

Université de Montréal

Polynômes de Kazhdan-Lusztig et cohomologie
d'intersection des variétés de drapeaux

par

Gabriel Chênevert

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

le 29 août 2003



QA

3

U54

2003

V.015

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Polynômes de Kazhdan-Lusztig et cohomologie
d'intersection des variétés de drapeaux**

présenté par

Gabriel Chênevert

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

(président-rapporteur)

Abraham Broer

(directeur de recherche)

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

RÉSUMÉ

Ce mémoire contient une preuve du théorème de Kazhdan et Lusztig [25] qui relie, d'une part, la cohomologie d'intersection des variétés de Schubert dans la variété de drapeaux d'un groupe algébrique complexe réductif G , et, d'autre part, les polynômes de Kazhdan-Lusztig dans l'algèbre de Hecke du groupe de Weyl de G . Ce théorème est utile pour le calcul des multiplicités dans les modules de Verma.

L'approche utilisée, due à MacPherson et esquissée par Springer [29], implique une opération de convolution, dont nous étudions les propriétés dans un contexte abstrait au chapitre 2. Le contexte qui nous intéresse est celui de la catégorie dérivée constructible des complexes de faisceaux (chapitre 3), dans laquelle les complexes d'intersection jouent un rôle très important (chapitre 4). Le chapitre 1 contient les résultats de base sur les variétés de drapeaux et les algèbres de Hecke.

MOTS CLÉS

Polynômes de Kazhdan-Lusztig, algèbres de Hecke, variétés de drapeaux, variétés de Schubert, cohomologie d'intersection, faisceaux pervers, convolution, théorie de la représentation, modules de Verma.

ABSTRACT AND KEY WORDS

ABSTRACT

This thesis contains a proof of a theorem of Kazhdan and Lusztig [25] which links, on one hand, the intersection cohomology of Schubert varieties in the flag variety of a reductive complex algebraic group G , with, on the other hand, Kazhdan-Lusztig polynomials in the Hecke algebra of the Weyl group of G . This theorem is instrumental in the computation of multiplicities in Verma modules.

The approach we use, due to MacPherson and sketched by Springer [29], relies on a convolution operation, of which we study the properties in an abstract setting in Chapter 2. The setting of interest to us is that of the constructible derived category of sheaf complexes (Chapter 3), in which the intersection complexes play a very important role (Chapter 4). We first review some basic facts about flag varieties and Hecke algebras in Chapter 1.

KEY WORDS

Kazhdan-Lusztig polynomials, Hecke algebras, flag varieties, Schubert varieties, intersection cohomology, perverse sheaves, convolution, representation theory, Verma modules.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, un merci bien spécial à mon directeur, Bram Broer, qui a toujours su ce qui était bon pour moi tout en ayant toujours le respect de ne pas me l'imposer. Il a joué un rôle de premier plan dans ma formation mathématique en partageant des bribes de sa vision des choses avec moi, et je l'en remercie de tout coeur.

Merci au CRSNG, grâce à qui je n'ai pas eu à me soucier de questions financières pendant la durée de ma maîtrise.

Merci à Alexandre Girouard, Olivier Rousseau, Sébastien Manka et Dimitri Zuchowski, qui ont bien voulu lire certaines portions de ce mémoire à des stades d'avancement variés. Leurs commentaires m'ont été précieux.

Merci à mes modèles mathématiques, Alexandre Girouard, Jérôme Fournier et Yannick Delbecque, qui m'ont indirectement donné l'envie de commencer ce mémoire.

Merci à celle qui m'a donné la force de le terminer.

Merci également à Hughes, Nicolas, Daniel, Émilie, Anik, Christian et tous les autres qui ont fait du département de mathématiques de l'Université de Montréal un lieu où il a fait bon vivre pendant les quelques années que j'y ai passées.

Quelques pensées vont à la mémoire d'Armand Borel (1923 – 2003), qui s'est éteint quelques jours à peine avant la fin de la rédaction de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé et mots clés	iii
Abstract and Key Words	iv
Remerciements	v
Introduction	1
Chapitre 1. Préliminaires	6
1.1. Variétés de Schubert	6
1.1.1. La variété de drapeaux G/B	6
1.1.2. Groupe de Weyl	7
1.1.3. Décomposition de Bruhat	8
1.1.4. Résolution de Bott-Samelson	10
1.2. Algèbres de Hecke	12
1.2.1. Définition	13
1.2.2. Théorème de base de Kazhdan-Lusztig	14
Chapitre 2. Convolutions	18
2.1. Produit de convolution	18
2.1.1. Axiomes	18
2.1.2. Convolution et propriétés	21
2.2. Exemples	26
2.2.1. Correspondances	26
2.2.2. Fonctions scalaires	28

2.2.3. Cohomologie de De Rham.....	30
2.2.4. Homologie de Borel-Moore.....	31
2.2.5. Catégories dérivées constructibles.....	31
Chapitre 3. La catégorie dérivée constructible.....	33
3.1. Les foncteurs f^* et f_* au niveau des faisceaux.....	33
3.2. Catégories et foncteurs dérivés.....	36
3.2.1. Catégories dérivées.....	36
3.2.2. Foncteurs dérivés.....	38
3.3. La catégorie dérivée constructible $\mathcal{D}^{bc}(X)$	39
3.3.1. La catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(X)$	40
3.3.2. Constructibilité.....	41
3.3.3. Dualité de Verdier.....	42
Chapitre 4. Cohomologie d'intersection.....	45
4.1. Homologie d'intersection.....	46
4.1.1. Pseudo-variétés.....	46
4.1.2. Perversités.....	47
4.1.3. Le complexe de chaînes d'intersection.....	49
4.1.4. Propriétés de l'homologie d'intersection.....	50
4.1.5. Cas des strates de dimension paire.....	52
4.1.6. Vers l'approche faisceautique.....	53
4.2. Le complexe d'intersection.....	55
4.2.1. Caractérisation.....	55
4.2.2. Faisceaux pervers.....	58
4.2.3. Version G -équivariante.....	60
Chapitre 5. Le théorème de Kazhdan-Lusztig.....	63
5.1. Le semi-anneau $\mathcal{H}(X)$	63

5.1.1.	Passage de X à $X \times X$	63
5.1.2.	Définition de $\mathcal{H}(X)$	66
5.1.3.	Polynôme de Poincaré	68
5.1.4.	Fonction caractéristique.....	68
5.2.	Preuve du théorème.....	71
5.2.1.	Lemme sur les degrés	71
5.2.2.	Résolution de Bott-Samelson revisitée.....	72
5.2.3.	Lemme de décomposition	74
5.2.4.	Étape inductive.....	76
5.2.5.	Théorème de Kazhdan-Lusztig.....	80
5.2.6.	Dictionnaire	82
	Bibliographie	86

INTRODUCTION

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$ d'un groupe de Coxeter W a été introduite pour étudier les représentations des groupes de Chevalley en caractéristique positive. Il s'agit d'une déformation de l'algèbre du groupe, $\mathbb{Z}[W]$, obtenue en y introduisant une indéterminée q . En y ajoutant également formellement l'inverse q^{-1} de q , il est possible de munir $\mathcal{H}(W)$ d'une importante involution ι .

Kazhdan et Lusztig ont montré, dans leur article fondamental [24], qu'il existe une base de $\mathcal{H}(W)$, « la plus simple possible », qui soit adaptée à cette involution, c'est-à-dire dont les éléments soient *auto-duaux*. Il est nécessaire pour cela d'introduire également une *racine carrée* $q^{1/2}$ de q .

En exprimant les éléments C_w de la base de Kazhdan-Lusztig en terme des éléments T_x de la base usuelle, on obtient des polynômes $P_{x,w}$ en q , appelés *polynômes de Kazhdan-Lusztig*. Il est remarquable que, malgré l'introduction de q^{-1} et de $q^{1/2}$, nécessaire pour avoir une « bonne » théorie de la dualité sur $\mathcal{H}(W)$, ces polynômes ne contiennent ni puissance négative, ni puissance fractionnaire de q .

Ces polynômes satisfont des relations de récurrence compliquées qui les rendent difficiles à calculer explicitement. Il était conjecturé sur des bases empiriques que leurs coefficients étaient toujours *positifs*.

Kazhdan et Lusztig ont montré dans [25] que cette conjecture était vraie au moins lorsque W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique complexe réductif G . En effet, dans ce cas, on peut interpréter les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig comme des dimensions de groupes de cohomologie des cellules de Schubert $\overline{X(w)}$ dans la variété de drapeaux G/B de G .

La théorie cohomologique appropriée n'est pas la théorie usuelle, mais plutôt celle de la *cohomologie d'intersection*, qui avait été introduite quelques années plus tôt par Goresky et MacPherson. Cette théorie, qui généralise la théorie de la cohomologie usuelle pour les variétés non singulières, a été développée dans le but de garantir une *dualité de Poincaré* pour une classe plus générale d'espaces pouvant avoir des singularités, les *pseudo-variétés*.

Une version *faisceautique* de la cohomologie d'intersection a également été développée par Deligne, Beilinson, Bernstein et Gabber, produisant un *complexe d'intersection* $IC^*(X)$ pour chaque pseudo-variété X . Pour pouvoir caractériser efficacement ce complexe, cependant, il est nécessaire d'élargir notre point de vue pour le considérer, non pas comme un objet dans la catégorie des complexes de faisceaux sur X , mais plutôt dans sa catégorie *dérivée*. Les complexes d'intersection, normalisés de façon appropriée, y sont auto-duaux pour la *dualité de Verdier*.

Le « théorème de Kazhdan-Lusztig » est en fait l'affirmation que le complexe d'intersection $IC^*(\overline{X(w)})$ correspond à l'élément de base C_w dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$, ce qui se traduit plus précisément par le fait que, pour $x, w \in W$,

$$P_{x,w} = \sum_{x \in W} \dim IH^i(\overline{X(w)})_x q^{i/2} T_x,$$

où $IH^i(\overline{X(w)})_x$ désigne la fibre de la cohomologie $\mathcal{H}^i(IC^*(\overline{X(w)}))$ en un point de la cellule de Schubert $X(x)$.

Cette identification entre deux objets, l'un de nature combinatoire et l'autre de nature topologique, a deux conséquences remarquables. Premièrement, comme mentionné plus tôt, cela fournit une « explication » géométrique de la positivité des coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig. Par ailleurs, le fait que les polynômes de Kazhdan-Lusztig ne contiennent aucune puissance fractionnaire de q implique que les variétés de Schubert n'ont pas de cohomologie en dimension (réelle) impaire. Ceci signifie que, bien que l'on ait élargi notre point de vue pour considérer la variété de drapeaux comme un variété *réelle*, on se rend compte *a posteriori* que toute son information cohomologique se trouve localisée en dimensions réelles paires, c'est-à-dire correspondant à des dimensions complexes.

Suivant l'idée de MacPherson [29, 30], nous obtenons ce résultat comme un des aspects d'une correspondance un peu plus forte, et par le fait même une preuve beaucoup plus « parlante » du théorème que la preuve originale [25]. En effet, il existe une opération de *convolution* sur l'ensemble des complexes de faisceaux sur G/B de la forme

$$\bigoplus_{w \in W} V_w^\bullet \otimes \mathcal{I}_w^\bullet,$$

où chaque V_w^\bullet est un espace vectoriel gradué, jouant le rôle de multiplicité, et \mathcal{I}_w^\bullet le complexe d'intersection $\mathcal{IC}^\bullet(\overline{X(w)})$, normalisé de façon approprié. Pour que cette opération soit bien définie et jouissent de bonnes propriétés, il est nécessaire de travailler dans la catégorie *dérivée* des complexes de faisceaux.

Nous allons montrer qu'il existe un isomorphisme h de cet ensemble sur une sous-structure de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$. Sous cet isomorphisme, le produit de convolution et la dualité de Verdier correspondent, respectivement, à la multiplication dans l'algèbre de Hecke et à la dualité ι . De plus, pour tout $w \in W$, le complexe d'intersection \mathcal{I}_w^\bullet correspond à l'élément de base C_w .

Cependant, cette opération de convolution est très artificielle au niveau (de la catégorie dérivée) des complexes de faisceaux sur $X := G/B$, mais on peut la définir de façon très naturelle sur $X \times X$, dont les orbites pour l'action de G correspondent aux orbites pour B dans X , c'est-à-dire les cellules de Schubert.

Le théorème de Kazhdan-Lusztig ne serait que modérément intéressant s'il n'avait pas de conséquences, puisque, après tout, il ne fait qu'identifier ensemble deux objets, de nature différente, certes, mais issus d'une même quête de la dualité. D'ailleurs, il suffit de jeter un coup d'oeil aux théorèmes 1.17 et 4.22 pour remarquer une certaine ressemblance dans les conditions qui caractérisent les éléments de base de Kazhdan-Lusztig et les complexes d'intersection.

Cependant, le théorème de Kazhdan-Lusztig est crucial dans la démonstration de la *conjecture de Kazhdan-Lusztig* [24], exprimant les multiplicités des modules de Verma en terme des polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Plus précisément, soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan et \mathfrak{b} la sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{h} . Notons ρ la demi-somme des racines de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} .

Pour $w \in W$, soit M_w le *module de Verma* de poids $-w(\rho) - \rho$, c'est-à-dire

$$M_w := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} D_{-w(\rho)-\rho},$$

où \mathcal{U} désigne le foncteur d'algèbre enveloppante universelle et $D_{-w(\rho)-\rho}$ est le \mathfrak{b} -module de dimension 1 obtenu par l'extension par 0 de $-w(\rho) - \rho$ à \mathfrak{b} .

Les modules de Verma, bien qu'ils soient en général de dimension infinie, sont bien compris. Cependant, chaque module de Verma M_w a un unique quotient simple L_w , qui lui l'est beaucoup moins.

La conjecture de Kazhdan-Lusztig affirme que les caractères formels de M_w et L_w sont reliés par la formule

$$\text{ch } L_w = \sum_{x \in W} (-1)^{l(w)+l(x)} P_{x,w}(1) \text{ch } M_x,$$

qui est équivalente à la formule

$$\text{ch } M_w = \sum_{x \in W} P_{w_0 w, w_0 x}(1) \text{ch } L_x,$$

dans laquelle w_0 désigne l'élément le plus long de W .

La preuve de la conjecture de Kazhdan-Lusztig a été obtenue indépendamment par Beilinson et Bernstein [1] ainsi que Brylinski et Kashiwara [9, 10].

La preuve de Beilinson et Bernstein utilise une version de la *correspondance Riemann-Hilbert* qui identifie la catégorie des \mathcal{D} -modules à singularités holonomes avec la catégorie des faisceaux pervers. On peut ainsi identifier les quotients simples des modules de Verma avec les complexes d'intersection, et les modules de Verma eux-même avec les complexes constants. Ce sont, respectivement, les objets simples et « bien compris » dans les catégories correspondantes.

C'est dans cette optique qu'il faut considérer le théorème de Kazhdan-Lusztig. Les polynômes de Kazhdan-Lusztig sont des objets combinatoires obtenus à partir d'une géométrie sous-jacente qui permettent de calculer des choses en théorie de la représentation.

Il serait ainsi souhaitable de pouvoir interpréter géométriquement la construction de l'algèbre de Hecke pour tout groupe de Weyl W , afin d'en obtenir des bénéfices en théorie de la représentation (une telle interprétation existe, par exemple, dans le cas où W est un groupe de Weyl affiné).

Il faut donc considérer le cas où W est un groupe de Weyl, décrit dans ce mémoire, comme le cas *facile* d'un programme plus général en théorie de la représentation (voir [28] par exemple). Il est important de bien le maîtriser afin d'espérer pouvoir généraliser les enseignements qu'il nous apporte à des cas plus généraux.

Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous exposons de façon succincte les concepts et les résultats qui nous seront nécessaires à propos des variétés de Schubert (section 1.1) et des algèbres de Hecke (section 1.2), principalement dans le but d'établir la notation qui sera utilisée par la suite. Nous omettrons la plupart des preuves, mais on peut se référer à [5] ou [22] pour les généralités sur les groupes algébriques, [27] pour les variétés de drapeaux, ainsi qu'à [23] ou [24] pour les algèbres de Hecke.

1.1. VARIÉTÉS DE SCHUBERT

1.1.1. La variété de drapeaux G/B

Soit G un groupe algébrique *complexe* réductif (connexe). Désignons par \mathcal{B} l'ensemble des *sous-groupes de Borel* de G , c'est-à-dire de ses sous-groupes solubles connexes maximaux.

Les sous-groupes de Borel de G étant tous conjugués, l'action de G par conjugaison sur \mathcal{B} est transitive. Si l'on fixe un sous-groupe de Borel B de G , on peut identifier \mathcal{B} , en tant que G -ensemble, avec l'ensemble des translatés G/B , sur lequel G agit par multiplication à gauche, via

$$gBg^{-1} \mapsto gB.$$

(Cette correspondance est bien définie car un sous-groupe de Borel est son propre normalisateur.)

Théorème 1.1. *Cette identification confère une structure de variété projective lisse à \mathcal{B} . Cette structure ne dépend pas du sous-groupe de Borel B choisi.*

Nous appellerons \mathcal{B} , muni de cette structure, la *variété de drapeaux* de G . Nous la noterons habituellement $X = G/B$.

Le terme « drapeau » provient de l'exemple suivant.

Exemple 1.2. Soit $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ le groupe linéaire général. Le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe de Borel de G . On peut identifier la variété de drapeaux G/B avec l'ensemble des suites

$$0 = V_0 < V_1 < \dots < V_n = V$$

de sous-espaces vectoriels de \mathbb{C}^n telles que $\dim V_i = i$, $i = 1, \dots, n$.

1.1.2. Groupe de Weyl

Soit T un tore maximal de G et $N(T)$ son normalisateur.

Définition 1.3. Le *groupe de Weyl* de G est le groupe quotient

$$W := N(T)/T.$$

Les tores maximaux de G étant tous conjugués, on peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix du tore maximal T . De plus, le groupe de Weyl de G est toujours un groupe *fini*.

Exemple 1.4. Dans le cas de $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, le sous-groupe T des matrices diagonales est un tore maximal, et on a $W \cong S_n$, le groupe symétrique sur n éléments.

Le choix d'un sous-groupe de Borel B contenant T détermine un ensemble de générateurs S de W , appelés *réflexions simples*, qui confère au groupe de Weyl

W une structure de *groupe de Coxeter*, c'est-à-dire que les seules relations entre les réflexions simples $s_i \in S$ sont de la forme

$$(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1,$$

avec $m_{ii} = 1$ et $m_{ij} = m_{ji}$. En particulier, cela signifie que les réflexions simples sont des *involutions*.

Puisque chaque élément $w \in W$ peut s'écrire comme un produit de réflexions simples, nous appellerons *longueur de w* le nombre minimal $l(w)$ de réflexions simples nécessaires pour obtenir w . Une décomposition $w = s_1 \cdots s_r$ sera dite *réduite* si elle est de longueur minimale, c'est-à-dire si $r = l(w)$ (les décompositions réduites ne sont pas uniques en général).

Exemple 1.5. Pour $w \in W$, nous avons $l(w) = 0$ si et seulement si $w = 1$, et $l(w) = 1$ si et seulement si $w \in S$.

On peut prouver que W contient un unique élément de longueur maximale, que nous noterons w_0 .

À partir de maintenant, nous considérerons toujours un sous-groupe de Borel B de G fixé, ainsi que la structure de groupe de Coxeter résultante sur W .

1.1.3. Décomposition de Bruhat

Choisissons une section $W \rightarrow N(T)$, $w \mapsto \dot{w}$, de façon arbitraire.

Le point $\dot{w}B \in G/B$ ne dépend pas du choix de la pré-image \dot{w} de w , car $T \subset B$. Par ailleurs, on peut remarquer que l'ensemble des points de la forme $\dot{w}B$, $w \in W$, est exactement l'ensemble des points fixes pour l'action de T par multiplication à gauche sur G/B .

L'intérêt du groupe de Weyl dans l'étude de la variété de drapeaux G/B vient du fait que chaque orbite pour B (agissant par multiplication à gauche) dans G/B contient un *unique* point de la forme $\dot{w}B$, $w \in W$.

Définition 1.6. La cellule de Bruhat (ou de Schubert) associée à $w \in W$ est

$$X(w) := B \cdot \dot{w}B,$$

l'orbite du point $\dot{w}B$ sous l'action de B .

Remarque 1.7. La cellule de Schubert $X(w)$ est quelquefois notée abusivement $B\dot{w}B$ ou même BwB , mais il ne faut pas la confondre avec le double translaté $B\dot{w}B \subset G$.

Nous avons donc la décomposition de G/B comme l'union disjointe

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} X(w);$$

c'est la *décomposition de Bruhat* de G/B .

À la lumière du théorème suivant, cette décomposition donne un portrait de G/B particulièrement simple.

Théorème 1.8. Pour $w \in W$, la cellule de Bruhat $X(w)$ est un espace affiné de dimension $l(w)$, c'est-à-dire que

$$X(w) \cong \mathbb{A}^{l(w)}.$$

La variété de Schubert $\overline{X(w)}$ est l'adhérence de la cellule de Bruhat $X(w)$. L'adhérence d'une orbite étant constituée d'orbites complètes, cela définit un ordre partiel sur W , appelé l'*ordre de Bruhat* :

$$x \leq w \iff X(x) \subset \overline{X(w)} \iff \overline{X(x)} \subset \overline{X(w)}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\overline{X(w)} = \bigsqcup_{x \leq w} X(x).$$

Remarquons que si $x \leq w$, alors il est clair que $l(x) \leq l(w)$.

Le théorème suivant donne une caractérisation combinatoire de l'ordre de Bruhat sur W ayant un sens pour n'importe quel groupe de Coxeter.

Théorème 1.9. *Pour $x, w \in W$, les énoncés suivants sont équivalents.*

- (1) $x \leq w$.
- (2) Il existe une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_{l(w)}$ de w telle que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$, avec $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq l(w)$.
- (3) Pour toute décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_{l(w)}$ de w , on peut écrire $x = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq l(w)$.

Proposition 1.10. *L'ordre de Bruhat sur W a les propriétés suivantes.*

- (1) Pour $w \in W$ et $s \in S$, ou bien $sw < w$, ou bien $sw > w$.
- (2) Pour tout $w \in W$, $w \leq w_0$.
- (3) Pour $x, y \in W$, on a $x \leq y$ si et seulement si $w_0 y \leq w_0 x$.

1.1.4. Résolution de Bott-Samelson

Bien que la variété de drapeaux $G/B = \overline{X(w_0)}$ soit lisse, les variétés de Schubert $\overline{X(w)}$, $w \in W$, sont singulières en général. Elles sont constituées de cellules de Schubert, qui sont des espaces affins, donc lisses, mais il peut apparaître des singularités lorsqu'on les recolle ensemble. Ceci n'est cependant pas le cas lorsque $l(w) = 1$.

Exemple 1.11. La variété de Schubert $\overline{X(s)} = X(s) \sqcup X(1) \cong \mathbb{A}^1 \sqcup \mathbb{A}^0$ est une droite projective.

Dans certaines situations, il est utile de pouvoir remplacer la variété de Schubert $\overline{X(w)}$ par une variété lisse $Z(w)$ qui n'en diffère pas beaucoup, c'est-à-dire avoir une *résolution des singularités*

$$Z(w) \rightarrow X(w).$$

Il existe une façon standard de résoudre les singularités d'une variété de Schubert $X(w)$, appelée *résolution de Bott-Samelson*. L'idée est de « factoriser » la variété $\overline{X(w)}$ en ses différents « facteurs » $\overline{X(s_1)}, \dots, \overline{X(s_r)}$, qui sont des droites

projectives, où $w = s_1 \cdots s_r$ est une décomposition réduite de w . Voyons comment on construit cette résolution.

Soit $w \in W$, et choisissons une réflexion simple $s \in S$ telle que $sw < w$; écrivons $w = sw'$. Alors, si on note $P(s)$ le sous-groupe parabolique minimal de G associé à s et contenant B , c'est-à-dire

$$P(s) := B \sqcup B\dot{s}B,$$

alors on a la factorisation

$$\overline{X(w)} = \overline{X(sw')} = P(s)\overline{X(w')}.$$

Ceci signifie que l'application naturelle

$$P(s) \times \overline{X(w')} \rightarrow \overline{X(w)}$$

induite par l'action de $P(s) \subset G$ sur G/B est surjective.

Si X et Y sont deux variétés sur lesquelles un groupe G agit à droite et à gauche, respectivement, on définit la variété $X \times_G Y$ comme le quotient de $X \times Y$ pour l'action de G donnée par

$$g \cdot (x, y) := (x \cdot g^{-1}, g \cdot y)$$

(si ce quotient existe). Cela veut dire que la variété $X \times_G Y$ est obtenue de $X \times Y$ en identifiant les points de la forme $(x \cdot g, y)$ avec ceux de la forme $(x, g \cdot y)$.

Puisque, dans notre cas, le sous-groupe de Borel B agit à droite sur $P(s)$ et à gauche sur $X(w')$, on peut former le quotient $P(s) \times_B \overline{X(w')}$. Alors, l'application naturelle $P(s) \times \overline{X(w')} \rightarrow \overline{X(w)}$ passe au quotient pour donner une projection

$$\pi : P(s) \times_B \overline{X(w')} \rightarrow \overline{X(w)},$$

puisque $(pg^{-1})(gx) = px$.

Lemme 1.12. *La projection $\pi : P(s) \times_B \overline{X(w')} \rightarrow \overline{X(w)}$ est propre et birationnelle.*

Remarquons de plus que, en faisant agir B à gauche sur le facteur $P(s)$ de $P(s) \times_B \overline{X(w')}$, la projection π est B -équivariante.

Si nous choisissons une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ de w , nous pouvons itérer le processus. En effet, en posant $w_i := s_i \cdots s_r$, puisque $w_i = s_i w_{i+1}$ avec $l(w_i) = l(w_{i+1}) + 1$, pour chaque i nous obtenons une projection

$$\pi_i : P(s_i) \times_B \overline{X(w_{i+1})} \rightarrow \overline{X(w_i)}$$

et en les combinant toutes ensemble, nous obtenons

$$\pi : P(s_1) \times_B \cdots \times_B P(s_r) \times_B \overline{X(1)} \rightarrow \overline{X(w_r)} = \overline{X(w)}.$$

Posons $Z(w) := P(s_1) \times_B \cdots \times_B P(s_r) \times_B \overline{X(1)}$.

Puisque $\overline{X(1)} = X(1)$ est un singleton, on peut identifier $Z(w)$ avec

$$P(s_1) \times_B \cdots \times_B P(s_r) / B;$$

nous l'appellerons *variété de Bott-Samelson associée à w* . Notons que cette construction dépend de la décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ choisie.

De façon équivalente, $Z(w)$ est le quotient de $P(s_1) \times \cdots \times P(s_r)$ pour l'action de B^r donnée par

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) \cdot (p_1, p_2, \dots, p_r) := (p_1 b_1^{-1}, b_1 p_2 b_2^{-1}, \dots, b_{r-1} p_r b_r^{-1}).$$

B agit encore sur $Z(w)$ par multiplication à gauche sur le premier facteur $P(s_1)$, et cela rend B -équivariante la projection

$$\pi([p_1, \dots, p_r B]) = p_1 \cdots p_r B.$$

Le lemme 1.12 implique le théorème suivant.

Théorème 1.13. *Pour tout $w \in W$, $\pi : Z(w) \rightarrow \overline{X(w)}$ est une résolution des singularités de la variété de Schubert $\overline{X(w)}$.*

1.2. ALGÈBRES DE HECKE

Dans cette section, W désigne un groupe de Coxeter quelconque muni de son ensemble de réflexion simples S . Nous nous intéressons bien sûr plus particulièrement au cas où W est un groupe de Weyl et S est déterminé par le choix d'un sous-groupe de Borel B .

1.2.1. Définition

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ des polynômes de Laurent en $q^{1/2}$ avec coefficients entiers.

Définition 1.14. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$ de W est définie comme l'algèbre libre sur $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ avec éléments de base T_w , $w \in W$, et la multiplication définie par les formules :

$$\begin{aligned} T_w T_{w'} &= T_{ww'} & \text{si } l(ww') &= l(w) + l(w'), \\ (T_s + 1)(T_s - q) &= 0 & \text{si } s &\in S. \end{aligned}$$

Il faut en fait vérifier que ces formules définissent bien une structure d'algèbre sur $\mathcal{H}(W)$, ce que nous ne ferons pas ici (voir [23]). Elles sont équivalentes aux formules

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{si } sw > w, \\ (q-1)T_w + qT_{sw} & \text{si } sw < w. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

En spécialisant q à 1, on obtient l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}[W]$, c'est-à-dire que le morphisme d'évaluation $q \mapsto 1$ induit un épimorphisme $\mathcal{H}(W) \rightarrow \mathbb{Z}[W]$. Il faut donc considérer q comme un paramètre formel qui a été introduit pour « déformer » l'algèbre du groupe $\mathbb{Z}[W]$.

Remarque 1.15. Dans le cas où W est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique réductif G , il y a une analogie entre la multiplication des éléments de base dans l'algèbre de Hecke et la combinatoire des doubles translatés de B dans G . Si on note $G_w := BwB \subset G$ pour $w \in W$, on a les égalités suivantes :

$$G_s \cdot G_w = \begin{cases} G_{sw} & \text{si } sw > w, \\ G_{sw} \cup G_w & \text{si } sw < w. \end{cases}$$

On voit qu'elles sont analogues aux formules de multiplication dans $\mathcal{H}(W)$.

En fait, on remarque que les coefficients dépendants de q qui apparaissent dans (1.2.1) sont choisis de telle sorte que l'application $\varphi : \mathcal{H}(W) \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$

qui envoie l'élément de base T_w sur $q^{l(w)}$, c'est-à-dire

$$\varphi\left(\sum_{w \in W} a_w T_w\right) := \sum_{w \in W} a_w q^{l(w)},$$

soit un homomorphisme d'anneaux.

En effet, si $sw > w$, alors $l(sw) = l(w) + 1$ et on a bien

$$\varphi(T_s)\varphi(T_w) = qq^{l(w)} = q^{l(w)+1} = \varphi(T_{sw}).$$

Dans le cas où $sw < w$, on a $l(sw) = l(w) - 1$, encore $\varphi(T_s)\varphi(T_w) = q^{l(w)+1}$, et

$$\varphi(qT_{sw} + (q-1)T_w) = qq^{l(w)-1} + (q-1)q^{l(w)} = q^{l(w)+1}.$$

La multiplication dans $\mathcal{H}(W)$ semble donc pouvoir être interprétée comme une version algébrique (ou combinatoire) de la multiplication des éléments correspondants aux cellules de Schubert dans X . Remarquons que si nous travaillions en caractéristique p et que nous pensions encore à $X(w)$ comme l'espace affine $\mathbb{A}^{l(w)}$, alors $X(w)$ compterait précisément $q^{l(w)}$ points \mathbb{F}_q -rationnels.

Lorsque W est un groupe de Weyl, on aimerait donc penser au vecteur de base T_w comme étant l'analogue algébrique de la cellule de Schubert $X(w)$. On peut considérer le reste de ce mémoire comme une façon de donner un sens précis à cette idée un peu floue. Nous tâcherons d'obtenir une réalisation géométrique, ou topologique, de l'algèbre de Hecke de W .

1.2.2. Théorème de base de Kazhdan-Lusztig

La base $(T_w)_{w \in W}$ est utile pour la définition de $\mathcal{H}(W)$, mais, en pratique, une autre base est plus intéressante.

Remarquons tout d'abord que chaque élément de base T_w de \mathcal{H} est inversible. En effet, pour $s \in S$, (1.2.1) implique que

$$T_s^{-1} = q^{-1}T_s + (q^{-1} - 1). \quad (1.2.2)$$

Il suit donc que pour $w \in W$ quelconque, en choisissant une décomposition réduite $w = s_1 s_2 \cdots s_r$ de w , puisque $T_w = T_{s_1} T_{s_2} \cdots T_{s_r}$, alors T_w est inversible et son inverse est $T_w^{-1} = T_{s_r}^{-1} \cdots T_{s_2}^{-1} T_{s_1}^{-1}$.

Remarquons que c'est la présence de l'inverse q^{-1} de q nous permet d'inverser les éléments de base.

Il y a sur $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ une involution qui consiste à inverser les signes des puissances de $q^{1/2}$, c'est-à-dire induite par $q^{1/2} \mapsto q^{-1/2}$. Si a est un élément de $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$, nous noterons \bar{a} son image sous cette involution.

Définissons une application $\iota : \mathcal{H}(W) \rightarrow \mathcal{H}(W)$ en posant

$$\iota \left(\sum_{w \in W} a_w T_w \right) := \sum_{w \in W} \bar{a}_w T_{w^{-1}}.$$

Il est possible de vérifier que cette formule définit une involution sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$.

Exemple 1.16 (motivation pour $q^{1/2}$). Nous aimerions construire une base de $\mathcal{H}(W)$ formée d'éléments auto-duaux pour ι . Remarquons que pour $s \in S$, l'élément $T_s + 1$ est presque auto-dual, car, en utilisant (1.2.2), on trouve

$$\iota(T_s + 1) = q^{-1}(T_s + 1).$$

C'est pour cela qu'il est intéressant d'introduire une racine carrée de q , car alors on a

$$\iota(q^{-1/2}(T_s + 1)) = q^{1/2}\iota(T_s + 1) = q^{-1/2}(T_s + 1).$$

On voudrait donc obtenir une base de $\mathcal{H}(W)$ formée d'éléments C_w , auto-duaux, qui soient « les plus simples possibles » quand on les exprime en terme des T_w . C'est ce que nous donne le résultat fondamental suivant, dont la preuve est élémentaire mais technique (voir [23] ou [24]).

Théorème 1.17 (Kazhdan et Lusztig, [24]). *Pour chaque $w \in W$, il existe un unique élément $C_w \in \mathcal{H}$ tel que $\iota(C_w) = C_w$ et*

$$C_w = q^{-l(w)/2} \sum_{x \leq w} P_{x,w} T_x,$$

où $P_{x,w}$ est un polynôme en q de degré $\leq \frac{1}{2}(l(w) - l(x) - 1)$ pour $x < w$, et $P_{w,w} = 1$.

On appelle *polynômes de Kazhdan-Lusztig* les polynômes $P_{x,w}$ du théorème précédent. Par commodité, on pose $P_{x,w} := 0$ si $x \not\leq w$, afin de pouvoir écrire $C_w = \sum_x P_{x,w} T_x$.

Mentionnons que les éléments C_w du théorème sont ceux qui sont notés C'_w dans [24].

Remarque 1.18. Il est possible que prouver, à l'aide des relations de récurrence obtenues au cours de la preuve du théorème 1.17, que $P_{x,w}(0) = 1$ si $x \leq w$. Ceci signifie que l'on peut caractériser l'ordre de Bruhat sur W en terme des polynômes de Kazhdan-Lusztig, puisque l'on a $x \leq w$ si et seulement si $P_{x,w} \neq 0$.

Exemple 1.19. À partir du théorème 1.17, on peut conclure que

$$C_1 = T_1 = 1 \quad \text{et} \quad C_s = q^{-1/2}(T_s + 1)$$

pour chaque réflexion simple $s \in S$.

Remarque 1.20. Lorsque l'on examine attentivement la preuve du théorème 1.17, on constate que, pour prouver l'unicité des éléments C_w , et donc des polynômes $P_{x,w}$, on n'utilise pas l'hypothèse que $P_{x,w}$ ne contienne pas de puissance fractionnaire de q , mais seulement la condition sur les degrés. La preuve de l'existence nous apprend donc *a posteriori* qu'en fait, $P_{x,w}$ est un polynôme en q . Avec exactement la même preuve que le théorème original, on obtient donc le théorème légèrement raffiné suivant, qui nous sera utile plus loin.

Théorème 1.21. *Pour chaque $w \in W$, il existe un unique élément $C_w \in \mathcal{H}(W)$ tel que $\iota(C_w) = C_w$ et*

$$C_w = q^{-l(w)/2} \sum_{x \leq w} P_{x,w} T_x,$$

où $P_{x,w}$ est un polynôme en $q^{1/2}$ de degré $\leq l(w) - l(x) - 1$ pour $x < w$, et $P_{w,w} = 1$. De plus, chaque $P_{x,w}$ est en fait un polynôme en q .

Les propriétés des éléments C_w impliquent qu'ils forment en fait une base de $\mathcal{H}(W)$. Les polynômes de Kazhdan-Lusztig sont donc, à une normalisation près, les coefficients de la matrice de changement de base permettant d'exprimer les C_w en terme des T_w .

Corollaire 1.22. $(C_w)_{w \in W}$ est une $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -base de $\mathcal{H}(W)$.

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 1.17, on a

$$C_w = q^{-l(w)/2} T_w + \sum_{x < w} q^{-l(w)/2} P_{x,w} T_x.$$

À partir de cette formule, on montre facilement par induction sur $l(w)$ que T_w est une combinaison $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ -linéaire des C_x avec $x \leq w$. Ceci prouve que les C_w engendrent $\mathcal{H}(W)$.

Par ailleurs, si $\sum_x a_x C_x = 0$, si w est un élément de longueur maximale apparaissant dans cette somme, par l'indépendance des T_w , on doit avoir $a_w = 0$. En retirant w de la somme et en répétant ce procédé, on conclut que $a_x = 0$ pour tout $x \in W$.

Donc les C_w sont linéairement indépendants.

□

Le théorème 1.17 justifie l'introduction *a priori* artificielle de la racine carrée de l'indéterminée q dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$. En effet, sans elle, il est impossible d'obtenir un élément de base auto-dual C_s associé à une réflexion simple. La racine carrée de q permet donc d'obtenir formellement de belles propriétés pour la dualité, ce qui est à mettre en parallèle avec la construction de la cohomologie d'intersection qui sera exposée au chapitre 3, dont la motivation première est d'obtenir une dualité de Poincaré même pour les espaces singuliers.

Nous commencerons cependant par définir et étudier, au prochain chapitre, l'opération de *convolution* qui sera l'analogue topologique de la multiplication dans l'algèbre de Hecke.

Chapitre 2

CONVOLUTIONS

Dans ce chapitre, nous étudions abstraitement une opération de *convolution* que l'on peut définir dès que l'on dispose d'un formalisme de foncteurs adéquat.

Nous allons donc tout d'abord décrire le contexte dans lequel nous pouvons définir cette opération et en prouver les principales propriétés dans la section 2.1 avant de donner quelques exemples de situations dans lesquelles nous pouvons définir un tel produit de convolution (section 2.2).

L'intérêt de ce chapitre réside dans le fait que tous les résultats obtenus pourront être appliqués dans le cadre du contexte décrit au prochain chapitre; il provient donc d'un désir d'extraire les propriétés essentielles, présentes dans le cas de la catégorie dérivée constructible, nécessaires à l'existence d'un produit de convolution qui se comporte bien.

Le traitement de cette section est relativement original, bien que son contenu soit plus ou moins implicite dans [11] et [29].

2.1. PRODUIT DE CONVOLUTION

2.1.1. Axiomes

Soit \mathcal{C} une sous-catégorie de la catégorie des espaces topologiques telle que pour toute paire d'objets X et Y de \mathcal{C} , le produit $X \times Y$ est aussi un objet de \mathcal{C} , et les projections

$$p_X : X \times Y \rightarrow X \quad \text{et} \quad p_Y : X \times Y \rightarrow Y$$

sont des morphismes dans \mathcal{C} .

Donnons-nous de plus un foncteur contravariant

$$A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$$

à valeurs dans la catégorie \mathcal{A} des *semi-anneaux*, c'est-à-dire des triplets $(B, +, \cdot)$, où $+$ et \cdot sont deux lois de composition associatives sur B telles que \cdot est distributive sur $+$.

Alors à chaque objet X de \mathcal{C} est associé un semi-anneau $A(X)$, et toute fonction continue $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} induit un homomorphisme préservant les deux opérations

$$f^* := A(f) : A(Y) \rightarrow A(X).$$

Remarque 2.1. En pratique, le foncteur A sera toujours à valeurs dans la catégorie des semi-anneaux possédant des neutres pour $+$ et \cdot , de sorte que l'on demandera également que f^* préserve les neutres :

$$f^*(0_Y) = 0_X \quad \text{et} \quad f^*(1_Y) = 1_X.$$

Il serait agréable, de plus, que chaque fonction $f : X \rightarrow Y$ induise une application $f_* : A(X) \rightarrow A(Y)$, mais ce ne sera pas réaliste en pratique. Il faudra se restreindre au cas où f est une fonction *propre*, c'est-à-dire que l'image inverse par f d'un compact est compacte.

Nous allons donc supposer que chaque fonction propre $f : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme pour l'addition

$$f_* : A(X) \rightarrow A(Y)$$

de façon fonctorielle, c'est-à-dire que

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

chaque fois que cette équation a du sens.

Il est important de souligner que l'on ne demande pas que f_* préserve l'opération de multiplication. Nous demandons cependant que, pour une certaine classe

de fonctions propres $f : X \rightarrow Y$ contenant au moins les projections à partir d'un espace compact, f_* et f^* satisfont la *formule de projection*

$$f_*(a_X \cdot f^* a_Y) = f_* a_X \cdot a_Y, \quad a_X \in A(X), a_Y \in A(Y). \quad (2.1.1)$$

Remarquons que cette formule serait évidemment vérifiée si f_* préservait \cdot et que $f_* f^* = 1$. Ce ne sera cependant jamais le cas dans les exemples qui nous intéressent, mais la formule de projection sera l'outil qui nous permettra de contourner ce problème.

Nous imposons un axiome de compatibilité supplémentaire aux morphismes f^* et f_* . Si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

est un *carré cartésien* dans \mathcal{C} , c'est-à-dire que c'est l'on peut identifier X avec le produit fibré $Y \times_W Z$, nous voulons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(X) & \xleftarrow{f^*} & A(Z) \\ g_* \downarrow & & \downarrow h_* \\ A(Y) & \xleftarrow{k^*} & A(W) \end{array}$$

commute. C'est ce que nous appellerons la *formule de changement de base*.

Exemple 2.2. Si $i : X \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'un sous-espace compact (par exemple si Y est compact et X fermé dans Y), alors $i^* i_* = 1$, ce qui découle du carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ 1 \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Exemple 2.3. Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme entre deux espaces compacts, d'inverse g , le carré cartésien suivant nous dit que $f^* = g_*$. (En particulier,

si $\sigma : X \rightarrow X$ est un homéomorphisme involutif, on a $\sigma^* = \sigma_*$.)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1 \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{1} & X \end{array}$$

Dans ce cas, la formule de projection est une conséquence de la formule de changement de base, car

$$f_*(a_X \cdot f^*a_Y) = g^*(a_X \cdot f^*a_Y) = g^*a_X \cdot g^*f^*a_Y = g^*a_X \cdot a_Y.$$

Remarque 2.4. Dans le cas où A est un foncteurs d'algèbres (sur un certain corps ou anneau de base), les projections

$$p_X : X \times Y \rightarrow X \quad \text{et} \quad p_Y : X \times Y \rightarrow Y,$$

qui induisent des homomorphismes

$$p_X^* : A(X) \rightarrow A(X \times Y) \quad \text{et} \quad p_Y^* : A(Y) \rightarrow A(X \times Y),$$

donnent lieu à un *homomorphisme de Künneth*

$$\boxtimes := p_X^* \cdot p_Y^* : A(X) \otimes A(Y) \rightarrow A(X \times Y)$$

En pratique, ce sera souvent un isomorphisme. Nous avons les identités

$$p_X^* a_X = a_X \boxtimes 1_Y \quad \text{et} \quad p_Y^* a_Y = 1_X \boxtimes a_Y,$$

pour tout $a_X \in A(X)$ et $a_Y \in A(Y)$.

2.1.2. Convolution et propriétés

Si X_1, X_2 et X_3 sont trois objets de \mathcal{C} et que X_2 est compact, nous pouvons définir une application

$$\star : A(X_1 \times X_2) \times A(X_2 \times X_3) \longrightarrow A(X_1 \times X_3)$$

par la formule

$$a_{12} \star a_{23} := p_{13*} (p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \tag{2.1.2}$$

où les projections p_{12} , p_{23} et p_{13} sont explicitées dans le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X_1 \times X_2 \times X_3 & & \\
 & \swarrow p_{12} & \downarrow p_{13} & \searrow p_{23} & \\
 X_1 \times X_2 & & X_1 \times X_3 & & X_2 \times X_3
 \end{array}$$

La condition que X_2 soit compact est nécessaire pour garantir que la projection $p_{13} : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_1 \times X_3$, dont les fibres sont X_2 , soit propre.

Nous allons maintenant établir les propriétés de base de cette opération.

Proposition 2.5. *L'opération \star est distributive sur $+$, c'est-à-dire que l'on a*

$$\begin{aligned}
 (a_{12} + b_{12}) \star a_{23} &= a_{12} \star a_{23} + b_{12} \star a_{23} \quad \text{et} \\
 a_{12} \star (a_{23} + b_{23}) &= a_{12} \star a_{23} + a_{12} \star b_{23}
 \end{aligned}$$

pour $a_{12}, b_{12} \in A(X_1 \times X_2)$, $a_{23}, b_{23} \in A(X_2 \times X_3)$.

DÉMONSTRATION. Ceci découle directement de la distributivité dans $A(X_1 \times X_2 \times X_3)$ et du fait que les f^* et f_* préservent la somme. Par exemple, dans le premier cas, nous avons

$$\begin{aligned}
 (a_{12} + b_{12}) \star a_{23} &= p_{13*}(p_{12}^*(a_{12} + b_{12}) \cdot p_{23}^*a_{23}) \\
 &= p_{13*}((p_{12}^*a_{12} + p_{12}^*b_{12}) \cdot p_{23}^*a_{23}) \\
 &= p_{13*}(p_{12}^*a_{12} \cdot p_{23}^*a_{23} + p_{12}^*b_{12} \cdot p_{23}^*a_{23}) \\
 &= p_{13*}(p_{12}^*a_{12} \cdot p_{23}^*a_{23}) + p_{13*}(p_{12}^*b_{12} \cdot p_{23}^*a_{23}) \\
 &= a_{12} \star a_{23} + b_{12} \star a_{23}.
 \end{aligned}$$

□

Proposition 2.6. *Le produit de convolution est associatif, c'est-à-dire que si $a_{12} \in A(X_1 \times X_2)$, $a_{23} \in A(X_2 \times X_3)$ et $a_{34} \in A(X_3 \times X_4)$ avec X_2 et X_3 compacts, alors l'égalité suivante est satisfaite dans $A(X_1 \times X_4)$:*

$$(a_{12} \star a_{23}) \star a_{34} = a_{12} \star (a_{23} \star a_{34}).$$

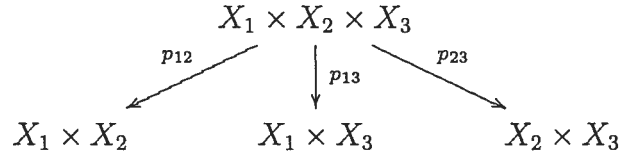
DÉMONSTRATION. Ce sera une conséquence de l'associativité du produit dans $A(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4)$ si nous parvenons à établir les formules

$$(a_{12} \star a_{23}) \star a_{34} = \rho_{14*}((\rho_{12}^* a_{12} \cdot \rho_{23}^* a_{23}) \cdot \rho_{34}^* a_{34}) \quad \text{et}$$

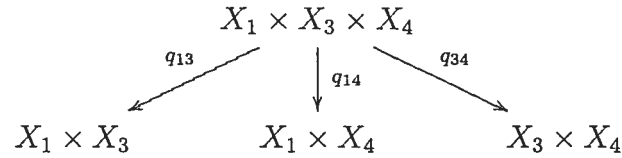
$$a_{12} \star (a_{23} \star a_{34}) = \rho_{14*}(\rho_{12}^* a_{12} \cdot (\rho_{23}^* a_{23} \cdot \rho_{34}^* a_{34}))$$

où ρ_{ij} dénote la projection $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \rightarrow X_i \times X_j$. Prouvons la première égalité, la deuxième s'obtenant de façon tout à fait similaire.

Tout d'abord, fixons les notations. Nous utiliserons la lettre p pour désigner les projections à partir de $X_1 \times X_2 \times X_3$, qui sont impliquées dans la première opération \star ,



et la lettre q pour celles ayant pour domaine $X_1 \times X_3 \times X_4$, qui sont impliquées dans la seconde.



Désignons également par ρ_{ijk} les projections

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4 \rightarrow X_i \times X_j \times X_k.$$

Nous obtenons alors la série d'égalités suivantes qui permet d'établir la formule voulue (la justification de chaque étape est donnée à la page suivante).

$$(a_{12} \star a_{23}) \star a_{34} = q_{14*}(q_{13}^* p_{13*}(p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \cdot q_{34}^* a_{34}) \quad (1)$$

$$= q_{14*}(\rho_{134*} \rho_{123}^*(p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \cdot q_{34}^* a_{34}) \quad (2)$$

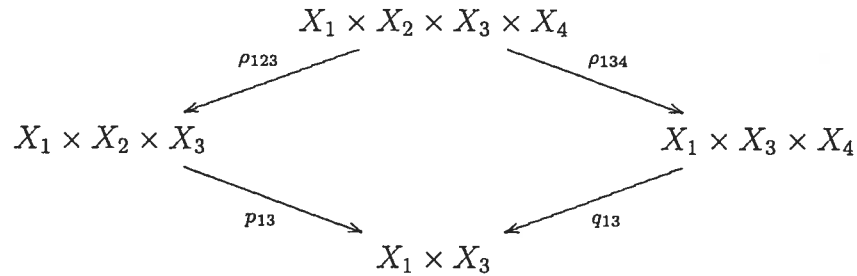
$$= q_{14*}(\rho_{134*}(\rho_{123}^* p_{12}^* a_{12} \cdot \rho_{123}^* p_{23}^* a_{23}) \cdot q_{34}^* a_{34}) \quad (3)$$

$$= q_{14*}(\rho_{134*}(\rho_{12}^* a_{12} \cdot \rho_{23}^* a_{23}) \cdot q_{34}^* a_{34}) \quad (4)$$

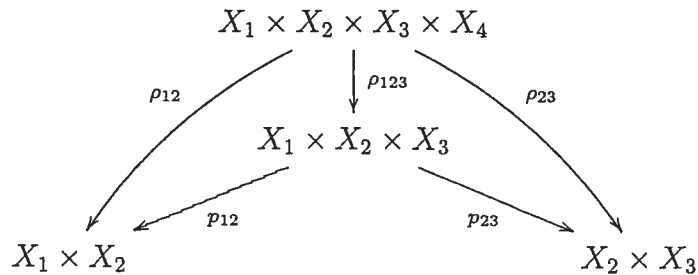
$$= q_{14*} \rho_{134*}((\rho_{12}^* a_{12} \cdot \rho_{23}^* a_{23}) \cdot \rho_{134}^* q_{34}^* a_{34}) \quad (5)$$

$$= \rho_{14*}((\rho_{12}^* a_{12} \cdot \rho_{23}^* a_{23}) \cdot \rho_{34}^* a_{34}). \quad (6)$$

- (1) Les deux opérations \star sont remplacées par leur définition.
 (2) On tire $\rho_{123\star}\rho_{134}^\star = p_{13}^\star q_{13\star}$ du carré cartésien suivant.

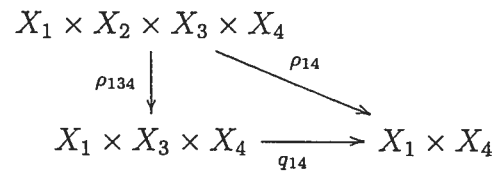


- (3) ρ_{123}^\star préserve la multiplication.
 (4) On a un diagramme commutatif



duquel on tire que $\rho_{12}^\star = \rho_{123}^\star p_{12}^\star$ et $\rho_{23}^\star = \rho_{123}^\star p_{23}^\star$.

- (5) On applique la formule de projection (2.1.1) à $f = \rho_{134}$.
 (6) Le diagramme commutatif



nous garantit que $\rho_{14\star} = q_{14\star}\rho_{134\star}$.

□

Des propositions 2.5 et 2.6, il découle immédiatement que, pour tout objet compact X de \mathcal{C} , la convolution définit sur $A(X \times X)$ une deuxième structure de semi-anneau.

Par ailleurs, on peut appliquer la mécanique de la preuve de la proposition 2.6 telle quelle à un produit de r facteurs, ce qui nous donnera une formule utile à des fins de calcul.

Explicitement, soient X_1, \dots, X_{r+1} des objets de \mathcal{C} , tous compacts sauf peut-être X_1 et X_{r+1} . Notons ρ_i , $i = 1, \dots, r$, la projection de $X_1 \times \dots \times X_r$ sur $X_i \times X_{i+1}$ et ρ la projection $X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow X_1 \times X_{r+1}$.

Lemme 2.7. *Pour $a_i \in A(X_i \times X_{i+1})$, $i = 1, \dots, r$, le produit $a_1 \star \dots \star a_r$ peut être calculé avec la formule*

$$\star_{i=1}^r a_i = \rho_* \left(\prod_{i=1}^r \rho_i^* a_i \right).$$

Nous voudrions également savoir jusqu'à quel point l'opération de convolution est compatible avec l'opération de multiplication déjà existante dans les semi-anneaux. Par exemple, pour $a_{12} \in A(X_1 \times X_2)$, $a_{23} \in A(X_2 \times X_3)$, nous aimerions bien avoir une formule du genre

$$(a_{12} \star a_{23}) \cdot c = a_{12} \star (a_{23} \cdot c).$$

Pour que cette formule ait un sens, il faut au moins que c soit « indépendant de sa première variable », de sorte que l'on puisse l'interpréter à la fois comme un élément de $A(X_1 \times X_3)$ dans le membre de gauche de l'équation et comme un élément de $A(X_2 \times X_3)$ dans le membre de droite. La proposition suivante nous dit que cette condition est suffisante.

Proposition 2.8. *Pour $a_{12} \in A(X_1 \times X_2)$, $a_{23} \in A(X_2 \times X_3)$ et $a_3 \in A(X_3)$, nous avons*

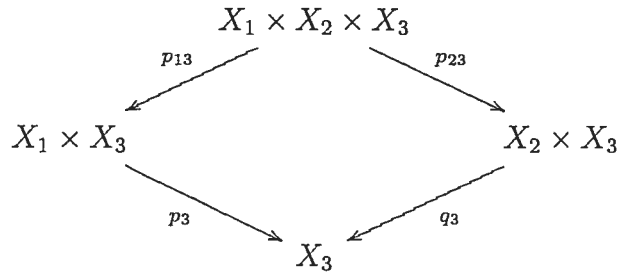
$$(a_{12} \star a_{23}) \cdot p_3^* a_3 = a_{12} \star (a_{23} \cdot q_3^* a_3),$$

où $p_3 : X_1 \times X_3 \rightarrow X_3$ et $q_3 : X_2 \times X_3$ sont les projections sur X_3 .

DÉMONSTRATION. Cette propriété découle de l'associativité dans $A(X_1 \times X_2 \times X_3)$ et de la formule de projection. En effet,

$$\begin{aligned}
 (a_{12} \star a_{23}) \cdot p_3^* a_3 &= p_{13*}(p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \cdot p_3^* a_3 \\
 &= p_{13*}((p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \cdot p_{13}^* p_3^* a_3) \\
 &= p_{13*}((p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^* a_{23}) \cdot p_{23}^* q_3^* a_3) \\
 &= p_{13*}(p_{12}^* a_{12} \cdot (p_{23}^* a_{23} \cdot p_{23}^* q_3^* a_3)) \\
 &= p_{13*}(p_{12}^* a_{12} \cdot p_{23}^*(a_{23} \cdot q_3^* a_3)) \\
 &= a_{12} \star (a_{23} \cdot q_3^* a_3).
 \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la commutativité du diagramme suivant à la troisième ligne.



□

Il existe bien sûr une version « à gauche » de cette formule :

$$p_1^* a_1 \cdot (a_{12} \star a_{23}) = (q_1^* a_1 \cdot a_{12}) \star a_{23}.$$

2.2. EXEMPLES

Voyons maintenant quelques exemples de situations dans lesquels nos axiomes sont satisfaits et dans lesquelles nous pouvons donc définir un produit de convolution. Il peut être instructif de relire les preuves de la section précédente dans le contexte de chacun de ces exemples, cela les rend beaucoup plus limpides.

2.2.1. Correspondances

Prenons pour \mathcal{C} la catégorie des ensembles, considérée comme sous-catégorie de la catégorie des espaces topologiques en munissant chaque ensemble de la

topologie grossière. Alors toute fonction

$$f : X \rightarrow Y$$

est continue, et également propre, car tous les espaces sont compacts.

Considérons le foncteur de semi-anneaux

$$X \mapsto P(X)$$

associant à chaque ensemble son ensemble de parties, muni de \cup comme loi additive et \cap comme loi multiplicative, avec \emptyset comme neutre additif et X comme neutre multiplicatif.

Étant donné une fonction $f : X \rightarrow Y$, nous disposons des applications d'image inverse

$$\begin{aligned} f^* : P(Y) &\rightarrow P(X) \\ A &\mapsto f^{-1}(A) \end{aligned}$$

et d'image directe

$$\begin{aligned} f_* : P(X) &\rightarrow P(Y) \\ B &\mapsto f(B), \end{aligned}$$

qui sont toutes deux fonctorielles.

Les formules

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \cup A') &= f^{-1}(A) \cup f^{-1}(A'), \\ f^{-1}(A \cap A') &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(A'), \\ f(B \cup B') &= f(B) \cup f(B'), \\ f^{-1}(Y) &= X, \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \text{et} \\ f(\emptyset) &= \emptyset \end{aligned}$$

nous garantissent que f^* et f_* ont les propriétés voulues. Cependant, f_* ne préserve pas \cap en général car on ne peut garantir seulement que

$$f(B \cap B') \subset f(B) \cap f(B').$$

Cependant, on vérifie que la formule de projection est bel et bien valide :

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

La formule de changement de base est également vérifiée. En effet, si

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

est un carré cartésien, on a $g_* f^* = k^* h_*$, car, pour $A \subset Z$,

$$g(f^{-1}(A)) = \{y \in Y \mid \exists_{z \in A} k(y) = h(z)\} = k^{-1}(h(A)).$$

Dans ce contexte, la définition de la convolution donne, pour $A \subset X \times Y$ et $B \subset Y \times Z$,

$$A \star B = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists_{y \in Y} (x, y) \in A, (y, z) \in B\}.$$

Exemple 2.9. Si f est un fonction $X \rightarrow Y$, son graphe

$$G(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

est un sous-ensemble de $X \times Y$. L'opération \star sur les graphes n'est rien d'autre que la composition de fonctions, c'est-à-dire que si on a $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$, alors

$$G(f) \star G(g) = G(f \circ g).$$

C'est ce que Springer appelle le *calcul des correspondances* [30].

2.2.2. Fonctions scalaires

Prenons pour \mathcal{C} la catégorie des ensembles, mais cette fois munis de la topologie discrète. Toutes les fonctions sont encore continues, mais cette fois-ci les fonctions propres sont les fonctions $f : X \rightarrow Y$ à fibres finies.

Soit A un anneau quelconque, et définissons

$$A(X) := A^X$$

l'anneau des fonctions de X dans A , muni de l'addition et de la multiplication des images.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction entre deux ensembles, on a un homomorphisme $f^* : A(Y) \rightarrow A(X)$ défini par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$.

De plus, pour une fonction propre $f : X \rightarrow Y$, on peut définir $f_* : A(X) \rightarrow A(Y)$, par la formule

$$f_*(\varphi)(y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x)$$

(cette somme est finie car f est à fibres finies).

On vérifie facilement que les définitions de f^* et f_* sont fonctorielles, que f^* est un homomorphisme d'anneaux et que f_* est un homomorphisme de groupes abéliens.

La formule de projection est vérifiée, car pour $f : X \rightarrow Y$, $\varphi \in A(Y)$, $\psi \in A(X)$ et $y \in Y$, on a

$$\begin{aligned} f_*(f^*\varphi \cdot \psi)(y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} f^*\varphi(x) \cdot \psi(x) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(f(x)) \cdot \psi(x) \\ &= \varphi(y) \cdot \sum_{x \in f^{-1}(y)} \psi(x) \\ &= \varphi(y) \cdot f_*\psi(y), \end{aligned}$$

donc $f_*(f^*\varphi \cdot \psi) = \varphi \cdot f_*\psi$.

Maintenant, considérons le carré cartésien suivant.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

Pour $\varphi \in A(Z)$ et $z \in Z$, on calcule

$$(g_*f^*\varphi)(z) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} (f^*\varphi)(x) = \sum_{x \in g^{-1}(z)} \varphi(f(x)),$$

tandis que

$$(k^*h_*\varphi)(z) = (h_*\varphi)(k(z)) = \sum_{y \in h^{-1}(k(z))} \varphi(y).$$

Ces deux sommes sont égales puisque $X = Y \times_W Z$, donc on a bien $g_*f^* = k^*h_*$.

Dans ce cas-ci, la formule que l'on obtient pour le produit de convolution $A(X \times Y) \otimes A(Y \times Z) \rightarrow A(X \times Z)$ est donc (pour Y compact, c'est-à-dire fini) :

$$(f \star g)(x, z) := \sum_{y \in Y} f(x, y)g(y, z).$$

On peut vérifier que l'homomorphisme de Künneth est bien un isomorphisme ici, car

$$(f \boxtimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Les trois prochains exemples sont de nature (co)homologique.

2.2.3. Cohomologie de De Rham

Soit \mathcal{C} la catégorie des variétés différentielles et considérons

$$A(X) := H_{DR}^\bullet(X)$$

la cohomologie de De Rham de X .

On sait qu'une application différentiable $f : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme

$$\begin{aligned} f^* : \Omega^\bullet(Y) &\rightarrow \Omega^\bullet(X) \\ \omega &\mapsto \omega \circ f \end{aligned}$$

au niveau des formes différentielles, qui descend au niveau de la cohomologie pour donner

$$f^* : H_{dR}^\bullet(Y) \rightarrow H_{dR}^\bullet(X).$$

De même, si $f : X \rightarrow Y$ est propre de fibre F , elle induit f_* au niveau des formes différentielles définie par

$$f_*(\omega) := \int_F \omega.$$

On obtient donc

$$f_* : \Omega^\bullet(X) \rightarrow \Omega^{\bullet-d}(Y)$$

si la fibre F est de dimension d . Cet homomorphisme descend au niveau de la cohomologie pour donner

$$f_* : H_{dR}^\bullet(X) \rightarrow H_{dR}^{\bullet-d}(Y).$$

On a ici un isomorphisme de Künneth :

$$\boxtimes : H_{dR}^\bullet(X) \otimes H_{dR}^\bullet(Y) \rightarrow H_{dR}^\bullet(X \times Y)$$

qui préserve la graduation.

On a également des formules de projection et de changement de base, voir par exemple [7].

Dans ce cas-ci, le produit de convolution, défini sur les formes différentielles par

$$\omega_{12} \star \omega_{23} = \int_{X_2} p_{12}^* \omega_{12} \wedge p_{23}^* \omega_{23}$$

pour X_2 compact, nous donne un produit de convolution

$$\star : H_{dR}^\bullet(X_1 \times X_2) \otimes H_{dR}^\bullet(X_2 \times X_3) \rightarrow H_{dR}^{\bullet-d}(X_1 \times X_3),$$

où d est la dimension de X_2 .

2.2.4. Homologie de Borel-Moore

On retrouve une construction semblable dans [11] au niveau de l'homologie de Borel-Moore,

$$X \mapsto H_\bullet^{BM}(X),$$

pour laquelle il existe des applications f^* et f_* (pour les applications propres) reliées par des formules de projection et de changement de base.

2.2.5. Catégories dérivées constructibles

Maintenant, passons à l'exemple qui a servi de modèle à la situation abstraite décrite à la section 2.1.1 et qui sera décrit en détails au prochain chapitre.

Prenons pour \mathcal{C} la catégorie des variétés projectives complexes munies de leur topologie *usuelle* (et non pas de Zariski) et considérons le foncteur

$$X \mapsto \mathcal{D}^{bc}(X),$$

associant à chaque variété X sa *catégorie dérivée bornée constructible*, munie de la somme directe \oplus et du produit tensoriel *dérivé* \otimes .

Alors, chaque morphisme $f : X \rightarrow Y$ induit

$$f^* : \mathcal{D}^{bc}(Y) \rightarrow \mathcal{D}^{bc}(X) \quad \text{et} \quad Rf_* : \mathcal{D}^{bc}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{bc}(Y),$$

qui satisfont tous nos axiomes (voir la section 3.3).

On obtiendra donc une opération de convolution, définie par

$$\mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{G}^\bullet = Rp_*(p_1^*\mathcal{F}^\bullet \otimes p_2^*\mathcal{G}^\bullet).$$

En considérant la variété de drapeaux $X := G/B$, ce sera une version G -équivariante de $\mathcal{D}^{bc}(X \times X)$, munie de l'opération de convolution \star , qui nous permettra de réaliser géométriquement l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$.

Chapitre 3

LA CATÉGORIE DÉRIVÉE CONSTRUCTIBLE

Nous voulons définir une opération de convolution, telle que décrite au chapitre précédent, qui nous permette d'interpréter géométriquement les opérations dans l'algèbre de Hecke d'un groupe de Weyl. On pourrait être tenté de la définir au niveau des faisceaux, où on dispose de foncteurs f^* et f_* (section 3.1), mais le foncteur f_* ne se comporte pas suffisamment bien. Par exemple, contrairement à f^* , qui est exact, f_* ne l'est pas en général.

Il est donc nécessaire de remplacer f_* par son *foncteur dérivé* Rf_* , ce qui nous oblige à travailler au niveau de la *catégorie dérivée* de la catégorie des faisceaux. Nous décrivons grossièrement les catégories dérivées et les foncteurs dérivés dans la section 3.2.

En se restreignant aux objets de la catégorie dérivée une condition de *constructibilité* (section 3.3.2), on obtient enfin une paire de foncteurs (f^*, Rf_*) satisfaisant à tous nos axiomes.

Remarquons que, pour simplifier l'exposé en y éliminant le maximum de subtilités, nous ne travaillerons qu'avec des espaces *compacts*.

3.1. LES FONCTEURS f^* ET f_* AU NIVEAU DES FAISCEAUX

Si X est un espace topologique, nous noterons $Sh(X)$ la catégorie des faisceaux de \mathbb{Q} -espaces vectoriels sur X (la notation fait référence au mot anglais *sheaf*). Nous allons supposer connus la plupart des concepts de base relatifs au faisceaux (voir [16] ou [20] par exemple), mais nous nous attarderons quand même sur un point qui mérite une attention particulière ici.

Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, nous disposons de deux foncteurs

$$f^* : Sh(Y) \rightarrow Sh(X) \quad \text{et} \quad f_* : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$$

au niveau des faisceaux.

Le foncteur f_* d'*image directe* est défini sur un faisceau $\mathcal{F} \in Sh(X)$ par

$$f_*(\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Proposition 3.1. *Le foncteur $f_* : Sh(X) \rightarrow Sh(Y)$ est exact à gauche.*

Exemple 3.2. Si $j : X \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'un fermé X dans un espace topologique Y et \mathcal{F} un faisceau sur X , alors $j_*\mathcal{F}$ est l'*extension de \mathcal{F} par 0*, c'est-à-dire que

$$(j_*\mathcal{F})_x = \begin{cases} \mathcal{F}_x & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci implique que, dans ce cas, le foncteur j_* est exact.

Le foncteur f^* d'*image inverse*, pour sa part, est défini pour $\mathcal{G} \in Sh(Y)$ par

$$(f^*\mathcal{G})(U) := \varprojlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V).$$

En tant qu'espace étalé, $f^*\mathcal{G}$ est le produit fibré faisant commuter le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} f^*\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

En particulier, la fibre de $f^*\mathcal{G}$ au point $x \in X$ est

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}.$$

Exemple 3.3. Si $j : X \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'un sous-espace et \mathcal{G} un faisceau sur Y , alors $j^*\mathcal{G}$ est la restriction $\mathcal{G}|_X$ de \mathcal{G} à X .

Proposition 3.4. *Le foncteur $f^* : Sh(Y) \rightarrow Sh(X)$ est exact.*

La proposition suivante nous donne le lien entre les foncteurs f^* et f_* .

Proposition 3.5. *Le foncteur f^* est adjoint à gauche à f_* , c'est-à-dire que pour $\mathcal{F} \in Sh(X)$ et $\mathcal{G} \in Sh(Y)$, il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

En particulier, les isomorphismes

$$\mathrm{Hom}(f^*\mathcal{G}, f^*\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*f^*\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(f^*f_*\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(f_*\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$$

nous fournissent des *morphismes d'adjonction* naturels

$$\mathcal{G} \rightarrow f_*f^*\mathcal{G} \quad \text{et} \quad f^*f_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

correspondant aux morphismes $1_{f^*\mathcal{G}}$ et $1_{f_*\mathcal{F}}$, respectivement.

Ces morphismes d'adjonctions ne sont pas des isomorphismes en général, mais ils le sont néanmoins dans certains cas particuliers.

Exemple 3.6. Si $j : X \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'un fermé et \mathcal{F} un faisceau sur X comme dans l'exemple 3.2, alors le morphisme d'adjonction $j^*j_*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ est un isomorphisme. En effet, il induit des isomorphismes au niveau des fibres :

$$(j^*j_*\mathcal{F})_x = (j_*\mathcal{F})_{j(x)} = (j_*\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_x \quad \text{pour tout } x \in X.$$

C'est-à-dire qu'étendre un faisceau défini sur un fermé à tout l'espace, puis le restreindre à ce fermé, nous redonne le faisceau initial.

Lemme 3.7. *Soit $j : X \hookrightarrow Y$ l'inclusion d'un fermé et \mathcal{G} un faisceau sur Y . Alors le morphisme d'adjonction $\mathcal{G} \rightarrow j_*j^*\mathcal{G}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{G}|_{Y \setminus X} = 0$.*

DÉMONSTRATION. Au niveau des fibres, on a

$$(j_*j^*\mathcal{G})_x = \begin{cases} (j^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_x & \text{si } x \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit donc que le morphisme d'adjonction est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{G}_x = 0$ pour tout $x \notin X$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{G}|_{Y \setminus X} = 0$. □

3.2. CATÉGORIES ET FONCTEURS DÉRIVÉS

Dans cette section, nous décrivons informellement la *catégorie dérivée* $D(\mathcal{A})$ d'une catégorie abélienne \mathcal{A} . N'ayant pas besoin des détails techniques de sa construction, que l'on peut trouver dans [12] ou [15], par exemple, nous nous contenterons de cette discussion plus ou moins vague.

3.2.1. Catégories dérivées

Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. On peut former la catégorie $K(\mathcal{A})$ des complexes (cohomologiques) dans \mathcal{A} , dont les objets sont les *complexes* A^\bullet , c'est-à-dire les suites

$$\dots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^i} A^i \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+1} \longrightarrow \dots$$

avec $d^{i+1} \circ d^i = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et dont les morphismes sont les homomorphismes commutant avec les différentielles.

Si A est un objet de \mathcal{A} , nous pouvons le considérer comme un complexe *localisé en 0*, c'est-à-dire l'identifier avec le complexe A^\bullet défini par

$$A^i := \begin{cases} A & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous donne un foncteur d'inclusion $\mathcal{A} \rightarrow K(\mathcal{A})$.

Il y a un foncteur involutif $H^\bullet : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{A})$ qui associe à chaque complexe A^\bullet son complexe de cohomologie $H^\bullet(A^\bullet)$ défini par

$$H^i(A^\bullet) := \text{Ker } d^{i+1} / \text{Im } d^i$$

(et muni de la différentielle nulle).

Définition 3.8. Un morphisme de complexes $\varphi : A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ est un *quasi-isomorphisme* si l'application $H^\bullet(\varphi) : H^\bullet(A^\bullet) \rightarrow H^\bullet(B^\bullet)$ induite en cohomologie est un isomorphisme.

Intuitivement, la *catégorie dérivée* $D(\mathcal{A})$ est une catégorie dont les objets sont les complexes dans \mathcal{A} (à homotopie près) et dont les morphismes sont obtenus des morphismes de complexes en rajoutant formellement des inverses aux quasi-isomorphismes. Ceci veut dire qu'un quasi-isomorphisme entre deux complexes devient un isomorphisme dans la catégorie dérivée. On peut donc considérer que la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ est obtenue de la catégorie $K(\mathcal{A})$ en extrayant l'information cohomologique de celle-ci.

En effet, si A^\bullet est un complexe, l'application naturelle

$$A^\bullet \rightarrow H^\bullet(A^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme, donc, dans la catégorie dérivée, le complexe A^\bullet est isomorphe à sa cohomologie $H^\bullet(A^\bullet)$.

Remarquons toutefois que l'information cohomologique extraite est celle qui provient de façon naturelle des complexes de chaînes, c'est-à-dire que deux complexes A^\bullet et B^\bullet ayant des cohomologies isomorphes ne seront isomorphes dans la catégorie dérivée que si l'isomorphisme $H^\bullet(A^\bullet) \rightarrow H^\bullet(B^\bullet)$ provient de quasi-isomorphismes au niveau des complexes de chaînes.

Si la catégorie \mathcal{A} possède *suffisamment d'injectifs*, alors chaque complexe A^\bullet possède une *résolution injective*, c'est-à-dire qu'il existe un quasi-isomorphisme

$$A^\bullet \rightarrow I^\bullet,$$

où I^\bullet est un complexe injectif. Ceci implique que, dans $D(\mathcal{A})$, tout objet peut être représenté par un complexe injectif I^\bullet . Par ailleurs, cette représentation est *unique* dans la catégorie dérivée. En effet, un théorème d'algèbre homologique affirme que deux résolutions injectives

$$A^\bullet \rightarrow I^\bullet \quad \text{et} \quad A^\bullet \rightarrow J^\bullet$$

sont nécessairement *homotopes*, ce qui implique que, dans la catégorie dérivée, les complexes I^\bullet et J^\bullet sont *égaux*. Cela est important, puisque que c'est ce qui permet la définition des foncteurs dérivés, dont nous reparlerons un peu plus bas.

Il est important de souligner que la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne n'est *pas* abélienne en général, contrairement à la catégorie des complexes (les noyaux et co-noyaux de morphismes n'y sont pas bien définis). Elle a néanmoins la structure de *catégorie triangulée*. Une de ses particularités essentielles est l'existence, pour chaque $d \in \mathbb{Z}$, d'un *foncteur de translation* $A^\bullet \mapsto A^\bullet[d]$ défini par

$$(A^\bullet[d])^i := A^{i+d}.$$

Ceci signifie que le complexe $A^\bullet[d]$ est le complexe A^\bullet décalé de d graduations « vers la gauche » (par exemple, si A^\bullet est un complexe localisé en 0, alors A^\bullet sera localisé en $-d$).

L'intérêt de travailler avec la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ plutôt qu'avec la catégorie des complexes $K(\mathcal{A})$ est que plusieurs foncteurs intéressants, qui ne sont pas exacts sur les complexes en général, le sont sur les complexes injectifs, et donc le deviennent, dans un certain sens, sur la catégorie dérivée.

3.2.2. Foncteurs dérivés

Un foncteur exact $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre deux catégories abéliennes induit un foncteur

$$F : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$$

au niveau des catégories dérivées, défini tout simplement sur un complexe A^\bullet par

$$F(A^\bullet)^i := F(A^i).$$

Cependant, cette définition ne fonctionne plus si F n'est pas exact.

Néanmoins, si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ n'est qu'exact à gauche, alors on peut souvent définir son *foncteur dérivé à droite*

$$RF : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$$

au niveau des catégories dérivées (R pour *right*). Ce foncteur est « exact » dans le sens où il préserve les *triangles distingués*.

Les foncteurs dérivés à droite $R^i F$ au sens usuel, c'est-à-dire définis comme foncteurs $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, peuvent être obtenus en prenant la cohomologie du foncteur dérivé RF . En effet, pour un objet A de \mathcal{A} , $R^i F(A)$ est défini par la formule

$$R^i F(A) := H^i(RF(A)),$$

dans laquelle on considère A comme un complexe localisé en 0.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{R^i F} & \mathcal{B} \\ \downarrow & & \uparrow H^i \\ D(\mathcal{A}) & \xrightarrow{RF} & D(\mathcal{B}) \end{array}$$

Dans ce langage, l'« exactitude » de RF au niveau des catégories dérivées se traduit par le fait que toute courte suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

dans \mathcal{A} induit une longue suite exacte

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C) \rightarrow RF^1(A) \rightarrow RF^1(B) \rightarrow RF^1(C) \rightarrow \dots$$

dans \mathcal{B} .

L'introduction des foncteurs dérivés $R^i F$ étant nécessaire pour pallier au manque d'exactitude de F , cela justifie le passage aux catégories dérivées pour pouvoir travailler avec RF .

Notons que, de la même façon, un foncteur exact à droite $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ peut induire un *foncteur dérivé à gauche* $LF : D(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{B})$. Nous pouvons également obtenir des foncteurs dérivés à partir de foncteurs contravariants exacts à gauche ou à droite.

3.3. LA CATÉGORIE DÉRIVÉE CONSTRUCTIBLE $\mathcal{D}^{bc}(X)$

Notons $D^b(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes A^\bullet *bornés*, c'est-à-dire tels que

$$A^i = 0 \quad \text{pour } |i| \gg 0.$$

3.3.1. La catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(X)$

Si X est un espace topologique, nous noterons

$$\mathcal{D}^b(X) := D^b(\mathcal{S}h(X))$$

la catégorie dérivée bornée de la catégorie des faisceaux sur X .

Dans $\mathcal{D}^b(X)$, nous disposons des opérations de somme directe \oplus usuelle et de *produit tensoriel dérivé* \otimes , ainsi que des foncteurs de translation $[d]$ pour $d \in \mathbb{Z}$.

De plus, si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre deux pseudo-variétés, alors les foncteurs

$$f^* : \mathcal{S}h(Y) \rightarrow \mathcal{S}h(X) \quad \text{et} \quad f_* : \mathcal{S}h(X) \rightarrow \mathcal{S}h(Y)$$

au niveau des faisceaux induisent des foncteurs dérivés

$$f^* : \mathcal{D}^b(Y) \rightarrow \mathcal{D}^b(X) \quad \text{et} \quad Rf_* : \mathcal{D}^b(X) \rightarrow \mathcal{D}^b(Y)$$

puisque tout objet de $\mathcal{D}^b(X)$ peut être représenté par un complexe injectif *borné* (voir [4]).

Remarque 3.9. Si $f_* : \mathcal{S}h(X) \rightarrow \mathcal{S}h(Y)$ est exact, par exemple si $f : X \hookrightarrow Y$ est l'inclusion d'un fermé (voir l'exemple 3.2), alors nous laisserons tomber le R de la notation et désignerons seulement par f_* le foncteur induit au niveau des catégories dérivées. Certains auteurs, pour leur part, le laissent systématiquement tomber afin de simplifier la notation.

Plusieurs des propriétés formelles de f^* et f_* au niveau des faisceaux induisent des propriétés analogues pour f^* et Rf_* au niveau des catégories dérivées. Par exemple, f^* est adjoint à gauche à Rf_* . Par ailleurs, f^* et Rf_* commutent avec les opérateurs de translation $[d]$. Nous avons également la proposition suivante (voir [4]).

Proposition 3.10. *Si $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux pseudo-variétés et $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{D}^b(Y)$, alors dans $\mathcal{D}^b(X)$ on a*

$$f^*(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet) = f^*(\mathcal{F}^\bullet) \otimes f^*(\mathcal{G}^\bullet) \quad \text{et} \quad f^*(\mathbb{Q}_Y) = \mathbb{Q}_X,$$

où \mathbb{Q}_X et \mathbb{Q}_Y désignent les faisceaux constants de fibre \mathbb{Q} sur X et Y .

3.3.2. Constructibilité

Pour que les foncteurs f^* et Rf_* satisfassent tous nos axiomes (section 2.1.1), nous devons imposer une condition de *constructibilité* aux complexes de faisceaux que nous considérons. À partir de cette section, nous devons imposer quelques conditions supplémentaires aux espaces topologiques considérés, satisfaites par exemple s'ils sont des *pseudo-variétés* (nous en parlerons à la section 4.1.1).

Définition 3.11. Un faisceau \mathcal{F} sur X est dit *constructible* s'il existe une stratification $X = \sqcup X_\alpha$ de X telle que la restriction de \mathcal{F} à chaque strate X_α est un système local.

Définition 3.12. Un *complexe constructible* est un complexe de faisceaux \mathcal{F}^\bullet dont les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$ sont constructibles.

Nous noterons $\mathcal{D}^{bc}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^b(X)$ dont les objets sont représentés par des complexes constructibles. Il faut mentionner qu'il ne s'agit *pas* de la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux constructibles.

Dans la catégorie dérivée constructible, nous obtenons enfin les deux relations qui nous manquaient entre les foncteurs f^* et Rf_* : la formule de projection et la formule de changement de base. On peut en trouver des preuves dans [4].

Proposition 3.13 (formule de projection). *Si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue entre deux pseudo-variétés et $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^b(Y)$, $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{D}^b(X)$, on a*

$$Rf_*(f^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{G}^\bullet \otimes Rf_*\mathcal{F}^\bullet.$$

Proposition 3.14 (formule de changement de base). *Étant donné le carré cartésien suivant, on a $Rg_* \circ f^* = k^* \circ Rh_*$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{k} & W \end{array}$$

Remarque 3.15. Il existe de propriétés analogues si on travaille avec des espaces X non nécessairement compacts en remplaçant le foncteur Rf_* par $Rf!$, mais ces deux foncteurs dérivés coïncident dans le cas où l'application f est *propre* (c'est-à-dire si l'image inverse de tout compact par f est compacte).

3.3.3. Dualité de Verdier

En travaillant avec la catégorie dérivée constructible, un heureux accident se produit : il y existe une notion de dualité, la *dualité de Verdier*. L'algèbre de Hecke étant elle aussi munie d'une involution, c'est un signe que nous sommes sur la bonne voie.

Théorème 3.16 (dualité de Verdier). *Pour toute pseudo-variété X , il existe un objet $\mathbb{D}_X \in \mathcal{D}^{bc}(X)$, appelé le complexe dualisant sur X , qui permet de définir un foncteur contravariant $D : \mathcal{D}^{bc}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{bc}(X)$ ayant les propriétés suivantes :*

- (1) $D(\mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{D}_X)$;
- (2) $D(D(\mathcal{F}^\bullet)) = \mathcal{F}^\bullet$;
- (3) $D(\mathbb{Q}_X) = \mathbb{D}_X$;
- (4) $D(\mathcal{F}^\bullet[d]) = D(\mathcal{F}^\bullet)[-d]$;
- (5) $D(\mathcal{F}^\bullet \oplus \mathcal{G}^\bullet) = D(\mathcal{F}^\bullet) \oplus D(\mathcal{G}^\bullet)$.

Le complexe \mathbb{D}_X joue donc le même rôle dualisant dans $\mathcal{D}^b(X)$ que le corps \mathbb{Q} joue dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 3.17. *Si X est une pseudo-variété non singulière de dimension n , alors*

$$\mathbb{D}_X = \mathbb{Q}_X[n].$$

Exemple 3.18. Si X est une variété complexe non singulière, les théorèmes 3.16 et 3.17 impliquent donc que

$$D(\mathbb{Q}_X) = \mathbb{Q}_X[2n].$$

Puisque l'on peut « couper » $2n$ en deux, nous pouvons ré-écrire ceci

$$D(\mathbb{Q}_X)[-n] = \mathbb{Q}_X[n], \quad \text{ou encore} \quad D(\mathbb{Q}_X[n]) = \mathbb{Q}_X[n].$$

$\mathbb{Q}_X[n]$ est donc un objet auto-dual dans $\mathcal{D}^{bc}(X)$ (remarquer l'analogie avec l'exemple 1.19).

Calculons maintenant explicitement le foncteur de dualité de Verdier sur une sous-catégorie importante de $\mathcal{D}^{bc}(X)$, qui joue le rôle de l'anneau de base dans l'algèbre de Hecke.

Soit \mathcal{V} la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^{bc}(X)$ formée des faisceaux d'espaces vectoriels constants sur X . Un objet de \mathcal{V} est donc un espace vectoriel gradué

$$V^\bullet = \bigoplus_d V^{-d}[d]$$

où chaque V^d est de dimension finie. Nous pouvons définir un autre dual de V^\bullet par

$$\overline{V^\bullet} := \bigoplus_d (V^d)^*[d].$$

Proposition 3.19. *Pour $V^\bullet \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{bc}(X)$, on a*

$$D(V^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet) = \overline{V^\bullet} \otimes D(\mathcal{F}^\bullet).$$

DÉMONSTRATION. Si $V^\bullet = \bigoplus_d V^{-d}[d]$ avec $n_d = \dim V^{-d}$, alors

$$V^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet = \bigoplus_d (\mathcal{F}^\bullet)^{n_d}[d],$$

donc, en utilisant les propriétés du théorème 3.16, on calcule

$$D(V^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet) = \bigoplus_d (\mathcal{F}^\bullet)^{n_d}[-d] = \overline{V}^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet.$$

□

Corollaire 3.20. *Si X est une pseudo-variété non singulière de dimension n , alors pour $V^\bullet \in \mathcal{V}$ on a $D(V^\bullet) = \overline{V}^\bullet[n]$.*

DÉMONSTRATION. En posant $\mathcal{F}^\bullet := \mathbb{Q}_X$ dans la formule de la proposition 3.19, on trouve, en utilisant le théorème 3.17,

$$D(V^\bullet) = \overline{V}^\bullet \otimes \mathbb{D}_X = \overline{V}^\bullet \otimes \mathbb{Q}_X[n] = \overline{V}^\bullet[n].$$

□

Dans le prochain chapitre, nous allons identifier certains objets fort importants de $\mathcal{D}^{bc}(X)$: les complexes d'intersection, qui joueront le même rôle que les éléments de la base de Kazhdan-Lusztig dans l'algèbre de Hecke.

Chapitre 4

COHOMOLOGIE D'INTERSECTION

La théorie de la (co)homologie s'est avéré être un outil essentiel dans l'étude des variétés topologiques. La cohomologie $H^\bullet(X)$ d'un espace topologique X est un invariant homotopique, qui possède une structure algébrique très riche si X est une variété (compacte). Une de ses propriétés les plus importantes est la *dualité de Poincaré* : si X est une variété topologique compacte de dimension n , alors

$$H^{n-i}(X) \cong H^i(X)^*.$$

Cependant, la plupart de ces propriétés algébriques agréables disparaissent dès que l'espace X est *singulier*, rendant la cohomologie usuelle inefficace pour l'étude des variétés singulières. C'est pour remédier à ce problème que Goresky et MacPherson [17, 18] ont développé à la fin des années 70 la *cohomologie d'intersection*, associant notamment à chaque variété algébrique complexe X une cohomologie $IH^\bullet(X)$ satisfaisant une dualité de Poincaré

$$IH^{n-i}(X) \cong IH^i(X)^*$$

et généralisant la cohomologie ordinaire, c'est-à-dire que $IH^\bullet(X)$ coïncide avec $H^\bullet(X)$ si X est non singulière.

Évidemment, toute généralisation se fait au détriment de certaines propriétés, et le coût à payer pour gagner la dualité de Poincaré est la perte de l'invariance *homotopique* de la cohomologie : la cohomologie d'intersection n'est qu'un invariant *topologique*.

Par la suite, des remarques de Deligne ont permis d'observer que l'objet essentiel de la construction n'était pas la cohomologie d'intersection $IH^\bullet(X)$ elle-même, mais plutôt le *complexe* (de faisceaux) *d'intersection* $\mathcal{IC}^\bullet(X)$, étudié par la suite par Goresky et MacPherson dans [19], ainsi que par Beilinson, Bernstein, Deligne (et Gabber), qui ont introduit dans [2] le concept de *faisceaux pervers*.

Après avoir exposé les principales propriétés de la (co)homologie d'intersection suivant l'approche originale de Goresky et MacPherson dans la section 4.1, nous verrons que l'on peut en fait caractériser le complexe d'intersection dans la catégorie dérivée constructible $\mathcal{D}^{bc}(X)$ par des propriétés simples (section 4.2).

4.1. HOMOLOGIE D'INTERSECTION

4.1.1. Pseudo-variétés

Dans [17], Goresky et MacPherson ont défini l'homologie d'intersection pour une certaine classe d'espaces possiblement singuliers : les pseudo-variétés (dans cette section nous devons supposer que tous les espaces et les applications continues sont *linéaires par morceaux*). Pour simplifier l'exposé, nous nous restreignons dès le départ aux pseudo-variétés *compactes*.

Définition 4.1. Une *pseudo-variété de dimension n* est un espace topologique compact X admettant une stratification

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{n-3} \subset X_{n-2} \subset X_n = X$$

telle que $X_n \setminus X_{n-2}$ est une variété orientée de dimension n dense dans X , et que chaque strate $X_i \setminus X_{i-1}$ non vide est une variété de dimension i le long de laquelle la structure normale de X est localement triviale (voir [19]).

L'idée de cette définition est de permettre à X d'avoir des singularités, mais de les trier selon leur codimension : les singularités de codimension i se retrouvent dans X_{n-i} . Sur un ouvert dense, X est non singulier, et les singularités, s'il y en a, sont incluses dans X_{n-2} . Remarquons que cela exclut qu'il puisse y avoir des

singularités de codimension 1. Ensuite, X_{n-2} est non singulier, sauf peut-être sur X_{n-3} , qui contient les singularités de codimension 3, et ainsi de suite.

Exemple 4.2. Toute variété topologique X de dimension n peut être considérée comme une pseudo-variété en la munissant de la stratification

$$X_{-1} = X_0 = X_1 = \dots = X_{n-2} = \emptyset \subset X_n = X.$$

Exemple 4.3. Toute variété algébrique complexe X de dimension *complexe* n admet une *stratification de Whitney* par des sous-variétés algébriques lui conférant ainsi une structure de pseudo-variété de dimension $2n$ dont toutes les strates sont de dimension paire (voir [26] ou [4]) :

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 = X_1 \subset X_2 = X_3 \subset \dots \subset X_{2n-2} \subset X_{2n} = X.$$

4.1.2. Perversités

Étant donnée une pseudo-variété X de dimension n , nous voulons définir le complexe de chaînes d'intersection $IC_\bullet(X)$ comme un sous-complexe du complexe de chaînes usuelles $C_\bullet(X)$ formé des chaînes étant suffisamment « dimensionnellement transverses » aux strates de X . Pour préciser le sens de l'adverbe « suffisamment » dans la phrase précédente, nous devons introduire le concept de perversité, contrôlera la dimension des intersections avec chaque strate.

Définition 4.4. Une suite d'entiers $p = (p_2, \dots, p_n)$ est une *perversité* si

$$p_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_k \leq p_{k+1} \leq p_k + 1 \quad \text{pour tout } k.$$

Étant donné une perversité p , ce sera p_k qui contrôlera les dimensions des intersections des chaînes avec X_{n-k} .

Voici les exemples les plus importants de perversités.

Exemple 4.5. Les suites

$$0 := (0, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad t := (0, 1, 2, \dots, n-2)$$

sont deux perversités, appelées respectivement la *perversité nulle* et la *perversité maximale* (t pour *top*).

Exemple 4.6. Les deux suites

$$m := (0, 0, 1, 1, 2, 2, \dots) \quad \text{et} \quad m' := (0, 1, 1, 2, 2, 3, \dots)$$

sont également deux perversités, que nous appellerons *perversités médianes*.

À partir d'une suite d'entiers $p = (p_2, \dots, p_n)$, nous pouvons définir une autre suite p^* par l'équation $p + p^* = t$, c'est-à-dire

$$p_k^* = k - 2 - p_k.$$

La proposition suivante nous donne une reformulation de la définition 4.4.

Proposition 4.7. *Une suite d'entiers $p = (p_2, \dots, p_n)$ avec $p_2 = 0$ est une perversité si et seulement si p et p^* sont toutes deux croissantes.*

DÉMONSTRATION. (\Rightarrow) Écrivons $p_{k+1} = p_k + \varepsilon_k$, où $\varepsilon_k = 0$ ou 1 . Alors, clairement, $p_{k+1} \geq p_k$. Par ailleurs, $p_{k+1}^* = p_k^* + (1 - \varepsilon_k) \geq p_k^*$. Donc p et p^* sont toutes deux croissantes.

(\Leftarrow) Le fait que p soit croissante nous dit que $p_{k+1} \geq p_k$; par ailleurs, le fait que p^* le soit également nous dit que $k+1 - p_{k+1} \geq k - p_k$, c'est-à-dire $p_k + 1 \geq p_k$. Nous obtenons donc

$$p_k \leq p_{k+1} \leq p_k + 1.$$

□

Si p est une perversité, alors p^* en est également une; nous l'appellerons la *perversité complémentaire* (ou *duale*) de p . Notons que $(p^*)^* = p$. Nous utiliserons souvent les lettres p et q pour dénoter un couple de perversités complémentaires.

Exemple 4.8. Les perversités 0 et t sont complémentaires, ainsi que les perversités médianes m et m' .

Existe-t-il des perversités auto-duales ? Si p est une perversité telle que $p^* = p$, elle devrait vérifier $k - 2 - p_k = p_k$ pour tout k , ce qui voudrait dire $p_k = k/2 - 1$. Ceci est bien sûr impossible à satisfaire si nous voulons que tous les termes p_k de la suite soient des entiers.

Remarquons que les perversités médianes m et m' vérifient toutes deux $p_{2k} = k - 1$, donc nous pouvons les considérer comme des perversités auto-duales si l'on se restreint aux strates de dimensions paires. Nous en reparlerons à la section 4.1.5.

4.1.3. Le complexe de chaînes d'intersection

Soit X une pseudo-variété de dimension n et p une perversité. Nous allons définir un complexe d'intersection

$$IC_{\bullet}(X) \subset C_{\bullet}(X)$$

formé des chaînes dont l'intersection avec chaque strate de X n'est « pas trop grosse ».

Définition 4.9. Un sous-espace Y de X de dimension i est dit *p -admissible* si

$$\dim(Y \cap X_{n-k}) \leq i - k + p_k, \quad k = 2, \dots, n$$

(avec la convention que $\dim \emptyset = -\infty$).

Remarque 4.10. Si Y était dimensionnellement transverse à X_{n-k} , nous aurions

$$\dim(Y \cap X_{n-k}) = \dim Y + \dim X_{n-k} - n = i + (n - k) - n = i - k.$$

La perversité p dans la définition 4.9 contrôle donc jusqu'à quel point nous permettons à Y de dévier de la transversalité avec les X_{n-k} .

Soit $C_\bullet(X)$ le complexe des chaînes simpliciales de X (à coefficients rationnels). Pour chaque perversité p , on définit

$$IC_i^p(X) := \{c \in C_i(X) \mid |c| \text{ et } |\partial c| \text{ sont } p\text{-admissibles}\},$$

où $|\cdot|$ dénote le support géométrique (IC vient de l'anglais *intersection complex*).

Alors la différentielle $\partial : C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$ induit une différentielle

$$\partial : IC_i^p(X) \rightarrow IC_{i-1}^p(X).$$

En effet, pour $c \in IC_i^p(X)$, on a $\partial c \in IC_{i-1}^p(X)$, puisque $|\partial c|$ est p -admissible par la condition que $c \in IC_i^p(X)$, et que $|\partial(\partial c)| = |0| = \emptyset$ est trivialement p -admissible.

Définition 4.11. L'*homologie d'intersection* de X est par définition l'homologie de ce complexe :

$$IH_\bullet^p(X) := H_\bullet(IC_\bullet^p(X))$$

(IH pour *intersection homology*).

4.1.4. Propriétés de l'homologie d'intersection

Nous résumons maintenant les principales propriétés de l'homologie d'intersection qui découlent directement de la définition 4.11, telles qu'annoncées par Goresky et MacPherson dans [17] et prouvées dans [18].

Théorème 4.12. $IH_i^p(X)$ est un espace vectoriel de dimension finie indépendant de la stratification considérée sur X .

Dans le cas où X est une variété non singulière munie de la stratification décrite à l'exemple 4.2, on remarque que pour toute perversité p , la condition de p -admissibilité est trivialement vérifiée pour toute chaîne, donc $IC_\bullet^p(X) = C_\bullet(X)$. Il en découle immédiatement le théorème suivant, qui nous dit que l'homologie d'intersection coïncide avec l'homologie usuelle dans ce cas.

Théorème 4.13. *Si X est non singulière, alors $IH_{\bullet}^p(X) = H_{\bullet}(X)$ pour toute perversité p .*

Il y a d'autres situations dans lesquelles l'homologie d'intersection nous redonne des invariants connus, notamment lorsque X est *normale*.

Théorème 4.14. *Si X est normale, alors il existe des isomorphismes canoniques*

$$IH_i^0(X) \cong H^{n-i}(X) \quad \text{et} \quad IH_i^t(X) \cong H_i(X).$$

On peut donc penser à l'homologie d'intersection $IH_{\bullet}^p(X)$ pour une perversité p quelconque, comprise entre 0 et t , comme étant un invariant se situant « entre » la cohomologie et l'homologie usuelles.

Une des propriétés les plus importantes de l'homologie d'intersection est l'existence d'un *produit d'intersection*

$$\cap : IH_i^p(X) \otimes IH_j^q(X) \rightarrow IH_{i+j-n}^r(X),$$

si p, q et r sont des perversités telles que $p + q \leq r$, généralisant le produit \cap au niveau de la cohomologie usuelle.

C'est en utilisant ce produit que nous obtenons la dualité de Poincaré pour l'homologie d'intersection.

Théorème 4.15 (dualité de Poincaré généralisée). *Si p et q sont des perversités complémentaires et $i + j = n$, alors le produit d'intersection augmenté*

$$IH_i^p(X) \otimes IH_j^q(X) \rightarrow IH_0^t(X) = H_0(X) \rightarrow \mathbb{Q}$$

est non dégénéré.

Remarque 4.16. Dans le cas où X est une pseudo-variété normale et $p = 0$, $q = t$, ceci n'est rien d'autre que la dualité de Poincaré usuelle

$$H^{n-i}(X) \otimes H_i(X) \rightarrow \mathbb{Q}.$$

Il découle directement de ce théorème de dualité que

$$IH_{n-i}^p(X) \cong (IH_i^q(X))^*$$

lorsque p et q sont deux perversités complémentaires.

Notons qu'à ce stade, il serait difficile de se convaincre de l'invariance topologique de l'homologie d'intersection. C'est une des choses qui a incité Goresky et MacPherson à se tourner vers l'approche faisceautique qui leur a été suggérée par Deligne.

4.1.5. Cas des strates de dimension paire

Soit X une pseudo-variété de dimension $2n$ dont toutes les strates sont de dimension paire, c'est-à-dire que sa stratification est de la forme

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 = X_1 \subset X_2 = X_3 \subset \dots \subset X_{2n-2} \subset X_{2n} = X.$$

L'exemple le plus important que nous avons en tête est bien sûr celui d'une variété algébrique complexe de dimension complexe n (exemple 4.3).

Alors on remarque que la définition de $IC_{\bullet}^p(X)$ ne dépend que des valeurs de p sur les indices *pairs*, de sorte que si p et p' coïncident sur les indices pairs, on a

$$IH_{\bullet}^p(X) = IH_{\bullet}^{p'}(X).$$

Les perversités médianes m et m' de l'exemple 4.6 jouent alors un rôle privilégié puisqu'elles sont complémentaires et qu'elles coïncident sur les indices pairs.

Pour simplifier l'écriture, notons

$$IH_{\bullet}(X) := IH_{\bullet}^m(X) = IH_{\bullet}^{m'}(X).$$

Le théorème de dualité de Poincaré généralisé implique que l'on a une vraie dualité de Poincaré pour $IH_{\bullet}(X)$:

$$IH_{2n-i}(X) \cong (IH_i(X))^*.$$

4.1.6. Vers l'approche faisceautique

Établissons maintenant quelques conventions pour préparer le terrain à l'approche faisceautique de Deligne. Pour être consistant avec la majorité des auteurs qui préfèrent travailler avec des complexes cohomologiques qu'homologiques, nous définissons le complexe $IC_p^\bullet(X)$ par

$$IC_p^i(X) := IC_{n-i}^p(X),$$

de sorte que

$$IH_p^i(X) := H^i(IC_p^\bullet(X)) = H_{n-i}(IC_\bullet^p(X)) = IH_{n-i}^p(X).$$

Nous parlerons donc maintenant de *cohomologie* d'intersection plutôt que d'*homologie* d'intersection.

Remarque 4.17. Nous suivons ici la convention de graduation de Borel [4, 6], qui nous paraît la plus naturelle. Cependant, plusieurs auteurs, notamment Goresky et MacPherson [19], préfèrent utiliser la définition

$$IC_p^i(X) := IC_{-i}^p(X),$$

ce qui a pour effet d'avoir un complexe d'intersection situé en degrés $[-n, 0]$ plutôt que $[0, n]$. De plus, dans le cas où X est une variété complexe de dimension complexe n , on préfère parfois travailler avec l'intervalle symétrique $[-n, n]$ plutôt qu'avec $[0, 2n]$ comme dans [11] (voir la section 4.2.1).

Nous nous intéresserons maintenant, non seulement à la cohomologie d'intersection *globale* comme précédemment, mais aussi à sa version *locale*.

Définition 4.18. Le *complexe d'intersection de X de perversité p* est le complexe de faisceaux $IC_p^\bullet(X)$ sur X défini par

$$U \mapsto IC_p^\bullet(U), \quad U \subset X \text{ ouvert.}$$

Remarque 4.19. Comme précédemment, dans le cas où toutes les strates de X sont de dimension paire, nous ometterons la référence à la perversité p dans la notation lorsque $p = m$ ou m' et appellerons $\mathcal{IC}^\bullet(X)$ le complexe d'intersection de X .

Tel qu'annoncé dans l'introduction de ce chapitre, nous déplacerons maintenant notre attention de la cohomologie d'intersection de X vers son complexe d'intersection. Remarquons que

$$IH_p^\bullet(X) = H^\bullet(X, \mathcal{IC}_p^\bullet(X)),$$

l'hyper-cohomologie de ce complexe de faisceaux.

On peut également considérer, plutôt que d'utiliser seulement les coefficients \mathbb{Q} , une version *avec coefficients*.

Définition 4.20. Un *système local* (de coefficients) sur X est un faisceau localement constant sur X de \mathbb{Q} -espaces vectoriels.

Si \mathcal{L} est un système local sur X , on peut construire le *complexe d'intersection* $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$ avec coefficients \mathcal{L} , et la dualité de Poincaré prend la forme

$$IH_p^{n-i}(X, \mathcal{L}) \cong IH_p^i(X, \mathcal{L}^*).$$

Utiliser le système local constant \mathbb{Q}_X comme coefficients nous redonne le complexe d'intersection usuel :

$$\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathbb{Q}_X) = \mathcal{IC}_p^\bullet(X).$$

Il faut penser au complexe d'intersection $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$ comme étant une *extension* du système local \mathcal{L} , défini sur le lieu non singulier $X \setminus X_{n-2}$ de X , à l'espace total. Cette extension ne produit pas un système local, ni même un faisceau, mais plutôt un complexe de faisceau, que l'on peut caractériser par ses propriétés cohomologiques, comme nous le verrons à la section suivante.

4.2. LE COMPLEXE D'INTERSECTION

4.2.1. Caractérisation

Soit X une pseudo-variété de dimension n . Le théorème suivant donne une caractérisation des complexes d'intersection dans $\mathcal{D}^{bc}(X)$ ne dépendant pas de la stratification de X .

Remarque 4.21. L'énoncé du théorème a été adapté en fonction de notre convention de graduation des complexes d'intersection.

Théorème 4.22 (Goresky et MacPherson, [19], voir aussi [6]). *Pour toute perversité p de complémentaire q et pour tout système local \mathcal{L} sur un ouvert dense U de X de codimension au moins 2, il existe un unique objet $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{bc}(X)$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

- (1) $\mathcal{F}^\bullet|_U = \mathcal{L}$;
- (2) $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $i < 0$;
- (3) $\dim \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \leq n - p^{-1}(i)$ pour $i > 0$;
- (4) $\dim \text{supp } \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) \leq n - q^{-1}(i + n)$ pour $i > -n$.

De plus, cet objet \mathcal{F}^\bullet est le complexe d'intersection $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$ construit à la section 4.1.6.

Dans ce théorème, p^{-1} désigne le *sous-inverse* de p , défini par

$$p^{-1}(i) := \min\{k \mid p(i) \leq k\}$$

(avec la convention que $\min \emptyset = +\infty$).

Remarque 4.23. Au cours de la preuve, on obtient la formule

$$\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L}) = \tau_{\leq p(n)} Ri_{n*} \cdots \tau_{\leq p(3)} Ri_{3*} \tau_{\leq p(2)} \mathcal{L},$$

dans laquelle i_k désigne l'inclusion de $X \setminus X_{n-k}$ dans $X \setminus X_{n-k-1}$ et pour $k \in \mathbb{Z}$, $\tau_{\leq k} : \mathcal{D}^{bc}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{bc}(X)$ est le *foncteur de troncature*

$$(\tau_{\leq k} \mathcal{F}^\bullet)^i := \begin{cases} \mathcal{F}^i & \text{si } i < k, \\ \text{Ker}\{d^{i+1} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^{i+1}\} & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{si } i > k, \end{cases}$$

qui est un quasi-isomorphisme jusqu'à k .

On résume cela en disant que $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$ est l'*extension de Deligne* de \mathcal{L} .

On tire immédiatement trois corollaires important du théorème 4.22.

Corollaire 4.24. $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$ est un invariant topologique.

Corollaire 4.25. Si X est une variété non singulière de dimension n , on a $\mathcal{IC}_p^\bullet(X) = \mathbb{Q}$ pour toute perversité p .

Corollaire 4.26. $D(\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})) = \mathcal{IC}_q^\bullet(X, \mathcal{L}^*)[n]$.

La dualité de Poincaré généralisée globale pour la cohomologie d'intersection est donc le reflet d'une dualité locale au niveau des complexes d'intersection.

Maintenant, restreignons notre attention au cas où X est une variété algébrique complexe de dimension complexe n . Dans ce cas, nous pouvons « couper » la dimension réelle $2n$ de X en deux, afin de translater l'intervalle $[0, 2n]$ vers l'intervalle symétrique $[-n, n]$ et d'uniformiser les conditions sur \mathcal{F}^\bullet et son dual $D(\mathcal{F}^\bullet)$ dans l'énoncé du théorème 4.22.

Corollaire 4.27. Pour toute perversité p de complémentaire q et pour tout système local \mathcal{L} sur un ouvert U de X de codimension complexe au moins 1, il existe un unique objet $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{bc}(X)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

$$(1) \mathcal{F}^\bullet|_U = \mathcal{L}[n];$$

- (2) $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $i < -n$;
 (3) $\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \leq 2n - p^{-1}(n + i)$ pour $i > -n$;
 (4) $\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) \leq 2n - q^{-1}(n + i)$ pour $i > -n$.

De plus, cet objet \mathcal{F}^\bullet est le complexe d'intersection translaté

$$\mathcal{I}_p^\bullet(X, \mathcal{L}) := \mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})[n].$$

DÉMONSTRATION. Cette reformulation découle directement des formules

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet[n]) = \mathcal{H}^{i+n}(\mathcal{G}^\bullet) \quad \text{et} \quad \mathcal{H}^i(D(\mathcal{G}^\bullet[n])) = \mathcal{H}^{i-n}(\mathcal{G}^\bullet).$$

□

Ainsi, on peut ré-écrire la dualité du corollaire 4.26 comme

$$D(\mathcal{I}_p^\bullet(X, \mathcal{L})) = \mathcal{I}_q^\bullet(X, \mathcal{L}^*).$$

En particulier, le complexe d'intersection médiane translaté est auto-dual :

$$D(\mathcal{I}^\bullet(X)) = \mathcal{I}^\bullet(X).$$

En fait, on peut raffiner un peu les conditions de support du corollaire 4.27, puisque nous disposons d'un peu de latitude car les valeurs des perversités sur les indices impairs ne sont pas déterminantes pour $\mathcal{IC}_p^\bullet(X, \mathcal{L})$. En particulier, dans le cas de la perversité médiane $p = m$, nous pouvons utiliser $q = m$ également dans les conditions de support du corollaire 4.27, afin d'obtenir, en utilisant

$$m^{-1}(i) = \min\{2i + 2, 2i + 3\} = 2i + 2,$$

les conditions légèrement plus fortes, pour $i > -n$,

$$\dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet), \dim \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) \leq 2n - (2n + 2i + 2) = -2i - 2.$$

En divisant tout par 2, nous constatons que le complexe $\mathcal{F}^\bullet := \mathcal{I}^\bullet(X, \mathcal{L})$ satisfait

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet), \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) \leq -i - 1 < -i \quad \text{pour } i > -n.$$

4.2.2. Faisceaux pervers

Les *faisceaux pervers* sont définis en relâchant un peu les conditions précédentes pour admettre des inégalités strictes.

Définition 4.28. Un *faisceau pervers* sur X est un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{bc}(X)$ tel que

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet), \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{supp} \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) \leq -i \quad \text{pour tout } i.$$

On pourrait aussi définir une version de faisceaux pervers pour chaque perversité p , mais ce ne sera pas nécessaire ici.

Remarque 4.29. Si \mathcal{F}^\bullet est un faisceau pervers, les conditions de support impliquent directement que $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = \mathcal{H}^i(D(\mathcal{F}^\bullet)) = 0$ pour $i > 0$.

Proposition 4.30. *Le complexe d'intersection traduit $\mathcal{I}^\bullet(X, \mathcal{L})$ est un faisceau pervers.*

DÉMONSTRATION. La discussion de la fin de la section précédente nous garantit que les conditions de support sont vérifiées lorsque $i > -n$. Elles sont également trivialement vérifiées lorsque $i < -n$ puisque $\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^\bullet(X, \mathcal{L})) = 0$ dans ce cas. La condition $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{supp} \mathcal{H}^{-n}(\mathcal{I}^\bullet(X, \mathcal{L})) \leq n$ l'est également puisque $\dim_{\mathbb{C}} X = n$.

□

Notons $\mathcal{P}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}^{bc}(X)$ dont les objets sont les faisceaux pervers. Les conditions définissantes des faisceaux pervers étant auto-duales, $\mathcal{P}(X)$ est clairement stable sous la dualité de Verdier.

Si Y est une sous-variété localement fermée de X et \mathcal{L} un système local sur Y , on fera l'abus de notation de désigner par $\mathcal{I}^\bullet(Y, \mathcal{L})$ l'objet $j_*\mathcal{I}^\bullet(Y, \mathcal{L})$ de $\mathcal{D}^{bc}(X)$, où $j : Y \hookrightarrow X$ est l'inclusion de Y dans X .

L'intérêt des faisceaux pervers réside dans le théorème suivant.

Théorème 4.31 (Beilinson, Bernstein et Deligne, [2]). *La catégorie $\mathcal{P}(X)$ des faisceaux pervers est une catégorie abélienne, dont les objets simples sont les $\mathcal{IC}^\bullet(Y, \mathcal{L})$, où \mathcal{L} est un système local irréductible sur Y , une sous-variété localement fermée de X .*

Rappelons que la catégorie $\mathcal{D}^{bc}(X)$, pour sa part, n'était pas abélienne.

Remarque 4.32. « Les faisceaux pervers n'étant ni des faisceaux, ni pervers, la terminologie requiert une explication. » ([2], p. 10)

Le terme *pervers* fait bien sûr référence à la perversité p (implicite dans notre définition) qui contrôle les conditions sur les dimensions des supports.

Le choix du terme *faisceau*, pour sa part, bien que malheureux, s'explique par le fait que la catégorie $\mathcal{P}(X)$ partage plusieurs propriétés de la catégorie des faisceaux $\mathcal{Sh}(X)$. Notamment, c'est une catégorie abélienne, et les faisceaux pervers « se recollent comme des faisceaux. »

Le théorème de décomposition suivant est un autre résultat fondamental prouvé dans [2], dont la preuve utilise les conjectures de Weil.

Théorème 4.33 (théorème de décomposition, [2]). *Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre, alors on a dans $\mathcal{D}^{bc}(Y)$ l'égalité*

$$Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X)) = \bigoplus_{(Z, \mathcal{L})} V_{Z, \mathcal{L}}^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet(Z, \mathcal{L}),$$

où chaque Z est une sous-variété localement fermée de Y , \mathcal{L} un système local irréductible sur Z et $V_{Z, \mathcal{L}}^\bullet$ un espace vectoriel gradué.

Les espaces vectoriels gradués apparaissant dans cette décomposition jouent le rôle de multiplicités et de décalages dans les graduations. On peut donc reformuler le théorème en disant que $Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X))$ est une somme de complexe d'intersection (translatés) décalés.

Par ailleurs, on peut également le reformuler en disant que $Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X))$ est semi-simple dans $\mathcal{D}^{bc}(Z)$, un objet de $\mathcal{D}^{bc}(Z)$ étant dit *semi-simple* précisément lorsqu'il est de la forme du membre de droite de l'égalité du théorème 4.33.

Remarque 4.34. Si $f : X \rightarrow Y$ est une résolution des singularités de Y , alors, en se restreignant à l'ensemble des points non singuliers de Y , on voit que l'un des termes apparaissant dans la décomposition de $Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X))$ est $\mathcal{I}^\bullet(Y)$. Cela signifie que la cohomologie d'intersection de Y est « contenue » dans la cohomologie usuelle de X .

4.2.3. Version G -équivariante

Il existe également une version G -équivariante du théorème de décomposition, dont nous aurons besoin au chapitre 4. La catégorie dérivée bornée constructible $\mathcal{D}^{bc}(X)$ n'est cependant plus le contexte adéquat, il nous faut la remplacer par une version G -équivariante. Nous ne faisons ici que mentionner les résultats de façon informelle (les détails peuvent être trouvés dans [3]).

Soit X une variété algébrique complexe et G un groupe algébrique agissant (algébriquement) sur X . Notons $\mu : G \times X \rightarrow X$ cette action.

Définition 4.35. Un *faisceau G -équivariant* sur X ou un *G -faisceau* est un faisceau \mathcal{F} sur X muni d'un isomorphisme

$$\theta : \mu^* \mathcal{F} \cong \pi^* \mathcal{F}$$

satisfaisant quelques conditions de compatibilité (voir [3]), où π dénote la projection $G \times X \rightarrow X$.

En regardant au niveau des tiges des faisceaux, on voit que cela est équivalent à se donner des isomorphismes

$$\theta_{g,x} : (\mu^* \mathcal{F})_{(g,x)} = \mathcal{F}_{g \cdot x} \cong (\pi^* \mathcal{F})_{(g,x)} = \mathcal{F}_x$$

soumis aux conditions de compatibilité correspondantes.

On peut alors former la catégorie $Sh_G(X)$ des faisceaux G -équivariants sur X . Cependant, le bon choix pour définir la *catégorie dérivée G -équivariante* $\mathcal{D}_G(X)$ de X n'est *pas* $\mathcal{D}(Sh_G(X))$. On se contentera ici de dire que l'on doit penser aux objets de $\mathcal{D}_G(X)$ comme étant des objets de $\mathcal{D}(X)$ pouvant être représentés par des complexes de G -faisceaux, tout en tenant compte de la structure additionnelle fournie par l'action de G .

Nous avons également un analogue G -équivariant de la catégorie dérivée bornée constructible $\mathcal{D}_G^{bc}(X)$, muni d'un foncteur d'oubli

$$\mathcal{D}_G^{bc}(X) \rightarrow \mathcal{D}^{bc}(X).$$

Nous disposons sur $\mathcal{D}_G^{bc}(X)$ des foncteurs f^* , Rf_* (lorsque f est un morphisme respectant l'action de G) et D de dualité jouissant des mêmes propriétés formelles que leurs analogues usuels et commutant avec le foncteur d'oubli.

Tous les résultats des sections précédentes ont un analogue G -équivariant. En particulier, les objets simples de $\mathcal{P}_G(X)$ sont les complexes d'intersection $IC^\bullet(Y, \mathcal{L})$ où Y est une sous-variété G -stable de X et \mathcal{L} un système local G -équivariant sur Y .

Nous avons également un théorème de décomposition G -équivariant.

Théorème 4.36 (théorème de décomposition G -équivariant). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre G -équivariant de variétés algébriques complexes, alors*

$$Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X)) = \bigoplus_{(Z, \mathcal{L})} V_{Z, \mathcal{L}}^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet(Z, \mathcal{L}),$$

où chaque Z est une sous-variété G -stable de Y , \mathcal{L} un G -système local irréductible sur Z et $V_{Z, \mathcal{L}}^\bullet$ un espace vectoriel gradué.

Dans le cas où toutes les G -orbites sont *simplement connexes* et sont en nombre fini, tous les systèmes locaux \mathcal{L} apparaissant dans la décomposition sont en fait *constants*, et, étant irréductibles, sont nécessairement isomorphes au système local trivial \mathbb{Q} .

Le théorème de décomposition devient donc

$$Rf_*(\mathcal{I}^\bullet(X)) = \bigoplus_Z V_Z^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet(Z).$$

Si tous les objets simples de $\mathcal{P}(X)$ sont également de la forme $\mathcal{I}^\bullet(Z)$ (les systèmes locaux étant tous constants), le théorème de décomposition nous dit que l'image par Rf_* d'un objet semi-simple est également semi-simple.

Chapitre 5

LE THÉORÈME DE KAZHDAN-LUSZTIG

Dans ce chapitre, nous donnons la preuve de MacPherson (exposée par Springer [29, 30]) du *théorème de Kazhdan-Lusztig* reliant les polynômes de Kazhdan-Lusztig à la cohomologie d'intersection de la variété de drapeaux :

$$P_{x,w} = \sum_i \dim IH^{2i}(\overline{X(w)})_x q^{i/2},$$

où $IH^{2i}(\overline{X(w)})_x$ désigne la fibre de $\mathcal{H}^i(\mathcal{IC}^*(\overline{X(w)}))$ en un point (n'importe lequel) de $X(x)$.

Il en découle directement que les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig sont des entiers *positifs*, puisqu'ils représentent des dimensions de groupes de cohomologie.

Comme mentionné plus tôt, nous obtiendrons ce résultat comme un des aspects d'une correspondance plus forte qui dit que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$ est le miroir algébrique d'un semi-anneau $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{D}_G^{bc}(X \times X)$ muni du produit de convolution défini au chapitre 2. La résolution de Bott-Samelson joue un rôle crucial dans cette preuve.

5.1. LE SEMI-ANNEAU $\mathcal{H}(X)$

5.1.1. Passage de X à $X \times X$

Les complexes d'intersection qui nous intéressent sont définis sur les variétés de Schubert dans X , et non pas sur $X \times X$. Or, les cellules de Schubert dans X ,

les orbites pour l'action de B , correspondent aux orbites de G sur $X \times X$ pour l'action diagonale.

Proposition 5.1. *Les B -orbites de X correspondent aux G -orbites de $X \times X$ via la correspondance*

$$B \cdot gB \mapsto G \cdot (B, gB).$$

DÉMONSTRATION. Considérons la fonction $\varphi : X \times X \rightarrow B \backslash X$ définie par

$$(g_1B, g_2B) \mapsto B \cdot g_1^{-1}g_2B.$$

Il est clair que cette fonction est bien définie, et de plus elle est surjective car pour tout $gB \in X$, $B \cdot gB = \varphi(1B, gB)$.

La fonction φ est constante sur les orbites de G dans $X \times X$ car

$$\varphi(g \cdot (g_1B, g_2B)) = \varphi(gg_1B, gg_2B) = B \cdot g_1^{-1}g^{-1}gg_2B = B \cdot g_1^{-1}g_2B = \varphi(g_1B, g_2B).$$

Par ailleurs, si deux éléments (g_1B, g_2B) et (h_1B, h_2B) de $X \times X$ ont la même image par φ , alors

$$B \cdot g_1^{-1}g_2B = B \cdot h_1^{-1}h_2B,$$

c'est-à-dire qu'il existe $b_1, b_2 \in B$ tels que

$$h_1^{-1}h_2 = b_1g_1^{-1}g_2b_2.$$

Posons $g := h_1b_1g_1^{-1} = h_2b_2g_2^{-1} \in G$. Alors on a $g \cdot (g_1B, g_2B) = (h_1B, h_2B)$, c'est-à-dire que deux éléments ayant la même image sont dans la même G -orbite. \square

Remarque 5.2. La correspondance $B \cdot gB \mapsto G \cdot (gB, B)$ aurait tout aussi bien fait l'affaire, dans ce cas l'inverse aurait été donnée par

$$G \cdot (g_1B, g_2B) \mapsto B \cdot g_2^{-1}g_1B$$

et non pas

$$G \cdot (g_1B, g_2B) \mapsto B \cdot g_1^{-1}g_2B$$

comme c'est le cas présentement, mais ce n'est qu'une question de convention.

Donc, plutôt que nous intéresser aux cellules de Schubert, nous allons plutôt nous intéresser aux G -orbites dans $X \times X$.

Notons

$$\mathcal{O}(w) := \{(g_1B, g_2B) \in X \times X \mid g_1^{-1}g_2B \in X(w)\}$$

la G -orbite de $X \times X$ correspondant à la cellule de Schubert $X(w)$. $\mathcal{O}(w)$ est donc l'unique G -orbite de $X \times X$ contenant le point $(B, \dot{w}B)$. Nous avons

$$\overline{\mathcal{O}(w)} = \bigcup_{x \leq w} \mathcal{O}(x).$$

Lemme 5.3. *La projection sur le premier facteur*

$$\pi_1 : \overline{\mathcal{O}(w)} \rightarrow X$$

est une fibration localement triviale de fibre $F \cong \overline{X(w)}$ respectant la stratification, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute pour $x \leq w$.

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\cong} & \overline{X(w)} \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ F \cap \mathcal{O}(x) & \xrightarrow{\cong} & X(x) \end{array}$$

Cela découle du fait que la fibre F au-dessus du point $gB \in X$ est

$$\{(gB, hB) \mid g^{-1}hB \in B\dot{w}B\} = \{gB\} \times g \cdot B\dot{w}B.$$

Le lemme précédent implique que les fibres $F \cong \overline{X(w)}$ admettent un voisinage tubulaire dans $\overline{\mathcal{O}(w)}$, et donc que l'inclusion $i : F \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}(w)}$ est *normalement non singulière* (voir [19]), ce qui implique que

$$i^* \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}) \cong \mathcal{I}^\bullet(F)[n] \cong \mathcal{I}^\bullet(\overline{X(w)})[n], \quad (5.1.1)$$

où $n := l(w_0)$ est la dimension de X .

Par ailleurs, le fait que $\mathcal{O}(w)$ soit une fibration sur X de fibre $X(w)$ nous garantit que les G -orbites $\mathcal{O}(w)$ de $X \times X$ sont simplement connexes.

5.1.2. Définition de $\mathcal{H}(X)$

Soit $\mathcal{H}(X)$ l'ensemble des objets semi-simples de $\mathcal{D}_G^{bc}(X \times X)$, c'est-à-dire les complexes de la forme (voir la section 4.2.3)

$$\bigoplus_{w \in W} V_w^\bullet \otimes I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}).$$

Nous voulons étudier les propriétés *algébriques* de $\mathcal{H}(X)$. Il est clair que $\mathcal{H}(X)$ est clos sous \oplus , et la proposition suivante nous dit qu'il l'est également sous le produit de convolution défini au chapitre précédent.

Proposition 5.4. *$\mathcal{H}(X)$ est clos sous le produit de convolution \star .*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition 2.8, il suffit de vérifier que

$$I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)}) \star I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}) \in \mathcal{H}(X)$$

pour $x, w \in W$.

Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X \times X \times X \times X & & \\
 & \swarrow \rho_{12} & \uparrow \Delta & \searrow \rho_{34} & \\
 & & X \times X \times X & & \\
 & \swarrow p_{12} & \downarrow p_{13} & \searrow p_{23} & \\
 X \times X & & X \times X & & X \times X
 \end{array}$$

où Δ est l'application « diagonale »

$$\Delta(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_2, x_2, x_3).$$

Puisque $p_{12}^* = \Delta^* \rho_{12}^*$ et $p_{23}^* = \Delta^* \rho_{34}^*$, on peut calculer $I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)}) \star I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})$ par la formule

$$I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)}) \star I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}) = R p_{13*} \Delta^* \mathcal{F}^\bullet,$$

où

$$\mathcal{F}^\bullet = \rho_{12}^* I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)}) \otimes \rho_{34}^* I^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}).$$

Or, par l'unicité du complexe d'intersection (théorème 4.27), nous avons (voir [4])

$$\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{IC}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)} \times \overline{\mathcal{O}(w)}).$$

Considérons

$$Z := \Delta^{-1}(\overline{\mathcal{O}(x)} \times \overline{\mathcal{O}(w)}) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \overline{\mathcal{O}(x)}, (x_2, x_3) \in \overline{\mathcal{O}(w)}\}.$$

L'inclusion Δ de Z dans $\overline{\mathcal{O}(x)} \times \overline{\mathcal{O}(w)}$, nous avons donc

$$\Delta^* \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{I}^\bullet(Z)[n],$$

où n est la dimension de X (donc la codimension de Z dans $\overline{\mathcal{O}(x)} \times \overline{\mathcal{O}(w)}$).

Le théorème de décomposition G -équivariant (théorème 4.36) nous permet de conclure que

$$\mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(x)}) \star \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}) = R p_{13*}(\mathcal{I}^\bullet(Z)[n])$$

est semi-simple.

□

Proposition 5.5. $\mathcal{H}(X)$ est clos sous le foncteur de dualité de Verdier D .

DÉMONSTRATION. En utilisant la proposition 3.19 et le fait que les complexes d'intersection sont auto-duaux (section 4.2.1), on remarque que

$$D\left(\bigoplus_w V_w^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})\right) = \bigoplus_Y \overline{V}_w^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}).$$

□

On peut donc considérer l'ensemble des objets semi-simples $\mathcal{H}(X)$ comme un sous-semi-anneau de $\mathcal{D}_G^{bc}(X)$ stable sous la dualité de Verdier. Nous commençons à voir une ressemblance entre $\mathcal{H}(X)$ et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(W)$. Dans la section 5.1.4 nous définissons une *fonction caractéristique*

$$h : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(W)$$

qui s'avérera être un homomorphisme (section 5.2.6). Nous commencerons par définir cette fonction pour les espaces vectoriels gradués.

En effet, nous pouvons en fait considérer $\mathcal{H}(X)$ comme une *semi-algèbre* sur le semi-anneau \mathcal{V} des espaces vectoriels gradués (muni de \oplus et \otimes).

5.1.3. Polynôme de Poincaré

Soit V^\bullet un \mathbb{Q} -espace vectoriel gradué. On peut lui associer un élément

$$p(V^\bullet) := \sum_i \dim V^i q^{i/2} \in \mathbb{N}[q^{\pm 1/2}],$$

appelé *polynôme de Poincaré* de V^\bullet .

Remarque 5.6. On peut justifier l'utilisation de $q^{1/2}$ comme variable (et non pas q comme il pourrait sembler naturel) par le fait qu'une dimension *réelle* i correspond à une dimension *complexe* $i/2$.

La proposition suivante énumère quelques propriétés élémentaires de l'application $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$.

Proposition 5.7. *Pour $V^\bullet, W^\bullet \in \mathcal{V}$ et $d \in \mathbb{Z}$, on a :*

- (1) $p(0) = 0, p(\mathbb{Q}) = 1$;
- (2) $p(V^\bullet \oplus W^\bullet) = p(V^\bullet) + p(W^\bullet)$;
- (3) $p(V^\bullet \otimes W^\bullet) = p(V^\bullet)p(W^\bullet)$;
- (4) $p(\overline{V^\bullet}) = \overline{p(V^\bullet)}$;
- (5) $p(V^\bullet[d]) = q^{-d/2}p(V^\bullet)$.

Les espaces vectoriels étant uniquement caractérisés par leur dimension, l'application p établit donc un isomorphisme de \mathcal{V} sur $\mathbb{N}[q^{\pm 1/2}]$ préservant la somme, le produit et la dualité et traduisant le décalage $[d]$ par la multiplication par $q^{-d/2}$.

5.1.4. Fonction caractéristique

Définissons maintenant une application caractéristique

$$h : \mathcal{D}_G^{bc}(X \times X) \rightarrow \mathcal{H}(W).$$

Si $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_G^{bc}(X \times X)$ et $w \in W$, notons $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_w$ la fibre de son homologie $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$ en un point de $\mathcal{O}(w)$. Cela ne dépend pas du point choisi dans l'orbite, car la cohomologie de \mathcal{H} est localement constante sur les orbites, qui sont simplement connexes, elle est donc constante sur les orbites.

On peut alors définir un élément $h(\mathcal{F}^\bullet)$ de $\mathcal{H}(W)$ par la formule

$$h(\mathcal{F}^\bullet) := \sum_{w \in W} p(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)_w) T_w.$$

Chaque polynôme de Poincaré $p(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)_w)$ est un élément de $\mathbb{N}[q^{\pm 1/2}]$ bien défini puisque \mathcal{F}^\bullet est borné et constructible. L'élément $h(\mathcal{F}^\bullet)$ de $\mathcal{H}(W)$ n'est rien d'autre qu'une façon d'encoder l'information sur les fibres de la cohomologie de \mathcal{F}^\bullet .

De la même façon, si $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_B^{bc}(X)$, on peut définir

$$h(\mathcal{F}^\bullet) := \sum_{w \in W} p(\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)_w) T_w,$$

où $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)_w$ dénote la fibre en un point de $X(w)$.

Exemple 5.8. Soit V^\bullet un espace vectoriel gradué. En le considérant comme un complexe constant, on a

$$h(V^\bullet) = p(V) \sum_{w \in W} T_w.$$

La proposition suivante découle immédiatement des propriétés analogues des polynômes de Poincaré (proposition 5.7).

Proposition 5.9. Pour $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{D}_G^{bc}(X \times X)$ et $d \in \mathbb{Z}$, on a

- (1) $h(\mathcal{F}^\bullet \oplus \mathcal{G}^\bullet) = h(\mathcal{F}^\bullet) + h(\mathcal{G}^\bullet)$;
- (2) $h(\mathcal{F}^\bullet[d]) = q^{-d/2} h(\mathcal{F}^\bullet)$;
- (3) $h(V^\bullet \otimes \mathcal{F}^\bullet) = p(V) h(\mathcal{F}^\bullet)$.

Nous montrerons en 5.2.6 que la fonction h , restreinte à $\mathcal{H}(X)$, est injective. Pour l'instant, nous ne pouvons espérer guère mieux que la proposition suivante.

Proposition 5.10. $h(\mathcal{F}^\bullet) = 0 \iff \mathcal{F}^\bullet = 0$.

DÉMONSTRATION. (\Leftarrow) Évident.

(\Rightarrow) Si $h(\mathcal{F}^\bullet) = 0$, cela signifie que pour tout $x \in X$ et pour tout i , $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$. Donc $\mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet) = 0$, et comme $\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{H}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)$ dans la catégorie dérivée, cela implique que $\mathcal{F}^\bullet = 0$.

□

Lemme 5.11. $h(\mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})) = q^{-n/2}h(\mathcal{I}^\bullet(\overline{X(w)}))$.

DÉMONSTRATION. Pour $x \leq w$, nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{X(w)} & \longrightarrow & \overline{\mathcal{O}(w)} \\ \uparrow & & \uparrow \\ X(x) & \longrightarrow & \mathcal{O}(x) \end{array}$$

qui implique, avec la formule (5.1.1), que

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}))_x = \mathcal{H}^{i+n}(\overline{X(w)})_x.$$

□

Remarque 5.12. Attention! Il y a confusion dans l'article de Springer [29], puisqu'il note \mathcal{A}_w^\bullet alternativement l'un ou l'autre des complexes

$$\mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)}) \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})[-n]$$

selon les propriétés qu'il désire utiliser. Heureusement, ceci ne met pas en danger sa preuve, il suffit de faire preuve d'un peu de circonspection. Pour éviter toute confusion, nous n'utiliserons pas le symbole \mathcal{A}_w^\bullet , mais poserons

$$\mathcal{I}_w^\bullet := \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})[-n],$$

de sorte que nous pouvons donc reformuler le lemme précédent en disant que

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = h(\mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(w)})). \quad (5.1.2)$$

5.2. PREUVE DU THÉORÈME

Nous allons établir que l'application caractéristique h établit un isomorphisme de $\mathcal{H}(X)$ sur un sous-semi-anneau de $\mathcal{H}(W)$ tel que $h(\mathcal{I}_w^\bullet) = C_w$, l'élément de base de Kazhdan-Lusztig du théorème 1.17. Nous commencerons par établir cette dernière égalité, qui nous fournira le théorème de Kazhdan-Lusztig (théorème 5.25).

5.2.1. Lemme sur les degrés

Pour montrer que $h(\mathcal{I}_w^\bullet) = C_w$, il suffit de vérifier que l'élément $h(\mathcal{I}_w^\bullet)$ satisfait les deux conditions du théorème 1.21. Le lemme suivant nous garantit qu'il satisfait la seconde.

Lemme 5.13. *Pour tout $w \in W$, nous avons*

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = q^{-l(w)/2} \sum_{x \leq w} Q_{x,w} T_x,$$

où $Q_{w,w} = 1$ et $Q_{x,w} \in \mathbb{N}[q^{1/2}]$ est de degré $\leq l(w) - l(x) - 1$ en $q^{1/2}$ pour $x < w$.

DÉMONSTRATION. L'équation 5.1.2 nous dit que

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = \sum_{x \in W} a_{x,w} T_x,$$

où $a_{x,w} = p(H^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)) \in \mathbb{N}[q^{\pm 1/2}]$, \mathcal{F}^\bullet désignant le complexe d'intersection translaté $\mathcal{I}^\bullet(\overline{X(w)})$ sur $\overline{X(w)}$.

Puisque \mathcal{F}^\bullet est supporté sur $\overline{X(w)}$, on a $H^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)_x = 0$ si $x \not\leq w$, donc $a_{x,w} = 0$ sauf pour $x \leq w$. On peut donc se restreindre à prendre la somme sur les $x \leq w$.

Maintenant, utilisons le corollaire 4.27 qui caractérise le complexe d'intersection translaté $\mathcal{I}^\bullet(\overline{X(w)})$ pour établir les conditions de degré sur les éléments $a_{x,w}$.

Le fait que $\mathcal{F}^\bullet|_{X(w)} = \mathbb{Q}[l(w)]$ implique que $a_{w,w} = q^{-l(w)/2}$. Par ailleurs, si $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x \neq 0$, alors $i \geq -l(w)$ puisque $H^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour $i < -l(w)$.

De plus, si $\mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)_x \neq 0$, cela veut dire que $X(x) \subset \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet)$, et donc que

$$2l(w) = \dim X(x) \leq \dim \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \leq -2i - (2n + 2i + 2) = -2i + 2,$$

ce qui implique $i \leq -l(x) + 1$.

On en conclut donc que l'élément $Q_{x,w} := q^{l(w)/2} a_{x,w}$ a les propriétés voulues. \square

Pour prouver que $h(\mathcal{I}_w^\bullet)$ est l'élément de base C_w , il suffit donc de prouver qu'il est stable sous l'involution ι de $\mathcal{H}(W)$. C'est ce que nous tâcherons de faire au cours des prochaines sections.

5.2.2. Résolution de Bott-Samelson revisitée

Puisque nous avons remplacé la variété de Schubert $X(w)$ par $\overline{\mathcal{O}(w)}$, nous devons utiliser un analogue de la résolution des singularités $Z(w)$ pour $\overline{X(w)}$, décrite à la section 1.1.4, qui soit adapté à $\overline{\mathcal{O}(w)}$.

Soit $w \in W$ et $w = s_1 \cdots s_r$ une décomposition réduite de w . Définissons

$$Y(w) := \{(x_0, \dots, x_r) \in X^{r+1} \mid (x_{i-1}, x_i) \in \overline{\mathcal{O}(s_i)}, 1 \leq i \leq r\}.$$

Remarquons que, tout comme pour $Z(w)$, cette définition dépend du choix de la décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$.

Proposition 5.14. *Le morphisme $\pi : Y(w) \rightarrow \overline{\mathcal{O}(w)}$ défini par*

$$\pi(x_0, \dots, x_r) := (x_0, x_r)$$

est une résolution des singularités. En particulier, il induit un isomorphisme $\pi : \pi^{-1}(\mathcal{O}(w)) \rightarrow \mathcal{O}(w)$.

Remarque 5.15. En utilisant la notation utilisée dans l'exemple du calcul des correspondances (section 2.2.1), nous voyons que

$$\overline{\mathcal{O}(w)} = \overline{\mathcal{O}(s_1)} \star \cdots \star \overline{\mathcal{O}(s_r)}.$$

Pour $s \in S$, désignons par \mathbb{Q}_s l'extension par 0 du complexe constant $\mathbb{Q}_{\mathcal{O}(s)}$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{Q}_s = j_{s*},$$

où j_s désigne l'inclusion de $\mathcal{O}(s)$ dans $X \times X$.

Lemme 5.16. *Si $\pi : Y(w) \rightarrow X \times X$ désigne le morphisme de la proposition précédente, on a*

$$\bigstar_{i=1}^r \mathbb{Q}_{s_i} = R\pi_* \mathbb{Q}.$$

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 2.7,

$$\bigstar_{i=1}^r \mathbb{Q}_{s_i} = Rp_* \left(\bigotimes_{i=1}^r p_i^* \mathbb{Q}_{s_i} \right),$$

où $p_i : X^{r+1} \rightarrow X \times X$ dénote la projection sur les i^e et $(i+1)^e$ facteurs, et $p : X^{r+1} \rightarrow X \times X$ la projection sur les premier et dernier facteurs.

Notons $\mathcal{F}^\bullet := \bigotimes_{i=1}^r p_i^* \mathbb{Q}_{s_i}$, de sorte que l'on ait $\bigstar_{i=1}^r \mathbb{Q}_{s_i} = Rp_* \mathcal{F}^\bullet$. Nous allons montrer que $\mathcal{F}^\bullet = i_{w*} \mathbb{Q}$. Pour cela, nous pouvons travailler au niveau des complexes de faisceaux, et non pas dans les catégories dérivées correspondantes, puisque tous les foncteurs impliqués sont exacts.

Nous avons le diagramme commutatif suivant, i_w désignant l'inclusion de $Y(w)$ dans X^{r+1} .

$$\begin{array}{ccc} & X \times X & \\ \pi \nearrow & & \nwarrow p \\ Y(w) & \xrightarrow{i_w} & X^{r+1} \\ \pi_i \downarrow & & \downarrow p_i \\ \mathcal{O}(s_i) & \xrightarrow{j_{s_i}} & X \times X \end{array}$$

Ceci implique que

$$i_w^* \mathcal{F}^\bullet = i_w^* \left(\bigotimes_{i=1}^r p_i^* \mathbb{Q}_{s_i} \right) = \bigotimes_{i=1}^r i_w^* p_i^* \mathbb{Q}_{s_i} = \bigotimes_{i=1}^r \pi_i^* j_{s_i}^* \mathbb{Q}_{s_i}.$$

Or, $j_{s_i}^* \mathbb{Q}_{s_i} = j_{s_i}^* j_{s_i,*} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, donc

$$i_w^* \mathcal{F}^\bullet = \bigotimes_{i=1}^r \pi_i^* \mathbb{Q} = \bigotimes_{i=1}^r \mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

Par ailleurs, en calculant les fibres de \mathcal{F}^\bullet , on trouve

$$\mathcal{F}_x^\bullet = \left(\bigotimes_{i=1}^r p_i^* \mathbb{Q}_{s_i} \right)_x = \bigotimes_{i=1}^r (p_i^* \mathbb{Q}_{s_i})_x = \bigotimes_{i=1}^r (\mathbb{Q}_{s_i})_{p_i(x)}.$$

Or,

$$(\mathbb{Q}_{s_i})_{p_i(x)} = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p_i(x) \in \overline{\mathcal{O}(s_i)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le fait que \mathbb{Q} et 0 sont respectivement neutre et absorbant pour \otimes , on conclut que

$$\mathcal{F}_x^\bullet = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } p_i(x) \in \overline{\mathcal{O}(s_i)}, i = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par la définition de $Y(w)$, ceci veut dire que

$$\mathcal{F}_x^\bullet = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } x \in Y(w), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $\mathcal{F}^\bullet = i_{w*} i_w^* \mathcal{F}^\bullet = i_{w*} \mathbb{Q}$.

On peut maintenant conclure que

$$\bigstar_{i=1}^r \mathbb{Q}_{s_i} = R p_* \mathcal{F}^\bullet = R p_* i_{w*} \mathbb{Q} = R (p i_w)_* \mathbb{Q} = R \pi_* \mathbb{Q}.$$

□

5.2.3. Lemme de décomposition

En utilisant le résultat de la section précédente, nous pouvons maintenant prouver un lemme de décomposition qui jouera un rôle-clé dans notre preuve.

Lemme 5.17. *Nous avons*

$$\bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet = \bigoplus_{x \leq w} V_x^\bullet \otimes \mathcal{I}_x^\bullet,$$

où chaque V_x^\bullet est un espace vectoriel gradué auto-dual et $V_w^\bullet = \mathbb{Q}$.

DÉMONSTRATION. Par la proposition 5.4, nous savons qu'il existe une décomposition de la forme

$$\bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet = \bigoplus_{x \in W} V_x^\bullet \otimes \mathcal{I}_x^\bullet.$$

Attardons-nous maintenant davantage à $\bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet$ pour pouvoir tirer de l'information supplémentaire sur cette décomposition.

Puisque $\overline{\mathcal{O}(s_i)}$ est une variété lisse de dimension $n + 1$ (c'est une fibration en $\overline{X(s_i)} \cong \mathbb{P}^1$ de X), nous avons

$$\mathcal{I}_{s_i}^\bullet = \mathcal{I}^\bullet(\overline{\mathcal{O}(s_i)})[-n] = \mathbb{Q}[n + 1][-n] = \mathbb{Q}[1].$$

D'après le lemme 5.16, nous avons donc, en nous rappelant que $r = l(w)$,

$$\bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet = \bigstar_{i=1}^r (\mathbb{Q}_{s_i}[1]) = \left(\bigstar_{i=1}^r \mathbb{Q}_{s_i} \right) [r] = R\pi_* \mathbb{Q}[l(w)].$$

Or, puisque $Y(w)$ est une variété lisse de dimension $n + l(w)$, on a

$$\mathcal{I}^\bullet(Y(w)) = \mathbb{Q}[n + l(w)][-n] = \mathbb{Q}[l(w)],$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet = R\pi_* \mathcal{I}^\bullet(Y(w)).$$

Puisque le support de $\mathcal{F}^\bullet := \bigstar_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet$ est inclus dans $\overline{\mathcal{O}(w)}$, on a nécessairement $V_x^\bullet = 0$ pour $x \not\leq w$, donc on peut se restreindre à prendre la somme pour les $x \leq w$.

Maintenant pour $x = w$: la fibre du membre de droite de la décomposition sur $\mathcal{O}(w)$ est

$$V_w^\bullet \otimes \mathbb{Q}[l(w)] = V_w^\bullet[l(w)],$$

tandis que $R\pi_* \mathcal{I}^\bullet(Y(w))|_{\mathcal{O}(w)} = \mathbb{Q}[l(w)]$ (on utilise le fait que π est un isomorphisme sur $\mathcal{O}(w)$, voir la proposition 5.14).

On en tire donc que $V_w^\bullet = \mathbb{Q}$.

Maintenant prouvons que $\overline{V}_x^\bullet = V_x^\bullet$ pour tout $x < w$. En appliquant le foncteur de dualité de Verdier des deux côtés de la décomposition, puisque les complexes d'intersection translatsés sont auto-duaux, on obtient

$$\bigoplus_{x \leq w} V_x^\bullet \otimes \mathcal{I}_x^\bullet = \bigoplus_{x \leq w} \overline{V}_x^\bullet \otimes \mathcal{I}_x^\bullet$$

Procédons par récurrence. Soit y un élément maximal pour l'ordre de Bruhat apparaissant dans cette égalité. On regardant la restriction de l'égalité à $\mathcal{O}(y)$, puisqu'il n'y a que le complexe il n'y a que \mathcal{I}_y^\bullet qui contribue, on trouve

$$V_y^\bullet[l(y)] = V_y^\bullet \otimes \mathbb{Q}[l(y)] = \overline{V}_y^\bullet \otimes \mathbb{Q}[l(y)] = \overline{V}_y^\bullet[l(y)],$$

d'où $V_y^\bullet = \overline{V}_y^\bullet$.

On peut maintenant retirer le terme impliquant y de l'égalité, puis répéter l'argument avec un élément maximal restant jusqu'à que l'on obtienne la conclusion souhaitée. □

Remarque 5.18. Il est instructif de comparer cette preuve avec celle du corollaire 1.22.

5.2.4. Étape inductive

Nous poursuivons le double but de prouver que h est un homomorphisme et qu'il envoie les complexes d'intersection translatés sur les éléments de base de Kazhdan-Lusztig.

Exemple 5.19. Pour $l(w) = 0$, c'est-à-dire $w = 1$, \mathcal{I}_1^\bullet est le complexe constant \mathbb{Q} sur $\overline{\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(1) = \Delta(X) \subset X \times X$. Donc on a bien

$$h(\mathcal{I}_1^\bullet) = T_1 = 1 = C_1.$$

On peut prouver dès maintenant que $h(\mathcal{I}_1^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet) = h(\mathcal{I}_1^\bullet)h(\mathcal{F}^\bullet) = h(\mathcal{F}^\bullet)$. En fait, le lemme suivant nous dit qu'on a plus : \mathcal{I}_1^\bullet est déjà un neutre au niveau de la catégorie dérivée.

Lemme 5.20. Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}_G^{bc}(X \times X)$, on a

$$\mathcal{I}_1^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{I}_1^\bullet.$$

DÉMONSTRATION. Nous ne prouvons que la première égalité, la seconde s'obtenant de façon tout à fait similaire.

Nous avons le carré cartésien suivant, où $\delta(x, y) := (x, x, y)$.

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \times X \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_{12} \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X \end{array}$$

Il en découle que

$$p_{12}^* \mathcal{I}_1^\bullet = p_{12}^* \Delta_* \mathbb{Q} = \delta_* p_1^* \mathbb{Q} = \delta_* \mathbb{Q}.$$

Or, le complexe $\mathcal{G}^\bullet := p_{12}^* \mathcal{I}_1^\bullet \otimes p_{23}^* \mathcal{F}^\bullet = \delta_* \mathbb{Q} \otimes p_{23}^* \mathcal{F}^\bullet$ satisfait

$$\mathcal{G}_{(x,y,z)}^\bullet = \begin{cases} \mathcal{F}_{(y,z)}^\bullet & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il en découle que \mathcal{G}^\bullet est également égal à $\delta_* \mathbb{Q} \otimes p_{13}^* \mathcal{F}^\bullet$, d'où

$$\mathcal{I}_1^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet = R p_{13*} \mathcal{G}^\bullet = R p_{13*} (\delta_* \mathbb{Q} \otimes p^{13*} \mathcal{F}^\bullet) = R p_{13*} \delta_* \mathbb{Q} \otimes \mathcal{F}^\bullet$$

par la formule de projection.

Or, $p_{13} \circ \delta = 1$, donc $\mathcal{I}_1^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet = \mathbb{Q} \otimes \mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet$.

□

Exemple 5.21. Pour $l(w) = 1$, c'est-à-dire que $w = s \in S$ une réflexion simple, \mathcal{I}_s^\bullet est le complexe constant $\mathbb{Q}[1]$ sur $\overline{\mathcal{O}(s)} = \mathcal{O}(s) \sqcup \mathcal{O}(1)$. Donc

$$h(\mathcal{I}_s^\bullet) = h(j_{s*} \mathbb{Q}[1]) = q^{-1/2} h(j_{s*} \mathbb{Q}) = q^{-1/2} (1 + T_s) = C_s,$$

voir l'exemple 1.19.

À la lumière de cet exemple, il est naturel, pour prouver que h est un homomorphisme, de commencer par prouver que

$$h(\mathcal{I}_s^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet) = h(\mathcal{I}_s^\bullet) h(\mathcal{F}^\bullet).$$

Lemme 5.22. Soit $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^{bc}(X \times X)$ tel que $H^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0$ pour i impair. Alors, pour toute réflexion simple $s \in S$, on a

$$h(\mathbb{Q}_s \star \mathcal{F}^\bullet) = (T_s + 1)h(\mathcal{F}^\bullet),$$

ce qui implique, d'après $\mathcal{I}_s^\bullet = \mathbb{Q}_s[1]$, que

$$h(\mathcal{I}_s^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet) = C_s h(\mathcal{F}^\bullet).$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} (T_s + 1)h(\mathcal{F}^\bullet) &= (T_s + 1) \sum_w \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} T_w \\ &= \sum_w \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} T_w + \sum_w \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} T_s T_w \\ &= \sum_w \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} T_w + \sum_{sw > w} \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} T_{sw} \\ &\quad + \sum_{sw < w} \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} ((q-1)T_w + qT_{sw}) \end{aligned}$$

Observons le coefficient de T_w dans cette dernière expression. Pour cela, il faut distinguer deux cas, selon que $sw > w$ ou $sw < w$.

Si $sw > w$, en posant $w' := sw$, on a $w = sw'$ et $sw' < w'$, donc T_w apparaît dans la première et la troisième somme. Le coefficient de T_w est donc

$$\begin{aligned} &\sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} + \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_{w'} q^{(i+2)/2} \\ &= \sum_i (\dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w + \dim H^{i-2}(\mathcal{F}^\bullet)_{sw}) q^{i/2} \\ &= \sum_i \dim H^i(\mathcal{I}_s^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet) q^{i/2} \end{aligned}$$

d'après le lemme 5.23, ce qui n'est rien d'autre que le coefficient de T_w dans $h(\mathcal{I}_s^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet)$.

Le cas $sw < w$ se traite de la même façon : cette fois $w' := sw$ vérifie $sw' > w'$, et T_w apparaît dans les trois sommes. Son coefficient est

$$\begin{aligned} &\sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} + \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_{w'} q^{i/2} T_{sw'} + \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{i/2} (q-1)T_w \\ &= \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_{sw} q^{i/2} T_w + \sum_i \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w q^{(i+2)/2} T_w \end{aligned}$$

$$= \sum_i (\dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_{sw} + H^{i-2}(\mathcal{F}^\bullet)_w) q^{i/2}$$

en utilisant encore le lemme 5.23.

Dans tous les cas, le coefficient du vecteur de base T_w dans $(T_s + 1)h(\mathcal{F}^\bullet)$ est donc égal à celui de T_w dans $h(\mathcal{A}_s^\bullet \star \mathcal{F}^\bullet)$; on conclut que ces deux expressions sont égales.

□

Lemme 5.23. *Dans les conditions du lemme 5.22, on a*

$$\dim H^i(\mathbb{Q}_s \star \mathcal{F}^\bullet)_w = \begin{cases} \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_{sw} + \dim H^{i-2}(\mathcal{F}^\bullet)_w & \text{si } sw < w, \\ \dim H^i(\mathcal{F}^\bullet)_w + \dim H^{i-2}(\mathcal{F}^\bullet)_{sw} & \text{si } sw > w. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Soit $(a, b) \in \mathcal{O}(w)$. Nous voulons calculer $H^i(\mathbb{Q}_s \star \mathcal{F}^\bullet)_{(a,b)}$. Soit $\mathcal{G}^\bullet := p_{12}^* \mathbb{Q}_s \otimes p_{23}^* \mathcal{F}^\bullet$. Le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} p_{13}^{-1}(a, b) & \xrightarrow{j} & X \times X \times X \\ q_{13} \downarrow & & \downarrow p_{13} \\ (a, b) & \xrightarrow{i} & X \times X \end{array}$$

nous permet de dire

$$i^* R p_{13*} \mathcal{G}^\bullet = R q_{13*} (j^* \mathcal{G}^\bullet).$$

Or, $H^\bullet(i^* R p_{13*} \mathcal{G}^\bullet) = H^\bullet(i^*(\mathbb{Q}_s \star \mathcal{G}^\bullet)) = \mathcal{H}^\bullet(\mathbb{Q}_s \star \mathcal{G}^\bullet)_{(a,b)}$. Donc, pour calculer la fibre qui nous intéresse, il suffit de connaître la restriction $j^* \mathcal{G}^\bullet$ de \mathcal{G}^\bullet à la pré-image $Z := p_{13}^{-1}(a, b) = \{a\} \times X \times \{b\}$ de (a, b) .

Nous avons

$$(\mathcal{G}^\bullet)_x = (\mathbb{Q}_s)_{p_{12}(x)} \otimes \mathcal{F}^\bullet_{p_{23}(x)} = \begin{cases} \mathcal{F}^\bullet_{p_{23}(x)} & \text{si } p_{12}(x) \in \overline{\mathcal{O}(s)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons donc

$$D := p_{12}^{-1}(\overline{\mathcal{O}(s)}) \cap Z = \{(a, c, b) \mid (a, c) \in \overline{\mathcal{O}(s)}\}.$$

Si $a = gB$, alors $D = \{a\} \times g \cdot \overline{\mathcal{O}(s)} \times \{b\} \cong \mathbb{P}^1$.

Si $sw < w$, alors, par la décomposition de Bruhat, il existe un unique $d_0 \in D$ tel que $p_{23}(d_0) \in \mathcal{O}(sw)$. Pour $d \in D \setminus \{d_0\}$, nous avons $p_{23}(d) \in \mathcal{O}(w)$. Nous avons donc

$$(\mathcal{G}^\bullet|_Z)_x = \begin{cases} \mathcal{F}_{sw}^\bullet & \text{si } x = d_0, \\ \mathcal{F}_w^\bullet & \text{si } x \in D \setminus \{d_0\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, si $sw > w$, nous avons $p_{23}(d_1) \in \mathcal{O}(w)$ pour $d_1 := (a, a, b)$ et $p_{23}(d) \in \mathcal{O}(sw)$ pour $d \in D \setminus \{d_1\}$. Il suit que

$$(\mathcal{G}^\bullet|_Z)_x = \begin{cases} \mathcal{F}_w^\bullet & \text{si } x = d_1, \\ \mathcal{F}_{sw}^\bullet & \text{si } x \in D \setminus \{d_1\}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Nous pourrions maintenant terminer l'induction que nous avons commencée pour prouver que

$$h(\mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{G}^\bullet) = h(\mathcal{F}^\bullet)h(\mathcal{G}^\bullet)$$

pour $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet$ dans $\mathcal{H}(X)$, mais nous préférons reporter cela à la section 5.2.6 puisque nous sommes déjà en mesure de terminer la preuve du théorème de Kazhdan-Lusztig.

5.2.5. Théorème de Kazhdan-Lusztig

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat qui implique la caractérisation des polynômes de Kazhdan-Lusztig annoncée dans l'introduction de ce chapitre.

Théorème 5.24. *Pour tout $w \in W$, on a*

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = C_w,$$

où C_w est l'élément du théorème 1.17.

DÉMONSTRATION. Procédons par induction sur $l(w)$. Nous savons déjà que l'affirmation à prouver est vrai dans les cas où $l(w) = 0$ ou 1 (voir les exemples 5.19 et 5.21).

Tel que mentionné à la section 5.2.1, pour pouvoir appliquer le théorème 1.17, il ne nous reste plus qu'à prouver que $h(\mathcal{I}_w^\bullet)$ est stable sous l'involution ι .

En appliquant h de chaque côté de la décomposition obtenue au lemme 5.17, et en utilisant les propriétés de h (proposition 5.9), on obtient

$$h\left(\star_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet\right) = h(\mathcal{I}_w^\bullet) + \sum_{x < w} a_x h(\mathcal{I}_x^\bullet)$$

où $a_x := p(V_x^\bullet)$ est tel que $\overline{a_x} = a_x$ (car V_x^\bullet est symétrique).

En appliquant à répétition le lemme 5.22 à $h(\star_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet)$, on trouve que

$$\prod_{i=1}^r C_i = h(\mathcal{I}_w^\bullet) + \sum_{x < w} a_x h(\mathcal{I}_x^\bullet).$$

En supposant que $h(\mathcal{I}_x^\bullet) = C_x$ pour $x < w$ et en réarrangeant l'équation précédente, nous obtenons donc

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = \prod_{i=1}^r C_i - \sum_{x < w} a_x C_x$$

Il en découle immédiatement que $h(\mathcal{I}_w^\bullet)$ est stable sous ι , donc le théorème 1.21 nous permet de conclure que

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = C_w.$$

□

Puisque

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet) = h(\mathcal{I}^\bullet(\overline{X(w)})) = q^{-l(w)/2} h(\mathcal{IC}^\bullet(\overline{X(w)})),$$

en comparant les coefficients de T_x dans $h(\mathcal{IC}^\bullet(\overline{X(w)}))$ et $q^{l(w)/2} C_w$, on obtient immédiatement le théorème de Kazhdan-Lusztig.

Théorème 5.25 (Kazhdan et Lusztig, [25]). *Pour tout $x, w \in W$, on a*

$$P_{x,w} = \sum_i \dim IH^{2i}(\overline{X(w)})_x q^i,$$

et, de plus, $IH^i(\overline{X(w)})_x = 0$ si i est impair.

On en tire directement le corollaire suivant.

Corollaire 5.26. *Les coefficients des polynômes de Kazhdan-Lusztig sont des entiers positifs lorsque W est un groupe de Weyl.*

5.2.6. Dictionnaire

On sait d'après le corollaire 1.22 que les C_w forment une base de $\mathcal{H}(W)$. Soit $\mathcal{H}_+(W)$ le sous-ensemble de $\mathcal{H}(W)$ formé des éléments dont les coordonnées dans la base $(C_w)_{w \in W}$ sont des polynômes à coefficients positifs, c'est-à-dire que

$$\mathcal{H}_+(W) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{N}[q^{\pm 1/2}] C_w.$$

Remarquons que $\mathcal{H}_+(W)$ est clairement clos sous l'addition et la dualité ι , mais qu'il n'est pas clair *a priori* qu'il l'est également pour la multiplication.

Le théorème 5.24 va nous permettre d'identifier $\mathcal{H}_+(W)$ avec $\mathcal{H}(X)$.

Corollaire 5.27. *L'application $h : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}_+(W)$ est bijective.*

DÉMONSTRATION. Remarquons tout d'abord que le théorème 5.24 nous permet d'affirmer que $h(\mathcal{F}^\bullet) \in \mathcal{H}_+(W)$ si $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{H}(X)$.

La bijectivité de h découle du fait que l'on a un isomorphisme $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{N}[q^{\pm 1/2}]$ et que les C_w forment une base de $\mathcal{H}(W)$.

□

Nous pouvons également terminer l'induction commencée dans la section 5.2.4 pour prouver que h transforme la convolution en la multiplication dans l'algèbre de Hecke.

Lemme 5.28. *Pour $w, w' \in W$, nous avons*

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet) = h(\mathcal{I}_w^\bullet)h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet).$$

DÉMONSTRATION. Procédons par induction sur $l(w)$. Nous savons déjà que le résultat est valable si $l(w) = 0$ ou 1 (lemmes 5.20 et 5.22).

Choisissons une décomposition réduite $w = s_1 \cdots s_r$ et utilisons le lemme de décomposition 5.17 pour obtenir

$$\star_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet = \bigoplus_{x \leq w} V_x \otimes \mathcal{I}_x^\bullet. \quad (5.2.1)$$

En multipliant à droite par $\mathcal{I}_{w'}^\bullet$, et en utilisant les propositions 2.5 et 2.8, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left(\star_{i=1}^r \mathcal{I}_{s_i}^\bullet \right) \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet &= \left(\bigoplus_{x \leq w} V_x \otimes \mathcal{I}_x^\bullet \right) \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet \\ &= \bigoplus_{x \leq w} (V_x \otimes \mathcal{I}_x^\bullet) \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet \\ &= \bigoplus_{x \leq w} V_x \otimes (\mathcal{I}_x^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet). \end{aligned}$$

En appliquant h de chaque côté et en se rappelant que $V_w^\bullet = \mathbb{Q}$, nous obtenons, grâce au lemme 5.22,

$$\left(\prod_{i=1}^r C_{s_i} \right) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet) = h(\mathcal{I}_w^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet) + \sum_{x < w} a_x h(\mathcal{I}_x^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet),$$

où $a_x := p(V_x^\bullet)$.

Par ailleurs, en appliquant tout d'abord h à 5.2.1 puis en multipliant à droite par $\mathfrak{h}(\mathcal{I}_{w'}^\bullet)$ dans $\mathcal{H}(W)$, nous obtenons

$$\left(\prod_{i=1}^r C_{s_i} \right) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet) = h(\mathcal{I}_w^\bullet) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet) + \sum_{x < w} a_x h(\mathcal{I}_x^\bullet) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet).$$

Par notre hypothèse d'induction, nous avons $h(\mathcal{I}_x^\bullet \star \mathcal{I}_w^\bullet) = h(\mathcal{I}_x^\bullet) h(\mathcal{I}_w^\bullet)$ pour tout $x < w$, donc en comparant les deux dernières équations que nous avons obtenues, nous pouvons conclure que

$$h(\mathcal{I}_w^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet) = h(\mathcal{I}_w^\bullet) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet).$$

□

Corollaire 5.29. *Pour $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{H}(X)$, on a*

$$h(\mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{G}^\bullet) = h(\mathcal{F}^\bullet) h(\mathcal{G}^\bullet).$$

DÉMONSTRATION. Écrivons

$$\mathcal{F}^\bullet = \bigoplus_w V_w^\bullet \otimes \mathcal{I}_w^\bullet \quad \text{et} \quad \mathcal{G}^\bullet = \bigoplus_{w'} W_{w'}^\bullet \otimes \mathcal{I}_{w'}^\bullet.$$

Alors, en utilisant les propositions 2.5 et 2.8, nous obtenons

$$\mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{G}^\bullet = \bigoplus_{w,w'} (V_w^\bullet \otimes W_{w'}^\bullet) \otimes (\mathcal{I}_w^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet).$$

En appliquant h , nous avons donc, d'après le lemme 5.28,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{F}^\bullet \star \mathcal{G}^\bullet) &= \sum_{w,w'} p(V_w^\bullet \otimes W_{w'}^\bullet) h(\mathcal{I}_w^\bullet \star \mathcal{I}_{w'}^\bullet) \\ &= \sum_{w,w'} p(V_w^\bullet) p(W_{w'}^\bullet) h(\mathcal{I}_w^\bullet) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet) \\ &= \left(\sum_w p(V_w^\bullet) h(\mathcal{I}_w^\bullet) \right) \left(\sum_{w'} p(W_{w'}^\bullet) h(\mathcal{I}_{w'}^\bullet) \right) \\ &= h(\mathcal{F}^\bullet) h(\mathcal{G}^\bullet). \end{aligned}$$

□

En combinant le corollaire 5.27 et avec ce dernier résultat, nous pouvons conclure *a posteriori* que $\mathcal{H}_+(W)$ est clos sous la multiplication. C'est donc également un semi-anneau, isomorphe à $\mathcal{H}(X)$. Les notions de dualité dans ces deux semi-anneaux correspondent également.

Proposition 5.30. *Pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{H}(X)$, on a $h(D(\mathcal{F}^\bullet)) = \iota(h(\mathcal{F}^\bullet))$.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{F}^\bullet = \bigoplus_w V_w^\bullet \otimes \mathcal{I}_w^\bullet$, on a

$$\begin{aligned} h(D(\mathcal{F}^\bullet)) &= h\left(\bigoplus_w \overline{V_w^\bullet} \otimes \mathcal{I}_w^\bullet\right) \\ &= \sum_w \overline{p(V_w^\bullet)} C_w \\ &= \iota\left(\sum_w p(V_w^\bullet) C_w\right) \\ &= \iota(h(\mathcal{F}^\bullet)). \end{aligned}$$

□

Cela nous permet également de conclure *a posteriori* que D et \star commutent dans $\mathcal{H}(X)$.

Nous pouvons donc résumer la situation dans le théorème suivant.

Théorème 5.31 (théorème principal). *Soit G un groupe algébrique complexe réductif, W son groupe de Weyl et X sa variété de drapeaux. Alors, il existe un isomorphisme h entre $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}_+(W)$ préservant la structure de semi-algèbre ainsi que la dualité. De plus, sous cet isomorphisme, les complexes d'intersections translatés correspondent aux éléments de base de Kazhdan-Lusztig.*

Le tableau suivant résume le dictionnaire établi par h entre $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}_+(W)$.

$\mathcal{H}(X)$	$\mathcal{H}_+(W)$
\oplus	$+$
\star	\cdot
D	ι
\mathcal{I}_w^\bullet	C_w
$\mathcal{V} \otimes \mathcal{I}_1^\bullet$	$\mathbb{N}[q^{\pm 1/2}]$

L'application h établit donc une correspondance complète entre le semi-anneau de convolution $\mathcal{H}(X)$ et $\mathcal{H}_+(W)$, l'ensemble des éléments de l'algèbre de Hecke ayant un sens géométrique. Nous pourrions utiliser cette correspondance pour faire des calculs explicites dans $\mathcal{H}(X)$ en utilisant l'outillage combinatoire de $\mathcal{H}(W)$. Par exemple, on pourrait calculer explicitement les espaces vectoriels apparaissant dans le lemme de décomposition 5.17.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEĬLINSON, A. ; BERNSTEIN, J. *Localisation de \mathfrak{g} -modules*, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I Math. **292** (1981), n° 1, 15–18.
- [2] BEĬLINSON, A. A. ; BERNSTEIN, J. ; DELIGNE, P. *Faisceaux pervers dans Analyse et topologie sur les espaces singuliers I (Luminy, 1981)*, 5–71, Astérisque, 100, Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [3] BERNSTEIN, J. ; LUNTS, V. *Equivariant sheaves and functors*, Lecture Notes in Mathematics, 1578, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [4] BOREL, A. *et al. Intersection cohomology*, Progress in Mathematics, 50, Birkhäuser, Boston, 1984.
- [5] BOREL, A. *Linear algebraic groups, second enlarged edition*, Graduate Texts in Mathematics, 126, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] BOREL, A. *Introduction to middle intersection cohomology and perverse sheaves dans Algebraic groups and their generalizations : classical methods (University Park, PA, 1991)*, 25–52, Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [7] BOTT, R. ; TU, L.W. *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, 82, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [8] BRYLINSKI, J.-L. *(Co)-homologie d'intersection et faisceaux pervers dans Séminaire Bourbaki 1981/1982*, 129–157, Astérisque, 92–93, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [9] BRYLINSKI, J.-L. ; KASHIWARA, M. *Démonstration de la conjecture de Kazhdan-Lusztig sur les modules de Verma*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **291** (1980), n° 6, A373–A376.
- [10] BRYLINSKI, J.-L. ; KASHIWARA, M. *Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems*, Invent. Math. **64** (1981), n° 3, 387–410.

- [11] CHRISS, N. ; GINZBURG, V. *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, Boston, 1997.
- [12] DELBECQUE, Y. *Les catégories dérivées*, mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2000.
- [13] DEMAZURE, M. *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 53–88.
- [14] DEODHAR, V. *A brief survey of Kazhdan-Lusztig theory and related topics dans Algebraic groups and their generalizations : classical methods (University Park, PA, 1991)*, 105–124, Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [15] GELFAND, S. I. ; MANIN, Y. I. *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [16] GODEMENT, R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux, troisième édition revue et corrigée*, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg XIII, Actuelles Scientifiques et Industrielles, 1252, Hermann, Paris, 1973.
- [17] GORESKEY, M. ; MACPHERSON, R. *La dualité de Poincaré pour les espaces singuliers*, C. R. Acad. Sc. Paris Série A-B **284** (1977), n° 24, A1549–A1551.
- [18] GORESKEY, M. ; MACPHERSON, R. *Intersection homology theory*, Topology **19** (1980), n° 2, 135–162.
- [19] GORESKEY, M. ; MACPHERSON, R. *Intersection homology II*, Invent. Math. **72** (1983), n° 1, 77–129.
- [20] HARTSHORNE, R. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [21] HUMPHREYS, J. E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, 9, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [22] HUMPHREYS, J. E. *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, 21, Springer-Verlag, 1975.
- [23] HUMPHREYS, J. E., *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [24] KAZHDAN, D. ; LUSZTIG, L. *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), n° 2, 185–191.

- [25] KAZHDAN, D. ; LUSZTIG, G. *Schubert varieties and Poincaré duality* dans *Geometry of the Laplace operator (Proc. Sympos. Pure Math., Univ. Hawaii, Honolulu, Hawaii, 1979)*, 185–203, Proc. Sympos. Pure Math, 36, Amer. Math. Soc., Providence, 1980.
- [26] KIRWAN, F. *An introduction to intersection homology theory*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 187, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.
- [27] LAKSHMIBAI, V. ; GONCIULEA, N. *Flag varieties*, Travaux en cours, 63, Hermann, Paris, 1999.
- [28] LUSZTIG, G. *Intersection cohomology methods in representation theory* dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, 155–174, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
- [29] SPRINGER, T. A. *Quelques applications de la cohomologie d'intersection* dans *Séminaire Bourbaki 1981/1982*, 249–273, Astérisque, 92–93, 1982.
- [30] SPRINGER, T. A. *Schubert varieties and generalizations* dans *Representation theories and algebraic geometry (Montréal, 1997)*, 413–440, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 514, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.