

Université de Montréal

DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES AVEC
PRÉSERVATION DE LEURS SYMÉTRIES

par

Catherine Cyr-Gagnon

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

août 2003



QA
3
U54
2003
V.013

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

DISCRÉTISATION DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES AVEC
PRÉSERVATION DE LEURS SYMÉTRIES

présenté par

Catherine Cyr-Gagnon

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Anne Bourlioux

(président-rapporteur)

Pavel Winternitz

(directeur de recherche)

Véronique Hussin

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

SOMMAIRE

L'application de la théorie des groupes de Lie aux équations aux différences finies est beaucoup plus récente que son application aux équations différentielles. Sophus Lie, par exemple, classifia les équations différentielles ordinaires du second ordre selon leurs symétries en 1891. Une classification similaire des équations aux différences finies du deuxième ordre fut uniquement élaborée en 2000. Nous présentons ici des nouveaux résultats concernant la classification des schémas du troisième ordre selon leurs symétries. Nous présentons aussi quelques exemples numériques montrant que les discrétisations qui préservent les symétries des équations différentielles offrent des erreurs inférieures à celles des schémas standards.

Mots clés : équation aux différences finies, algèbre de Lie, groupe de symétries, équation différentielle invariante, schéma invariant, prolongation.

ABSTRACT

The application of Lie group theory to difference equations is much more recent than its application to differential ones. For instance, Sophus Lie classified second-order ordinary differential equations according to their symmetries in 1891. A similar classification of second-order difference schemes was only performed in the year 2000. Here we present some new results on the symmetry classification of third-order difference schemes. We also present some numerical computations showing that symmetry preserving discretizations of differential equations have smaller errors than standard integration schemes.

Key words : difference equation, Lie algebra, symmetry group, invariant differential equation, invariant scheme, prolongation.

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier mon directeur Pavel Winternitz. Il a toujours su avec énergie me guider et me proposer des pistes de recherche. Les moments de qualité passés en sa présence n'ont été que profitables à l'accomplissement de ce mémoire. Je tiens aussi à souligner la collaboration de Anne Bourlioux qui a gentiment accepté de partager ses connaissances en analyse numérique. Ses conseils et sa précieuse aide ont été grandement appréciés.

Enfin, je souhaite mentionner mon entière reconnaissance envers ma famille qui m'a toujours encouragée à poursuivre mes études afin de réaliser mes rêves. Elle m'a été d'un constant support en m'appuyant dans mes projets. J'ai une grande chance d'être aussi bien entourée.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire.....	iii
Abstract.....	iv
Remerciements.....	v
Liste des figures.....	vii
Introduction.....	1
Chapitre 1. Construction de schémas invariants.....	3
1.1. Équations différentielles ordinaires du troisième ordre invariantes.....	3
1.1.1. Systèmes d'équations différentielles d'ordre n	3
1.1.2. Équations différentielles ordinaires du troisième ordre.....	7
1.2. Équations aux différences finies du troisième ordre invariantes.....	9
Chapitre 2. Équations invariantes sous un groupe de dimension 1 et 2.....	13
2.1. Équations invariantes sous un groupe de dimension 1.....	14
2.2. Équations invariantes sous un groupe de dimension 2.....	16
Chapitre 3. Équations invariantes sous un groupe de dimension 3	29
3.1. Équations invariantes sous un groupe de dimension 3.....	29
3.2. Algèbre supplémentaire.....	77

Chapitre 4. Équations invariantes sous un groupe de dimension 4 et 6	88
4.1. Équations invariantes sous un groupe de dimension 4	88
4.2. Équations invariantes sous un groupe de dimension 6	100
Chapitre 5. Exemples numériques	112
5.1. Exemples de schémas du deuxième ordre	112
5.1.1. Exemple 1	113
5.1.2. Exemple 2	124
5.2. Exemple de schéma du troisième ordre	128
Conclusion	132
Bibliographie	134

LISTE DES FIGURES

1.2.1	Stencil élémentaire pour un modèle à 4 points.	9
5.1.1	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.1$	117
5.1.2	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.01$	118
5.1.3	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.001$	118
5.1.4	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.1$	120
5.1.5	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.01$	120
5.1.6	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.001$	121
5.1.7	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.1$	122
5.1.8	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.01$	122
5.1.9	Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.001$	123
5.1.10	Erreurs absolues pour $h=0.1$	126
5.1.11	Erreurs absolues pour $h=0.01$	127
5.1.12	Erreurs absolues pour $h=0.001$	127

5.2.1 Erreurs absolues pour $h=0.1$	130
5.2.2 Erreurs absolues pour $h=0.05$	130
5.2.3 Erreurs absolues pour $h=0.025$	131

INTRODUCTION

Vers la fin du XIX^e siècle, la théorie des groupes de Lie était perçue comme une théorie de transformations des ensemble-solution d'équations différentielles. Et ce n'est qu'une centaine d'années plus tard qu'elle s'est développée en un puissant outil servant à classifier les équations différentielles et à les résoudre [Olver]. Toutefois, les applications de la théorie des groupes de Lie aux équations aux différences finies sont beaucoup plus récentes. Par exemple, une classification des équations ordinaires aux différences finies du deuxième ordre selon les groupes de Lie laissant invariant l'ensemble-solution a été réalisée en 2000 par V. Dorodnitsyn, R. Kozlov et P. Winternitz [DKW]. Le principal objectif du présent travail est d'effectuer une classification des équations ordinaires aux différences finies du troisième ordre selon les groupes de Lie préservant l'ensemble de toutes les solutions. Une des motivations pour l'étude des transformations de Lie appliquées aux équations différentielles ordinaires est la réduction par symétries. En effet, il est avantageux d'utiliser ces transformations pour réduire l'ordre de l'équation à résoudre. Si, par exemple, la dimension du groupe de symétries est n , alors nous pouvons réduire de n' où $n' \leq n$ l'ordre de l'équation différentielle ordinaire. La motivation du présent travail est d'adapter aux équations aux différences finies les techniques déjà utilisées dans le cas continu dans le but d'améliorer les méthodes numériques.

Il y a essentiellement deux points de vue pour étudier les symétries continues d'équations comportant des variables indépendantes discrètes. Une première approche est d'abord de considérer une équation aux différences finies *a priori* donnée sur un maillage fixé. La tâche ensuite est de déterminer un groupe de transformations qui laissera invariant l'ensemble-solution. Il existe différentes façons d'aborder le traitement des variables indépendantes et de supposer la forme des transformations globales et infinitésimales. Dans plusieurs cas, la distinction entre les symétries locales et les symétries globales n'est pas très claire. De plus, dans le but d'obtenir des symétries qui deviennent des dilatations, des rotations ou des transformations de Lorentz dans la limite continue, il est nécessaire de modifier de façon significative les techniques de Lie utilisées dans le cas continu. C'est pourquoi dans ce mémoire un point de vue alternatif sera adopté. L'approche consiste plutôt à se poser la question suivante : comment devrait-on discrétiser une équation différentielle afin que celle-ci préserve toutes ses symétries de Lie locales ? Ainsi, dans un premier temps, nous considérerons un groupe de symétries et son algèbre de Lie *a priori* donnés. Nous chercherons alors dans un second temps, un schéma, c'est-à-dire une équation aux différences finies munie d'un maillage, qui possède ce groupe de symétries et cette algèbre. Enfin, un second objectif s'impose : tester numériquement ces schémas invariants obtenus.

Ainsi, le premier chapitre présente le modèle discret considéré et la méthode utilisée afin d'obtenir des équations différentielles et des équations aux différences finies invariantes sous un groupe de symétries. Ensuite, le second chapitre consiste en la classification des équations du troisième ordre invariantes sous des groupes de dimension 1 et 2. Dans le chapitre 3, nous construisons des équations invariantes sous un groupe de dimension 3 et nous effectuons le même travail au chapitre 4 pour des groupes de dimension 4 et 6. Finalement, nous réalisons dans le dernier chapitre une comparaison de quelques schémas préservant les symétries avec les méthodes numériques habituelles.

Chapitre 1

CONSTRUCTION DE SCHÉMAS INVARIANTS

Dans ce chapitre, nous faisons d'abord un rappel de la méthode qui permet à partir d'un groupe de transformations locales de déterminer l'équation différentielle qui demeure invariante sous ce groupe. Cette méthode, expliquée dans le livre de P. J. Olver [Olver], utilise la théorie de prolongation de champs de vecteurs. Nous présentons ensuite la transposition de cette théorie dans le cas discret dans le but d'obtenir un schéma aux différences finies invariant sous un groupe de symétries donné.

1.1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU TROISIÈME ORDRE INVARIANTES

En premier lieu, décrivons généralement la procédure permettant de déterminer une équation différentielle d'ordre n pour laquelle un groupe de transformations donné préservera les solutions.

1.1.1. Systèmes d'équations différentielles d'ordre n

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ les variables indépendantes et $u = (u^1(x), u^2(x), \dots, u^q(x))$ les variables dépendantes et prenons l'espace de base $X \times U = \{(x_1, \dots, x_p, u^1(x), \dots, u^q(x))\}$. Définissons maintenant un espace prolongé J_n comme étant l'espace de base auquel on inclut en plus comme variables les différentes dérivées apparaissant dans le système d'équations différentielles. Définissons aussi un multi-index $L = (l_1, l_2, \dots, l_p)$ où chaque l_i est un entier non-négatif.

Ainsi,

$$J_n = \{(x_i, u^j(x), u_L^j(x))\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, q \end{cases} \quad (1.1.1)$$

et $|L| = l_1 + l_2 + \dots + l_p \leq n$

avec

$$u_L^j(x) = \frac{\partial^{|L|} u^j(x)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \dots \partial x_p^{l_p}}. \quad (1.1.2)$$

$|L|$ indique donc l'ordre de la dérivée et l_i indique le nombre de fois que l'on dérive par rapport à la variable x_i . L'espace prolongé J_n est aussi appelé *espace fibré des jets* d'ordre n . De plus, nous utilisons la notation $u^{(n)}(x)$ pour représenter les variables dépendantes $u(x)$ ainsi que toutes les dérivées possibles jusqu'à l'ordre n .

Considérons un groupe de Lie local de transformations à un paramètre,

$$G_\lambda : \quad \begin{aligned} \tilde{x}_i &= X^i(x, u, \lambda) \\ \tilde{u}_j &= U^j(x, u, \lambda) \end{aligned}$$

tel que $X^i(x, u, 0) = x_i$ et $U^j(x, u, 0) = u_j$.

Les fonctions X^i et U^j dépendent des variables x et u et du paramètre λ et celles-ci sont bien définies pour G_λ près de la transformation identité, $\lambda = 0$, et pour (x, u) près de l'origine de l'espace $X \times U$. Les transformations de contact pour lesquelles X^i et U^j dépendent aussi des premières dérivées de u et les transformations généralisées pour lesquelles X^i et U^j dépendent des dérivées d'ordre supérieur de u ne seront pas traitées dans le présent mémoire.

Le générateur infinitésimal du groupe G_λ , $v = \frac{d}{d\lambda} (G_\lambda) |_{\lambda=0}$, est donné par

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (1.1.3)$$

avec $\frac{d}{d\lambda}(X^i)|_{\lambda=0} = \xi^i$ et $\frac{d}{d\lambda}(U^j)|_{\lambda=0} = \eta^j$.

Ainsi, il est possible d'obtenir le groupe de transformations en intégrant le champ de vecteurs v . Pour le champ de vecteurs défini en (1.1.3), nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.1.1.1. *Si*

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j \frac{\partial}{\partial u_j},$$

alors la première prolongation de v est donnée par

$$pr^{(1)}v = v + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \eta_i^j \frac{\partial}{\partial u_i^j} \quad (1.1.4)$$

avec

$$\eta_i^j = D_i \eta^j - \sum_{m=1}^p (D_i \eta^m) u_m^j$$

où D_i agit comme une dérivée totale

$$D_i f(x, u(x), u_L(x)) = \frac{d}{dx_i} f(x, u(x), u_L(x)).$$

Nous calculons les prolongations de degré supérieur à 1 de façon récursive. Ayant trouvé la prolongation d'ordre k , $pr^{(k)}v$, nous calculons $pr^{(k+1)}v$ en prenant la première prolongation de $pr^{(k)}v$,

$$pr^{(k+1)}v = pr^{(1)} [pr^{(k)}v].$$

En itérant cette récursion n fois, nous obtenons finalement l'expression de la prolongation d'ordre n ,

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{j=1}^q \sum_L \eta_L^j \frac{\partial}{\partial u_L^j} \quad (1.1.5)$$

où

$$\eta_L^j = D_L \left(\eta^j - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^j \right) + \sum_{i=1}^p (D_i u_L^j) \xi^i.$$

Ainsi, afin de déterminer l'équation différentielle d'ordre n invariante sous un groupe de transformations, nous avons le résultat suivant [Olver] :

Théorème 1.1.1.2. *Soit le système d'équations différentielles d'ordre n*

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}(x)) = 0, \quad \nu = 1, \dots, N$$

où chaque équation est définie sur $M \subset X \times U$ et soit G un groupe de transformations agissant localement sur M ,

$$G : \begin{aligned} \tilde{x}_i &= X^i(x, u, g) \\ \tilde{u}_j &= U^j(x, u, g) \end{aligned} \quad \text{où } g \in G.$$

Alors, l'action du groupe G préserve l'ensemble de toutes les solutions de $\Delta = 0$ (c'est-à-dire que si $u(x)$ est une solution alors, $\tilde{u}(\tilde{x})$ l'est aussi) si et seulement si

$$pr^{(n)}v \Delta |_{\Delta=0} = 0$$

pour tout générateur infinitésimal v de l'action du groupe.

Autrement dit, sous ces conditions, G est un groupe de symétries du système d'équations différentielles.

Il y a une distinction importante à faire au niveau des conditions d'invariance d'une équation différentielle sous un groupe de transformations. On dit qu'une équation différentielle est *fortement invariante* si la condition suivante est satisfaite identiquement :

$$pr^{(n)}v \Delta = 0$$

et on dit qu'une équation différentielle est *faiblement invariante* si la condition suivante est satisfaite uniquement sur l'ensemble-solution de l'équation $\Delta = 0$:

$$pr^{(n)}v \Delta |_{\Delta=0} = 0.$$

1.1.2. Équations différentielles ordinaires du troisième ordre

En second lieu, décrivons en particulier la méthode servant à trouver une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 qui demeurera invariante sous un groupe de symétries donné. Nous effectuons ceci dans le but de transposer cette procédure dans le cas discret par la suite. Ainsi, nous prenons $n = 3$, $x_1 = x$, une variable indépendante et $u^1 = y$, une variable dépendante.

Considérons l'espace de base $X \times Y = \{(x, y(x))\}$ et l'équation différentielle ordinaire

$$E(x, y, y', y'', y''') = 0 \quad (1.1.6)$$

telle que $\frac{\partial E}{\partial y'''} \neq 0$ et où la solution est $y(x)$.

L'algèbre de Lie L du groupe de symétries G de l'équation (1.1.6) est réalisée par le champ de vecteurs de la forme

$$X_\alpha = \xi_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = 1, \dots, m \quad (1.1.7)$$

où m est la dimension de l'algèbre. Sophus Lie a prouvé [Lie] que la dimension maximale d'une algèbre de symétries d'une équation d'ordre n est 8 pour $n = 2$ et $n + 4$ pour $n > 2$. Dans notre cas, n vaut 3 et la dimension maximale d'une algèbre de symétries est ainsi 7.

De plus, puisque l'équation est du troisième ordre, nous devons prolonger l'action du champ de vecteurs (1.1.7) de l'espace de base $\{(x, y)\}$ à l'espace fibré des jets $\{(x, y, y', y'', y''')\}$. La formule pour la troisième prolongation du champ de vecteurs se déduit de (1.1.5),

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_\alpha &= \xi_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_\alpha(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_\alpha^1(x, y, y') \frac{\partial}{\partial y'} \\ &+ \eta_\alpha^2(x, y, y', y'') \frac{\partial}{\partial y''} + \eta_\alpha^3(x, y, y', y'', y''') \frac{\partial}{\partial y'''} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

avec

$$\eta_\alpha^1 = D_x(\eta_\alpha) - y' D_x(\xi_\alpha)$$

$$\eta_\alpha^2 = D_x(\eta_\alpha^1) - y'' D_x(\xi_\alpha)$$

$$\eta_\alpha^3 = D_x(\eta_\alpha^2) - y''' D_x(\xi_\alpha).$$

Afin de construire une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 invariante sous le groupe G , nous choisissons d'abord une base de l'algèbre L , $\{X_\alpha, \alpha = 1, \dots, m\}$. Ensuite, selon le théorème (1.1.1.2), nous imposons les équations

$$pr^{(3)} X_\alpha E(x, y, y', y'', y''') = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (1.1.9)$$

En résolvant ces équations par la méthode des caractéristiques, nous obtenons un ensemble d'invariants $\{I_1, \dots, I_r\}$. Il est possible de calculer le nombre d'invariants r de la façon suivante :

$$r = \dim M - \text{rang } Z$$

où $M \subset \{(x, y, y', y'', y''')\}$ est une sous-variété de l'espace fibré des jets. Dans ce cas-ci, $\dim M=5$ et Z est la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^1 & \eta_1^2 & \eta_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_m & \eta_m & \eta_m^1 & \eta_m^2 & \eta_m^3 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice Z est calculé en un point générique de M .

Enfin, l'équation différentielle ordinaire d'ordre 3 invariante s'écrit comme une fonction des invariants

$$E(I_1, \dots, I_r) = 0. \quad (1.1.10)$$

Cette équation est dite fortement invariante. Toutefois, nous pouvons obtenir une équation faiblement invariante en trouvant une variété invariante sur M , c'est-à-dire en trouvant une surface sur laquelle le rang de Z est inférieur au rang maximal, soit ici le minimum entre m et 5.

1.2. ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES DU TROISIÈME ORDRE INVARIANTES

L'objectif de cette section est de traduire la méthode décrite à la section 1.1 concernant le cas continu afin d'obtenir dans le cas discret un schéma invariant sous un groupe de Lie de symétries.

Le modèle considéré sera limité à 4 points s'avérant suffisant pour obtenir des dérivées d'ordre 3. Ainsi, soit un sous-espace de dimension 8, $\{(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2})\}$, de l'espace des variables indépendantes et dépendantes. La figure (1.2.1) représente un stencil élémentaire d'un schéma à 4 points.

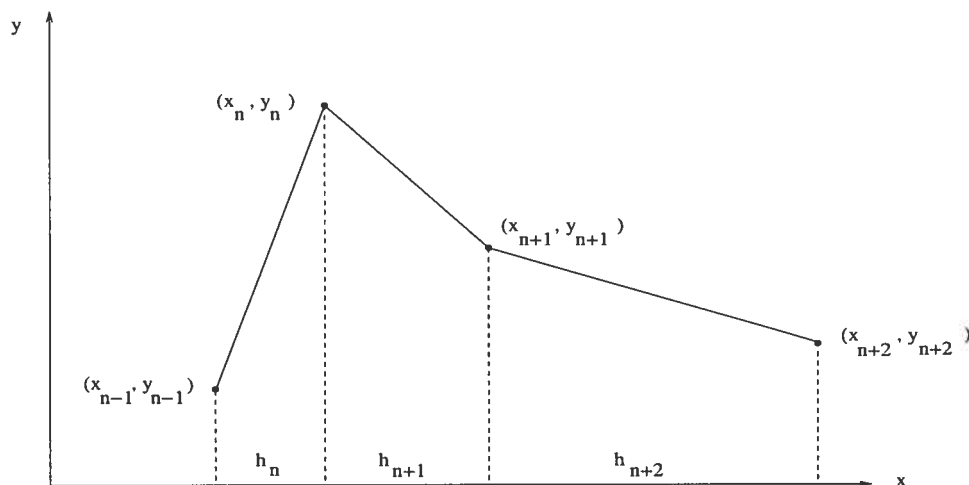


FIG. 1.2.1. Stencil élémentaire pour un modèle à 4 points.

Le modèle discret considéré peut être présenté en termes de deux équations aux différences finies,

$$E_1(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \quad (1.2.1)$$

$$E_2(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \quad (1.2.2)$$

telles que $\det \frac{\partial(E_1, E_2)}{\partial(x_{n-1}, y_{n-1})} \neq 0$ et $\det \frac{\partial(E_1, E_2)}{\partial(x_{n+2}, y_{n+2})} \neq 0$.

Les formules des dérivées discrètes peuvent s'écrire de la façon suivante si nous posons

$$\begin{aligned}h_n &= x_n - x_{n-1}, \\h_{n+1} &= x_{n+1} - x_n, \\h_{n+2} &= x_{n+2} - x_{n+1},\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

les premières dérivées sont

$$\begin{aligned}y_x^{(n)} &= \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}, \\y_x^{(n+1)} &= \frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}}, \\y_x^{(n+2)} &= \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h_{n+2}}.\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

Par ailleurs, les deuxièmes dérivées sont

$$\begin{aligned}y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}}{\frac{h_{n+1} + h_n}{2}} = \frac{2}{h_{n+1} + h_n} \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right), \\y_{xx}^{(n+2)} &= \frac{y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)}}{\frac{h_{n+2} + h_{n+1}}{2}} = \frac{2}{h_{n+2} + h_{n+1}} \left(\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{h_{n+2}} - \frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}} \right).\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

Enfin, la troisième dérivée est

$$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}}{\frac{h_{n+2} + h_{n+1} + h_n}{3}} = \frac{3}{h_{n+2} + h_{n+1} + h_n} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}).\tag{1.2.6}$$

Nous exigeons certaines conditions sur le modèle. Premièrement, dans la limite continue, h_n , h_{n+1} et h_{n+2} doivent tendre vers zéro, l'équation (1.2.1) doit tendre vers une équation différentielle ordinaire de la forme (1.1.6) et l'équation (1.2.2) qui décrit le maillage sur lequel l'équation (1.2.1) est considérée doit tendre vers l'identité $0=0$. Deuxièmement, le système aux différences finies (1.2.1) et (1.2.2) doit être invariant sous le même groupe que pour l'équation (1.1.6).

Pour ce faire, utilisons le fait que l'algèbre de Lie L est réalisée par le même champ de vecteurs autant dans le cas continu que dans le cas discret. Ainsi, le générateur infinitésimal est de la forme (1.1.7). De plus, nous devons prolonger les champs de vecteurs X_α à un espace de dimension 8. La formule de la troisième prolongation discrète est alors,

$$pr^{(3)}X_\alpha = \sum_{i=n-1}^{n+2} \left(\xi_\alpha(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_\alpha(x_i, y_i) \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} &= \xi_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \xi_{n+1} \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \xi_{n+2} \frac{\partial}{\partial x_{n+2}} \\ &+ \eta_{n-1} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} + \eta_n \frac{\partial}{\partial y_n} + \eta_{n+1} \frac{\partial}{\partial y_{n+1}} + \eta_{n+2} \frac{\partial}{\partial y_{n+2}} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

où nous notons $\xi_n = \xi(x_n, y_n)$.

Afin de construire une équation aux différences finies du troisième ordre invariante sous le groupe de transformations G , nous choisissons d'abord une base de l'algèbre L , $\{X_\alpha, \alpha = 1, \dots, m\}$ comme dans le cas continu. Ensuite, selon le théorème (1.1.1.2), nous imposons les équations

$$pr^{(3)}X_\alpha E(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (1.2.9)$$

En résolvant ces équations par la méthode des caractéristiques, nous obtenons un ensemble d'invariants $\{I_1, \dots, I_r\}$. Il est possible de calculer le nombre d'invariants r de la façon suivante :

$$r = \dim M - \text{rang } Z$$

où $M \subset \{(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}; y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2})\}$. Dans ce cas-ci, $\dim M=8$ et Z est la matrice

$$Z = \begin{pmatrix} \xi_{1,n-1} & \eta_{1,n-1} & \xi_{1,n} & \eta_{1,n} & \xi_{1,n+1} & \eta_{1,n+1} & \xi_{1,n+2} & \eta_{1,n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{m,n-1} & \eta_{m,n-1} & \xi_{m,n} & \eta_{m,n} & \xi_{m,n+1} & \eta_{m,n+1} & \xi_{m,n+2} & \eta_{m,n+2} \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice Z est calculé en un point générique de M .

Enfin, le schéma aux différences finies d'ordre 3 invariant s'écrit comme deux fonctions des invariants

$$\begin{aligned} E_1(I_1, \dots, I_r) &= 0 \\ E_2(I_1, \dots, I_r) &= 0. \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

Ce schéma est dit fortement invariant. Toutefois, nous pouvons obtenir un schéma faiblement invariant en trouvant des variétés invariantes sur M , c'est-à-dire en trouvant des surfaces $S(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0$ sur lesquelles le rang de Z est inférieur au rang maximal.

Chapitre 2

ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 1 ET 2

Dans le présent chapitre, nous traitons des équations différentielles ordinaires et des équations aux différences finies du troisième ordre qui demeurent invariantes sous un groupe de symétries de dimension 1 et 2. Les différentes algèbres de Lie que nous considérons sont celles de la classification de sous-algèbres de dimension finie de $\text{diff}(2, \mathbb{F})$ où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Cette classification pour $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ fut élaborée en 1992 par A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran et P. J. Olver [GKO] et cette dernière fut utilisée par V. Dorodnitsyn, R. Kozlov et P. Winternitz [DKW] et O. Gat [Gat] pour leurs articles. Remarquons cependant que nous adoptons ici la même notation que dans *Lie group classification of second-order ordinary difference equations* [DKW] pour identifier les groupes de symétries. Ainsi, pour chaque groupe de symétries, nous déterminons en premier lieu l'équation différentielle ordinaire invariante. Ceci fut traité par O. Gat en 1992 [Gat], mais les résultats ne sont pas présentés sous une forme favorisant la comparaison avec les schémas invariants que nous obtenons en second lieu. De plus, la classification des équations différentielles ordinaires du troisième ordre s'avère légèrement incomplète. C'est pour ces deux raisons que nous reprenons les calculs de la détermination des EDO (équations différentielles ordinaires) d'ordre 3 demeurant invariantes sous un groupe de symétries donné.

2.1. ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 1

Débutons par le cas le plus simple, soit un groupe de symétries de dimension 1. Son algèbre de Lie L_1 est réalisée par un champ de vecteurs de la forme (1.1.7). Il est toujours possible de rectifier ce champ de vecteurs, dans un voisinage d'un point non singulier (x, y) , par un changement de variables approprié. Le champ de vecteurs sera ainsi transformé sous la forme

$$\mathbf{D}_{1,1} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.1.1)$$

Trouvons d'abord l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre la plus générale invariante sous ce groupe. Selon la méthode décrite à la section 1.1.2, nous exigeons que $pr^{(3)}X_1E(x, y, y', y'', y''') = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial x}$, $\frac{\partial E}{\partial y'}$, $\frac{\partial E}{\partial y''}$ et $\frac{\partial E}{\partial y'''}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''.$$

La théorie du chapitre 1 prévoyait qu'il y aurait bel et bien 4 invariants car ce nombre correspond à la différence entre 5, la dimension de M et 1, le rang de Z . Nous obtenons donc une base pour les invariants,

$$\{x, y', y'', y'''\}.$$

Ainsi, l'équation différentielle invariante est

$$y''' = F(x, y', y''). \quad (2.1.2)$$

Déterminons ensuite le système d'équations aux différences finies invariant sous

le même groupe de symétries. Selon la méthode décrite à la section 1.2, nous trouvons d'abord les invariants en exigeant que

$$pr^{(3)}X_1E(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_{n-1}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial E}{\partial y_n} + \frac{\partial E}{\partial y_{n+1}} + \frac{\partial E}{\partial y_{n+2}} = 0. \quad (2.1.3)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial x_{n-1}}$, $\frac{\partial E}{\partial x_n}$, $\frac{\partial E}{\partial x_{n+1}}$ et $\frac{\partial E}{\partial x_{n+2}}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles (2.1.3) par la méthode des caractéristiques pour obtenir les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy_{n-1}}{1} = \frac{dy_n}{1} = \frac{dy_{n+1}}{1} = \frac{dy_{n+2}}{1}.$$

Ce sont finalement les constantes d'intégration des solutions qui représentent des invariants. Ainsi, nous avons

$$I_5 = y_n - y_{n-1}, \quad I_6 = y_{n+1} - y_n, \quad I_7 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Il y a donc 7 invariants ce qui est en accord avec la théorie du chapitre 1 énonçant que le nombre d'invariants r est égal à la dimension de M , soit 8, moins le rang de Z , soit 1. Nous obtenons donc une base pour les invariants,

$$\{x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, y_n - y_{n-1}, y_{n+1} - y_n, y_{n+2} - y_{n+1}\}.$$

Cependant, grâce aux formules (1.2.3) à (1.2.6), une base plus pratique serait

$$\left\{ x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}, y_{xxx}^{(n+2)} \right\}.$$

Nous obtenons cette base en appliquant les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} y_x^{(n)} &= \frac{I_5}{I_2 - I_1}, & y_x^{(n+1)} &= \frac{I_6}{I_3 - I_2}, & y_x^{(n+2)} &= \frac{I_7}{I_4 - I_3}, \\ y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{2}{I_3 - I_1} (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}), & y_{xx}^{(n+2)} &= \frac{2}{I_4 - I_2} (y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)}), \\ y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{3}{I_4 - I_1} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Le schéma invariant le plus général pourrait s'écrire comme

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= f \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) \quad (2.1.4) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour vérifier l'exactitude des invariants I_i , il suffit de vérifier que $pr^{(3)}X_\alpha I_i = 0$ pour $\alpha = 1, \dots, m$ et $i = 1, \dots, r$.

2.2. ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 2

Poursuivons la construction de schémas invariants sous un groupe de symétries de dimension 2. Il existe deux classes isomorphes d'algèbres de Lie de dimension 2 sur \mathbb{R} et \mathbb{C} . Elles sont représentées par

$$L_{2,1} : [X_1, X_2] = X_1, \quad L_1 \oplus L_1 : [X_1, X_2] = 0.$$

Chacune de ces classes peuvent être réalisées de deux façons non équivalentes. D'abord, $L_1 \oplus L_1$, une algèbre abélienne, est réalisée par

$$D_{2,1} : X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_{2,2} : X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$$

et $L_{2,1}$ est réalisée par

$$D_{2,3} : X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad D_{2,4} : X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Nous remarquons pour $D_{2,2}$ et $D_{2,4}$ que les champs de vecteurs X_1 et X_2 sont linéairement connectés, c'est-à-dire linéairement dépendants en un point générique fixé. Ce n'est toutefois pas le cas pour $D_{2,1}$ et $D_{2,3}$ pour lesquels les champs de vecteurs sont linéairement non connectés.

• Soit

$$\mathbf{D}_{2,1} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2.1)$$

Déterminons d'abord l'équation différentielle invariante sous ce groupe de symétries. Nous imposons pour le premier champ de vecteurs que $pr^{(3)}X_1E = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial y}$, $\frac{\partial E}{\partial y'}$, $\frac{\partial E}{\partial y''}$ et $\frac{\partial E}{\partial y'''}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous avons les invariants,

$$I_1 = y, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y'''.$$

Nous exigeons ensuite pour le second champ de vecteurs que $pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_4) = 0$, ce qui est, par la règle de dérivation en chaîne, équivalent à

$$\sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous avons les invariants,

$$\phi_1 = y', \quad \phi_2 = y'', \quad \phi_3 = y'''.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{y', y'', y'''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = F(y', y''). \quad (2.2.2)$$

Cherchons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord pour le premier champ de vecteurs que $pr^{(3)}X_1E = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial E}{\partial x_n} + \frac{\partial E}{\partial x_{n+1}} + \frac{\partial E}{\partial x_{n+2}} = 0. \quad (2.2.3)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial y_{n-1}}$, $\frac{\partial E}{\partial y_n}$, $\frac{\partial E}{\partial y_{n+1}}$ et $\frac{\partial E}{\partial y_{n+2}}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$I_1 = y_{n-1}, \quad I_2 = y_n, \quad I_3 = y_{n+1}, \quad I_4 = y_{n+2}.$$

Nous résolvons l'équation aux dérivées partielles (2.2.3) par la méthode des caractéristiques pour obtenir les équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_{n-1}}{1} = \frac{dx_n}{1} = \frac{dx_{n+1}}{1} = \frac{dx_{n+2}}{1}.$$

Ceci donne les invariants

$$I_5 = x_n - x_{n-1}, \quad I_6 = x_{n+1} - x_n, \quad I_7 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Nous exigeons ensuite pour le second champ de vecteurs que $pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0$, ce qui est, par la règle de dérivation en chaîne, équivalent à

$$\sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{1} = \frac{dI_3}{1} = \frac{dI_4}{1}$$

qui donne les invariants

$$\phi_1 = y_n - y_{n-1}, \quad \phi_2 = y_{n+1} - y_n, \quad \phi_3 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{x_n - x_{n-1}, x_{n+1} - x_n, x_{n+2} - x_{n+1}, y_n - y_{n-1}, y_{n+1} - y_n, y_{n+2} - y_{n+1}\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}, y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} y_x^{(n)} &= \frac{\phi_1}{I_5}, & y_x^{(n+1)} &= \frac{\phi_2}{I_6}, & y_x^{(n+2)} &= \frac{\phi_3}{I_7}, \\ y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{2}{I_5 + I_6} (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}), & y_{xx}^{(n+2)} &= \frac{2}{I_6 + I_7} (y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)}), \\ y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{3}{I_5 + I_6 + I_7} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= f \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) \quad (2.2.4) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right). \end{aligned}$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{2,2} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2.5)$$

Trouvons d'abord l'EDO du troisième ordre invariante sous ce groupe. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{1,1}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$\phi_1 = x, \quad \phi_2 = y'', \quad \phi_3 = y''''.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{x, y'', y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = F(x, y''). \quad (2.2.7)$$

Déterminons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{1,1}$,

$$\begin{aligned} I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}, \\ I_5 = y_n - y_{n-1}, \quad I_6 = y_{n+1} - y_n, \quad I_7 = y_{n+2} - y_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0. \quad (2.2.8)
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_5}{x_n - x_{n-1}} = \frac{dI_6}{x_{n+1} - x_n} = \frac{dI_7}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

Ceci donne les invariants

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\
 \phi_2 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, \phi_1, \phi_2\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}, y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2}{I_3 - I_1} \frac{\phi_1}{(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)}, \quad y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2}{I_4 - I_2} \frac{\phi_2}{(I_3 - I_2)(I_4 - I_3)},$$

$$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3}{I_4 - I_1} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}).$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= f \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{2,3} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2.10)$$

Trouvons d'abord l'équation différentielle invariante sous ce groupe. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{1,1}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y'''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow x \frac{\partial E}{\partial I_1} - y'' \frac{\partial E}{\partial I_3} - 2y''' \frac{\partial E}{\partial I_4} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous avons l'invariant,

$$I_2 = y'.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = -\frac{dI_3}{I_3} = -\frac{dI_4}{2I_4}.$$

Ce qui donne les invariants

$$\phi_1 = xy'', \quad \phi_2 = x^2y''''.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{y', xy'', x^2y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{1}{x^2}F(y', xy''). \quad (2.2.12)$$

Déterminons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{1,1}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\ I_5 &= y_n - y_{n-1}, & I_6 &= y_{n+1} - y_n, & I_7 &= y_{n+2} - y_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} &pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow &x_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} + x_n \frac{\partial E}{\partial I_2} + x_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} + x_{n+2} \frac{\partial E}{\partial I_4} + (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} \\ &+ (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7}.$$

Ceci donne les invariants

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{x_{n-1}}{x_n}, & \phi_2 &= \frac{x_n}{x_{n+1}}, & \phi_3 &= \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}, \\ \phi_4 &= \frac{x_{n+2}}{y_n - y_{n-1}}, & \phi_5 &= \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, & \phi_6 &= \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{h_{n+2}}{x_n}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, x_n \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right), x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{h_n}{x_n} &= 1 - \phi_1, & \frac{h_{n+1}}{x_n} &= \frac{1}{\phi_2} - 1, & \frac{h_{n+2}}{x_n} &= \frac{1}{\phi_2} \left(\frac{1}{\phi_3} - 1 \right), \\ y_x^{(n)} &= \frac{1}{(1 - \phi_1)\phi_2\phi_3\phi_4}, & y_x^{(n+1)} &= \frac{1}{(1 - \phi_2)\phi_3\phi_4\phi_5}, & y_x^{(n+2)} &= \frac{1}{(1 - \phi_3)\phi_4\phi_5\phi_6}, \\ x_n y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{2\phi_2}{1 - \phi_2 + \phi_2(1 - \phi_1)} (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}), \\ x_n y_{xx}^{(n+2)} &= \frac{2\phi_2\phi_3}{1 - \phi_3 + \phi_3(1 - \phi_2)} (y_x^{(n+2)} - y_x^{(n+1)}), \\ x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{3\phi_2\phi_3}{\phi_2\phi_3(1 - \phi_1) + \phi_3(1 - \phi_2) + 1 - \phi_3} (x_n y_{xx}^{(n+2)} - x_n y_{xx}^{(n+1)}).\end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned}y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{1}{x_n^2} f \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, x_n \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) \right) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, x_n \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

(2.2.14)

• Soit

$$\mathbf{D}_{2,4} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.2.15)$$

Déterminons d'abord l'EDO du troisième ordre invariante. Nous exigeons que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{1,1}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y', \quad I_3 = y'', \quad I_4 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow y' \frac{\partial E}{\partial I_2} + y'' \frac{\partial E}{\partial I_3} + y'''' \frac{\partial E}{\partial I_4} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous avons l'invariant,

$$I_1 = x.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4}$$

qui donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{y''}{y'}, \quad \phi_2 = \frac{y''''}{y'}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ x, \frac{y''}{y'}, \frac{y''''}{y'} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = y' F \left(x, \frac{y''}{y'} \right). \quad (2.2.17)$$

Trouvons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas $D_{1,1}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\ I_5 &= y_n - y_{n-1}, & I_6 &= y_{n+1} - y_n, & I_7 &= y_{n+2} - y_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7}.$$

Ceci donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, \phi_1, \phi_2\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right), \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} &= \frac{2}{I_3 - I_1} \left(1 - \phi_1 \left(\frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1} \right) \right), & \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} &= \frac{2}{I_4 - I_2} \left(\frac{1}{\phi_2} \left(\frac{I_3 - I_2}{I_4 - I_3} \right) - 1 \right), \\ \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} &= \frac{3}{I_4 - I_1} \left(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} \right). \end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= y_x^{(n+1)} f \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Ainsi, nous avons obtenu pour des groupes de symétries de dimension 1 et 2 des équations différentielles ordinaires invariantes pour lesquelles il est possible de réduire l'ordre par 1 ou 2. Nous avons aussi trouvé des schémas invariants qui possèdent un avantage semblable en dépendant de moins de variables. En effet, rappelons que pour $D_{1,1}$ par exemple, nous avons l'EDO invariante

$$y''' = F(x, y', y'')$$

qui, en posant $u = y'$, se réduit à l'équation d'ordre 2, $u'' = F(x, u, u')$. De plus, remarquons que le schéma invariant (2.1.4) dépend directement de x_n , des pas h_n, h_{n+1} et h_{n+2} , de la première, deuxième et troisième dérivées discrètes, mais pas de y_n .

Voici un tableau résumant les équations invariantes sous un groupe de dimension 1 et 2 obtenues.

Groupe	Générateurs
$D_{1,1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = F(x, y', y'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = f\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{2,1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = F(y', y'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = f\left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{2,2}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = F(x, y'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = f\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{2,3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{1}{x^2} F(y', xy'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{1}{x_n^2} f\left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, x_n \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, x_n \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}\right)\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{2,4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = y' F\left(x, \frac{y''}{y'}\right)$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_x^{(n+1)} f\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}}\right)\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(x_n, h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}}\right)\right)$

Chapitre 3

ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 3

Dans ce chapitre, nous traitons des EDO et des équations aux différences du troisième ordre qui demeurent invariantes sous un groupe de symétries de dimension 3. Les algèbres ainsi que les groupes de symétries que nous considérons dans la première section sont les seize répertoriés par V. Dorodnitsyn, R. Kozlov et P. Winternitz [DKW]. Toutefois, ces derniers ont omis dans leur article un groupe de symétries pour lequel il existe une équation invariante d'ordre 2. Nous effectuons donc, dans la deuxième section, ce calcul ainsi que celui qui mène aux équations d'ordre 3 invariantes sous ce même groupe.

3.1. ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 3

Nous poursuivons dans cette première section les calculs pour obtenir les équations différentielles ordinaires et les schémas demeurant invariants sous un groupe de Lie de symétries de dimension 3. Nous considérons ici les seize groupes de symétries de *Lie group classification of second-order ordinary difference equations* [DKW].

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,1} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.1)$$

Commençons par chercher l'équation différentielle ordinaire invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous exigeons en premier que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E =$

0 et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous imposons en second que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_1} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous obtenons déjà les invariants,

$$\phi_1 = y'', \quad \phi_2 = y''''.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\{y'', y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = F(y''). \tag{3.1.3}$$

Poursuivons en cherchant le schéma d'ordre 3 invariant sous le même groupe. Nous imposons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = y_n - y_{n-1}, \quad I_5 = y_{n+1} - y_n, \quad I_6 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous exigeons deuxièmement que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \quad (3.1.4)
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous obtenons déjà les invariants,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.1.4) en terme des nouveaux invariants I_1 , I_2 et I_3 pour obtenir une véritable équation aux dérivées partielles puisque ces invariants sont indépendants de l'équation,

$$I_1 \frac{\partial E}{\partial I_4} + I_2 \frac{\partial E}{\partial I_5} + I_3 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_4}{I_1} = \frac{dI_5}{I_2} = \frac{dI_6}{I_3}.$$

Ceci mène aux invariants

$$\phi_1 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$\phi_2 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, \phi_1, \phi_2\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2}, y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

et nous l'obtenons par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{-2}{I_1 + I_2} \frac{\phi_1}{I_1 I_2}, & y_{xx}^{(n+2)} &= \frac{-2}{I_2 + I_3} \frac{\phi_2}{I_2 I_3}, \\ y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{3}{I_1 + I_2 + I_3} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}). \end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= f \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right) & (3.1.5) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right). \end{aligned}$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,2} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.6)$$

Trouvons d'abord l'EDO du troisième ordre invariante sous ce groupe de Lie. Nous demandons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_1} + y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\phi_1 = \frac{y''}{e^x}, \quad \phi_2 = \frac{y'''}{e^x}.$$

Nous avons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{y''}{e^x}, \frac{y'''}{e^x} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = e^x F\left(\frac{y''}{e^x}\right). \quad (3.1.8)$$

Trouvons ensuite le système d'équations aux différences invariant sous le même groupe de symétries. Nous imposons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2},$$

$$I_5 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_6 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous demandons que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
 & + [y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)] \frac{\partial E}{\partial I_5} \\
 & + [y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Il est possible de récrire l'équation (3.1.9) comme

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{\partial E}{\partial I_4} + I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + I_6 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{1} = \frac{dI_3}{1} = \frac{dI_4}{1} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6}$$

qui engendre les invariants

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= x_n - x_{n-1}, & \phi_2 &= x_{n+1} - x_n, & \phi_3 &= x_{n+2} - x_{n+1}, \\
 \phi_4 &= e^{-x_n} [(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)], \\
 \phi_5 &= e^{-x_n} [(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})].
 \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, e^{-x_n} \frac{(y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)})}{2}, e^{-x_n} y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

et nous obtenons par les transformations suivantes :

$$e^{-x_n} y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2}{\phi_1 + \phi_2} \frac{\phi_4}{\phi_1 \phi_2}, \quad e^{-x_n} y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2}{\phi_2 + \phi_3} \frac{\phi_5}{\phi_2 \phi_3},$$

$$e^{-x_n} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3}{\phi_1 + \phi_2 + \phi_3} (e^{-x_n} y_{xx}^{(n+2)} - e^{-x_n} y_{xx}^{(n+1)}).$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = e^{x_n} f \left(h_n, h_{n+1}, e^{-x_n} \frac{(y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)})}{2} \right) \quad (3.1.10)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, e^{-x_n} \frac{(y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)})}{2} \right).$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,3} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.11)$$

Débutons par chercher l'équation différentielle ordinaire invariante sous ce groupe de symétries. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)} X_1 E = pr^{(3)} X_2 E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow y' \frac{\partial E}{\partial I_1} + y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \quad (3.1.12)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3}.$$

Ceci donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{y''}{y'}, \quad \phi_2 = \frac{y'''}{y'}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{y''}{y'}, \frac{y'''}{y'} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = y' F \left(\frac{y''}{y'} \right). \quad (3.1.13)$$

Enchaînons en trouvant le schéma invariant sous le même groupe de Lie de symétries. Nous demandons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = y_n - y_{n-1}, \quad I_5 = y_{n+1} - y_n, \quad I_6 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ ne sont pas présents dans cette équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6}$$

qui conduit aux invariants

$$\phi_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, \phi_1, \phi_2\}.$$

Toutefois, une base plus pratique est

$$\left\{ h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right), \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} = \frac{2}{I_1 + I_2} \left(1 - \phi_1 \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \right), \quad \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} = \frac{2}{I_2 + I_3} \left(\frac{1}{\phi_2} \frac{I_2}{I_3} - 1 \right),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} = \frac{3}{I_1 + I_2 + I_3} \left(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} \right).$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = y_x^{(n+1)} f \left(h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right) \quad (3.1.15)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right).$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,4} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.16)$$

Déterminons premièrement l'équation différentielle ordinaire d'ordre 3 invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous imposons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous obtenons déjà l'invariant $I_1 = x$. Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3}$$

qui engendre l'invariant

$$\phi_1 = \frac{y''''}{y''}.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ x, \frac{y''''}{y''} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y'' F(x). \tag{3.1.18}$$

Poursuivons en trouvant le système d'équations aux différences invariant sous le

même groupe de symétries. Nous imposons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\ I_5 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\ I_6 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}). \end{aligned}$$

Nous demandons que

$$\begin{aligned} &pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow &[y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)] \frac{\partial E}{\partial I_5} \quad (3.1.19) \\ &+ [y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.1.19) comme

$$I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + I_6 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6}$$

qui mène à l'invariant

$$\phi_1 = \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, \phi_1\}.$$

Toutefois, une base plus pratique est

$$\left\{ x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+2)}} \right\}$$

et nous l'obtenons par la transformation suivante :

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+2)}} = \frac{3}{I_4 - I_1} \left(1 - \phi_1 \frac{(I_4 - I_3)(I_4 - I_2)}{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)} \right).$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= y_{xx}^{(n+2)} f(x_n, h_n, h_{n+1}) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g(x_n, h_n, h_{n+1}). \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,5} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (1-a)x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad a \neq 1. \tag{3.1.21}$$

Trouvons d'abord l'équation différentielle invariante sous ce groupe. Nous exigeons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y'''.$$

Nous imposons deuxièmement que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & x(1-a) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (2a-1)y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + (3a-2)y''' \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \quad (3.1.22)
 \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{(1-a)I_1} = \frac{dI_2}{(2a-1)I_2} = \frac{dI_3}{(3a-2)I_3}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\phi_1 = x^{1-2a}y''^{1-a}, \quad \phi_2 = x^{\frac{2-3a}{1-a}}y'''.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ x^{1-2a}y''^{1-a}, x^{\frac{2-3a}{1-a}}y''' \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = x^{\frac{3a-2}{1-a}} F(x^{1-2a}y''^{1-a}). \quad (3.1.23)$$

Déterminons maintenant le système d'équations aux différences du troisième ordre invariant sous le même groupe de Lie de symétries. Nous imposons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\
 I_5 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\
 I_6 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Nous demandons en second lieu que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & (1-a) \left[x_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} + x_n \frac{\partial E}{\partial I_2} + x_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} + x_{n+2} \frac{\partial E}{\partial I_4} \right] \\
& + [(1-a) [x_{n-1}(y_{n+1} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_{n+1}) + x_{n+1}(y_n - y_{n-1})] \\
& + y_{n-1}(x_n - x_{n+1}) + y_n(x_{n+1} - x_{n-1}) + y_{n+1}(x_{n-1} - x_n)] \frac{\partial E}{\partial I_5} \\
& + [(1-a) [x_n(y_{n+2} - y_{n+1}) + x_{n+1}(y_n - y_{n+2}) + x_{n+2}(y_{n+1} - y_n)] \\
& + y_n(x_{n+1} - x_{n+2}) + y_{n+1}(x_{n+2} - x_n) + y_{n+2}(x_n - x_{n+1})] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.1.24) sous la forme

$$\begin{aligned}
(1-a)x_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} + (1-a)x_n \frac{\partial E}{\partial I_2} + (1-a)x_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} + (1-a)x_{n+2} \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
+ (2-a)I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + (2-a)I_6 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{(1-a)I_1} = \frac{dI_2}{(1-a)I_2} = \frac{dI_3}{(1-a)I_3} = \frac{dI_4}{(1-a)I_4} = \frac{dI_5}{(2-a)I_5} = \frac{dI_6}{(2-a)I_6}$$

qui conduit aux invariants

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{x_{n-1}}{x_n}, & \phi_2 &= \frac{x_n}{x_{n+1}}, & \phi_3 &= \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}, \\
\phi_4 &= x_n^{a-2} [(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)]^{1-a}, \\
\phi_5 &= x_n^{a-2} [(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})]^{1-a}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Par contre, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{h_{n+2}}{x_n}, \frac{1}{2} \left(x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+1)1-a} + x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+2)1-a} \right), x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\frac{h_n}{x_n} = 1 - \phi_1, \quad \frac{h_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\phi_2} - 1, \quad \frac{h_{n+2}}{x_n} = \frac{1}{\phi_2} \left(\frac{1}{\phi_3} - 1 \right),$$

$$x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+1)1-a} = \frac{2}{\left(\frac{h_n}{x_n} + \frac{h_{n+1}}{x_n} \right)^{1-a}} \frac{(-1)^{1-a} \phi_4}{\left(\frac{h_n}{x_n} \right)^{1-a} \left(\frac{h_{n+1}}{x_n} \right)^{1-a}},$$

$$x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+2)1-a} = \frac{2}{\left(\frac{h_{n+1}}{x_n} + \frac{h_{n+2}}{x_n} \right)^{1-a}} \frac{(-1)^{1-a} \phi_5}{\left(\frac{h_{n+1}}{x_n} \right)^{1-a} \left(\frac{h_{n+2}}{x_n} \right)^{1-a}},$$

$$x_n^{\frac{2-3a}{1-a}} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3}{\frac{h_n}{x_n} + \frac{h_{n+1}}{x_n} + \frac{h_{n+2}}{x_n}} \left[\left(x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+2)1-a} \right)^{\frac{1}{1-a}} - \left(x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+1)1-a} \right)^{\frac{1}{1-a}} \right].$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = x_n^{\frac{3a-2}{1-a}} f \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} \left(x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+1)1-a} + x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+2)1-a} \right) \right) \quad (3.1.25)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} g \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} \left(x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+1)1-a} + x_n^{1-2a} y_{xx}^{(n+2)1-a} \right) \right).$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,6} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x} + (x+b)y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.26)$$

Commençons par déterminer l'EDO du troisième ordre invariante sous ce groupe de symétries. Nous demandons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y'''.$$

Nous exigeons deuxièmement que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (1+x^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (b-3x)y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + (-3y'' + (b-5x)y''') \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \quad (3.1.27)
 \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{1+I_1^2} = \frac{dI_2}{(b-3I_1)I_2} = \frac{dI_3}{I_3(b-5I_1)-3I_2}$$

qui donne les invariants

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= b \arctan(x) - \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \ln y'', \\
 \phi_2 &= e^{-b \arctan(x)} \left[3(1+x^2)^{\frac{3}{2}} xy'' + (1+x^2)^{\frac{5}{2}} y''' \right].
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ b \arctan(x) - \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \ln y'', e^{-b \arctan(x)} \left[3(1+x^2)^{\frac{3}{2}} xy'' + (1+x^2)^{\frac{5}{2}} y''' \right] \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{-3xy''}{1+x^2} + e^{b \arctan(x)} (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} F \left(b \arctan(x) - \frac{3}{2} \ln(1+x^2) - \ln y'' \right). \quad (3.1.28)$$

Enchaînons en cherchant le schéma d'ordre 3 invariant sous le même groupe de Lie.

Nous imposons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\
 I_5 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\
 I_6 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).
 \end{aligned}$$

Nous demandons en second lieu que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & (1+x_{n-1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (1+x_n^2) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (1+x_{n+1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_3} + (1+x_{n+2}^2) \frac{\partial E}{\partial I_4} \quad (3.1.29) \\
& + [(1+x_{n-1}^2)(y_{n+1}-y_n) + (1+x_n^2)(y_{n-1}-y_{n+1}) + (1+x_{n+1}^2)(y_n-y_{n-1}) \\
& \quad + (x_{n-1}+b)y_{n-1}(x_n-x_{n+1}) + (x_n+b)y_n(x_{n+1}-x_{n-1}) \\
& \quad + (x_{n+1}+b)y_{n+1}(x_{n-1}-x_n)] \frac{\partial E}{\partial I_5} \\
& + [(1+x_n^2)(y_{n+2}-y_{n+1}) + (1+x_{n+1}^2)(y_n-y_{n+2}) + (1+x_{n+2}^2)(y_{n+1}-y_n) \\
& \quad + (x_n+b)y_n(x_{n+1}-x_{n+2}) + (x_{n+1}+b)y_{n+1}(x_{n+2}-x_n) \\
& \quad + (x_{n+2}+b)y_{n+2}(x_n-x_{n+1})] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
\end{aligned}$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.1.29) sous la forme

$$\begin{aligned}
& (1+x_{n-1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (1+x_n^2) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (1+x_{n+1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_3} + (1+x_{n+2}^2) \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
& + (x_{n-1}+x_n+x_{n+1}+b)I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + (x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+b)I_6 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{(x_{n-1}+x_n+x_{n+1}+b)I_5} = \frac{dI_6}{(x_n+x_{n+1}+x_{n+2}+b)I_6}.$$

Ceci mène aux invariants

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{x_n - x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_nx_{n+1}}, \quad \phi_3 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}x_{n+2}}, \\
\phi_4 &= b \arctan(x_n) - \ln \left(1 + x_n \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n} \right) \right) - \ln \left(1 - x_n \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_nx_{n+1}} \right) \right) \\
&+ \frac{3}{2} \ln(1+x_n^2) - \ln[-(x_{n+1}-x_n)(y_n-y_{n-1}) + (x_n-x_{n-1})(y_{n+1}-y_n)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_5 &= b \arctan(x_{n+1}) - \ln \left(1 + x_{n+1} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_n x_{n+1}} \right) \right) \\
&- \ln \left(1 - x_{n+1} \left(\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{1 + x_{n+1} x_{n+2}} \right) \right) + \frac{3}{2} \ln(1 + x_{n+1}^2) \\
&- \ln[-(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) + (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})].
\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Toutefois, il n'est pas évident de construire à partir de ces invariants un schéma qui tende vers l'équation différentielle invariante (3.1.28) dans la limite continue. Nous cessons donc notre calcul à cet endroit.

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,7} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.30)$$

Cherchons premièrement l'équation différentielle ordinaire invariante sous ce groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y'''.$$

Nous imposons ensuite que

$$\begin{aligned}
&pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow &-y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} - 2y''' \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \quad (3.1.31)
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous obtenons déjà l'invariant

$I_1 = y'$. Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{2I_3}.$$

Ceci donne l'invariant

$$\phi_1 = \frac{y'''}{y''^2}.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ y', \frac{y'''}{y''^2} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = y''^2 F(y'). \quad (3.1.32)$$

Déterminons deuxièmement le système d'équations aux différences d'ordre 3 invariant sous le même groupe. Nous imposons en premier que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = y_n - y_{n-1}, \quad I_5 = y_{n+1} - y_n, \quad I_6 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous demandons en second que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & + (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, & \phi_2 &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}, & \phi_3 &= \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_n - y_{n-1}}, \\ \phi_4 &= \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, & \phi_5 &= \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Toutefois, une base plus pratique est

$$\left\{ y_{xx}^{(n+1)} h_n, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1}, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+2}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}, \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)2}} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} y_x^{(n)} &= \frac{1}{\phi_1 \phi_2 \phi_3}, & y_x^{(n+1)} &= \frac{1}{\phi_2 \phi_3 \phi_4}, & y_x^{(n+2)} &= \frac{1}{\phi_3 \phi_4 \phi_5}, \\ y_{xx}^{(n+1)} (x_{n+1} - x_{n-1}) &= 2 (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}), \\ y_{xx}^{(n+2)} (x_{n+1} - x_{n-1}) &= \frac{2\phi_2(1 + \phi_1)}{1 + \phi_2} (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)}), \\ y_{xxx}^{(n+2)} (x_{n+1} - x_{n-1})^2 &= \frac{3\phi_2(1 + \phi_1)}{1 + \phi_2 + \phi_1 \phi_2} (x_{n+1} - x_{n-1}) (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}), \\ \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+1)2}} &= \left[\frac{4}{y_{xxx}^{(n+2)} (x_{n+1} - x_{n-1})^2} \left(\frac{1}{\phi_2 \phi_3 \phi_4} - \frac{1}{\phi_1 \phi_2 \phi_3} \right)^2 \right]^{-1}, \\ y_{xx}^{(n+1)} h_n &= \frac{2\phi_1 (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)})}{1 + \phi_1}, & y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1} &= \frac{2 (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)})}{1 + \phi_1}, \\ y_{xx}^{(n+1)} h_{n+2} &= \frac{2 (y_x^{(n+1)} - y_x^{(n)})}{\phi_2(1 + \phi_1)}. \end{aligned}$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= y_{xx}^{(n+1)2} f \left(y_{xx}^{(n+1)} h_n, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3} \right) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(y_{xx}^{(n+1)} h_n, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,8} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.35)$$

Déterminons en premier l'EDO invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous exigeons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous imposons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial I_1} - y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} - 2y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{1} = -\frac{dI_2}{I_2} = -\frac{dI_3}{2I_3}$$

qui donne les invariants

$$\phi_1 = y'' e^{y'}, \quad \phi_2 = y'''' e^{2y'}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{y''e^{y'}, y'''e^{2y'}\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = e^{-2y'} F(y''e^{y'}). \quad (3.1.37)$$

Cherchons en second le schéma du troisième ordre invariant sous le même groupe. Nous demandons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= x_n - x_{n-1}, & I_2 &= x_{n+1} - x_n, & I_3 &= x_{n+2} - x_{n+1}, \\ I_4 &= y_n - y_{n-1}, & I_5 &= y_{n+1} - y_n, & I_6 &= y_{n+2} - y_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} &pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow &(x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ &+ (x_n + y_n - x_{n-1} - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (x_{n+1} + y_{n+1} - x_n - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} \\ &+ (x_{n+2} + y_{n+2} - x_{n+1} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_1 + I_4} = \frac{dI_5}{I_2 + I_5} = \frac{dI_6}{I_3 + I_6}.$$

Ceci conduit aux invariants

$$\phi_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}},$$

$$\phi_3 = \frac{e^{\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}}}{x_n - x_{n-1}}, \quad \phi_4 = \frac{e^{\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}}}{x_{n+1} - x_n}, \quad \phi_5 = \frac{e^{\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}}}}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Par contre, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{h_{n+2}}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{1}{2} \left(y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n+1)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n+1)}} \right), y_{xxx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n+1)}} \right\}$$

et nous l'obtenons par les transformations suivantes :

$$y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n+1)}} = \frac{2\phi_4}{1 + \phi_4} \ln \left(\frac{\phi_4}{\phi_1 \phi_3} \right), \quad y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n+1)}} = \frac{2\phi_2 \phi_4}{1 + \phi_2} \ln \left(\frac{\phi_5}{\phi_2 \phi_4} \right),$$

$$y_{xxx}^{(n+2)} e^{2y_x^{(n+1)}} = \frac{3\phi_2 \phi_4}{1 + \phi_2 + \phi_1 \phi_2} \left(y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n+1)}} - y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n+1)}} \right),$$

$$\frac{h_n}{e^{y_x^{(n+1)}}} = \frac{\phi_1}{\phi_4}, \quad \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n+1)}}} = \frac{1}{\phi_4}, \quad \frac{h_{n+2}}{e^{y_x^{(n+1)}}} = \frac{1}{\phi_2 \phi_4}.$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = e^{-2y_x^{(n+1)}} f \left(\frac{h_n}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{1}{2} \left(y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n+1)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n+1)}} \right) \right) \quad (3.1.39)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} g \left(\frac{h_n}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{h_{n+1}}{e^{y_x^{(n+1)}}}, \frac{1}{2} \left(y_{xx}^{(n+1)} e^{y_x^{(n+1)}} + y_{xx}^{(n+2)} e^{y_x^{(n+1)}} \right) \right).$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,9} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2. \quad (3.1.40)$$

Trouvons en premier lieu l'EDO d'ordre 3 invariante sous ce groupe de Lie. Nous

demandons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous exigeons deuxièmement que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (k-1)y' \frac{\partial E}{\partial I_1} + (k-2)y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + (k-3)y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{(k-1)I_1} = \frac{dI_2}{(k-2)I_2} = \frac{dI_3}{(k-3)I_3}.$$

Ceci mène aux invariants

$$\phi_1 = \frac{y''}{y'^{\frac{k-2}{k-1}}}, \quad \phi_2 = \frac{y''''}{y'^{\frac{k-3}{k-1}}}.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{y''}{y'^{\frac{k-2}{k-1}}}, \frac{y''''}{y'^{\frac{k-3}{k-1}}} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = y'^{\frac{k-3}{k-1}} F \left(\frac{y''}{y'^{\frac{k-2}{k-1}}} \right). \quad (3.1.42)$$

Cherchons maintenant le schéma du troisième ordre invariant sous le même groupe.

Nous exigeons en premier que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = y_n - y_{n-1}, \quad I_5 = y_{n+1} - y_n, \quad I_6 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous imposons en second que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & + k(y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + k(y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} + k(y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{kI_4} = \frac{dI_5}{kI_5} = \frac{dI_6}{kI_6}$$

qui engendre les invariants

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, & \phi_2 &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}, \\ \phi_3 &= \frac{y_n - y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^k}, & \phi_4 &= \frac{y_{n+1} - y_n}{(x_{n+1} - x_n)^k}, & \phi_5 &= \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{(x_{n+2} - x_{n+1})^k}. \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Toutefois, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+2}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} \right), \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-3}{k-1}}} \right\}$$

et nous l'obtenons par les transformations suivantes :

$$\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} = \frac{2\phi_1}{1 + \phi_1} \left(\frac{\phi_4}{\phi_1^{k-1}} - \phi_3 \right) \left(\frac{\phi_1^{k-1}}{\phi_4} \right)^{\frac{k-2}{k-1}},$$

$$\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} = \frac{2\phi_1\phi_2}{1+\phi_2} \left(\frac{\phi_5}{(\phi_1\phi_2)^{k-1}} - \frac{\phi_4}{\phi_1^{k-1}} \right) \left(\frac{\phi_1^{k-1}}{\phi_4} \right)^{\frac{k-2}{k-1}},$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-3}{k-1}}} = \frac{3\phi_1\phi_2}{1+\phi_2+\phi_1\phi_2} \left(\frac{\phi_4}{\phi_1^{k-1}} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} - \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} \right),$$

$$\frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}} = \frac{1}{\phi_3}, \quad \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}} = \frac{1}{\phi_3\phi_1^{k-1}}, \quad \frac{h_{n+2}^{k-1}}{y_x^{(n)}} = \frac{1}{\phi_3\phi_1^{k-1}\phi_2^{k-1}}.$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = y_x^{(n+1)\frac{k-3}{k-1}} f \left(\frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} \right) \right) \quad (3.1.44)$$

$$h_{n+2} = h_{n+1} g \left(\frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)\frac{k-2}{k-1}}} \right) \right).$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,10} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (kx + y) \frac{\partial}{\partial x} + (ky - x) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.45)$$

Cherchons premièrement l'équation différentielle ordinaire invariante sous ce groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,1}$,

$$I_1 = y', \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y'''.$$

Nous demandons ensuite que

$$pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + I_1^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2(k + 3I_1) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (3I_2^2 + 2I_3(k + 2I_1)) \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \quad (3.1.46)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{1 + I_1^2} = \frac{dI_2}{I_2(k + 3I_1)} = \frac{dI_3}{3I_2^2 + 2I_3(k + 2I_1)}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\phi_1 = k \arctan(y') + \frac{3}{2} \ln(1 + y'^2) - \ln(y''),$$

$$\phi_2 = e^{-2k \arctan(y')} (1 + y'^2)^{-3} [y'''(1 + y'^2) - 3y''^2 y'].$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{\phi_1, \phi_2\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2 y'}{1 + y'^2} + \frac{e^{2k \arctan(y')} (1 + y'^2)^3}{1 + y'^2} F \left(k \arctan(y') + \frac{3}{2} \ln(1 + y'^2) - \ln(y'') \right). \quad (3.1.47)$$

Trouvons deuxièmement le système d'équations aux différences invariant sous le même groupe de Lie. Nous demandons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = y_n - y_{n-1}, \quad I_5 = y_{n+1} - y_n, \quad I_6 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous exigeons que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & (kx_n + y_n - kx_{n-1} - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} \\
& + (kx_{n+1} + y_{n+1} - kx_n - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (kx_{n+2} + y_{n+2} - kx_{n+1} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\
& + (ky_n - x_n - ky_{n-1} + x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (ky_{n+1} - x_{n+1} - ky_n + x_n) \frac{\partial E}{\partial I_5} \\
& + (ky_{n+2} - x_{n+2} - ky_{n+1} + x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.48}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{kI_1 + I_4} = \frac{dI_2}{kI_2 + I_5} = \frac{dI_3}{kI_3 + I_6} = \frac{dI_4}{kI_4 - I_1} = \frac{dI_5}{kI_5 - I_2} = \frac{dI_6}{kI_6 - I_3}.$$

Ceci conduit aux invariants

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= [(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2] e^{2k \arctan\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)}, \\
\phi_2 &= \frac{\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}}{1 + \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}\right) \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)}, & \phi_3 &= \frac{\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}} - \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}}{1 + \left(\frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}}\right) \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}\right)}, \\
\phi_4 &= \frac{(x_n - x_{n-1})^2 + (y_n - y_{n-1})^2}{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}, & \phi_5 &= \frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+2} - x_{n+1})^2 + (y_{n+2} - y_{n+1})^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Cependant, nous arrêtons notre calcul ici car la construction du schéma à partir de ces invariants s'avère difficile.

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,11} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.49)$$

Débutons par déterminer l'équation différentielle du troisième ordre invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous avons les invariants calculés dans le cas continu $D_{2,1}$,

$$\alpha_1 = y, \quad \alpha_2 = y', \quad \alpha_3 = y'', \quad \alpha_4 = y''''.$$

Nous imposons deuxièmement que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_2E(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2\alpha_i) \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & y \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - y' \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} - 3y'' \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 5y'''' \frac{\partial E}{\partial \alpha_4} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{d\alpha_2}{\alpha_2} = -\frac{d\alpha_3}{3\alpha_3} = -\frac{d\alpha_4}{5\alpha_4}$$

qui conduit aux invariants

$$I_1 = yy', \quad I_2 = y^3y'', \quad I_3 = y^5y''''.$$

Nous exigeons troisièmement que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & y^2 \frac{\partial E}{\partial I_1} - 3y^5y'' \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.51)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous avons déjà l'invariant

$$\phi_1 = y^3 y''.$$

En divisant par y^2 , nous pouvons récrire l'équation (3.1.50) comme

$$\frac{\partial E}{\partial I_1} - 3\phi_1 \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{1} = -\frac{dI_3}{3\phi_1}.$$

Ceci donne l'invariant

$$\phi_2 = y^5 y''' + 3y^4 y' y''.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{y^3 y'', y^5 y''' + 3y^4 y' y''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = -\frac{3y'y''}{y} + \frac{1}{y^5} F(y^3 y''). \quad (3.1.52)$$

Déterminons ensuite le schéma du troisième ordre invariant sous le même groupe. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)}X_1 E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés dans le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = y_{n-1}, \quad I_2 = y_n, \quad I_3 = y_{n+1}, \quad I_4 = y_{n+2},$$

$$I_5 = x_n - x_{n-1}, \quad I_6 = x_{n+1} - x_n, \quad I_7 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Nous demandons ensuite que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & y_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} + y_n \frac{\partial E}{\partial I_2} + y_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} + y_{n+2} \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
& + 2(x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} + 2(x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} + 2(x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.53}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{2I_5} = \frac{dI_6}{2I_6} = \frac{dI_7}{2I_7}.$$

Ceci mène aux invariants

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{y_{n-1}}{y_n}, & \phi_2 &= \frac{y_n}{y_{n+1}}, & \phi_3 &= \frac{y_{n+1}}{y_{n+2}}, \\
\phi_4 &= y_{n+2}^{-2}(x_n - x_{n-1}), & \phi_5 &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, & \phi_6 &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Nous exigeons enfin que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_3E(\phi_1, \dots, \phi_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3\phi_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(x_{n-1}y_{n-1} - x_n y_{n-1})}{y_n} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + \frac{(x_n y_n - x_{n+1} y_n)}{y_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \\
& + \frac{(x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+2} y_{n+1})}{y_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} + \frac{(x_n^2 - x_{n-1}^2 - 2x_{n+2}(x_n - x_{n-1}))}{y_{n+2}^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_4} \\
& + \left[\frac{x_n^2 - x_{n-1}^2}{x_{n+1} - x_n} + \frac{(x_n^2 - x_{n+1}^2)(x_n - x_{n-1})}{(x_{n+1} - x_n)^2} \right] \frac{\partial E}{\partial \phi_5} \\
& + \left[\frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+2} - x_{n+1}} + \frac{(x_{n+1}^2 - x_{n+2}^2)(x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+2} - x_{n+1})^2} \right] \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.54}$$

Il est possible de récrire l'équation (3.1.54) comme

$$\begin{aligned} \phi_1 \phi_5 \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + \phi_2 \frac{\partial E}{\partial \phi_2} + \frac{\phi_3}{\phi_6} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} + \phi_4 \left(\phi_5 + 2 + \frac{2}{\phi_6} \right) \frac{\partial E}{\partial \phi_4} \\ + \phi_5 (1 + \phi_5) \frac{\partial E}{\partial \phi_5} + (1 + \phi_6) \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0. \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{d\phi_1}{\phi_1 \phi_5} = \frac{d\phi_2}{\phi_2} = \frac{\phi_6}{\phi_3} d\phi_3 = \frac{d\phi_4}{\phi_4 \left(\phi_5 + 2 + \frac{2}{\phi_6} \right)} = \frac{d\phi_5}{\phi_5 (1 + \phi_5)} = \frac{d\phi_6}{1 + \phi_6}.$$

Ceci donne les invariants

$$\begin{aligned} \rho_1 = \frac{y_n}{y_{n+1}} \left(\frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right), \quad \rho_2 = \frac{y_n}{y_{n+1}} \left(\frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+2} - x_n} \right), \quad \rho_3 = \frac{y_{n+1}}{y_{n+2}} \left(\frac{x_{n+2} - x_n}{x_{n+1} - x_n} \right), \\ \rho_4 = \frac{y_{n-1}}{y_n} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - x_{n-1}} \right), \quad \rho_5 = \frac{(x_n - x_{n-1})(x_{n+2} - x_n)^2 y_{n+1}^2}{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) y_n^2 y_{n+2}^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}.$$

Par contre, il n'est pas trivial de construire à partir de ces invariants un schéma qui tende vers l'EDO invariante. C'est pour cette raison que nous interrompons notre calcul.

• Soit

$$D_{3,12} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.55)$$

Trouvons en premier l'équation différentielle ordinaire d'ordre 3 invariante sous ce groupe. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)}X_1 E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés dans le cas continu $D_{2,1}$,

$$\alpha_1 = y, \quad \alpha_2 = y', \quad \alpha_3 = y'', \quad \alpha_4 = y'''.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_2E(\alpha_1, \dots, \alpha_4) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2\alpha_i) \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & y \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - y'' \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 2y''' \frac{\partial E}{\partial \alpha_4} = 0. \tag{3.1.56}
 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}$ ne se retrouve pas dans cette équation, nous obtenons l'invariant

$$I_1 = y'.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{d\alpha_3}{\alpha_3} = -\frac{d\alpha_4}{2\alpha_4}.$$

Ceci mène aux invariants

$$I_2 = yy'', \quad I_3 = y^2y''''.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\{I_1, I_2, I_3\}.$$

Nous demandons enfin que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2y(1 + y'^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + 2yy'(1 + 3yy'' + y'^2) \frac{\partial E}{\partial I_2} \\
 & + 2y^2(3yy''^2 + 4yy''''y' + 6y''y'^2) \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \tag{3.1.57}
 \end{aligned}$$

En divisant par $2y$, nous pouvons récrire l'équation (3.1.57) sous la forme

$$(1 + I_1^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} + I_1(1 + 3I_2 + I_1^2) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (3I_2^2 + 4I_1I_3 + 6I_1^2I_2) \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{1 + I_1^2} = \frac{dI_2}{I_1(1 + 3I_2 + I_1^2)} = \frac{dI_3}{3I_2^2 + 4I_1I_3 + 6I_1^2I_2}.$$

Ceci conduit aux invariants

$$\phi_1 = \frac{1 + yy'' + y'^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \phi_2 = \frac{y^2(y''' - 3y''^2y' + y''''y'^2)}{(1 + y'^2)^3}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{\phi_1, \phi_2\}.$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2y'}{1 + y'^2} + \frac{(1 + y'^2)^2}{y^2} F \left(\frac{1 + yy'' + y'^2}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (3.1.58)$$

Cherchons en second le système d'équations aux différences d'ordre 3 invariant sous le même groupe de Lie. Nous exigeons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous avons les invariants calculés dans le cas discret $D_{2,1}$,

$$I_1 = y_n, \quad I_2 = y_n - y_{n-1}, \quad I_3 = y_{n+1} - y_n, \quad I_4 = y_{n+2} - y_{n+1},$$

$$I_5 = x_n - x_{n-1}, \quad I_6 = x_{n+1} - x_n, \quad I_7 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Nous imposons en second lieu que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & y_n \frac{\partial E}{\partial I_1} + (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_3} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
 & + (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.59}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\phi_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}, \quad \phi_3 = \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n},$$

$$\phi_4 = \frac{x_{n+1} - x_n}{y_n}, \quad \phi_5 = \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}}, \quad \phi_6 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_n}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6\}.$$

Nous demandons en dernier lieu que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_3E(\phi_1, \dots, \phi_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3\phi_i) \frac{\partial E}{\partial \phi_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{[(x_{n-1} - x_n)^2 + (y_{n-1} - y_n)^2](y_{n-1} + y_n)}{(x_{n-1} - x_n)^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \\
& + \frac{[(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2](y_n + y_{n+1})}{(x_n - x_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \\
& - \frac{[(x_{n-1} - x_n)^2 - y_{n-1}^2 + y_n^2]}{y_n} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} + \frac{(x_n - x_{n+1})^2 + y_n^2 - y_{n-1}^2}{y_n} \frac{\partial E}{\partial \phi_4} \\
& + \frac{[(x_{n+1} - x_{n+2})^2 + (y_{n+1} - y_{n+2})^2](y_{n+1} + y_{n+2})}{(x_{n+1} - x_{n+2})^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_5} \\
& + \frac{2x_n x_{n+1} - x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+2} + x_{n+2}^2 + y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2}{y_n} \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.1.60) comme

$$\begin{aligned}
& (1 + \phi_1^2)(2 - \phi_1\phi_3) \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + (1 + \phi_2^2)(2 + \phi_2\phi_4) \frac{\partial E}{\partial \phi_2} - [\phi_3^2 + \phi_1\phi_3(2 - \phi_1\phi_3)] \frac{\partial E}{\partial \phi_3} \\
& + [\phi_4^2 - \phi_2\phi_4(2 + \phi_2\phi_4)] \frac{\partial E}{\partial \phi_4} + (1 + \phi_5^2)(2 + 2\phi_2\phi_4 + \phi_5\phi_6) \frac{\partial E}{\partial \phi_5} \\
& + [-\phi_4^2 + (\phi_4 + \phi_6)^2 - \phi_5\phi_6(2 + 2\phi_2\phi_4 + \phi_5\phi_6)] \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{(1 + \phi_1^2)(2 - \phi_1\phi_3)} &= \frac{d\phi_2}{(1 + \phi_2^2)(2 + \phi_2\phi_4)} = \frac{d\phi_3}{-[\phi_3^2 + \phi_1\phi_3(2 - \phi_1\phi_3)]} \\
&= \frac{d\phi_4}{\phi_4^2 - \phi_2\phi_4(2 + \phi_2\phi_4)} = \frac{d\phi_5}{(1 + \phi_5^2)(2 + 2\phi_2\phi_4 + \phi_5\phi_6)} \\
&= \frac{d\phi_6}{-\phi_4^2 + (\phi_4 + \phi_6)^2 - \phi_5\phi_6(2 + 2\phi_2\phi_4 + \phi_5\phi_6)}.
\end{aligned}$$

Ceci donne les trois premiers invariants

$$\rho_1 = \frac{\phi_3^2(1 + \phi_1^2)}{1 - \phi_1\phi_3}, \quad \rho_2 = \frac{\phi_4^2(1 + \phi_2^2)}{1 + \phi_2\phi_4},$$

$$\rho_3 = \frac{2[\phi_4 + \phi_3 + \phi_2^2\phi_4 + \phi_1^2\phi_3 + 2(\phi_2 - \phi_1)]}{4 - [\phi_4(1 + \phi_2^2) + 2\phi_2][\phi_3(1 + \phi_1^2) - 2\phi_1]}.$$

Nous arrêtons toutefois notre calcul ici puisqu'il est difficile de résoudre les autres équations.

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,13} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.61)$$

Déterminons d'abord l'équation différentielle invariante sous ce groupe de Lie. Nous demandons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous avons les invariants,

$$\alpha_1 = y - x, \quad \alpha_2 = y', \quad \alpha_3 = y'', \quad \alpha_4 = y''''.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_2E(\alpha_1, \dots, \alpha_4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_2\alpha_i) \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-x) \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - y'' \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} - 2y'''' \frac{\partial E}{\partial \alpha_4} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial \alpha_2}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous obtenons déjà l'invariant

$$I_1 = y'.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{d\alpha_3}{\alpha_3} = -\frac{d\alpha_4}{2\alpha_4}.$$

Ceci donne les invariants

$$I_2 = (y-x)y'', \quad I_3 = (y-x)^2 y''''.$$

Nous imposons en troisième lieu que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & 2(y-x)y' \frac{\partial E}{\partial I_1} - (y-x)[3y''(x-y) - 2(y'-1)y'] \frac{\partial E}{\partial I_2} \\
 & - 2(y-x)^2[-2(y-x)y''' - 3y''(y'-1)] \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.63}$$

En divisant par $(y-x)$, il est possible de récrire l'équation (3.1.63) comme

$$2I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + [3I_2 + 2(I_1 - 1)I_1] \frac{\partial E}{\partial I_2} + [4I_3 + 6I_2(I_1 - 1)] \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{2I_1} = \frac{dI_2}{3I_2 + 2(I_1 - 1)I_1} = \frac{dI_3}{4I_3 + 6I_2(I_1 - 1)}.$$

Ceci donne les invariants

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{(y-x)y'' - 2y'(1+y')}{y'^{\frac{3}{2}}}, \\
 \phi_2 &= \frac{1}{y'^2} [y'''(x-y)^2 + 6y''(1+y')(x-y) + 6y'(1+4y'+y'^2)].
 \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\{\phi_1, \phi_2\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{6y''(1+y')(y-x) - 6y'(1+4y'+y'^2) + y'^2 F\left(\frac{(y-x)y'' - 2y'(1+y')}{y'^{\frac{3}{2}}}\right)}{(x-y)^2}. \tag{3.1.64}$$

Cherchons ensuite le schéma invariant sous le même groupe de Lie de symétries. Nous imposons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = 0$ et nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1}, \quad I_4 = y_{n-1} - x_{n+2},$$

$$I_5 = y_n - y_{n-1}, \quad I_6 = y_{n+1} - y_n, \quad I_7 = y_{n+2} - y_{n+1}.$$

Nous demandons deuxièmement que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & + (y_{n-1} - x_{n+2}) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (y_n - y_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_5} + (y_{n+1} - y_n) \frac{\partial E}{\partial I_6} \\ & + (y_{n+2} - y_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{I_5} = \frac{dI_6}{I_6} = \frac{dI_7}{I_7}$$

qui donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}, \quad \phi_3 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n-1} - x_{n+2}},$$

$$\phi_4 = \frac{y_{n-1} - x_{n+2}}{y_n - y_{n-1}}, \quad \phi_5 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_6 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous exigeons troisièmement que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)} X_3 E(\phi_1, \dots, \phi_6) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 \phi_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + \frac{(x_n - x_{n+1})(x_n - x_{n+2})}{x_{n+1} - x_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \\
& + \frac{(x_{n+1} - x_{n+2})(x_{n+1} - y_{n-1})}{x_{n+2} - y_{n-1}} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} + \frac{(x_{n+2} - y_{n-1})(x_{n+2} - y_n)}{y_{n-1} - y_n} \frac{\partial E}{\partial \phi_4} \\
& + \frac{(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} - y_{n+1})}{y_n - y_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial \phi_5} + \frac{(y_n - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}{y_{n+1} - y_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.66}$$

En divisant par $(x_{n-1} - x_{n+1})$, nous pouvons récrire l'équation (3.1.66) comme

$$\begin{aligned}
& \phi_1 \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + \frac{1 + \phi_2}{1 + \phi_1} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} + \frac{1 + \phi_3}{\phi_2(1 + \phi_1)} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} + \frac{1 + \phi_4}{\phi_2 \phi_3(1 + \phi_1)} \frac{\partial E}{\partial \phi_4} \\
& + \frac{1 + \phi_5}{\phi_2 \phi_3 \phi_4(1 + \phi_1)} \frac{\partial E}{\partial \phi_5} + \frac{1 + \phi_6}{\phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5(1 + \phi_1)} \frac{\partial E}{\partial \phi_6} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_1}{\phi_1} &= \frac{(1 + \phi_1)d\phi_2}{1 + \phi_2} = \frac{\phi_2(1 + \phi_1)d\phi_3}{1 + \phi_3} = \frac{\phi_2 \phi_3(1 + \phi_1)d\phi_4}{1 + \phi_4} \\
&= \frac{\phi_2 \phi_3 \phi_4(1 + \phi_1)d\phi_5}{1 + \phi_5} = \frac{\phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5(1 + \phi_1)d\phi_6}{1 + \phi_6}.
\end{aligned}$$

Ceci conduit aux invariants

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{(x_{n-1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n+2})}{(x_{n-1} - x_{n+1})(x_n - x_{n+2})}, & \rho_2 &= \frac{(x_n - x_{n+1})(x_{n+2} - y_{n-1})}{(x_n - x_{n+2})(x_{n+1} - y_{n-1})}, \\
\rho_3 &= \frac{(x_{n+1} - x_{n+2})(y_{n-1} - y_n)}{(x_{n+1} - y_{n-1})(x_{n+2} - y_n)}, & \rho_4 &= \frac{(x_{n+2} - y_{n-1})(y_n - y_{n+1})}{(x_{n+2} - y_n)(y_{n-1} - y_{n+1})}, \\
\rho_5 &= \frac{(y_{n-1} - y_n)(y_{n+1} - y_{n+2})}{(y_{n-1} - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}.$$

Cependant, la construction du schéma à partir de ces invariants ne s'avère pas évidente. C'est pourquoi nous cessons notre calcul à cet endroit.

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,14} : \quad X_1 = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xy \frac{\partial}{\partial x} + (1+y^2) \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.67)$$

Débutons par chercher l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre invariante sous ce groupe. Nous exigeons premièrement que $pr^{(3)}X_3E = 0$, c'est-à-dire

$$y \frac{\partial E}{\partial x} - x \frac{\partial E}{\partial y} - (1+y^2) \frac{\partial E}{\partial y'} - 3y'y'' \frac{\partial E}{\partial y''} - (3y''^2 + 4y'y''') \frac{\partial E}{\partial y'''} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = -\frac{dy'}{1+y^2} = -\frac{dy''}{3y'y''} = -\frac{dy'''}{3y''^2 + 4y'y''''}$$

qui conduit aux invariants

$$I_1 = x^2 + y^2, \quad I_2 = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$I_3 = \frac{x + yy'}{y - xy'}, \quad I_4 = \frac{y''' - 3y''^2y' + y''y'^2}{(1+y'^2)^3}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4\}.$$

Nous imposons deuxièmement que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_1E(I_1, \dots, I_4) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_1I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & 2x(1+x^2+y^2) \frac{\partial E}{\partial I_1} - \frac{3y''(x+yy')}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}} \frac{\partial E}{\partial I_2} \\
& + \frac{y^3 - x^3y' - xy^2y' + y(1+x^2+y'^2)}{(y-xy')^2} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\
& + \left\{ \frac{-3y''(1+y'^2)^2 - y'''(1+y'^2)[4yy' + x(5+y'^2)]}{(1+y'^2)^4} \right. \\
& \left. + \frac{3y''^2[xy'(7+y'^2) + y(5y'^2 - 1)]}{(1+y'^2)^4} \right\} \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.
\end{aligned} \tag{3.1.68}$$

Toutefois, nous mettons ici un terme à notre calcul puisqu'il est complexe de résoudre cette équation.

Déterminons cette fois-ci le schéma d'ordre 3 invariant sous le même groupe de Lie. Nous exigeons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& (1+x_{n-1}^2) \frac{\partial E}{\partial x_{n-1}} + (1+x_n^2) \frac{\partial E}{\partial x_n} + (1+x_{n+1}^2) \frac{\partial E}{\partial x_{n+1}} + (1+x_{n+2}^2) \frac{\partial E}{\partial x_{n+2}} \\
& + x_{n-1}y_{n-1} \frac{\partial E}{\partial y_{n-1}} + x_ny_n \frac{\partial E}{\partial y_n} + x_{n+1}y_{n+1} \frac{\partial E}{\partial y_{n+1}} + x_{n+2}y_{n+2} \frac{\partial E}{\partial y_{n+2}} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\begin{aligned}
& \frac{dx_{n-1}}{1+x_{n-1}^2} = \frac{dx_n}{1+x_n^2} = \frac{dx_{n+1}}{1+x_{n+1}^2} = \frac{dx_{n+2}}{1+x_{n+2}^2} \\
& = \frac{dy_{n-1}}{x_{n-1}y_{n-1}} = \frac{dy_n}{x_ny_n} = \frac{dy_{n+1}}{x_{n+1}y_{n+1}} = \frac{dy_{n+2}}{x_{n+2}y_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Ceci mène aux invariants

$$I_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{1 + x_{n-1}x_n}, \quad I_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{1 + x_nx_{n+1}}, \quad I_3 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{1 + x_{n+1}x_{n+2}},$$

$$I_4 = \frac{1 + x_{n-1}^2}{y_{n-1}^2}, \quad I_5 = \frac{1 + x_n^2}{y_n^2}, \quad I_6 = \frac{1 + x_{n+1}^2}{y_{n+1}^2}, \quad I_7 = \frac{1 + x_{n+2}^2}{y_{n+2}^2}.$$

Nous demandons en second lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_2E(I_1, \dots, I_7) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^7 (pr^{(3)}X_2I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_n y_n (1 + x_{n-1}^2) - x_{n-1} y_{n-1} (1 + x_n^2)}{(1 + x_{n-1} x_n)^2} \frac{\partial E}{\partial I_1} \\ & + \frac{x_{n+1} y_{n+1} (1 + x_n^2) - x_n y_n (1 + x_{n+1}^2)}{(1 + x_n x_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial I_2} \\ & + \frac{x_{n+2} y_{n+2} (1 + x_{n+1}^2) - x_{n+1} y_{n+1} (1 + x_{n+2}^2)}{(1 + x_{n+1} x_{n+2})^2} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & - \frac{2}{y_{n-1}^3} (1 + x_{n-1}^2 + y_{n-1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_4} - \frac{2}{y_n^3} (1 + x_n^2 + y_n^2) \frac{\partial E}{\partial I_5} \\ & - \frac{2}{y_{n+1}^3} (1 + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2) \frac{\partial E}{\partial I_6} - \frac{2}{y_{n+2}^3} (1 + x_{n+2}^2 + y_{n+2}^2) \frac{\partial E}{\partial I_7} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.69)$$

Par contre, la résolution de cette équation s'avère difficile. Nous nous arrêtons donc à cet endroit.

• Soit

$$D_{3,15} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.70)$$

Commençons par trouver l'EDO d'ordre 3 invariante sous ce groupe de symétries. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,4}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = \frac{y''}{y'}, \quad I_3 = \frac{y'''}{y'}.$$

Nous demandons ensuite que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{3y''}{y'} \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.1.71}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'intervient pas dans cette équation, nous obtenons l'invariant $I_1 = x$.

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_2}{1} = \frac{dI_3}{3I_2}$$

qui mène à l'invariant

$$\phi = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2.$$

Nous avons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ x, \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2}{2y'} + y'F(x). \tag{3.1.72}$$

Enchaînons en déterminant le système d'équations aux différences invariant sous le même groupe. Nous demandons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,4}$,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2},$$

$$I_5 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_6 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous imposons que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} - y_{n+1})}{y_n - y_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial I_5} + \frac{(y_n - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}{y_{n+1} - y_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \quad (3.1.73)
 \end{aligned}$$

En divisant par $(y_{n-1} - y_{n+1})$, il est possible de récrire l'équation (3.1.73) comme

$$I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + \frac{1 + I_6}{1 + I_5} \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ ne se retrouvent pas dans cette équation, nous avons les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_5}{I_5} = \frac{1 + I_5}{1 + I_6} dI_6.$$

Ceci engendre l'invariant

$$\rho = \frac{(y_{n+2} - y_n)(y_{n+1} - y_{n-1})}{(y_{n+2} - y_{n+1})(y_n - y_{n-1})}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, \rho\}.$$

Cependant, obtenons une base plus pratique. Considérons un pas h constant. Ceci est possible car puisque I_1 , I_2 , I_3 et I_4 sont invariants, les quantités $x_n - x_{n-1}$, $x_{n+1} - x_n$ et $x_{n+2} - x_{n+1}$ le sont aussi.

Notre objectif est de transformer ρ pour obtenir un invariant qui tend vers l'invariant continu ϕ lorsque $h \rightarrow 0$.

Pour y arriver, nous utilisons les développements en série de Taylor,

$$\begin{aligned} y_n &= y(x) \\ y_{n+1} &= y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \dots \\ y_{n-1} &= y - hy' + \frac{h^2}{2}y'' - \frac{h^3}{6}y''' + \dots \\ y_{n+2} &= y + 2hy' + 2h^2y'' + \frac{4h^3}{3}y''' + \dots \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \rho &= 4 - 2h^2 \left(\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \right) + O(h^3) \\ \Leftrightarrow \frac{4 - \rho}{2h^2} &= \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 + O(h). \end{aligned}$$

Ainsi, pour atteindre notre but, il suffit de prendre

$$\bar{\rho} = \frac{4 - \rho}{2h^2}.$$

Une base plus pratique pour les invariants avec un pas h constant est

$$\{x_n, \bar{\rho}\}$$

et le schéma invariant est ainsi

$$\bar{\rho} = f(x_n) \tag{3.1.74}$$

avec un pas h constant.

• Soit

$$\mathbf{D}_{3,16} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \phi(x) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.1.75)$$

Cherchons en premier l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous demandons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \phi''(x) \frac{\partial E}{\partial I_2} + \phi'''(x) \frac{\partial E}{\partial I_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.76)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ n'est pas présent dans cette équation, nous avons déjà l'invariant $I_1 = x$. Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_2}{\phi''(x)} = \frac{dI_3}{\phi'''(x)}.$$

Ceci conduit à l'invariant

$$\phi_1 = \phi''(x)y'''' - \phi'''(x)y''.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{x, \phi''(x)y'''' - \phi'''(x)y''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{\phi'''(x)}{\phi''(x)} y'' + \frac{F(x)}{\phi''(x)}. \quad (3.1.77)$$

Déterminons en second le système d'équations aux différences d'ordre 3 invariant sous le même groupe de symétries. Nous imposons que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$\begin{aligned} I_1 &= x_{n-1}, & I_2 &= x_n, & I_3 &= x_{n+1}, & I_4 &= x_{n+2}, \\ I_5 &= (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n), \\ I_6 &= (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}). \end{aligned}$$

Nous exigeons que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow [(x_{n+1} - x_n)(\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})) & \quad (3.1.78) \\ & - (x_n - x_{n-1})(\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n))] \frac{\partial E}{\partial I_5} + [(x_{n+2} - x_{n+1})(\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)) \\ & - (x_{n+1} - x_n)(\phi(x_{n+2}) - \phi(x_{n+1}))] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$, $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2}.$$

Notons

$$\begin{aligned} A &= (x_{n+1} - x_n)(\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})) - (x_n - x_{n-1})(\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)), \\ B &= (x_{n+2} - x_{n+1})(\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)) - (x_{n+1} - x_n)(\phi(x_{n+2}) - \phi(x_{n+1})). \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_5}{A} = \frac{dI_6}{B}$$

qui mène à l'invariant

$$\phi_1 = AI_6 - BI_5.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, \phi_1\}.$$

Toutefois, une base plus pratique est

$$\{x_n, h_n, h_{n+1}, h_{n+2}, \phi_{xx}^{(n+1)} y_{xxx}^{(n+2)} - \phi_{xxx}^{(n+2)} y_{xx}^{(n+1)}\}$$

obtenue par la transformation suivante :

$$\phi_{xx}^{(n+1)} y_{xxx}^{(n+2)} - \phi_{xxx}^{(n+2)} y_{xx}^{(n+1)} = \frac{12 \phi_1 (x_{n+1} - x_{n-1})^{-1} (x_{n+2} - x_n)^{-1}}{(x_n - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)^2 (x_{n+2} - x_{n+1})(x_{n+2} - x_{n-1})}.$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{\phi_{xxx}^{(n+2)} y_{xx}^{(n+1)}}{\phi_{xx}^{(n+1)}} + \frac{1}{\phi_{xx}^{(n+1)}} f(x_n, h_n, h_{n+1}) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g(x_n, h_n, h_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.1.79)$$

3.2. ALGÈBRE SUPPLÉMENTAIRE

Dans cette section, nous discutons de l'algèbre de Lie de dimension 3 omise dans l'article *Lie group classification of second-order ordinary difference equations* [DKW] comparativement à la liste des algèbres de Lie de dimension finie pour des champs de vecteurs dans le plan réel de A. Gonzalez-Lopez, N. Kamran et P. J. Olver [GKO]. Nous identifions d'abord cette algèbre supplémentaire réalisée par son groupe de symétries. Nous déterminons ensuite les équations du

deuxième ordre invariante sous ce groupe de symétries afin de compléter la classification de V. Dorodnitsyn, R. Kozlov et P. Winternitz [DKW]. Nous trouvons enfin les équations du troisième ordre invariante sous ce même groupe de symétries.

Le travail de comparaison entre les algèbres de Lie énoncées dans l'article [GKO] avec celles émises dans l'article [DKW] demande un certain effort. En effet, dans ces deux travaux, la notation utilisée est différente et les groupes de symétries sont semblables à une transformation près. Après avoir associé chaque algèbre de dimension 3 de [DKW] avec une de celles de [GKO], nous avons remarqué qu'une algèbre de la liste de [GKO] n'était associée à aucune de celles de [DKW].

L'algèbre de Lie omise correspond au cas 22 de [GKO] avec $\eta_1(x) = 1$ et $\eta_2(x) = e^{kx}$. Nous prenons $k = 1$ sans perdre de généralité. Cette algèbre est en réalité $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ et elle est réalisée par

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_3 = e^t \frac{\partial}{\partial u}.$$

Nous pouvons récrire ce groupe comme

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.2.1)$$

avec

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = u e^{-t}. \end{cases}$$

Nommons ce groupe $\mathbf{D}_{3,17}$.

Déterminons en premier lieu les équations du second ordre invariante sous ce groupe de symétries.

Trouvons d'abord l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre invariante sous ce groupe. Nous exigeons en premier que $pr^{(2)}X_1E = pr^{(2)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y''.$$

Nous exigeons en second que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(2)}X_3E(I_1, I_2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^2 (pr^{(2)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & -x \frac{\partial E}{\partial I_1} + y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$-\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2}.$$

Ceci donne l'invariant

$$\phi = xy''.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\{xy''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'' = Cx. \tag{3.2.3}$$

Cherchons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(2)}X_1E = pr^{(2)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1},$$

$$I_4 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n).$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(2)} X_3 E(I_1, \dots, I_4) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(2)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & -x_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} - x_n \frac{\partial E}{\partial I_2} - x_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\
 & + 2 [x_{n+1}(y_{n-1} - y_n) + x_{n-1}(y_n - y_{n+1}) + x_n(y_{n+1} - y_{n-1})] \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Nous pouvons récrire l'équation (3.2.4) comme

$$-I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} - I_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} - I_3 \frac{\partial E}{\partial I_3} - 2I_4 \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{2I_4}.$$

Ceci donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

$$\phi_3 = \frac{1}{x_n^2} [(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)].$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}.$$

Par contre, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, x_n y_{xx}^{(n+1)} \right\}$$

et nous l'obtenons par la transformation suivante :

$$x_n y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_1}{\phi_1\phi_2 - 1} \left(\frac{\phi_3}{\phi_2 - 1} \frac{\phi_1}{\phi_1 - 1} \right).$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xx}^{(n+1)} &= \frac{1}{x_n} f\left(\frac{h_n}{x_n}\right) \\ h_{n+1} &= h_n g\left(\frac{h_n}{x_n}\right). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Déterminons en second lieu les équations du troisième ordre invariantes sous le groupe de symétries (3.2.1).

Débutons par déterminer l'équation différentielle du troisième ordre invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,2}$,

$$I_1 = x, \quad I_2 = y'', \quad I_3 = y''''.$$

Nous imposons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow -x \frac{\partial E}{\partial I_1} + y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} + 2y'''' \frac{\partial E}{\partial I_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$-\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{2I_3}$$

qui engendre les invariants

$$\phi_1 = xy'', \quad \phi_2 = x^2y''''.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\{xy'', x^2y''''\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y'''' = \frac{1}{x^2} F(xy''). \quad (3.2.7)$$

Poursuivons en déterminant le schéma invariant sous le même groupe. Nous demandons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,2}$,

$$I_1 = x_{n-1}, \quad I_2 = x_n, \quad I_3 = x_{n+1}, \quad I_4 = x_{n+2},$$

$$I_5 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_6 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)}X_3I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & -x_{n-1} \frac{\partial E}{\partial I_1} - x_n \frac{\partial E}{\partial I_2} - x_{n+1} \frac{\partial E}{\partial I_3} - x_{n+2} \frac{\partial E}{\partial I_4} \\ & + 2[x_{n+1}(y_{n-1} - y_n) + x_{n-1}(y_n - y_{n+1}) + x_n(y_{n+1} - y_{n-1})] \frac{\partial E}{\partial I_5} \\ & + 2[x_{n+2}(y_n - y_{n+1}) + x_n(y_{n+1} - y_{n+2}) + x_{n+1}(y_{n+2} - y_n)] \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Il est possible de récrire l'équation (3.2.8) de la façon suivante :

$$I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial E}{\partial I_3} + I_4 \frac{\partial E}{\partial I_4} + 2I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} + 2I_6 \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{I_4} = \frac{dI_5}{2I_5} = \frac{dI_6}{2I_6}.$$

Ceci donne les invariants

$$\phi_1 = \frac{x_n}{x_{n-1}}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1}}{x_n}, \quad \phi_3 = \frac{x_{n+2}}{x_{n+1}},$$

$$\phi_4 = \frac{1}{x_n^2} [(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)],$$

$$\phi_5 = \frac{1}{x_n^2} [(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})].$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{h_{n+2}}{x_n}, \frac{1}{2} (x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)}), x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} \right\}$$

et nous l'obtenons par les transformations suivantes :

$$x_n y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_1^2 \phi_4}{(\phi_1 - 1)(\phi_2 - 1)(\phi_1 \phi_2 - 1)},$$

$$x_n y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\phi_5}{\phi_2(\phi_2 - 1)(\phi_3 - 1)(\phi_2 \phi_3 - 1)},$$

$$x_n^2 y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\phi_1}{\phi_1 \phi_2 \phi_3 - 1} (x_n y_{xx}^{(n+2)} - x_n y_{xx}^{(n+1)}).$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{1}{x_n^2} f \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} (x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)}) \right) \\ h_{n+2} &= h_{n+1} g \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} (x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)}) \right). \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Voici un tableau résumant les équations invariantes sous un groupe de dimension 3 obtenues.

Groupe	Générateurs
$D_{3,1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = F(y'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = f \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right)$
Groupe	Générateurs
$D_{3,2}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = e^x F \left(\frac{y''}{e^x} \right)$	$y_{xxx}^{(n+2)} = e^{x_n} f \left(h_n, h_{n+1}, e^{-x_n} \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, e^{-x_n} \frac{y_{xx}^{(n+1)} + y_{xx}^{(n+2)}}{2} \right)$
Groupe	Générateurs
$D_{3,3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = y' F \left(\frac{y''}{y'} \right)$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_x^{(n+1)} f \left(h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g \left(h_n, h_{n+1}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1)}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1)}} \right) \right)$
Groupe	Générateurs
$D_{3,4}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = y'' F(x)$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_{xx}^{(n+2)} f(x_n, h_n, h_{n+1})$ $h_{n+2} = h_{n+1} g(x_n, h_n, h_{n+1})$

Groupe	Générateurs
$D_{3,5}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (1-a)x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad a \neq 1$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = x^{\frac{3a-2}{1-a}} F(x^{1-2a} y''^{1-a})$	équation (3.1.25)
Groupe	Générateurs
$D_{3,6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (1+x^2) \frac{\partial}{\partial x} + (x+b)y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
équation (3.1.28)	
Groupe	Générateurs
$D_{3,7}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = y''^2 F(y')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_{xx}^{(n+1)2} f\left(y_{xx}^{(n+1)} h_n, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(y_{xx}^{(n+1)} h_n, y_{xx}^{(n+1)} h_{n+1}, \frac{y_x^{(n)} + y_x^{(n+1)} + y_x^{(n+2)}}{3}\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{3,8}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = e^{-2y'} F(y'' e^{y'})$	équation (3.1.39)
Groupe	Générateurs
$D_{3,9}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = y' \frac{k-3}{k-1} F\left(\frac{y''}{y' \frac{k-2}{k-1}}\right)$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_x^{(n+1) \frac{k-3}{k-1}} f\left(\frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1) \frac{k-2}{k-1}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1) \frac{k-2}{k-1}}}\right)\right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g\left(\frac{h_n^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{h_{n+1}^{k-1}}{y_x^{(n)}}, \frac{1}{2} \left(\frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n+1) \frac{k-2}{k-1}} + \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n+1) \frac{k-2}{k-1}}}\right)\right)$
Groupe	Générateurs
$D_{3,10}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (kx+y) \frac{\partial}{\partial x} + (ky-x) \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
équation (3.1.47)	

Groupe	Générateurs
$D_{3,11}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = -\frac{3y'y''}{y} + \frac{1}{y^5} F(y^3 y'')$	
Groupe	Générateurs
$D_{3,12}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
équation (3.1.58)	
Groupe	Générateurs
$D_{3,13}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
équation (3.1.64)	
Groupe	Générateurs
$D_{3,14}$	$X_1 = (1 + x^2) \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = xy \frac{\partial}{\partial x} + (1 + y^2) \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
Groupe	Générateurs
$D_{3,15}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{3y''^2}{2y'} + y' F(x)$	$\frac{4-\rho}{2h^2} = f(x_n)$ avec un pas h constant
Groupe	Générateurs
$D_{3,16}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \phi(x) \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{\phi'''(x)}{\phi''(x)} y'' + \frac{F(x)}{\phi''(x)}$	$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{\phi_{xxx}^{(n+2)} y_{xx}^{(n+1)}}{\phi_{xx}^{(n+1)}} + \frac{1}{\phi_{xx}^{(n+1)}} f(x_n, h_n, h_{n+1})$ $h_{n+2} = h_{n+1} g(x_n, h_n, h_{n+1})$

Groupe	Générateurs
$D_{3,17}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{1}{x^2} F(xy'')$	$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{1}{x_n^2} f \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} \left(x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)} \right) \right)$ $h_{n+2} = h_{n+1} g \left(\frac{h_n}{x_n}, \frac{h_{n+1}}{x_n}, \frac{1}{2} \left(x_n y_{xx}^{(n+1)} + x_n y_{xx}^{(n+2)} \right) \right)$

Chapitre 4

ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 4 ET 6

Nous poursuivons dans ce chapitre la recherche d'équations du troisième ordre invariantes sous un groupe de symétries de dimension supérieure. Nous traitons d'abord des équations invariantes sous un groupe de dimension 4 et nous considérons ensuite des groupes de dimension 6.

4.1. ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 4

À cause de la complexité des calculs, nous ne présentons ici que quelques cas d'équations invariantes sous un groupe de symétries de dimension 4. Nous choisissons les quatre algèbres pour lesquelles O. Gat [Gat] a déterminé les équations différentielles ordinaires du troisième ordre invariantes.

• Soit

$$D_{4,3} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + ay \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.1.1)$$

Trouvons premièrement l'équation différentielle ordinaire d'ordre 3 invariante sous ce groupe de symétries. Nous demandons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{3,1}$,

$$I_1 = y'', \quad I_2 = y'''.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_4E(I_1, I_2) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^2 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a-2) y'' \frac{\partial E}{\partial I_1} + (a-3) y''' \frac{\partial E}{\partial I_2} = 0. \tag{4.1.2}
 \end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$(a-3) \frac{dI_1}{I_1} = (a-2) \frac{dI_2}{I_2}.$$

Ceci mène à l'invariant

$$\phi = \frac{y'''^{a-2}}{y''^{a-3}}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{y'''^{a-2}}{y''^{a-3}} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = C y''^{\frac{a-3}{a-2}}. \tag{4.1.3}$$

Déterminons cette fois-ci le système d'équations aux différences du troisième ordre invariant sous le même groupe de Lie. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{3,1}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = (x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n),$$

$$I_5 = (x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1}).$$

Nous demandons que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_4E(I_1, \dots, I_5) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^5 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} \\
 & + (1+a)[(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)] \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
 & + (1+a)[(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})] \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Nous pouvons récrire l'équation (4.1.4) comme

$$I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial E}{\partial I_3} + (1+a)I_4 \frac{\partial E}{\partial I_4} + (1+a)I_5 \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3} = \frac{dI_4}{(1+a)I_4} = \frac{dI_5}{(1+a)I_5}.$$

Ceci engendre les invariants

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, & \phi_2 &= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}, \\
 \phi_3 &= (x_{n+1} - x_n)^{-a-1} [(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)], \\
 \phi_4 &= (x_{n+1} - x_n)^{-a-1} [(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})].
 \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}.$$

Par contre, une base plus pratique est

$$\left\{ h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+1)}, h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+2)}, \frac{h_n}{h_{n+1}}, \frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+2) \frac{a-3}{a-2}}} \right\}$$

et nous l'obtenons par les transformations suivantes :

$$(x_{n+1} - x_n)^{-a+2} y_{xx}^{(n+1)} = \frac{-2\phi_3}{\phi_1(1 + \phi_1)}, \quad (x_{n+1} - x_n)^{-a+2} y_{xx}^{(n+2)} = \frac{-2\phi_2^2\phi_4}{1 + \phi_2},$$

$$(x_{n+1} - x_n)^{-a+3} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\phi_2}{1 + \phi_2 + \phi_1\phi_2} (x_{n+1} - x_n)^{-a+2} (y_{xx}^{(n+2)} - y_{xx}^{(n+1)}),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)}}{y_{xx}^{(n+2)} \frac{a-3}{a-2}} = \frac{\left[(x_{n+1} - x_n)^{-a+3} y_{xxx}^{(n+2)} \right]^{a-2}}{\left[(x_{n+1} - x_n)^{-a+2} y_{xx}^{(n+2)} \right]^{a-3}}.$$

Le schéma invariant est donc

$$y_{xxx}^{(n+2)} = y_{xx}^{(n+2) \frac{a-3}{a-2}} f(h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+1)}, h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+2)}) \quad (4.1.5)$$

$$h_{n+1} = D h_n.$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{4,6} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.1.6)$$

Déterminons d'abord l'équation différentielle du troisième ordre invariante sous ce groupe. Nous exigeons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas continu $D_{3,3}$,

$$I_1 = \frac{y''}{y'}, \quad I_2 = \frac{y'''}{y'}.$$

Nous demandons deuxièmement que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_4E(I_1, I_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-y''}{y'} \frac{\partial E}{\partial I_1} - \frac{2y'''}{y'} \frac{\partial E}{\partial I_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$2 \frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2}$$

qui donne l'invariant

$$\phi = \frac{y'''}{y''^2}.$$

Nous trouvons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{y'''}{y''^2} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = C \frac{y''^2}{y'}. \quad (4.1.8)$$

Cherchons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous imposons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{3,3}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_5 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_4E(I_1, \dots, I_5) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^5 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x_n - x_{n-1}) \frac{\partial E}{\partial I_1} + (x_{n+1} - x_n) \frac{\partial E}{\partial I_2} + (x_{n+2} - x_{n+1}) \frac{\partial E}{\partial I_3} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_4}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_5}$ ne se retrouvent pas dans cette équation, nous avons les invariants,

$$I_4 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_5 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{dI_2}{I_2} = \frac{dI_3}{I_3}.$$

Ceci conduit aux invariants

$$\phi_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad \phi_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_4, I_5, \phi_1, \phi_2\}.$$

Cependant, une base plus pratique est

$$\left\{ \frac{h_n}{h_{n+1}}, h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}, h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}}, \frac{y_{xxx}^{(n+2)} y_x^{(n)}}{y_{xx}^{(n+1)^2}} \right\}$$

obtenue par les transformations suivantes :

$$(x_{n+1} - x_n) \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2}{1 + \phi_1} \left(\frac{\phi_1}{I_4} - 1 \right),$$

$$(x_{n+1} - x_n) \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} = \frac{2\phi_2}{1 + \phi_2} \left(\frac{\phi_1\phi_2}{I_3 I_4} - \frac{\phi_1}{I_4} \right),$$

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{y_x^{(n)}} y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{3\phi_2}{1 + \phi_2 + \phi_1\phi_2} \left((x_{n+1} - x_n) \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} - (x_{n+1} - x_n) \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} \right),$$

$$\frac{y_{xxx}^{(n+2)} y_x^{(n)}}{y_{xx}^{(n+1)^2}} = \left((x_{n+1} - x_n) \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}} \right)^{-2} \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{y_x^{(n)}} y_{xxx}^{(n+2)}.$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned} y_{xxx}^{(n+2)} &= \frac{y_{xx}^{(n+1)^2}}{y_x^{(n)}} f \left(h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}, h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} \right) \\ h_{n+1} &= D h_n. \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

• Soit

$$\mathbf{D}_{4,9} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.1.11)$$

Cherchons en premier l'EDO du troisième ordre invariante sous ce groupe de Lie de symétries. Nous demandons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas continu $D_{3,3}$,

$$I_1 = \frac{y''}{y'}, \quad I_2 = \frac{y'''}{y'}.$$

Nous imposons ensuite que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_4E(I_1, I_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2y' \frac{\partial E}{\partial I_1} + 6y'' \frac{\partial E}{\partial I_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{1} = \frac{dI_2}{3I_1}.$$

Ceci engendre l'invariant

$$\phi = \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'^2} - \frac{y'''}{y'}.$$

Nous avons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'^2} - \frac{y'''}{y'} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'} + Cy'. \quad (4.1.13)$$

Trouvons en second le système d'équations aux différences d'ordre 3 invariant sous le même groupe de Lie. Nous demandons premièrement que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous avons les invariants calculés pour le cas discret $D_{3,3}$,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$I_4 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_5 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous exigeons deuxièmement que

$$pr^{(3)}X_4E(I_1, \dots, I_5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y_n - y_{n-1})(y_{n+1} - y_{n-1})}{y_{n+1} - y_n} \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{(y_{n+1} - y_n)(y_{n+2} - y_n)}{y_{n+2} - y_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0. \quad (4.1.14)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$, $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_3}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous obtenons les invariants,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

En divisant par $(y_{n+1} - y_n)$, nous pouvons récrire l'équation (4.1.14) de la façon suivante :

$$I_4(1 + I_4) \frac{\partial E}{\partial I_4} + (1 + I_5) \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{dI_4}{I_4(1+I_4)} = \frac{dI_5}{1+I_5}$$

qui mène à l'invariant

$$\phi = \frac{y_{n+2} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{I_1, I_2, I_3, \phi\}.$$

Considérons un pas h constant. Ceci est possible car I_1 , I_2 et I_3 sont invariants. Notre objectif est de transformer ϕ pour obtenir un schéma invariant qui tend vers l'EDO invariante lorsque $h \rightarrow 0$.

Pour y arriver, nous utilisons les développements en série de Taylor,

$$\begin{aligned} y_n &= y(x) \\ y_{n+1} &= y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + \dots \\ y_{n-1} &= y - hy' + \frac{h^2}{2}y'' - \frac{h^3}{6}y''' + \dots \\ y_{n+2} &= y + 2hy' + 2h^2y'' + \frac{4h^3}{3}y''' + \dots \end{aligned}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \phi &= 4 - 2h^2 \left(\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 \right) + O(h^3) \\ \Leftrightarrow \frac{4 - \phi}{2h^2} &= \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2 + O(h). \end{aligned}$$

Le schéma invariant est ainsi

$$\frac{4 - \phi}{2h^2} = C \tag{4.1.15}$$

avec un pas h constant.

• Soit

$$\mathbf{D}_{4,10} : \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.1.16)$$

Commençons par chercher l'équation différentielle d'ordre 3 invariante sous ce groupe de symétries. Nous imposons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas continu $D_{2,3}$,

$$\alpha_1 = y', \quad \alpha_2 = xy'', \quad \alpha_3 = x^2y'''.$$

Nous exigeons en second lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_3E(\alpha_1, \dots, \alpha_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)}X_3\alpha_i) \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & -xy'^2 \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} - xy'(3xy'' + y') \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} \\ & -x^2(3xy''^2 + 6y''y' + 4xy'''y') \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

En divisant par $-xy'$, il est possible de récrire l'équation (4.1.17) sous la forme

$$\alpha_1 \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} + (3\alpha_2 + \alpha_1) \frac{\partial E}{\partial \alpha_2} + \left(\frac{3\alpha_2^2}{\alpha_1} + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 \right) \frac{\partial E}{\partial \alpha_3} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{d\alpha_1}{\alpha_1} = \frac{d\alpha_2}{3\alpha_2 + \alpha_1} = \frac{d\alpha_3}{\frac{3\alpha_2^2}{\alpha_1} + 6\alpha_2 + 4\alpha_3}.$$

Ceci donne les invariants

$$I_1 = \frac{2xy'' + y'}{2y'^3}, \quad I_2 = \frac{x^2(-3y''^2 + y'''y')}{y'^5}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\{I_1, I_2\}.$$

Nous demandons en dernier lieu que

$$\begin{aligned} pr^{(3)}X_4E(I_1, I_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^2 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + 3I_2 \frac{\partial E}{\partial I_2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_1}{2I_1} = \frac{dI_2}{3I_2}.$$

Ceci conduit à l'invariant

$$\phi = \frac{8x^4(-3y''^2 + y'''y')^2}{y'(2xy'' + y')^3}.$$

Nous obtenons ainsi une base pour les invariants,

$$\left\{ \frac{8x^4(-3y''^2 + y'''y')^2}{y'(2xy'' + y')^3} \right\}$$

et l'équation différentielle invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2}{y'} + \frac{C}{\sqrt{y'}} \frac{(2xy'' + y')^{\frac{3}{2}}}{x^2}. \quad (4.1.19)$$

Enchaînons en déterminant le système d'équations aux différences invariant sous le même groupe de Lie de symétries. Nous imposons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{2,3}$,

$$I_1 = \frac{x_{n-1}}{x_n}, \quad I_2 = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad I_3 = \frac{x_{n+1}}{x_{n+2}},$$

$$I_4 = \frac{x_{n+2}}{y_n - y_{n-1}}, \quad I_5 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_6 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous demandons ensuite que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)} X_3 E(I_1, \dots, I_6) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^6 (pr^{(3)} X_3 I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_{n-1}(y_{n-1} - y_n)}{x_n} \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{x_n(y_n - y_{n+1})}{x_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{x_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2})}{x_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & + \frac{x_{n+2}(y_{n-1} + y_n - 2y_{n+2})}{2(y_{n-1} - y_n)} \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} - y_{n+1})}{2(y_n - y_{n+1})} \frac{\partial E}{\partial I_5} \\ & + \frac{(y_n - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}{2(y_{n+1} - y_{n+2})} \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

En divisant par $(y_{n-1} - y_n)$, nous pouvons récrire l'équation (4.1.20) comme

$$I_1 \frac{\partial E}{\partial I_1} + \frac{I_2}{I_5} \frac{\partial E}{\partial I_2} + \frac{I_3}{I_5 I_6} \frac{\partial E}{\partial I_3} - I_4 \left(\frac{I_6 + 1}{I_5 I_6} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial E}{\partial I_4} + \frac{1 + I_5}{2} \frac{\partial E}{\partial I_5} + \frac{1 + I_6}{2 I_5} \frac{\partial E}{\partial I_6} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous obtenons

$$\frac{dI_1}{I_1} = \frac{I_5}{I_2} \frac{dI_2}{I_2} = \frac{I_5 I_6}{I_3} \frac{dI_3}{I_3} = \frac{-dI_4}{I_4 \left(\frac{I_6 + 1}{I_5 I_6} + \frac{1}{2} \right)} = \frac{2}{1 + I_5} \frac{dI_5}{I_5} = \frac{2 I_5}{1 + I_6} \frac{dI_6}{I_6}$$

qui engendre les invariants

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{x_n(y_{n+1} - y_{n-1})^2}{x_{n-1}(y_{n+1} - y_n)^2}, & \phi_2 &= \frac{x_{n+1}(y_n - y_{n-1})^2}{x_n(y_{n+1} - y_{n-1})^2}, \\ \phi_3 &= \frac{(y_{n+1} - y_{n-1})(y_{n+2} - y_n)}{(y_n - y_{n-1})(y_{n+2} - y_{n+1})}, & \phi_4 &= \frac{x_{n+2}(y_{n+1} - y_{n-1})^2(y_{n+1} - y_n)^2}{x_{n+1}(y_n - y_{n-1})^2(y_{n+2} - y_{n+1})^2}, \\ \phi_5 &= \frac{x_{n+2}(y_{n+1} - y_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(y_n - y_{n-1})(y_{n+2} - y_{n+1})^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5\}.$$

Nous exigeons enfin que

$$\begin{aligned}
 & pr^{(3)}X_4E(\phi_1, \dots, \phi_5) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^5 (pr^{(3)}X_4\phi_i) \frac{\partial E}{\partial \phi_i} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{\partial E}{\partial \phi_5} = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial \phi_1}$, $\frac{\partial E}{\partial \phi_2}$, $\frac{\partial E}{\partial \phi_3}$ et $\frac{\partial E}{\partial \phi_4}$ n'apparaissent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 et ϕ_4 . De plus, l'équation (4.1.21) indique que le schéma ne dépend pas de ϕ_5 . Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}.$$

Toutefois, il n'est pas évident de construire à partir de ces invariants un schéma qui tende vers l'équation différentielle invariante (4.1.19) dans la limite continue. Nous cessons donc notre calcul à cet endroit.

4.2. ÉQUATIONS INVARIANTES SOUS UN GROUPE DE DIMENSION 6

Nous avons choisi de traiter des équations invariantes sous un groupe de symétries de dimension plus élevée, par exemple 6, afin de considérer tout de même quelques cas où nous trouvons des variétés invariantes.

• Soit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}_{6,1} : \quad & X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y} \\
 & X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_5 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6 = x \frac{\partial}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Trouvons d'abord l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre invariante

sous ce groupe. Puisque la dimension de $M \sim \{x, y, y', y'', y'''\}$ est 5 et que l'algèbre est de dimension 6, il n'y aura pas assez d'invariants pour obtenir une équation différentielle fortement invariante. Nous sommes dans une situation où nous devons plutôt trouver une variété invariante. Pour y parvenir, nous devons déterminer une surface sur laquelle le rang de la matrice Z , présentée au chapitre 1, est inférieur au rang maximal, soit 5.

Nous avons

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -(3y''^2 + 4y'y''') \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' & y''' \end{pmatrix}$$

et nous obtenons la matrice échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y'' & y''' \\ 0 & 0 & 0 & -2y'' & -3y''' \\ 0 & 0 & 0 & -3y'y'' & -(3y''^2 + 4y'y''') \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que le rang de cette matrice est 4 si $y'' = 0$. Ainsi, la variété invariante est

$$y'' = 0.$$

Toutefois, puisque cette équation est du second ordre, nous pouvons conclure qu'il n'existe pas d'équation différentielle d'ordre 3 invariante sous $D_{6,1}$.

Déterminons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries.

Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = pr^{(3)}X_4E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{4,6}$,

$$I_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}, \quad I_3 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad I_4 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_5E(I_1, \dots, I_4) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_5I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)^2} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\ & + \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}{(x_{n+2} - x_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ n'interviennent pas dans cette équation, nous avons déjà les invariants,

$$\phi_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

En multipliant par $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$, nous pouvons récrire l'équation (4.2.2) comme

$$(I_1 - I_3) \frac{\partial E}{\partial I_3} + \left(I_4 - \frac{I_4^2}{I_2} \right) \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_3}{I_1 - I_3} = \frac{dI_4}{I_4 - \frac{I_4^2}{I_2}}.$$

Ceci donne l'invariant

$$\phi_3 = \frac{[(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)] (y_{n+2} - y_{n+1})}{[(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})] (y_{n+1} - y_n)}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)} X_6 E(\phi_1, \dots, \phi_3) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)} X_6 \phi_i) \frac{\partial E}{\partial \phi_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & - \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(y_{n+1} - y_n)^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} \\
& - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}{(y_{n+2} - y_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} \\
& + \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(y_{n+1} - y_n)^2} \frac{\partial E}{\partial \phi_3} = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

En divisant par $\frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(y_{n+1} - y_n)^2}$, nous pouvons récrire l'équation (4.2.3) comme

$$-\frac{\partial E}{\partial \phi_1} - \frac{\phi_2}{\phi_3} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} + \frac{\partial E}{\partial \phi_3} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$-d\phi_1 = -\frac{\phi_3}{\phi_2} d\phi_2 = d\phi_3.$$

Ceci donne les invariants

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{x_{n+2}(y_{n-1} - y_n) + x_{n+1}(y_n - y_{n-1}) + (x_{n-1} - x_n)(y_{n+1} - y_{n+2})}{x_{n+2}(y_n - y_{n+1}) + x_n(y_{n+1} - y_{n+2}) + x_{n+1}(y_{n+2} - y_n)}, \\
\rho_2 &= \frac{x_{n+1}(y_n - y_{n-1}) + x_n(y_{n-1} - y_{n+1}) + x_{n-1}(y_{n+1} - y_n)}{x_{n+2}(y_{n+1} - y_n) + x_{n+1}(y_n - y_{n+2}) + x_n(y_{n+2} - y_{n+1})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\rho_1, \rho_2\}.$$

Le schéma invariant est donc

$$\begin{aligned}\rho_1 &= C_1 \\ \rho_2 &= C_2,\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

• Soit

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{6,2} : \quad X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= y \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_4 &= x \frac{\partial}{\partial x}, & X_5 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x}, & X_6 &= y^2 \frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

Cherchons en premier l'EDO du troisième ordre invariante sous ce groupe. Puisque ici aussi la dimension de M qui est 5 est inférieure à celle de l'algèbre qui est 6, nous devons trouver une variété invariante. Pour y parvenir, nous devons déterminer une surface sur laquelle le rang de la matrice Z est inférieur au rang maximal, soit 5.

Nous avons

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y' & y'' & y''' \\ 0 & y^2 & 2yy' & 2yy'' + 2y'^2 & 2yy''' + 6y''y' \\ x & 0 & -y' & -2y'' & -3y''' \\ x^2 & 0 & -2xy' & -(4xy'' + 2yy') & -(6y'' + 6xy''') \end{pmatrix}$$

et nous obtenons la matrice échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y''}{y'} & \frac{y'''}{y'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3y''}{y'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2y''' + \frac{3y''^2}{y'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que le rang de cette matrice est 4 si $-2y''' + \frac{3y''^2}{y'} = 0$. Ainsi, la variété invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2}{2y'}.$$

Trouvons en second le schéma invariant sous le même groupe de Lie de symétries. Nous exigeons en premier lieu que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = pr^{(3)}X_4E = 0$ et nous trouvons les invariants calculés pour le cas discret $D_{4,6}$,

$$I_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}, \quad I_3 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad I_4 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}.$$

Nous imposons en second lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)}X_5E(I_1, \dots, I_4) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^4 (pr^{(3)}X_5I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x_n - x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n+1})}{x_{n+1} - x_n} \frac{\partial E}{\partial I_3} + \frac{(x_{n+1} - x_n)(x_n - x_{n+2})}{x_{n+2} - x_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0. \quad (4.2.6) \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial E}{\partial I_2}$ ne se retrouvent pas dans cette équation, nous obtenons déjà les invariants,

$$\phi_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad \phi_2 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

En divisant par $(x_{n+1} - x_n)$, nous pouvons récrire l'équation (4.2.6) comme

$$I_3(I_3 + 1) \frac{\partial E}{\partial I_3} + (I_4 + 1) \frac{\partial E}{\partial I_4} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\frac{dI_3}{I_3(I_3 + 1)} = \frac{dI_4}{I_4 + 1}.$$

Ceci donne l'invariant

$$\phi_3 = \frac{(x_{n-1} - x_{n+1})(x_n - x_{n+2})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n+2})}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}.$$

Nous exigeons en troisième lieu que

$$\begin{aligned} & pr^{(3)} X_6 E(\phi_1, \dots, \phi_3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{i=1}^3 (pr^{(3)} X_6 \phi_i) \frac{\partial E}{\partial \phi_i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(y_{n-1} - y_n)(y_{n-1} - y_{n+1})}{y_n - y_{n+1}} \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + \frac{(y_n - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}{y_{n+1} - y_{n+2}} \frac{\partial E}{\partial \phi_2} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Puisque $\frac{\partial E}{\partial \phi_3}$ n'apparaît pas dans cette équation, nous avons l'invariant,

$$\rho_1 = \frac{(x_{n-1} - x_{n+1})(x_n - x_{n+2})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n+1} - x_{n+2})}.$$

En divisant par $(y_{n+1} - y_n)$, nous pouvons récrire l'équation (4.2.7) comme

$$\phi_1(\phi_1 + 1) \frac{\partial E}{\partial \phi_1} + (\phi_2 + 1) \frac{\partial E}{\partial \phi_2} = 0.$$

Par la méthode des caractéristiques, nous écrivons

$$\frac{d\phi_1}{\phi_1(\phi_1 + 1)} = \frac{d\phi_2}{\phi_2 + 1}$$

qui engendre l'invariant

$$\rho_2 = \frac{(y_{n-1} - y_{n+1})(y_n - y_{n+2})}{(y_{n-1} - y_n)(y_{n+1} - y_{n+2})}.$$

Ainsi, une base pour les invariants est

$$\{\rho_1, \rho_2\}.$$

Le schéma invariant est donc

$$\rho_1 = C_1 \tag{4.2.8}$$

$$\rho_2 = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes.

• Soit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{6,3} : \quad X_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, & (4.2.9) \\ X_4 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, & X_5 &= (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y}, \\ X_6 &= 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Notons que dans l'espace des nombres complexes, ce groupe de symétries réalise la même algèbre que celle réalisée par $D_{6,2}$. Par contre, dans l'espace des nombres réels, ces deux algèbres sont distinctes.

Trouvons d'abord l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre invariante sous ce groupe. Nous sommes encore une fois dans la situation où la dimension

de M est inférieure à celle de l'algèbre. Nous devons ainsi trouver une surface sur laquelle le rang de la matrice Z est inférieur au rang maximal, soit 5.

En échelonnant Z , nous obtenons la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3y''y'}{1+y'^2} & \frac{3y''^2+4y''y'''}{1+y'^2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2y'''}{y''} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3y''^2y' + y'' + y'^2y''' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que le rang de cette matrice est 4 si $-3y''^2y' + y'' + y'^2y''' = 0$. Ainsi, la variété invariante est

$$y''' = \frac{3y''^2y'}{1+y'^2}.$$

Déterminons maintenant le schéma invariant sous le même groupe de symétries. Nous exigeons d'abord que $pr^{(3)}X_1E = pr^{(3)}X_2E = pr^{(3)}X_3E = 0$ et nous obtenons les invariants calculés pour le cas discret $D_{3,7}$,

$$I_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n+1} - x_n}, \quad I_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+2} - x_{n+1}}, \quad I_3 = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_n - y_{n-1}},$$

$$I_4 = \frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n+1} - y_n}, \quad I_5 = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}}.$$

Nous exigeons ensuite que

$$\begin{aligned}
& pr^{(3)}X_4E(I_1, \dots, I_5) = 0 \\
\Leftrightarrow & \sum_{i=1}^5 (pr^{(3)}X_4I_i) \frac{\partial E}{\partial I_i} = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(x_{n+1} - x_n)^2} \frac{\partial E}{\partial I_1} \\
& + \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}{(x_{n+2} - x_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial I_2} \\
& + \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(x_n - x_{n-1}) + (y_{n+2} - y_{n+1})(y_n - y_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})^2} \frac{\partial E}{\partial I_3} \\
& + \frac{(x_{n+1} - x_n)(y_n - y_{n-1}) - (x_n - x_{n-1})(y_{n+1} - y_n)}{(y_{n+1} - y_n)^2} \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
& + \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})(y_{n+1} - y_n) - (x_{n+1} - x_n)(y_{n+2} - y_{n+1})}{(y_{n+2} - y_{n+1})^2} \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

En multipliant par $\frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{(x_{n+1}-x_n)(y_{n+1}-y_n)}$, nous pouvons récrire l'équation (4.2.10) comme

$$\begin{aligned}
(I_4 - I_1) \frac{\partial E}{\partial I_1} + I_2^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_5} \right) \frac{\partial E}{\partial I_2} + I_2^2 I_3^2 \left(I_1 I_3 I_4 - \frac{1}{I_2 I_3 I_5} \right) \frac{\partial E}{\partial I_3} + I_2^2 I_3^2 I_4^2 (I_4 - I_1) \frac{\partial E}{\partial I_4} \\
+ I_2^2 I_3^2 I_4^2 I_5^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_5} \right) \frac{\partial E}{\partial I_5} = 0.
\end{aligned}$$

Par la méthode des caractéristiques, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{dI_1}{I_4 - I_1} &= \frac{dI_2}{I_2^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_5} \right)} = \frac{dI_3}{I_2^2 I_3^2 \left(I_1 I_3 I_4 - \frac{1}{I_2 I_3 I_5} \right)} = \frac{dI_4}{I_2^2 I_3^2 I_4^2 (I_4 - I_1)} \\
&= \frac{dI_5}{I_2^2 I_3^2 I_4^2 I_5^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_5} \right)}.
\end{aligned}$$

Nous arrêtons toutefois notre calcul ici puisqu'il est difficile de résoudre ces équations.

Voici un tableau résumant les équations invariantes sous un groupe de dimension 4 et 6 obtenues.

Groupe	Générateurs
$D_{4,3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x} + ay \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = C y''^{\frac{a-3}{a-2}}$	$y_{xxx}^{(n+2)} = y_{xx}^{(n+2) \frac{a-3}{a-2}} f \left(h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+1)}, h_{n+1}^{2-a} y_{xx}^{(n+2)} \right)$ $h_{n+1} = D h_n$
Groupe	Générateurs
$D_{4,6}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = C \frac{y''^2}{y'}$	$y_{xxx}^{(n+2)} = \frac{y_{xx}^{(n+1)2}}{y_x^{(n)}} f \left(h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+1)}}{y_x^{(n)}}, h_{n+1} \frac{y_{xx}^{(n+2)}}{y_x^{(n)}} \right)$ $h_{n+1} = D h_n$
Groupe	Générateurs
$D_{4,9}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'} + C y'$	$\frac{4-\phi}{2h^2} = C$ avec un pas h constant
Groupe	Générateurs
$D_{4,10}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}$
EDO invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{3y''^2}{y'} + \frac{C}{\sqrt{y'}} \frac{(2xy'' + y')^{\frac{3}{2}}}{x^2}$	

Groupe	Générateurs
$D_{6,1}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}$ $X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = x \frac{\partial}{\partial y}$
EDO invariante	Schéma invariant
aucune	équation (4.2.4)
Groupe	Générateurs
$D_{6,2}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = x^2 \frac{\partial}{\partial x}, X_6 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$
Variété invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{3y''^2}{2y'}$	équation (4.2.8)
Groupe	Générateurs
$D_{6,3}$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$ $X_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, X_5 = (x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xy \frac{\partial}{\partial y},$ $X_6 = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2) \frac{\partial}{\partial y}$
Variété invariante	Schéma invariant
$y''' = \frac{3y''^2 y'}{1+y'^2}$	

Chapitre 5

EXEMPLES NUMÉRIQUES

Nous présentons dans ce dernier chapitre quelques exemples numériques de solutions d'équations différentielles ordinaires. Notre intention est d'étudier la précision de schémas qui préservent les symétries de l'équation différentielle ordinaire à résoudre. Nous souhaitons savoir si ces schémas possédant une propriété particulière offrent un certain avantage. Mentionnons que le lien que nous tentons d'établir ici entre l'algèbre et l'analyse numérique en est à ses débuts. Malgré qu'une classification des schémas invariants d'ordre deux ait été publiée récemment [DKW], très peu d'essais numériques depuis ont été effectués. C'est pour cette raison que nous présentons à la fois des exemples du deuxième et du troisième ordre.

5.1. EXEMPLES DE SCHÉMAS DU DEUXIÈME ORDRE

Dans le cas des équations aux différences finies du deuxième ordre, le modèle considéré en est un à trois points, (x_{n-1}, y_{n-1}) , (x_n, y_n) et (x_{n+1}, y_{n+1}) . À partir de ces trois points, nous pouvons créer les formules des dérivées discrètes de la façon suivante :

posons

$$h_- = x_n - x_{n-1}$$

$$h_+ = x_{n+1} - x_n.$$

Les premières dérivées sont

$$y_x^- = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_-}$$

$$y_x^+ = \frac{y_{n+1} - y_n}{h_+}.$$

La deuxième dérivée est

$$y_{x-x^+} = \frac{2}{h_+ + h_-} \left(\frac{y_{n+1} - y_n}{h_+} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_-} \right).$$

5.1.1. Exemple 1

Le premier exemple numérique que nous présentons concerne l'équation différentielle ordinaire linéaire du second ordre,

$$y'' = y. \quad (5.1.1)$$

La discrétisation de cette équation selon la préservation de ses symétries fut effectuée par D. Levi, S. Tremblay et P. Winternitz en 2000 [LTW]. Comme toutes les EDO linéaires, l'équation (5.1.1) demeure invariante sous $SL(3, \mathbb{R})$ avec une algèbre de Lie réalisée par le groupe de symétries suivant :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = e^x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = e^{-x} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_5 = e^{2x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad X_6 = ye^x \left(\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$X_7 = e^{-2x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad X_8 = ye^{-x} \left(\frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

En considérant la sous-algèbre $\{X_1, \dots, X_6\}$, la prolongation discrète du deuxième ordre n'accorde aucun invariant. Cependant, elle accorde la variété invariante

$$I = y_n e^{-x_n} (e^{-2x_{n+1}} - e^{-2x_{n-1}}) + y_{n+1} e^{-x_{n+1}} (e^{-2x_{n-1}} - e^{-2x_n}) \quad (5.1.2)$$

$$+ y_{n-1} e^{-x_{n-1}} (e^{-2x_n} - e^{-2x_{n+1}}) = 0$$

et l'expression

$$S = \frac{e^{-2x_n} - e^{-2x_{n-1}}}{e^{-2x_{n+1}} - e^{-2x_n}}$$

est un invariant sur la variété (5.1.2). Nous obtenons alors un schéma qui préserve toutes les solutions avec

$$I = 0, \quad (5.1.3)$$

$$S = C, \quad \text{où } C \text{ est une constante.} \quad (5.1.4)$$

Dans un premier temps, étudions le maillage donné par l'équation (5.1.4). En posant

$$h_- = x_n - x_{n-1},$$

$$h_+ = x_{n+1} - x_n,$$

nous avons

$$\frac{e^{-2x_n} - e^{-2(x_n - h_-)}}{e^{-2(x_n + h_+)} - e^{-2x_n}} = C$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{2h_-} = c(e^{-2h_+} - 1). \quad (5.1.5)$$

Ceci nous permet d'écrire une relation pour h_+ en fonction de h_- ,

$$h_+ = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - e^{2h_-}}{C} + 1 \right).$$

Ainsi, pour que h_+ soit positif, il faut que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1 - e^{2h_-}}{C} + 1 < 1 \\ \Leftrightarrow -1 &< \frac{1 - e^{2h_-}}{C} < 0. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Comme $h_- > 0$, nous avons que $e^{2h_-} > 1$ et que C doit être strictement positif. Donc la condition (5.1.6) est en fait,

$$\begin{aligned} -1 &< \frac{1 - e^{2h_-}}{C} \\ \Leftrightarrow h_- &> \frac{\ln(C + 1)}{2}. \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

De plus, une autre difficulté s'impose car la relation de h_+ en fonction de h_- est décroissante. Il existe alors un pas tel que $h_- < \frac{\ln(C+1)}{2}$. Il faut donc faire un bon

choix de C et de h initial afin de parcourir complètement un intervalle d'intégration donné.

Notre objectif est de comparer le schéma formé des équations (5.1.3) et (5.1.4) avec le schéma centré standard que nous mentionnons plus loin. Afin d'effectuer cette comparaison, nous devons prendre h constant. Toutefois, vérifions si le maillage (5.1.4) est compatible avec un maillage équidistant.

Supposons que $h_- = h_+ = h$. L'équation (5.1.5) donne alors,

$$\begin{aligned} 1 - e^{2h} &= C (e^{-2h} - 1) \\ \Leftrightarrow C e^{-2h} + e^{2h} &= C + 1 \\ \Leftrightarrow h &= \frac{\ln C}{2}. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

De ce fait, nous pouvons dire que le maillage (5.1.4) permet un pas constant h et qu'il vaut $\frac{\ln C}{2}$. Cependant, dans cette situation, nous avons une condition supplémentaire sur C . Puisque h doit être strictement positif, C doit non seulement être strictement positif comme précédemment, mais bien strictement supérieur à 1.

Dans un deuxième temps, discutons de l'équation aux différences finies qui constitue le schéma. Le modèle de comparaison sera le schéma centré suivant :

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = y_n.$$

Simplifions maintenant l'équation (5.1.3) en considérant le pas h constant. Il suffit de prendre $x_n = x_0 + nh$ où x_0 est la borne inférieure de l'intervalle d'intégration et n est le nombre de pas effectués.

Nous obtenons comme schéma simplifié,

$$y_{n+1} - (e^{-h} + e^h) y_n + y_{n-1} = 0. \tag{5.1.9}$$

Par contre, il est intéressant de transformer ce schéma sous une forme comparative à celle du schéma centré. Nous pouvons récrire le schéma (5.1.9) comme

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} = 2 \left(\frac{\cosh h - 1}{h^2} \right) y_n.$$

Ainsi, la différence que nous remarquons est le coefficient de y_n dans le membre de droite de l'équation.

Notons que la solution exacte de l'EDO (5.1.1) est

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

avec c_1 et c_2 des constantes arbitraires.

Toutefois, nous remarquons que si nous remplaçons la solution exacte dans l'équation (5.1.9), le schéma est vérifié. Ceci implique que l'erreur de troncature locale, c'est-à-dire la quantité par laquelle la solution exacte est en défaut de satisfaire le schéma, est 0. Ainsi, l'ordre de précision est infinie, ce qui veut dire que si nous travaillions avec une arithmétique infinie, le schéma donnerait la solution exacte. Cependant, dans le contexte numérique, la précision de l'ordinateur n'est pas infinie. Il serait donc intéressant d'étudier si les erreurs d'arrondi faites par la machine croissent à un point tel que la solution numérique s'éloigne considérablement de la solution exacte.

À partir d'une équation différentielle à résoudre, il existe plusieurs problèmes numériques que l'on peut considérer. Il y a, par exemple, le problème aux conditions initiales qui consiste à spécifier deux points exacts de départ (x_0, y_0) et (x_1, y_1) . Il est aussi possible de considérer un autre problème aux valeurs initiales reflétant davantage la réalité des problèmes physiques. Il s'agit de spécifier comme amorce le point (x_0, y_0) ainsi que y'_0 , la dérivée en x_0 . Enfin, nous pouvons considérer le problème aux frontières consistant à résoudre numériquement lorsque (x_0, y_0) et (x_L, y_L) , les deux points aux bords de l'intervalle d'intégration sont donnés.

Pour effectuer les essais numériques, nous avons choisi $y(x) = e^{-x} + e^x$ comme solution exacte avec x dans $[0,2]$.

Commençons par le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$. Nous prenons

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 2 \\ x_1 &= h, & y_1 &= e^{-h} + e^h. \end{aligned}$$

Voici les graphiques des erreurs absolues pour différents h avec une échelle logarithmique.

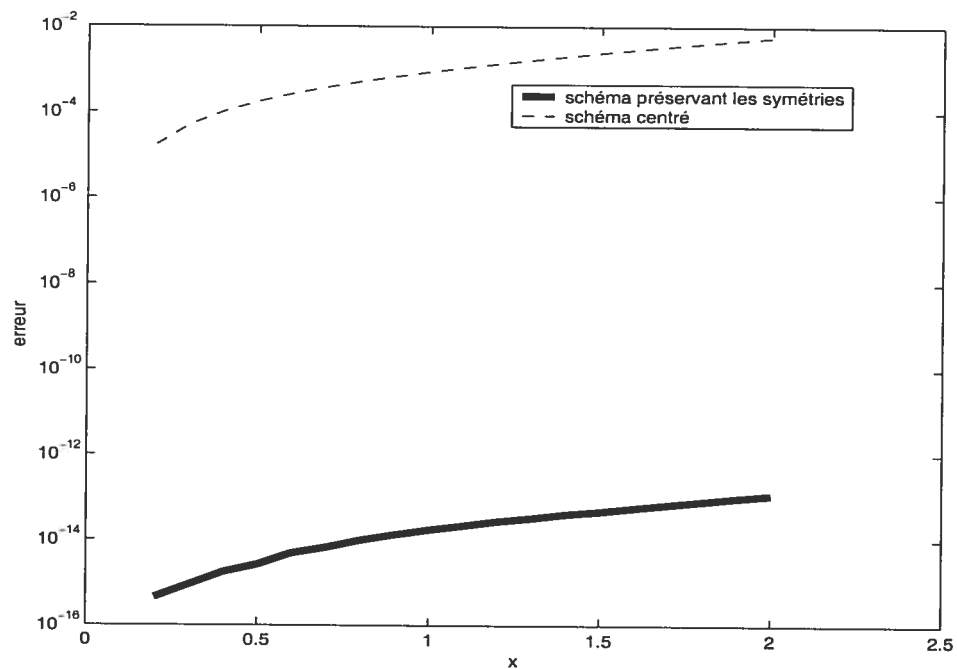


FIG. 5.1.1. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.1$.

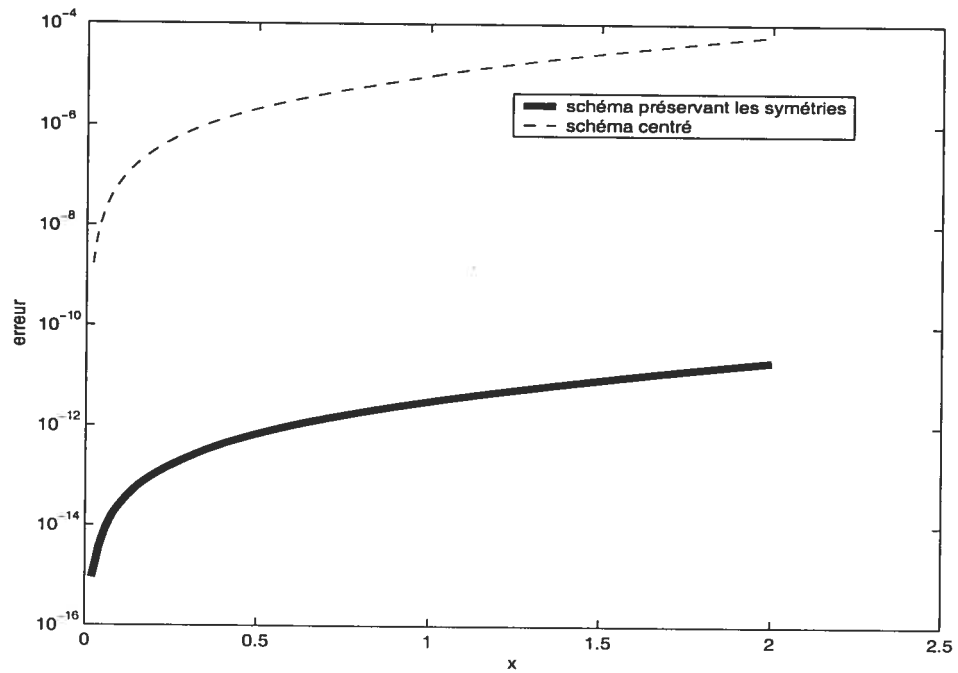


FIG. 5.1.2. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.01$.

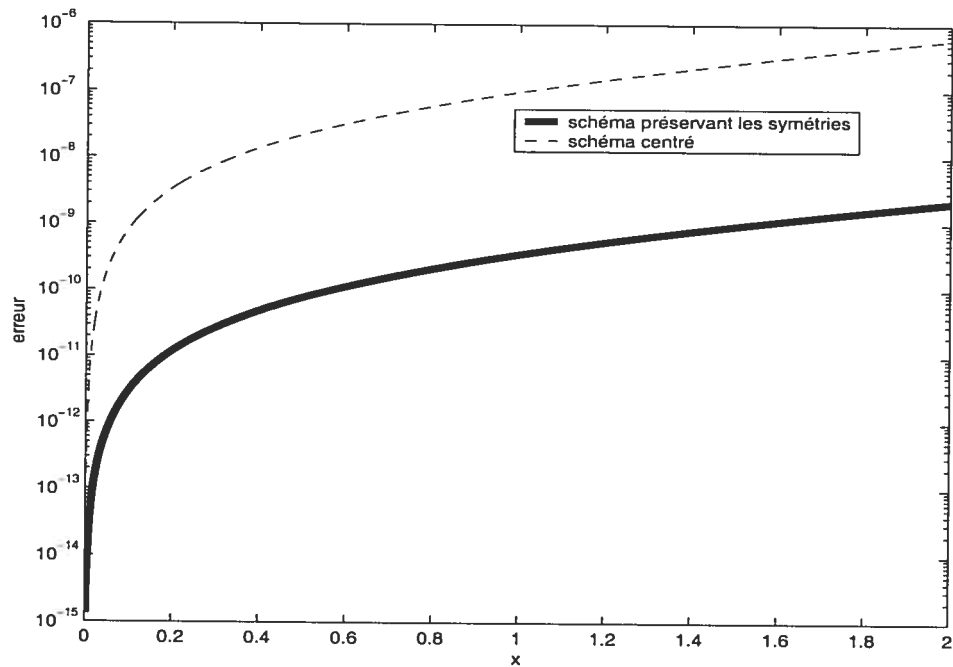


FIG. 5.1.3. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$ avec $h=0.001$.

D'abord, nous observons que l'erreur du schéma qui préserve les symétries n'est pas tout à fait nulle lorsque nous regardons les graphiques des erreurs avec une échelle logarithmique. Ainsi, il y a donc des erreurs d'arrondi qui s'accumulent. En effet, lorsque h est divisé par 10, l'erreur de ce schéma est multipliée par 100. Ensuite, nous remarquons que l'erreur du schéma centré est supérieure à celle du schéma (5.1.9). Le schéma obtenu par la théorie de Lie semble alors avoir un certain avantage au niveau de la précision. Nous notons que plus h diminue, plus les deux courbes d'erreurs se rapprochent. Ce comportement est tout à fait sensé puisque lorsque le nombre de pas à effectuer devient grand, l'erreur de discrétisation du schéma diminue et l'erreur d'arrondis du schéma invariant augmente. De plus, comme l'erreur absolue du schéma standard est 100 fois moins grande lorsque h est divisé par 10, nous avons que l'ordre de convergence de ce schéma est 2.

Enchaînons avec le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$. Pour commencer le schéma nous faisons l'approximation suivante :

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + y'(x_0)h$$

Nous prenons

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 2 \\ x_1 &= h, & y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Voici les graphiques des erreurs absolues pour différents h avec une échelle standard.

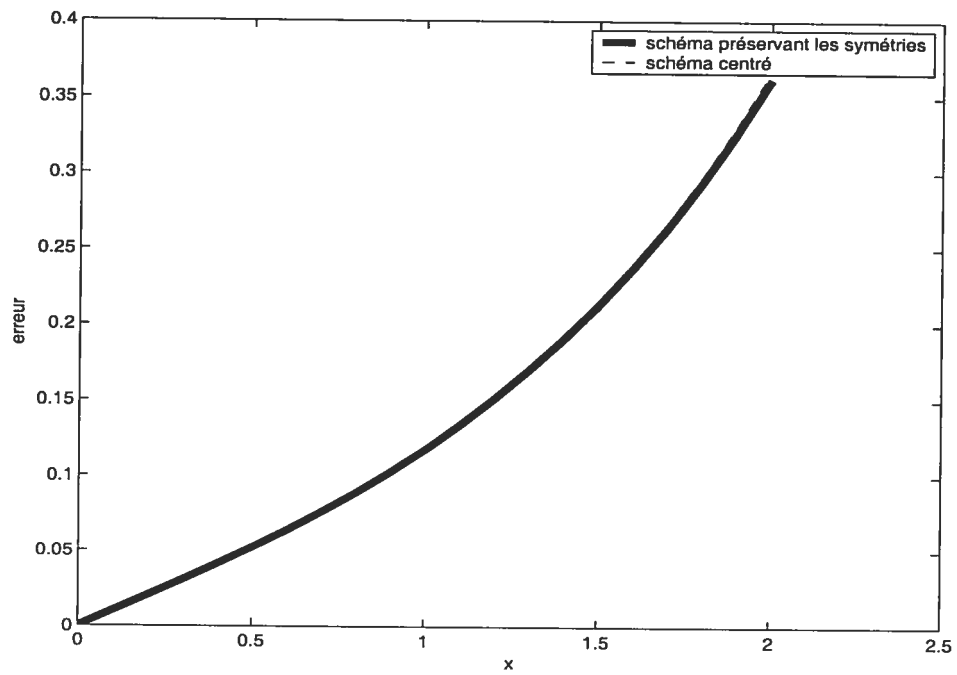


FIG. 5.1.4. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.1$.

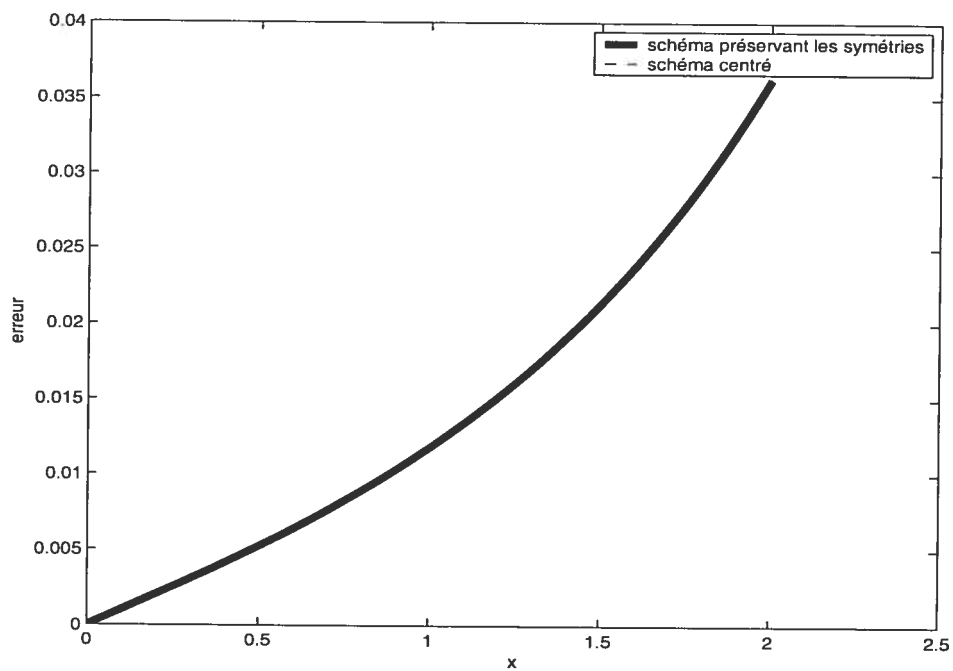


FIG. 5.1.5. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.01$.

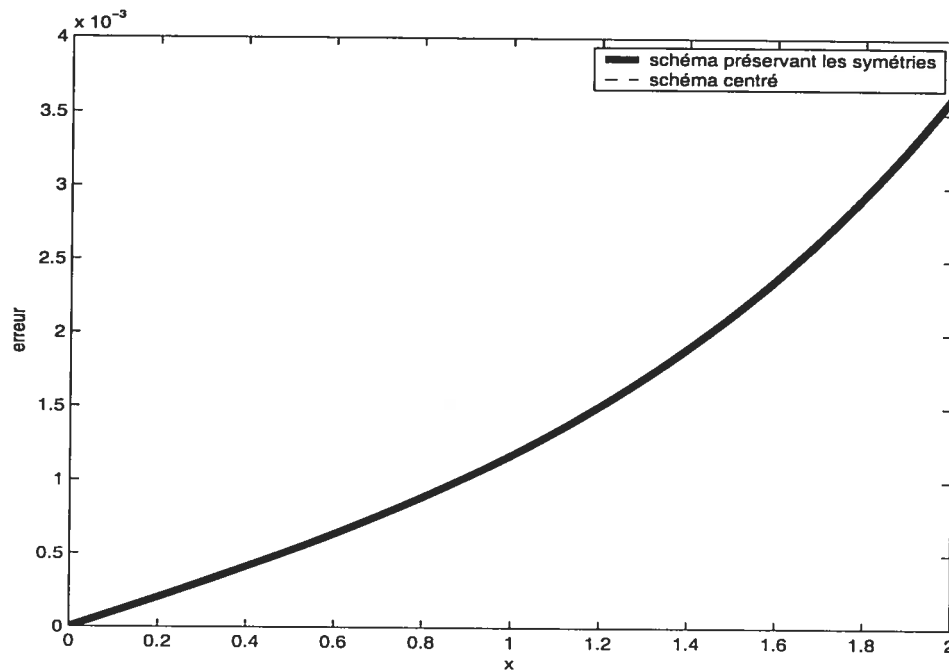


FIG. 5.1.6. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ avec $h=0.001$.

Nous remarquons d'abord que les deux courbes des erreurs coïncident presque peu importe le pas h . Ces graphiques semblent malgré tout raisonnables puisque l'erreur décroît lorsque h diminue. Nous constatons ensuite que pour ce problème, contrairement au problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y_1\}$, l'ordre de convergence des deux schémas est 1. En effet, si h devient 10 fois plus petit, l'erreur est aussi diminuée de ce même facteur. Ceci s'explique par le fait que pour estimer $y(x_1)$, nous avons utilisé une approximation d'ordre 1. C'est cette erreur commise au début de la procédure qui domine dictant ainsi l'ordre des schémas. Ces résultats indiquent tout simplement que la façon par laquelle nous avons estimé $y(x_1)$ dans le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ s'avère inadéquate en vertu de la grande erreur qui est commise.

Terminons avec le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$. Nous prenons

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 2 \\ x_{n+1} &= 2, & y_{n+1} &= e^{-2} + e^2. \end{aligned}$$

Voici les graphiques des erreurs absolues pour différents h avec une échelle logarithmique.

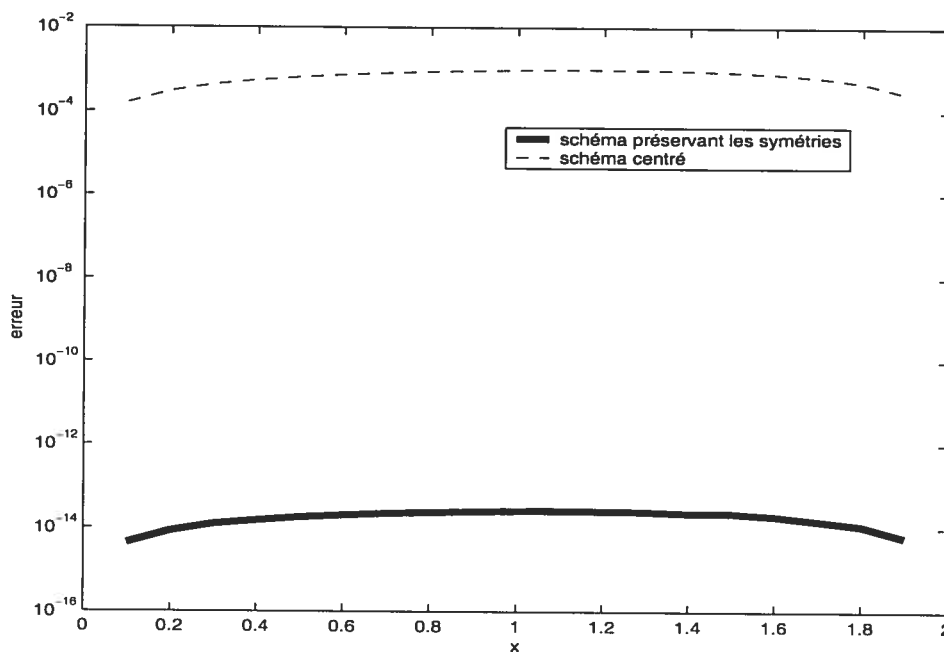


FIG. 5.1.7. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.1$.

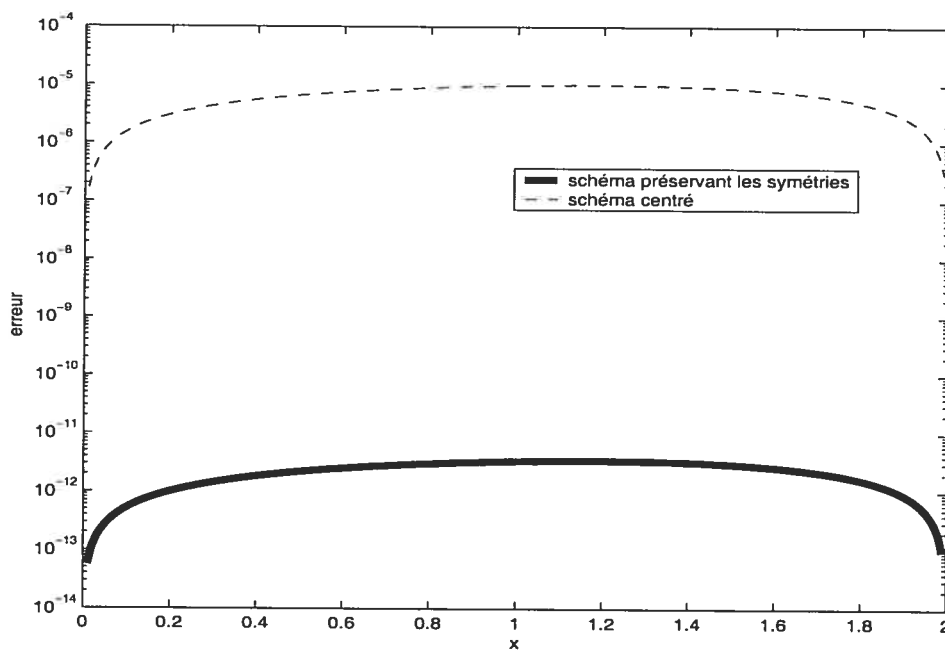


FIG. 5.1.8. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.01$.

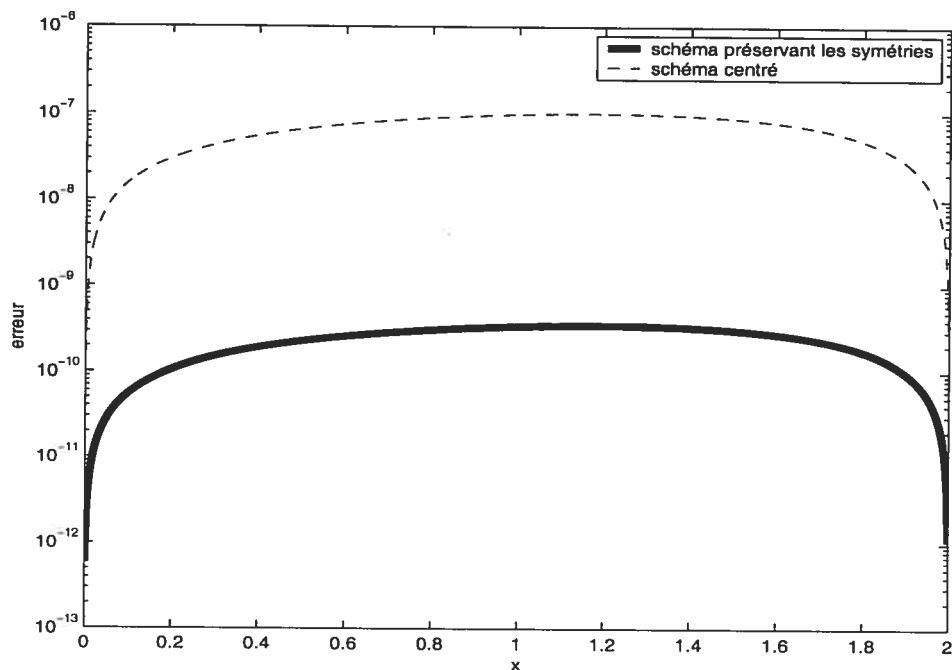


FIG. 5.1.9. Erreurs absolues pour le problème aux valeurs aux frontières $\{x_0, y_0, x_L, y_L\}$ avec $h=0.001$.

Premièrement, nous notons par les graphiques des erreurs avec une échelle logarithmique que l'erreur du schéma préservant les symétries n'est pas nulle. Il y a donc une accumulation d'erreurs d'arrondis car l'erreur de ce schéma augmente de 100 fois lorsque h diminue d'un facteur 10. Deuxièmement, nous observons que l'erreur du schéma préservant les symétries est inférieure à l'erreur du schéma centré et que, encore une fois, les deux courbes des erreurs s'approchent lorsque h décroît. Troisièmement, nous remarquons que l'erreur du schéma habituel est divisée par 100 lorsque h diminue d'un facteur de 10. Par conséquent, l'ordre de convergence de cette méthode numérique est 2.

En résumé pour ce premier exemple, nous obtenons que le schéma (5.1.9) offre une erreur absolue inférieure à celle du schéma centré standard. Nous laisserons tomber la comparaison pour le problème aux valeurs initiales $\{x_0, y_0, x_1, y'(x_0)\}$ puisque l'erreur est dominée par la mauvaise approximation effectuée au départ. Nous pouvons donc dire que le schéma préservant les symétries est plus précis que le schéma habituel. Évidemment, la solution exacte satisfait le schéma invariant,

alors il est raisonnable d'arriver à cette conclusion.

5.1.2. Exemple 2

Construisons un exemple moins trivial que le précédent. Prenons l'équation différentielle ordinaire du 2^e ordre,

$$u'' = u'^{\frac{k-2}{k-1}}, \quad \text{avec } k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$$

Modifions cette équation en une autre moins évidente que nous considérerons comme l'équation initiale. Nous appliquons la transformation $(t, u) \rightarrow (x, y)$ avec

$$\begin{cases} u = x^2 y \\ t = x \end{cases}$$

pour obtenir l'équation suivante à résoudre :

$$y''x^2 + 4xy' + 2y = (2xy + x^2y')^{\frac{k-2}{k-1}}, \quad \text{avec } k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2. \quad (5.1.10)$$

Le groupe de Lie de symétries de cette équation est

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2y}{x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (k-2)y \frac{\partial}{\partial y}$$

Nous obtenons comme invariants discrets,

$$I_1 = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}, \quad I_2 = \frac{x_{n+1}^2 y_{n+1} - x_n^2 y_n}{(x_{n+1} - x_n)^k}, \quad I_3 = \frac{x_n^2 y_n - x_{n-1}^2 y_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})^k}.$$

Enfin, les équations aux différences finies peuvent s'écrire comme deux fonctions des invariants de cette façon,

$$I_2 - I_3 = \left(\frac{I_2 + I_3}{2} \right)^{\frac{k-2}{k-1}}$$

$$I_1 = 1.$$

En terme des variables de départ, ce schéma devient

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 y_{n+1} - 2x_n^2 y_n + x_{n-1}^2 y_{n-1} & \quad (5.1.11) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k-2}{k-1}} h^{\frac{k}{k-1}} (x_{n+1}^2 y_{n+1} - x_{n-1}^2 y_{n-1})^{\frac{k-2}{k-1}} \\ x_{n+1} - x_n &= x_n - x_{n-1} \end{aligned}$$

Nous souhaitons comparer le schéma (5.1.11) avec le schéma standard

$$\frac{(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})}{h^2} x_n^2 + 2x_n \frac{(y_{n+1} - y_{n-1})}{h} + 2y_n = \left(2x_n y_n + x_n^2 \frac{(y_{n+1} - y_{n-1})}{2h}\right)^{\frac{k-2}{k-1}}$$

muni d'un pas constant h .

Remarquons d'abord que la deuxième équation du schéma (5.1.11) nous indique que le maillage est aussi équidistant. Posons le pas égal à h . Nous pourrions ainsi mieux comparer ce schéma avec le schéma aux différences centrées. Notons ensuite que ce sont des schémas implicites non linéaires. Ils demandent ainsi beaucoup de travail en ayant à résoudre une équation non linéaire à chaque pas.

Afin de calculer l'erreur commise par chacun des schémas, nous devons comparer la solution numérique avec la solution exacte de l'équation (5.1.10). Cette solution est de la forme

$$y(x) = \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} \frac{1}{x^{2k}} (x-x_0)^k + \frac{u_0}{x^2}$$

Pour cet exemple, choisissons $k=3$, $x_0=0$ et $u_0=0$. Ainsi, nous avons

$$y(x) = \frac{x}{12} + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

comme solution exacte de l'EDO du deuxième ordre,

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = (2xy + x^2 y')^{\frac{1}{2}}.$$

Prenons $[1,3]$ comme intervalle d'intégration. De plus, pour amorcer les schémas, nous devons connaître les deux premiers points de la solution numérique, soient

(x_0, y_0) et (x_1, y_1) .

Choisissons

$$x_0 = 1, \quad y_0 = y(1) = \frac{13}{12},$$

$$x_1 = 1 + h, \quad y_1 = y(1 + h) = \frac{1 + h}{12} + \frac{1}{(1 + h)^2}.$$

Voici les graphiques des erreurs absolues pour différents h .

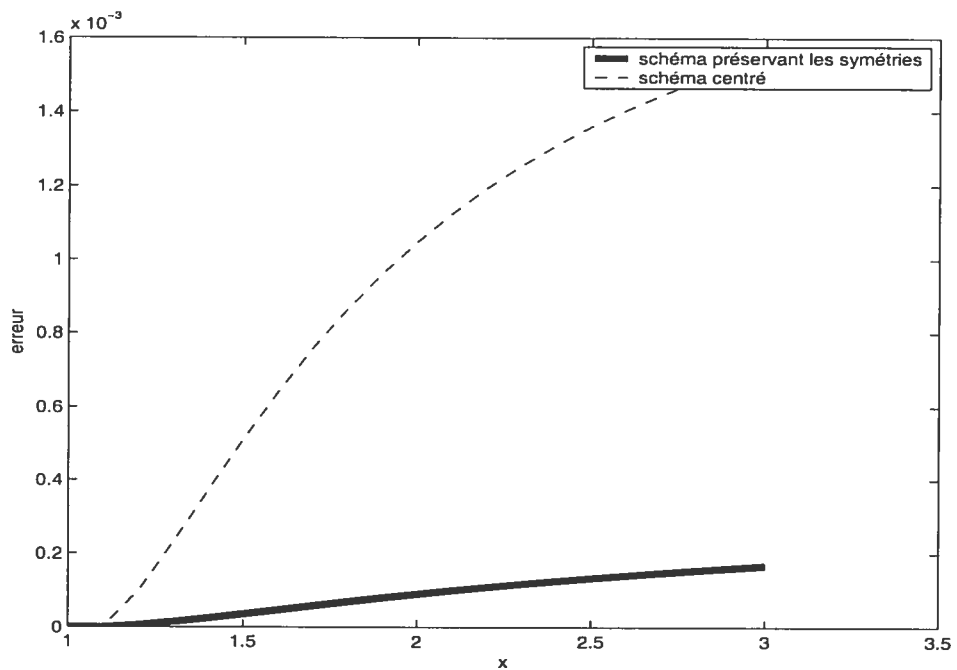
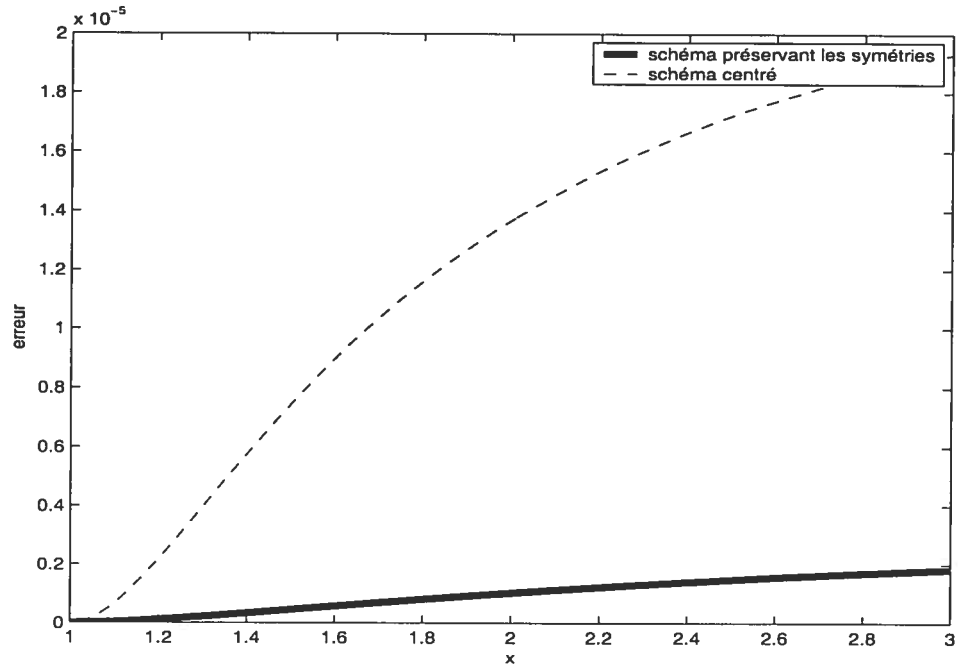
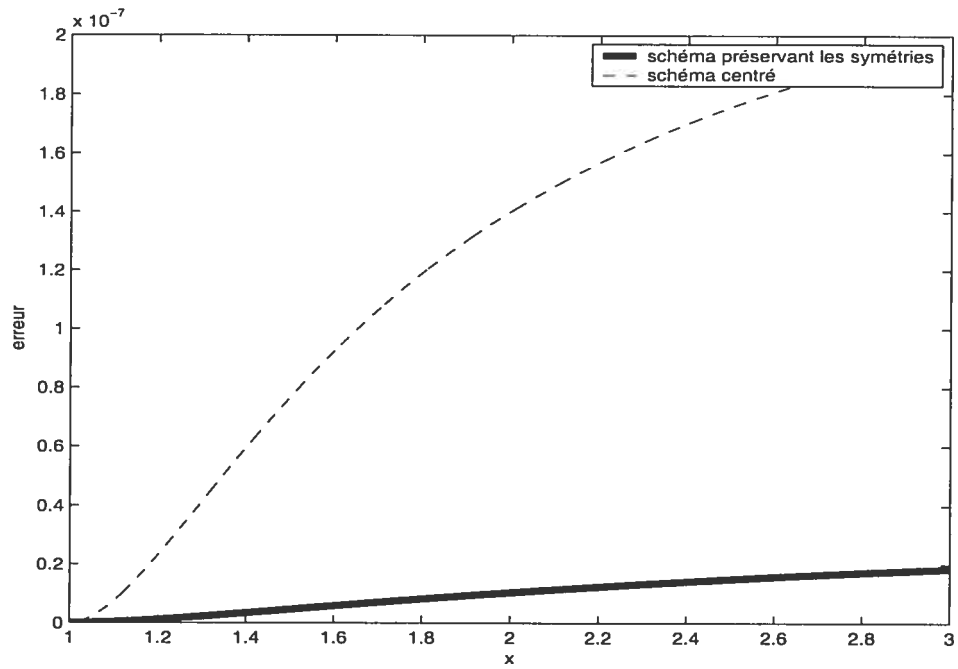


FIG. 5.1.10. Erreurs absolues pour $h=0.1$.

FIG. 5.1.11. Erreurs absolues pour $h=0.01$.FIG. 5.1.12. Erreurs absolues pour $h=0.001$.

Nous remarquons d'abord que l'erreur du schéma préservant les symétries est inférieure à celle du schéma centré quelque soit la valeur de h . Ainsi, le schéma (5.1.11) est plus avantageux au niveau de la précision que le schéma centré habituel. Étudions ensuite l'ordre de convergence des deux méthodes. Nous avons dans les deux cas que l'ordre est 2 puisque l'erreur est divisée par 100 lorsque h est divisé par 10. Il reste à savoir quelle est la nature de cette meilleure précision. Nous savons que l'erreur d'une méthode se comporte de la façon suivante :

$$E \leq M h^k$$

où M est une constante et k est l'ordre de convergence du schéma. Comme le montrent les résultats l'ordre de convergence k des deux schémas est 2. Ainsi, ce n'est pas au niveau de l'ordre que nous gagnons en précision en utilisant le schéma préservant les symétries. Nous pouvons plutôt affirmer que c'est forcément les constantes M qui sont différentes pour chaque méthode. Il demeure que pour cet exemple, il est avantageux au niveau de la précision d'utiliser le schéma qui préserve les symétries en comparaison avec le schéma centré.

5.2. EXEMPLE DE SCHÉMA DU TROISIÈME ORDRE

L'exemple numérique d'un schéma invariant d'ordre 3 que nous choisissons concerne le schéma (4.1.15) que nous avons trouvé au chapitre 4. Considérons l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre suivante :

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \frac{y''^2}{y'^2} = \frac{-k^2}{2}.$$

Le groupe de Lie de symétries de cette équation est

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

et nous avons obtenu les quatre invariants,

$$I_1 = x_n - x_{n-1}, \quad I_2 = x_{n+1} - x_n, \quad I_3 = x_{n+2} - x_{n+1},$$

$$\phi = \frac{y_{n+2} - y_n}{y_{n+2} - y_{n+1}} \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Afin de comparer le schéma préservant les symétries avec le schéma centré, nous choisissons un pas h constant. Voici le schéma invariant obtenu :

$$\frac{4 - \phi}{2h^2} = \frac{-k^2}{2}.$$

Le schéma standard est

$$\frac{3(y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n - y_{n-1}))}{h^2(y_{n+2} - y_{n-1})} - \frac{27(y_{n+2} - y_{n+1} - y_n + y_{n-1})^2}{8h^2(y_{n+2} - y_{n-1})^2} = \frac{-k^2}{2}.$$

Nous observons déjà que le schéma qui préserve les symétries sera plus facile à appliquer puisqu'il est linéaire tandis que le schéma centré est, pour sa part, non linéaire et implicite.

La solution exacte de l'EDO à résoudre est

$$y(x) = \frac{A}{k(e^{kx_0} - e^{kx})} + d.$$

Pour cet exemple, prenons $k = 1$, $A = 1$, $d = 0$, $x_0 = 0$ et x dans l'intervalle $[1, 11]$.

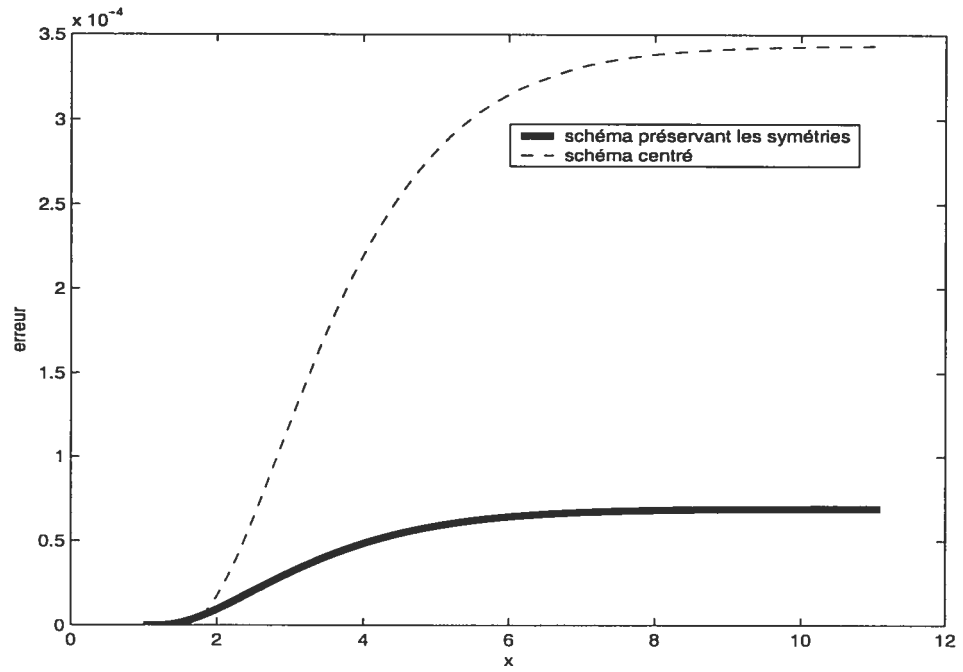
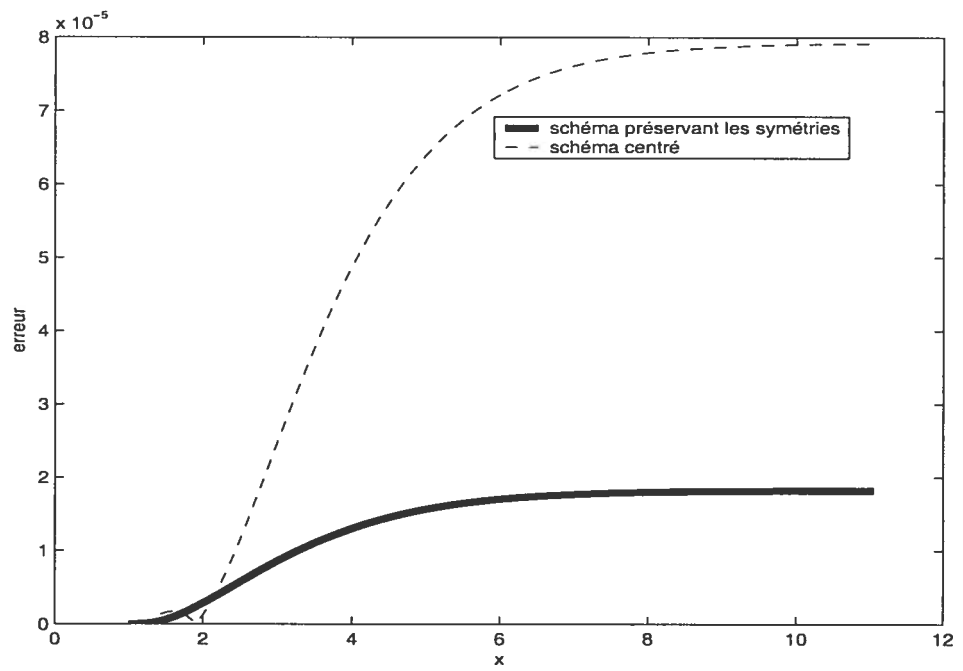
Ainsi, nous avons la solution exacte

$$y(x) = \frac{1}{1 - e^x}.$$

Démarrons le problème aux valeurs initiales avec le trois points suivants :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1, & y_0 &= (1 - e)^{-1}, \\ x_1 &= 1 + h, & y_1 &= (1 - e^{1+h})^{-1}, \\ x_2 &= 1 + 2h, & y_2 &= (1 - e^{1+2h})^{-1}. \end{aligned}$$

Voici les graphiques des erreurs absolues pour différents h .

FIG. 5.2.1. Erreurs absolues pour $h=0.1$.FIG. 5.2.2. Erreurs absolues pour $h=0.05$.

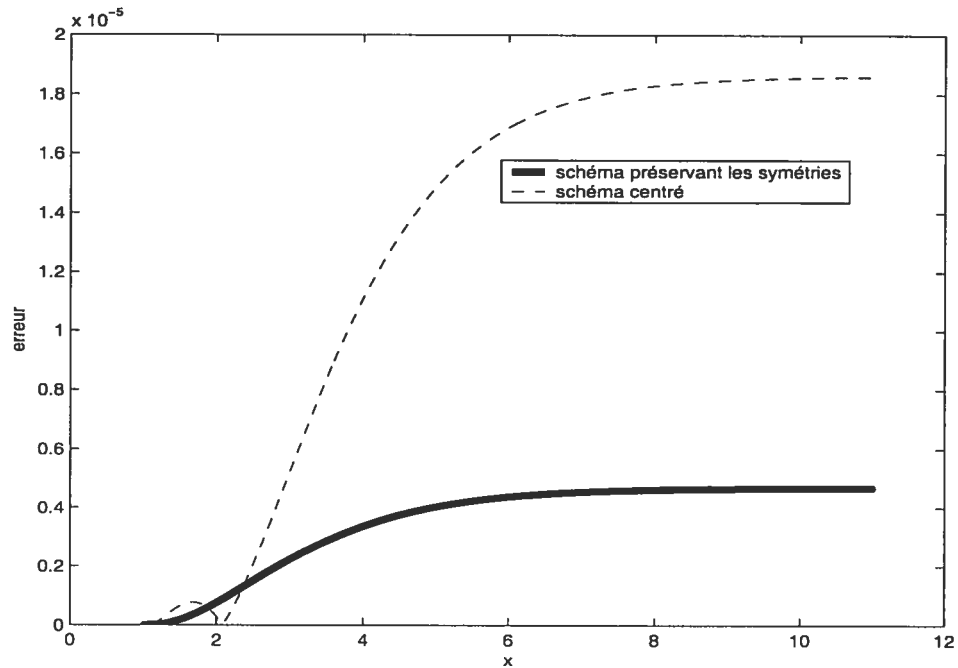


FIG. 5.2.3. Erreurs absolues pour $h=0.025$.

Nous remarquons encore une fois que le schéma préservant les symétries est plus précis que le schéma centré puisque ce premier offre une erreur de discrétisation inférieure. De plus, les deux méthodes sont d'ordre 2 car en divisant h par 2, l'erreur est divisée par 4. Finalement, sachant que le comportement de l'erreur est

$$E \leq M h^k$$

et que les deux schémas sont du même ordre de convergence, nous pouvons conclure que le schéma invariant est plus précis parce que M est plus petit.

CONCLUSION

Le mathématicien norvégien Sophus Lie fut le premier à appliquer sa propre théorie, la théorie des groupes de Lie, aux équations différentielles. Il classifia en effet les EDO d'ordre 2 selon leurs symétries en 1891. Ce n'est qu'un siècle plus tard que l'on tenta d'appliquer la théorie des groupes de Lie aux équations aux différences finies. Pour faire suite à la classification des schémas du deuxième ordre invariants sous un groupe de symétries élaborée en 2000 [DKW], nous avons présenté dans ce mémoire des nouveaux résultats concernant la classification des schémas du troisième ordre invariants sous un groupe de Lie de symétries. Nous avons ainsi effectué la discrétisation des équations différentielles ordinaires d'ordre 3 avec conservation de leurs symétries. Afin de comparer facilement les schémas invariants trouvés avec les équations différentielles invariantes sous le même groupe de symétries, nous avons dû pour chaque cas déterminer d'abord ces EDO invariantes. Ce travail avait été entamé par O. Gat en 1992 [Gat]. Nous avons en particulier traité des cas où l'algèbre de Lie était de dimension 1, 2, 3, 4 et 6.

Dans un second temps, nous avons voulu tester numériquement quelques schémas obtenus par la théorie de Lie. Notre objectif était de les comparer avec des schémas centrés habituels au niveau de la précision. Selon les exemples étudiés, nous avons observé que les schémas qui préservent les symétries de l'équation différentielle ordinaire à résoudre offrent un certain avantage. En effet, dans les exemples considérés, l'erreur des schémas invariants est inférieure à celle des schémas aux différences centrées. Toutefois, nous avons remarqué que nous ne gagnions pas en précision grâce à l'ordre des méthodes, mais plutôt car la constante qui influence le comportement de l'erreur est inférieure pour les schémas invariants. Il reste que

la théorie de Lie offre de nouvelles méthodes numériques profitables et que ceci établit un lien intéressant entre l'algèbre et l'analyse numérique.

Cependant, quelques cas entamés dans ce travail demeurent inachevés et la classification des schémas du troisième ordre invariants sous un groupe de symétries reste ainsi incomplète. De plus, il est possible de considérer non pas de simples symétries, mais des symétries de contact et des symétries généralisées. L'étude des schémas invariants ainsi obtenus révélerait peut-être d'autres avantages. Enfin, il serait d'une grande utilité d'effectuer une discrétisation semblable pour les équations différentielles aux dérivées partielles.

BIBLIOGRAPHIE

- [DKW] V. DORODNITSYN, R. KOZLOV ET P. WINTERNITZ, *Lie group classification of second-order ordinary difference equations*, Journal of mathematical physics, Vol. 41, No. 1, pages 480-504, 2000.
- [Gat] OMRI GAT, *Symmetry algebras of third-order ordinary differential equations*, Journal of mathematical physics, Vol. 33, No. 9, pages 2966-2971, 1992.
- [GKO] A. GONZALEZ-LOPEZ, N. KAMRAN ET P. J. OLVER, *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math Soc., Vol. 64, pages 339-368, 1992.
- [Hu] JAMES E. HUMPHREYS, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag New York Inc., 1972.
- [LTW] D. LEVI, S TREMBLAY ET P. WINTERNITZ, *Lie point symmetries of difference equations and lattices*, J. Phys. A : Math. Gen., Vol. 33, pages 8507-8523, 2000.
- [Lie] SOPHUS LIE, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Dr. G. Scheffers, Teubner, Leipzig, 1893.
- [Olver] P. J. OLVER, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer-Verlag New York Inc., 1986.
- [Wi] P. WINTERNITZ, *Lie groups and solutions of nonlinear partial differential equations*, CRM-1841, juillet 1993.