

2 M 11.3144.3

V. 006

11492769

Université de Montréal

Processus de Poisson généralisé
autorégressif d'ordre 1

par

El-Halla Najem

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)

en Mathématiques orientation actuariat

février 2004

© El-Halla Najem, 2003



QA

3

U54

2004

v.006

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Processus de Poisson généralisé
autorégressif d'ordre 1**

présenté par

El-Halla Najem

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Roch Roy

(président-rapporteur)

Louis Doray

(directeur de recherche)

Andrew Luong

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

23 février 2004

REMERCIEMENTS

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, Monsieur Louis Doray, professeur à l'Université de Montréal, pour ses conseils, sa disponibilité, sa confiance en mes capacités d'entreprendre ce projet de recherche, ainsi que pour le support financier qu'il m'a accordé avec l'aide du Fonds FCAR Québec pour les nouveaux chercheurs. Je remercie aussi Monsieur Andrew Luong pour l'aide qu'il m'a apportée et ses suggestions techniques.

Je tiens également à remercier Monsieur Driss Oraichi pour les échanges profitables qui ont marqués à plusieurs points de vue mes travaux de recherche.

J'aimerais aussi remercier les membres et collègues du département de mathématiques et statistique pour l'ambiance scientifique et humaine qu'ils ont su créer et qui a rendu les conditions du travail très agréables.

Un grand merci à mes parents pour leur amour, générosité et leur soutien inconditionnel durant ma vie toute entière. Aucun mot, aucun verbe n'exprimerait ce que je leur dois.

À mon épouse, j'envoie un merci chaleureux et incommensurable de m'avoir supporté, écouté et encouragé pendant mes études et la rédaction de mon mémoire. Je remercie toute ma famille, en particulier mon frère, mes soeurs, pour leur tendresse, leurs sacrifices et surtout pour l'amour dont ils m'ont entouré toute ma vie. Je vous aime aussi.

Je tiens également à dire un gros merci à tous mes amis qui ont marqué chacun à leur manière et qui ont contribué, par leur amitié, à la réalisation de ce mémoire.

SOMMAIRE

La littérature récente consacrée à l'étude des séries chronologiques à valeurs entières est de plus en plus abondante. Diverses méthodes ont été proposées pour étudier de telles séries. Dans ce travail, nous nous intéressons à un modèle développé par Alzaid et Al-Osh (1993), le processus de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1, pour modéliser des séries chronologiques à valeurs entières non négatives. Ensuite, nous discuterons de l'estimation des paramètres de ce modèle selon trois méthodes, soit celles des moments, de quasi-vraisemblance et du maximum de vraisemblance conditionnelle. Afin d'observer le comportement des estimateurs, nous simulons ce modèle pour différentes valeurs des paramètres et nous comparons l'efficacité asymptotique des estimateurs des paramètres. Finalement, nous appliquons les résultats obtenus à deux séries chronologiques réelles représentant le nombre de pannes d'ordinateurs par semaine et le nombre de sinistres survenus par mois.

Mots clés : Distribution de Poisson généralisée, distribution quasi-binomiale, processus autorégressif, processus de Poisson généralisé, moments, quasi-vraisemblance, maximum de vraisemblance conditionnelle, efficacité asymptotique.

SUMMARY

Recent literature on the study of integer-valued time series is very rich. Various methods have been proposed to study such series. In this work, we are interested in a model developed by Alzaid and Al-Osh (1993), the generalized Poisson autoregressive process of order 1, to model time series with nonnegative integer values. We next discuss estimation of the parameters of this model with the method of moments, quasi-likelihood and conditional maximum likelihood. In order to observe the behavior of the estimators, we simulate this model for various values of the parameters and we compare the asymptotic efficiency of the estimators of the parameters. Finally, we apply the results obtained to two real time series, representing the number of computer breakdowns per week and the number of claims occurring in a month.

Keywords : Generalized Poisson distribution, quasi-binomial distribution, autoregressive process, generalized Poisson process, method of moments, quasi-likelihood, conditional maximum likelihood, asymptotic efficiency.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Sommaire	ii
Summary	iii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	vii
Introduction	1
Chapitre 1. Processus de Poisson autorégressif d'ordre 1	3
1.1. Processus stochastiques	3
1.2. Processus de Poisson autorégressif d'ordre 1	5
Chapitre 2. Processus de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1	8
2.1. Loi de Poisson généralisée et ses propriétés	8
2.1.1. Fonction de probabilité	8
2.1.2. Espérance et variance	9
2.1.3. Convolution	11
2.2. Loi quasi-binomiale	13
2.3. Processus de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1	14
2.4. Estimation des paramètres du processus	18
2.4.1. Méthode des moments	18

2.4.2. Méthode de quasi-vraisemblance	20
2.4.3. Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.....	21
Chapitre 3. Biais et efficacité asymptotique.....	24
3.1. Simulation.....	25
3.2. Biais.....	27
3.3. Efficacité asymptotique des estimateurs	48
3.3.1. Méthode des moments	48
3.3.2. Méthode de quasi-vraisemblance	52
3.3.3. Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.....	54
Chapitre 4. Applications	59
4.1. Description de la série 1.....	60
4.2. Modélisation de la série 1	60
4.3. Description de la série 2.....	67
4.4. Modélisation de la série 2	68
Conclusion.....	75
Annexe.....	76
Bibliographie	106

LISTE DES FIGURES

3.1.1	Série simulée du modèle $GPAR(1)$ avec $p=0.8$, $\lambda = 3$ et $\theta=0.2$	26
3.2.1	Biais de l'estimateur du paramètre p du modèle $GPAR(1)$	28
3.2.2	Biais de l'estimateur du paramètre λ du modèle $GPAR(1)$	29
3.2.3	Biais de l'estimateur du paramètre θ du modèle $GPAR(1)$	30
4.1.1	Série du nombre de pannes d'ordinateurs.....	60
4.2.1	Autocorrélations et autocorrélations partielles de la série 1.....	61
4.2.2	Fréquence relative de la série 1.....	62
4.2.3	Probabilité théorique de la série 1.....	62
4.2.4	Résidus de la série 1.....	64
4.3.1	Série du nombre de sinistres.....	67
4.4.1	Autocorrélations et autocorrélations partielles de la série 2.....	68
4.4.2	Fréquence relative de la série 2.....	69
4.4.3	Probabilité théorique de la série 2.....	69
4.4.4	Résidus de la série 2.....	72

LISTE DES TABLEAUX

3.1.1	Choix des paramètres p, λ et θ .	26
3.2.1	Biais de l'estimateur de p ($n = 50$ et $\theta = 0.2$).	32
3.2.2	Biais de l'estimateur de p ($n = 50$ et $\theta = 0.8$).	33
3.2.3	Biais de l'estimateur de p ($n = 200$ et $\theta = 0.2$).	34
3.2.4	Biais de l'estimateur de p ($n = 200$ et $\theta = 0.8$).	35
3.2.5	Biais de l'estimateur de λ ($n = 50$ et $\theta = 0.2$).	36
3.2.6	Biais de l'estimateur de λ ($n = 50$ et $\theta = 0.8$).	37
3.2.7	Biais de l'estimateur de λ ($n = 200$ et $\theta = 0.2$).	38
3.2.8	Biais de l'estimateur de λ ($n = 200$ et $\theta = 0.8$).	39
3.2.9	Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 1$).	40
3.2.10	Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 3$).	41
3.2.11	Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 5$).	42
3.2.12	Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 10$).	43
3.2.13	Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 1$).	44
3.2.14	Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 3$).	45
3.2.15	Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 5$).	46
3.2.16	Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 10$).	47
3.3.1	Efficacité de l'estimateur des moments pour $\lambda = 1$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.	55
3.3.2	Efficacité de l'estimateur de quasi-vraisemblance pour $\lambda = 1$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.	56

3.3.3	Efficacité de l'estimateur des moments pour $\lambda = 3$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$	57
3.3.4	Efficacité de l'estimateur de quasi-vraisemblance pour $\lambda = 3$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$	58
4.2.1	Estimateurs des paramètres de la série 1.....	61
4.2.2	Fréquences observées et estimées de la série 1.....	63
4.4.1	Estimateurs des paramètres de la série 2.....	69
4.4.2	Fréquences observées et estimées de la série 2.....	70

INTRODUCTION

Historiquement, les séries chronologiques ont principalement servi à modéliser les fluctuations d'un phénomène où les observations ont été recueillies pendant un certain laps de temps. Puisqu'il arrive souvent que des observations suffisamment rapprochées dans le temps soient corrélées entre elles, les techniques statistiques faisant appel à l'indépendance des observations ne peuvent s'appliquer.

L'approche utilisant les séries chronologiques consiste à caractériser la dépendance par modélisation. Dans plusieurs situations, nous sommes amenés à observer le nombre d'événements qui surviennent par période de temps. De telles observations sont nécessairement non négatives et à valeurs entières. Les méthodes d'analyse développées pour les séries chronologiques à valeurs continues ne donnent pas en général des résultats satisfaisants pour de telles séries.

Plusieurs séries, en finance ou en assurance, prennent des valeurs entières non négatives. Quoiqu'on puisse leur appliquer les techniques des séries à valeurs continues, il apparaît toutefois souhaitable de développer des modèles qui prennent en compte le caractère entier de la série.

Consul (1990) a comparé la distribution de Poisson généralisée, dénotée *GPD*, suggérée par Consul et Jain (1973) avec plusieurs distributions connues et a conclu que la loi *GPD* est un modèle plausible pour les données relatives aux fréquences de sinistres (voir Ambagaspitiya et Balakrishnan (1994)).

Des modèles simples peuvent être utilisés pour modéliser ou générer des suites de variables aléatoires discrètes dépendantes avec la distribution marginale de Poisson généralisée. Alzaid et Al-Osh ont étudié un modèle de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1, dénoté $GPAR(1)$, en 1993. Ce processus peut être vu comme une extension du processus de Poisson autorégressif d'ordre 1, dénoté $PAR(1)$ de Al-Osh et Alzaid (1987), Alzaid et Al-Osh (1988) et McKenzie (1985,-1988) qui ont étudié des processus stationnaires discrets avec distribution marginale de Poisson.

La distribution de Poisson généralisée peut être utilisée comme une distribution alternative pour modéliser un processus à valeurs entières quand l'indice de dispersion n'est pas proche de l'unité.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de trois méthodes d'estimation des paramètres du processus $GPAR(1)$, qui sont la méthode des moments, la méthode de quasi-vraisemblance et la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.

Ce mémoire est constitué de quatre chapitres. Dans le premier, nous décrivons quelques généralités sur les processus stochastiques et nous présentons également le modèle $PAR(1)$. Dans le second chapitre, nous décrivons, d'une part quelques propriétés des lois de Poisson généralisée et quasi-binomiale. D'autre part, nous définissons le processus $GPAR(1)$ et décrivons les méthodes d'estimation des paramètres de ce modèle. Dans le troisième chapitre, nous présentons quelques résultats de simulations, le biais des paramètres par la méthode des moments et celle du maximum de vraisemblance conditionnelle et la comparaison de l'efficacité asymptotique des estimateurs des paramètres selon les trois techniques. Dans le dernier chapitre, nous appliquons la méthodologie développée à deux séries réelles représentant le nombre de pannes d'ordinateurs par semaine et le nombre de sinistres survenus par mois.

Chapitre 1

PROCESSUS DE POISSON AUTORÉGRESSIF D'ORDRE 1

Dans ce premier chapitre, nous présentons brièvement le modèle de Poisson autorégressif d'ordre 1 introduit par Al-Osh et Alzaid (1987). Ce modèle a été largement utilisé pour modéliser les séries chronologiques à valeurs entières non négatives où les variables sont dépendantes, ce qui peut survenir dans le domaine de l'assurance. Avant de présenter ce modèle, nous décrivons, dans la prochaine section, quelques généralités sur les processus stochastiques qui nous seront utiles par la suite.

1.1. PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans un premier temps, nous énonçons des définitions pour un processus stochastique et une série chronologique. Ensuite, nous définissons la stationnarité au sens strict et au sens large d'une série et les fonctions d'autocovariance et d'autocorrélation.

Définition 1.1.1. *Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $\{X_t, t \in T\}$ définies sur un même espace de probabilité.*

Remarque 1.1.1. *En général, l'ensemble T est égal à \mathbb{Z} ou à \mathbb{R} .*

Définition 1.1.2. Une série chronologique est une collection de données indexées par le temps.

Remarque 1.1.2. Nous pouvons dire qu'une série chronologique est une réalisation d'un processus stochastique.

Définition 1.1.3. Un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au sens strict si la loi conjointe des probabilités de $X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}$ est indépendante de k , ceci pour tout $n \in \{1, 2, \dots\}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout t_1, t_2, \dots, t_n dans \mathbb{Z} .

Définition 1.1.4. Un processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit stationnaire au sens large si :

- (1) $\mathbb{E}[X_t]^2 < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$;
- (2) $\mathbb{E}[X_t] = m$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, où m est une constante;
- (3) $\text{Cov}[X_t, X_{t-k}] = \gamma_X(t, t-k)$ est indépendante de t , pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Sa fonction d'autocovariance de délai k , dénotée $\gamma_X(k)$, est la covariance entre X_t et X_{t-k}

$$\gamma_X(k) = \text{Cov}[X_t, X_{t-k}], \quad k \in \mathbb{Z},$$

et sa fonction d'autocorrélation de délai k , dénotée $\rho_X(k)$, est donnée par

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \text{Corr}[X_t, X_{t-k}], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Notons que $\gamma_X(-k) = \gamma_X(k)$ et, par conséquent, $\rho_X(-k) = \rho_X(k)$.

Définition 1.1.5. La fonction d'autocorrélation partielle, dénotée par $\{\phi_{kk} : k = 1, 2, \dots\}$, est définie par $\phi_{kk} = |P_k^*|/|P_k|$, où

$$(1) P_k = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice } (k \times k) \text{ d'autocor-}$$

rélation définie positive pour une série stationnaire de longueur k (avec $\rho_i = \rho_X(i)$).

(2) P_k^* est la matrice P_k avec la dernière colonne remplacée par $(\rho_1, \dots, \rho_k)'$.

Remarque 1.1.3. Dans la théorie des séries chronologiques, la stationnarité au sens large est plus utilisée que la stationnarité au sens strict.

1.2. PROCESSUS DE POISSON AUTORÉGRESSIF D'ORDRE 1

Nous présentons dans cette section le modèle de Poisson autorégressif d'ordre 1, noté $PAR(1)$ introduit par Al-Osh et Alzaid (1987) et étudié par plusieurs chercheurs, en particulier McKenzie (1988). Le processus $PAR(1)$ fait intervenir l'opérateur de Steutel et van Harn (1979).

Définition 1.2.1. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non négatives. Soit $\alpha \in (0, 1)$. Soit $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre α , et indépendantes de X . Alors l'opérateur \circ est défini par

$$\alpha \circ X = \begin{cases} \sum_{i=1}^X Y_i & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.2.1. Notons que, conditionnellement à $X = x$, $\alpha \circ X$ est de loi binomiale de paramètres (x, α) .

Définition 1.2.2. Soit $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ un processus à valeurs entières non négatives. Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus $PAR(1)$ s'il satisfait :

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

où

- (1) X_0 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda/(1 - \alpha)$.
- (2) $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et distribuées selon une loi de Poisson de paramètre λ .
- (3) les suites sous-jacentes dans l'opérateur \circ sont indépendantes de $\{\varepsilon_t\}$.

Le modèle de Poisson autorégressif peut être interprété comme un processus de naissance et de décès. Chaque individu au temps $(t - 1)$ a une probabilité α de continuer à vivre jusqu'au temps t , où le nombre de naissances suit une distribution de Poisson de moyenne λ .

Dans la proposition suivante, nous étudions une propriété importante qui caractérise le modèle $PAR(1)$.

Proposition 1.2.1. *La distribution marginale du processus $PAR(1)$ suit une loi de Poisson.*

DÉMONSTRATION. Rappelons que le modèle $PAR(1)$ s'écrit comme

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Pour déterminer la fonction de probabilité de $X_1 = \alpha \circ X_0 + \varepsilon_1$, commençons d'abord par celle de $\alpha \circ X_0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\alpha \circ X_0 = x] &= \mathbb{P}[\alpha \circ X_0 = x, X_0 \in \mathbb{N}] \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \mathbb{P}[\alpha \circ X_0 = x | X_0 = n] \mathbb{P}[X_0 = n] \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n}{x} \alpha^x (1 - \alpha)^{n-x} \frac{e^{-\lambda/(1-\alpha)} [\lambda/(1-\alpha)]^n}{n!}, \end{aligned}$$

puisque $(\alpha \circ X_0 | X_0 = n)$ suit une loi binomiale de paramètres (n, α) et X_0 suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda/(1 - \alpha)$. D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\alpha \circ X_0 = x] &= \frac{e^{-\alpha\lambda/(1-\alpha)} [\alpha\lambda/(1-\alpha)]^x}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{\lambda^{n-x} e^{-\lambda}}{(n-x)!} \\ &= \frac{e^{-\alpha\lambda/(1-\alpha)} [\alpha\lambda/(1-\alpha)]^x}{x!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}, \end{aligned}$$

après le changement de variable $j = n - x$.

Puisque

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} = 1,$$

on obtient

$$\mathbb{P}[\alpha \circ X_0 = x] = \frac{e^{-\alpha\lambda/(1-\alpha)} [\alpha\lambda/(1-\alpha)]^x}{x!},$$

la distribution de Poisson de paramètre $\alpha\lambda/(1-\alpha)$. Comme ε_1 admet une loi de Poisson de paramètre λ , indépendante de $\alpha \circ X_0$, nous concluons que $X_1 = \alpha \circ X_0 + \varepsilon_1$ suit une loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda/(1-\alpha) + \lambda = \lambda/(1-\alpha)$. La même démonstration sera valable pour les autres variables X_2, X_3, \dots . Le processus $\{X_t\}$ admet donc comme distribution marginale la loi de Poisson de paramètre $\lambda/(1-\alpha)$.

□

Le modèle $PAR(1)$ a servi à la modélisation des séries chronologiques à valeurs entières non négatives dans différents domaines, par exemple en assurance pour l'indemnisation des travailleurs à court terme à cause des blessures dans leur travail (Freeland et McCabe (2001)) et en médecine pour une série d'incidence de maladies infectieuses. Ces données proviennent du bureau régional des maladies infectieuses de la région de Montréal pour la période du 1^{er} janvier 1986 au 31 décembre 1993 (Cardinal, Roy et Lambert (1999)). En pratique, nous rencontrons souvent des séries qui ont un comportement de surdispersion ou sous-dispersion, (*i.e.* $\text{Var}[X]$ est supérieure ou inférieure à $\mathbb{E}[X]$). Cette dernière caractéristique fait l'objet de notre recherche.

Nous présentons, dans le chapitre suivant, un modèle introduit aussi par Alzaid et Al-Osh (1993) qui tient compte de cette particularité.

Chapitre 2

PROCESSUS DE POISSON GÉNÉRALISÉ AUTORÉGRESSIF D'ORDRE 1

Dans le présent chapitre, nous présentons le modèle de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1, dénoté $GPAR(1)$, introduit par Alzaid et Al-Osh (1993). Nous étudions certaines de ses propriétés, en particulier ses deux premiers moments et discutons de l'estimation de ses paramètres par trois méthodes différentes. Avant de présenter en détail ce modèle, nous définissons les fonctions de masse des lois Poisson généralisée et quasi-binomiale qui seront utilisées pour décrire le processus $GPAR(1)$, et présentons leurs principales propriétés.

2.1. LOI DE POISSON GÉNÉRALISÉE ET SES PROPRIÉTÉS

2.1.1. Fonction de probabilité

Définition 2.1.1. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non négatives. X suit une distribution de Poisson généralisée de paramètres λ et θ , dénotée $GP(\lambda, \theta)$, si sa fonction de masse est définie par ¹

$$\mathbb{P}[X = x] = \begin{cases} \lambda(\lambda + \theta x)^{x-1} e^{-(\lambda + \theta x)} / x! & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{pour } x > m, \text{ quand } \theta < 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$, $\max(-1, -\lambda/m) < \theta \leq 1$ et $m (\geq 4)$ est le plus grand entier positif pour lequel $\lambda + m\theta > 0$ quand θ est négatif.

¹pour plus de détail voir Consul (1989)

Nous remarquons que pour $\theta = 0$, la variable X devient une loi de Poisson de paramètre λ .

Tout au long de ce mémoire, nous limiterons au cas où le paramètre θ est positif et nous dénotons dans cette section $\mathbb{P}[X = x]$ par $P_x(\lambda, \theta)$. Afin de simplifier l'écriture de la fonction de masse de la loi GP, $P_x(\lambda, \theta)$, nous utilisons la notation suivante :

$$(\lambda, \theta)_x = \frac{\lambda(\lambda + \theta x)^{x-1}}{x!}.$$

Par conséquent, la fonction $P_x(\lambda, \theta)$ peut s'écrire sous une forme simple,

$$P_x(\lambda, \theta) = (\lambda, \theta)_x e^{-(\lambda + \theta x)}.$$

2.1.2. Espérance et variance

Étant donné l'importance des deux premiers moments de la loi $GP(\lambda, \theta)$ pour le processus $GPAR(1)$, nous les étudions dans les propositions qui suivent.

Proposition 2.1.1. *Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi $GP(\lambda, \theta)$. Son espérance, notée μ , est donnée par*

$$\mu = \frac{\lambda}{1 - \theta}, \quad \theta < 1.$$

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, nous nous sommes basés sur Consul (1989). En posant $\theta = \alpha\lambda$, nous pouvons réécrire la fonction de masse de X sous la forme

$$P_x(\lambda, \alpha\lambda) = (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1 + \alpha x)}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

D'autre part, rappelons-nous l'égalité de Jensen (voir Consul 1989)

$$\begin{aligned} e^\lambda &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda + \theta x)^{x-1} e^{-\theta x}}{x!} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (\lambda, \theta)_x e^{-\theta x} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\alpha\lambda x}. \end{aligned}$$

En dérivant les deux côtés de cette égalité par rapport à λ , nous obtenons

$$e^\lambda = \sum_{x=0}^{\infty} (\lambda^{-1}x - \alpha x)(1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\alpha \lambda x}.$$

Ensuite, multiplions les deux côtés par $e^{-\lambda}$, d'où

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1 - \alpha \lambda}{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x(1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)} \\ &= \frac{1 - \theta}{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x P_x(\lambda, \theta). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Nous concluons donc que

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{1 - \theta}.$$

□

Proposition 2.1.2. *Soit X une variable aléatoire distribuée selon une loi $GP(\lambda, \theta)$.*

Sa variance σ^2 est donnée par

$$\sigma^2 = \frac{\lambda}{(1 - \theta)^3}, \quad \theta < 1.$$

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, nous nous sommes basés sur Consul (1989). Calculons d'abord $\mathbb{E}[X^2]$. De l'équation (2.1.1), nous déduisons que

$$\frac{\lambda}{1 - \alpha \lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} x(1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)}.$$

Dérivons les deux côtés par rapport à λ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - \alpha \lambda)^2} &= \sum_{x=0}^{\infty} x \left(\frac{x}{\lambda} - 1 - \alpha x \right) (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \left[x \left(\frac{1 - \alpha \lambda}{\lambda} \right) - 1 \right] (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \alpha \lambda}{\lambda} \right) x^2 (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)} - \sum_{x=0}^{\infty} x (1, \alpha)_x \lambda^x e^{-\lambda(1+\alpha x)} \\ &= \frac{1 - \alpha \lambda}{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P_x(\lambda, \alpha \lambda) - \sum_{x=0}^{\infty} x P_x(\lambda, \alpha \lambda) \\ &= \frac{1 - \alpha \lambda}{\lambda} \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] \\ &= \frac{1 - \theta}{\lambda} \mathbb{E}[X^2] - \frac{\lambda}{1 - \theta}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{\lambda}{(1-\theta)^3} + \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2},$$

et

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \\ &= \frac{\lambda}{(1-\theta)^3} + \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2} - \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2} \\ &= \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.1. *Pour des valeurs de θ positives ou négatives, nous avons respectivement une surdispersion ou une sous-dispersion (i.e. $\text{Var}[X]$ est supérieure ou inférieure à $\mathbb{E}[X]$).*

2.1.3. Convolution

Dans cette section, nous montrons la propriété de convolution, similaire à celle de la loi de Poisson, qui jouera un rôle important dans notre développement du modèle $GPAR(1)$.

Théorème 2.1.1. *La somme $X + Y$ de deux variables aléatoires X et Y indépendantes distribuées selon la loi de Poisson généralisée avec paramètres (λ_1, θ) et (λ_2, θ) , est également distribuée selon une loi de Poisson généralisée de paramètres $(\lambda_1 + \lambda_2, \theta)$.*

DÉMONSTRATION. Dans cette démonstration, nous nous sommes basés sur Consul (1989). Cherchons la loi de $X + Y$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X + Y = x] &= \mathbb{P}[X + Y = x, X \in \mathbb{N}] \\ &= \sum_{j=0}^x \mathbb{P}[X = j, Y = x - j] \\ &= \sum_{j=0}^x \mathbb{P}[X = j] \mathbb{P}[Y = x - j] \quad (\text{par indépendance}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^x P_j(\lambda_1, \theta) P_{x-j}(\lambda_2, \theta) \\
&= \sum_{j=0}^x \left[\frac{\lambda_1(\lambda_1 + \theta j)^{j-1} e^{-(\lambda_1 + \theta j)}}{j!} \right] \\
&\quad \left[\frac{\lambda_2(\lambda_2 + \theta(x-j))^{x-j-1} e^{-(\lambda_2 + \theta(x-j))}}{(x-j)!} \right] \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta x)} \sum_{j=0}^x \left[\frac{(\lambda_1 + \theta j)^{j-1}}{j!} \right] \\
&\quad \left[\frac{(\lambda_2 + \theta(x-j))^{x-j-1}}{(x-j)!} \right]. \tag{2.1.2}
\end{aligned}$$

En appliquant l'égalité de Jensen aux deux côtés de l'équation

$$e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\lambda_1} e^{\lambda_2},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-\theta x} &= \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda_1(\lambda_1 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-\theta x} \right] \\
&\quad \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda_2(\lambda_2 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-\theta x} \right] \\
&= \lambda_1 \lambda_2 \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-\theta x} \right] \\
&\quad \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda_2 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-\theta x} \right] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \sum_{j=0}^x \left[\frac{(\lambda_1 + \theta j)^{j-1}}{j!} \right] \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{(\lambda_2 + \theta(x-j))^{x-j-1}}{(x-j)!} \right] \right\} e^{-\theta x}.
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de $e^{-\theta x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta x)^{x-1}}{x!} &= \lambda_1 \lambda_2 \sum_{j=0}^x \left[\frac{(\lambda_1 + \theta j)^{j-1}}{j!} \right] \\
&\quad \left[\frac{(\lambda_2 + \theta(x-j))^{x-j-1}}{(x-j)!} \right]. \tag{2.1.3}
\end{aligned}$$

Des équations (2.1.2) et (2.1.3), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X + Y = x] &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta x)^{x-1}}{x!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \theta x)} \\ &= P_x(\lambda_1 + \lambda_2, \theta).\end{aligned}$$

□

Remarque 2.1.2. *En général, la somme de n variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson généralisées de paramètres (λ_i, θ) , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ suit une distribution $GP(\sum_{i=1}^n \lambda_i, \theta)$.*

2.2. LOI QUASI-BINOMIALE

Définition 2.2.1. *Une variable aléatoire X à valeurs entières non négatives, suit une distribution quasi-binomiale, dénotée $QB(p, \theta, n)$, si sa fonction de masse est définie par*

$$\mathbb{P}[X = x] = \frac{pq \binom{n}{x} (p + x\theta)^{x-1} [q + (n-x)\theta]^{n-x-1}}{(1 + n\theta)^{n-1}}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n,$$

où $0 < q = 1 - p < 1$ et $n\theta < \min(p, q)$.

La proposition suivante met en évidence la relation entre les lois quasi-binomiale et de Poisson généralisée.

Proposition 2.2.1. *Soient X et $S(n)$ deux variables aléatoires distribuées respectivement selon les lois $GP(\lambda, \theta)$ et $QB(p, \theta/\lambda, n)$. Si X est indépendante de $S(n)$, alors $S(X)$ suit une loi $GP(p\lambda, \theta)$.*

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S(X) = x] &= \mathbb{P}[S(X) = x, X \in \mathbb{N}] \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \mathbb{P}[S(n) = x, X = n] \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \mathbb{P}[S(n) = x] \mathbb{P}[X = n] \quad (\text{par indépendance})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=x}^{\infty} \left\{ \frac{pq \binom{n}{x} [p + x(\theta/\lambda)]^{x-1} [q + (n-x)(\theta/\lambda)]^{n-x-1}}{[1 + (\theta/\lambda)n]^{n-1}} \right. \\
&\quad \left. \frac{\lambda(\lambda + \theta n)^{n-1} e^{-(\lambda+\theta n)}}{n!} \right\} \\
&= \frac{p\lambda(p\lambda + \theta x)^{x-1} e^{-(p\lambda+\theta x)}}{x!} \sum_{n=x}^{\infty} \frac{q\lambda[q\lambda + (n-x)\theta]^{n-x-1} e^{-(q\lambda+(n-x)\theta)}}{(n-x)!} \\
&= \frac{p\lambda(p\lambda + \theta x)^{x-1} e^{-(p\lambda+\theta x)}}{x!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q\lambda(q\lambda + j\theta)^{j-1} e^{-(q\lambda+j\theta)}}{j!},
\end{aligned}$$

en faisant le changement d'indice $n - x = j$.

D'après la dernière égalité, nous constatons que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q\lambda(q\lambda + j\theta)^{j-1} e^{-(q\lambda+j\theta)}}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(q\lambda, \theta),$$

où $P_j(q\lambda, \theta)$ représente la fonction de probabilité de la loi $GP(q\lambda, \theta)$. Donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q\lambda(q\lambda + j\theta)^{j-1} e^{-(q\lambda+j\theta)}}{j!} = 1,$$

et donc

$$\mathbb{P}[S(X) = x] = \frac{p\lambda(p\lambda + \theta x)^{x-1} e^{-(p\lambda+\theta x)}}{x!},$$

qui est la fonction de probabilité d'une loi $GP(p\lambda, \theta)$. □

2.3. PROCESSUS DE POISSON GÉNÉRALISÉ AUTORÉGRESSIF D'ORDRE 1

Dans cette section, nous présentons le modèle de Poisson généralisé autorégressif d'ordre 1, $GPAR(1)$, introduit par Alzaid et Al-Osh (1993). Ce processus est une extension du modèle de Poisson autorégressif d'ordre 1, $PAR(1)$, étudié par Al-Osh et Alzaid (1987), Alzaid et Al-Osh (1988) et McKenzie (1985,1988).

Le modèle $GPAR(1)$ est défini ainsi :

$$X_t = S_t(X_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.3.1)$$

où

- (1) $\{S_t(\bullet) : t = 1, 2, \dots\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) selon une loi quasi-binomiale $QB(p, \theta/\lambda, \bullet)$.
- (2) $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires iid selon une loi $GP(q\lambda, \theta)$, où $0 < q < 1$.
- (3) Ces deux suites sont indépendantes entre elles.
- (4) X_0 suit une loi $GP(\lambda, \theta)$, indépendante de $\{\varepsilon_t\}$ et $\{S_t(\bullet)\}$.

Nous terminons cette partie par une démonstration de la loi marginale du processus $GPAR(1)$.

Théorème 2.3.1. *Le processus $GPAR(1)$ $\{X_t\}$ admet comme distribution marginale la loi de Poisson généralisée.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition (2.2.1), $S_1(X_0)$ suit une loi $GP(p\lambda, \theta)$, puisque X_0 suit la loi $GP(\lambda, \theta)$, $S_1(x_0)$ suit la loi $QB(p, \theta/\lambda, x_0)$ et X_0 et $S_1(x_0)$ sont indépendantes. Comme ε_1 admet une loi $GP(q\lambda, \theta)$ indépendante de $S_1(X_0)$, $X_1 = S_1(X_0) + \varepsilon_1$ suit, en utilisant la propriété de convolution, une loi $GP(p\lambda + q\lambda, \theta)$, i.e une loi $GP(\lambda, \theta)$ étant donné que $p + q = 1$. La même démonstration est valable pour les autres variables X_2, X_3, \dots . Donc le processus $\{X_t\}$ admet comme distribution marginale la loi $GP(\lambda, \theta)$.

□

Avec la remarque (2.1.1), nous constatons que le modèle $GPAR(1)$ sera très utile, contrairement au modèle $PAR(1)$ où $\text{Var}[X_t] = \mathbb{E}[X_t]$, pour modéliser des séries à valeurs entières présentant une surdispersion (i.e. $\text{Var}[X_t]$ est supérieure à $\mathbb{E}[X_t]$).

Proposition 2.3.1. *Soit le processus $GPAR(1)$ $\{X_t\}$. Sa fonction d'autocovariance de délai k non négatif est donnée par*

$$\gamma_X(k) = \text{Cov}[X_t, X_{t-k}] = p^k \text{Var}[X_0], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

DÉMONSTRATION. Procédons par récurrence. Démontrons la propriété suivante :

$$\text{Cov}[X_t, X_{t-k}] = p^k \text{Var}[X_0] \quad (2.3.2)$$

Vérifions que la propriété (2.3.2) est vraie pour k égal à 1 :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_t, X_{t-1}] &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] - \mathbb{E}[X_t] \mathbb{E}[X_{t-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] - \mu^2 \quad (\text{où } \mu = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{t-1}]) \\ &= \mathbb{E}[(S_t(X_{t-1}) + \varepsilon_t) X_{t-1}] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[S_t(X_{t-1}) X_{t-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t(X_{t-1}) X_{t-1} | X_{t-1}]] + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X_{t-1} p X_{t-1}] + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \\ &= p \mathbb{E}[(X_{t-1})^2] + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \\ &= p(\text{Var}[X_{t-1}] + \mu^2) + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \\ &= p \text{Var}[X_{t-1}] + \mu_\varepsilon \mu - q \mu^2 \\ &= p \text{Var}[X_{t-1}] + \frac{q\lambda}{1-\theta} \frac{\lambda}{1-\theta} - q \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2} \\ &= p \text{Var}[X_{t-1}] \\ &= p \text{Var}[X_0] \end{aligned}$$

puisque X_{t-1} et X_0 ont la même distribution marginale. Supposons que la propriété (2.3.2) soit vraie pour l'ordre k et montrons que ceci implique qu'elle est également vraie pour l'ordre $k+1$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_t, X_{t-k-1}] &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k-1}] - \mathbb{E}[X_t] \mathbb{E}[X_{t-k-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_t X_{t-k-1}] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[(S_t(X_{t-1}) + \varepsilon_t) X_{t-k-1}] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[S_t(X_{t-1}) X_{t-k-1}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-k-1}] - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_t(X_{t-1}) X_{t-k-1} | X_{t-1}, \dots, X_{t-k-1}]] + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X_{t-k-1} p X_{t-1}] + \mu_\varepsilon \mu - \mu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p\mathbb{E}[X_{t-k-1}X_{t-1}] + \mu_\varepsilon\mu - \mu^2 \\
&= p(\text{Cov}[X_{t-1}, X_{t-k-1}] + \mu^2) + \mu_\varepsilon\mu - \mu^2 \\
&= p\text{Cov}[X_{t-1}, X_{t-k-1}] + \mu_\varepsilon\mu - q\mu^2 \\
&= p\text{Cov}[X_{t-1}, X_{t-k-1}] + \frac{q\lambda}{1-\theta} \frac{\lambda}{1-\theta} - q \frac{\lambda^2}{(1-\theta)^2} \\
&= p\text{Cov}[X_{t-1}, X_{t-k-1}] \\
&= p\text{Cov}[X_t, X_{t-k}]
\end{aligned}$$

puisque X_{t-1}, X_{t-k-1}, X_t et X_{t-k} ont la même distribution marginale. Ainsi,

$$\text{Cov}[X_t, X_{t-k-1}] = p^{k+1}\text{Var}[X_0]$$

Nous concluons donc que

$$\text{Cov}[X_t, X_{t-k}] = p^k \text{Var}[X_0] \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

□

La fonction d'autocorrélation du processus $GPAR(1)$ est définie par :

$$\rho_X(k) = \text{Corr}[X_t, X_{t-k}] = p^k, \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

D'après cette expression, nous constatons que le comportement de la fonction d'autocorrélation de ce processus est similaire à celui du processus $AR(1)$ excepté que la fonction d'autocorrélation du processus $GPAR(1)$ est toujours non négative puisque $p \in]0, 1[$.

La fonction d'autocorrélation partielle du processus $GPAR(1)$ est définie par :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \rho_X(1) = p & , \quad k = 1 \\ 0 & , \quad k = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Remarque 2.3.1. *D'après la définition (1.1.4), on remarque que le processus $GPAR(1)$ est stationnaire au sens large.*

L'estimation des paramètres du processus $GPAR(1)$ est plus difficile que celle du processus $AR(1)$. Cette complication provient du fait que la distribution de X_t étant donné ($X_{t-1} = x_{t-1}$) dans le processus $GPAR(1)$, est la convolution des distributions quasi-binomiale $QB(p, \theta/\lambda, x_{t-1})$ et Poisson généralisée $GP(q\lambda, \theta)$.

Notons que nous apportons une correction au résultat d'Al-Nachawati et al (1997) qui ont fait leur simulation du processus $GPAR(1)$ sur la base des lois $QB(p, \theta, \bullet)$ et $GP(q\lambda, \theta)$ au lieu des lois $QB(p, \theta/\lambda, \bullet)$ et $GP(q\lambda, \theta)$.

2.4. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU PROCESSUS

Dans cette section, nous discutons de trois méthodes d'estimation des paramètres p , λ et θ du processus $GPAR(1)$. D'abord, nous abordons les techniques nous permettant d'obtenir les estimateurs par la méthode des moments (méthode de Yule-Walker) et nous présentons également la méthode de quasi-vraisemblance. Par la suite, nous introduisons la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.

2.4.1. Méthode des moments

Nous allons maintenant déterminer les estimateurs des paramètres (p, λ, θ) du modèle $GPAR(1)$ par la méthode des moments.

Proposition 2.4.1. *Les estimateurs des moments des paramètres, dénotés, \bar{p} , $\bar{\theta}$ et $\bar{\lambda}$, du modèle $GPAR(1)$ sont donnés par*

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \\ \bar{\lambda} &= \sqrt{\frac{n(\bar{x} - \bar{p}\bar{x}_0)^3}{\bar{q}^3 \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}} \\ \bar{\theta} &= 1 - \frac{\bar{\lambda}\bar{q}}{(\bar{x} - \bar{p}\bar{x}_0)}\end{aligned}$$

où

(1) \bar{x} et \bar{x}_0 sont respectivement les moyennes échantionnales de n et $n - 1$ observations.

(2) l'estimateur \bar{q} est égal à $1 - \bar{p}$.

DÉMONSTRATION. Rappelons-nous que la fonction d'autocovariance du processus $GPAR(1)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \text{Cov}[X_{t+k}, X_t] \\ &= p^k \text{Var}[X_0], \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Pour $k=1$, la relation ci-dessus devient

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) &= \text{Cov}[X_{t+1}, X_t] \\ &= p \text{Var}[X_0].\end{aligned}$$

Il en découle donc que

$$p = \frac{\text{Cov}(X_{t+1}, X_t)}{\text{Var}(X_0)}. \quad (2.4.1)$$

De plus, l'écriture du modèle $GPAR(1)$ nous permet de déduire l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}[X_t] = p\mathbb{E}[X_{t-1}] + \mu_\varepsilon, \quad (2.4.2)$$

où $\mu_\varepsilon = q\lambda/(1 - \theta)$.

D'où

$$\mathbb{E}[X_t] - p\mathbb{E}[X_{t-1}] = \frac{q\lambda}{1 - \theta}. \quad (2.4.3)$$

Cette égalité est équivalente à

$$(\mathbb{E}[X_t] - p\mathbb{E}[X_{t-1}])^3 = \frac{q^3 \lambda^3}{(1 - \theta)^3}. \quad (2.4.4)$$

Nous savons également que

$$\text{Var}[X_t] = \frac{\lambda}{(1 - \theta)^3}. \quad (2.4.5)$$

En tenant compte de cette égalité, nous pouvons réécrire l'équation (2.4.4) sous la forme suivante :

$$(\mathbb{E}[X_t] - p\mathbb{E}[X_{t-1}])^3 = q^3 \lambda^2 \text{Var}[X_t],$$

d'où

$$\lambda = \sqrt{\frac{(\mathbb{E}[X_t] - p\mathbb{E}[X_{t-1}])^3}{q^3 \text{Var}[X_t]}}. \quad (2.4.6)$$

En utilisant l'expression de la variance de X_t , nous constatons que

$$\theta = 1 - \left\{ \frac{\lambda}{\text{Var}[X_t]} \right\}^{1/3}. \quad (2.4.7)$$

Disposant des observations suivantes x_1, x_2, \dots, x_n , nous estimons d'une part les espérances $\mathbb{E}[X_t]$ et $\mathbb{E}[X_{t-1}]$ respectivement par leurs moyennes échantionnales définies par $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$ et $\bar{x}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-1} x_t$. D'autre part, la variance et l'autocovariance échantionnales sont données respectivement par

$$(1) \text{Var}[X_t] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2$$

$$(2) \text{Cov}[X_{t+1}, X_t] = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x}).$$

En remplaçant $\mathbb{E}[X_t]$, $\mathbb{E}[X_{t-1}]$, $\text{Var}[X_t]$, et $\text{Cov}[X_{t+1}, X_t]$ dans les équations (2.4.1), (2.4.6) et (2.4.7) par leurs expressions échantionnales, nous obtenons les estimateurs des moments pour les paramètres p , λ et θ .

□

Notons que nous apportons une correction aux formules des estimateurs des paramètres λ et θ par la méthode des moments données dans l'article d'Al-Nachawati, Alwasel et Alzaid (1997).

2.4.2. Méthode de quasi-vraisemblance

Une autre méthode proposée par Al-Nachawati et al (1997) est basée sur la loi gaussienne. Cette méthode qui est approximative peut être utilisée quand il est difficile d'évaluer exactement la fonction de vraisemblance du modèle de manière analytique. Cette approche fut proposée initialement par Whittle (1961), où la vraisemblance de la loi normale est utilisée pour l'estimation, sans supposer que les données sont normalement distribuées. Selon Al-Nachawati et al (1997), les estimateurs des paramètres p , λ et θ sont obtenus en maximisant la fonction de vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} L(p, \lambda, \theta) &= \prod_{t=1}^n \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{x_{t-1}}^2}} e^{-(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2 / 2\sigma_{x_{t-1}}^2} \end{aligned}$$

où $\mu_{x_{t-1}}$ et $\sigma_{x_{t-1}}^2$ sont données par

$$\begin{aligned}\mu_{x_{t-1}} &= E(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= px_{t-1} + \mu_\varepsilon \\ &= px_{t-1} + \lambda q / (1 - \theta),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{x_{t-1}}^2 &= \text{Var}(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= \text{Var}(S_t(X_{t-1}) | X_{t-1} = x_{t-1}) + \text{Var}(\varepsilon) \\ &= pq \left\{ x_{t-1}^2 - \sum_{j=1}^{x_{t-1}-1} \frac{x_{t-1}! (\theta/\lambda)^{j-1}}{(x_{t-1} - j - 1)! [1 + x_{t-1}(\theta/\lambda)]^j} \right\} + \lambda q / (1 - \theta)^3.\end{aligned}$$

Notons également que nous apportons une correction à la formule de $\text{Var}(S_t(X_{t-1}) | X_{t-1} = x_{t-1})$ donnée dans l'article d'Al-Nachawati et al (1997). Pour plus de détail (voir Shenton (1986)).

Les estimateurs de quasi-vraisemblance des paramètres p , λ et θ seront convergents, mais moins efficaces que ceux du maximum de vraisemblance conditionnelle (voir chapitre 3 pour les résultats numériques), car nous avons un processus à valeurs entières non négatives dont le domaine est différent de celui de la loi normale.

2.4.3. Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle

Nous présentons maintenant une autre méthode d'estimation des paramètres p , λ et θ du processus $GPAR(1)$, le maximum de vraisemblance conditionnelle. Cette dernière nécessite la distribution conditionnelle de $X_t | X_{t-1} = x_{t-1}$ qui est la convolution de la distribution quasi-binomiale $QB(p, \theta/\lambda, x_{t-1})$ et de la distribution de Poisson généralisée $GP(q\lambda, \theta)$.

Étant donné les observations $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ et la structure du processus $GPAR(1)$, la fonction de vraisemblance conditionnelle est

$$\begin{aligned}
L(p, \lambda, \theta) &= \prod_{t=1}^n \mathbb{P}(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \\
&= \prod_{t=1}^n \left\{ \sum_{r=0}^{\min(x_t, x_{t-1})} \mathbb{P}[S_t(x_{t-1}) = r] \mathbb{P}[\varepsilon_t = x_t - r] \right\} \\
&= \prod_{t=1}^n \left\{ \sum_{r=0}^{\min(x_t, x_{t-1})} \binom{x_{t-1}}{r} \frac{pq\lambda}{\lambda + \theta x_{t-1}} \left[\frac{p\lambda + r\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{r-1} \right. \\
&\quad \left. \frac{\left[\frac{q\lambda + (x_{t-1} - r)\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{x_{t-1} - r - 1}}{\lambda q [\lambda q + \theta(x_t - r)]^{x_t - r - 1} e^{-\lambda q - \theta(x_t - r)}} \frac{1}{(x_t - r)!} \right\}.
\end{aligned}$$

Pour des raisons d'efficacité numérique, nous travaillons avec le logarithme naturel de la fonction de vraisemblance conditionnelle, la fonction de logvraisemblance, dénotée $l(p, \lambda, \theta)$,

$$\begin{aligned}
l(p, \lambda, \theta) &= \ln[L(p, \lambda, \theta)] \\
&= \sum_{t=1}^n \ln \left\{ \sum_{r=0}^{\min(x_t, x_{t-1})} \binom{x_{t-1}}{r} \frac{pq\lambda}{\lambda + \theta x_{t-1}} \left[\frac{p\lambda + r\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{r-1} \right. \\
&\quad \left. \frac{\left[\frac{q\lambda + (x_{t-1} - r)\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{x_{t-1} - r - 1}}{\lambda q [\lambda q + \theta(x_t - r)]^{x_t - r - 1} e^{-\lambda q - \theta(x_t - r)}} \frac{1}{(x_t - r)!} \right\}. \tag{2.4.8}
\end{aligned}$$

Cependant, on ne peut trouver une solution explicite. Pour les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle nous utilisons donc des techniques d'analyse numérique pour calculer \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ qui maximisent cette fonction. Cette étude sera traitée dans le chapitre suivant.

Il reste à noter que, d'après Monfort (1982) et Gouriéroux et Monfort (1983), sous des conditions générales de régularité de $L(p, \lambda, \theta)$ par rapport à (p, λ, θ) , le vecteur des estimateurs $(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})'$ a une distribution asymptotique multinormale

de dimension 3, i.e.

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{p} - p \\ \hat{\lambda} - \lambda \\ \hat{\theta} - \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N_3(0, I^{-1}(p, \lambda, \theta)),$$

(\xrightarrow{L} dénote la convergence en loi), où

(1) 0 est le vecteur de zéros de dimension 3,

$$(2) I(p, \lambda, \theta) = - \begin{pmatrix} \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial p^2} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial p \partial \lambda} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial p \partial \theta} l(p, \lambda, \theta)] \\ \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial p} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} l(p, \lambda, \theta)] \\ \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial p} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} l(p, \lambda, \theta)] & \mathbb{E}[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(p, \lambda, \theta)] \end{pmatrix}$$

est la matrice d'information de Fisher.

Puisque \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ sont asymptotiquement non-biaisés et asymptotiquement normaux, des intervalles de confiance approximatifs de niveau α pour p , λ et θ sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned} \hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{p})}, \\ \hat{\lambda} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda})}, \\ \hat{\theta} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta})}, \end{aligned}$$

où $Z_{\alpha/2}$ est le $(1 - \alpha/2)$ quantile de la loi normale centrée réduite et les variances $\widehat{\text{Var}}(\hat{p})$, $\widehat{\text{Var}}(\hat{\lambda})$ et $\widehat{\text{Var}}(\hat{\theta})$ sont estimées en remplaçant p , λ et θ dans la matrice $I^{-1}(p, \lambda, \theta)$ par \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$.

Chapitre 3

BIAIS ET EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié le modèle $GPAR(1)$ à valeurs entières non négatives. Nous avons aussi traité le problème d'estimation des paramètres par trois méthodes différentes qui sont la méthode des moments, du maximum de vraisemblance conditionnelle (m.v.c.) et de quasi-vraisemblance.

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement, par simulation, des estimateurs basés uniquement sur les deux premières méthodes. La première section est consacrée à la simulation du processus $GPAR(1)$ pour différentes valeurs des paramètres. Ensuite, nous présentons les résultats des simulations, sous forme de graphique et de tableaux. Nous discutons les résultats et nous comparons sommairement les deux méthodes.

La deuxième section est consacrée à l'étude de l'efficacité asymptotique des estimateurs selon les trois méthodes d'estimation. Nous comparons les variances des estimateurs des paramètres p , λ et θ , ainsi que les déterminants des matrices de variance-covariance des trois estimateurs obtenus par les trois méthodes d'estimation en utilisant des séries simulées de 2000 observations.

3.1. SIMULATION

Afin de nous donner un aperçu du comportement de nos estimateurs, nous avons simulé des séries à partir du modèle $GPAR(1)$ suivant :

$$X_t = S_t(X_{t-1}) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots$$

où

- (1) $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires iid, à valeurs entières non négatives, selon une loi de Poisson généralisée de paramètres $q\lambda$ et θ ;
- (2) $\{S_t(\bullet)\}$ est une suite de variables aléatoires iid à valeurs entières non négatives avec fonction de probabilité quasi-binomiale $QB(p, \theta/\lambda, \bullet)$ indépendante de $\{\varepsilon_t\}$.

Pour nos simulations, nous avons choisi différentes valeurs pour les paramètres p , λ et θ et deux longueurs des séries, 50 et 200.

Pour générer nos séries de taille 50 et 200 observations, nous avons développé un code en langage de programmation C++ que nous présentons en annexe. Ce programme génère tout d'abord une valeur initiale X_0 selon une loi $GP(\lambda, \theta)$, où les valeurs des paramètres sont introduites. Ensuite, nous avons généré les observations $X_t|X_{t-1} = x_{t-1}$, pour $t = 1, 2, \dots, n$ où n représente la taille de la série à générer. Chaque observation $X_t|X_{t-1} = x_{t-1}$ est une somme de deux observations générées respectivement selon la loi $QB(p, \theta/\lambda, x_{t-1})$ et la loi $GP(q\lambda, \theta)$ pour des valeurs des paramètres p , λ et θ fixées. Nous avons effectué 200 réalisations pour différentes combinaisons des valeurs de p , λ et θ que nous avons choisies du tableau suivant :

TABLEAU 3.1.1. Choix des paramètres p , λ et θ .

Paramètre p	Paramètre λ	Paramètre θ
0.2	1	0.2
0.4	3	0.4
0.6	5	0.6
0.8	10	0.8

Pour avoir une idée du comportement du modèle $GPAR(1)$, nous présentons à la figure (3.1.1) une série simulée de 200 observations pour les paramètres p , λ et θ respectivement égaux à 0.8, 3 et 0.2.

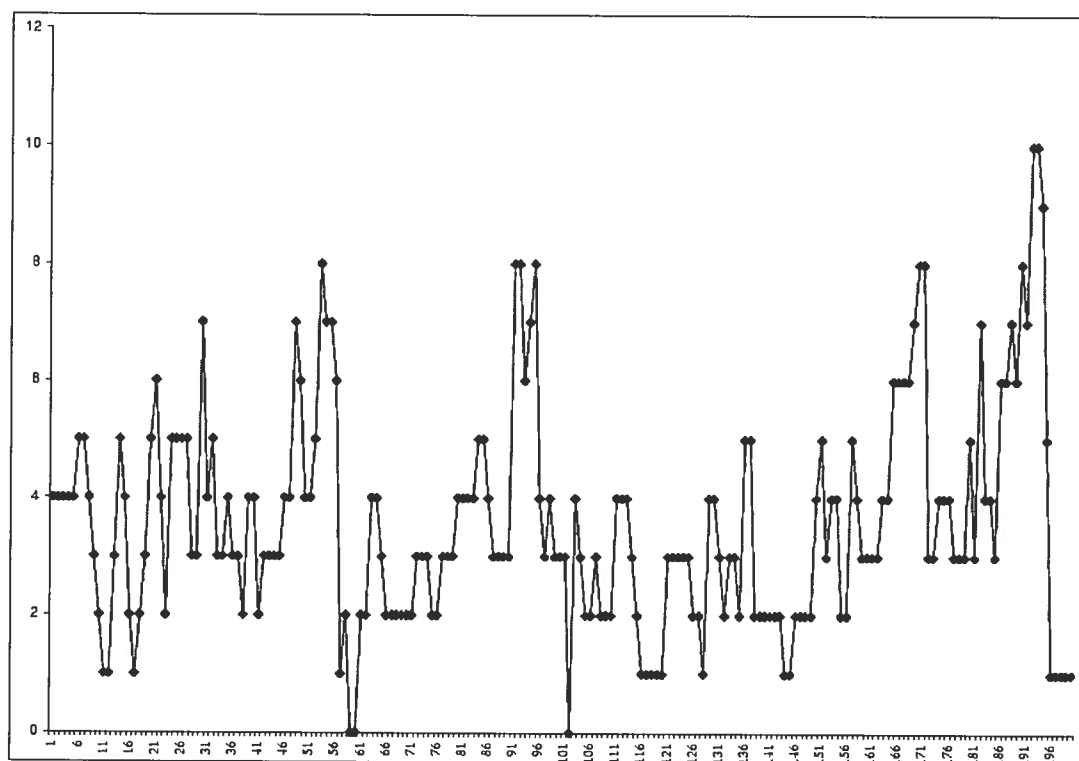


FIGURE 3.1.1. Série simulée du modèle $GPAR(1)$ avec $p=0.8$, $\lambda = 3$ et $\theta=0.2$.

3.2. BIAIS

Avant de présenter nos résultats, voici quelques détails concernant la réalisation de nos expériences. Pour chaque série simulée, nous avons évalué les estimés \bar{p} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\theta}$ des paramètres p , λ et θ par la méthode des moments en utilisant les expressions obtenues dans le chapitre précédent. Ensuite, nous avons pris leurs moyennes comme estimateurs de nos paramètres et nous avons calculé leurs biais. Tout ce travail était fait à l'aide d'un programme en C++ présenté en annexe.

D'autre part, rappelons-nous d'après le chapitre précédent que pour les estimateurs \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ du maximum de vraisemblance conditionnelle, nous devons maximiser numériquement une certaine fonction. Pour cela, nous avons utilisé une méthode itérative connue sous le nom de «Downhill Simplex» tiré de l'ouvrage intitulé «Numerical recipes in C++» (voir Press, Teukolsky, Vetterling et Flannery (2002)). Notons que cette méthode n'exige pas le calcul des dérivées de la fonction à maximiser. Ceci facilite notre tâche car la fonction (2.4.8) est difficile à dériver. De plus, cette méthode est très puissante par rapport à d'autres qui ne nécessitent pas le gradient.

Comme cette technique est itérative, nous avons utilisé, pour chaque réalisation, les estimés \bar{p} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\theta}$ comme valeurs initiales. Ensuite, nous avons pris aussi leurs moyennes comme estimateurs de nos paramètres et nous avons cherché les biais correspondants. Le programme de la méthode du Downhill Simplex, du calcul des estimateurs et des biais est présenté aussi en annexe.

Dans les pages qui suivent, nous présentons, sous forme graphique, les résultats de simulation obtenus conformément au cadre d'étude fixé à la section précédente. Les résultats détaillés peuvent être consultés, sous forme de tableaux.

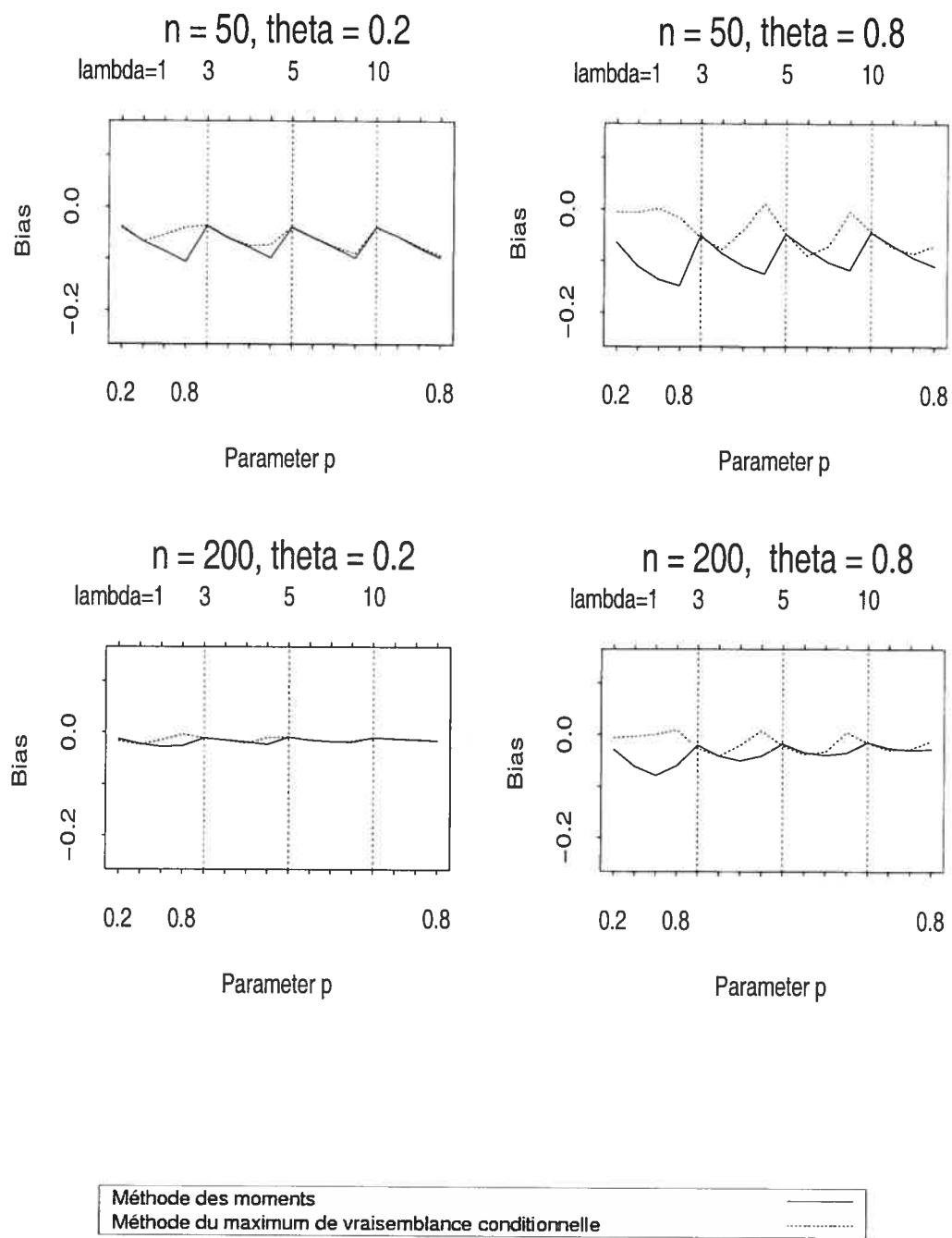


FIGURE 3.2.1. Biais de l'estimateur du paramètre p du modèle $GPAR(1)$.

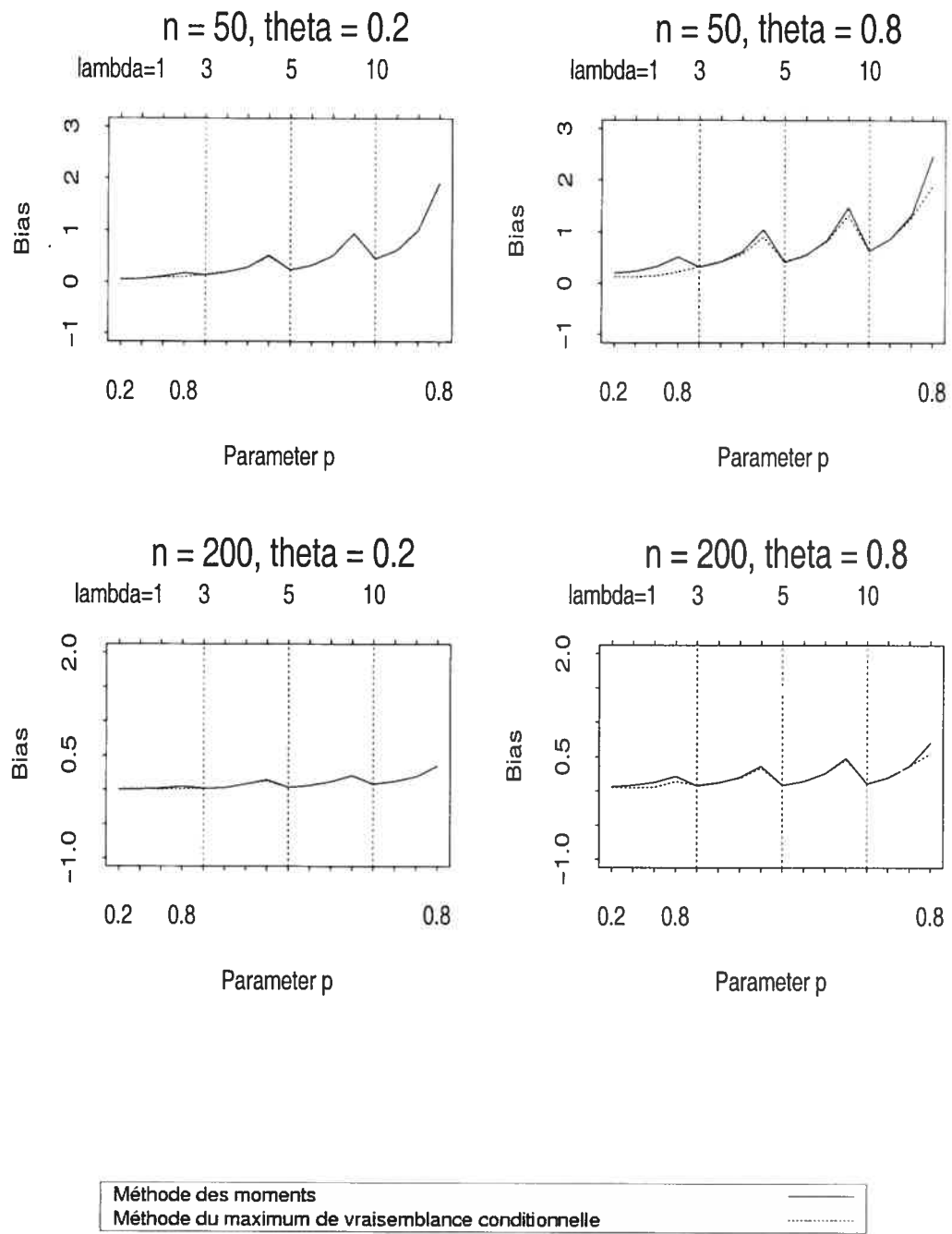


FIGURE 3.2.2. Biais de l'estimateur du paramètre λ du modèle $GPAR(1)$.

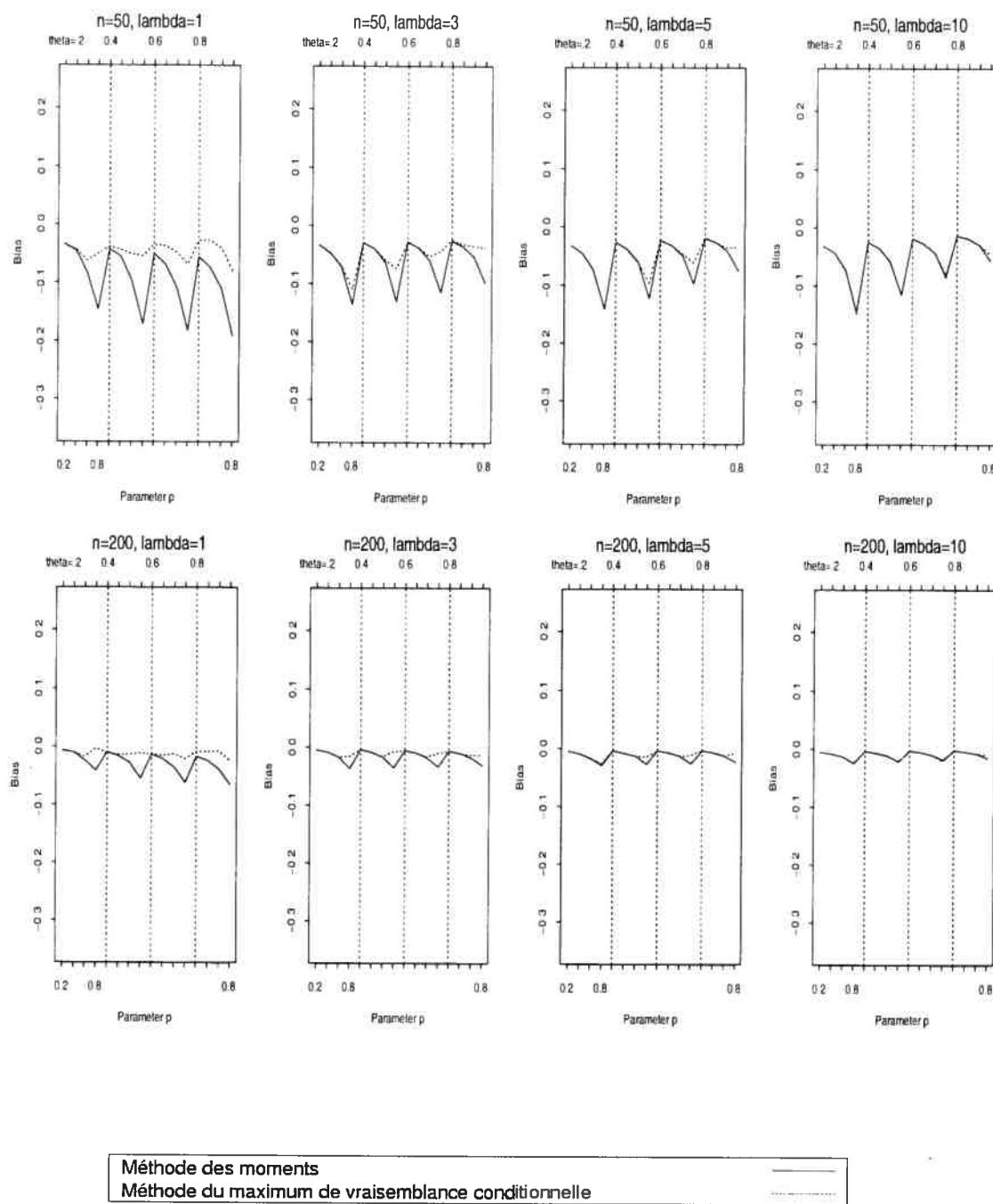


FIGURE 3.2.3. Biases de l'estimateur du paramètre θ du modèle $GPAR(1)$.

À partir de ces graphiques, nous remarquons que dans toutes les situations considérées, le biais des estimateurs \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle est plus petit que celui des estimateurs \bar{p} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\theta}$ par la méthode des moments. Nous constatons également que le biais des estimateurs pour les deux méthodes diminue en augmentant la taille des séries simulées.

Du graphique (3.2.1), nous observons que le biais de \hat{p} est nettement plus petit que celui de \bar{p} , sauf pour le cas de $n = 200$ et $\theta = 0.2$ où les biais sont très proches de 0. Nous remarquons aussi que le biais de l'estimateur de p pour les deux méthodes est négatif.

En comparant le biais des estimateurs $\hat{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ dans la figure (3.2.2) nous constatons que le biais de $\hat{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ est plus près de 0 pour λ égal à 1 ou 3, et plus la valeur de λ augmente, plus $\hat{\lambda}$ et $\bar{\lambda}$ sont biaisés. Dans tous les cas, nous remarquons que le biais de l'estimateur du paramètre λ est positif.

À partir du graphique (3.2.3), nous observons que le biais de l'estimateur de θ se comporte presque de la même manière que celui de l'estimateur de p , et que le biais de l'estimateur de θ pour les deux méthodes est semblable pour λ égal à 5 ou 10.

Nous avons présenté les résultats des biais des estimés des paramètres p , λ et θ pour des séries simulées de taille 50 et 200 observations dans les tableaux 3.2.1 à 3.2.16.

TABLEAU 3.2.1. Biais de l'estimateur de p ($n = 50$ et $\theta = 0.2$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de p par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0394	-0.0374
	0.4	-0.0668	-0.0664
	0.6	-0.0856	-0.0540
	0.8	-0.1064	-0.0391
$\lambda = 3$	0.2	-0.0362	-0.0354
	0.4	-0.0600	-0.0588
	0.6	-0.0784	-0.0743
	0.8	-0.0994	-0.0738
$\lambda = 5$	0.2	-0.0387	-0.0382
	0.4	-0.0594	-0.0581
	0.6	-0.0782	-0.0763
	0.8	-0.0990	-0.0909
$\lambda = 10$	0.2	-0.0387	-0.0382
	0.4	-0.0567	-0.0561
	0.6	-0.0788	-0.0769
	0.8	-0.0985	-0.0937

TABLEAU 3.2.2. Biais de l'estimateur de p ($n = 50$ et $\theta = 0.8$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de p par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0643	-0.0057
	0.4	-0.1108	-0.0058
	0.6	-0.1367	0.0021
	0.8	-0.1482	-0.0162
$\lambda = 3$	0.2	-0.0512	-0.0550
	0.4	-0.0863	-0.0782
	0.6	-0.1112	-0.0402
	0.8	-0.1258	0.0117
$\lambda = 5$	0.2	-0.0483	-0.0472
	0.4	-0.0784	-0.0912
	0.6	-0.1040	-0.0723
	0.8	-0.1188	-0.0036
$\lambda = 10$	0.2	-0.0442	-0.0430
	0.4	-0.0700	-0.0735
	0.6	-0.0944	-0.0862
	0.8	-0.1114	-0.0700

TABLEAU 3.2.3. Biais de l'estimateur de p ($n = 200$ et $\theta = 0.2$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de p par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0129	-0.0166
	0.4	-0.0214	-0.0235
	0.6	-0.0271	-0.0142
	0.8	-0.0250	-0.0034
$\lambda = 3$	0.2	-0.0108	-0.0104
	0.4	-0.0146	-0.0140
	0.6	-0.0184	-0.0209
	0.8	-0.0231	-0.0098
$\lambda = 5$	0.2	-0.0091	-0.0088
	0.4	-0.0147	-0.0142
	0.6	-0.0173	-0.0172
	0.8	-0.0181	-0.0159
$\lambda = 10$	0.2	-0.0101	-0.0097
	0.4	-0.0122	-0.0116
	0.6	-0.0137	-0.0130
	0.8	-0.0153	-0.0154

TABLEAU 3.2.4. Biais de l'estimateur de p ($n = 200$ et $\theta = 0.8$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de p par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0285	-0.0060
	0.4	-0.0616	-0.0035
	0.6	-0.0790	0.0006
	0.8	-0.0599	0.0091
$\lambda = 3$	0.2	-0.0202	-0.0260
	0.4	-0.0407	-0.0409
	0.6	-0.0498	-0.0195
	0.8	-0.0411	0.0076
$\lambda = 5$	0.2	-0.0175	-0.0210
	0.4	-0.0333	-0.0369
	0.6	-0.0393	-0.0327
	0.8	-0.0343	0.0046
$\lambda = 10$	0.2	-0.0143	-0.0150
	0.4	-0.0250	-0.0288
	0.6	-0.0287	-0.0277
	0.8	-0.0269	-0.0118

TABLEAU 3.2.5. Biais de l'estimateur de λ ($n = 50$ et $\theta = 0.2$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de λ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	0.0471	0.0485
	0.4	0.0575	0.0595
	0.6	0.1071	0.0904
	0.8	0.1692	0.0960
$\lambda = 3$	0.2	0.1385	0.1388
	0.4	0.1920	0.1943
	0.6	0.2810	0.2820
	0.8	0.5101	0.4914
$\lambda = 5$	0.2	0.2327	0.2330
	0.4	0.3176	0.3185
	0.6	0.5018	0.5031
	0.8	0.9350	0.9358
$\lambda = 10$	0.2	0.4427	0.4429
	0.4	0.6090	0.6080
	0.6	0.9981	0.9960
	0.8	1.9067	1.8833

TABLEAU 3.2.6. Biais de l'estimateur de λ ($n = 50$ et $\theta = 0.8$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de λ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	0.1941	0.1285
	0.4	0.2364	0.1225
	0.6	0.3298	0.1553
	0.8	0.5098	0.2238
$\lambda = 3$	0.2	0.3161	0.3220
	0.4	0.4131	0.4190
	0.6	0.6039	0.5603
	0.8	1.0497	0.9041
$\lambda = 5$	0.2	0.4106	0.4126
	0.4	0.5452	0.5527
	0.6	0.8333	0.8141
	0.8	1.4695	1.3300
$\lambda = 10$	0.2	0.6243	0.6241
	0.4	0.8641	0.8661
	0.6	1.3263	1.2837
	0.8	2.4576	1.8969

TABLEAU 3.2.7. Biais de l'estimateur de λ ($n = 200$ et $\theta = 0.2$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de λ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	0.0061	0.0090
	0.4	0.0090	0.0135
	0.6	0.0211	0.0100
	0.8	0.0475	0.0177
$\lambda = 3$	0.2	0.0182	0.0184
	0.4	0.0311	0.0314
	0.6	0.0815	0.0845
	0.8	0.1443	0.1333
$\lambda = 5$	0.2	0.0341	0.0342
	0.4	0.0625	0.0627
	0.6	0.1178	0.1186
	0.8	0.2044	0.2053
$\lambda = 10$	0.2	0.0800	0.0801
	0.4	0.1241	0.1242
	0.6	0.1951	0.1951
	0.8	0.3475	0.3482

TABLEAU 3.2.8. Biais de l'estimateur de λ ($n = 200$ et $\theta = 0.8$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de λ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	0.0651	0.0458
	0.4	0.0832	0.0460
	0.6	0.1213	0.0529
	0.8	0.2150	0.1392
$\lambda = 3$	0.2	0.0758	0.0814
	0.4	0.1151	0.1213
	0.6	0.2003	0.1833
	0.8	0.3630	0.3371
$\lambda = 5$	0.2	0.0822	0.0856
	0.4	0.1399	0.1430
	0.6	0.2506	0.2527
	0.8	0.4789	0.4588
$\lambda = 10$	0.2	0.1064	0.1072
	0.4	0.1954	0.1983
	0.6	0.3602	0.3614
	0.8	0.7019	0.5566

TABLEAU 3.2.9. Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 1$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0344	-0.0337
	0.4	-0.0453	-0.0438
	0.6	-0.0836	-0.0634
	0.8	-0.1460	-0.0504
$\lambda = 3$	0.2	-0.0432	-0.0385
	0.4	-0.0552	-0.0435
	0.6	-0.0961	-0.0517
	0.8	-0.1708	-0.0543
$\lambda = 5$	0.2	-0.0511	-0.0342
	0.4	-0.0687	-0.0370
	0.6	-0.1080	-0.0487
	0.8	-0.1822	-0.0692
$\lambda = 10$	0.2	-0.0565	-0.0276
	0.4	-0.0746	-0.0272
	0.6	-0.1104	-0.0408
	0.8	-0.1909	-0.0807

TABLEAU 3.2.10. Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 3$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0333	-0.0332
	0.4	-0.0475	-0.0484
	0.6	-0.0717	-0.0703
	0.8	-0.1360	-0.1101
$\lambda = 3$	0.2	-0.0295	-0.0294
	0.4	-0.0410	-0.0405
	0.6	-0.0647	-0.0606
	0.8	-0.1302	-0.0750
$\lambda = 5$	0.2	-0.0283	-0.0286
	0.4	-0.0393	-0.0391
	0.6	-0.0611	-0.0535
	0.8	-0.1147	-0.044
$\lambda = 10$	0.2	-0.0264	-0.0252
	0.4	-0.0361	-0.0331
	0.6	-0.0544	-0.0359
	0.8	-0.0985	-0.0391

TABLEAU 3.2.11. Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 5$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0325	-0.0325
	0.4	-0.0461	-0.0462
	0.6	-0.0747	-0.0744
	0.8	-0.1410	-0.1412
$\lambda = 3$	0.2	-0.0264	-0.0263
	0.4	-0.0387	-0.0392
	0.6	-0.0618	-0.0631
	0.8	-0.1232	-0.0967
$\lambda = 5$	0.2	-0.0232	-0.0227
	0.4	-0.0324	-0.0327
	0.6	-0.0509	-0.0473
	0.8	-0.0979	-0.0622
$\lambda = 10$	0.2	-0.0193	-0.0183
	0.4	-0.0267	-0.0273
	0.6	-0.0413	-0.0360
	0.8	-0.0759	-0.0350

TABLEAU 3.2.12. Biais de l'estimateur de θ ($n = 50$ et $\lambda = 10$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0319	-0.0318
	0.4	-0.0445	-0.0444
	0.6	-0.0736	-0.0748
	0.8	-0.1448	-0.1484
$\lambda = 3$	0.2	-0.0253	-0.0249
	0.4	-0.0357	-0.0353
	0.6	-0.0582	-0.0592
	0.8	-0.1145	-0.1150
$\lambda = 5$	0.2	-0.0188	-0.0185
	0.4	-0.0270	-0.0267
	0.6	-0.0440	-0.0436
	0.8	-0.0854	-0.0814
$\lambda = 10$	0.2	-0.0136	-0.0130
	0.4	-0.0192	-0.0184
	0.6	-0.0301	-0.0295
	0.8	-0.0570	-0.0471

TABLEAU 3.2.13. Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 1$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0065	-0.0080
	0.4	-0.0102	-0.0105
	0.6	-0.0244	-0.0178
	0.8	-0.0414	-0.0034
$\lambda = 3$	0.2	-0.0096	-0.0115
	0.4	-0.0164	-0.0143
	0.6	-0.0276	-0.0130
	0.8	-0.0543	-0.0118
$\lambda = 5$	0.2	-0.0130	-0.0131
	0.4	-0.0212	-0.0154
	0.6	-0.0359	-0.0125
	0.8	-0.0620	-0.0211
$\lambda = 10$	0.2	-0.0171	-0.0090
	0.4	-0.0246	-0.0088
	0.6	-0.0387	-0.0082
	0.8	-0.0649	-0.0246

TABLEAU 3.2.14. Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 3$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0051	-0.0048
	0.4	-0.0086	-0.0085
	0.6	-0.0176	-0.0175
	0.8	-0.0365	-0.0159
$\lambda = 3$	0.2	-0.0042	-0.0041
	0.4	-0.0088	-0.0094
	0.6	-0.0169	-0.0161
	0.8	-0.0353	-0.0070
$\lambda = 5$	0.2	-0.0053	-0.0061
	0.4	-0.0096	-0.0104
	0.6	-0.0178	-0.0153
	0.8	-0.0334	-0.0101
$\lambda = 10$	0.2	-0.0065	-0.0071
	0.4	-0.0106	-0.0108
	0.6	-0.0179	-0.0133
	0.8	-0.0316	-0.0134

TABLEAU 3.2.15. Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 5$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0051	-0.0047
	0.4	-0.0095	-0.0092
	0.6	-0.0173	-0.0177
	0.8	-0.0294	-0.0256
$\lambda = 3$	0.2	-0.0043	-0.0038
	0.4	-0.0085	-0.0083
	0.6	-0.0136	-0.0132
	0.8	-0.0276	-0.0148
$\lambda = 5$	0.2	-0.0039	-0.0036
	0.4	-0.0075	-0.0075
	0.6	-0.0135	-0.0141
	0.8	-0.0266	-0.0114
$\lambda = 10$	0.2	-0.0043	-0.0043
	0.4	-0.0074	-0.0076
	0.6	-0.0127	-0.0136
	0.8	-0.0232	-0.0080

TABLEAU 3.2.16. Biais de l'estimateur de θ ($n = 200$ et $\lambda = 10$).

Paramètre λ	Paramètre p	Biais de l'estimateur de θ par la méthode	
		des moments	du m.v.c.
$\lambda = 1$	0.2	-0.0058	-0.0054
	0.4	-0.0091	-0.0088
	0.6	-0.0137	-0.0135
	0.8	-0.0245	-0.0249
$\lambda = 3$	0.2	-0.0037	-0.0033
	0.4	-0.0067	-0.0064
	0.6	-0.0117	-0.0114
	0.8	-0.0211	-0.0216
$\lambda = 5$	0.2	-0.0030	-0.0026
	0.4	-0.0057	-0.0052
	0.6	-0.0099	-0.0100
	0.8	-0.0191	-0.0207
$\lambda = 10$	0.2	-0.0026	-0.0022
	0.4	-0.0047	-0.0049
	0.6	-0.0082	-0.0080
	0.8	-0.0156	-0.0104

Étant donné que les estimateurs des moments et du maximum de vraisemblance conditionnelle sont presque sans biais, nous nous intéressons à étudier dans la section suivante leur efficacité asymptotique.

3.3. EFFICACITÉ ASYMPTOTIQUE DES ESTIMATEURS

Dans cette section, nous étudions l'efficacité asymptotique des estimateurs des paramètres p , λ et θ du processus $GPAR(1)$ selon les trois méthodes d'estimation. D'abord, nous abordons les techniques qui nous permettent d'obtenir les matrices de variance-covariance asymptotiques des estimateurs des moments $(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$, de quasi-vraisemblance $(\tilde{p}, \tilde{\lambda}, \tilde{\theta})$ et du maximum de vraisemblance conditionnelle $(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})$. Ensuite, nous comparons les variances des estimateurs ainsi que les déterminants de leurs matrices de variance-covariance selon les trois méthodes en utilisant des séries de 2000 observations générées selon le modèle $GPAR(1)$ pour différentes valeurs des paramètres p , λ et θ .

3.3.1. Méthode des moments

Nous allons maintenant déterminer la matrice de variance-covariance des estimateurs des moments $(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$, que nous dénotons par $\bar{\Theta}$, où $\bar{\Theta}$ est la solution du système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} &= p \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t - p \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t &= \frac{(1-p)\lambda}{1-\theta} \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 &= \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}. \end{aligned}$$

Dans le deuxième terme de la deuxième équation ci-haut, nous avons utilisé un facteur $\frac{1}{n}$ au lieu de $\frac{1}{n-1}$ puisqu'ils sont équivalents asymptotiquement. Ces équations peuvent être réécrites sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-1} \left[\frac{(n-1)(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} - p \right] &= 0 \\
\sum_{t=1}^n \left[X_t(1-p) - \frac{(1-p)\lambda}{1-\theta} \right] &= 0 \\
\sum_{t=1}^n \left[(X_t - \bar{X})^2 - \frac{\lambda}{(1-\theta)^3} \right] &= 0,
\end{aligned}$$

ou encore,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n-1} f_t(p, \lambda, \theta) &= 0 \\
\sum_{t=1}^n g_t(p, \lambda, \theta) &= 0 \\
\sum_{t=1}^n h_t(p, \lambda, \theta) &= 0,
\end{aligned}$$

avec,

$$\begin{aligned}
f_t(p, \lambda, \theta) &= \frac{(n-1)(X_t - \bar{X})(X_{t+1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} - p \\
g_t(p, \lambda, \theta) &= X_t(1-p) - \frac{(1-p)\lambda}{1-\theta} \\
h_t(p, \lambda, \theta) &= (X_t - \bar{X})^2 - \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}.
\end{aligned}$$

À partir des expressions de ces trois fonctions, nous pouvons constater que les espérances $\mathbb{E}[f_t(p, \lambda, \theta)]$, $\mathbb{E}[g_t(p, \lambda, \theta)]$ et $\mathbb{E}[h_t(p, \lambda, \theta)]$ sont asymptotiquement égales à 0. Nous utilisons un développement en série de Taylor d'ordre 1 des équations (2.4.1), (2.4.4) et (2.4.5) autour de $(p_0, \lambda_0, \theta_0)$,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \\ \sum_{t=1}^n g_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \\ \sum_{t=1}^n h_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} + \varepsilon,
\end{aligned}$$

où $\sqrt{n}\varepsilon \xrightarrow{P} 0$.

Puisque les estimateurs $(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$ sont solutions des équations,

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n-1} f_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) &= 0 \\ \sum_{t=1}^n g_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) &= 0 \\ \sum_{t=1}^n h_t(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta}) &= 0,\end{aligned}$$

nous pouvons écrire l'équation précédente de l'expansion de Taylor comme,

$$\begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix} - \varepsilon,$$

ou encore,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t \end{pmatrix} \sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} \\ = \frac{-1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix} + o_p(1).\end{aligned}$$

En se basant sur le théorème de Slutsky, nous pouvons déduire que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t \end{pmatrix} \sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L} \frac{-1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ou encore,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N(0, V),$$

où $V = (A^{-1})\text{Var}(Y)(A^{-1})'$, avec,

$$A = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t \end{pmatrix}$$

$$Y = -\frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} f_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n g_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \\ \sum_{t=1}^n h_t(p_0, \lambda_0, \theta_0) \end{pmatrix},$$

où $p \lim_{n \rightarrow \infty}$ dénote la convergence en probabilité. La matrice A évaluée au point $(p_0, \lambda_0, \theta_0)$ peut être estimée par

$$\hat{A} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial p} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \lambda} f_t & \sum_{t=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \theta} f_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} g_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} g_t \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} h_t & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} h_t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \begin{pmatrix} -n+1 & 0 & 0 \\ -n\bar{x} + \frac{n\lambda_0}{1-\theta_0} & -\frac{n(1-p_0)}{1-\theta_0} & -\frac{n\lambda_0(1-p_0)}{(1-\theta_0)^2} \\ 0 & -\frac{n}{(1-\theta_0)^3} & -\frac{3n\lambda_0}{(1-\theta_0)^4} \end{pmatrix}.$$

Il reste à estimer la matrice de variance-covariance de Y qui est donnée par

$$\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \text{Var}(\sum_{t=1}^{n-1} f_t) & \text{Cov}(\sum_{t=1}^{n-1} f_t, \sum_{t=1}^n g_t) & \text{Cov}(\sum_{t=1}^{n-1} f_t, \sum_{t=1}^n h_t) \\ \text{Cov}(\sum_{t=1}^n g_t, \sum_{t=1}^{n-1} f_t) & \text{Var}(\sum_{t=1}^n g_t) & \text{Cov}(\sum_{t=1}^n g_t, \sum_{t=1}^n h_t) \\ \text{Cov}(\sum_{t=1}^n h_t, \sum_{t=1}^{n-1} f_t) & \text{Cov}(\sum_{t=1}^n h_t, \sum_{t=1}^n g_t) & \text{Var}(\sum_{t=1}^n h_t) \end{pmatrix}.$$

Prenons le premier élément de la matrice Y ;

$$\frac{1}{n} \text{Var}(\sum_{t=1}^{n-1} f_t) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[f_t f_k],$$

puisque asymptotiquement $\mathbb{E}[f_t f_k] = \text{Cov}(f_t, f_k)$, car $\mathbb{E}[f_t] = 0$ asymptotiquement. Dans la pratique, nous tronquons ces expressions, car la $\text{Cov}(f_t, f_k) \rightarrow 0$, si $|t - k| \rightarrow \infty$. En nous limitant à une différence $|t - k| \leq 5$, cette dernière égalité devient

$$\frac{1}{n} \text{Var}(\sum_{t=1}^{n-1} f_t) \simeq \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{|t-k| \leq 5} \mathbb{E}[f_t f_k].$$

En utilisant la loi des grands nombres, nous pouvons estimer

$$\frac{1}{n} \sum_{|t-k| \leq 5} \sum \mathbb{E}[f_t f_k],$$

par

$$\frac{1}{n} \sum_{|t-k| \leq 5} \sum f_t f_k.$$

Les autres éléments sont estimables de la même façon, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \text{Cov}\left(\sum_{t=1}^{n-1} f_t, \sum_{t=1}^n g_t\right) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[f_t g_k] \\ &\simeq \frac{1}{n} \sum_{|t-k| \leq 5} \sum \mathbb{E}[f_t g_k]. \end{aligned}$$

Par la loi des grands nombres, cette somme

$$\frac{1}{n} \sum_{|t-k| \leq 5} \sum \mathbb{E}[f_t g_k]$$

est estimable par

$$\frac{1}{n} \sum_{|t-k| \leq 5} \sum f_t g_k;$$

nous estimons les autres éléments de la matrice variance-covariance de Y de la même façon. Finalement, nous pouvons estimer la matrice de variance-covariance V des estimateurs des moments $(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$.

3.3.2. Méthode de quasi-vraisemblance

Après avoir déterminé la matrice de variance-covariance des estimateurs des moments $(\bar{p}, \bar{\lambda}, \bar{\theta})$, nous ferons de même pour les estimateurs $(\tilde{p}, \tilde{\lambda}, \tilde{\theta})$, que nous dénotons par $\tilde{\Theta}$. Rappelons que pour déterminer les estimateurs des paramètres par la méthode de quasi-vraisemblance, nous devons maximiser l'expression suivante :

$$l(p, \lambda, \theta) = -0.5n \ln(2\pi) - 0.5 \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_{x_{t-1}}^2) + \frac{(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2}{\sigma_{x_{t-1}}^2} \right],$$

où $\mu_{x_{t-1}}$ et $\sigma_{x_{t-1}}^2$ sont remplacés par les expressions correspondantes en fonction de p , λ et θ . Cependant, ceci revient à maximiser la somme suivante,

$$-0.5 \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_{x_{t-1}}^2) + \frac{(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2}{\sigma_{x_{t-1}}^2} \right].$$

Définissons les dérivées suivantes,

$$\begin{aligned} S_t^{(1)}(p) &= \frac{\partial}{\partial p} \left\{ -0.5 \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_{x_{t-1}}^2) + \frac{(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2}{\sigma_{x_{t-1}}^2} \right] \right\} \\ S_t^{(2)}(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ -0.5 \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_{x_{t-1}}^2) + \frac{(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2}{\sigma_{x_{t-1}}^2} \right] \right\} \\ S_t^{(3)}(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ -0.5 \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_{x_{t-1}}^2) + \frac{(x_t - \mu_{x_{t-1}})^2}{\sigma_{x_{t-1}}^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

En se basant sur Hamilton (1994), page 663, nous déduisons que,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{p} - p_0 \\ \bar{\lambda} - \lambda_0 \\ \bar{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N(0, D^{-1}SD^{-1}),$$

où,

$$D = -p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) \right] \\ \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) \right] \\ \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) \right] & \sum_{t=1}^n \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) \right] \end{pmatrix},$$

et

$$S = p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(3)} \\ \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(3)} \\ \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices peuvent être estimées par

$$\bar{D} = -\frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(1)} | X_{t-1}) \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(2)} | X_{t-1}) \\ \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial p} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \lambda} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) & \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} (S_t^{(3)} | X_{t-1}) \end{pmatrix},$$

et

$$\hat{S} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(1)} S_t^{(3)} \\ \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(2)} S_t^{(3)} \\ \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(1)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(2)} & \sum_{t=1}^n S_t^{(3)} S_t^{(3)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de variance-covariance des estimateurs de quasi-vraisemblance $(\tilde{p}, \tilde{\lambda}, \tilde{\theta})$ peut être estimée par $\hat{D}^{-1} \hat{S} \hat{D}^{-1}$.

3.3.3. Méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle

Nous achevons cette section par la détermination de la matrice de variance-covariance des estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelle $(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta})$, que nous dénotons par $\hat{\Theta}$. En définissant les dérivées ci-dessous,

$$S_t^{(1)}(p) = \frac{\partial}{\partial p} l(p, \lambda, \theta)$$

$$S_t^{(2)}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} l(p, \lambda, \theta)$$

$$S_t^{(3)}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} l(p, \lambda, \theta)$$

où $l(p, \lambda, \theta)$ est l'expression donnée par

$$l(p, \lambda, \theta) = \ln \left\{ \sum_{r=0}^{\min(x_t, x_{t-1})} \binom{x_{t-1}}{r} \frac{pq\lambda}{\lambda + \theta x_{t-1}} \left[\frac{p\lambda + r\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{r-1} \right. \\ \left. \frac{\left[\frac{q\lambda + (x_{t-1} - r)\theta}{\lambda + \theta x_{t-1}} \right]^{x_{t-1}-r-1}}{\frac{\lambda q [\lambda q + \theta(x_t - r)]^{x_t-r-1} e^{-\lambda q - \theta(x_t-r)}}{(x_t - r)!}} \right\},$$

et en se basant, encore une fois sur Hamilton (1994), nous pouvons écrire,

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{p} - p_0 \\ \hat{\lambda} - \lambda_0 \\ \hat{\theta} - \theta_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N(0, S^{-1}),$$

où la matrice S est semblable à celle obtenue pour la méthode de quasi-vraisemblance avec $S_t^{(1)}(p), S_t^{(2)}(\lambda), S_t^{(3)}(\theta)$ données par les expressions ci-dessus. Nous pouvons estimer la matrice S comme dans la sous-section précédente.

Dans les tableaux suivants, nous présentons les résultats de l'étude de l'efficacité asymptotique des estimateurs par la méthode des moments ou par méthode de quasi-vraisemblance par rapport à ceux du maximum de vraisemblance conditionnelle en simulant une série de 2000 réalisations selon le modèle $GPAR(1)$.

TABLEAU 3.3.1. Efficacité de l'estimateur des moments pour $\lambda = 1$
et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

λ	p	θ	$Var(\bar{p})/Var(\hat{p})$	$Var(\bar{\lambda})/Var(\hat{\lambda})$	$Var(\bar{\theta})/Var(\hat{\theta})$	$ \bar{\Theta} / \hat{\Theta} $
1	0.2	0.2	6.90	1.06	1.78	3.32
		0.4	11.39	1.18	1.94	6.03
		0.6	19.63	1.54	1.70	13.36
		0.8	28.30	2.16	0.87	26.56
	0.4	0.2	12.36	1.11	2.30	3.46
		0.4	23.03	1.29	2.47	6.73
		0.6	31.28	1.39	1.40	9.60
		0.8	41.47	3.51	1.14	20.94
	0.6	0.2	22.96	1.15	2.12	3.63
		0.4	35.71	1.29	1.15	3.70
		0.6	68.19	1.67	0.96	6.89
		0.8	164.27	3.27	0.60	15.00
	0.8	0.2	71.87	0.93	1.76	4.11
		0.4	84.35	2.06	0.26	3.27
		0.6	143.41	4.93	0.14	4.64
		0.8	354.73	22.66	0.23	7.80

TABLEAU 3.3.2. Efficacité de l'estimateur de quasi-vraisemblance pour $\lambda = 1$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

λ	p	θ	$Var(\tilde{p})/Var(\hat{p})$	$Var(\tilde{\lambda})/Var(\hat{\lambda})$	$Var(\tilde{\theta})/Var(\hat{\theta})$	$ \tilde{\Theta} / \hat{\Theta} $
1	0.2	0.2	1.82	1.17	0.82	1.56
		0.4	2.57	1.36	0.85	2.80
		0.6	3.99	2.24	0.84	7.31
		0.8	8.41	17.76	0.54	70.12
	0.4	0.2	2.35	1.31	1.06	2.53
		0.4	3.53	1.76	1.03	5.57
		0.6	6.53	4.35	0.75	20.37
		0.8	6.09	2.24	0.75	11.35
	0.6	0.2	2.02	1.49	1.25	3.26
		0.4	3.53	2.43	0.89	7.75
		0.6	7.45	7.64	0.59	33.98
		0.8	27.97	13.00	0.63	64.03
	0.8	0.2	1.48	1.99	1.71	5.22
		0.4	3.37	3.29	0.78	9.00
		0.6	10.13	22.04	0.53	71.77
		0.8	528.40	121.01	21.72	89.63

TABLEAU 3.3.3. Efficacité de l'estimateur des moments pour $\lambda = 3$
 et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

λ	p	θ	$Var(\bar{p})/Var(\hat{p})$	$Var(\bar{\lambda})/Var(\hat{\lambda})$	$Var(\bar{\theta})/Var(\hat{\theta})$	$ \bar{\theta} / \hat{\theta} $
3	0.2	0.2	2.52	0.94	1.15	1.01
		0.4	5.34	1.34	1.75	2.51
		0.6	10.23	1.86	2.16	6.03
		0.8	18.79	2.48	1.83	17.16
	0.4	0.2	5.19	0.99	1.26	1.14
		0.4	11.48	1.43	2.03	2.64
		0.6	18.94	1.69	2.06	4.86
		0.8	34.67	2.18	1.56	13.75
	0.6	0.2	13.67	1.12	1.42	1.35
		0.4	24.41	1.35	1.70	2.55
		0.6	40.33	1.53	1.41	4.47
		0.8	94.98	2.22	1.06	12.73
	0.8	0.2	88.24	1.08	2.26	4.47
		0.4	91.96	1.05	1.13	4.99
		0.6	120.2	1.40	0.38	6.68
		0.8	234.28	5.15	0.11	12.52

TABLEAU 3.3.4. Efficacité de l'estimateur de quasi-vraisemblance pour $\lambda = 3$ et $(p, \theta) \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$.

λ	p	θ	$Var(\tilde{p})/Var(\hat{p})$	$Var(\tilde{\lambda})/Var(\hat{\lambda})$	$Var(\tilde{\theta})/Var(\hat{\theta})$	$ \tilde{\Theta} / \hat{\Theta} $
3	0.2	0.2	1.33	1.06	0.94	1.11
		0.4	1.62	1.12	0.90	1.46
		0.6	2.19	1.37	0.95	2.57
		0.8	3.92	2.48	0.98	8.72
	0.4	0.2	1.55	1.04	0.95	1.25
		0.4	2.11	1.15	0.97	1.91
		0.6	3.17	1.52	1.03	4.01
		0.8	6.42	3.49	0.92	19.47
	0.6	0.2	2.19	1.30	1.31	1.82
		0.4	2.89	1.51	1.30	3.41
		0.6	4.00	2.13	1.07	7.42
		0.8	8.35	6.33	0.78	42.81
	0.8	0.2	4.37	1.85	3.71	7.24
		0.4	4.58	2.11	2.37	11.42
		0.6	4.85	2.36	1.53	17.55
		0.8	10.06	7.56	0.80	79.49

À partir des tableaux ci-dessus, nous constatons que le déterminant de la matrice de variance-covariance de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle $\hat{\Theta}$ est toujours plus petit que celui des matrices de variance-covariance des estimateurs des moments $\bar{\Theta}$ et de quasi-vraisemblance $\tilde{\Theta}$ pour des valeurs de λ , p et θ fixées et pour une taille d'échantillon de 2000 observations générées selon le modèle *GPAR*(1). En général le déterminant de la matrice de variance-covariance de l'estimateur $\tilde{\Theta}$ est inférieur à celui de la matrice de variance-covariance de l'estimateur $\bar{\Theta}$ pour $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ et $p = 0.2$ ou 0.4 . Ces résultats démontrent que les estimateurs de la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle sont asymptotiquement plus efficaces que ceux de la méthode des moments et de quasi-vraisemblance.

Chapitre 4

APPLICATIONS

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes d'estimation du modèle $GPAR(1)$ à deux séries de données réelles représentant le nombre hebdomadaire de pannes d'ordinateurs et le nombre de sinistres survenus par mois. Nous commençons par la description de chaque série, ensuite, nous exposons les résultats de la modélisation de ces deux jeux de données.

4.1. DESCRIPTION DE LA SÉRIE 1

Comme application des résultats obtenus dans les chapitres précédents, nous nous intéressons dans un premier temps à une série représentant le nombre de pannes d'ordinateurs pendant 128 semaines consécutives (Al-Nachawati et *al* (1997)).

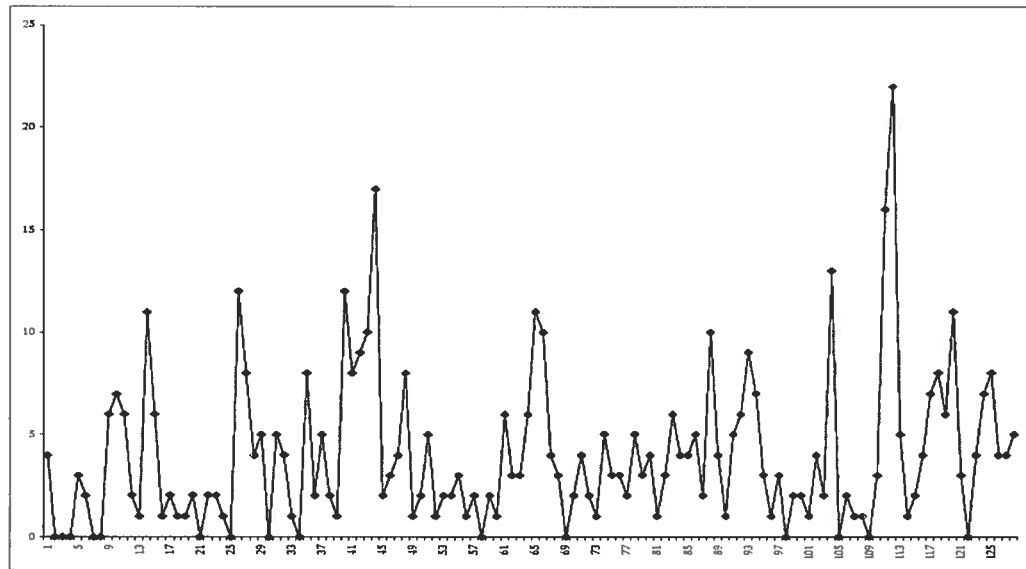


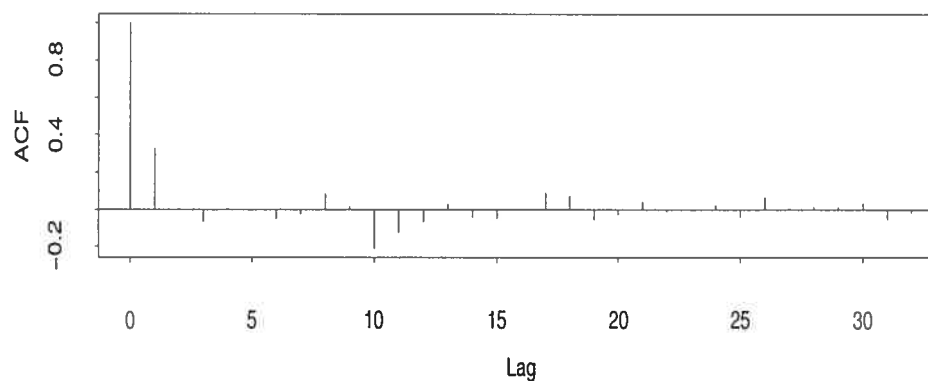
FIGURE 4.1.1. Série du nombre de pannes d'ordinateurs.

Notons le nombre moyen de pannes est de 4.016 et la variance s'élève à 14.504, d'où une surdispersion.

4.2. MODÉLISATION DE LA SÉRIE 1

À partir du corrélogramme (4.2.1), nous constatons que les autocorrélations décroissent d'une manière exponentielle et que la corrélation partielle est forte au délai 1 et faible ensuite. Ainsi, nous supposons que la série est générée par un modèle $GPAR(1)$. Comme on peut le constater, les fonctions d'autocorrélations et d'autocorrélations partielles pour un processus $GPAR(1)$ sont identiques à celles pour un processus $AR(1)$ classique.

Series : ordinateurs



Series : ordinateurs

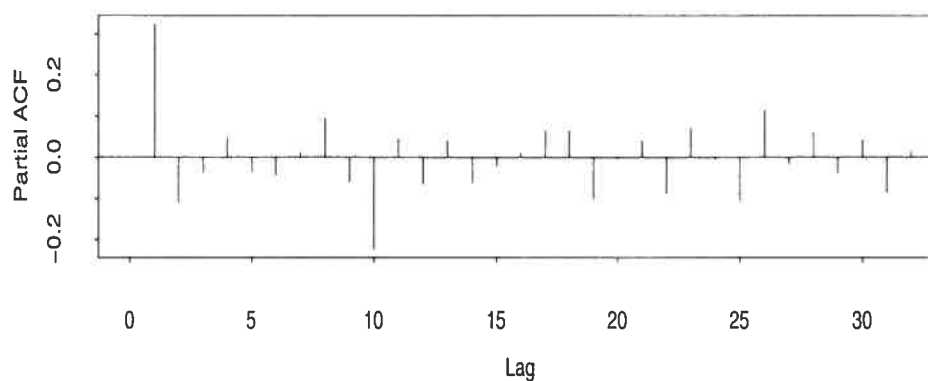


FIGURE 4.2.1. Autocorrélations et autocorrélations partielles de la série 1.

Puisque les simulations et l'étude de l'efficacité asymptotique ont démontré que la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle est meilleure que celle des moments, nous utilisons cette méthode décrite dans le chapitre précédent, pour estimer les paramètres de la série. Les résultats obtenus sont dans le tableau (4.2.1).

TABLEAU 4.2.1. Estimateurs des paramètres de la série 1.

\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$
0.323	2.125	0.471

Nous avons représenté les fréquences relatives des observations de la série 1 et la fonction de masse correspondante de la loi de Poisson généralisée avec paramètres $(\hat{\lambda} = 2.125)$ et $(\hat{\theta} = 0.471)$ dans les figures (4.2.2) et (4.2.3).

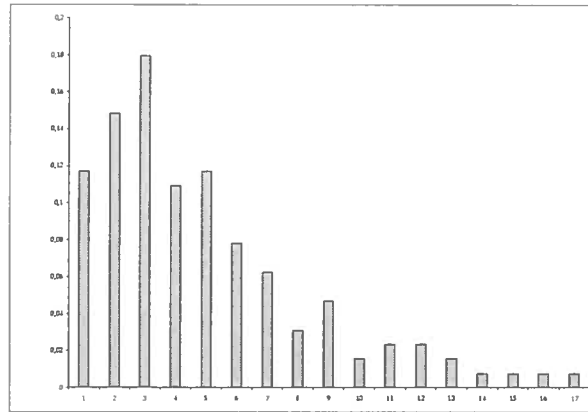


FIGURE 4.2.2. Fréquence relative de la série 1.

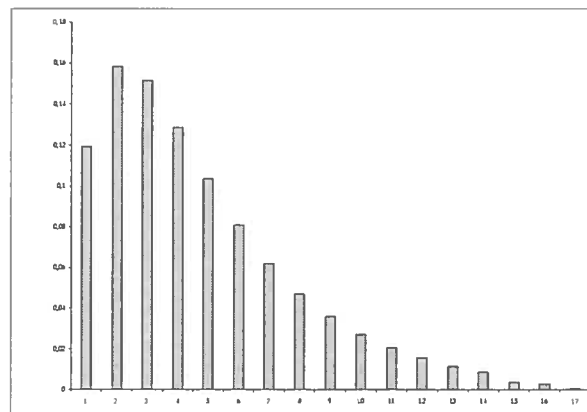


FIGURE 4.2.3. Probabilité théorique de la série 1.

Les deux figures sont assez similaires; de plus, nous pouvons tester si les données représentant le nombre de pannes d'ordinateurs proviennent d'une loi $GP(\lambda, \theta)$ en utilisant le test d'ajustement du khi-carré. Les fréquences observées et théoriques sont présentées dans le tableau (4.2.2) avec l'estimateur $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.

TABLEAU 4.2.2. Fréquences observées et estimées de la série 1.

x_i	fréquence observée (O_i)	fréquence estimée (E_i)	valeur de $[(O_i - E_i)^2/E_i]$
0	15	15.28	0.005
1	19	20.27	0.079
2	23	19.41	0.665
3	14	16.49	0.374
4	15	13.25	0.231
5	10	10.35	0.011
6	8	7.95	0.000
7	4	6.06	0.701
8	6	4.60	0.428
9	2	3.48	0.628
10	3	2.63	0.052
11	3	1.99	0.516
12	2	1.50	
13	1	1.14	0.072
14	0	0.86	
15	0	0.65	
16	1	0.50	
17	1	0.38	
18	0	0.28	
19	0	0.22	0.023
20	0	0.17	
21	0	0.13	
22	1	0.10	
≥ 23	0	0.32	
Total	128	128	3.789

Après avoir regroupé certaines cellules, la statistique du khi-carré pour l'échantillon est donnée par

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{14} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 3.79$$

avec 11 degrés de libertés. Puisque $\chi_{11}^2(0.95) = 19.68$, on ne rejette pas au niveau de 5%, l'hypothèse que le nombre de pannes d'ordinateurs provient d'une loi de Poisson généralisée. Nous notons que le test d'ajustement du khi-carré est un test approximatif car les données sont corrélées.

Pour l'analyse des résidus, rappelons d'abord que le résidu correspondant à la $t^{\text{ème}}$ observation, dénoté r_t , est défini par

$$\begin{aligned} r_t &= x_t - \mathbb{E}[X_t | X_{t-1} = x_{t-1}] \\ &= x_t - px_{t-1} - \frac{\lambda}{1-\theta}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons calculé les résidus ajustés pour la série du nombre de sinistres,

$$\hat{r}_t = x_t - \hat{p}x_{t-1} - \frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\theta}}.$$

Le graphique de ces résidus est présenté dans la figure (4.2.4).

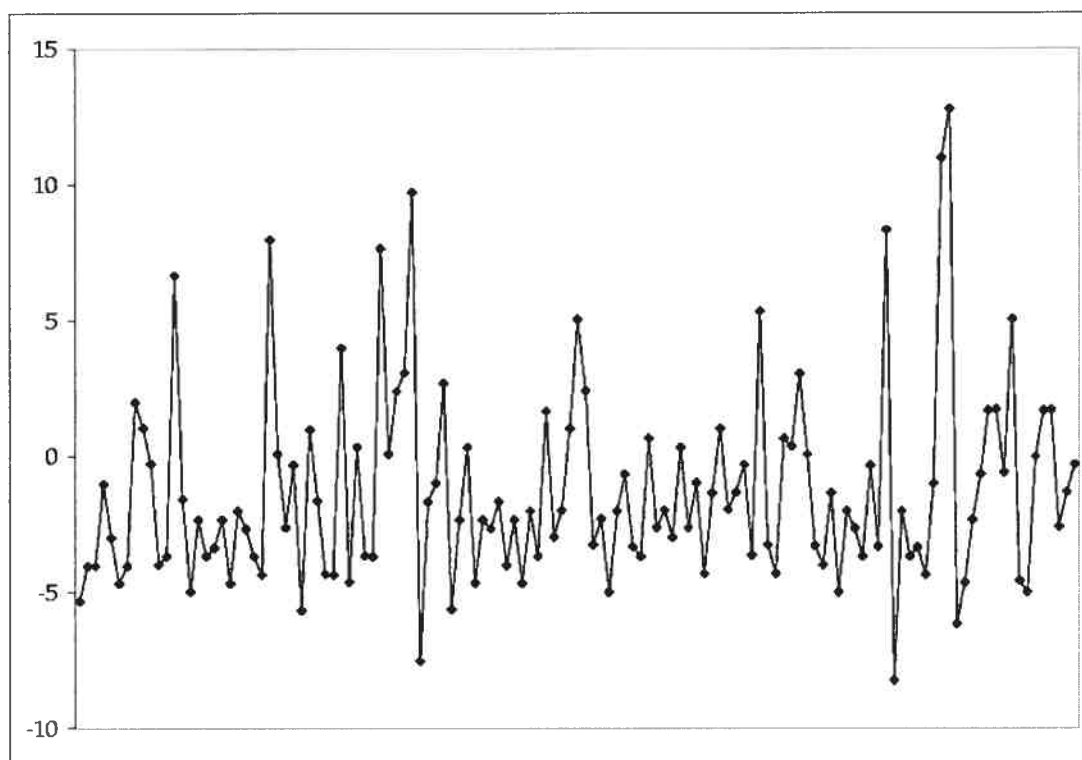


FIGURE 4.2.4. Résidus de la série 1.

Grâce à ce graphique, on peut constater que ces résidus varient environ entre -5 et 5.

L'espérance mathématique des résidus est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r_t] &= \mathbb{E}[X_t - \mathbb{E}[X_t|X_{t-1} = x_{t-1}]] \\ &= \mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}\left[pX_{t-1} - \frac{\lambda}{1-\theta}\right] \\ &= \frac{\lambda}{1-\theta} - p\frac{\lambda}{1-\theta} - \frac{\lambda}{1-\theta} \\ &= -p\frac{\lambda}{1-\theta}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'estimé de l'espérance des résidus est

$$\widehat{\mathbb{E}[r_t]} = -\hat{p}\frac{\hat{\lambda}}{1-\hat{\theta}} = -1.302,$$

et nous avons trouvé que la moyenne des résidus estimés est égale à -1.301.

Nous pouvons utiliser les estimés \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ pour estimer la moyenne et la variance du nombre de pannes d'ordinateurs durant une semaine comme

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}[X_t]} &= \hat{\lambda}/(1-\hat{\theta}) = 4.021, \\ \widehat{\text{Var}[X_t]} &= \hat{\lambda}/(1-\hat{\theta})^3 = 14.397.\end{aligned}$$

Les résultats obtenus des estimés par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle indiquent que la probabilité qu'une panne survenue dans la semaine $(t-1)$ générera une autre panne dans la semaine t , est de 0.323. L'estimé du paramètre θ est de 0.471 ; cette valeur indique qu'il y a une surdispersion dans les observations. Pour notre cas, ceci implique que la variance du processus est approximativement 4 fois plus grande que sa moyenne.

Étant donné que les estimateurs \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ sont asymptotiquement normaux et que nous ne sommes pas capable de calculer $I(p, \lambda, \theta)$ de manière analytique, nous avons utilisé dans ce cas la matrice d'information observée de l'échantillon.

L'information observée est définie comme

$$\widehat{\Sigma} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial p^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial p \partial \lambda} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial p \partial \theta} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial p} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial p} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \end{pmatrix}^{-1}$$

évaluée au point $(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) = (0.323, 2.125, 0.471)$. Ainsi, nous avons obtenu à l'aide d'un programme MATHEMATICA,

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.0055 & 0.0017 & 0.0008 \\ 0.0017 & 0.0493 & -0.0040 \\ 0.0008 & -0.0040 & 0.0026 \end{pmatrix}.$$

Les intervalles de confiance de niveau 95% approximatifs, pour les paramètres p , λ et θ , pour le modèle du nombre de pannes d'ordinateurs sont respectivement donnés par

$$0.323 \pm 1.96\sqrt{0.0055} \quad \text{ou} \quad [0.176, 0.470],$$

$$2.125 \pm 1.96\sqrt{0.0493} \quad \text{ou} \quad [1.689, 2.560],$$

$$0.471 \pm 1.96\sqrt{0.0026} \quad \text{ou} \quad [0.371, 0.571].$$

Les coefficients de corrélations sont estimés par $\widehat{\text{Corr}}(\hat{p}, \hat{\lambda}) = 0.1043$, $\widehat{\text{Corr}}(\hat{p}, \hat{\theta}) = 0.2257$ et $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\lambda}, \hat{\theta}) = -0.3524$.

4.3. DESCRIPTION DE LA SÉRIE 2

Dans cette dernière partie, nous étudions une autre série obtenue de la Colombie-Britannique (Freeland et McCabe (2001)). Les données représentent le nombre de sinistres mensuels relatifs à l'indemnisation des travailleurs à court terme à cause des blessures dans leur travail. La série comporte 120 observations et elle débute en janvier 1985. La figure (4.3.1) représente cette série.

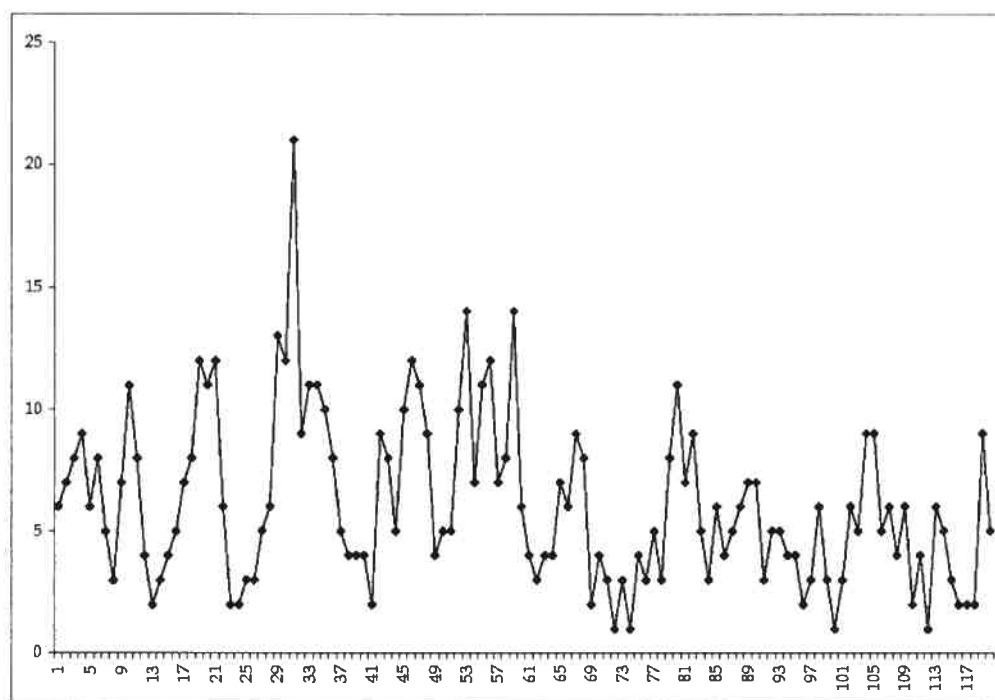


FIGURE 4.3.1. Série du nombre de sinistres.

Nous remarquons que le nombre de sinistres le plus élevé dans cette série est de 21, enregistré en janvier 1987. Notons que le nombre moyen de sinistres pour cette série est de 6.13 et que la variance de 11.70 représente presque 2 fois la moyenne, d'où une surdispersion.

4.4. MODÉLISATION DE LA SÉRIE 2

Afin de modéliser notre série, nous avons examiné les autocorrélations et les autocorrélations partielles représentées dans la figure (4.4.1). Nous constatons que la fonction d'autocorrélation décroît exponentiellement et que la fonction d'autocorrélation partielle semble significative pour le premier délai.

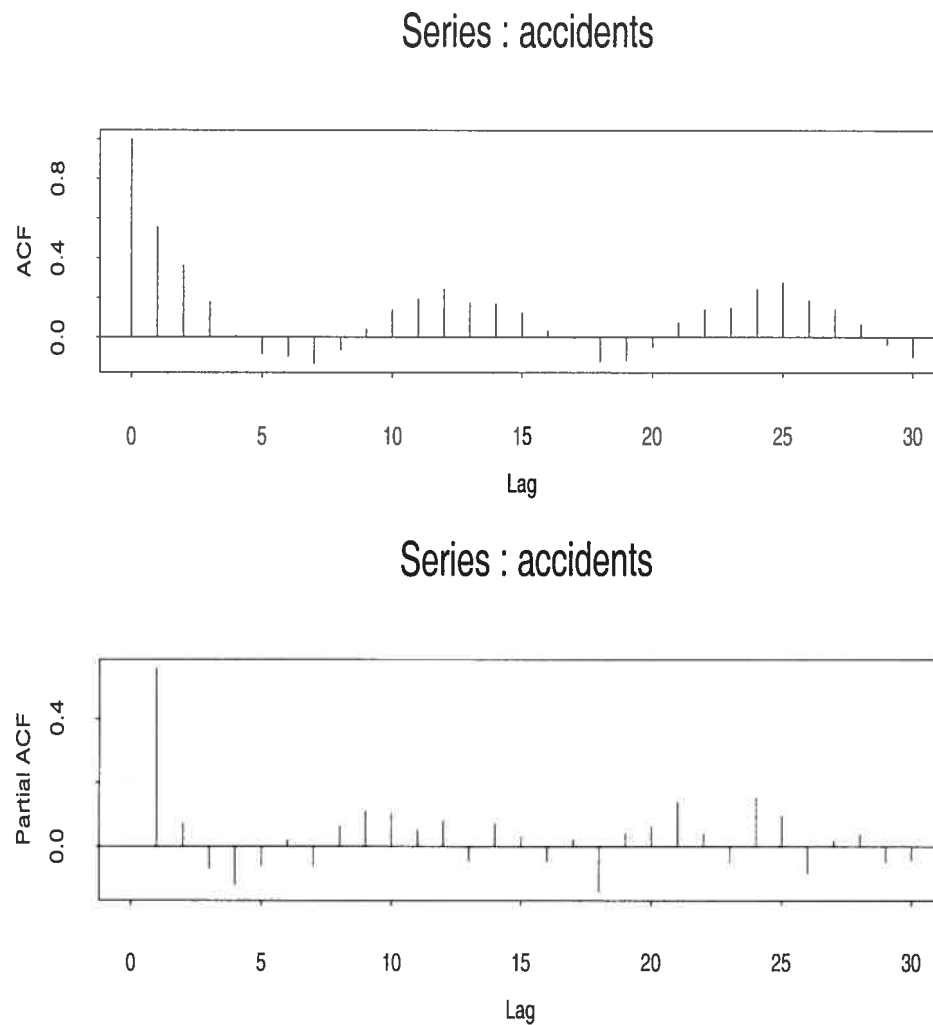


FIGURE 4.4.1. Autocorrélations et autocorrélations partielles de la série 2.

Un modèle $GP(1)$ semble donc plausible pour modéliser cette série. Les estimateurs des paramètres de ce modèle par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle sont donnés au tableau (4.4.1). Nous avons représenté les fréquences relatives des observations de la série 2 et la fonction de probabilité

TABLEAU 4.4.1. Estimateurs des paramètres de la série 2.

\hat{p}	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$
0.558	4.427	0.276

correspondante de la loi de Poisson généralisée avec paramètre $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ dans les figures (4.4.2) et (4.4.3).

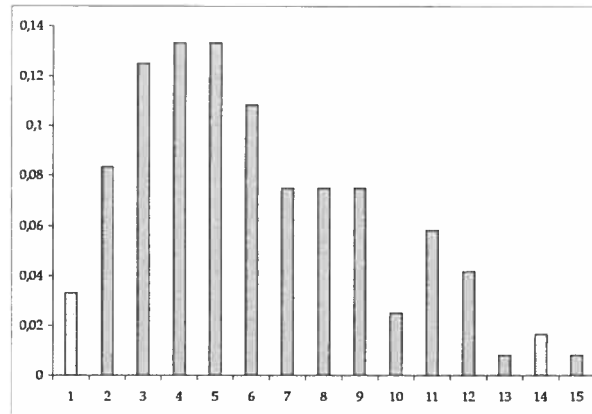


FIGURE 4.4.2. Fréquence relative de la série 2.

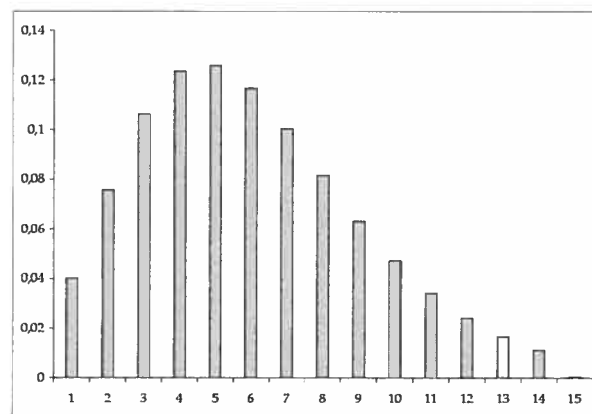


FIGURE 4.4.3. Probabilité théorique de la série 2.

Nous remarquons que les figures (4.4.2) et (4.4.3) ont la même forme ; de plus, nous pouvons tester si les données représentant le nombre de sinistres proviennent d'une loi $GP(\lambda, \theta)$ en utilisant le test d'ajustement du khi-carré. Les fréquences

observées et théoriques sont présentées dans le tableau (4.4.2) avec l'estimateur $(\hat{\lambda}, \hat{\theta})$ obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle.

TABLEAU 4.4.2. Fréquences observées et estimées de la série 2.

x_i	fréquence observée (O_i)	fréquence estimée (E_i)	valeur de $[(O_i - E_i)^2 / E_i]$
0	0	1.43	1.433
1	4	4.81	0.136
2	10	9.09	0.091
3	15	12.75	0.398
4	16	14.82	0.094
5	16	15.12	0.051
6	13	14.01	0.073
7	9	12.06	0.777
8	9	9.80	0.065
9	9	7.60	0.256
10	3	5.68	1.261
11	7	4.11	2.040
12	5	2.89	1.537
13	1	1.99	
14	2	1.34	0.034
15	0	0.89	
16	0	0.58	
17	0	0.38	
18	0	0.24	0.898
19	0	0.15	
20	0	0.09	
21	1	0.06	
≥ 22	0	0.09	
Total	120	120	9.150

Après avoir regroupé certaines classes, la statistique du khi-carré pour l'échantillon est donnée par

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{15} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 9.15$$

avec 12 degrés de libertés. Puisque $\chi_{12}^2(0.95) = 21.03$, on ne rejette pas l'hypothèse que le nombre de sinistres provient d'une loi Poisson généralisée au niveau $\alpha = 5\%$.

Nous notons que le test d'ajustement du khi-carré est un test approximatif car les données sont corrélées.

Nous testons contre une sous-dispersion ou surdispersion quand, sous l'hypothèse nulle, nous avons un modèle $PAR(1)$ et sous l'hypothèse alternative, nous avons un modèle $GPAR(1)$. Le test statistique est :

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_A : \theta \neq 0$$

Puisque l'estimateur $\hat{\theta}$ est asymptotiquement normal de moyenne θ et de variance $\sigma_{\hat{\theta}}^2$, alors sous l'hypothèse nulle, la variable $T_{\hat{\theta}} = (\hat{\theta} - \theta)/\sigma_{\hat{\theta}}$ suit asymptotiquement une loi normale de moyenne 0 et de variance 1. La valeur de $|T_{\hat{\theta}}|$ est égale à 4.35, supérieure à $Z_{(1-\alpha/2)} = 1.96$. Donc, on rejette l'hypothèse H_0 au niveau de signification de 0.05.

Le graphique des résidus est présenté dans la figure (4.4.4).

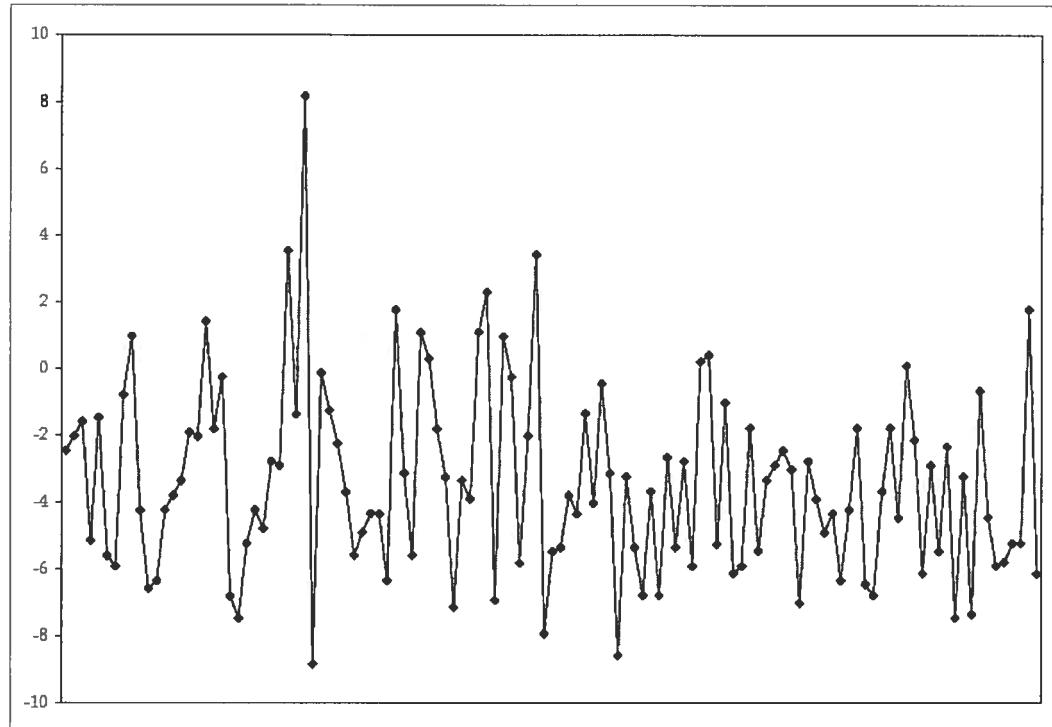


FIGURE 4.4.4. Résidus de la série 2.

Grâce à ce graphique, on peut constater que ces résidus varient environ entre -5 et 5.

L'espérance mathématique des résidus est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t] = -p \frac{\lambda}{1 - \theta}.$$

Ainsi, l'estimé de l'espérance des résidus est

$$\widehat{\mathbb{E}[r_t]} = -\hat{p} \frac{\hat{\lambda}}{1 - \hat{\theta}} = -3.417,$$

et nous avons trouvé que la moyenne des résidus estimés est égale à -3.416.

Nous pouvons utiliser les estimés \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ pour estimer la moyenne et la variance du nombre de sinistres par

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbb{E}[X_t]} &= \hat{\lambda}/(1 - \hat{\theta}) = 6.121, \\ \widehat{\text{Var}[X_t]} &= \hat{\lambda}/(1 - \hat{\theta})^3 = 11.699.\end{aligned}$$

Les résultats obtenus des estimés par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle indiquent que la probabilité qu'un sinistre survenu dans le mois $(t - 1)$ générera un autre sinistre dans le mois t , est de 0.558. L'estimé du paramètre θ est de 0.276, cette valeur indique qu'il y a une surdispersion dans les observations. Pour notre cas, ceci implique que la variance du processus est approximativement 2 fois plus grande que sa moyenne.

Étant donné que les estimateurs \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ sont asymptotiquement normaux et que nous ne sommes pas capable de calculer $I(p, \lambda, \theta)$ de manière analytique, nous avons utilisé dans ce cas la matrice d'information observée de l'échantillon, définie comme

$$\widehat{\Sigma} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial p^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial p \partial \lambda} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial p \partial \theta} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial p} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial p} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) & \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) \end{pmatrix}^{-1}$$

évaluée au point $(\hat{p}, \hat{\lambda}, \hat{\theta}) = (0.558, 4.427, 0.276)$. Ainsi, nous avons obtenu à l'aide d'un programme MATHEMATICA,

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.0042 & -0.0045 & 0.0020 \\ -0.0045 & 0.2359 & -0.0171 \\ 0.0020 & -0.0171 & 0.0040 \end{pmatrix}.$$

Au niveau de confiance 95%, des intervalles de confiance approximatifs pour les paramètres p , λ et θ du modèle pour le nombre de sinistres sont respectivement donnés par

$$\begin{aligned}0.558 \pm 1.96\sqrt{0.0042} &\quad \text{ou} \quad [0.429, 0.686], \\ 4.427 \pm 1.96\sqrt{0.2359} &\quad \text{ou} \quad [3.475, 5.379],\end{aligned}$$

$$0.276 \pm 1.96\sqrt{0.0040} \quad \text{ou} \quad [0.152, 0.401].$$

Notons que l'intervalle de confiance approximatif pour le paramètre p ne contient pas 0, ce qui implique qu'il y a effectivement une dépendance dans les données à modéliser. Les coefficients de corrélations sont estimés par $\widehat{\text{Corr}}(\hat{p}, \hat{\lambda}) = -0.1416$, $\widehat{\text{Corr}}(\hat{p}, \hat{\theta}) = 0.4861$ et $\widehat{\text{Corr}}(\hat{\lambda}, \hat{\theta}) = -0.5552$.

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au modèle linéaire à valeurs entières non négatives $GPAR(1)$ introduit par Alzaid et Al-Osh (1993). Nous avons estimé les paramètres par la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle. Ensuite, nous avons étudié par simulation le comportement de ces estimateurs et nous avons étudié leur efficacité asymptotique.

Nous avons comparé les estimateurs du maximum de vraisemblance conditionnelles \hat{p} , $\hat{\lambda}$ et $\hat{\theta}$ et des moments \bar{p} , $\bar{\lambda}$ et $\bar{\theta}$ des paramètres p , λ et θ du processus $GPAR(1)$. Les estimateurs obtenus par les deux techniques d'estimation demeurent presque identiques et sans biais. Ensuite, nous avons étudié l'efficacité asymptotique des estimateurs, ce qui nous a confirmé que la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle est la meilleure.

Par ailleurs, le problème de l'identification du modèle n'a pas été étudié, mais nous pensons, en s'inspirant de leurs analogues à valeurs réelles, de trouver une façon de le résoudre. Finalement, notre étude pourrait être prolongée au cas multivarié pour le modèle $GPAR$.

ANNEXE

Nous présentons dans cet appendice les programmes développés en C++ et en MATHEMATICA qui ont été utilisés pour nos simulations et nos estimations des paramètres du modèle $GPAR(1)$, ainsi que pour la détermination des variances asymptotiques.

Le but des programmes C++ est de :

- (1) générer des observations provenant du modèle $GPAR(1)$;
- (2) calculer les estimateurs des paramètres du modèle $GPAR(1)$ par la méthode des moments ;
- (3) calculer les estimateurs des paramètres du modèle $GPAR(1)$ par la méthode du maximum de vraisemblance conditionnelle ;
- (4) calculer le biais de ces estimateurs ;
- (5) calculer les estimateurs des paramètres par la méthode des moments et par celle du maximum de vraisemblance conditionnelle pour la série du nombre de pannes d'ordinateurs et la série du nombre de sinistres.

Le but du programme MATHEMATICA est de calculer l'information de Fisher de l'estimateur du maximum de vraisemblance conditionnelle et d'estimer les variances asymptotiques des estimateurs obtenus par les trois méthodes d'estimation pour le modèle $GPAR(1)$.


```

*****
Programme de la fonction rnd
*****

double rnd(int x[])
{
    double u;
    int a[4] = { 53, 15372, 6238, 32 };
    int z[4];
    z[0] = a[0]*x[0]+11;    // la constante c=11
    z[1] = a[1]*x[0]+a[0]*x[1];
    z[2] = a[2]*x[0]+a[1]*x[1]+a[0]*x[2];
    z[3] = a[3]*x[0]+a[2]*x[1]+a[1]*x[2]+a[0]*x[3];
    x[0] = z[0]%16384;
    z[1] = z[1]+(z[0]/16384);
    x[1] = z[1]%16384;
    z[2] = z[2]+(z[1]/16384);
    x[2] = z[2]%16384;
    z[3] = z[3]+(z[2]/16384);
    x[3] = z[3]%64;
    u = x[3]*0.015625+x[2]*0.9536743164e-06
        +x[1]*0.5820766091e-10+x[0]*0.3552713679e-14;
    return(u);
}

*****
Programme de la fonction qui simule la loi quasi-binoimiale
*****

int QuasiBinom(double p, double theta, int y, int x[])
{
    int k;
    double u, pr, s, q;

```

```

double prod1, prod2, prod3, prod4;
u=rnd(x);
k = 0;
q = 1.0-p;
pr = q*pow((q+y*theta)/(1+y*theta), (double)y-1);
s = pr;
while ( u > s ) {
    ++k;
    prod1=(y-k+1)/(k*1.0);
    prod2=(p+k*theta)/(q+(y-k+1)*theta);
    prod3=pow((1+(theta/(p+k*theta-theta))), (double)(k-2));
    prod4=pow((1-(theta/(q+(y-k+1)*theta))), (double)(y-k-1));
    pr = pr*prod1*prod2*prod3*prod4;
    s = s+pr;
}
return (k);
}
*****
Programme de la fonction qui simule la loi de Poisson généralisée
*****
int GenPoisson(double lambda, double theta, int x[])
{
    int k;
    double u, pr, s;
    u=rnd(x);
    k = 0;
    pr = exp(-lambda);
    s = pr;
    while ( u > s ) {
        ++k;
        pr=pr*(lambda+theta*k)*pow((1+theta/(lambda+theta*k-theta)),

```

```

double(k-2))*exp(-theta)/k;
    s = s+pr;
}
return(k);
}
*****
Programme qui calcule les estimateurs et leur biais
par la méthode des moments
*****
#include <iostream.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "rnd.cc"
#include "GenPoisson.cc"
#include "QuasiBinom.cc"
int vectinit1[4] = { 8745, 342, 0, 0 };
int main(int *argc, char ** argv)
{
    int n, L;
n= atoi ( argv [1]);
L= atoi ( argv[2]);
    int X[n+1], epsilon[n+1];
    int somme0, somme1;
    double moy0, moy1;
    double gamma0, gamma1;
    double p, q, lambda, theta;
    double Estp, Estq, Estlambda, Esttheta;
    double SomEstp, SomEstlambda, SomEsttheta;
    double MoyEstp, MoyEstlambda, MoyEsttheta;
    double Biaisp, Biaislamba, Biaistheta;
    lambda=atof (argv [3]);

```

```

theta=atof (argv [4]);
p=atof (argv [5]) ;
  cout << "Les Parametres : " << n << ", " << L << ", " << lambda<< ", "
  << theta << ", " <<p<< endl;
SomEstp=0.0;
SomEstlambda=0.0;
SomEsttheta=0.0;
  for(int j=1;j<=L;j++)
    {
      q=1.0-p;
      X[0]=GenPoisson(lambda, theta,vectinit1);
      somme0=0;
      somme1=0;
      gamma0=0.0;
      gamma1=0.0;
      for(int j=1;j<=n;j++)
        {
          epsilon[j]=GenPoisson(q*lambda, theta,vectinit1);
          X[j]=QuasiBinom(p, theta/lambda, X[j-1],vectinit1)+epsilon[j];
          cout<<X[j]<<endl;
        }
      for(int j=1;j<=n-1;j++) somme0=somme0+X[j];
      moy0=somme0/((n-1)*1.0);
      for(int j=1;j<=n;j++) somme1=somme1+X[j];
      moy1=somme1/(n*1.0);
      for(int j=1;j<=n;j++)
        gamma0=gamma0+(X[j]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
      for(int j=1;j<=n-1;j++)
        gamma1=gamma1+(X[j+1]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
      Estp=gamma1/gamma0;
      Estq=1-Estp;

```

```

    Estlambda=sqrt(n*pow((moy1-Estp*moy0),3)/(pow(Estq,3)*gamma0));
    Esttheta=1-(Estlambda*Estq)/(moy1-Estp*moy0);
    SomEstp=SomEstp+Estp;
    SomEstlambda=SomEstlambda+Estlambda;
    SomEsttheta=SomEsttheta+Esttheta;
}
MoyEstp= SomEstp/L;
MoyEstlambda= SomEstlambda/L;
MoyEsttheta=SomEsttheta/L;
Biaisp = MoyEstp-p;
Biaislambda = MoyEstlambda-lambda;
Biaistheta = MoyEsttheta-theta;
cout<<"Biaisp="<<Biaisp<<endl;
cout<<"Biaislambda="<<Biaislambda <<endl;
cout<<"Biaistheta="<<Biaistheta<<endl;
return 0;
}
*****
Programme qui calcule les estimateurs et leur biais
par la méthode du m.v.c
*****
#include <cmath>
#include "nr.h"
#include<stdio.h>
#include <iostream.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "rnd.cc"
#include "GenPoisson.cc"
#include "QuasiBinom.cc"
double Minc[3]={0,0,0},Maxc[3]={1,12,1};

```

```

int n,L;
int convergence=0;
double lambda,theta,pr,q;
int X[300], epsilon[300];
int vectinit1[4] = { 8745, 342, 0, 0 };
void fonc(double*,double*, double*);
using namespace std;
namespace
{
    inline void get_psum(Mat_I_DP &p,Vec_O_DP &psum)
    {
        int i,j;
        DP sum;
        int mpts=p.nrows();
        int ndim=p.ncols();
        for (j=0; j<ndim;j++)
            {
                for (sum=0.0,i=0;i<mpts;i++)
                    sum += p[i][j];
                psum[j]=sum;
            }
    }
}

void NR::amoeba(Mat_IO_DP &p,Vec_IO_DP &y, const DP ftol, DP
funk(Vec_I_DP &), int &nfunk)
{
    const int NMAX=50000;
    const DP TINY=1.0e-10;
    int i,ihi,ilo,inhi,j;
    DP rtol, ysave, ytry;
    int mpts=p.nrows();

```

```
int ndim=p.ncols();
Vec_DP psum(ndim);
nfunk=0;
get_psum(p,psum);
for(;;)
{
  ilo=0;
  ihi=y[0] > y[1] ? (inhi=1,0): (inhi=0,1);
  for (i=0;i<mpts;i++)
  {
    if (y[i] <= y[ilo]) ilo=i;
    if (y[i] > y[ihi]){
      inhi=ihl;
      ihi=i;
    }
    else if (y[i] > y[inhi] && i!= ihi) inhi=i;
  }
  rtol=2.0*fabs(y[ihi]-y[ilo])/(fabs(y[ihi])+fabs(y[ilo])+TINY);
  if (rtol< ftol)
  {
    SWAP(y[0],y[ilo]);
    for (i=0;i<ndim;i++) SWAP(p[0][i],p[ilo][i]);
    break;
  }
  if (nfunk >=NMAX){
    convergence=0;
    break;
    nrerror ("NMAX exceeded");
  }
  nfunk += 2;
  ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihl,-1.0);
```

```

    if (ytry<=y[iilo])
        ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihl,2.0);
    else if (ytry >= y[inhi])
    {
        ysave= y[ihi];
        ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihl,0.5);
        if (ytry >= ysave)
        {
            for(i=0;i<mpts;i++)
            {
                if (i != iilo)
                {
                    for (j=0;j<ndim;j++)
                        p[i][j]=psum[j]=0.5*(p[i][j]+p[iilo][j]);
                    y[i]=funk(psum);
                }
            }
            nfunk+=ndim;
            get_psum(p,psum);
        }
    }
    else --nfunk;
}

DP NR:: amotry(Mat_IO_DP &p,Vec_O_DP &y, Vec_IO_DP & psum,
    DP funk (Vec_I_DP &), const int ihl, const DP fac)
{ int j,i;
    static int k=0;
    k++;
    DP fac1, fac2, ytry;
    double x;

```



```

int ndim=p.ncols();
Vec_DP ptry(ndim);
fac1=(1.0-fac)/ndim;
fac2=fac1-fac;
for(j=0;j<ndim;j++){
    ptry[j]=psum[j]*fac1-p[ihi][j]*fac2;
}
for(j=0;j<ndim;j++){
    if(ptry[j]<Minc[j])
        ptry[j]=Minc[j];
    else if(ptry[j]>Maxc[j]) ptry[j]=Maxc[j];
}
ytry=funk(ptry);
if (ytry < y[ihi]){
    y[ihi]=ytry;
    for (j=0;j<ndim;j++){
        psum[j] += ptry[j]-p[ihi][j];
        p[ihi][j]=ptry[j];
    }
}
for(i=0;i<p.nrows();i++) {
    for(j=0;j<p.ncols();j++){
        }
    }
x=(double)ytry;
return ytry;
}
int Min (int a, int b)
{
    if (a>=b)
        return b;
}

```

```

    else return a;
}
extern double sommeinterieure(double p,double lambda,double theta,int X[],
    int t,int a);
double Gine(double p,double lambda,double theta, int X[])
{
double somme=0;
int a;
    for(int t=2;t<=n; t++)
    {
        a=Min(X[t],X[t-1]);
        somme=somme+log(sommeinterieure(p,lambda,theta,X,t,a));
    }
    return somme;
}
double fct1(double p, double lambda, double theta, int r, int X)
{
double q;
double val1;
double prod1, prod2, prod3, prod4;
    q = 1.0 - p;
    val1=q*pow((q+X*(theta/lambda))/(1+X*(theta/lambda)),(double)X-1);
    for(int k=1; k <= r; k++)
    {
        prod1=(X-k+1)/(k*1.0);
        prod2=(p+k*(theta/lambda))/(q+(X-k+1)*(theta/lambda));
        prod3=pow((1+((theta/lambda)/(p+k*(theta/lambda)-(theta/lambda))))),
            (double)k-2);
        prod4=pow((1-((theta/lambda)/(q+(X-k+1)*(theta/lambda))))),
            (double)X-k-1);
        val1=val1*prod1*prod2*prod3*prod4;
    }
}

```

```

    }
    return val1;
}

double fct2(double p, double lambda, double theta, int xtr)
{
double q;
double val2;
    q = 1.0-p;
    val2=exp(-q*lambda);
    for(int k=1; k <= xtr; k++)
    {
        val2=val2*(q*lambda+theta*k)*pow((1+theta/(q*lambda+theta*k-theta)),
            (double)k-2)*exp(-theta)/k;
    }
    return val2;
}

double sommeinterieure(double p,double lambda,double theta,int X[],
    int t, int a)
{
double somme=0;
    for (int r=0; r<= a; r++)
        somme = somme + fct1(p,lambda,theta,r,X[t-1])*fct2(p,lambda,theta,X[t]-r);
    return somme;
}

DP fct(Vec_I_DP &M){
    DP r,x,y,z;
        r=-Gine(M[0],M[1],M[2],X);
    return r;
}

void main(int *argc,char** argv)
{

```

```
    int h;
double lam=0.001;
int i,j,k,nombre=0;
double sommetheta=0,sommelambda=0,sommepr=0;
double p0,lambda0,theta0;
n=atoi(argv[1]);
L=atoi(argv[2]);
lambda=atof(argv[3]);
theta=atof(argv[4]);
pr=atof(argv[5]);
q=1-pr;
for(k=0;k<L;k++){
    convergence=1;
    X[0]=GenPoisson(lambda, theta,vectinit1);
    for( j=1;j<=n;j++)
    {
        epsilon[j]=GenPoisson(q*lambda, theta,vectinit1);
        X[j]=QuasiBinom(pr, theta/lambda, X[j-1],vectinit1)+epsilon[j];
    }
    fonc(&p0,&lambda0,&theta0);
Mat_IO_DP  p(4,3);
p[0][0]=p0;
p[0][1]=lambda0;
p[0][2]=theta0;
p[1][0]=p[0][0]+lam;
p[1][1]=p[0][1];
p[1][2]=p[0][2];
p[2][0]=p[0][0];
p[2][1]=p[0][1]+lam;
p[2][2]=p[0][2];
p[3][0]=p[0][0];
```

```

        p[3][1]=p[0][1];
        p[3][2]=p[0][2]+lam;
Vec_IO_DP y(4);
Vec_IO_DP tempo(3);
for(i=0;i<p.nrows();i++) {
    for(j=0;j<p.ncols();j++)
        tempo[j]=p[i][j];
    y[i]=fct(tempo);
}
NR::amoeba(p,y,0.0001,fct,h);
if (convergence==1)
    {
        nombre++;
        sommepr+=p[0][0];
        sommelambda+=p[0][1];
        sommetheta+=p[0][2];
    }
}
cout<<"resultat pour"<<endl;
cout<<"valeur de n taille de l echantillon="<<n<<endl;
cout<<"valeur de L nombre de simulations="<<L<<endl;
cout<<"valeur de lambda="<<lambda<<endl;
cout<<"valeur de theta="<<theta<<endl;
cout<<"valeur de p="<<pr<<endl;
cout<<"nombre de convergence obtenu="<<nombre<<endl;
if(nombre!=0)
    {
        cout<<"Biaislambda="<<(sommelambda/nombre)-lambda<<endl;
        cout<<"Biaistheta="<<(sommetheta/nombre)-theta<<endl;
        cout<<"Biaisp="<<(sommepr/nombre)-pr<<endl;
    }
}

```

```

else
    {
        cout<<"aucune convergence obtenu avec les valeurs"<<endl;
        cout<<"lambda="<<lambda<<endl;
        cout<<"theta="<<theta<<endl;
        cout<<"p="<<pr<<endl;
    }
}

void fonc(double *pro,double *lamb,double * the)
{
    int somme0, somme1;
    double moy0, moy1;
    double gamma0, gamma1;
    double Estp, Estq, Estlambda, Esttheta;
    double SomEstp, SomEstlambda, SomEsttheta;
    double MoyEstp, MoyEstlambda, MoyEsttheta;
    double Biaisp, Biaislamba, Biaistheta;
    SomEstp=0.0;
    SomEstlambda=0.0;
    SomEsttheta=0.0;
    somme0=0;
    somme1=0;
    gamma0=0.0;
    gamma1=0.0;
    for(int j=1;j<=n-1;j++) somme0=somme0+X[j];
        moy0=somme0/((n-1)*1.0);
    for(int j=1;j<=n;j++) somme1=somme1+X[j];
        moy1=somme1/(n*1.0);
    for(int j=1;j<=n;j++)
        gamma0=gamma0+(X[j]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
    for(int j=1;j<=n-1;j++)

```

```

        gamma1=gamma1+(X[j+1]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
    Estp=gamma1/gamma0;
    Estq=1-Estp;
    Estlambda=sqrt(n*pow((moy1-Estp*moy0),(double)3)/
    (pow(Estq,(double)3)*gamma0));
    Esttheta=1-(Estlambda*Estq)/(moy1-Estp*moy0);
    SomEstp=SomEstp+Estp;
    SomEstlambda=SomEstlambda+Estlambda;
    SomEsttheta=SomEsttheta+Esttheta;

    *pro=Estp;
    *lamb=Estlambda;
    *the=Esttheta;
}

*****
Programme qui calcule l'information de Fisher de l'estimateur du m.v.c
pour les séries nombre de pannes d'ordinateurs et nombre de sinistres
*****
f1[p_,l_,m_] :=
Binomial[x[[t-1]],r]*p*(1-p)*1/(1+m*x[[t-1]])*((p*1+r*m)/(1+m*x[[t-1]]))^
(r-1)*(((1-p)*1+(x[[t-1]]-r)*m)/(1+m*x[[t-1]]))^(x[[t-1]]-r-1);
f2[p_,l_,m_] := 1*(1-p)*(1*(1-p)+m*(x[[t]]-r))^(x[[t]]-r-1)*Exp[-((1-p)*1
+m*(x[[t]]-r))]/(x[[t]]-r)!;
f[p_,l_,m_] := Sum[Log[Sum[f1[p,l,m]*f2[p,l,m],{r,0,Min[x[[t]],x[[t-1]]}]]],
{t,2,Length[x]}];
x:=ReadList["article.dat",Number];
d=Table[{{gpp[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],p,p],gpl[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],l,p],
gpm[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],m,p]},
{glp[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],p,l],gll[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],l,l],
glm[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],m,l]},
{gmp[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],p,m],gml[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],l,m],
gmm[p_,l_,m_]=D[f[p,l,m],m,m]}}];

```

```

MatrixForm[d];
m=Table[{{gpp[0.323558,2.1252,0.471505],gpl[0.323558,2.1252,0.471505],
gpm[0.323558,2.1252,0.471505]},
{glp[0.323558,2.1252,0.471505],gll[0.323558,2.1252,0.471505],
glm[0.323558,2.1252,0.471505]},
{gmp[0.323558,2.1252,0.471505],gml[0.323558,2.1252,0.471505],
gmm[0.323558,2.1252,0.471505]}}];
MatrixForm[m];
if=Inverse[-m];
MatrixForm[if]
*****
Programme qui calcule les variances asymptotiques des estimateurs
obtenus par les trois méthodes d'estimation pour des séries simulées
selon le modèle $GPAR(1)$.
*****
debut=Date[];
ff1[p_,l_,m_]:=p*x[[t-1]]+1*(1-p)/(1-m);
ff2[p_,l_,m_]:=p*(1-p)*(x[[t-1]]^2-Sum[x[[t-1]]!(m/l)^(j-1)/((x[[t-1]]-j-1)!
*(1+x[[t-1]]*(m/l))^(j),{j,1,x[[t-1]]-1}))+1*(1-p)/(1-m)^3;
ff[p_,l_,m_]:=-0.5*(Log[ff2[p,l,m]]+(x[[t]]-ff1[p,l,m])^2/ff2[p,l,m]);
gg1[p_,l_,m_]:=
Binomial[x[[t-1]],r]*p*(1-p)*1/(1+m*x[[t-1]])*((p*1+r*m)/(1+m*x[[t-1]]))^
(r-1)*(((1-p)*1+(x[[t-1]]-r)*m)/(1+m*x[[t-1]]))^(x[[t-1]]-r-1);
gg2[p_,l_,m_]:=1*(1-p)*(1*(1-p)+m*(x[[t]]-r))^(x[[t]]-r-1)*Exp[-((1-p)*1
+m*(x[[t]]-r))]/(x[[t]]-r)!;
gg[p_,l_,m_]:=Log[Sum[gg1[p,l,m]*gg2[p,l,m],{r,0,Min[x[[t]],x[[t-1]]}]];
x:=ReadList["s0.8.3.0.6",Number];
n=Length[x];
hpp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p]*D[ff[p,l,m],p],{t,2,n}];
hlp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p]*D[ff[p,l,m],l],{t,2,n}];
hmp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p]*D[ff[p,l,m],m],{t,2,n}];

```



```

h11[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],1]*D[ff[p,l,m],1],{t,2,n}];
hml[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],1]*D[ff[p,l,m],m],{t,2,n}];
hmm[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],m]*D[ff[p,l,m],m],{t,2,n}];
gpp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p,p],{t,2,n}];
glp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p,1],{t,2,n}];
gmp[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],p,m],{t,2,n}];
gll[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],1,1],{t,2,n}];
gml[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],1,m],{t,2,n}];
gmm[p_,l_,m_]=Sum[D[ff[p,l,m],m,m],{t,2,n}];
rpp[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],p]*D[gg[p,l,m],p],{t,2,n}];
rlp[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],p]*D[gg[p,l,m],1],{t,2,n}];
rmp[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],p]*D[gg[p,l,m],m],{t,2,n}];
rll[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],1]*D[gg[p,l,m],1],{t,2,n}];
rml[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],1]*D[gg[p,l,m],m],{t,2,n}];
rmm[p_,l_,m_]=Sum[D[gg[p,l,m],m]*D[gg[p,l,m],m],{t,2,n}];
p=0.8;
l=3;
m=0.6;
m11=gpp[p,l,m];
m12=glp[p,l,m];
m13=gmp[p,l,m];
m22=gll[p,l,m];
m23=gml[p,l,m];
m33=gmm[p,l,m];
m1=Table[{{m11,m12,m13},
{m12,m22,m23},
{m13,m23,m33}}];
n11=hpp[p,l,m];
n12=hlp[p,l,m];
n13=hmp[p,l,m];
n22=h11[p,l,m];

```

```

n23=hml [p,1,m] ;
n33=hmm [p,1,m] ;
n1=Table[{n11,n12,n13},
{n12,n22,n23},
{n13,n23,n33}];
o11=rpp [p,1,m] ;
o12=r1p [p,1,m] ;
o13=rmp [p,1,m] ;
o22=r11 [p,1,m] ;
o23=rml [p,1,m] ;
o33=rmm [p,1,m] ;
n2=Table[{o11,o12,o13},
{o12,o22,o23},
{o13,o23,o33}];
if1=Inverse[-m1/n] ;
k1=n1/n;
vg=if1.k1.if1;
k2=n2/n;
vv=Inverse[k2] ;
moyenne= Apply[Plus, x]/n;
qv=Sum[(x[[t]]-moyenne)^2,{t,1,n}]/(n-1);
ft=Table[((x[[t]]-moyenne)*(x[[t+1]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-1}];
ft1=Table[((x[[t+1]]-moyenne)*(x[[t+2]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-2}];
ft2=Table[((x[[t+2]]-moyenne)*(x[[t+3]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-3}];
ft3=Table[((x[[t+3]]-moyenne)*(x[[t+4]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-4}];
ft4=Table[((x[[t+4]]-moyenne)*(x[[t+5]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-5}];
ft5=Table[((x[[t+5]]-moyenne)*(x[[t+6]]-moyenne)/qv)-p,{t,1,n-6}];
gt=Table[x[[t]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n}];
gt1=Table[x[[t+1]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n-1}];
gt2=Table[x[[t+2]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n-2}];
gt3=Table[x[[t+3]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n-3}];

```

```

gt4=Table[x[[t+4]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n-4}];
gt5=Table[x[[t+5]]*(1-p)-(1*(1-p)/(1-m)),{t,1,n-5}];
ht=Table[(x[[t]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n}];
ht1=Table[(x[[t+1]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n-1}];
ht2=Table[(x[[t+2]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n-2}];
ht3=Table[(x[[t+3]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n-3}];
ht4=Table[(x[[t+4]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n-4}];
ht5=Table[(x[[t+5]]-moyenne)^2-(1/(1-m)^3),{t,1,n-5}];
r1=Table[{-n+1,0,0},
{-n*moyenne+(n*1/(1-m)), -n*(1-p)/(1-m), -n*(1-p)*1/(1-m)^2},
{0, -n/(1-m)^3, -3*1*n/(1-m)^4}];
ir1=Inverse[r1];
ir11=Transpose[ir1];
a0=Sum[ft[[t]]*ft[[t]],{t,1,n-1}];
a1=Sum[ft[[t]]*ft1[[t]],{t,1,n-2}];
a2=Sum[ft[[t]]*ft2[[t]],{t,1,n-3}];
a3=Sum[ft[[t]]*ft3[[t]],{t,1,n-4}];
a4=Sum[ft[[t]]*ft4[[t]],{t,1,n-5}];
a5=Sum[ft[[t]]*ft5[[t]],{t,1,n-6}];
v11=a0+2*(a1+a2+a3+a4+a5);
e0=Sum[gt[[t]]*gt[[t]],{t,1,n}];
e1=Sum[gt[[t]]*gt1[[t]],{t,1,n-1}];
e2=Sum[gt[[t]]*gt2[[t]],{t,1,n-2}];
e3=Sum[gt[[t]]*gt3[[t]],{t,1,n-3}];
e4=Sum[gt[[t]]*gt4[[t]],{t,1,n-4}];
e5=Sum[gt[[t]]*gt5[[t]],{t,1,n-5}];
v22=e0+2*(e1+e2+e3+e4+e5);
f0=Sum[ht[[t]]*ht[[t]],{t,1,n}];
f1=Sum[ht[[t]]*ht1[[t]],{t,1,n-1}];
f2=Sum[ht[[t]]*ht2[[t]],{t,1,n-2}];
f3=Sum[ht[[t]]*ht3[[t]],{t,1,n-3}];

```

```

f4=Sum[ht[[t]]*ht4[[t]],{t,1,n-4}];
f5=Sum[ht[[t]]*ht5[[t]],{t,1,n-5}];
v33=f0+2*(f1+f2+f3+f4+f5);
b0=Sum[ft[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-1}];
b1=Sum[ft[[t]]*gt1[[t]],{t,1,n-1}]+Sum[ft1[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-2}];
b2=Sum[ft[[t]]*gt2[[t]],{t,1,n-2}]+Sum[ft2[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-3}];
b3=Sum[ft[[t]]*gt3[[t]],{t,1,n-3}]+Sum[ft3[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-4}];
b4=Sum[ft[[t]]*gt4[[t]],{t,1,n-4}]+Sum[ft4[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-5}];
b5=Sum[ft[[t]]*gt5[[t]],{t,1,n-5}]+Sum[ft5[[t]]*gt[[t]],{t,1,n-6}];
v12=b0+b1+b2+b3+b4+b5;
c0=Sum[ft[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-1}];
c1=Sum[ft[[t]]*ht1[[t]],{t,1,n-1}]+Sum[ft1[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-2}];
c2=Sum[ft[[t]]*ht2[[t]],{t,1,n-2}]+Sum[ft2[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-3}];
c3=Sum[ft[[t]]*ht3[[t]],{t,1,n-3}]+Sum[ft3[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-4}];
c4=Sum[ft[[t]]*ht4[[t]],{t,1,n-4}]+Sum[ft4[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-5}];
c5=Sum[ft[[t]]*ht5[[t]],{t,1,n-5}]+Sum[ft5[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-6}];
v13=c0+c1+c2+c3+c4+c5;
d0=Sum[gt[[t]]*ht[[t]],{t,1,n}];
d1=Sum[gt[[t]]*ht1[[t]],{t,1,n-1}]+Sum[gt1[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-1}];
d2=Sum[gt[[t]]*ht2[[t]],{t,1,n-2}]+Sum[gt2[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-2}];
d3=Sum[gt[[t]]*ht3[[t]],{t,1,n-3}]+Sum[gt3[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-3}];
d4=Sum[gt[[t]]*ht4[[t]],{t,1,n-4}]+Sum[gt4[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-4}];
d5=Sum[gt[[t]]*ht5[[t]],{t,1,n-5}]+Sum[gt5[[t]]*ht[[t]],{t,1,n-5}];
v23=d0+d1+d2+d3+d4+d5;
var=Table[{{v11,v12,v13},
{v12,v22,v23},
{v13,v23,v33}}];
vm=ir1.var.ir11*(n);
MatrixForm[vm];
dvm=Det[vm];
MatrixForm[vg];

```

```

dvg=Det[vg];
MatrixForm[vv];
dvv=Det[vv];
rmv=vm/vv//MatrixForm
rd1=dvm/dvv
rgv=vg/vv//MatrixForm
rd2=dvg/dvv
rmg=vm/vg//MatrixForm
rd3=dvm/dvg
fin=Date[];
diff=fin-debut;
debut
fin
diff
*****
Programme qui calcule les estimateurs par la méthode des moments
pour les données du nombre de pannes d'ordinateurs et pour les données
du nombre de sinistres.
*****
#include <iostream.h>
#include <math.h>
int main()
{
int n=128;
int X[n];
int somme0, somme1;
double moy0, moy1;
double gamma0, gamma1;
double Estp, Estq, Estlambda, Esttheta;
    somme0=0; somme1=0;
    gamma0=0.0; gamma1=0.0;

```

```

for(int j=0;j<=n-1;++j) cin >> X[j];
for(int j=0;j<=n-2;++j) somme0=somme0+X[j];
    moy0=somme0/((n-1)*1.0);
for(int j=0;j<=n-1;++j) somme1=somme1+X[j];
    moy1=somme1/(n*1.0);
for(int j=0;j<=n-1;++j)
    gamma0=gamma0+(X[j]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
for(int j=0;j<=n-2;++j)
    gamma1=gamma1+(X[j+1]-moy1)*(X[j]-moy1) ;
Estp=gamma1/gamma0;
Estq=1-Estp;
Estlambda=sqrt(n*pow((moy1-Estp*moy0),3)/(pow(Estq,3)*gamma0));
Esttheta=1-(Estlambda*Estq)/(moy1-Estp*moy0);
cout<<"Estp=" <<Estp<<endl;
cout<<"Estlambda=" <<Estlambda<<endl;
cout<<"Esttheta="<<Esttheta<<endl;

return 0;
}
*****
Programme qui calcule les estimateurs par la méthode du m.v.c pour les
données du nombre de pannes d'ordinateurs et pour les données du nombre
de sinistres.
*****
#include <cmath>
#include "nr.h"
#include <stdio.h>
#include <iostream.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
double Minc[3]={0,0,0},Maxc[3]={1,12,1};
int n=128;

```

```
int X[300];
using namespace std;
namespace
{
    inline void get_psum(Mat_I_DP &p,Vec_O_DP &psum)
    {
        int i,j;
        DP sum;
        int mpts=p.nrows();
        int ndim=p.ncols();
        for (j=0; j<ndim;j++)
        {
            for (sum=0.0,i=0;i<mpts;i++)
                sum += p[i][j];
            psum[j]=sum;
        }
    }
}

void NR::amoeba(Mat_IO_DP &p,Vec_IO_DP &y, const DP ftol,
DP funk(Vec_I_DP &), int &nfunk)
{
    const int NMAX=50000;
    const DP TINY=1.0e-10;
    int i,ihi,ilo,inhi,j;
    DP rtol, ysave, ytry;
    int mpts=p.nrows();
    int ndim=p.ncols();
    Vec_DP psum(ndim);
    nfunk=0;
    get_psum(p,psum);
    for(;;)
```

```
{
  ilo=0;
  ihi=y[0] > y[1] ? (inhi=1,0): (inhi=0,1);
  for (i=0;i<mpts;i++)
    {
      if (y[i] <= y[ilo]) ilo=i;
      if (y[i] > y[ihi]){
        inhi=ihi;
        ihi=i;
      }
      else if (y[i] > y[inhi] && i!= ihi) inhi=i;
    }
  rtol=2.0*fabs(y[ihi]-y[ilo])/(fabs(y[ihi])+fabs(y[ilo])+TINY);
  if (rtol< ftol)
    {
      SWAP(y[0],y[ilo]);
      for (i=0;i<ndim;i++) SWAP(p[0][i],p[ilo][i]);
      break;
    }
  if (nfunk >=NMAX){
    break;
    nrerror ("NMAX exceeded");
  }
  nfunk += 2;
  ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihi,-1.0);
  if (ytry<=y[ilo])
    ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihi,2.0);
  else if (ytry >= y[inhi])
    {
      ysave= y[ihi];
      ytry=amotry(p,y,psum,funk,ihi,0.5);
```



```

        if (ytry >= ysave)
        {
            for(i=0;i<mpts;i++)
            {
                if (i != ilo)
                {
                    for (j=0;j<ndim;j++)
                        p[i][j]=psum[j]=0.5*(p[i][j]+p[ilo][j]);
                    y[i]=funkt(psum);
                }
            }
            nfunkt+=ndim;
            get_psum(p,psum);
        }
    }
    else --nfunkt;
}

DP NR:: amotry(Mat_IO_DP &p,Vec_O_DP &y, Vec_IO_DP & psum,
DP funkt (Vec_I_DP &), const int ihi, const DP fac)
{ int j,i;
  static int k=0;
  k++;
DP fac1, fac2, ytry;
double x;
int ndim=p.ncols();
Vec_DP ptry(ndim);
fac1=(1.0-fac)/ndim;
fac2=fac1-fac;
for(j=0;j<ndim;j++){
    ptry[j]=psum[j]*fac1-p[ihi][j]*fac2;

```

```

}
for(j=0;j<ndim;j++){
    if(ptry[j]<Minc[j])
        ptry[j]=Minc[j];
    else if(ptry[j]>Maxc[j]) ptry[j]=Maxc[j];
}
ytry=funk(ptry);
if (ytry < y[ihi]){
    y[ihi]=ytry;
    for (j=0;j<ndim;j++){
        psum[j] += ptry[j]-p[ihi][j];
        p[ihi][j]=ptry[j];
    }
}
x=(double)ytry;
return ytry;
}
int Min (int a, int b)
{
    if (a>=b)
        return b;
    else return a;
}
extern double sommeinterieure(double p,double lambda,double theta,int X[],
    int t,int a);
double Gine(double p,double lambda,double theta, int X[])
{
    double somme=0;
    int a;
    for(int t=2;t<=n; t++)
        {

```

```

        a=Min(X[t],X[t-1]);
        somme=somme+log(sommeinterieure(p,lambda,theta,X,t,a));
    }
    return somme;
}
double fct1(double p, double lambda, double theta, int r, int X)
{
    double q;
    double val1;
    double prod1, prod2, prod3, prod4;
    q = 1.0 - p;
    val1=q*pow((q+X*(theta/lambda))/(1+X*(theta/lambda)),(double)X-1);
    for(int k=1; k <= r; k++)
    {
        prod1=(X-k+1)/(k*1.0);
        prod2=(p+k*(theta/lambda))/(q+(X-k+1)*(theta/lambda));
        prod3=pow((1+((theta/lambda)/(p+k*(theta/lambda)-(theta/lambda))))),
            (double)k-2);
        prod4=pow((1-((theta/lambda)/(q+(X-k+1)*(theta/lambda))))),
            (double)X-k-1);
        val1=val1*prod1*prod2*prod3*prod4;
    }
    return val1;
}
double fct2(double p, double lambda, double theta, int xtr)
{
    double q;
    double val2;
    q = 1.0-p;
    val2=exp(-q*lambda);
    for(int k=1; k <= xtr; k++)

```

```

    {
        val2=val2*(q*lambda+theta*k)*pow((1+theta/(q*lambda+theta*k-theta)),
            (double)k-2)*exp(-theta)/k;
    }
    return val2;
}

double sommeinterieure(double p,double lambda,double theta,int X[],
    int t, int a)
{
    double somme=0;
    for (int r=0; r<= a; r++)
        somme = somme + fct1(p,lambda,theta,r,X[t-1])*fct2(p,lambda,theta,
            X[t]-r);

    return somme;
}

DP fct(Vec_I_DP &M){
    DP r,x,y,z;
    r=-Gine(M[0],M[1],M[2],X);
    return r;
}

void main()
{
    int h;
    double lam=0.001;
    int i,j,k;
    for(int j=0;j<n;++j) cin >> X[j];
    Mat_IO_DP p(4,3);
    p[0][0]=0.323558;
    p[0][1]=2.1242;
    p[0][2]=0.471505;
    p[1][0]=p[0][0]+lam;

```

```
p[1][1]=p[0][1];
p[1][2]=p[0][2];
p[2][0]=p[0][0];
p[2][1]=p[0][1]+lam;
p[2][2]=p[0][2];
p[3][0]=p[0][0];
p[3][1]=p[0][1];
p[3][2]=p[0][2]+lam;
Vec_IO_DP y(4);
Vec_IO_DP tempo(3);
for(i=0;i<p.nrows();i++) {
    for(j=0;j<p.ncols();j++)
        tempo[j]=p[i][j];
    y[i]=fct(tempo);
}
NR::amoeba(p,y,0.0001,fct,h);
    cout<<"lambda="<<p[0][1]<<endl;
    cout<<"theta="<<p[0][2]<<endl;
    cout<<"p="<<p[0][0]<<endl;
}
```

BIBLIOGRAPHIE

Al-Nachawati, H., Alwasel, I. et Alzaid, A. A. (1997). Estimating the parameters of the generalized Poisson AR(1) process. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **56**, 337-352.

Al-Osh, M. A. et Alzaid, A. A. (1987). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process. *Journal of Time Series Analysis*, **8**, 261-275.

Alzaid, A. A., et Al-Osh, M. A. (1988). First-Order Integer-Valued Autoregressive (INAR(1)) Process : Distributional and regression properties. *Statistica Neerlandica*, **42**, 53-61.

Alzaid, A. A. et Al-Osh, M. A. (1993). Some Autoregressive Moving Average Processes with Generalized Poisson Marginal Distributions. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **45**, 223-232.

Ambagaspitiya, R. S. et Balakrishnan, N. (1994). On the compound generalized Poisson distributions. *Astin Bulletin*, **24**, 255-263.

Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*, 2e édition. Springer-Verlag, New York.

Cardinal, M., Roy, R. et Lambert, J. (1999). On the application of integer-valued time series models for the analysis of disease incidence. *Statistics in Medicine*, **18**, 2025-2039.

Consul, P. C. et Jain, G. C. (1973). A generalization of the Poisson distribution. *Technometrics*, **15**, 791-799.

Consul, P. C. (1989). *Generalized Poisson Distribution : Properties and Applications*. Marcel Dekker Inc., New York.

- Consul, P. C. (1990). A model for distributions of injuries in auto-accidents. *Itteilungen der Schweiz Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, **1**, 161-168.
- Freeland, R. K. et McCabe, B. (2001). Estimation and testing of the Poisson autoregressive model of order 1. Rapport technique IIPR 01-05, *University of Waterloo*.
- Gouriéroux, C, et Monfort. A. (1983). *Cours de séries temporelles*. Paris : Economica.
- Hamilton, J.D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.
- McKenzie, E. (1985). Some simple models for discrete variate time series. *Water Resources Bulletin*, **21**, 645-650.
- McKenzie, E. (1988). Some ARMA models for dependent sequences of Poisson counts. *Advances in Applied Probability*, **20**, 822-835.
- Monfort, A. (1982). *Cours de statistique mathématique*. Paris : Economica.
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. (2002). *Numerical Recipes in C++, The Art of Scientific Computing*, 2e édition. Cambridge University Press, Cambridge.
- Shenton, L. R. (1986). Quasibinomial distributions. *Encyclopedia of Statistical Sciences (eds. S. Kotz et N. L. Johnson)*, **7**, 458-460.
- Steutel, F.W., et van Harn, K. (1979). Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Annals of Probability*, **7**, 893-899.
- Whittle, P. (1961). Gaussian Estimation in Time series. *Bulletin of the International Statistical Institute*, **39**, 1-26.

