alors une expression pour $F_3(x)$, soit

$$y^3 F_{3xxx} + \frac{\sigma_1 x^4 - 2\sigma_1 x^2 y^2 - 3\sigma_1 y^4 - 3\sigma_2 (x^2+y^2)^{1/2} y^2}{2x^4} = 0, \qquad (5.3.24)$$

qui doit être satisfaite pour n'importe quelle valeur de $y$. Ce critère implique $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, et l'équation (5.3.23) est maintenant

$$F_{0y} + F_{3x} = 0. \qquad (5.3.25)$$

Cela signifie que $F_0$ et $F_3$ sont

$$F_0 = \alpha_1 r \sin(\phi) + \alpha_2, \quad F_3 = -\alpha_1 r \cos(\phi) + \alpha_3. \qquad (5.3.26)$$

Si nous substituons $F_0$ et $F_3$ dans la troisième équation de (5.3.16), nous trouvons une expression linéaire en $r$, soit

$$\begin{aligned}(F_1 \cos(\phi)\sin(\phi))r - 2\cos^2(\phi)\sin(\phi)\xi F_1 + 4F_{2\phi}\cos^3(\phi)\delta \\ -4F_{2\phi}\cos^5(\phi)\delta + 2\xi\sin(\phi)F_1 - \xi\cos^4(\phi)\sin(\phi)F_{2\phi} + 2\xi\cos^3(\phi)F_2 = 0,\end{aligned} \qquad (5.3.27)$$

dans laquelle les deux coefficients doivent s'annuler séparemment. Le coefficient de $r$ implique que $F_1 = \int \cos(\phi)(f'' + f + a)d\phi = 0$, donc $f'' + f + a = 0$, et ainsi $\Omega = 0$. Il n'y a donc pas d'intégrale supplémentaire dans ce cas.

## 5.4. Troisième système intégrable

Posons maintenant $\Omega = \Omega(r)$ et $W = W(r)$. Nous allons encore une fois séparer le problème en deux cas pour nous simplifier la tâche.

### 5.4.1. Premier cas

En premier lieu, nous prenons $\beta = \gamma = \xi = 0$ et $\zeta = -\delta$ :

$$C = \delta(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \qquad (5.4.1)$$

Le système d'équations à résoudre est alors

$$\begin{aligned} k_{0x} &= 0, \\ k_{1y} &= 0, \\ 4\delta\Omega + k_{0y} + k_{1x} &= 0, \\ 2\delta W_x + k_1\Omega - m_x &= 0, \\ -2\delta W_y - k_0\Omega - m_y &= 0, \\ k_0 W_x + k_1 W_y &= 0. \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

Si nous dérivons la troisième équation par rapport à $\phi$ et tenons compte du fait que $k_0 = k_0(y)$ et $k_1 = k_1(x)$, nous obtenons

$$\frac{k_{0yy}}{y} = \frac{k_{1xx}}{x} = \lambda_0, \tag{5.4.3}$$

donc

$$\begin{aligned} k_0 &= \tfrac{\lambda_0 y^3}{6} + \lambda_1 y + \lambda_2, \\ k_1 &= \tfrac{\lambda_0 x^3}{6} + \lambda_3 x + \lambda_4. \end{aligned} \tag{5.4.4}$$

La dernière équation du système est ensuite satisfaite si $k_0 \cos(\phi) + k_1 \sin(\phi) = 0$ ou si $W_r = 0$.

**Première possibilité :** $k_0 \cos(\phi) + k_1 \sin(\phi) = 0$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} k_0 &= \lambda_1 y, \\ k_1 &= -\lambda_1 x. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

La troisième équation du système est alors satisfaite si $\delta = 0$. Il nous reste donc deux équations pour $m$ :

$$m = -\lambda_1 \int r\Omega dr. \tag{5.4.6}$$

L'intégrale additionnelle est donc linéaire et il s'agit en fait de l'intégrale (1.2.30) trouvée pour $\Omega = \Omega(r)$ et $W = W(r)$ dans la section sur l'intégrabilité linéaire :

$$C = \lambda_1(-(x\dot{y} - y\dot{x}) - \int r\Omega(r)dr) = \lambda_1 C_\rho. \tag{5.4.7}$$

**Deuxième possibilité :** $W_r = 0$

La condition de compatibilité $m_{r\phi} = m_{\phi r}$ implique soit $\Omega_r = 0$, qui a déjà été traité à la fin du chapitre trois, soit $k_0 \cos(\phi) + k_1 \sin(\phi) = 0$, qui est un cas particulier de ce qui précède.

### 5.4.2. Deuxième cas

L'autre cas à considérer est $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\zeta = -\delta$ et $\xi = \xi$ :

$$C = (x\dot{y} - y\dot{x})\beta\dot{x} + \delta(\dot{x}^2 - \dot{y}^2) + \xi\dot{x}\dot{y} + k_0\dot{x} + k_1\dot{y} + m. \tag{5.4.8}$$

Le système à résoudre est alors

$$\begin{gathered}
rk_{0r}\cos(\phi) - k_{0\phi}\sin(\phi) - r\Omega(r\cos(\phi) + \xi) = 0,\\
rk_{1r}\sin(\phi) + k_{1\phi}\cos(\phi) + r\Omega(r\cos(\phi) + \xi) = 0,\\
2r\Omega(-r\sin(\phi) + 2\delta) + rk_{0r}\sin(\phi) + k_{0\phi}\cos(\phi) + rk_{1r}\cos(\phi) - k_{1\phi}\sin(\phi) = 0,\\
2(-r\sin(\phi) + \delta)rW_r\cos(\phi) + (r\cos(\phi) + \xi)rW_r\sin(\phi)\\
+rk_1\Omega - rm_r\cos(\phi) + m_\phi\sin(\phi) = 0,\\
-2\delta rW_r\sin(\phi) + (r\cos(\phi) + \xi)rW_r\cos(\phi) - rk_0\Omega\\
-rm_r\sin(\phi) - m_\phi\cos(\phi) = 0,\\
\tfrac{\hbar^2}{4}\Omega_r\cos(\phi) + k_0W_r\cos(\phi) + rk_1W_r\sin(\phi) = 0.
\end{gathered} \tag{5.4.9}$$

Des quatrième et cinquième équations de ce système, nous obtenons la condition de compatibilité $m_{r\phi} = m_{\phi r}$, soit

$$\begin{gathered}
(-4\delta\cos(\phi)\sin(\phi) + \xi(cos^2(\phi) - sin^2(\phi)))(rW_r - r^2W_{rr}) - r^2\cos(\phi)(rW_{rr} + 2W_r)\\
+r^2\Omega_r(k_0\cos(\phi) + k_1\sin(\phi)) = 0.
\end{gathered} \tag{5.4.10}$$

Cette dernière équation et la sixième équation de (5.4.9) forment un système d'équations algébriques $Ax = B$ pour $k_0$ et $k_1$ :

$$\begin{bmatrix} W_r\cos(\phi) & W_r\sin(\phi) \\ r^2\Omega_r\cos(\phi) & r^2\Omega_r\sin(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\hbar^2}{4}\Omega_r\cos(\phi) \\ (r^2W_{rr}-rW_r)(-4\delta\cos(\phi)\sin(\phi)+\xi(\cos^2(\phi)-sin^2(\phi)))+r^2\cos(\phi)(rW_{rr}+2W_r)\end{bmatrix}.$$

Cependant, la matrice $A$ étant singulière, il y aura solution si et seulement si le déterminant de chacune des matrices $A_i$, formées en remplaçant la $i^e$ colonne de $A$ par le membre de droite, est nul, pour $i = 1, 2$. Ce critère impose la condition

$$\begin{aligned} -\tfrac{\hbar^2}{4}r^2\Omega_r^2\cos(\phi) - W_r((r^2W_{rr}-rW_r)(-4\delta\cos(\phi)\sin(\phi)+\xi(\cos^2(\phi)-\sin^2(\phi)) \\ +r^2\cos(\phi)(rW_{rr}+2W_r)) = 0. \end{aligned} \tag{5.4.11}$$

Les coefficients de $\cos(\phi)$ et $\cos(\phi)\sin(\phi)$ impliquent que $\xi W_r(r^2W_{rr}-rW_r)=0$ et $4\delta W_r(r^2W_{rr}-rW_r)=0$. Si $W_r=0$, le reste de (5.4.11) implique que $\Omega_r=0$, ce que nous avons déjà étudié.

**Première possibilité :** $r^2W_{rr}-rW_r=0$

Nous avons alors $W=a_1r+a_2$ et le reste de (5.4.11) est

$$\hbar^2\Omega_r^2 = -48a_1^2r^2. \tag{5.4.12}$$

Cette équation est satisfaite si et seulement si $\Omega_r=0$ et $a_1=0$, ce qui est une situation déjà étudiée.

**Deuxième possibilité :** $\xi=\delta=0$

Nous pouvons retourner au système initial à résoudre. Les trois premières équations sont alors

$$\begin{aligned} rk_{0r}-k_{0\phi}\tan(\phi)-r^2\Omega &= 0, \\ rk_{1r}\tan(\phi)+k_{1\phi}+r^2\Omega &= 0, \\ -2r^2\Omega+rk_{0r}+k_{0\phi}\cot(\phi)+rk_{1r}\cot(\phi)-k_{1\phi} &= 0. \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

En soustrayant les deux premières, nous obtenons une expression pour $-2r^2\Omega$ que nous éliminons ensuite de la troisième équation pour obtenir

$$k_{0\phi} + rk_{1r} = 0. \tag{5.4.14}$$

Cette dernière équation et une dérivation des deux premières équations (préalablement divisées par $\cos(\phi)$) par rapport à $\phi$, soit

$$\begin{aligned} r\cos^2(\phi)k_{0r\phi} - \cos(\phi)\sin(\phi)k_{0\phi\phi} - k_{0\phi} = 0, \\ r\cos(\phi)\sin(\phi)k_{1r\phi} + rk_{1r} + \cos^2(\phi)k_{1\phi\phi} = 0, \end{aligned} \tag{5.4.15}$$

forment un système de trois équations pour $k_0$ et $k_1$ dont la solution est

$$\begin{aligned} k_0 &= k_0(r), \\ k_1 &= C_1\phi + C_2. \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

Si nous les insérons dans les deux premières équations, nous trouvons finalement $rk_{0r} - r\Omega = 0$, donc $k_0 = \int r\Omega dr$, puis $\Omega = -\frac{C_1}{r^2}$, et finalement $k_0 = -C_1 ln(r) + C_3$. La troisième équation donne alors $2C_1 - 2C_1\sin(\phi) = 0$, donc $C_1 = 0$ et ainsi, $\Omega = 0$.

## 5.5. Conclusion de la superintégrabilité polaire

Il était évident au départ que nous trouverions le cas où $\Omega$ et $W$ sont constants parmi les systèmes mécaniques superintégrables qui possèdent une intégrale de forme polaire, mais en fait, il s'agit aussi du seul. La solution n'est pas exposée ici, car nous avons déjà fait le calcul de façon générale à la fin du chapitre trois :

$$C = \alpha C_3^2 + C_3(C_1 + C_2) + \xi C_1C_2 + \zeta C_2^2 - a_1C_3 + \delta(C_1^2 - 2\Omega_0C_3). \tag{5.5.1}$$

# CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons poursuivi l'étude des systèmes intégrables et superintégrables à deux degrés de liberté et avec champs magnétiques qui avait été commencée au milieu des années quatre-vingt [**DGRW**].

Nous avons établi les conditions qui garantissent l'existence d'une intégrale d'ordre un dans les vitesses en mécanique quantique et il s'est avéré qu'il s'agissait exactement des mêmes conditions que dans le cas classique. Nous avons refait les calculs s'y rattachant et confirmons l'existence de deux formes de systèmes intégrables de ce type. Nous avons aussi découvert qu'il y a un seul système (maximalement) superintégrable parmi ceux-ci, soit celui dans lequel le champ magnétique et le potentiel sont constants. Ce système possède trois intégrales linéaires qui forment avec le champ magnétique une algèbre de Lie qui est l'extension centrale de l'algèbre des transformations euclidiennes du plan.

Nous avons ensuite identifié les conditions garantissant l'existence d'une intégrale quadratique dans les vitesses en mécanique quantique. Cet ensemble de conditions diffère de celui obtenu dans le cas classique [**DGRW**] par la présence d'un terme en $\hbar^2$. Nous avons ensuite étudié les formes cartésienne et polaire de l'intégrale quadratique. Dans le cas cartésien, les résultats classiques et quantiques coïncident. Trois systèmes intégrables sont identifiés, et parmi ceux-ci, un seul est superintégrable, soit celui mentionné dans le paragraphe précédent. Nous avons vérifié que les intégrales quadratiques de ce système s'écrivent bien en termes des trois intégrales linéaires déjà obtenues. Dans le cas polaire, nous avons identifié trois systèmes intégrables, dont un seul se distingue du cas classique par la présence de termes en $\hbar^2$ dans la solution obtenue. Le seul système superintégrable trouvé est encore une fois celui où le champ magnétique et le potentiel sont constants.

Il reste beaucoup de travail à faire dans cette même voie. En effet, les formes parabolique et elliptique de l'intégrale quadratique n'ont pas encore été étudiées, ni les intégrales d'ordre supérieur. De façon plus générale, comme la recherche sur les systèmes mécaniques intégrables et superintégrables est très active ces dernières années, il y a une foule de sujets reliés à ces propriétés qui pourraient aussi être abordés dans le cadre de travaux de recherche. Par exemple, des liens ont été établis entre la superintégrabilité et les symétries généralisées, ainsi qu'avec la solvabilité exacte. (Voir **[RW]** et **[STW]**.) Ces relations mèneront très certainement à une meilleure compréhension du sujet et à la découverte de résultats importants permettant l'avancement de la physique.

# BIBLIOGRAPHIE


[A] V.I. ARNOLD, *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[B] J. BERTRAND, *Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe*, C.R. Acad. Sci. III **77**, 849-853 (1873).

[CDL] C. COHEN-TANNNOUDJI, B. DIU, F. LALOË, *Mécanique quantique*, Hermann, Paris, 1980.

[D] G. DARBOUX, Arch. Néerl. (ii) **VI**, 371 (1901).

[DGR] B. DORIZZI, B. GRAMMATICOS, A. RAMANI, *A new class of integrable systems*, J. Math. Phys. **24**, 2282-2288 (1983).

[DGRW] B. DORIZZI, B. GRAMMATICOS, A. RAMANI, P. WINTERNITZ, *Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials*, J. Math. Phys. **26**, 3070-3079 (1985).

[FMSUW] I. FRIS, V. MANDROSOV, J. SMORODINSKY, M. UHLIR, P. WINTERNITZ, *Symmetry groups in classical and quantum mechanics*, Yad. Fiz. **4**, 625-635 (1966) [Sov. J. Nucl. Phys. **4**, 444-450 (1967)].

[GPS] H. GOLDSTEIN, C. POOLE, J. SAFKO, *Classical mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 2002.

[GW] S. GRAVEL, P. WINTERNITZ, *Superintegrability with third-order integrals in quantum and classical mechanics*, J. Math. Phys. **43**, 5902-5912 (2002).

[HG] J. HIETARINTA, B. GRAMMATICOS, *On the $\hbar^2$-correction in quantum mechanics*, J. Phys. A **22**, 1315-1322 (1989).

[H1] J. HIETARINTA, *Pure quantum integrability*, Phys. Lett. A **246**, 97-104 (1998).

[H2] J. HIETARINTA, *Classical vs quantum integrability*, J. Math. Phys. **25**, 1833-1840 (1984).

[K] E. KREYSZIG, *Advanced engineering mathematics*, Wiley inc., 1993.

[MSVW] A. MAKAROV, J. SMORODINSKY, KH. VALIEV, P. WINTERNITZ, Nuovo Cimento **52** A, 1061 (1967).

[O] P. J. OLVER, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer, New York, 1993.

[RW] M.A. RODRIGUEZ, P. WINTERNITZ, *Quantum superintegrability and exact solvability in n dimensions*, J. Math. Phys. **43**, 1309-1321 (2002).

[STW] M.B. SHEFTEL, P. TEMPESTA, P. WINTERNITZ, *Superintegrable systems in quantum mechanics and classical Lie theory*, J. Math. Phys. **42**, 659-673 (2001).

[TTW] P. TEMPESTA, A.V. TURBINER, P. WINTERNITZ, *Exact solvability of superintegrable systems*, J. Math. Phys. **42**, 4248-4257 (2001).

[W] S. WEIGERT, *The problem of quantum integrability*, Physica D **56**, 107-109 (1992).