Université de Montréal

APPROXIMATION UNIFORME PAR FONCTIONS ALÉATOIRES

par

Sébastien Manka

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

le 10 mars 2003

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

APPROXIMATION UNIFORME PAR FONCTIONS ALÉATOIRES

présenté par

Sébastien Manka

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Marlène Frigon

(président-rapporteur)

Paul M. Gauthier

(directeur de recherche)

Anatole Joffe

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

RÉSUMÉ ET MOTS CLÉS

Résumé

Ce mémoire présente un méthode d'approximation décrite dans l'article de Andrus et Brown (voir **[AB]**).

L'approximation uniforme aléatoire est donc l'objet de ce travail. C'est en quelque sorte une généralisation de l'approximation uniforme en analyse complexe. Cette approche permet d'approximer une famille de fonctions, disons holomorphes, variant de manière mesurable, par une autre famille de fonctions, disons rationnelles, variant, elle aussi, de manière mesurable.

Les preuves des théorèmes d'approximation aléatoire (Chapitre 4) font appels à la notion de multifonction (Chapitre 1), à la théorie sur les espaces Polonais et Souslin (Chapitre 2) ainsi que certains résultats classiques d'approximation complexe (Chapitre 3).

Nous donnons aussi un analogue de l'approximation uniforme aléatoire, soit l'approximation en probabilité (Chapitre 5).

Mots Clés

Approximation uniforme aléatoire, Fonctions multivoques, Relations mesurables, Sélections mesurables, Approximation en probabilité.

ABSTRACT AND KEY WORDS

Abstract

This memoir presents an approximation method described in Andrus and Brown's article (see [**AB**]).

Therefore the object of this work is random uniform approximation. In a certain way, it is a generalisation of the uniform approximation theory in complex analysis. This approach permits the approximation of a family of functions, say holomorphic functions varying in a measurable way, by another family, say rational functions varying too in a measurable way.

The theorems proofs need the notion of multivalued functions(Chapter 1), Polish and Souslin spaces (Chapter 2), and some results on classical complex approximation (Chapter 3).

We also give an analogue of uniform stochastic approximation called approximation in probability (Chapter 5).

Key Words

Random uniform approximation, Multi-functions, Measurable relations, Measurable Selectiors, Probabilistic Approximation .

REMERCIEMENTS

Je désire remercier mes parents et mes frères, Frank et Mick, sans qui je ne me serais jamais rendu aussi loin.

Merci à mon directeur, Paul Gauthier, qui a fait naître ma passion pour l' analye complexe en me transmettant un peu de la sienne. Je lui suis infiniment reconnaissant pour son support humain et technique qui m'a aidé à traverser bien des choses.

Je voudrais aussi remercier les très, très précieux copains du départements de mathématiques et statistique de l'Université de Montréal, en particulier (sans tenir compte de l'ordre) : Hughes B., Dimitri Z., Gabriel C., Christian C., Olivier D., Olivier R., Pehoh, Jérôme F., feu Kefryn T. Jean-Philippe S., Nicolas B., Étienne D., Marc-E., Deana DP, Nathalie G. et la belle Katerine M.

En terminant, je voudrais remercier feu ma mère qui a consacré sa vie au bonheur de ses enfants.

Table des matières

Table des figures

INTRODUCTION

Ce mémoire parle d'un type d'approximation en analyse complexe : l'approximation uniforme aléatoire. Ce dernier type consiste à approximer «de manière mesurable une famille de fonctions variant de façon mesurable». Plus précisément : Étant donné une fonction de deux variables sur le produit d'un espace de mesure et du plan complexe qui est mesurable dans une variable et holomorphe dans l'autre. Alors, sous certaines hypothèses, il existera une fonction de deux variables, mesurable dans une et rationnelle dans l'autre et dans laquelle (variable), presque partout, on aura l'approximation uniforme.

Ce type d'approximation est décrit dans **[AB]**. Mon mémoire est basé sur cet article. Les auteurs utilisent les multifonctions mesurables qui sont décrites dans mon mémoire au Chapitre 1 avec quelques notions de mesure.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude des espaces Souslin et Polonais qui seront des outils topologiques importants pour faire de l'approximation uniforme aléatoire.

Il sera aussi question au Chapitre 3, de la topologie sur l'espace des fonctions continues du plan complexe à valeur dans la sphère de Riemann et des familles normales. Ces notions sont essentielles à la compréhension des théorèmes d'approximations uniformes aléatoires étant donné, que ces derniers utilisent les théorèmes d'approximations conventionels en analyse complexe, tel le fameux théorème de Runge qui se trouve aussi au Chapitre 3.

Le Chapitre 4 est le coeur du mémoire. Il utilise tout ce qui précède pour obtenir des théorèmes de sélections mesurables, ainsi que des théorèmes d'approximations aléatoires qui généraliseront les théorèmes classiques.

Dans le dernier chapitre, il est question d'un autre type d'approximation aléatoire : l'approximation en probabilité. Le problème consiste à trouver une approximation qui a la probabilité petite de se trouver éloignée de la fonction à approximer. Nous en parlerons brièvement étant donné que le but du mémoire est le théorème de Runge aléatoire, mais servira pour donner une autre direction de recherche et pour montrer à quoi les premiers chapitres peuvent aussi servir.

Le premier type d'approximation est plus rigide que le second dans le sens qu'il ne permet presque sûrement pas à l'approximation de s'éloigner d'une distance epsilon de la fonction à approcher. Tandis que le second type le permet avec probabilité au plus epsilon mais ne donne pas des théorèmes classiques d'approximations.

Par contre, le premier type permet que la mesure ne soit pas nécéssairement finie mais sigma-finie. Nous verrons que pourtant ces deux hypothèses ne sont pas très différentes quand on considère des propriétés vraies presque partout.

Le but de ce mémoire est de démystifier, pour les non-probabilistes, l'approximation uniforme aléatoire et l'utilisation des multifonctions dans le processus de choisir d'une manière mesurable des approximations.

Chapitre 1

NOTIONS DE BASE

1.1. Notations

- $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable et $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω.
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de mesure, $\mathcal{A}$ une σ-algèbre de $\mathcal{P}(\Omega)$ et μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
- $(\mathbf{X}, \mathfrak{O})$ un espace topologique , $\mathfrak{O}$ est l'ensemble des ouverts et $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des fermés.
- $(\mathbf{X}, d)$ est un espace métrique, d est la métrique, $(\mathbf{X}, \mathfrak{O}_d)$ est l'espace muni de la topologie engendrée par d, $\mathfrak{O}_d$ est l'ensemble des ouverts engendrés par d et $\mathfrak{F}_d$ est l'ensemble des fermés associés.
- Si $\mathbf{X}$ est un espace topologique, $\mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$ est la σ-algèbre des boréliens.
- Si $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique, $x \in \mathbf{X}$ et $Y \subset \mathbf{X}$ on a $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$.
- Pour une fonction $f : \Omega \times X \longrightarrow \mathbf{Y}$ on note, pour $x \in X$, $f(\cdot,x) = f_x(\cdot)$ et pour $\omega \in \Omega$, $f(\omega,\cdot) = f_\omega(\cdot)$.

1.2. Notions de mesure

Définition 1.2.1. *$\mathcal{A}$ est une σ-algèbre des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ de Ω si*

(1) $\Omega \in \mathcal{A}$;

(2) si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$;

(3) si $\{A_n\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$, alors $\cup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Si Ω est muni d'une σ-algèbre, alors $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé un espace mesurable.

Exemple 1.2.1. *Considérons* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2), \cdots)$ *des espaces mesurables. Le produit des ces espaces est l'espace mesurable* $(\prod_n \Omega_n, \prod_n \mathcal{A}_n)$ *: la* σ*-algèbre* $\prod_n \mathcal{A}_n$ *sur* $\prod_n \Omega_n$ *est générée par les ensembles de la forme*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N \times \Omega_{N+1} \times \Omega_{N+2} \times \cdots$$

pour un certain entier N *et pour* A_n *dans* $\mathcal{A}_n$*,* $n = 1, \cdots, N$*.*

Plus particulièrement, l'espace $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ *est un espace mesurable qui sera très important pour les résultats sur les espaces Polonais et de Souslin.*

Définition 1.2.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable. Une fonction*

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

est une mesure si

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty}(A_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *pour* $\{A_n\}$ *dans* $\mathcal{A}$ *disjoints.*

Définition 1.2.3. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace de mesure* σ*-fini si il existe* $\{A_n\} \subset \Omega$ *disjoints tel que* $\cup A_n = \Omega$ *et* $\mu(A_n) < +\infty$ *pour tout* n *dans* $\mathbb{N}$*.*

Définition 1.2.4. *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ *des espaces de mesures. Les mesures* μ *et* ν *sont dites équivalentes, noté* $\mu \equiv \nu$*, si on a que* $\mu(E) = 0$ *si et seulement si* $\nu(E) = 0$ *pour* $E \in \mathcal{A}$*.*

Lemme 1.2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace de mesure* σ*-fini non-triviale. Alors il existe une mesure* ν *équivalente à* μ *telle que* $\nu(\Omega) = 1$*.*

DÉMONSTRATION. Soit $\{A_n\} \subset \Omega$ disjoints tels que $\cup A_n = \Omega$ et $0 < \mu(A_n) < \infty$ (le fait de choisir les ensembles $\mu(A_n) \neq 0$ est possible. Si $\mu(A_n) = 0$ on peut considérer $A_n^{'} = A_n \cup A_{n+1}$ où $\mu(A_{n+1}) \neq 0$). Pour tout n posons $M_n = \mu(A_n)$. Nous pouvons donc considérer ν défini de la manière suivante : Pour $E \in \mathcal{A}$,

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu(E \cap A_n)}{M_n \; 2^n}.$$

Ainsi ν est une mesure et $\nu \equiv \mu$ car si $\mu(E) = 0$ alors, pour tout n, $\mu(E \cap A_n) = 0$ et si, pour tout n, $\nu(E \cap A_n) = 0$ alors $\mu(E) = \mu(\cup(E \cap A_n)) = \sum \mu(E \cap A_n) = 0$.

$\square$

Définition 1.2.5. *Un isomorphisme d'espaces mesurables est une bijection entre les deux espaces, qui envoie (dans les deux sens) des ensembles mesurables sur des ensembles mesurables.*

Définition 1.2.6. *Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est standard s'il est isomorphe à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la σ-algèbre produit.*

Remarque 1.2.1. En fait $[0,1]$, les espaces euclidiens ou, plus généralement, un borélien d'un espace séparable (au sens topologique) et métrisable complet est standard.

Définition 1.2.7. *Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit séparable s'il existe une famille dénombrable $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$ tel que $\sigma(\{Q_i\}) = \mathcal{A}$, où $\sigma(\{Q_i\})$ est la σ-algèbre engendrée par la famille $\{Q_i\}$, c'est-à-dire la plus petite σ-algèbre contenant la famille $\{Q_i\}$.*

Définition 1.2.8. *Un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est dit régulier si, pour tout $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tel que $\omega_1 \neq \omega_2$, il existe un ensemble mesurable qui contient ω_1 mais pas ω_2.*

Théorème 1.2.1. *Tout espace mesurable séparable et régulier Ω est isomorphe à un sous-ensemble d'un espace standard.*

Démonstration. Soit $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ tel que $\sigma(\{Q_i\}) = \mathcal{A}$. Soit $\phi : \Omega \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie par $\phi(x) = \{\chi_{Q_i}(x)\}$. Alors ϕ est injective car Ω est régulier et est donc bijective de Ω dans $\phi(\Omega)$. Soit B_j l'ensemble des points de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que le j^{ime} élément est égal à 1. Les B_j génèrent les boréliens de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Donc les ensembles $B_j \cap \phi(\Omega)$ génèrent les boréliens de $\phi(\Omega)$. Mais $\phi(Q_j) = B_j \cap \phi(\Omega)$. Ainsi ϕ est un isomorphisme. $\square$

1.3. Fonctions mesurables

Définition 1.3.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\mathbf{X}, \mathcal{B})$ des espaces mesurables et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{X}$. On dit que f est* mesurable *si, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Remarque 1.3.1. Considérons encore $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou plus généralement $(\prod_n \Omega_n, \prod_n \mathcal{A}_n)$. Pour chaque i , soit π_i, la projection de $\prod_n \Omega_n$ sur Ω_i. Pour tout $A \in \mathcal{A}_i$ on a que

$$\pi_i^{-1}(A) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times A \times \Omega_{j+1} \times \cdots$$

et donc π_i est mesurable pour chaque i.

Nous avons aussi que les ensembles qui génèrent $\prod_n \Omega_n$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N \times \Omega_{N+1} \times \cdots = \cap_{i=1}^{N} \pi_i^{-1}(A_n)$$

ce qui fait de $\prod_n \mathcal{A}_n$ la plus petit σ-algèbre qui rend toutes les projections π_i mesurables.

Définition 1.3.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mathbf{X}, \mathfrak{O})$ un espace topologique et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{X}$. On dit que f est* mesurable *si, pour tout $O \in \mathfrak{O}$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{A}$.*

Remarque 1.3.2. Cette définition est équivalente à $f^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, pour tout $F \in \mathfrak{F}$.

Définition 1.3.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, Z un ensemble non vide, $\mathbf{X}$ un espace métrique ou mesurable et $f : \Omega \times Z \longrightarrow \mathbf{X}$ une fonction. On dit que f est* aléatoire *si, pour tout $z \in Z$, $f(\cdot, z)$ est mesurable.*

Remarque 1.3.3. Pour $\mathcal{F}$ une classe de fonctions $g : Z \longrightarrow \mathbf{X}$, où Z est un espace topologique, si f est aléatoire et que, pour tout ω de Ω, $f(\omega, \cdot) \in \mathcal{F}$, on dira que f est $\mathcal{F}$-aléatoire. Par exemple, si $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions rationnelles nous dirons aussi que f est aléatoire rationnelle. Une fonction $\mathcal{F}$-aléatoire est aussi appelée un processus stochastique sur $\mathcal{F}$.

Remarque 1.3.4. Il est intéressant de remarquer qu'en général, dans l'étude des processus stochastiques, que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité et que $\mathbf{X}$ est $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}}$ ou un sous-ensemble fermé de la droite réelle. Dans nos applications, $\mathbf{X}$ sera le plan complexe $\mathbb{C}$.

Définition 1.3.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ des espaces topologiques et une fonction $f : \Omega \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$. Alors f est de* Carathéodory *si f est aléatoire et, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega, \cdot)$ est continue .*

Théorème 1.3.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique séparable, $(\mathbf{Y}, \bar{d})$ un espace métrique et une fonction $f : \Omega \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ de Carathéodory. Alors f est mesurable (par rapport à $\mathcal{A} \times \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$).*

Remarque 1.3.5. $\mathcal{A} \times \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$ est la «σ-algèbre produit», i.e. la σ-algèbre engendrée par les rectangles mesurables où un rectangle mesurable est de la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$.

Remarque 1.3.6. Il n'est pas vrai en général qu'une fonction mesurable en chaque variable est mesurable. Par exemple, **[R]** donne le contre-exemple de Sierpinski ... page 152, 7.9 c)

DÉMONSTRATION. Soit $B = \bar{B} \subset \mathbf{Y}$. Montrons que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$.
Soient $U \subset \mathbf{X}$ dénombrable dense, $B_n = \{y \in \mathbf{Y} \mid d(y, B) < \frac{1}{n}\} \subset \mathbf{Y}$.
Affirmation :

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{u \in U} \{\omega \in \Omega \mid f(\omega, u) \in B_n\} \times \{x \in \mathbf{X} \mid d(x, u) < 1/n\}.$$

Or, f est de Carathéodory ce qui entraîne que, pour tout $u \in U$, f_u est mesurable. Donc $\{\omega \in \Omega \mid f(\omega, u) \in B_n\} = f_u^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$ car B_n est un ouvert. De plus, $\{x \in \mathbf{X} \mid d(x, u) < 1/n\}$ est un ouvert de $\mathbf{X}$ ce qui implique que $\{x \in \mathbf{X} \mid d(x, u) < 1/n\} \in \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$. Ainsi, par l'affirmation, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{B}_{\mathbf{X}}$.

Démonstration de l'affirmation : Nous allons montrer que $f(\omega, x) \in B$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u \in U$ tel que $d(x, u) < 1/n$ et $f(\omega, u) \in B_n$.
($\Rightarrow$) Si $f(\omega, x) \in B$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\omega, x) \in B_n$. Or B_n est ouvert ce qui entraîne qu'il existe $r > 0$ tel que $B_r(f(\omega, x)) \subset B_n$. De plus, $f_\omega(\cdot)$ est continue. Ainsi, pour tout $r > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, u) < \delta$, implique que $f(\omega, u) \in B_r(f(\omega, x))$. Nous pouvons supposer que $\delta < 1/n$. De plus, U est dense, ce qui permet de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u \in U$ tel que $d(x, u) < \delta < 1/n$ et $f(\omega, u) \in B_r(f(\omega, x)) \subset B_n$.
($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in U$ tel que $d(x, u_n) < 1/n$ et $f(\omega, u_n) \in B_n$. Alors $\bar{d}(f(\omega, x), \bar{B}) = 0$ et donc $f(\omega, x) \in \bar{B} = B$. □

Lemme 1.3.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (Y, d) un espace métrique et des fonctions $f_n : \Omega \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $\{f_n\}$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers f. Si les f_n sont mesurables pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est mesurable.*

DÉMONSTRATION. Soient $K = \bar{K} \subset Y$ et $K_n = \{y \in Y \mid d(y, K) \leq \frac{1}{n}\}$. Par hypothèses, il existe $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ tel que , pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\sup_{y \in K} d(f_{m_n}(y), f(y)) \leq 1/n$.

Montrons que

$$f^{-1}(K) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_{m_n}^{-1}(K_n).$$

($\subseteq$) Soit $x \in f^{-1}(K)$, c'est-à-dire $f(x) \in K$. Étant donné que $d(f_{m_n}(x), f(x)) \leq 1/n$, on a que $d(f_{m_n}(x), K) \leq \frac{1}{n}$. Ainsi $f_{m_n}(x) \in K_n$ et on a bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in f_{m_n}^{-1}(K_n)$.

($\supseteq$) Si $x \in f_{m_n}^{-1}(K_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(f_{m_n}(x), K) \leq 1/n$. Par continuité de $d(\cdot, K)$ et du fait que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{m_n}(x)$, on a que $d(f(x), K) = 0$, c'est-à-dire que $f(x) \in \bar{K} = K$ ou encore que $x \in f^{-1}(K)$.

$\square$

1.4. Relations mesurables

La connaissance des relations ou des fonctions multivoques mesurables nous permettra d'obtenir des théorèmes de sélection mesurable qui vont être utiles à l'obtention d'une famille d'approximations variant de manière mesurable pour une famille de fonctions donnée variant de façon mesurable.

Définition 1.4.1. *On dit que $F : \Omega \longrightarrow X$ est une relation si F est une fonction de Ω dans $\mathcal{P}(X)$.*

Exemple 1.4.1. *Le Log : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une relation. En effet Log$(z) = \{ln|z| + 2\pi i \; arg \; z\}$.*

Définition 1.4.2. *On dit que $F : \Omega \longrightarrow X$ est une fonction multivoque si F est une relation tel que dom(F)= Ω, où dom(F)=$\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \neq \emptyset\}$.*

Exemple 1.4.2. *Le Log : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ n' est pas une fonction multivoque sauf si on considère sa restriction sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Définition 1.4.3. *Pour $F : \Omega \longrightarrow X$ une relation, on définit le graphe de F comme étant $Gr(F) = \{(\omega, x) \in \Omega \times X \mid x \in F(\omega)\}$.*

Définition 1.4.4. *Soit $F : \Omega \longrightarrow X$ une relation et $B \subset X$. L'image inverse de B est définie comme suit : $F^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$.*

Définition 1.4.5. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mathbf{X}, \mathfrak{O})$ un espace topologique et $F : \Omega \longrightarrow \mathbf{X}$ une relation. On dit que F est faiblement mesurable (resp. mesurable) si, pour tout ouvert B (resp. pour tout fermé B), $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.*

Remarque 1.4.1. Dans le cas où F est une fonction, c'est-à-dire que $F(\omega)$ est un seul point pour tout $\omega \in \Omega$, $F^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$ =$\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \in B\}$ on retrouve donc l'image inverse de B dans le sens habituel pour les fonctions. Donc quand F est une fonction, les définitions de mesurabilité et de faible mesurabilité pour F au sens des relations coïncident avec la définition de mesurabilité d'une fonction.

Définition 1.4.6. *Soit X un espace topologique T_1, Z, Ω des espaces mesurables et $F : \Omega \longrightarrow X$ une relation faiblement mesurable. Une fonction $f : Gr(F) \longrightarrow Z$ est appelée une fonction aléatoire généralisée si pour tout $x \in X$, $f(\cdot, x)$ de $F^{-1}(x)$ dans Z est mesurable.*

Définition 1.4.7. *Pour une fonction multivoque $F : \Omega \longrightarrow X$ on dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow X$ est un sélecteur pour F si, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in F(\omega)$.*

Proposition 1.4.1. *Soit $F : \Omega \longrightarrow X$ une relation et $\{O_n\} \subset X$. Alors $F^{-1}(\cup O_n) = \cup F^{-1}(O_n)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\omega \in F^{-1}(\cup O_n) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap \cup O_n \neq \emptyset\}$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $F(\omega) \cap O_n \neq \emptyset$. Donc $\omega \in \cup F^{-1}(O_n)$. D'autre part, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $F^{-1}(O_j) \subset F^{-1}(\cup O_n)$. Donc, $\cup F^{-1}(O_j) \subset F^{-1}(\cup O_n)$.

□

Remarque 1.4.2. Si nous avions également que $F^{-1}(O^c) = F^{-1}(O)^c$, les deux notions de mesurabilité seraient équivalentes comme dans le cas des fonctions. Mais pour une relation constante F (c'est-à-dire que pour chaque ω du domaine de F est envoyé sur le même ensemble) d'un espace mesurable à valeur dans $\mathbb{C}$, nous voyons facilement que $F^{-1}(\cap O_n) \neq \cap F^{-1}(O_n)$ et que $F^{-1}(O^c) \neq F^{-1}(O)^c$. Les exemples suivants sont assez convaincants :

Proposition 1.4.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(\mathbf{X}, \mathfrak{O})$ un espace topologique parfaitement normal et $F : \Omega \longrightarrow \mathbf{X}$ une relation. Si F est mesurable, alors F est faiblement mesurable.*

DÉMONSTRATION. On a que $\mathbf{X}$ est parfaitement normal. Donc, pour tout $V \in \mathfrak{F}$ $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $O_n \in \mathfrak{O}$. Soit $O \in \mathfrak{O}$. Montrons que $F^{-1}(O) \in \mathcal{A}$. $F^{-1}(O) = F^{-1}((O^c)^c)$. Or $O^c \in \mathfrak{F}$ implique qu'il existe $\{O_n\} \subset \mathfrak{O}$ tel que

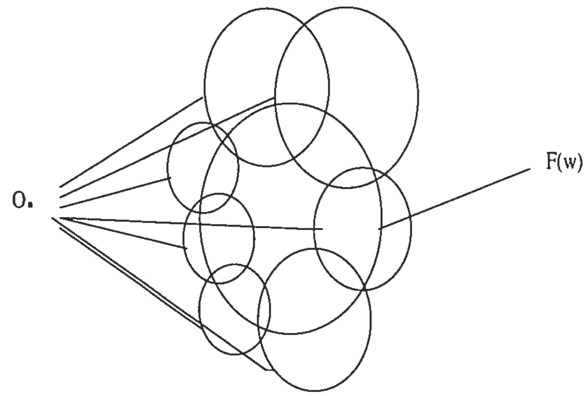

FIG. 1.4.1. $F^{-1}(\cap O_n) \neq \cap F^{-1}(O_n)$

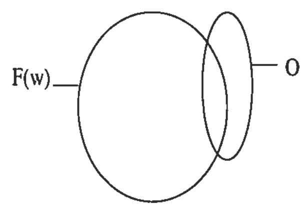

FIG. 1.4.2. $F^{-1}(O^c) \neq F^{-1}(O)^c$

$O^c = \cap O_n$. Ainsi $F^{-1}(O) = F^{-1}((\cap O_n)^c) = F^{-1}(\cup(O_n^c)) = \cup F^{-1}((O_n^c)) \in \mathcal{A}$ car O_n^c est fermé et F est mesurable.

$\square$

Proposition 1.4.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, X un espace métrique et $F : \Omega \longrightarrow X$ une relation à valeur compacte. Alors F est mesurable si et seulement si F est faiblement mesurable.*

DÉMONSTRATION. ($\Rightarrow$) Ceci découle de la proposition 1.4.2, car (X, d) est un espace métrique et donc X est parfaitement normal.

($\Leftarrow$) Supposons que F soit faiblement mesurable et soit $B \in \mathfrak{F}_d$. Montrons que $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

$B^c = \cup A_n$ où $A_n = \{x \in X \mid d(x, B) \geq 1/n\}$.

Par hypothèses, $F^{-1}(A_n^c) \in \mathcal{A}$. Donc $F^{-1}(A_n^c)^c \in \mathcal{A}$ et $F^{-1}(A_n^c)^c = \{\omega \in \Omega \mid F(w) \cap A_n^c \neq \emptyset\}^c = \{\omega \in \Omega \mid F(w) \cap A_n^c = \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid F(w) \subset A_n\} \in \mathcal{A}$ car son complémentaire est mesurable.

On obtient donc que

$F^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \cap B \neq \emptyset\} = \{\omega \in \Omega \mid F(w) \cap B = \emptyset\}^c$
$= \{\omega \in \Omega \mid F(w) \subset B^c\}^c = \{\omega \in \Omega \mid F(w) \subset \cup A_n\}^c$
Afin de terminer la preuve, il reste à prouver que

$$\cup\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \subset A_n\} = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \subset \cup A_n\}.$$

Ainsi,
$F^{-1}(B) = (\cup\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \subset A_n\})^c \in \mathcal{A}$ car $\{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \subset A_n\} \in \mathcal{A}$.

($\subseteq$) Si $w \in \cup\{w \in \Omega \mid F(w) \subset A_n\}$ on a qu' il existe un n tel que $F(w) \subset A_n$ et ainsi $F(w) \subset \cup A_n$ et on a bien que $\{w \in \Omega \mid F(w) \subset A_n\} \subseteq \cup\{w \in \Omega \mid F(w) \subset A_n\}$.

($\supseteq$) Remarquons d'abord que $\cup A_n = \cup \mathring{A}_n$ et que $\mathring{A}_n \subset \mathring{A}_{n+1}$.
Si $w \in \{w \in \Omega \mid F(w) \subset \cup A_n = \cup \mathring{A}_n\}$, $F(w)$ est compact ce qui entraîne qu'il existe $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$ tel que $F(w) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{A}_{n_i} \subset \mathring{A}_{n_m} \subset A_{n_m}$. Ainsi on a qu'il existe un m tel que $F(w) \subset A_m$ c'est-à-dire que $w \in \cup\{w \in \Omega \mid f(w) \subset A_n\}$. □

La prochaine proposition sera utilisée au Chapitre 4 dans la preuve du théorème de Runge aléatoire. Elle permettra de partitionner notre espace de mesure en ensembles mesurables et de faire l'approximation sur les sous-ensembles mesurables.

Proposition 1.4.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini. Supposons que $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ soit une relation faiblement mesurable, à valeur compacte telle que $K(\Omega) = \{K_j\}_{i=1}^{\infty}$. Soit la partition de Ω, $\Omega_j = \{\omega \in \Omega \mid K(\omega) = K_j\}$. Alors les Ω_j sont mesurables.*

Démonstration. Remarquons premièrement que

$$\Omega_j = \bigcap_{z \in K_j} K^{-1}(z) \setminus K^{-1}(K_j^c).$$

($\subseteq$) Soit $\omega_0 \in \Omega_j$. On a que $K(\omega_0) = K_j$ et donc que

$$\omega_0 \in \bigcap_{z \in K_j} \{\omega \in \Omega \mid z \in K(\omega)\} = \bigcap_{z \in K_j} K^{-1}(\{z\}).$$

De plus, $\Omega_j \cap K^{-1}(K_j^c) = \emptyset$ car si $w \in \Omega_j$, alors $K(\omega) = K_j$ et $K(\omega) \cap K_j^c = \emptyset$. Ainsi on a bien que

$$\Omega_j \subseteq \bigcap_{z \in K_j} K^{-1}(\{z\}) \setminus K^{-1}(K_j^c).$$

($\supseteq$) Soit $\omega_0 \in \bigcap_{z \in K_j} K^{-1}(\{z\}) \setminus K^{-1}(K_j^c)$. Alors, pour tout $z \in K_j$, $\omega_0 \in K^{-1}(\{z\})$, ce qui entraîne que $K_j \subseteq K(\omega_0)$. De plus $K(\omega_0) \cap K_j^c = \emptyset$. Alors on a que $K_j = K(\omega_0)$ et donc que $\omega_0 \in \Omega_j$.

De plus , pour $\{\beta_k\}$ un ensemble dénombrable dense de K_j, on a que

$$\bigcap_{z \in K_j} K^{-1}(\{z\}) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K^{-1}(\{\beta_k\}).$$

Naturellement, on a l'inclusion $\subseteq$.

Si $\omega_0 \in \cap_k K^{-1}(\beta_k)$ alors $\{\beta_k\} \subset K(\omega_0)$ et ainsi, étant donné que $K(\omega_0)$ est compact on a que $K_j = \overline{\{\beta_k\}} \subseteq K(\omega_0)$ et ainsi que $\omega_0 \in K^{-1}(\{z\})$, pour chaque $z \in K_j$. Alors on a bien l'égalité.

Donc

$$\Omega_j = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K^{-1}(\{\beta_k\}) \setminus K^{-1}(K_j^c).$$

Or, K est mesurable et faiblement mesurable par la proposition 1.4.3 ainsi, on a que Ω_j est une intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

$\square$

1.5. Quelques résultats utiles

Ces résultats sont classiques mais essentiels à la compréhension des théorèmes d'approximations, soit complexes, soit aléatoires.

Théorème 1.5.1. *(Hahn-Banach) Soit M un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel normé X et soit $f \in X$. Alors $f \in \overline{M}$ si et seulement si toute fonctionnelle linéaire bornée de X qui s'annule sur M s'annule aussi en f.*

Théorème 1.5.2. *(Représentation de Riesz) Pour X un espace de Hausdorff localement compact, toute fonctionnelle linéaire bornée L sur $C_0(X)$ est représenté* *par une unique mesure régulière complexe de Borel μ, c'est-à-dire, pour tout $f \in C_0(X)$,*

$$L(f) = \int_X f d\mu.$$

Proposition 1.5.1. *Soient (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Alors, pour tout $x, y \in X$, $\mid d(x, A) - d(y, A) \mid \leq d(x, y)$ (donc $d(\cdot, A)$ est uniformément continue).*

DÉMONSTRATION. Soient $x, y \in X$ et $\epsilon > 0$. Il existe $z \in A$ tel que $d(y, z) \leq d(y, A) + \epsilon$. Donc $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + d(y, A) + \epsilon$ et $d(x, A) \leq d(x, z)$ ce qui entraîne que $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) + \epsilon$. De la même manière, on obtient que $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A) + \epsilon$. Or ϵ peut être choisi arbitrairement petit, d'où le résultat.

□

Définition 1.5.1. *Soient Y un ensemble et d et ρ des métriques sur Y. Les métriques sont dites uniformément équivalentes si les fonctions identitées*

$$i : (Y, d) \longrightarrow (Y, \bar{d})$$

et

$$i : (Y, \bar{d}) \longrightarrow (Y, d)$$

sont uniformément continues. Dans ce cas, elles engendrent la même topologie sur Y et une métrique est complète si et seulement si l'autre l'est.

Proposition 1.5.2. *Soit (Y, d) un espace métrique. Il existe une métrique $\bar{d}$ tel que $\bar{d} < 1$ et $\bar{d}$ est uniformément équivalente à d.*

DÉMONSTRATION. On définit $\bar{d} : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$\bar{d}(x, y) = \min\{\frac{1}{2}, d(x, y)\}$. On vérifie aisément que $\bar{d}$ est une métrique sur Y et que les fonctions identitées $i : (Y, d) \longrightarrow (Y, \bar{d})$ et $i : (Y, \bar{d}) \longrightarrow (Y, d)$ sont uniformément continues.

□

Théorème 1.5.3. *(Lusin) Soit f une fonction mesurable de Lebesgue sur $[a, b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction g continue sur $[a, b]$ telle que*

$$m(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon.$$

Remarque 1.5.1. Ce théorème nous fournit le résultat suivant : Pour f une fonction mesurable de Lebesgue sur $[a, b]$, il existe une fonction g mesurable de Borel tel que $m(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$. En effet, la limite ponctuelle de fonctions mesurable de Borel (une fonction continue est mesurable de Borel) est mesurable de Borel.

Chapitre 2

ESPACES POLONAIS ET ESPACES DE SOUSLIN

Ce chapitre contient quelques notions sur les espaces Polonais et de Souslin qui vont être les espaces avec lesquels nous allons travailler. Nous prouvons ici les résultats utiles et pertinents pour la suite des travaux.

2.1. Espaces Polonais

Définition 2.1.1. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace topologique. On dit que* $\mathbf{X}$ *est un espace* Polonais *si* $\mathbf{X}$ *est séparable et métrisable complet.*

Exemple 2.1.1. *(1) Pour tout* n*, l'espace* $\mathbb{C}^n$ *avec la topologie habituelle est un espace Polonais.*

(2) Plus généralement, chaque espace séparable de Banach avec la topologie induite par la norme est un espace Polonais.

(3) L'espace des nombres naturels $\mathbb{N}$ *munis de la topologie discrète est aussi un espace Polonais (la métrique est* $d(a,b) = |a-b|$*).*

Proposition 2.1.1. *Les sous-espaces fermés d'un espace Polonais sont des espaces Polonais.*

Démonstration. Soit $Y \subset P$. Alors Y est séparable et métrisable. Y est fermé, donc complet.

□

Proposition 2.1.2. *Les sous-espaces ouverts d'un espace Polonais sont des espaces Polonais.*

Démonstration. Soit X un espace Polonais et d tel que $(X, \mathfrak{O}_d) = (X, \mathfrak{O})$. Soient $U \in \mathfrak{O}$ et $V = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X \mid t \cdot d(x, X \setminus U) = 1\}$. Or $d(\cdot, X \setminus U)$ et t sont continues. Donc V est fermé et ainsi V est un espace Polonais par la proposition 2.1.1. Montrons qu'il existe un homéomorphisme de V dans U.

Soit $p_2 : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ qui à (t, x) associe x. L'application p_2 est continue. Montrons que p_2 est un homéomorphisme de V dans U. On a d'abord que p_2^{-1} existe. En effet, pour $x \in U$, on a que $d(x, X \setminus U) \neq 0$ et que $p_2^{-1}|_U(x) = (d(x, X \setminus U)^{-1}, x) \in V$, et ainsi, $p_2^{-1} : U \longrightarrow V$ est bien définie. Vérifions que $p_2^{-1}|_U$ est continue. Soit $\{x_n\} \subset U$ tel que $x_n \to x \in U$, alors $p_2^{-1}(x_n) = (d(x_n, X \setminus U)^{-1}, x_n) \to p_2^{-1}(x)$ par la proposition 1.5.1 et on a bien que p_2 est un homéomorphisme ce qui fait de U un espace Polonais.

□

Lemme 2.1.1. *Soient X un espace topologique T_2 et la fonction diagonale $f : X \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ (i.e. $f(x) = (x, x, x, ...)$). Alors $f(X)$ est un fermé de $X^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Montrons que $X^{\mathbb{N}} \setminus f(X)$ est ouvert. Soit $x \in X^{\mathbb{N}} \setminus f(X)$ avec $x = (x_1, x_2, ...)$ et $i, j \in \mathbb{N}$ tel que $x_i \neq x_j$. On a que X est T_2. Donc il existe $V_i, V_j \in \mathfrak{O}$ tel que $V_i \cap V_j = \emptyset$ et $x_i \in V_i,\ x_j \in V_j$. Soit $W = \prod\limits_{\mu} X_\mu$, où $X_i = V_i, X_j = V_j$ et $X_\mu = X$ si $\mu \neq i, j$. Alors W est un voisinage ouvert de x dans $X^{\mathbb{N}} \setminus f(X)$.

□

Proposition 2.1.3. *Soit $\{A_n\}$ une suite d'espaces Polonais. Alors $\prod A_n$ est aussi un espace Polonais.*

Démonstration. Les A_n, étant des espaces Polonais, sont séparables donc $\prod A_n$ est séparable. De plus, les A_n sont complets, ce qui implique qu'il existe une métrique telle que $\prod A_n$ est complètement métrisable. Nous pouvons prendre la métrique

$$\rho(f, g) = \sum \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f(n), g(n))}{(1 + \rho_n(f(n), g(n)))}.$$

□

Exemple 2.1.2. *(1)* Par la proposition 2.1.3, on a que $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est aussi un espace Polonais. On écrira un élément de $\mathcal{N}$, $\{m_i\}$ ou $\mathbf{m}$.

Considérons les ensembles $\mathcal{N}(n_1, ..., n_k)$ pour un entier positif k qui consiste en les éléments $\mathbf{m} \in \mathcal{N}$ tel que $m_i = n_i$, pour $i = 1, \cdots, k$. Ces ensembles forment une base de la topologie produit. En effet, on voit facilement que nous avons une base car tout élément de $\mathcal{N}$ se retrouve dans un de ces ensembles et que si un élément est dans l'intersection de deux de ces ensembles, il existera un autre ensemble contenu dans l'intersection et qui contient cet élément.

(2) On a aussi que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est un espace Polonais.

Ces deux exemples vont nous être très utiles pour prouver des résultats sur les espaces Polonais et de Souslin ainsi que des théorèmes de sélections (Chapitre 4).

Proposition 2.1.4. *Tout espace Polonais non vide X est l'image de $\mathcal{N}$ par une fonction continue.*

Démonstration. Soit X une espace Polonais non vide et d une métrique complète sur X. Nous allons construire, par induction sur k, une famille $\{X_{(n_1,\dots,n_k)}\}$ de sous ensembles de X où les indices varient dans l'ensemble des suites finies d'entiers positifs, telle que :

(1) $X_{(n_1,\dots,n_k)}$ est un fermé non vide,

(2) le diamètre de $X_{(n_1,\dots,n_k)}$ est au plus $1/k$,

(3) $X_{(n_1,\dots,n_{k-1})} = \bigcup_{n_k} X_{(n_1,\dots,n_k)}$, et

(4) $X = \cup_{n_1} X_{n_1}$.

Pour $k = 1$, prenons une sous-suite dense de X, $\{\zeta_{n_1}\}$. Pour chaque n_1, nous pouvons prendre X_{n_1} comme étant la boule fermée de centre ζ_{n_1} et de rayon $1/2$.

Supposons maintenant que pour $k > 1$ nous avons construit les $X_{(n_1,\dots,n_{k-1})}$. On applique à ces ensembles la construction que nous venons de faire sur X afin de produire les $X_{(n_1,\dots,n_k)}$ satisfaisant (1) à (3).

Construisons maintenant une fonction continue surjective de $\mathcal{N}$ dans X. Soit $\mathbf{n} \in \mathcal{N}, \mathbf{n} = \{n_k\}$. On a, par (1),(2),(3) ci haut que $X_{n_1}, X_{(n_1,n_2)}, \dots$ est une suite décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre tend vers 0. Donc il existe un unique élément dans l'intersection de ces ensembles ce qui nous permet de définir $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ par $f(\mathbf{n}) = \cap_k X_{(n_1,\ldots,n_k)}$. Pour k, si $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathcal{N}(n_1, \ldots, n_k)$, alors $d(f(\mathbf{m}), f(\mathbf{n})) \leq 1/k$ car $f(\mathbf{m}) = \bigcap_i X_{(m_1,\ldots,m_i)} = \bigcap_{i=1}^{k} X_{(n_1,\ldots,n_i)} \cap \bigcap_{i=k+1} X_{(m_1,\ldots,m_i)}$. Donc $f(\mathbf{n})$ et $f(\mathbf{m})$ sont dans $X_{(n_1,\ldots,n_k)}$. Ceci permet de conclure que f est continue.

Finalement, par (4), on a que pour tout $x \in X$, il existe un n_1 tel que x est dans $X_{(n_1)}$ et par (3), on a que $X_{(n_1)} = \cup_{n_2} X_{(n_1,n_2)}$. En continuant ainsi, on trouve $\mathbf{n} \in \mathcal{N}$ tel que x est dans $\cap_k X_{(n_1,\ldots,n_k)}$ et donc que $f(\mathbf{n}) = x$, d'où f est surjective. □

Lemme 2.1.2. *Soient X un espace topologique T_2, $\{A_n\} \subset X$ et $f : X \longrightarrow X^{\mathbb{N}}$ la diagonale. Alors $f|_{\cap A_n}$ est un homéomorphisme de $\cap A_n$ dans un sous espace fermé de $\prod A_n$.*

DÉMONSTRATION. On a clairement que f est un homéomorphisme de X dans $f(X)$ et, par le lemme 2.1.1, on a que $f(X)$ est un fermé de $X^{\mathbb{N}}$. Or, $Image(f|_{\cap A_n}) = f(X) \cap \prod A_n$.

□

Proposition 2.1.5. *Soient X une espace topologique T_2, $\{A_n\} \subset X$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est un espace Polonais . Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est aussi un espace Polonais.*

DÉMONSTRATION. Par la proposition 2.1.3, on a que $\prod A_n$ est un espace Polonais et, par le lemme 2.1.2, la diagonale est un homéomorphisme de $\cap A_n$ dans un sous-espace fermé de $\prod A_n$ qui est lui-même un espace Polonais par la proposition 2.1.1. Donc $\cap A_n$ est un espace Polonais.

□

2.2. ESPACES DE SOUSLIN

Les espaces de Souslin sont aussi appelés ensembles analytiques dans la littérature (bien qu'ils n'aient rien à voir avec la notion d'ensembles analytiques en plusieurs variables complexes). Nous allons voir que chaque borélien est un espace de Souslin et que les sous-espaces de Souslin d'un espace (de mesure complète) Polonais sont mesurables.

Définition 2.2.1. *Pour* $\mathbb{X}$ *un espace topologique, on dit que* $\mathbb{X}$ *est* un espace de Souslin *si* $\mathbb{X} = \emptyset$ *ou si il est métrisable et l'image continue d'un espace Polonais.*

Proposition 2.2.1. *Si X est un espace de Souslin, alors X est séparable.*

DÉMONSTRATION. Soient P et f tels que f est continue, P est un espace Polonais et $Image(f) = X$. Soit $A \subset X$ dénombrable dense. Alors $f(A)$ est dénombrable car f est une fonction et est dense car f est continue.

□

Remarque 2.2.1. Si X est un espace Polonais, alors X est un espace de Souslin. En effet
$i : X \longrightarrow X$ est continue.

Proposition 2.2.2. *Les sous-espaces fermés (resp. ouverts) d'un espace de Souslin X sont des espaces de Souslin.*

DÉMONSTRATION. Soient P un espace Polonais, $f : P \longrightarrow X$ continue et M un sous-espace fermé (resp. ouvert), alors $f^{-1}(M)$ est fermée (resp. ouvert) de P donc Polonais et $f : f^{-1}(M) \longrightarrow M$ est continue ce qui entraîne que M est un espace de Souslin.

□

Proposition 2.2.3. *Soient $\{A_n\}$ une suite d'espaces de Souslin. Alors $\prod A_n$ est un espace de Souslin.*

DÉMONSTRATION. On a $f_n : P_n \longrightarrow A_n$ où les P_n sont des espaces Polonais et f_n sont continues. $\prod A_n$ est métrisable car les A_n le sont et $(f_1, f_2, f_3, ...) : \prod P_n \longrightarrow \prod A_n$ est continue. Par la proposition 2.1.3, on a que $\prod P_n$ est un espace Polonais et donc $\prod A_n$ est un espace de Souslin.

□

Proposition 2.2.4. *Pour X un espace topologique métrisable et $\{A_n\} \subset X$ une suite d'espaces de Souslin, $\bigcap A_n$ est un espace de Souslin.*

DÉMONSTRATION. Le résultat suit du lemme 2.1.2, de la proposition 2.2.2 et de la proposition 2.2.3. En effet par la proposition 2.2.3, on a que $\prod A_n$ est un espace de Souslin. Le lemme 2.1.2 nous donne un homéomorphisme de $\cap A_n$ dans un sous-espace fermé de $\prod A_n$. Mais ce sous-espace fermé est un espace de Souslin par la proposition 2.2.2 et ainsi on a bien que $\cap A_n$ est un espace de Souslin.

$\square$

Proposition 2.2.5. *Si X est un espace de Souslin et $B \in \mathfrak{B}_X$, alors B est un espace de Souslin.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Psi = \{A \subset X \mid \ A \text{ et } A^c \text{ sont des espaces de Souslin } \}$. Par hypothèse, X est dans Ψ. Par définition, si A est dans Ψ, alors A^c est dans Ψ et pour $\{A_n\} \subset \Psi$, on a que $\{A_n^c\} \subset \Psi$ et par la proposition 2.2.4, on a que $\cap(A_n^c)$ est dans Ψ mais $\cap(A_n^c) = (\cup A_n)^c$ et on a donc que Ψ est une σ-algèbre et par proposition 2.2.2, Ψ contient tous les fermés. Or, $\mathfrak{B}_X$ est la plus petite σ-algèbre qui contient les fermés et donc $\mathfrak{B}_X \subset \Psi$.

$\square$

2.2.1. Mesurabilité des espaces de Souslin

Cette section sera utilisée au chapitre 4 afin de prouver et de généraliser un théorème de sélection (pour passer d'un espace de mesure finie à un espace de mesure sigma-finie).

Définition 2.2.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure et*

$$\mathfrak{N} = \{N \in \mathcal{P}(\Omega) \mid N \subset B,\ B \in \mathcal{A},\ \mu(B) = 0\}.$$

Le mesure μ est complète si $N \in \mathfrak{N}$ implique que $N \in \mathcal{A}$. On dira que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de mesure μ-complet.

Remarque 2.2.2. L'espace de mesure de Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathbb{L}, m)$ est m-complet.

Remarque 2.2.3. Notons $\overline{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathfrak{N})$, la σ-algèbre engendrée par $\mathcal{A} \cup \mathfrak{N}$. Alors $\overline{\mathcal{A}}$ contient $\mathcal{A}$ et on peut prolonger μ à $\bar{\mu}$, une mesure complète sur $\overline{\mathcal{A}}$ avec $\bar{\mu}(N) = 0$ pour $N \in \mathfrak{N}$ (et c'est la seule mesure sur $\overline{\mathcal{A}}$ que correspond à μ sur $\mathcal{A}$). *Les ensembles A de $\overline{\mathcal{A}}$ sont donc ceux pour lesquels il existe E et F de $\mathcal{A}$ tels que $E \subset A \subset F$ et $\mu(F \setminus E) = 0$.*

Exemple 2.2.1. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, m)$ *n'est pas complet. Sa complétion est* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{L}, m)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème sur la mesurabilité des espaces de Souslin.

Théorème 2.2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure finie avec Ω un espace Polonais. Alors tout sous-ensemble de Ω qui est un espace de Souslin est un ensemble mesurable par rapport à $\overline{\mathcal{A}}$.*

Remarque 2.2.4. Afin de prouver ce théorème, nous aurons besoin d'un lemme et des notions de mesure extérieure et intérieure que je rappelle ici : La mesure extérieure, notée $\mu^*(A)$, et la mesure intérieure, notée $\mu_*(A)$, pour un ensemble arbitraire de Ω sont données par

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) \mid A \subset B,\ B \in \mathcal{A}\}$$

et

$$\mu_*(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A,\ B \in \mathcal{A}\}.$$

On a que $A \in \overline{\mathcal{A}}$ si et seulement si $\mu^*(A) = \mu_*(A)$.

De plus, par la remarque 2.2.3, on a que si $A \in \overline{\mathcal{A}}$ alors il existe $E, F \in \mathcal{A}$ tels que $E \subset A \subset F$ ainsi

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(F).$$

Mais comme $\mu^*(F) = \mu(F) = \mu(E) = \mu^*(E)$ on a que $\mu^*(A) = \mu(E)$.

Lemme 2.2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure finie. Si $\{B_n\}$ est une suite croissante de sous-ensembles de Ω alors*

$$\mu^*\left(\bigcup_n B_n\right) = \lim_n \mu^*(B_n).$$

DÉMONSTRATION. Étant donnée que μ^* est monotone, on a que la limite existe et

$$\mu^*\left(\bigcup_n B_n\right) \geq \lim_n \mu^*(B_n).$$

Vérifions l'inégalité contraire. Soit $\epsilon > 0$ et, pour chaque n, choisissons un C_n appartenant à $\mathcal{A}$ qui contient B_n et tel que $\mu(C_n) \leq \mu^*(B_n) + \epsilon$. Nous pouvons supposer que les C_n sont croissants en remplaçant C_n par $\cap_{j=n}^{\infty} C_j$. Donc $\mu(\cup C_n) = \lim_n \mu(C_n)$ et ainsi

$$\mu^*\left(\bigcup_n B_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_n C_n\right) = \lim_n \mu(C_n) \leq \lim_n \mu^*(B_n) + \epsilon.$$

ϵ étant arbitraire, la preuve du lemme est complète.

$\square$

Voici la preuve du théorème 2.2.1.

DÉMONSTRATION. Soit S un sous ensemble de Ω avec S un espace de Souslin. Montrons que $\mu^*(S) = \mu_*(S)$ en construisant, pour $\epsilon > 0$ arbitraire, un sous-ensemble K de S compact tel que $\mu(K) \geq \mu^*(S) - \epsilon$.

Supposons que S est non vide. Donc, il existe une fonction continue $f : \mathcal{N} \longrightarrow S$ tel que $f(\mathcal{N}) = S$ (proposition 2.1.4). Notons par $\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)}$ l'ensemble des $\mathbf{m}$ dans $\mathcal{N}$ tel que $m_i \leq n_i, i = 1, .., k$.

Nous allons commencer par construire un élément $\mathbf{n}$ de $\mathcal{N}$ tel que

$$\mu^*(f(\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)})) > \mu^*(S) - \epsilon \quad (*)$$

pour chaque k. Remarquons que pour n_1, le premier terme de $\mathbf{n}$, $\{\mathcal{L}_{(n_1)}\}_{n_1=1}^{\infty}$ est une suite croissante d'ensemble dont l'union est $\mathcal{N}$. Ainsi on a que $\{f(\mathcal{L}_{(n_1)})\}_{n_1=1}^{\infty}$ est aussi une suite croissante d'ensemble dont l'union est S. Donc $\mu^*(S) = \lim_{n_1} \mu^*(f(\mathcal{L}_{(n_1)}))$ (lemme 2.2.1). Donc, il existe un entier n_1 tel que

$$\mu^*(f(\mathcal{L}_{(n_1)})) > \mu^*(S) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Étant donné que $\mathcal{L}_{(n_1)} = \cup_{n_2} \mathcal{L}_{(n_1,n_2)}$ par le même genre d'argument, on trouve un n_2 tel que

$$\mu^*(f(\mathcal{L}_{(n_1,n_2)})) > \mu^*(S) - \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}\right).$$

En continuant, on obtient un élément $\mathbf{n}$ de $\mathcal{N}$ satisfaisant $(*)$. Posons $L = \cap_k \mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)}$ et $K = f(L)$. Alors L est égal à $\{\mathbf{m} \in \mathcal{N} \mid m_i \leq n_i$ pour tout

$i\} = \prod_i \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n_i\}$, ce qui fait de K un compact (Tychonoff). Nous allons montrer que

$$\mu(K) \geq \mu^*(S) - \epsilon.$$

Commençons par montrer que

$$K = \bigcap_k \overline{f(\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)})}. \qquad (**)$$

Naturellement on a que $K \subset \cap_k \overline{f(\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)})}$ car $f(\cap) \subset \cap f$. Soit d la métrique sur X. Si $x \in \cap_k \overline{f(\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)})}$, nous cherchons à montrer que $x \in K$. Pour tout k, il existe $\mathbf{m}_k$ de $\mathcal{L}_{(n_1,..,n_k)}$ tel que $d(f(\mathbf{m}_k), x) < 1/k$. Remarquons que pour tout i, les $i^{\text{èmes}}$ composantes de $\{\mathbf{m}_k\}$ forment un ensemble borné de $\mathbb{N}$, donc $\{\mathbf{m}_k\}$ est un ensemble compact de $\mathcal{N}$, ce qui nous permet d'extraire de $\{\mathbf{m}_k\}$ une sous-suite convergente vers un élément $\mathbf{m}$. Cet élément est dans $\cap \mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)}$ et $f(\mathbf{m}) = x$. D'où $(**)$.

Maintenant, pour tout k

$$\mu(f(\overline{\mathcal{L}_{(n_1,..,n_k)}})) \geq \mu^*(f(\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)})) > \mu^*(S) - \epsilon.$$

De plus la suite $\{\overline{\mathcal{L}_{(n_1,\ldots,n_k)}}\}$ est décroissante et on a donc que

$$\mu(K) = \lim_k \mu(f(\overline{\mathcal{L}_{(n_1,..,n_k)}})) \geq \mu^*(S) - \epsilon.$$

□

Chapitre 3

$C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$

L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{C}$ dans $\overline{\mathbb{C}}$ est un espace de fonctions très important pour nous, car il contient les fonctions méromorphes, fonctions avec lesquelles nous approximerons. En effet, nous donnerons au chapitre 4 une généralisation du théorème de Runge, lequel est prouvé à la fin de ce chapitre.

3.1. La distance de corde

Définition 3.1.1. *La distance de corde, notée χ est donnée par*

$$\chi(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)}\sqrt{(1+|z_2|^2)}} & si\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{(1+|z_1|^2)}} & si\ z_2 = \infty. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

La distance $\chi(z_1, z_2)$ est en fait la distance euclidienne de $\mathbb{R}^3$ entre les points de la sphère p_1 et p_2 où z_i est la projection stéréographique de p_i, $i = 1, 2$ et la projection est faite à partir de la sphère $\overline{\mathbb{C}} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ sur le plan $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\ x_3 = 0\} \simeq \mathbb{C}$.

Remarque 3.1.1. Voici quelques propriétés :

(1) Naturellement $\chi(z_1, z_2) \leq 1$ pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$.

(2) De plus, $\chi(z_1, z_2) = \chi(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2})$.

(3) On a aussi que si $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, alors $\chi(0, z_1) \leq \chi(0, z_2)$. En effet,

- si $|z_1| = |z_2| \Rightarrow \chi(0, z_1) = \chi(0, z_2)$.

- si$|z_1| < |z_2| = \infty \Rightarrow 1 = \chi(0, z_2) > \chi(0, z_1)$.
- si $|z_1| < |z_2| < \infty$, on a que $|z_1| < |z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 < |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 < |z_2|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2(1 + |z_2|^2) < |z_2|^2(1 + |z_1|^2) \Leftrightarrow \dfrac{|z_1|^2}{1 + |z_1|^2} < \dfrac{|z_2|^2}{1 + |z_2|^2} \Leftrightarrow \chi(0, z_1) < \chi(0, z_2)$.

(4) Pour r_1, r_2 deux nombres positifs, il existe $c = c(r_1, r_2)$ tel que pour $|z_1| \leq r_1, |z_2| \geq r_2$, on a que $\chi(z_1, z_2) \geq c$. En effet, pour $|z_1| \leq r_1, |z_2| \geq r_2$, on a que $\chi(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + |z_2|^2}} \geq \dfrac{1 - \frac{|z_1|}{|z_2|}}{\sqrt{1 + |z_1|^2}\sqrt{1 + \frac{1}{|z_2|^2}}} \geq \dfrac{1 - \frac{r_1}{r_2}}{\sqrt{1 + r_1^2}\sqrt{1 + \frac{1}{r_2^2}}}$

(5) On remarque d'après la formule de χ que, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\chi(z_1, z_2) < |z_1 - z_2|$.

3.1.1. La métrique sphérique

Nous avons vu en géométrie différentielle que la distance sphérique entre deux éléments de la sphère z_1 et z_2, notée $\sigma(z_1, z_2)$, est la longueur euclidienne du plus petit arc de grand cercle sur $\overline{\mathbb{C}}$ joignant z_1 et z_2. La métrique σ est la métrique sphérique. Sachant que la longueur la plus courte entre deux points sur la sphère est la longueur euclidienne de l'arc de la droite passant par ces deux points, on a clairement que $\chi(z_1, z_2) \leq \sigma(z_1, z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. De plus on voit facilement que $\pi\chi(z_1, z_2) \geq 2\sigma(z_1, z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$.

On a donc que χ et σ sont deux métriques uniformément équivalentes. Elles génèrent donc les mêmes ouverts sur $\overline{\mathbb{C}}$.

3.2. La topologie de $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$

L'espace $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ est l'espace des fonctions de $\mathbb{C}$ dans la sphère $\overline{\mathbb{C}}$ métrisée par la métrique cordale (ce qui est équivalent à être métrisé par la métrique sphérique). On a donc la topologie de la convergence sphérique uniforme sur les compacts de $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.1. *Une famille $\mathfrak{F} \subset C(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$, où Ω est un domaine de $\mathbb{C}$, est dite sphériquement équicontinue au point $z_0 \in \Omega$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un*

$\delta(\epsilon, z_0) > 0$ tel que pour tout $f \in \mathfrak{F}$, $\chi(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ dès que $|z - z_0| < \delta$. De plus $\mathfrak{F}$ est dite équicontinue sur un ensemble $E \subset \Omega$ si la famille est équicontinue en chaque point de E.

Remarque 3.2.1. Si $\mathfrak{F}$ est équicontinue sur les compacts de Ω, alors pour tout compact E de Ω et pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon, E) > 0$ tel que pour tout $f \in \mathfrak{F}$, $\chi(f(z), f(z_0)) < \epsilon$ pour tout $z \in \Omega, z_0 \in E$ tel que $|z - z_0| < \delta$.

En effet, comme E est compact, pour $\epsilon > 0$, il peut être recouvert par un nombre fini de disques $\{z \in \Omega \,||z - z_i| < \delta_i/2\}$, pour $i = 1, .., n$, tel que pour tout $f \in \mathfrak{F}$, pour tout $z \in \Omega, z_i \in E$ tel que $|z - z_i| < \delta_i$, $\chi(f(z), f(z_i)) < \epsilon/2$. En prenant $\delta = \min \delta_i/2$ nous obtenons le résultat voulu.

Définition 3.2.2. *Une suite de fonctions $\{f_n\}$ converge sphériquement uniformément vers f sur un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait, pour tout $z \in E$, $\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon$.*

Remarque 3.2.2. Pour $\{f_n\}$ convergeant sphériquement uniformément vers f sur un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ on écrira :

$$f_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} f \text{ sur } E.$$

Tandis que la convergence uniforme sur un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ dans la norme usuelle de $\mathbb{C}$ sera notée :

$$f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} f \text{ sur } E.$$

Théorème 3.2.1. *Soit $E \subset \mathbb{C}$ et $f_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} f$ sur E où f est bornée sur E. Alors $f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} f$ sur E.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in E$. Par la remarque 3.1.1,

$$\chi(0, f(z)) \leq \chi(0, M) = \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}} < 1.$$

Choisissons

$$\epsilon < 1 - \frac{M}{\sqrt{1 + M^2}}.$$

Pour ce ϵ, il existe n_0 tel que $\chi(f(z), f_n(z)) < \epsilon$, pour tout $z \in E$.

On a que

$$\frac{|f_n(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}} = \chi(0, f_n(z)) \leq \chi(0, f(z)) + \chi(f(z), f_n(z)) < \frac{M}{\sqrt{1+M^2}} + \epsilon = m < 1.$$

Ce qui revient à dire que $|f_n(z)| < \dfrac{m}{\sqrt{1-m^2}} = M_1$, pour tout $n \geq n_0$. Ainsi

$$|f(z) - f_n(z)| = \sqrt{1+|f(z)^2}\sqrt{1+|f_n(z)|^2} \cdot \chi(f(z), f_n(z)) <$$

$\sqrt{1+M^2}\sqrt{1+M_1^2} \cdot \chi(f(z), f_n(z))$, pour tout $n \geq n_0$.

□

Proposition 3.2.1. *Si f est méromorphe dans un domaine Ω, alors f est sphériquement continue.*

Démonstration. Si f est holomorphe en $z_0 \in \Omega$, f est holomorphe dans un voisinage de z_0 (donc continue) et dans ce voisinage $\chi(f(z), f(z_0)) < |f(z) - f(z_0)|$ par la remarque 3.1.1. Donc f est sphériquement continue.

Si f a un pôle en $z_0 \in \Omega$, alors, par la première partie de la preuve, $1/f$ est sphériquement continue en z_0. Le résultat suit du fait que

$$\chi(f(z), f(z_0)) = \chi\left(\frac{1}{f(z)}, \frac{1}{f(z_0)}\right).$$

□

Définition 3.2.3. *Une suite de fonctions $\{f_n\}$ converge sphériquement uniformément sur les compacts d'un domaine Ω vers une fonction f si pour tout compact $K \subset \Omega$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_0 = n_0(K, \epsilon)$ tel que si $n \geq n_0$ alors , pour tout $z \in K$, $\chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon$.*

Proposition 3.2.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions sphériquement continues qui converge sphériquement uniformément vers une fonction f sur un compact K, alors f est uniformément sphériquement continue sur K. De plus, les fonctions $\{f_n\}$ sont sphériquement équicontinues sur K.*

Démonstration. Pour $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\sup_{z \in K} \chi(f_n(z), f(z)) < \epsilon/3$$

. De plus les f_n sont sphériquement continues sur le compact K et ainsi les f_n sont uniformément sphériquement continues, en particulier, pour n_0 et le ϵ, on a que il existe $\delta = \delta(\epsilon, K) > 0$ tel que, pour tout $z_1, z_2 \in K$ tel que $|z_1 - z_2| < \delta$, $\chi(f_{n_0}(z_1), f_{n_0}(z_2)) < \epsilon/3$. Ainsi

$$\chi(f(z_1), f(z_2)) \leq \chi(f(z_1), f_{n_0}(z_1)) + \chi(f_{n_0}(z_1), f_{n_0}(z_2)) + \chi(f_{n_0}(z_2), f(z_2)) < \epsilon$$

pour tout $z_1, z_2 \in K$ tel que $|z_1 - z_2| < \delta$.

Les $\{f_n\}$ sont sphériquement équicontinues sur K car pour $|z_1 - z_2| < \delta$ et pour $n \geq n_0$ on trouve que

$$\chi(f_n(z_1), f_n(z_2)) \leq \chi(f_n(z_1), f(z_1)) + \chi(f(z_1), f(z_2)) + \chi(f(z_2), f_n(z_2) < 3\epsilon.$$

□

Remarque 3.2.3. Par la proposition 3.2.2, on obtient, pour une suite $\{f_n\}$ de fonctions sphériquement continues qui converge sphériquement uniformément vers une fonction f sur les compacts d'un domaine Ω, que f est sphériquement continue sur Ω.

Théorème 3.2.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions méromorphes sur un domaine Ω. Alors $f_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} f$ sur les compacts de Ω si et seulement si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe $K(z_0, r)$, un disque fermé de rayon r centré en z_0, dans lequel*

$$f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} f \ \text{ou} \ \frac{1}{f_n} \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} \frac{1}{f} \ .$$

DÉMONSTRATION. ($\Leftarrow$) Étant donné que

$$\chi(w_1, w_2) \leq |w_1 - w_2| \text{ si } \ w_1, w_2 \in \mathbb{C}$$

et que

$$\chi(w_1, w_2) \leq \left| \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} \right| \text{ si } \ \frac{1}{w_1}, \ \frac{1}{w_2} \in \mathbb{C}$$

on a que si $f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} f$ sur K ou $1/f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} 1/f$ sur K alors $\chi(f_n, f) \to 0$ uniformément dans $K = K(z_0, r)$ et donc uniformément sur les compacts de Ω, étant donné que chaque compact peut être recouvert par un nombre fini de $\overset{\circ}{K}(z_0, r)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $f_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} f$ sur les compacts de Ω, c'est-à-dire que $\chi(f_n, f) \rightrightarrows 0$ sur les compacts de Ω. Pour $z_0 \in \Omega$ il y a deux cas possibles :

(1) Si $f(z_0) \in \mathbb{C}$, alors par la remarque 3.2.3, f est sphériquement continue dans Ω et donc il existe $K(z_0, r)$ dans lequel f est bornée. Par le théorème 3.2.1, $f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} f$ sur K.

Remarquons que f est holomorphe dans $\overset{\circ}{K}(z_0, r)$.

(2) Si $f(z_0) = \infty$, comme en (1), il existe $K(z_0, r)$ dans lequel $1/f$ est bornée. Étant donné que $1/f_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} 1/f$ sur K alors $1/f_n \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} 1/f$ sur K.

□

Corollaire 3.2.1. *Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions méromorphes sur un domaine Ω que converge sphériquement uniformément sur les compacts de Ω vers une fonction f. Alors soit f est méromorphe soit $f \equiv \infty$ sur Ω.*

DÉMONSTRATION. Supposons que f ne soit pas identiquement égale à ∞. Alors il existe $z \in \Omega$ tel que $f(z) \neq \infty$. Par la remarque de la première partie de la preuve du théorème 3.2.2, on a que f est holomorphe dans un voisinage de tout point où f est finie. Donc pour z_0 tel que $f(z_0) = \infty$ nous devons montrer , pour conclure, que z_0 est un pôle.

Montrons d'abord que z_0 est une singularité isolée. Supposons le contraire, c'est-à-dire soit $\{z_n\}$ tel que $z_n \to z_0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = \infty$. Par la preuve du théorème 3.2.2, $1/f$ est holomorphe dans un certain $\overset{\circ}{K}(z_0, r)$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/f(z_n) = 0$. Ainsi $1/f \equiv 0$ dans $\overset{\circ}{K}(z_0, r)$ c'est-à-dire que $f \equiv \infty$ dans $\overset{\circ}{K}(z_0, r)$.

Soit $S = \{z \in \Omega \mid f(z) = \infty$ tel que z est une singularité non-isolée$\}$, $S \neq \emptyset$. S est ouvert par le paragraphe précédent. S est fermé et Ω est connexe. Donc $S = \Omega$ ce qui est une contradiction avec l'hypothèse que f est non-identiquement ∞. Ainsi z_0 est une singularité isolée de f. De plus, il existe un $K(z_0, r)$ dans lequel $1/f$ est bornée et

$$\frac{1}{f_n} \overset{|\cdot|}{\rightrightarrows} \frac{1}{f} \text{ sur } K.$$

Ainsi, il existe un n_0 tel que pour tout $n > n_0$ on a que les $1/f_n$ sont bornées et donc holomorphes et ainsi $1/f$ est holomorphe avec un zéro isolé en z_0. Donc f a un pôle en z_0.

□

Voici quelques notions sur les familles normales étant donné leurs utilités pour établir la compacité de certains ensembles de fonctions méromorphes. Nous nous en servirons en fait pour établir la σ-compacité d'une famille de fonctions rationnelles.

Définition 3.2.4. *Une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions méromorphes sur un domaine Ω est normale dans Ω si toute suite $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ contient une sous-suite sphériquement uniformément convergente sur les compacts de Ω.*

Définition 3.2.5. *Une famille $\mathfrak{F}$ de fonctions méromorphes sur un domaine Ω est normale en $z_0 \in \Omega$ si il existe $B(z_0, r)$ une boule ouverte incluse dans Ω dans laquelle la famille $\mathfrak{F}$ est normale.*

Théorème 3.2.3. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine Ω. Alors $\mathfrak{F}$ est normale si et seulement si $\mathfrak{F}$ est normale en chaque point de Ω.*

Démonstration. Il est évident que si une famille est normale dans un domaine Ω, elle est normale en chaque point de Ω.

Supposons que $\mathfrak{F}$ soit normale en chaque point de Ω et soit $\{z_k\}$ un sous ensemble dénombrable dense dans Ω (par exemple les points de Ω à coordonnées rationnelles). Considérons une certain z_j. Par hypothèse, il existe une boule $B(z_j, r)$ de Ω dans laquelle $\mathfrak{F}$ est normale. Soit R_j le supremum des r ayant cette propriété. Posons

$$B_j = B(z_j, R_j/2) \text{ si } R_j < \infty$$

et

$$B_j = B(z_j, 1) \text{ si } R_j = \infty.$$

Ainsi, B_j est incluse dans Ω et la famille est normale dans B_j. Soit $S = \{f_n\}$ une suite de $\mathfrak{F}$. De S, on peut extraire une sous-suite $S_1 = \{f_{1,j}\}$ sphériquement uniformément convergente dans B_1. De S_1, on peut extraire une sous suite $S_2 = \{f_{2,j}\}$ sphériquement uniformément convergente dans B_2 et ainsi de suite. Soit $S' = \{f_{j,j}\}$, la suite diagonale. S' est une sous-suite de S sphériquement uniformément convergente dans B_i, $i = 1, 2, \cdots$. Considérons $z_0 \in \Omega$. Par hypothèse, il existe une boule $B = B(z_0, \rho)$ $(0 < \rho < 1)$ incluse dans Ω et dans laquelle $\mathfrak{F}$ est normale. Soit z_j tel que $|z_j - z_0| < \rho/4$. Alors, on a que $B(z_j, \rho/2) \subset B$ et donc

$\mathfrak{F}$ est normale dans $B(z_j, \rho/2)$. Ainsi, si $R_j < \infty$, on a que $\rho/2 \leq R_j$ et ainsi on a que $B(z_j, \rho/4) \subset B_j$. Et si $R_j = +\infty$, on a que $\rho/2 < 1$ et $B(z_j, \rho/2) \subset B_j$ et $z_0 \in B(z_j, \rho/2) \subset B_j$. Donc les B_j recouvrent Ω car z_0 est un point arbitraire de Ω et ainsi, on a un voisinage ouvert de z_0 dans lequel S' est sphériquement uniformément convergente. Comme un compact peut-être recouvert par un nombre fini de ces ouverts, on obtient que la famille $\mathfrak{F}$ est normale dans Ω.

□

Théorème 3.2.4. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine Ω. La famille $\mathfrak{F}$ est normale si et seulement si $\mathfrak{F}$ est sphériquement équicontinue.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Par contradiction, supposons que $\mathfrak{F}$ soit normale mais qu'elle ne soit pas équicontinue. Alors, il existe un z_0 dans Ω, un $\epsilon > 0$, une suite $z_n \longrightarrow z_0$ et une suite $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$ tel que

$$\chi(f_n(z_n), f_n(z_0)) > \epsilon \text{ } pour \text{ } n = 1, 2, 3, ... \tag{3.2.1}$$

La famille $\mathfrak{F}$ est normale, ce qui entraîne qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ qui converge sphériquement uniformément sur les sous ensembles compacts de Ω, en particulier pour les sous-ensembles compacts contenant $\{z_n\}$. Mais par la proposition 3.2.2, on obtient que $\{f_{n_k}\}$ est équicontinue en z_0 contredisant (3.2.1). Donc $\mathfrak{F}$ est équicontinue.

($\Leftarrow$) Soit $\{\zeta_p\}$, $p = 1, 2, 3, ...$ un sous-ensemble dénombrable dense dans Ω et soit $\{f_n\} \subset \mathfrak{F}$. Considérons $\{f_n(\zeta_1)\}$ une suite de $\overline{\mathbb{C}}$. Par la compacité de la sphère de Riemann on peut extraire une sous suite $\{f_{1,j}\} \subset \{f_n\}$ et trouver un point w_1 de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que $\lim_{j\to\infty} \chi(f_{1,j}(\zeta_1), w_1) = 0$. Ensuite, on peut extraire une sous-suite $\{f_{2,j}\}$ de $\{f_{1,j}\}$ et trouver un point w_2 tel que $\lim_{j\to\infty} \chi(f_{2,j}(\zeta_2), w_2) = 0$ et ainsi de suite. En considérant la suite diagonale $\{f_{j,j}\} \subset \{f_n\}$, on remarque que, pour tout $p \geq 1$, $\lim_{j\to\infty} \chi(f_{j,j}(\zeta_p), w_p) = 0$. Montrons que $\{g_j\} = \{f_{j,j}\}$ est sphériquement uniformément convergente sur les sous-ensembles compacts. Soit $K \subset \Omega$, un sous-ensemble compact et $\epsilon > 0$. Étant donné que $\{g_j\}$ est équicontinue sur les compacts de Ω (remarque 3.2.1), il existe un $\delta(K, \epsilon) > 0$ tel que

$$\chi(g_n(z), g_n(z_0)) < \frac{\epsilon}{3}, \; n = 1, 2, 3, \ldots, z \in \Omega, \; z_0 \in K, \; |z - z_0| < \delta.$$

Étant donné que K est compact on a, en renommant possiblement les ζ_i, que $K \subset \cup_{k=1}^{k_0} B(\zeta_k, \delta)$. L'existence d'un entier n_0 tel que $m, n \geq n_0$ entraîne que

$$\chi(g_n(\zeta_k), g_m(\zeta_k)) < \frac{\epsilon}{3} \;, \; k = 1, ..., k_0.$$

Donc, pour un z quelconque de K, $z \in B(\zeta_i, \delta)$ pour un certain $1 \leq i \leq k_0$ et

$$\chi(g_n(z), g_m(z)) \leq \chi(g_n(z), g_n(\zeta_i)) + \chi(g_n(\zeta_i), g_m(\zeta_i)) + \chi(g_m(\zeta_i), g_m(z)) < \epsilon.$$

Ceci nous permet de conclure que $\{g_n\}$ converge sphériquement uniformément sur K.

□

Définition 3.2.6. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions holomorphes dans un domaine Ω. On dit que $\mathfrak{F}$ est localement uniformément bornée dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $B(z_0, r) \subset \Omega$ et une constante positive M tel que chaque $f \in \mathfrak{F}$ satisfait $|f(z)| < M$ dans $B(z_0, r)$.*

Corollaire 3.2.2. *(Montel) Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions holomorphes sur un domaine Ω. Si $\mathfrak{F}$ est localement uniformément bornée, alors $\mathfrak{F}$ est normale.*

DÉMONSTRATION. Prenons z_0 dans Ω et montrons que la famille $\mathfrak{F}$ est sphériquement équicontinue en z_0. Par hypothèse, il existe $K(z_0, r) = \overline{B(z_0, r)} \subset \Omega$ et une constante positive M tel que chaque $f \in \mathfrak{F}$ satisfait $|f(z)| < M$ dans $K(z_0, r)$. Soit $f \in \mathfrak{F}$. Alors, dans $B(z_0, r)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

On a donc que

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}(z - z_0) \int_{\partial B} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)} d\xi.$$

Donc, en particulier pour $|z - z_0| < \frac{r}{2}$, on a

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{1}{2\pi} \; M \; \frac{1}{r} \; \frac{2}{r} \; |z - z_0| \; 2\pi r = \frac{2M}{r} \; |z - z_0|.$$

Ceci montre que la famille est équicontinue en z_0. Étant donné que $\chi(f(z), f(z_0)) \leq |f(z) - f(z_0)|$, on a que $\mathfrak{F}$ est sphériquement équicontinue en z_0. Par le théorème 3.2.4, on obtient que la famille est normale.

□

Corollaire 3.2.3. *Soit $\mathfrak{F}$ une famille de fonctions méromorphes sur un domaine Ω. $\mathfrak{F}$ est normale si et seulement si pour tout z_0 de Ω, il existe $B(z_0, r)$ inclus dans Ω et une constante positive M tel que chaque f dans $\mathfrak{F}$ satisfait une ou l'autre des inégalités*

$$|f(z)| < M \ , \ \frac{1}{|f(z)|} < M, \ \textit{pour}\ z \in B(z_0, r).$$

DÉMONSTRATION. ($\Rightarrow$) Soient $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ et $c(1,2) = c$ de la remarque 3.1.1(4). La famille $\mathfrak{F}$ est normale et donc équicontinue. Ainsi, pour $z_0 \in \Omega$, il existe un $\delta > 0$ tel que si $|z - z_0| < \delta$ on a , pour tout $f \in \mathfrak{F}$, que $\chi(f(z), f(z_0)) < c$. Si $|f(z_0)| \leq 1$, alors $|f(z)|$ doit être strictement plus petit que 2 pour $|z - z_0| < \delta$ (autrement $\chi(f(z), f(z_0)) \geq c$ par la remarque 3.1.1(4)). Si $|f(z_0)| > 1$, alors étant donné que $\chi(1/f(z_0), 1/f(z)) < c$ on a que $|1/f(z)| < 2$ pour $|z - z_0| < \delta$.

($\Leftarrow$) Pour z_0 dans Ω, il suffit de montrer que la famille $\mathfrak{F}$ est équicontinue en z_0. Par hypothèse, il existe $B(z_0, r) \subset \Omega$ et une constante M tel que chaque f dans $\mathfrak{F}$ satisfait une ou l'autre des inégalités $|f(z)| < M$, $1/|f(z)| < M$, $z \in B(z_0, r)$. Considérons

$$\mathfrak{F}_1 = \{f \in \mathfrak{F} \mid |f(z)| < M, \ z \in B(z_0, r)\}$$

et

$$\mathfrak{F}_2 = \{f \in \mathfrak{F} \mid \frac{1}{|f(z)|} < M, z \in B(z_0, r)\}.$$

$\mathfrak{F}_1$ est donc une famille de fonctions holomorphes uniformément bornées sur $B(z_0, r)$. Par le corollaire 3.2.2 et le théorème 3.2.4, on a que $\mathfrak{F}_1$ est sphériquement équicontinue. Pour les mêmes raisons, on a que les fonctions $1/f$, $f \in \mathfrak{F}_2$ sont sphériquement équicontinues et donc que $\mathfrak{F}_2$ est sphériquement équicontinue (étant donné que $\chi(1/z_1, 1/z_2) = \chi(z_1, z_2)$). Donc $\mathfrak{F}$ est sphériquement équicontinue et ainsi normale.

□

Voici le fameux théorème d'approximation de Runge que nous généraliserons au chapitre suivant.

Théorème 3.2.5. *(Runge) Soit $K \subset \mathbb{C}$, un compact et A un ensemble qui contient un point de chaque composante de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Pour toute fonction f holomorphe sur K et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction rationnelle R dont les pôles sont dans A telle que, pour tout $z \in K$,*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon.$$

Démonstration. Considérons l'espace de Banach $C(K)$ qui consiste en les fonctions continues $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ avec la norme du supremum sur K. Soit M le sous-espace de $C(K)$ consistant en la restriction sur K des fonctions rationnelles avec pôles dans A. Nous devons montrer que f est dans la fermeture de M. Or, par le théorème 1.5.1 (Hahn-Banach), il est équivalent de montrer que toute fonctionnelle linéaire bornée s'annulant sur M s'annule aussi en f et, par le théorème 1.5.2 (Représentation de Riesz), il suffit de montrer l'énoncé suivant :

Si μ est une mesure régulière complexe de Borel sur K tel que

$$\int_K R \, d\mu = 0 \tag{3.2.2}$$

pour toute fonction $R \in M$ et si $f \in Hol(\Omega)$, alors, forcément, on doit avoir que

$$\int_K f d\mu = 0. \tag{3.2.3}$$

Supposons que μ satisfait (3.2.2). Soit

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \qquad (z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus K) \tag{3.2.4}$$

Alors, $h \in Hol(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$. En effet,

$$\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| \leq \frac{|z-a|}{r} < 1$$

pour tout $z \in \overline{B}(a,r) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ et pour tout $\zeta \in K$. Ainsi, la série géométrique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta-a} \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)} = \frac{1}{\zeta-z}$$

converge uniformément sur K pour tout $z \in B(a,r)$, ce qui permet, après avoir inséré cette série dans (3.2.4), d'interchanger la série et l'intégrale. On a donc que

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in B(a,r)),$$

où

$$c_n = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

La convergence uniforme de cette série est une conséquence des démarches.

Pour $\alpha \in A$, appelons V_α la composante de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ qui contient α et soit $\overline{B}(\alpha,r) \subset V_\alpha$. Si $\alpha \neq \infty$ et pour z fixé dans $B(\alpha,r)$ on a

$$\frac{1}{\zeta-z} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}} \tag{3.2.5}$$

uniformément pour $\zeta \in K$. Mais chaque fonction à la droite de (3.2.5) est une fonction rationnelle avec pôle en α. Donc $h(z) = 0$ pour tout $z \in B(\alpha,r)$ et donc $h(z) = 0$ pour tout z dans V_α.

Si $\alpha = \infty$, on a que

$$\frac{1}{z-\zeta} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z^{-(n+1)}\, \zeta^n \qquad (\zeta \in K, |z| > r).$$

Ce qui implique comme plus haut que $h(z) = 0$ dans $B(\infty,r)$ et donc dans V_α.

Donc en supposant (3.2.2), on obtient que $h(z) = 0$ pour z dans $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$.

Considérons maintenant $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_s\}$, une union de courbes disjointes lisses de Jordan, tel que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \qquad (z \in K).$$

Ainsi,

$$\int_K f\, d\mu = \int_K d\mu(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-\zeta}\, dw\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w)\, dw \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{w-\zeta}$$
$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(w) h(w)\, dw = 0$$

par Fubini et étant donné que $\Gamma \subset \Omega \setminus K$ et que $h(z) = 0$ dans $\Omega \setminus K$. Ce qui prouve (3.2.3).

□

Au chapitre 4, nous donnons aussi un analogue du théorème de Mergelyan qui utilise le théorème classique de Mergelyan, que j'énonce ici :

Théorème 3.2.6. *Soit K un compact de $\mathbb{C}$ tel que son complémentaire est connexe. Si f est une fonction de K dans $\mathbb{C}$ continue et holomorphe à l'intérieur de K et si $\epsilon > 0$, alors il existe un polynôme P tel que, pour tout z dans K,*

$$|f(z) - P(z)| < \epsilon.$$

Voici quelques notions d' approximations uniformes que nous utiliserons et que nous pouvons trouver dans **[GB]**.

Nous avons les inclusions suivantes :

$$P(K) \subseteq R(K) \subseteq H(K) \subseteq A(K) \subseteq C(K)$$

où $P(K)$ sont les polynômes sur K, $R(K)$ est la fermeture dans $C(K)$ des fonctions rationnelles sans pôles sur K, $H(K)$ la limite uniforme sur K de fonctions holomorphes sur K et finalement $A(K) := C(K) \cap Hol(\overset{\circ}{K})$.

La théorie d'approximation uniforme dans le plan consiste à déterminer quand les inclusions deviennent des égalités. Ces problèmes sont résolus. Nous avons en autre que :

- si $R(K) = C(K)$, alors $\overset{\circ}{K} = \emptyset$;
- si $R(K) = A(K)$, alors $R(\partial K) = C(\partial K)$;
- $H(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe ;
- $A(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe (Mergelyan) ;
- $C(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe et $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Nous avons maintenant les outils pour développer les théories de sélections mesurables et de l'approximation aléatoire.

Chapitre 4

THÉORÈMES DE SÉLECTION ET D'APPROXIMATION

4.1. Théorèmes de sélection

Les résultats de ce chapitre sont tirés de [**AB**], [**H**] et de [**KR**]. Les théorèmes de sélection nous permettront de faire de l'approximation uniforme aléatoire, en nous donnant l'existence de fonctions mesurables à valeurs dans une relation mesurable et nous permettront ainsi, de trouver une fonction aléatoire rationnelle approximant une fonction aléatoire holomorphe.

Théorème 4.1.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (Y, d) un espace métrique séparable complet et $F : \Omega \longrightarrow Y$ une fonction multivoque faiblement mesurable «fermée» (c'est-à-dire $F(\omega) = \overline{F(\omega)}$ pour tout $\omega \in \Omega$). Alors F a un sélecteur mesurable, c'est-à-dire qu'il existe $f : \Omega \longrightarrow Y$ tel que f est une fonction mesurable et tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in F(\omega)$.*

Démonstration. (Y, d) est un espace métrique. D'après la proposition 1.5.2, on peut supposer que $d < 1$. Soit $R \subset Y$, un sous ensemble dénombrable dense, $R = \{r_1, r_2, r_3, ...\}$. Nous allons tenter de construire f comme étant la limite uniforme de fonctions $f_n : \Omega \longrightarrow R$, où les f_n satisferont

$(1)_n$ $f_n^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout $U \in \mathfrak{O}_d, n \geq 0$;
$(2)_n$ $d(f_n(\omega), F(\omega)) < \frac{1}{2^n}$, $\omega \in \Omega, n \geq 0$;
$(3)_n$ $d(f_n(\omega), f_{n-1}(\omega)) < \frac{1}{2^{n-2}}$, $\omega \in \Omega$, $n \geq 0$.

Procédons par induction : Pour tout $\omega \in \Omega$, posons $f_{-1}(\omega) = f_0(\omega) = r_1$. Ainsi les conditions $(1)_0$ et $(2)_0$ sont satisfaites et $(3)_0$ est triviale. Supposons que pour $n > 0$, f_{n-1} satisfasse $(1)_{n-1}$, $(2)_{n-1}$ et $(3)_{n-1}$. On pose

$$C_i^n = \{\omega \in \Omega \mid d(r_i, F(\omega)) < \frac{1}{2^n}\}$$

$$D_i^n = \{\omega \in \Omega \mid \ d(r_i, f_{n-1}(\omega)) < \frac{1}{2^{n-2}}\}$$

et

$$A_i^n = C_i^n \cap D_i^n.$$

Remarquons que $\Omega = A_1^n \cup A_2^n \cup A_3^n \cup \ldots$. En effet, pour $\omega \in \Omega$ et par $(2)_{n-1}$, il existe $y \in F(\omega)$ tel que $d(f_{n-1}(\omega), y) < 1/2^{n-1}$. De plus, $\bar{R} = Y$ ce qui implique qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $d(r_i, y) < 1/2^n$ (ainsi $\omega \in C_i^n$). Par l'inégalité du triangle, on a que $d(r_i, f_{n-1}(\omega)) \leq d(r_i, y) + d(f_{n-1}(\omega), y) < 1/2^n + 1/2^{n-1} < 1/2^{n-2}$. Donc $\omega \in D_i^n$ et on a bien qu'il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_i^n$.

Soit la boule ouverte $B_i^n = \{y \in Y \mid \ \bar{d}(r_i, y) < 1/2^n\}$. On a que

$C_i^n = F^{-1}(B_i^n) \in \mathcal{A}$, car F est faiblement mesurable ;
$D_i^n = f_{n-1}^{-1}(B_i^{n-2}) \in \mathcal{A}$, par $(1)_{n-1}$.

Donc, $A_i^n \in \mathcal{A}$ et on peut donc définir $f_n : \Omega \longrightarrow R$ par $f_n(\omega) = r_i$ si $\omega \in A_i^n \setminus \bigcup_{j=i}^{i-1} A_j^n$. Vérifions que les conditions $(1)_n$, $(2)_n$ et $(3)_n$ sont satisfaites.

Par définition, $f_n^{-1}(r_i) = A_i^n \setminus \bigcup_{j=i}^{i-1} A_j^n \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ car chaque $A_i^n \in \mathcal{A}$. Donc pour $Z \subset R$, $Z = \bigcup_{j=1}^{\infty}\{r_{i_j}\}$ on a que

$$f_n^{-1}(Z) = f_n^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{r_{i_j}\}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f_n^{-1}(r_{i_j}) \in \mathcal{A}.$$

Ainsi $(1)_n$ est satisfaite. De plus, pour $\omega \in \Omega$ et $i \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_i^n \setminus \bigcup_{j=i}^{i-1} A_j^n$, on a $f_n(\omega) = r_i$, $\omega \in C_i^n$, *et* $\omega \in D_i^n$. Donc $(2)_n$ et $(3)_n$ sont satisfaites. Par $(3)_n$ et du fait que Y est complet, on a que $\{f_n\}$ converge uniformément vers une fonction $f : \Omega \longrightarrow Y$. Par le Lemme 1.3.1, f est mesurable et, puisque $d(f_n(\omega), F(\omega)) < 1/2^n$, on a que $f(\omega) \in \overline{F(\omega)} = F(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.

$\square$

Remarque 4.1.1. Le théorème reste vrai en supposant que F est mesurable car la mesurabilité implique la faible mesurabilité.

Théorème 4.1.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (Y, d) un espace métrique séparable et $F : \Omega \longrightarrow Y$ une fonction multivoque mesurable «complète» (c'est-à-dire $F(\omega)$ est complet de Y pour tout $\omega \in \Omega$). Alors F a un sélecteur mesurable, c'est-à-dire qu'il existe $f : \Omega \longrightarrow Y$ tel que f est une fonction mesurable et tel que, pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in F(\omega)$.*

Démonstration. Soient Z la complétion de Y, $i : Y \hookrightarrow Z$ et $F_* = i \circ F : \Omega \longrightarrow Z$. Alors F_* est à valeurs fermées et $F_*(\omega) = F(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Pour $B \in \mathfrak{F}_Z$, $B \cap Y$ est fermé de Y, donc $F_*^{-1}(B) = F^{-1}(i^{-1}(B)) = F^{-1}(B \cap Y) \in \mathcal{A}$ car F est mesurable par hypothèses. On a donc que F_* est mesurable. Par le théorème 4.1.1 et la remarque 4.1.1, on a qu'il existe $f_* : \Omega \longrightarrow Z$ avec $\text{Image}(f_*) \subset \text{Image}(i)$. Ainsi $f = i^{-1} \circ f_* : \Omega \longrightarrow Y$ est une fonction définie sur tout X. Vérifions que ce sélecteur de F soit mesurable. Soit B un fermé de Y. Notons par $\widetilde{B}$ la fermeture de B dans Z. On a que

$$f^{-1}(B) = f_*^{-1} \circ i(\widetilde{B} \cap Y) = f_*^{-1}(i(\widetilde{B} \cap Y)) \cup \emptyset = f_*^{-1}(i(\widetilde{B} \cap Y)) \cup f_*^{-1}(\widetilde{B} \setminus i(\widetilde{B} \cap Y))$$

$$= f_*^{-1}(\widetilde{B}) \in \mathcal{A}.$$

$\square$

Voici le théorème de sélection que nous utiliserons pour faire de l'approximation :

Théorème 4.1.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini, Y un espace de Souslin et $F : \Omega \longrightarrow Y$ une fonction multivoque avec graphe mesurable. Alors il existe une fonction mesurable $f : \Omega \longrightarrow Y$ tel que $f(\omega) \in F(\omega)$ p.p.μ.*

Nous allons démontrer ce théorème en plusieurs étapes. Nous allons commencer par un cas moins général. La première étape consiste à prouver le théorème pour $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, m)$ où m est la mesure de Lebesgue sur les boréliens.

Théorème 4.1.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = ([0,1], \mathfrak{B}_{[0,1]}, m)$, X un borélien d'un ensemble Polonais P et $F : [0,1] \longrightarrow X$ une fonction multivoque avec graphe mesurable. Alors il existe une fonction $f : [0,1] \longrightarrow X$ tel que $f(t) \in F(t)$ presque partout.*

DÉMONSTRATION. Remarquons ici que le fait que le graphe de F soit mesurable implique que le graphe de F est un borélien de $[0,1] \times X$ qui est un produit d'espaces de Souslin (par remarque 2.2.1 et proposition 2.2.5). Ainsi on a que le graphe de F est en fait un espace de Souslin par proposition 2.2.5.

Soit $\phi : P \longrightarrow Gr(F)$ une fonction continue surjective de l'espace Polonais P dans $Gr(F)$. Définissons une fonction multivoque $G : [0,1] \longrightarrow P$ par $G(t) = \phi^{-1}(\{t\} \times F(t))$ si $t \in [0,1]$.

G est à valeur fermée car pour $\{x_n\} \subset G(t)$ tel que $x_n \to x \in [0,1]$, on a $\phi(x_n) \to \phi(x) \in Gr(F)$. Or $\phi(x_n) \in \{t\} \times F(t)$ pour tout n, alors $\phi(x) \in \{t\} \times F(t)$ car ϕ est à valeur dans le graphe. De plus, G est $\overline{\mathcal{A}}$ mesurable. En effet, pour B un sous-ensemble fermé de P on a

$$G^{-1}(B) = \{t | \phi^{-1}(\{t\} \times F(t)) \cap B \neq \emptyset\} = \{t | \ (\{t\} \times F(t)) \cap \phi(B) \neq \emptyset\} = p_\Omega(\phi(B)),$$

où p_Ω est la projection sur Ω de $\Omega \times X$. Donc $G^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de Souslin de P et par théorème 2.2.1, on a que $G^{-1}(B)$ est mesurable par rapport à $\overline{\mathcal{A}}$. Par le théorème 4.1.2, il existe un sélecteur $g : [0,1] \longrightarrow P$ mesurable par rapport à $\overline{\mathcal{A}}$. Soit p_X la projection de $\Omega \times X$ sur X, alors $f = p_X \circ \phi \circ g : [0,1] \longrightarrow X$ est un sélecteur pour F mesurable par rapport à $\overline{\mathcal{A}}$. Par la remarque 1.5.1, on change les valeurs de f sur un ensemble de mesure nulle pour obtenir que f est mesurable par rapport à $\mathcal{A}$ et tel que $f(t) \in F(t)$ presque partout.

$\square$

Voici la démonstration du théorème4.1.3 tirée de **[A]**

DÉMONSTRATION. Étant donné que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de mesure σ-fini, par lemme 1.2.1, on peut supposer que $\mu(\Omega) = 1$.

La première étape de la preuve consiste à montrer que le théorème est vrai pour Ω standard. Ce cas est couvert par le théorème 4.1.4.

Pour la seconde étape, nous supposons que Ω est séparable et régulier. Par le théorème 1.2.1, on a que Ω est isomorphe à un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Donc Ω peut être inclus dans un espace standard U. On définit une mesure ν sur U par $\nu(A) = \mu(A \cap \Omega)$. Ainsi $\nu(U) = 1$.

Considérons $H : U \longrightarrow Y$, une relation tel que $Gr(F) = Gr(H) \cap \Omega \times Y$ soit Borel mesurable. Notons πF et πH la projection sur U du graphe de F et du graphe de H respectivement. Par théorème 2.2.1, on a que πH est un espace de Souslin car $gr(H)$ est un espace de Souslin et doit avoir la même mesure intérieure et extérieure. Il existe donc S^*,un sous-ensemble mesurable de U, tel que $\pi H \subset S^*$ et $\nu^*(\pi H) = \nu(S^*)$ (voir remarque 2.2.4). Ainsi,

$$\nu^*(\pi H) = \nu(S^*) = \mu(S^* \cap \Omega) \geq \mu(\pi H \cap \Omega) = \mu(\pi F) = \mu(\Omega) = 1.$$

Donc $\nu_*(\pi H) = 1$ et il existe un ensemble mesurable $S_* \subset \pi H$ tel que $\nu_*(\pi H) = 1$. Donc $gr(H) \cup [(U \setminus S_*) \times Y]$ est un sous-ensemble mesurable de $U \times Y$ avec projection sur U égale à U. Nous pouvons donc appliquer le théorème 4.1.4 à la fonction multivoque dont le graphe est $gr(H) \cup [(U \setminus S_*) \times Y]$. Nous obtenons donc une fonction h de U dans Y tel que $(u, h(u)) \in gr(H) \cup [(U \setminus S_*) \times Y]$ p.p et on a donc que $(u, h(u)) \in gr(H)$ p.p. sauf possiblement pour $u \in U \setminus S_*$ $(\mu(U \setminus S_*) = 0)$. Alors la fonction f qui consiste en la restriction de h sur Ω satisfait les demandes du théorème.

Pour la troisième étape, nous laissons tomber l'hypothèse que Ω est régulier. Donc Ω est séparable. On définit sur Ω une relation d'équivalence : deux points de Ω sont équivalents si tout ensemble qui contient l'un contient l'autre. Ainsi on construit l'espace quotient $\widetilde{\Omega}$ en identifiant les point équivalents. Nous avons donc une fonction mesurable g de Ω dans $\widetilde{\Omega}$ (les ensembles mesurables de $\widetilde{\Omega}$ sont les $g(A)$ tel que $A \in \mathcal{A}$). Nous pouvons donc appliquer la deuxième étape à cet espace pour trouver une fonction $\widetilde{\mathcal{A}}$-mesurable h de $\widetilde{\Omega}$ dans Y tel que $(\widetilde{\omega}, \widetilde{h(\omega)}) \in gr(F)$. Alors $h \circ g$ satisfait les demandes du théorème.

Pour la dernière étape, supposons que Ω est une espace de mesure arbitraire sur lequel est défini une mesure finie μ. Pour $R \subset \mathcal{A}$, notons par Ω_R l'espace mesurable $(\Omega, \sigma(R))$. Nous allons montrer que pour un ensemble mesurable G de $\Omega \times Y$, il existe une famille dénombrable R d'ensemble mesurable tel que G est mesurable dans $\Omega_R \times Y$. Considérons $\Lambda = \{G \in \mathcal{A} |$ il existe une famille d'ensemble mesurable dénombrable tel que G est mesurable dans $\Omega_R \times Y\}$. On a que tous les rectangles mesurables sont dans Λ (dans ce cas, R consiste en un seul élément). De plus, si G est mesurable dans $\Omega_R \times Y$, alors son complémentaire l'est aussi. Finalement, Λ est fermé par l'union dénombrable étant donné que l'union dénombrable de famille dénombrable est une famille dénombrable. Donc Λ est une σ-algèbre contenant tous les rectangles mesurables qui doit donc contenir tous les ensembles mesurables de $\Omega \times Y$.

En particulier, pour $Gr(F)$, il existe une famille dénombrable R tel que $Gr(F)$ est mesurable dans $\Omega_R \times Y$. Or Ω_R est séparable et nous pouvons appliquer la troisième étape à $(\Omega_R, \mu|_R)$. Nous trouvons donc une fonction f de Ω dans Y qui est Ω_R-mesurable et tel que $(\omega, f(\omega)) \in Gr(F)$ sauf possiblement pour un ensemble N de $\sigma(R)$ tel que $\mu(N) = 0$. Mais comme f est Ω_R-mesurable, alors f est mesurable et N aussi. Ceci complète la preuve du théorème.

$\square$

4.2. Théorèmes d'approximation

Voici un théorème de sélection qui donne un théorème d'approximation pour des fonctions mesurables.

Théorème 4.2.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini et Y un sous-ensemble de Souslin de l'espace Polonais métrique (X, d). Supposons que $\rho : \Omega \longrightarrow X$ et $\epsilon : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ soient deux fonctions mesurables. Soit la relation $F : \Omega \longrightarrow Y$ définie par $F(\omega) = \{x \in Y \mid d(x, \rho(\omega)) < \epsilon(\omega)\}$. Si $F(\omega) \neq \phi$ p.p.μ , alors il existe une fonction $\psi : \Omega \longrightarrow Y$ tel que ψ est mesurable et $d(\psi(\omega), \rho(\omega)) < \epsilon(\omega)$ p.p.μ.*

Démonstration. Supposons que $F(\omega) \neq \phi$ p.p.μ. Posons *domaine*$(F) = \Gamma = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \neq \phi\}$. Alors $\mu(\Omega \setminus \Gamma) = 0$ et donc $\Gamma \in \mathcal{A}$. On définit $q : \Gamma \times Y \longrightarrow (-\infty,\ \infty)$ par $q(\omega, x) = \epsilon(\omega) - d(\rho(\omega), x)$. Or $q_x(\cdot)$ est mesurable pour tout $x \in Y$ et $q_w(\cdot)$ est continue pour tout $\omega \in \Gamma$, c'est-à-dire que q est de Carathéodory et, par le théorème 1.3.1, q est mesurable. Mais $Gr(F) = q^{-1}((0,\ \infty))$ et donc $Gr(F) \in \mathcal{A}_\Gamma \times \mathfrak{B}_Y$. Par le théorème 4.1.3, il existe $f : \Gamma \longrightarrow Y$ tel que $f(\omega) \in F(\omega)$ p.p. sur Γ. Soit $\psi : \Omega \longrightarrow Y$ définie par

$$\psi(\omega) = \begin{cases} f(\omega) & \text{si } \omega \in \Gamma, \\ y_0 & \text{si } \omega \in \Omega \setminus \Gamma. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Ainsi ψ est mesurable et on a bien que $d(\psi(\omega), \rho(\omega)) < \epsilon(\omega)$ p.p.μ.

□

Soit $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ un ensemble dénombrable et considérons l'ensemble des fonctions rationnelles $\mathcal{R} \subset C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$,

$$\mathcal{R}_A = \{f \in \mathcal{R} \mid \text{les pôles de } f \text{ sont dans } A\}.$$

Lemme 4.2.1. *La famille $\mathcal{R}_A$ est un σ-compact de $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$, c'est-à-dire une union dénombrable de compact.*

Démonstration. $\mathcal{R}_A$ est la réunion dénombrable des $\mathcal{R}_F$, l'ensemble des fonctions dont les pôles sont dans F, où F est un sous-ensemble fini de A. Nous pouvons donc supposer que A est fini. Pour $B \subset A$, dénotons par $\mathcal{R}_{=B}$, la famille des fonctions rationnelles dont les pôles sont (précisément) les points de B. Il suffit de montrer que $\mathcal{R}_{=B}$ est σ-compact, car $\mathcal{R}_A$ est la réunion des $\mathcal{R}_{=B}$, $B \subset A$. Si $B = \emptyset$, alors, par le théorème de Liouville, $\mathcal{R}_{=B}$ est l'ensemble des fonctions constantes et donc $\mathcal{R}_{=B}$ est σ-compact. Si $B \neq \emptyset$, alors $\mathcal{R}_{=B} = \cup_{j=1}^{\infty} R_j$, où $R_j = \{f \in \mathcal{R}_{=B} \mid |f(z)| \geq j,\text{ pour } \chi(z, B) \leq 1/j\}$. Ces ensembles sont fermés. De plus, $R_j = \cup_{k=1}^{\infty} R(j,k)$, où $R(j,k) = \{f \in R_j \mid |f(z)| \leq k,\text{ si } \chi(z, B) \geq 1/(2j)\}$, qui sont fermés et compacts (par corollaire 3.2.3). Donc $\mathcal{R}_A$ est σ-compact.

□

Remarque 4.2.1. Dans [**AB**], les auteurs, afin de prouver le lemme 4.2.1, considéraient les ensembles suivants : $\mathfrak{R}(k, m, n)$, l'ensemble des fonctions rationnelles de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{k} p_j((z-\alpha_j)^{-1})$ où les p_j sont des polynômes de degré plus petit ou égal à m avec les coefficients bornés par n et pour tout j, $p_j(0) = 0$. Or, les ensembles $\mathfrak{R}(k,m,n)$ ainsi définis ne sont pas compacts dans $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ (métrisé par la métrique sphérique). En effet, considérons $f_j(z) = 1/jz$ et soit $\mathfrak{F} = \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$. On a que $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{R}(k,m,n)$ pour tout m, n, k dans $\mathbb{N}$. Si les $\mathfrak{R}(k,m,n)$ étaient compacts, on aurait que $\mathfrak{F}$ a une sous-suite sphériquement uniformément convergente sur les compacts. Mais dans un voisinage de 0, toutes les sous-suites de cette suite de fonctions convergent ponctuellement vers 0 sauf en 0 où elle prend la valeur ∞, c'est-à-dire que la fonction limite n'est même pas sphériquement continue. Donc les sous-suites ne peuvent pas être sphériquement uniformément convergentes sur les compacts.

Lemme 4.2.2. *Soit $K \subset \mathbb{C}$, K compact et $A \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ avec A dénombrable. Soit $\mathcal{R}_A(K) \subset C(K, \overline{\mathbb{C}})$ où $\mathcal{R}_A(K) = \{g|_K \mid g$ est une fonction rationnelle dont les pôles sont dans $A\}$. Alors $\mathcal{R}_A(K)$ est un σ-compact de $C(K, \overline{\mathbb{C}})$.*

Démonstration. Par le lemme 4.2.1, on a que $\mathcal{R}_A = \cup_{i=1}^{\infty} R_k$, où les R_k sont compacts. La fonction $T : C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}) \to C(K, \overline{\mathbb{C}})$ qui à f associe sa restriction à K, c'est-à-dire que la fonction qui a f associe $f|_K$ est continue, donc $T(R_k)$ est compact de $C(K, \overline{\mathbb{C}})$ et $\mathcal{R}_A(K) = \bigcup_k T(R_k)$. On a bien que $\mathcal{R}_A(K)$ est un σ-compact de $C(K, \overline{\mathbb{C}})$.

□

Lemme 4.2.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini, $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $A \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, A dénombrable. Soit R_A du lemme 4.2.1 et $\mathcal{R}_A(K)$ du lemme 4.2.2. Alors pour $r : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}_A(K)$, fonction mesurable, il existe une fonction $\hat{R}$ mesurable $\hat{R} : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}_A$ tel que $\hat{R}|_K = r$ p.p.μ.*

Démonstration. Soit $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}_A$ la relation définie par

$$F(\omega) = \{R \in \mathcal{R}_A \mid R|_K = r(\omega)\},\ \omega \in \Omega.$$

$Dom(F) = \{\omega \in \Omega \mid F(\omega) \neq \phi\} = \Omega$ par définition et on a que F est une fonction multivoque. Considérons

$$Gr(F) = \{(\omega, R) \in \Omega \times \mathcal{R}_A \mid R|_K = r(\omega)\} = \{(\omega, R) \in \Omega \times \mathcal{R}_A \mid R(z) = r_\omega(z)\ , \forall z \in K\}$$

$= \{(\omega, R) \in \Omega \times \mathcal{R}_A \mid \sup_{z\in K} |R(z) - r_\omega(z)| = 0\}$. Afin de prouver la mesurabilité de $Gr(F)$, on définit $q : \Omega \times \mathcal{R}_A \longrightarrow [0, \infty)$ par $q(\omega, R) = \sup_{z \in K} |R(z) - r_\omega(z)|$. Pour $R \in \mathcal{R}_A$ fixé, $q(\cdot, R)$ est mesurable car c'est la composition d'une norme qui est continue sur $C(K, \overline{\mathbb{C}})$ avec r et une translation qui est mesurable.

On remarque que q est de Carathéodory en vérifiant que pour ω fixé $q(\omega, \cdot) : \mathcal{R}_A \longrightarrow [0, \infty)$ est continue. En effet, soit $\{R_n\}$ et R dans $\mathcal{R}_A$ tels que $R_n \overset{\chi}{\rightrightarrows} R$ sur les compacts de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que $\chi(R_n, R) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sur les compacts de $\mathbb{C}$. Or $R|_K$ est bornée car continue sur K et donc $\sup_{z\in K} |R_n(z) - R(z)| \to 0$. Pour z dans K

$$|R(z) - r_\omega(z)| \leq |R(z) - R_n(z)| + |R_n(z) - r_\omega(z)| \leq \sup_K |R_n - R| + q(\omega, R_n).$$

Donc $q(\omega, R) \leq \sup_K |R_n - R| + q(\omega, R_n)$. De même, $q(\omega, R_n) \leq \sup_K |R_n - R| + q(\omega, R)$. Ainsi $|q(\omega, R) - q(\omega, R_n)| \leq \sup_{z\in K} |R_n - R|$ et donc $q(\omega, R_n) \longrightarrow q(\omega, R)$. On a bien que q est de Carathéodory. Notons que $\mathcal{R}_A$ est séparable car $C(K)$ l'est. Donc q est mesurable par le théorème 1.3.1. De plus, $q^{-1}(0) = Gr(F)$ et $Gr(F) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{B}_{\mathcal{R}_A}$.

On a donc $F : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}_A$ une fonction multivoque avec $Gr(F)$ mesurable. Afin de pouvoir appliquer le théorème 4.1.3, il reste à vérifier que $\mathcal{R}_A$ est un espace de Souslin. Or, nous savons par le lemme 4.2.1, que $\mathcal{R}_A$ est un F_σ de $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ et donc est un borélien de $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$. Or, $C(\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}})$ est Polonais donc de Souslin. Et $\mathcal{R}_A$ est un espace de Souslin par la proposition 2.2.5.

Nous sommes donc en position d'appliquer le théorème 4.1.3 qui nous fournit l'existence presque partout d'une sélection c'est-à-dire qu'il existe $\hat{R} : \Omega \longrightarrow \mathcal{R}_A$ tel que $\hat{R}(\omega) \in F(\omega)$ *p.p.μ.*, c'est-à-dire $\hat{R}(\omega)|_K = r(\omega)$ *p.p.μ.*

□

Le théorème suivant est en quelque sorte le but du mémoire : Le théorème de Runge aléatoire.

Théorème 4.2.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini. Supposons que $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ soit une relation faiblement mesurable, à valeur compacte tel que $K(\Omega) = \{K_j\}_{j=1}^{\infty}$. Soit $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ tel que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble A contient un point de chaque composante de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K(\omega)$. Soit ϵ une fonction mesurable positive sur Ω et soit $\phi : Gr(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction aléatoire généralisée avec*

$$\phi(\omega, \cdot) \in Hol(K(\omega)) \ p.p. \qquad (*)$$

Alors, il existe une fonction rationnelle aléatoire R dont les pôles sont dans l'ensemble A tel que

$$\|\phi(\omega, \cdot) - R(\omega, \cdot)\|_{K(\omega)} < \epsilon(\omega) \quad p.p.$$

Démonstration. On peut supposer que A est dénombrable. On peut aussi supposer sans perdre de généralité que $(*)$ est vrai pour tout $\omega \in \Omega$, par exemple en posant $\phi(\omega, \cdot) = 0$ sur un ensemble de mesure nulle.

Énumérons $K(\Omega) = \{K_j\}_{j=1}^{\infty}$ et soit la partition de Ω, $\Omega_j = \{\omega \in \Omega \mid K(\omega) = K_j\}$. Les Ω_j sont mesurables par la proposition 1.4.4. Notons ϕ_j la restriction de ϕ à $Gr(K) \cap (\Omega_j \times \mathbb{C})$.

Par définition de fonction aléatoire généralisée, on a que $\phi(\cdot, z) : K^{-1}(z) \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable pour tout z dans $\mathbb{C}$. Or $\Omega_j \subset K^{-1}(z)$ du moment que z est dans K_j. Donc $\phi(\cdot, z) : \Omega_j \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable pour tout z dans K_j, d'où on trouve que $\phi_j : \Omega_j \times K_j \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction aléatoire. De plus, par $(*)$, $\phi_j(\omega, \cdot) \in Hol(K_j)$ pour $\omega \in \Omega_j$. $\hat{\phi}_j : \Omega_j \longrightarrow C(K_j)$ donné par $\hat{\phi}_j(\omega) = \phi_j(\omega, \cdot)$ est mesurable. En effet, on a qu'un ouvert de base de $C(K_j)$ est de la forme

$$B_\epsilon(f) = \{g \in C(K_j) \mid \chi(f(z), g(z)) < \epsilon, \ z \in K_j \} =$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \{g \in C(K_j) \mid \chi(g(z), f(z)) \leq \epsilon - 1/m, \ z \in K_j\},$$

le supremum étant atteint sur K_j. De plus, pour $\{\zeta_k\} \subset K_j$ une suite dénombrable dense dans K_j, les fonctions étant uniformément continues sur K_j, on a que

$$B_\epsilon(f) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{g \in C(K_j) \; |\chi(g(\zeta_k), f(\zeta_k)) \leq \epsilon - 1/m\}.$$

Pour chaque ensemble de la forme $U_\delta(f, \zeta_k) = \{g \in C(K_j) \; |\chi(g(\zeta_k), f(\zeta_k)) \leq \delta\}$ on a que

$$\hat{\phi_j}^{-1}(U_\delta(f, \zeta_k)) = \{\omega \in \Omega_j \; |\chi(\phi_j{}^{-1}(\omega)(\zeta_k), f(\zeta_k)) < \delta\} = \{\omega \in \Omega_j \; |\chi(\phi_j(\omega, \zeta_k), f(\zeta_k)) < \delta\}$$

qui est mesurable car $\phi_j(\cdot, \zeta_k)$ est mesurable et $\chi(\cdot, f(\zeta_k))$ est continue.

Soit $\mathcal{R}|_{K_j}$ la restriction sur K_j des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans $A \setminus K_j$. Par le lemme 4.2.2, $\mathcal{R}|_{K_j}$ est un F_σ de $C(K_j, \overline{\mathbb{C}})$ et est un Borélien de $C(K_j, \overline{\mathbb{C}})$ qui est un espace de Souslin. Ainsi, $\mathcal{R}|_{K_j}$ est un espace de Souslin de $C(K_j, \overline{\mathbb{C}})$ par la proposition 2.2.5.

Par le théorème 3.2.5 (*Runge*), utilisant le fait que $\hat{\phi}_j(\omega) \in Hol(K_j)$ pour tout $\omega \in \Omega_j$, on trouve que l'ensemble

$$\{r \in \mathcal{R}|_{K_j} \; : \; \|r - \hat{\phi}_j(\omega)\|_{K_j} < \epsilon(\omega)\}$$

est non vide pour presque tout $\omega \in \Omega_j$. Nous sommes donc dans les hypothèses du théorème 4.2.1, $(\Omega = \Omega_j, Y = \mathcal{R}|_{K_j}, X = C(K_j, \overline{\mathbb{C}}), \rho = \hat{\phi}_j\ )$. Donc il existe une fonction mesurable $r_j : \Omega_j \longrightarrow \mathcal{R}|_{K_j}$ tel que $\|r_j(\omega) - \hat{\phi}_j(\omega)\|_{K_j} < \epsilon(\omega)$ presque partout sur Ω_j.

Soit $\mathcal{R}_j$ l'ensemble des fonctions rationnelles dont les pôles sont dans $A \setminus K_j$. Par le lemme 4.2.3 il existe une fonction mesurable $R_j : \Omega_j \longrightarrow \mathcal{R}_j$ tel que $R_j(\omega)|_{K_j} = r_j(\omega)$ presque partout sur Ω_j.

On refait la procédure pour chaque j et on définit

$$R : \Omega \times \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

en posant

$$R(\omega, z) = R_j(\omega)(z) \quad \text{pour} \quad \omega \in \Omega_j.$$

Ainsi, pour $\omega \in \Omega_j$, on a que

$$\|\phi(\omega,\cdot) - R(\omega,\cdot)\|_{K(\omega)} = \|\phi(\omega,\cdot) - R(\omega,\cdot)\|_{K_j} = \|\phi(\omega,\cdot) - R_j(\omega)(\cdot)\|_{K_j} =$$

$$\|\phi_j(\omega,\cdot) - r_j(\omega)(\cdot)\|_{K_j} = \|\hat{\phi}_j(\omega) - r_j(\omega)\|_{K_j} < \epsilon(\omega)$$

presque partout.

Montrons que R est une fonction rationnelle aléatoire. En effet, pour O un ouvert de $\overline{\mathbb{C}}$ on a , pour z fixé, que

$$R(\cdot,z)^{-1}(O) = \{\omega \in \Omega \mid R(\omega,z) \in O\} = \bigcup_j \{\omega \in \Omega_j \mid R(\omega,z) \in O\}$$

$$= \bigcup_j \{\omega \in \Omega_j \mid R_j(w)(z) \in O\}$$

ce qui est une union dénombrable d'ensembles mesurables car la fonction qui à ω associe $R_j(\omega)(z)$ est mesurable et la fonction évaluation, qui à z associe $R(z)$, est continue. Donc $R(\cdot,z)$ est mesurable. Ceci prouve le théorème.

$\square$

En modifiant un peu la preuve du théorème 4.2.2, on peut obtenir une version aléatoire du théorème de Mergelyan. Le théorème s'énonce de la façon suivante :

Corollaire 4.2.1. (Mergelyan aléatoire) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de mesure σ-fini. Supposons que $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ soit une relation faiblement mesurable, à valeur compacte tel que $K(\Omega) = \{K_j\}_{i=1}^{\infty}$ et $\mathbb{C} \setminus K(\omega)$ soit connexe presque partout. Soit ϵ une fonction mesurable positive sur Ω et soit $\phi : Gr(K) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction aléatoire généralisée avec $\phi(\omega,\cdot) \in A(K(\omega)) = C(K(\omega)) \cap Hol(\overset{\circ}{K}(\omega))$ presque partout. Alors il existe un polynôme aléatoire P tel que*

$$\|\phi(\omega,\cdot) - P(\omega,\cdot)\|_{K(\omega)} < \epsilon(\omega) \quad p.p..$$

Voici un autre théorème intéressant que nous utiliserons au chapitre 5. Notons que $R(K)$ est l'ensemble des limites uniformes sur K de fonctions rationnelles dont les pôles sont dans le complémentaire de K).

Théorème 4.2.3. *Soit K un compact pour lequel $R(K) = A(K)$ et soit ϕ une fonction $A(K)$-aléatoire. Soit A un ensemble dénombrable qui contient un point de chaque composante complémentaire de K. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $R_A(K)$-aléatoire tel que*

$$\|\phi(\omega,\cdot) - r(\omega,\cdot)\|_K < \epsilon \quad \text{presque partout.}$$

Démonstration. Par le théorème 3.2.5 (Runge) et les hypothèses sur K, on a que chaque élément de $A(K)$ est la limite uniforme de fonctions dans $\mathcal{R}_A(K)$. Considérons la relation $H(\omega) = \{r \in \mathcal{R}_A(K) \mid \|r(\cdot) - \phi(\omega,\cdot)\|_K < \epsilon\}$. Par hypothèses, on a que $H(\omega) \neq \phi$ pour tout ω. Nous pouvons donc conclure, par le théorème 4.2.1, si on a que $\mathcal{R}_A(K)$ est un espace de Souslin.

Afin de prouver ce dernier détail, considérons $\mathcal{R}_\infty(K)$, l'ensemble des polynômes sur K. Cet espace est de Souslin et donc $q^{-1}\mathcal{R}_\infty(K)$ est aussi un espace de Souslin pour tout polynôme unitaire dont les zéros sont dans A. L'ensemble Q de ces polynômes est dénombrable et $\mathcal{R}_A(K) = \cup_{q\in Q}\, q^{-1}\mathcal{R}_\infty(K)$. Donc $\mathcal{R}_A(K)$ est un espace de Souslin, ce qui termine la preuve. □

4.3. Cas d'un espace trivial de mesure, Ω

Qu'arrive-t-il si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espaces de mesure σ-fini trivial ?

Si $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ avec $\mu(\Omega) = 1$ (la σ-finitude force la mesure de Ω à être finie). Si ϕ est une fonction aléatoire sur $\Omega \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors , pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\phi(\cdot, z)$ est mesurable. Donc pour un certain $\omega_0 \in \Omega$, l'ensemble $\phi_z^{-1}(\{\phi(\omega_0, z)\})$ est mesurable. Alors on a que $\phi_z^{-1}(\{\phi(\omega_0, z)\})$ est soit Ω, soit vide. Mais il n'est pas vide étant donné que $\omega_0 \in \phi_z^{-1}(\{\phi(\omega_0, z)\})$. On a donc que ϕ est une fonction déterministe et nous noterons $\phi(\omega, z) = \phi(z)$.

Par le même raisonnement, on a que toute fonction mesurable $\epsilon : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est constante. De plus, la notion de presque partout est remplacé par partout car le seul ensemble de mesure nulle est l'ensemble vide.

Pour $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une relation faiblement mesurable, à valeur compacte, tel que $K(\Omega) = \{K_j\}_{i=1}^{\infty}$. Par la proposition 1.4.4, on a, pour tout $i, j > 0$, que $K_i = K_j$ pour tout $i, j > 0$. Ainsi $Gr(K) = \{(\omega, s) \mid s \in K(\omega)\} = \Omega \times K_1$. On a que si $s \in K_1$, alors $K^{-1}(\{s\}) = \Omega$ ou est vide si s n'est pas dans K_1. Donc une fonction aléatoire généralisée de $Gr(K)$ dans $\mathbb{C}$ est une fonction déterministe car pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, , elle doit être mesurable de $K^{-1}(\{s\})$ dans $\mathbb{C}$.

Dans ces circonstances, le théorème de Runge aléatoire devient le théorème de Runge classique du Chapitre 3 :

Théorème 4.3.1. *Soient K un compact du plan et A un ensemble dénombrable de $\overline{\mathbb{C}}$ qui contient un point de chaque composante de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ et soit $\phi(z)$ une fonction holomorphe sur K. Alors pour $\epsilon > 0$, il existe une fonction rationnelle déterministe r dont les pôles sont dans A tel que*

$$\|\phi(z) - r(z)\|_K < \epsilon.$$

Et nous obtenons aussi un théorème d'approximation déterministe de Mergelyan dans ces circonstances :

Théorème 4.3.2. *Soient K un compact du plan tel que son complémentaire soit connexe et soit ϕ une fonction dans $A(K)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme p tel que*

$$\|\phi(z) - p(z)\|_K < \epsilon.$$

Chapitre 5

ANALOGUE : APPROXIMATION EN PROBABILITÉ

Ce chapitre est tiré de [**BS**]. C'est un analogue de l'approximation uniforme aléatoire. En fait, en prenant des espaces de mesure 1 dans le chapitre précédent, nous obtiendrons des théorèmes d'approximation en probabilité.

5.1. Notions de base

Définition 5.1.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, Z un espace topologique non vide, X un espace vectoriel topologique localement convexe et $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ une fonction aléatoire. On dit que ϕ est continue en probabilité en $z \in Z$ si pour toute semi-norme p sur X et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de z tel que, pour tout $t \in V$,*

$$\mathrm{P}(\{\ \omega \mid p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, z)) \geq \epsilon\ \}) < \epsilon.$$

Définition 5.1.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, Z un espace topologique non vide, (X, d) un espace métrique et $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ une fonction aléatoire. On dit que ϕ est uniformément continue en probabilité sur X si elle est continue en probabilité sur X et que les voisinages V peuvent tous être pris comme étant des boules de rayon δ, pour un certain $\delta > 0$.*

On voit que si X est métrique et compact alors toute fonction continue en probabilité est uniformément continue en probabilité.

Définition 5.1.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, Z un espace topologique non vide, X un espace vectoriel topologique localement convexe et $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ une fonction aléatoire. On dit que ϕ est fortement continue en probabilité en $z \in Z$ si pour toute semi-norme p sur X et $\epsilon > 0$, il existe un voisinage V de z tel que*

$$\mathrm{P}(\{\ \omega \mid p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, z)) \geq \epsilon \ \text{ pour un certain } t \in V\}) < \epsilon$$

ce qui est équivalent à

$$\mathrm{P}(\{\ \omega \mid \sup_{t \in V}\{\ p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, z))\} \geq \epsilon\ \}) < \epsilon.$$

Remarque 5.1.1. Si ϕ est (fortement) continue en probabilité en z, pour tout $z \in Z$, alors ϕ est dite (fortement) continue en probabilité sur $\Omega \times Z$.

Remarque 5.1.2. Il est clair que la continuité forte en probabilité implique la continuité en probabilité étant donné que

$$\{\ \omega \mid \sup_{t \in V}\{\ p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, z))\} \geq \epsilon\ \} = \cup_{t \in V}\{\ \omega \mid p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, z)) \geq \epsilon\ \}.$$

Proposition 5.1.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité, (Z, d) un espace métrique séparable non vide, (X, ρ) un espace métrique et $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ une fonction aléatoire.*

Soit les quatre propositions suivantes :

- *(0) ϕ est une fonction continue déterministe sur Z $(\phi(\omega, \cdot) = \phi(\cdot))$;*
- *(1) ϕ est une fonction continue aléatoire sur Z ;*
- *(2) ϕ est fortement continue en probabilité sur Z ;*
- *(3) ϕ est continue en probabilité sur Z.*

Alors nous avons exactement les implications suivantes :

$$(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3).$$

Démonstration. Nous savons déjà que (2) implique (3) et il est clair que (0) implique (1) et non l'inverse. Pour montrer que (2) n'implique pas (1), voir exemple 5.1.2. Pour montrer que (3) n'implique pas (2), voir exemple 5.1.1. Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$.

Soit $z_0 \in Z$ et $\epsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\Delta_n = \{z \in Z \mid d(z, z_0) < 1/n\}$$

et

$$\Omega_n = \{\omega \mid \sup_{z \in \Delta_n} \{\rho(\phi(\omega, z), \phi(\omega, z_0))\} < \epsilon, \}.$$

Les Ω_n sont mesurables. En effet, Z étant séparable et $\phi(\omega, \cdot)$ continue, nous pouvons écrire Ω_n comme un union dénombrable d'ensembles mesurables.

Puisque $\Omega = \cup \Omega_n$, on peut choisir n assez grand pour que

$$\mathrm{P}(\Omega) = \mathrm{P}(\{\omega \mid \rho(\phi(\omega, z), \phi(\omega, z_0)) \geq \epsilon, \ \textit{pour un } z \in \Delta_n\}) < \epsilon.$$

$\square$

Exemple 5.1.1. Soit $\Omega = [0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue et soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Considérons la suite d'intervalles suivante :

$$[0,1], \left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[0, \frac{1}{3}\right), \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$\left[0, \frac{1}{4}\right), \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, 1\right], \left[0, \frac{1}{5}\right), \cdots$$

Nous noterons par I_n le n^{ieme} élément de cette suite et soit les anneaux $D_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 1/(n+1) \ \leq |z| < \ 1/n\}$. Soit $\phi : \Omega \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi(\cdot, z) = \chi_{I_n}$ pour z dans D_n et $\phi(\cdot, 0) \equiv 0$.

Ainsi, pour $\epsilon > 0$, considérons N tel que pour tout $n \geq N$

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid \phi(\omega, z) = 1\}) < \epsilon \qquad \text{pour tout } z \text{ dans } D_n.$$

Ainsi, soit $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \ 1/N\}$. Alors pour z dans V, on a que

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - \phi(\omega, 0)| \geq \epsilon\}) < \epsilon.$$

On a donc que ϕ est continue en probabilité en 0.

Par contre, ϕ n'est pas fortement continue en probabilité en 0 car pour n'importe quel voisinage $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/N\}$ de 0, il est possible de trouver $I_n, I_{n+1}, \cdots, I_{n+r}$, $n > N$, qui recouvrent Ω. Choisissons $z_j \in D_{n+j}$. Ainsi,

$$\mathrm{P}(\cup_{i=1}^{r}\{\omega \mid |\phi(\omega, z_i) - \phi(\omega, 0)| \geq \epsilon\}) = 1.$$

Exemple 5.1.2. Soit $\Omega = [-1, 1]$ avec la mesure de Lebesgue normalisée à 1 et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Pour chaque $(\omega, z) \in \Omega \times \overline{D}$ soit

$$\phi(\omega, z) = \begin{cases} 1, & \omega = Re(z) \\ 0, & \omega \neq Re(z). \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Ainsi, pour chaque ω de Ω, $\phi(\omega, \cdot)$ est discontinue sur la droite $Re(z) = \omega$ dans $\overline{D}$ et n' est donc pas continue aléatoire.

Par contre, si $0 < \epsilon < 1$ et si $U \subset \overline{D}$ est un voisinage d'un point z_0 dans $\overline{D}$, alors pour tout z dans U

$$\{\omega \mid \ |\phi(\omega, z) - \phi(\omega, z_0)| \geq \epsilon\} = \begin{cases} \emptyset \ , & Re(z) = Re(z_0) \\ \{Re(z), Re(z_0)\} \ , & Re(z) \neq Re(z_0). \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Donc si U est un disque de rayon $\delta > 0$, on a que $\mathrm{P}(\cup_{z \in U}\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - \phi(\omega, z_0)| \geq \epsilon\}) \leq \delta$. En choisissant $\delta < \epsilon$, on trouve que ϕ est fortement continue en probabilité sur $\overline{D}$.

Remarque 5.1.3. Par polynômes aléatoire, nous voulons parler de fonctions polynomiales aléatoires sur $\Omega \times \mathbb{C}$.

Corollaire 5.1.1. *Les polynômes aléatoires sont fortement continus en probabilité.*

Définition 5.1.4. *Soient ϕ_n, $n = 1, 2, 3, ...$, et ϕ des fonctions aléatoires de $\Omega \times Z \longrightarrow X$ où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est un espace de probabilité, Z un espace topologique non vide et X un espace vectoriel topologique localement convexe . On dit que $\{\phi_n\}$ converge uniformément en probabilité vers ϕ si pour toute semi-norme p, et $\epsilon > 0$, il existe un $n_\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n > n_\epsilon$ et pour tout $z \in Z$,*

$$\mathrm{P}(\{\ \omega | \ p(\phi_n(\omega, z) - \phi(\omega, z)) \geq \epsilon \ \}) < \epsilon.$$

Si $\mathcal{F}$ est une famille de fonction de Z dans X et ϕ est une fonction aléatoire, alors ϕ peut être approximée uniformément en probabilité par des fonctions aléatoires-$\mathcal{F}$ si il existe une suite de fonctions aléatoires-$\mathcal{F}$ telle que la suite converge uniformément en probabilité vers ϕ.

Définition 5.1.5. *Soient ϕ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, et ϕ des fonctions aléatoires de $\Omega \times Z \longrightarrow X$ où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ est un espace de probabilité, Z un espace topologique non vide et X un espace vectoriel topologique localement convexe . On dit que $\{\phi_n\}$ converge fortement uniformément en probabilité vers ϕ si pour toute semi-norme p, et $\epsilon > 0$, il existe un $n_\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n > n_\epsilon$*

$$\mathrm{P}(\{\ \omega |\ \sup_{z \in Z}\{p(\phi_n(\omega, z) - \phi(\omega, z))\} \geq \epsilon\ \}) < \epsilon.$$

Remarque 5.1.4. Dans le cas où $X = \mathbb{C}$ et que ϕ est une fonction déterministe $(\phi(\omega, \cdot) = \phi(\cdot))$, pour tout $\epsilon_k < 1$, il existe un n_k tel que pour tout $n > n_k$

$$\{\ \omega |\ \sup_{z \in Z}\ |(\phi_n(\omega, z) - \phi(z)\ | < \epsilon_k\ \} \neq \emptyset.$$

Donc il existe une suite croissante $\{m_k\}$ et une suite $\{\omega_k\}$ tel que, pour $k = 1, 2, \cdots$,

$$\sup_{z \in Z}\{\ |\phi_{m_k}(\omega_k, z) - \phi(z)\ |\} < \epsilon_k.$$

En prenant ϵ_k qui tendent vers 0, on a que la suite de fonction déterministe $\phi_{m_k}(\omega_k, \cdot)$ converge uniformément vers ϕ.

Théorème 5.1.1. *Soient Z une espace topologique normal de dimension finie, X un espace vectoriel topologique localement convexe et $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace de probabilité. Si $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ est continue en probabilité, alors ϕ peut être approximée uniformément en probabilité par des fonctions continues aléatoires.*

Remarque 5.1.5. Un espace topologique Z est dit de dimension n si $n + 1$ est le plus petit entier tel que chaque recouvrement ouvert de Z contient un sous-recouvrement avec la propriété que chaque point de Z est contenu dans au plus $n + 1$ ouverts du sous-recouvrement. En particulier, nous avons que $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

Démonstration. Soient N la dimension de Z et p une semi-norme continue sur X. Pour chaque $s \in Z$, choisissons un voisinage de s, $V(s)$, tel que pour $t \in V(s)$,

$P(\{\ \omega \mid p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, s)) \geq \epsilon\ \}) < \epsilon$, . Par hypothèse, on peut choisir un sous-recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $\{V(s) | s \in Z\}$ tel que pour chaque $s \in Z$, la cardinalité de $\{\alpha | s \in U_\alpha\}$ est plus petite ou égale à $N + 1$. Soit $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une partition de l'unité associée à $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Cette partition existe car la famille $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un recouvrement ouvert localement fini d'un espace topologique normal . Pour chaque α, on choisit s_α tel que $U_\alpha \subset V(s_\alpha)$. Posons

$$\psi(\omega, s) = \sum_{\alpha \in I} \phi(\omega, s_\alpha) g_\alpha(s).$$

Cette somme a au plus $N + 1$ termes dans le voisinage de chaque s. Alors ψ est une fonction aléatoire continue sur Z (les g_α sont continues), et, pour tout s dans Z, on a que

$$P(\{\ \omega \mid p(\phi(\omega, s) - \psi(\omega, s)) \geq \epsilon\ \}) = P\left(\left\{\omega \;\middle|\; p(\sum_{\alpha \in I} g_\alpha(s)(\phi(\omega, s) - \phi(\omega, s_\alpha))) \geq \epsilon\right\}\right)$$

$$\leq P\left(\left\{\omega \;\middle|\; \sum_{\alpha \in I} g_\alpha(s)(p(\phi(\omega, s) - \phi(\omega, s_\alpha))) \geq \epsilon\right\}\right) < (N+1)\epsilon.$$

$\square$

Théorème 5.1.2. *Soient Z une espace topologique normal de dimension finie et X un espace vectoriel topologique localement convexe et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Si $\phi : \Omega \times Z \longrightarrow X$ est fortement continue en probabilité alors ϕ peut être fortement approximée uniformément en probabilité par des fonctions continues aléatoires.*

Démonstration. Soient N la dimension de N et p une semi-norme continue sur X. Pour chaque $s \in Z$, choisissons un voisinage de s, $V(s)$, tel que

$$P(\{\ \omega \mid \sup_{t \in V(s)} \{\ p(\phi(\omega, t) - \phi(\omega, s))\} \geq \epsilon\ \}) < \epsilon.$$

Par hypothèse, on peut choisir un sous-recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de $\{V(s) | s \in Z\}$ tel que pour chaque $s \in Z$, la cardinalité de $\{\alpha | s \in U_\alpha\}$ est plus petit ou égale à $N + 1$. Soit $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ une partition de l'unité associé à $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Cette partition existe car la famille $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ est un recouvrement ouvert localement fini d'un espace topologique normal . Pour chaque α on choisit s_α tel que $U_\alpha \subset V(s_\alpha)$. Posons

$$\psi(\omega, s) = \sum_{\alpha \in I} \phi(\omega, s_\alpha) g_\alpha(s).$$

Cette somme a au plus $N + 1$ termes dans le voisinage de chaque s. Alors ψ est une fonction aléatoire continue sur Z (les g_α sont continues), et, pour tout s dans Z, on a que $\mathrm{P}(\{\ \omega \mid \sup_{s\in Z}\{p(\phi(\omega, s) - \psi(\omega, s))\} \geq \epsilon\ \}) =$

$$\mathrm{P}\left(\left\{\omega \,\middle|\, \sup_{s\in Z}\{p(\sum_{\alpha\in I} g_\alpha(s)(\phi(\omega, s) - \phi(\omega, s_\alpha)))\} \geq \epsilon\right\}\right)$$

$$\leq \mathrm{P}\left(\left\{\omega \,\middle|\, \sum_{\alpha\in I} g_\alpha(s)(\sup_{s\in V(s_\alpha)}\{p(\phi(\omega, s) - \phi(\omega, s_\alpha))\}) \geq \epsilon\right\}\right) < (N+1)\epsilon.$$

$\square$

Définition 5.1.6. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *un espace de probabilité. Un atome de* $\mathcal{A}$ *est un ensemble* $B \in \mathcal{A}$ *tel que* $\mathrm{P}(B) > 0$ *et si pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $A \subset B$*, alors* $\mathrm{P}(A) = 0$ *ou* $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B)$.

Définition 5.1.7. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *est un espace de probabilité non-atomique si* $\mathcal{A}$ *ne contient pas d'atome.*

Comme conséquence, tout singleton mesurable est de mesure nulle.

Dans la suite de ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ signifie un espace de probabilité non-atomique .

Définition 5.1.8. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{C}$. K *est appelé un ensemble stochastique de Mergelyan si pour tout* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ *espace de probabilité non-atomique, toute fonction continue en probabilité sur* $\Omega \times K$ *et holomorphe aléatoire sur* $\Omega \times \overset{\circ}{K}$ *peut être approximée uniformément en probabilité par des polynômes aléatoires sur* Ω

.

Exemple 5.1.3. Si $K = \{z_0\}$. Alors les fonctions continues en probabilité sur $\Omega \times K$ et holomorphe aléatoire sur $\Omega \times \overset{\circ}{K}$ ($\overset{\circ}{K} = \emptyset$) sont toutes les fonctions de la forme $\phi(\omega, z_0) = C_\omega$ où $C : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est mesurable et $C_\omega = C(\omega)$. Si on considère le polynôme aléatoire $p(\omega, \cdot) = C_\omega$, nous avons qu'il approxime uniformément en probabilité ϕ.

Lemme 5.1.1. *Soit ϕ une fonction continue en probabilité sur $\Omega \times K$ et soit $\epsilon > 0$. Supposons qu'il existe des ensembles compacts $K_1, ..., K_n$, des ensembles mesurables de Ω, $\Omega_1, .., \Omega_n$, deux-à-deux disjoints et des polynômes aléatoires $p_1, .., p_n$ sur $\Omega_1, ..., \Omega_n$, respectivement, tels que :*

(1) $K = K_1 \cup ... \cup K_n$,

(2) $\Omega = \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_n$ et

(3) pour tout $1 \leq j \leq n$, on a que $0 < \mathrm{P}(\Omega_j) < \epsilon$ et
$\mathrm{P}(\{\omega \mid \phi(\omega, z) - p_j(\omega, z)| \geq \epsilon\} \mid \Omega_j) < \epsilon$ pour $z \in \cup_{i \neq j} K_i$.

Alors il existe p un polynôme aléatoire sur Ω tel que, pour tout z dans K,

$$\mathrm{P}(\{\ \omega \mid |\ \phi(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon\ \}\ ) < 2\epsilon.$$

Démonstration. Considérons $p : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $p(\omega, z) = p_j(\omega, z)$ pour $\omega \in \Omega_j, j = 1, ..., n$. Pour $z \in K$, on choisit $j = j(z)$ tel que $z \in K_j$. Ainsi, pour tout $z \in K$,

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon\ \}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(\{\ \omega \mid\ |\phi(\omega, z) - p_i(\omega, z)| \geq \epsilon\} \mid \Omega_i\right) \mathrm{P}(\Omega_i)$$

$$\leq \mathrm{P}(\Omega_j) + \sum_{i \neq j} \mathrm{P}(\{\ \omega|\ |\phi(\omega, z) - p_i(\omega, z)| \geq \epsilon\} \mid \Omega_i)\ \mathrm{P}(\Omega_i) < \epsilon + \sum_{i \neq j} \epsilon\ \mathrm{P}(\Omega_i) < 2\epsilon.$$

□

Corollaire 5.1.2. *Supposons que pour tout n, il existe des compacts $K_1, ..., K_n$ tel que $K = K_1 \cup ... \cup K_n$ et pour tout $1 \leq j \leq n$,*

$$\cup_{i \neq j} K_i$$

est un ensemble stochastique de Mergelyan. Alors K est un ensemble stochastique de Mergelyan.

Démonstration. Afin d'utiliser le lemme 5.1.1, nous devons choisir pour chaque $\epsilon > 0$ une partition de Ω, $\Omega_1, ..., \Omega_n$, avec $0 < \mathrm{P}(\Omega_j) < \epsilon$ pour tout j. Cette partition existe car Ω est non-atomique. Ainsi les hypothèses du lemme 5.1.1 sont satisfaites, ce qui nous permet de conclure.

□

Définition 5.1.9. *Un domaine de Jordan fermé est un ensemble compact (avec nombre fini de composantes complémentaires) de $\mathbb{C}$ tel que $\overset{\circ}{K}$ est connexe, K est la fermeture de $\overset{\circ}{K}$, et la frontière de K est une union disjointe d'un nombre fini de courbes de Jordan (simples courbes fermées).*

Nous allons utiliser un théorème dont la preuve se trouve dans **[BS]**.

Théorème 5.1.3. *Soit K une union finie disjointe de domaines de Jordan fermés. Alors K est un ensemble stochastique de Mergelyan.*

Comme au chapitre 4, pour K un compact et A un ensemble dénombrable tel que A est dans le complémentaire de K, notons par $\mathcal{R}_A(K)$ l'ensemble des restrictions à K de fonctions rationnelles dont les pôles sont dans A.

Lemme 5.1.2. *Soit $R : \Omega \times \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ telle que pour chaque ω, $R(\omega, \cdot)$ est une fonction rationnelle dont les pôles sont dans A. Donc la restriction r de R à K est une fonction $\mathcal{R}_A(K)$. Si r est $\mathcal{R}_A(K)$-aléatoire alors R est rationnelle aléatoire.*

Démonstration. Considérons z_0 un point d'accumulation de K. Remarquons d'abord que pour une fonction f aléatoire, presque partout holomorphe en z_0, on peut écrire presque partout

$$f(\omega, z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,\omega}(z - z_0)^k,$$

où les $a_{k,\omega}$ sont mesurables. En effet, $a_{0,\omega} = f(\omega, z_0)$ et est donc mesurable. Si $\{z_m\} \subset K$ tel que z_m converge vers z_0, et si $a_{0,\omega}, \ldots, a_{n-1,\omega}$ sont mesurables, posons $g(\omega, z) = f(\omega, z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\omega}(z - z_0)^k$. Ainsi, pour tout z dans K, g est mesurable et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(\omega, z_m) - g(\omega, z_0)}{(z_m - z_0)^n} = a_{n,\omega},$$

et donc $a_{n,\omega}$ est mesurable.

Ceci étant remarqué, nous pouvons affirmer que pour chaque polynôme unitaire q dont les zéros sont dans A :

(1) l'ensemble $E_q = \{\omega \mid q(\cdot)R(\omega,\cdot)$ est un polynôme $\}=$ $\{\omega|\ a_{k,\omega} = 0$ à partir d'un certain $k(\omega)$ du développement de $q(\cdot)R(\omega,\cdot)$ en série dans $K\}$ $=\cup_{n=0}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} \{\omega|\ a_{k,\omega} = 0\}$ est mesurable, et

(2) la fonction $q(z)R(\cdot, z)$ est mesurable (relativement) sur E_q pour tout z de $\mathbb{C}$ car $E_q = \cup_{n=0}^{\infty}\{\omega \in E_q \mid Deg(p) = n$ où $r(z) = p(\omega,z)/q(z)\}$ et dans chacun de ces ensembles p est mesurable car il a un nombre fini de coefficients mesurables. Donc p est mesurable sur E_q.

L'ensemble de tels q est dénombrable. Ainsi en choisissant pour chaque ω un polynôme unitaire de degré minimal, on peut écrire Ω comme une union disjointe, $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, où $E_j = E_{q_j}$ pour un polynôme comme ci-haut.

Maintenant considérons $z \in \mathbb{C}$. Il suffit de montrer que R est mesurable sur chaque E_j. Si $q_j(z) = 0$, alors, pour $\omega \in E_j$, $R(\omega, z) = \infty$. Donc $R(\cdot, z)$ étant constante est mesurable sur E_j. Si $q_j(z) \neq 0$, alors $q_j(z)R(\omega,z)$ est mesurable sur E_j et donc R est mesurable sur E_j. Les E_j étant une famille d'ensembles mesurables, nous avons donc que R est mesurable pour tout z dans $\mathbb{C}$.

$\square$

Lemme 5.1.3. *Toute fonction $\mathcal{R}_A(K)$-aléatoire peut être approximée en probabilité par des polynômes aléatoires.*

DÉMONSTRATION. Dans cette preuve, nous ne distinguons pas une fonction rationnelle de sa restriction sur K. Soit $r(\omega, z)$ une fonction rationnelle aléatoire dont les pôles sont dans A (une fonction $\mathcal{R}_A(K)$-aléatoire). Par le lemme 5.1.2, on a , pour $W \subset A$, que

$$\Delta_W = \cup_{z_j \in W}\{\omega\ |r(\omega, z_j) = \infty\} \in \mathcal{A}.$$

Nous pouvons écrire A comme la réunion d'une suite croissante d'ensembles finis F_n tel que

$$\cup_n \Delta_n = \Omega.$$

Donc pour $\epsilon > 0$, il existe un ensemble fini F de A tel que $\mathrm{P}({\Delta_F}^c) < \epsilon$.

Supposons que F ne soit pas vide et notons $F = \{z_1, ..., z_n\}$. Soient $D_1, ..., D_n$ des disques fermés disjoints tel que $z_i \in D_i$ et $D_i \cap K = \emptyset$, $i = 1, ..., n$. Soit D un disque assez large tel que $K \subset D$ et $D_i \subset \overset{\circ}{D}$. Posons $K' = D \setminus \cup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{D}_i$. Ainsi $K \subset K'$ et K' est un domaine de Jordan fermé. Ainsi la restriction de r à $\Delta_F \times K'$ est une fonction $A(K')$-aléatoire. Par le théorème 5.1.3, il existe un polynôme aléatoire p' sur $\Delta_F \times K'$ tel que pour tout $z \in K'$, $\mathrm{P}(\{\omega \mid |r(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon\} \big| \Delta_F) < \epsilon$. Soit $p(\omega, z) = p'(\omega, z)$ si ω est dans Δ_F, soit $p(\omega, z) = 0$ autrement. Pour tout z dans K' (et donc dans K), on a que

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid |r(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon\}) \leq \mathrm{P}(\{\omega \mid |r(\omega, z) - p'(\omega, z) \mid \ \geq \epsilon\} \Big| \Delta_F)\mathrm{P}(\Delta_F) + \mathrm{P}({\Delta_F}^c) < 2\epsilon$$

$\square$

Rappelons quelques notions d'approximation uniforme vues au chapitre 3 et que nous pouvons trouver dans **[GB]**.

Nous avons les inclusions suivantes :

$$P(K) \subseteq R(K) \subseteq H(K) \subseteq A(K) \subseteq C(K)$$

où $P(K)$ sont les polynômes sur K, $R(K)$ est la fermeture dans $C(K)$ des fonctions rationnelles sans pôles sur K, $H(K)$ la limite uniforme sur K de fonctions holomorphes sur K et finalement $A(K) := C(K) \cap Hol(\overset{\circ}{K})$.

La théorie d'approximation uniforme dans le plan consiste à déterminer quand les inclusions deviennent des égalités. Ces problèmes sont résolus. Nous avons en autre que :

- si $R(K) = C(K)$, alors $\overset{\circ}{K} = \emptyset$;
- si $R(K) = A(K)$, alors $R(\partial K) = C(\partial K)$;
- $H(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe ;
- $A(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe (Mergelyan) ;
- $C(K) = P(K)$ si et seulement si le complémentaire de K est connexe et $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

Théorème 5.1.4. *Si $R(K) = C(K)$, alors K est un ensemble stochastique de Mergelyan.*

DÉMONSTRATION. Soit ϕ continue en probabilité sur $\Omega \times K$. Par le théorème 5.1.1, nous pouvons supposer que ϕ est une fonction continue aléatoire . Comme $R(K) = C(K)$, on a donc que $\overset{\circ}{K} = \emptyset$. Par le lemme 4.2.3, il existe un ensemble dénombrable A et une suite de fonctions $\mathcal{R}_A(K)$-aléatoire convergeant uniformément en probabilité vers ϕ. Le résultat suit du lemme 5.1.3.

□

Théorème 5.1.5. *Soit $\phi : \Omega \times K \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est continue en probabilité sur K et holomorphe aléatoire sur $\Omega \times \overset{\circ}{K}$. Si la restriction à la frontière de K de ϕ peut être approximée uniformément en probabilité par des polynômes aléatoires, alors ϕ peut être approximée uniformément en probabilité par des polynômes aléatoires.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que par hypothèses, il existe, pour $\epsilon > 0$, un polynôme aléatoire p tel que, pour z sur la frontière de K, $\mathrm{P}(\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon/2\}) < \epsilon/2$. De plus, K étant compact, on a que $\phi - p$ est uniformément continue en probabilité sur K. Nous pouvons combiner ces deux remarques pour avoir qu'il existe un voisinage V de la frontière de K, de la forme $\cup j = 1^n B_\delta(z_j)$, $z_j \in \partial K$, tel que pour z dans $V \cap K$, en choisissant z_j tel que $z \in B_\delta(z_j)$,

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid \ |\phi(\omega, z) - p(\omega, z)| \geq \epsilon\}) < \mathrm{P}(\{\omega \mid \ |(\phi - p)(\omega, z) - (\phi - p)(\omega, z_j)| \geq \epsilon/2\}) <$$

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid \ |\phi(\omega, z_j) - p(\omega, z_j)| \geq \epsilon/2\}) < \epsilon.$$

Supposons que $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ (autrement le théorème est prouvé) et posons $K' = K \setminus V$. K' est un sous-ensemble compact de $\overset{\circ}{K}$. Il est connu (**[R]**) que K' est contenu dans une union finie de domaines de Jordan fermés disjoints délimités par des courbes de Jordan orientées disjointes $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ dans $V \setminus \overset{\circ}{K}$. Pour chaque $1 \leq j \leq m$, notons par γ_j' une courbe de Jordan fermée dans $V \cap \overset{\circ}{K}$, parallèle à γ_j, de même orientation, tel que $\gamma_j \cap \gamma_j' = \emptyset$ et les régions définies par $\gamma_1', \cdots, \gamma_m'$ contiennent celles définies par $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$. Soit K_j l'anneau borné par γ_j et γ_j'. Et soit D un disque fermé dont l'intérieur contient K. Posons

$$L = K \setminus (\overset{\circ}{K}_1 \cup \cdots \cup \overset{\circ}{K}_m).$$

Alors $L = L_1 \cup (L_2 \cap K)$ où L_1 est constitué d'une union finie de domaines de Jordan fermés contenus dans $\overset{\circ}{K}$ et L_2 est une union finie de domaines de Jordan délimités par ∂D et $-\gamma_1', \cdots, -\gamma_m'$. Remarquons que $L_2 \cap K \subset V$. Donc

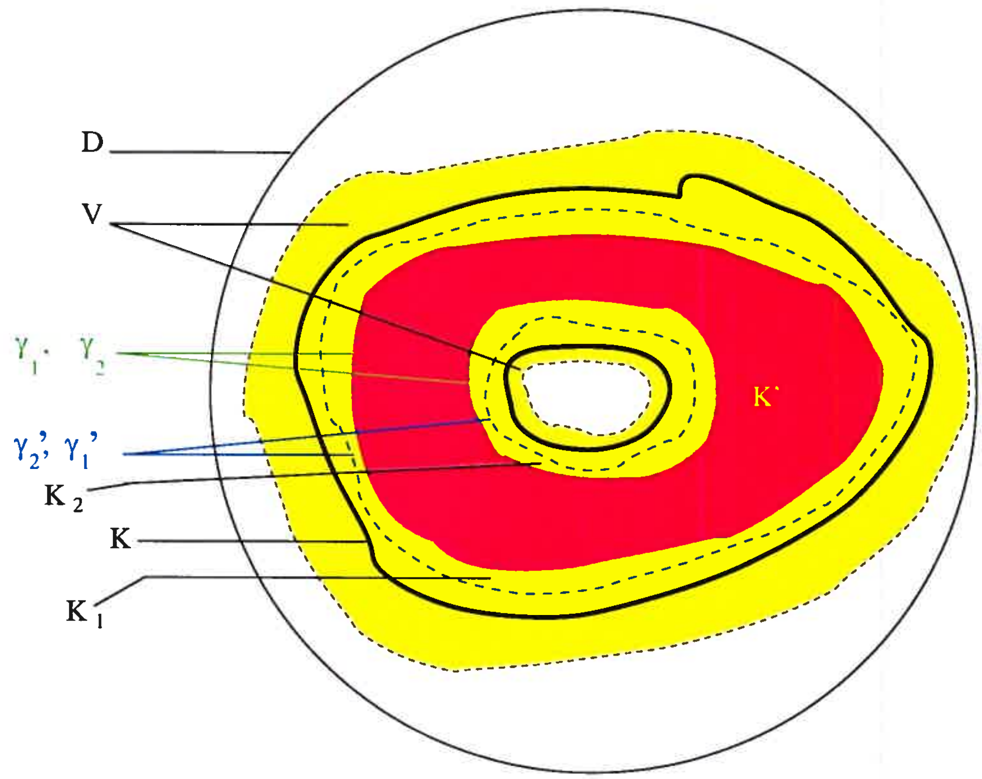

FIG. 5.1.1. Décomposition de K

$L^* = L_1 \cup L_2$ est une union disjointe de domaines de Jordan donc un ensemble stochastique de Mergelyan par le théorème 5.1.3. De plus $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Soit

$$\rho(\omega, z) = \begin{cases} \phi(\omega, z), & z \in L_1, \\ p(\omega, z), & z \in L_2. \end{cases} \tag{5.1.3}$$

Ainsi, ρ étant continue en probabilité sur L^* et holomorphe aléatoire sur $\overset{\circ}{L^*}$, il existe un polynôme aléatoire q tel que pour z dans L^*

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid |\rho(\omega, z) - q(\omega, z)| \geq \epsilon\}) < \epsilon.$$

Mais par la remarque en début de preuve (et $L_2 \cap K \subset K \cap V$), on a donc, pour z dans L, que

$$P(\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - q(\omega, z)| \geq 2\epsilon\}) < 2\epsilon.$$

Pour $j = 1, \cdots, m$ et pour chaque entier n, K_j peut être écrit comme une union de n anneaux $K_{j,i}$, $1 \leq i \leq n$, chacun borné par des courbes de Jordan fermées parallèles aux γ_j et γ_j'. Par l'argument précédent, pour chaque $i = 1, \cdots, n$, il existe un polynôme aléatoire q_i tel que, pour

$$z \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{m} \overset{\circ}{K}_{j,i} = K \setminus (\bigcup_{j=1}^{m} K_{j,i})^{\circ},$$

$$P(\{\omega \mid |\phi(\omega, z) - q_i(\omega, z)| \geq \epsilon\}) < \epsilon.$$

Le fait de pouvoir prendre n grand nous permet de trouver une partition $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$ tel que $0 < P(\Omega_j) < \epsilon$, $j = 1, \cdots, n$. Le résultat suit donc du lemme 5.1.1. □

Théorème 5.1.6. *Soit K un compact tel que $R(\partial K) = C(\partial K)$. Alors K est un ensemble stochastique de Mergelyan. En particulier, les ensembles compacts tel que $R(K) = A(K)$ sont des ensembles stochastiques de Mergelyan.*

Démonstration. Nous obtenons ce résultat en combinant les théorèmes 5.1.4 et 5.1.5.

□

5.2. Cas d'un espace trivial de probabilité, Ω

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, si $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset\}$ avec $P(\Omega) = 1$, les fonctions ϕ aléatoires sur $\Omega \times \mathbb{C}_z \longrightarrow \mathbb{C}_s$ sont en fait des fonctions déterministes ($\phi(\omega, z) = \phi(z)$).

La définition de fonction continue en probabilité en $z \in \mathbb{C}_z$ devient donc :

Pour $0 < \epsilon < 1$, il existe un voisinage V de z tel que, pour tout $t \in V$,

$$P(\{\omega \mid |\phi(z) - \phi(t)| \geq \epsilon\}) = 0$$

c'est-à-dire que $|\phi(z) - \phi(t)| < \epsilon$.

Donc ϕ est une fonction déterministe et continue en z.

De plus, si $\{\phi_n\}$ et ϕ sont des fonctions aléatoires de $\Omega \times Z \longrightarrow \mathbb{C}$, telles que $\{\phi_n\}$ converge uniformément en probabilité vers ϕ, alors les ϕ_n et ϕ sont des fonctions déterministes et pour $0 < \epsilon < 1$, il existe un n_ϵ tel que, pour tout $n > n_\epsilon$ et pour tout $z \in Z$,

$$\mathrm{P}(\{\omega \mid |\phi_n(z) - \phi(z)| \geq \epsilon\}) = 0,$$

c'est-à-dire que $|\phi_n(z) - \phi(z)| < \epsilon$. Donc la convergence uniforme en probabilité revient à la convergence uniforme. Par les mêmes raisonnements, on voit que la convergence forte en probabilité revient à la convergence uniforme.

Ici par contre, les théorèmes 5.1.1 et 5.1.2 sont équivalents et triviaux étant donné que le premier stipule que toutes fonctions continues en probabilité (donc continue) peut être approximées uniformément en probabilité (donc uniformément) par des fonctions continues aléatoires (donc continues).

Pour les théorèmes d'approximation en probabilité suivants, nous ne pouvons plus utiliser cet exemple, car notre espace de probabilité trivial est un espace atomique. En effet, Ω est un atome. Donc nous n'obtenons pas de théorème classique avec l'approximation en probabilité. C'est d'une certaine manière rassurant car il n'est pas vrai en général, dans la théorie déterministe, que l'union de deux compacts de Mergelyan est un compact de Mergelyan.

CONCLUSION

Il est intéressant de remarquer le beau mélange de mesure, d'analyse complexe et de topologie qui mène à l'approximation uniforme aléatoire.

Comme nous l'avons vu, les théorèmes d'approximation aléatoire sont une généralisation directe des théorèmes classiques mais ne permettent pas de prouver autre chose qu'un analogue direct, par exemple pour l'approximation en plusieurs variables complexes. En effet, le théorème de Runge est un cas particulier du théorème de Runge aléatoire mais utilise ce dernier. Donc il est peu probable que cette approche donne de nouveaux théorèmes d'approximations déterministes en plusieurs variables complexes (ce qui était la motivation de départ).

Pour ce qui est de l'approximation en probabilité, nous avons vu que la classe des compacts stochastiques de Mergelyan est très grande (plus grande que celles des compacts de Mergelyan déterministes). Donc ici nous n'avons pas de théorème classique comme cas particulier. En fait, comme les auteurs de [**BS**] le mentionnent, le problème suivant demeure ouvert : Trouver un compact du plan complexe qui ne soit pas un ensemble stochastique de Mergelyan. Dans la résolution de ce problème , par le théorème 5.1.6, il suffit de concentrer notre recherche sur les compacts d'intérieurs vides tels que $R(K) \neq C(K)$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] ROBERT.J. AUMANN, *Measurable utility and the measureable choice theorem*, La decision, Agrégation et dynamique des ordres de préférences, no. 171, 1969.

[AB] GARY F. ANDRUS, F. ET LEON BROWN, *Uniform approximation by random functions*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 14, 1984.

[AN] GARY F. ANDRUS, F. ET TOGO NISHIURA, *Stochastic approximation of random functions*, Rend. Mat. (6) 13 (1980), 593-615.

[B] N. BOURBAKI, *General Topology*, Part 2, Hermann, Paris, 1966.

[BS] L. BROWN ET M.SCHREIBER, *Stochastic continuity and approximation*, Studia Mathematica 121 (1), 1996.

[C] CHI-TAI CHUANG, *Normal Families of Meromorphic Functions*, World scientific publishing Co. Pte. Ltd., 1993.

[GB] ANDRÉ BOIVIN ET PAUL M. GAUTHIER, *Holomorphic and harmonic approximation on Riemann surfaces*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 37, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[H] C.J. HIMMELBERG, *Measurable relations*, Fundamenta Mathematicae, v.87, 1975.

[KR] K. KURATOWSKI ET C. RYLL-NARDZEWSKI, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astrom. Phys. 13, 1965.

[LC] DONALD L. COHN, *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[M] JAMES R. MUNKRES, *Toplogy, second edition*, Prentice-Hall Inc., 1975.

[R] WALTER RUDIN, *Real and Complex Analysis, second edition*, McGraw-Hill series in higher mathematics, 1974.

[S] JOEL L. SCHIFF, *Normal Families*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Sh] A.N. SHIRYAYEV, *Probability*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1984.