

Université de Montréal

Tests d'indépendance de deux séries chronologiques
stationnaires univariées

par

Hacène Nedjar

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Statistique

29 avril 2004



QA
3
U54
2004
V.020

Direction des bibliothèques

AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Tests d'indépendance de deux séries chronologiques
stationnaires univariées**

présenté par

Hacène Nedjar

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yves Lepage

(président-rapporteur)

Roch Roy

(directeur de recherche)

Jean-François Angers

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

23 juin 2004

REMERCIEMENTS

À tout seigneur, tout honneur. Mes remerciements vont tout d'abord à mon directeur de recherche Roch Roy, qui sans ses orientations, ses conseils, sa continuelle disponibilité et surtout sa patience, ce projet n'aurait jamais vu le jour. Je le remercie aussi pour l'aide financière qu'il m'a accordé via des subventions de recherche du Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada (CRNSG), du réseau de centres d'excellences sur les mathématiques des technologies de l'information et des systèmes complexes (MATISC) et le Fonds québécois de recherche sur la nature et la technologie (FQRNT). Je remercie également toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, dans ma tâche. Sans les nommer toutes, je cite particulièrement : Claude Beauchamp pour ses précieuses aides à "debugger" mes programmes en Fortran, Mohamed Lokbani du Département d'informatique et de recherche opérationnelle de l'Université de Montréal, pour m'avoir appris à mieux apprivoiser l'outil informatique, Chafik Bouhaddioui et Abdessamad Saidi pour leurs bons conseils, sans oublier bien sûr tout le personnel du Département de mathématiques et de statistique pour leur gentillesse et leur dévouement à nous faciliter la vie dans le département.

Je tiens à rendre hommage à ma collègue de bureau Alice Savu, sa sociabilité a été de loin le moteur grâce auquel j'ai pu terminer cette maîtrise sans trop de dégâts. Et comment oublier tous mes camarades de classe, responsables de la parfaite convivialité qui régnait dans le département.

Je tiens enfin à remercier ce que j'ai de plus cher au monde : ma grand-mère, ma mère et ma soeur ainsi que toute ma famille. Leurs encouragements et leur soutien moral ont été sans limites.

Je ne pourrais terminer cette rubrique sans évoquer mon cousin, le défunt Rachid, ce mémoire lui est dédié.

SOMMAIRE

L'un des domaines de prédilection de la recherche en séries chronologiques est la recherche de l'existence de relations entre des séries. Dans ce mémoire, l'accent est mis sur la vérification de l'indépendance de deux séries ARMA stationnaires et univariées. Pour ce faire, nous nous intéressons aux tests développés par Koch et Yang (1986) et par Hong (1996). Les deux tests, dont la particularité commune est que le calcul de la statistique correspondante est basé sur le carré des corrélations croisées résiduelles des deux séries considérées, ont vu le jour pour le même objectif, à savoir pallier aux lacunes du test de Haugh (1976). En effet, le test de Koch et Yang permet de prendre en compte différentes corrélations croisées consécutives de faibles valeurs et de mêmes signes. Le test de Hong quant à lui, est basé sur l'approche spectrale, fait intervenir une fonction de noyau qui rend le test plus puissant que celui de Haugh. Les propriétés asymptotiques des tests considérés sont mises en relief au début de cette étude, suivi de l'exécution d'un ensemble de simulations de Monte Carlo, pour d'une part étudier leurs niveaux et d'autre part, comparer leurs puissances. L'étude s'achève par une application pratique de ces deux tests sur des séries économiques réelles.

Mots clés : Tests de non corrélation, modèles ARMA, corrélations croisées, algorithme d'Imhof, approche spectrale, fonctions de noyau.

SUMMARY

One of the fields of predilection of research in time series is the research of the existence of relationships between time series. This work focuses on checking of independence of two stationary and univariate ARMA series. In this thesis, we pursue further the study of the tests developed by Koch and Yang (1986) and by Hong (1996). The two tests, whose common characteristic is that their calculation is based on the square of the residual cross correlations of the two considered series, were developed for the same purpose, namely to mitigate the gaps of Haugh's (1976) test. Indeed, Koch and Yang's test takes into account a possible pattern in the cross correlations at consecutive lags. Hong's test which is based on the spectral approach, involves a kernel function which may make it more powerful than Haugh's test. The asymptotic properties of the considered tests are highlighted at the beginning of this thesis. Then the results of a set of Monte Carlo simulations, for one hand, studying their levels and on the other hand, comparing their powers, follow. The study is completed by a practical application of these two tests on real economic series.

Key words : Tests for non-correlation, ARMA models, cross-correlations, Imhof's algorithm, spectral approach, kernel functions.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Sommaire	ii
Summary	iii
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Introduction	1
Chapitre 1. Préliminaires et présentation des tests d'indépendance.....	5
1.1. Préliminaires.....	6
1.1.1. La fonction de corrélation croisée.....	9
1.1.2. Estimation de $\gamma_X^{(12)}(\cdot)$ et $\rho_X^{(12)}(\cdot)$	9
1.1.3. La distribution asymptotique des corrélations croisées	10
1.2. Présentation des tests d'indépendance.....	12
1.2.1. Test de Haugh	12
1.2.2. Test de Koch et Yang	13
1.2.3. La distribution de la statistique de Koch et Yang.....	16
1.2.3.1. La distribution asymptotique de $Q_{KY}(M, i)$	17
1.2.3.2. L'algorithme d'Imhof.....	19
1.2.4. Test de Hong	22
1.2.4.1. La statistique de Hong	22
1.2.4.2. La distribution asymptotique sous H_0	26
Chapitre 2. Description des simulations et analyse des résultats.....	28

2.1. Contrôle du niveau	29
2.1.1. Algorithmes des simulations	29
Modèles utilisés	29
Description de l'algorithme	29
2.1.2. Analyse des résultats	31
2.2. Étude de puissance	43
2.2.1. Modèles utilisés	43
Alternative A	43
Alternative B	45
Alternative C	47
Les valeurs critiques exactes	47
Description de l'algorithme	48
2.2.2. Analyse des résultats	49
Alternative A	50
Test de Hong	50
Test de Koch et Yang	51
Le test le plus puissant	51
Alternative B	51
Test de Hong	51
Test de Koch et Yang	51
Le test le plus puissant	52
Alternative C	52
Test de Hong	52
Test de Koch et Yang	52
Le test le plus puissant	52
Chapitre 3. Application	63
3.1. Premier exemple	64
3.1.1. Description des données	64

3.1.2. Analyse de corrélation croisée	66
3.2. Deuxième exemple	68
3.2.1. Description des données	68
3.2.2. Modélisation des deux séries	70
3.2.3. Analyse de corrélation croisée	71
Conclusion	75
Annexe	77
Bibliographie	86

LISTE DES FIGURES

2.1.1	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$	33
2.1.2	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 200$	34
2.1.3	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$	35
2.1.4	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 200$	36
2.2.1	Modèles utilisés dans l'étude de puissance.....	44
2.2.2	Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative A.....	45
2.2.3	Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative B.....	47
2.2.4	Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative C.....	48
3.1.1	L'indice Dow-Jones (D_t) et l'indice australien All-ordinaries (A_t).....	64
3.1.2	Autocorrélations des indices Dow-Jones et les indices All-ordinaries.....	65
3.1.3	Taux de croissance de l'indice Dow-Jones et de l'indice All-ordinaries.....	66
3.1.4	Autocorrélations et corrélations croisées des taux de croissance des indices boursiers X_{1t} et X_{2t}	67
3.1.5	Niveaux de signification empiriques du test $Q_{KY}^*(M, i)$ pour différentes valeurs de M et de i , appliqués aux indices boursiers.....	68
3.2.1	Les taux de change É-U/Canada et Japon/Canada.....	69
3.2.2	Autocorrélations des séries originales des taux de change É-U/Canada et Japon/Canada.....	

3.2.3	Les taux de change É-U/Canada et Japon/Canada différenciés	71
3.2.4	Autocorrélations des taux de change différenciés	72
3.2.5	Autocorrélations et corrélations croisées des séries résiduelles \hat{a}_{1t} et \hat{a}_{2t} relatives aux taux de change.	73
3.2.6	Niveaux de signification empiriques du test $Q_{KY}^*(M, i)$ pour différentes valeurs de M et de i , appliqués aux taux de change.	74
3.2.7	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 100$	78
3.2.8	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 500$	79
3.2.9	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 100$	80
3.2.10	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 500$	81
3.2.11	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 100$	82
3.2.12	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 500$	83
3.2.13	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 100$	84
3.2.14	Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 500$	85

LISTE DES TABLEAUX

2.1.1	Modèles utilisés dans l'étude de niveau.....	29
2.1.2	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 100$	37
2.1.3	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$	38
2.1.4	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 500$	39
2.1.5	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 100$	40
2.1.6	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 200$	41
2.1.7	Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 500$	42
2.2.1	Tableau récapitulatif des tests les plus puissants.....	53
2.2.2	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative A, $n = 100$	54
2.2.3	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative A, $n = 200$	55
2.2.4	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative A, $n = 500$	56
2.2.5	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative B, $n = 100$	57

2.2.6	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative B, $n = 200$.	58
2.2.7	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative B, $n = 500$.	59
2.2.8	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative C, $n = 100$.	60
2.2.9	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative C, $n = 200$.	61
2.2.10	Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA, la VCE et S dans le cas de l'alternative C, $n = 500$.	62
3.1.1	Valeurs de la statistique $Q_{HO}(w, T_n)$ pour différents noyaux et différentes valeurs de T_n , appliqués aux indices boursiers.	67
3.2.1	Valeurs de la statistique $Q_{HO}(w, T_n)$ pour différents noyaux et différentes valeurs de T_n , appliquées aux taux de change.	73

INTRODUCTION

L'analyse des relations pouvant exister entre deux séries chronologiques a fait l'objet de développements nombreux et récents dans divers domaines de recherche et plus particulièrement en économétrie. En effet, les questions relatives à l'évolution des variables de l'économie et leurs interactions intéressent non seulement les chercheurs mais tous les acteurs de l'économie. L'étude de telles relations, comme c'est souvent le cas, sert de prélude à l'identification des modèles régissant le système à l'étude. Faut-il alors insister sur l'importance d'avoir des méthodes non seulement simples à appliquer mais aussi faciles à interpréter pour vérifier l'indépendance (où la non corrélation dans le cas de séries non gaussiennes) entre deux séries chronologiques univariées.

Pour tester l'indépendance entre deux séries chronologiques univariées $X^{(1)}(t)$ et $X^{(2)}(t)$, problème qui constitue le noyau sur lequel sera focalisée cette étude, Haugh (1976) a été le premier à proposer une solution. Sa démarche, articulée autour de l'idée que tester l'indépendance de deux processus stationnaires est équivalente à tester l'indépendance des processus innovation correspondants, consiste au préalable à décrire les deux séries étudiées à l'aide de modèles ARMA et de calculer les corrélations croisées entre les deux séries résiduelles. Sa statistique de test est basée sur la somme des carrés des corrélations croisées résiduelles à un nombre fixe de délais, disons de $-M$ à M , où $M > 0$ est un entier inférieur à n , la longueur des deux séries. Sous l'hypothèse d'indépendance des deux séries, la statistique de Haugh suit asymptotiquement une loi khi deux et l'hypothèse nulle est rejetée pour les grandes valeurs de la statistique.

Dans les analyses économiques, il a été observé par Geweke (1981a,b) que dans plusieurs situations, le test de Haugh ne permettait pas de rejeter l'hypothèse d'indépendance alors que la théorie économique indique le contraire. Le travail de Geweke a conduit Koch et Yang (1986) à proposer une généralisation de la statistique de Haugh qui prend en compte une dépendance

potentielle entre les deux séries résiduelles qui se traduit par des corrélations à plusieurs délais consécutifs qui sont petites mais de même signe. Leur statistique dépend de M et d'un paramètre i qui représente le nombre de corrélations croisées consécutives que l'on additionne avant de prendre le carré. Avec $i = 0$, nous retrouvons la statistique de Haugh. La loi asymptotique de la statistique Koch et Yang sous l'hypothèse nulle est celle d'une combinaison linéaire de variables aléatoires khi deux indépendantes et peut être évaluée de façon exacte avec l'algorithme d'Imhof (1961). Dans une étude de Monte Carlo, Koch et Yang font ressortir que pour certaines formes de corrélation sérielle entre les deux séries, des valeurs de $i > 0$ conduisent à des tests plus puissants que celui de Haugh qui correspond à $i = 0$.

Un test basé sur un nombre fixe de délais, de $-M$ à M , ne peut être convergent pour une alternative de corrélation croisée sérielle à un délai h tel que $|h| > M$. Cette lacune a incité Hong (1996) à introduire un test spectral qui fait intervenir tous les délais possibles de $-(n-1)$ à $(n-1)$. Sa statistique de test est une version normalisée de la somme pondérée des carrés des corrélations croisées résiduelles, les poids étant définis par un noyau et une suite de points de troncature T_n , $n \geq 1$. Avec le noyau uniforme tronqué et $T_n = M$, nous retrouvons une version normalisée de la statistique de Haugh. Hong fait aussi ressortir que dans sa classe de tests, le noyau de Daniell est celui qui fournit la plus grande puissance asymptotique.

L'objectif principal de ce mémoire est de comparer la puissance des tests de Koch et Yang et de Hong reliée à plusieurs situations particulières afin d'analyser les spécificités de chacun des deux tests.

Dans le premier chapitre et en première partie, quelques notions et caractéristiques de base des séries chronologiques univariées ont été mises en exergue afin de situer le problème dans son contexte théorique, suivi en deuxième partie d'une présentation des différentes facettes des tests considérés. L'algorithme d'Imhof est aussi décrit.

Dans le deuxième chapitre, des simulations ont été conduites dans un premier temps pour évaluer les niveaux exacts des tests et s'assurer ainsi de leurs proximités avec les niveaux nominaux usuels. Et dans un second temps, les simulations ont eu pour but de comparer les puissances

des tests considérés.

La première étape, appelée étude de niveau, est importante dans la mesure où elle nous permet de vérifier si la distribution asymptotique du test fournit une bonne approximation de la distribution exacte pour des séries de taille finie. Cette étude s'est faite sur deux types de modèles : un couple de modèles autorégressifs d'ordre 1 ($AR(1)$) et un couple de modèles moyennes mobiles d'ordre 1 ($MA(1)$), chaque couple étant composé de deux séries stationnaires, univariées et indépendantes. Le niveau exact du test pour l'hypothèse nulle H_0 d'indépendance des deux séries a été évalué dans une simulation par les pourcentages de rejet de H_0 basés sur 10 000 réalisations indépendantes. Pour chaque couple de modèles, les trois tailles $n = 100, 200$ et 500 et les trois niveaux nominaux $\alpha = 1\%, 5\%$ et 10% ont été retenus. Le but ultime de cette étape a été donc de confronter les niveaux exacts aux niveaux nominaux considérés.

Dans la seconde étape, d'autres simulations ont été effectuées cette fois-ci pour évaluer la puissance des deux tests sous des hypothèses de dépendances variées. Trois couples de modèles ont été utilisés. Le premier couple est composé de modèles $AR(1)$ sous une condition de dépendance instantanée des erreurs. Le deuxième met aux prises un modèle $AR(1)$ et un modèle de fonction de transfert faisant intervenir les douze valeurs retardées du premier modèle et un autre modèle $AR(1)$ indépendant du premier. Enfin, le troisième couple de modèles est similaire au deuxième excepté que la deuxième composante ne fait intervenir que les six valeurs retardées de la première. Comme dans l'étude de niveau, les simulations ont été exécutées pour les mêmes tailles et les mêmes niveaux nominaux. L'algorithme des simulations n'est pas très différent de celui de la première partie. La principale différence réside dans l'utilisation de deux valeurs critiques pour tester l'hypothèse H_0 , la valeur critique asymptotique notée VCA , et la valeur critique exacte notée VCE . Cette expérience de simulation a permis de relever des résultats intéressants, entre autres, que si la corrélation croisée entre les deux séries est échelonnée sur un long intervalle de délais, la statistique de Koch et Yang, avec certaines valeurs de $i > 0$, est plus puissante que celle de Haugh et aussi que celle de Hong. Par contre, lorsque la corrélation croisée est répartie sur un court intervalle de délais, les tests de Haugh et de Hong sont plus puissants que celui de Koch et Yang avec $i > 0$. Aussi dans cette dernière situation, la puissance du test de Koch et Yang diminue lorsque i augmente.

Enfin, pour toutes ces simulations, les résultats sont présentés de façon brève et l'accent est mis sur leur pertinence. En outre, un texte descriptif de toutes ces simulations est intégré au début de ce deuxième chapitre. Tous les programmes ont été développés dans le langage Fortran 77 et se trouvent dans une disquette jointe à ce mémoire.

Le troisième et dernier chapitre permet de mettre en pratique la méthodologie développée à travers cette étude. Deux exemples sont alors traités et le test de Hong s'avère le plus simple à utiliser en pratique. Il est aussi un peu plus convaincant dans le deuxième exemple.



Chapitre 1

PRÉLIMINAIRES ET PRÉSENTATION DES TESTS D'INDÉPENDANCE

De prime abord, nous estimons qu'il est judicieux de faire un bref survol des principales notions et caractéristiques des séries chronologiques univariées en première partie de ce chapitre. Nous aborderons par la suite la notion de fonction de corrélation croisée et ses propriétés. À la fin du chapitre, seront présentés trois tests d'indépendance entre deux séries chronologiques univariées.



1.1. PRÉLIMINAIRES

Commençons tout d'abord par définir ce qu'est une série chronologique.

Une série chronologique est une suite ordonnée d'observations x_t , chacune d'elles étant associée à un temps spécifique t . Une série chronologique étant une réalisation d'un processus stochastique, nous présenterons dans ce qui suit les principales notions et caractéristiques de base des processus stochastiques.

Définition 1.1.1. *Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire au sens large si*

- ◊ $\mathbb{E}[X_t] = \mu_X(t)$ est indépendante de t ,
- ◊ $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$,
- ◊ $Cov(X_{t+h}, X_t) = \gamma_X(t+h, t)$ est indépendante de t , $h \in \mathbb{Z}$.

Comme $\gamma_X(t+h, t) = \gamma_X(h, 0)$, nous laissons tomber le deuxième argument. La fonction d'autocovariance $\gamma_X(\cdot)$ est alors définie par

$$\gamma_X(h) = Cov(X_{t+h}, X_t), \quad h \in \mathbb{Z},$$

et la fonction d'autocorrélation $\rho_X(\cdot)$ s'écrit par la forme

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = Cor(X_{t+h}, X_t), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Définition 1.1.2. *Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est dit stationnaire au sens strict si la distribution conjointe de $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})'$ est la même que celle de $(X_1, \dots, X_n)'$ notée $(X_{1+h}, \dots, X_{n+h})' \stackrel{L}{=} (X_1, \dots, X_n)'$, $h \in \mathbb{Z}$ et $n \geq 1$.*

Nous attribuons aux processus strictement stationnaires quelques propriétés intéressantes, entre autres, les variables aléatoires X_t sont identiquement distribuées, et par ailleurs, une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid) est stationnaire au sens strict. Il est bon de savoir que si un processus $\{X_t\}$ est stationnaire au sens strict et que

$\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$, il l'est aussi au sens large, mais l'inverse n'est pas vrai.

Soient X_1, \dots, X_n les observations d'une série chronologique. La moyenne échantillonnale est définie par

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t.$$

La fonction d'autocovariance échantillonnale est

$$\hat{\gamma}_X(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{t+h} - \bar{X})(X_t - \bar{X}), & |h| < n, \\ 0, & |h| \geq n. \end{cases}$$

La fonction d'autocorrélation échantillonnale est

$$\hat{\rho}_X(h) = \begin{cases} \frac{\hat{\gamma}_X(h)}{\hat{\gamma}_X(0)}, & |h| < n, \\ 0, & |h| \geq n. \end{cases}$$

Définition 1.1.3. Un processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 , noté $BB(0, \sigma^2)$, si

- ◊ $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $t \in \mathbb{Z}$,
- ◊ $Var(X_t) = \sigma^2$, $t \in \mathbb{Z}$,
- ◊ $Cov(X_{t+h}, X_t) = 0$, t et $h \in \mathbb{Z}$, et $h \neq 0$.

Définition 1.1.4. Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est linéaire causal s'il admet la représentation

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.1)$$

où les ψ_j sont des constantes réelles telles que $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$, et $\{a_t\} \sim BB(0, \sigma^2)$.

Nous précisons qu'un processus linéaire est toujours stationnaire au sens large.

Définition 1.1.5. *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est dit inversible s'il admet la représentation*

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \cdots + a_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + a_t, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.2)$$

où les π_j sont des paramètres réels tels que $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$, et $\{a_t\} \sim BB(0, \sigma^2)$.

Définition 1.1.6. *Le processus $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ est un processus autorégressif-moyenne mobile d'ordre (p, q) , noté $ARMA(p, q)$, de moyenne 0, s'il est stationnaire et si pour tout t ,*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}, \quad (1.1.3)$$

où $\{a_t\} \sim BB(0, \sigma^2)$ et les paramètres ϕ_i et θ_j sont réels, $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$.

L'équation (1.1.3) peut également s'écrire sous la forme

$$\phi(B)X_t = \theta(B)a_t \quad (1.1.4)$$

où $\phi(\cdot)$ et $\theta(\cdot)$ sont respectivement des polynômes de degrés p et q ,

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$$

et

$$\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q$$

et B est l'opérateur retard tel que $B^m X_t = X_{t-m}$, $m \geq 1$ et $B^0 = 1$, l'opérateur identité.

Notons qu'un processus $ARMA(p, q)$ est

- ◇ stationnaire si toutes les racines de $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$ sont à l'extérieur du cercle unité et l'équation (1.1.4) peut s'écrire sous la forme

$$X_t = \psi(B)a_t$$

avec

$$\psi(B) = \phi(B)^{-1}\theta(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j, \quad (1.1.5)$$

◇ inversible si toutes les racines de $\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q$ sont à l'extérieur du cercle unité et alors l'équation (1.1.4) peut s'écrire sous la forme

$$\pi(B)X_t = a_t$$

avec

$$\pi(B) = \theta(B)^{-1}\phi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j. \quad (1.1.6)$$

En outre, deux cas particuliers peuvent se présenter. Le cas où $p = 0$ et le processus $\{X_t\}$ est appelé processus moyenne mobile, noté MA(q), et le cas où $q = 0$ et le processus $\{X_t\}$ est appelé cette fois-ci processus autorégressif, noté AR(p).

1.1.1. La fonction de corrélation croisée

Définition 1.1.7. Soient $\{X_{it} : t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$, deux processus univariés stationnaires de moyennes μ_i , de fonction d'autocovariance et d'autocorrélation $\gamma_X^{(ii)}(h)$ et $\rho_X^{(ii)}(h)$, $h \geq 0$. Les deux processus sont conjointement stationnaires si la fonction de covariance croisée $\text{cov}(X_{1t}, X_{2,t+h})$ est indépendante de t , c'est-à-dire

$$\text{Cov}(X_{1t}, X_{2,t+h}) = \mathbb{E}[(X_{1t} - \mu_1)(X_{2,t+h} - \mu_2)] = \gamma_X^{(12)}(h), \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.7)$$

La fonction de corrélation croisée notée $\rho_X^{(12)}(\cdot)$ est alors définie par

$$\rho_X^{(12)}(h) = \frac{\gamma_X^{(12)}(h)}{\sqrt{\gamma_X^{(11)}(0)\gamma_X^{(22)}(0)}}, \quad h \in \mathbb{Z}. \quad (1.1.8)$$

1.1.2. Estimation de $\gamma_X^{(12)}(\cdot)$ et $\rho_X^{(12)}(\cdot)$

Soient les deux séries observées X_{i1}, \dots, X_{in} , $i = 1, 2$, de moyennes \bar{X}_1 et \bar{X}_2 , $\gamma_X^{(12)}(h)$ la covariance entre X_{1t} et $X_{2,t+h}$, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, est estimée par

$$\hat{\gamma}_X^{(12)}(h) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_{1t} - \bar{X}_1)(X_{2,t+h} - \bar{X}_2), & 0 \leq h \leq n-1, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1-h}^n (X_{1t} - \bar{X}_1)(X_{2,t+h} - \bar{X}_2), & -n+1 \leq h \leq 0, \\ 0, & |h| \geq n. \end{cases} \quad (1.1.9)$$

Compte tenu de (1.1.8) et de (1.1.9), la fonction de corrélation croisée $\rho_X^{(12)}(h)$ est donc estimée par

$$\hat{\rho}_X^{(12)}(h) = \begin{cases} \frac{\hat{\gamma}_X^{(12)}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_X^{(11)}(0)\hat{\gamma}_X^{(22)}(0)}}, & |h| \leq n-1, \\ 0, & |h| \geq n. \end{cases}$$

où $\hat{\gamma}_X^{(ii)}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_{it} - \bar{X}_i)^2$, $i = 1, 2$.

Les covariances et corrélations croisées échantillonales sont aussi définies pour des séries de longueurs différentes. Le symbole n représente alors le nombre de dates consécutives lors desquelles les deux variables ont été observées.

Notons au passage une propriété importante des fonctions de covariance et de corrélation croisées, à savoir que

$$\gamma_X^{(12)}(h) = \gamma_X^{(21)}(-h) \quad \text{et} \quad \rho_X^{(12)}(h) = \rho_X^{(21)}(-h).$$

1.1.3. La distribution asymptotique des corrélations croisées

Nous avons le résultat suivant (voir Brockwell & Davis, 1996, p 229).

Théorème 1.1.1. *Soient deux processus linéaires causals $\{X_{it} : t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$, définis par*

$$X_{1t} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{1j} a_{1,t-j}, \quad \{a_{1t}\} \sim BB(0, \sigma_1^2),$$

et

$$X_{2t} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{2j} a_{2,t-j}, \quad \{a_{2t}\} \sim BB(0, \sigma_2^2),$$

où $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$ sont indépendants, $\sum_j |\psi_{1j}| < \infty$ et $\sum_j |\psi_{2j}| < \infty$.

Alors, pour tout entiers h et k distincts, $|h|, |k| \leq n-1$, les variables aléatoires $\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)}(h)$ et

$\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)}(k)$ suivent asymptotiquement une loi normale de moyenne 0, de variance

$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \rho_X^{(11)}(\nu)\rho_X^{(22)}(\nu)$ et de covariance $\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \rho_X^{(11)}(\nu)\rho_X^{(22)}(\nu+k-h)$.

Il est intéressant de remarquer que même dans le cas de deux séries stationnaires indépendantes, la variance asymptotique d'une corrélation croisée échantillonnale est complexe et fait intervenir les autocorrélations à tous les délais de chacune des deux séries.

Cependant, si l'une des deux séries est un bruit blanc, disons la première, alors $\rho_X^{(11)}(\nu) = 0$, $\forall \nu \neq 0$ et $Var_{asym}(\hat{\rho}_X^{(12)}(h)) = \rho_X^{(22)}(0) = 1$. Si les deux séries sont des bruits blancs, alors $\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)}(h)$ et $\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)}(k)$ sont asymptotiquement indépendantes et identiquement distribuées $N(0, 1)$.

Considérons maintenant un vecteur de corrélations croisées estimées de $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$,

$$\hat{\rho}_X^{(12)} = (\hat{\rho}_X^{(12)}(h_1), \dots, \hat{\rho}_X^{(12)}(h_m))',$$

où $|h_i| \leq n - 1$, $i = 1, \dots, m$. Sous l'hypothèse d'indépendance et par analogie au théorème (1.1.1), nous avons

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)} \xrightarrow{L} N_m(\mathbf{0}, \Sigma_m), \quad (1.1.10)$$

(lire $\sqrt{n}\hat{\rho}_X^{(12)}$ converge en loi vers $N_m(\mathbf{0}, \Sigma_m)$), où la matrice $\Sigma = (\sigma_{kl})$ de dimension $m \times m$ avec $\sigma_{kl} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \rho_X^{(11)}(\nu)\rho_X^{(22)}(\nu+l-k)$ représente la covariance asymptotique entre $\hat{\rho}_X^{(12)}(k)$ et $\hat{\rho}_X^{(12)}(l)$.

Dans le cas particulier où les deux séries sont des bruits blancs, c'est-à-dire $\{X_{it}\} = \{a_{it}\}$, $i = 1, 2$, la relation (1.1.10) devient

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_a^{(12)} \xrightarrow{L} N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m), \quad (1.1.11)$$

où \mathbf{I}_m est la matrice identité de dimension m .

En pratique, les valeurs des bruits blancs $\{a_t\}$ sont inconnues et sont déduites de la modélisation des deux séries observées par un modèle autorégressif-moyenne mobile. Plus précisément, une fois les deux séries $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ identifiées individuellement par un modèle autorégressif-moyenne mobile (après d'éventuelles différenciations et autres transformations), les paramètres ϕ_i et θ_j peuvent être estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Ainsi, nous obtenons les modèles estimés suivants

$$\hat{\phi}(B)X_{it} = \hat{\theta}(B)\hat{a}_{it}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad i = 1, 2,$$

où $\hat{\phi}(B) = 1 - \hat{\phi}_1 B - \dots - \hat{\phi}_p B^p$, $\hat{\theta}(B) = 1 - \hat{\theta}_1 B - \dots - \hat{\theta}_q B^q$ et \hat{a}_{it} l'estimateur de a_{it} , est appelé le résidu associé à l'observation X_{it} .

Ceci nous permet de calculer $\hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)} = (\hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)}(h_1), \dots, \hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)}(h_m))'$, le vecteur des corrélations croisées des séries résiduelles $\{\hat{a}_{it}\}$, $i = 1, 2$.

Haugh(1976) a démontré le résultat suivant dans le cas de deux séries ARMA.

Théorème 1.1.2. *Considérons n observations de deux processus ARMA conjointement stationnaires inversibles, $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$, c'est-à-dire*

$$\phi_i(B)X_{it} = \theta_i(B)a_{it}, \quad i = 1, 2,$$

où $\{a_{it}\}$, $i = 1, 2$ sont les processus innovation correspondants. Si les deux séries sont indépendantes, alors $\sqrt{n}\hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)}$ et $\sqrt{n}\hat{\rho}_a^{(12)}$ ont la même distribution asymptotique $N_m(\mathbf{0}, \mathbf{I}_m)$, où $\hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)} = (\hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)}(h_1), \dots, \hat{\rho}_{\hat{a}}^{(12)}(h_m))'$, $\hat{\rho}_a^{(12)} = (\hat{\rho}_a^{(12)}(h_1), \dots, \hat{\rho}_a^{(12)}(h_m))'$ et h_1, h_2, \dots, h_m des entiers tels que $|h_i| \leq M < n - 1$ où M est indépendant de n .

1.2. PRÉSENTATION DES TESTS D'INDÉPENDANCE

Pour tester l'indépendance entre deux séries univariées, nous proposons trois approches développées respectivement par Haugh (1976), Koch et Yang (1986) et Hong (1996).

1.2.1. Test de Haugh

Le test d'indépendance de Haugh se base sur l'analyse univariée des corrélations croisées résiduelles. Cette approche part de l'idée que tester l'indépendance entre deux séries conjointement stationnaires $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ revient à tester l'indépendance des bruits blancs $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$. Ceci fait l'objet de la proposition suivante de Haugh (1976).

Proposition 1.2.1. *Soient deux processus $\{X_{it}\}$, $i = 1, 2$, conjointement stationnaires, et soient $\rho_X^{(12)}(\cdot)$ la fonction de corrélations croisées des deux processus $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ et $\rho_a^{(12)}(\cdot)$ la fonction de corrélations croisées de leurs bruits blancs respectifs $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$. Sous l'hypothèse*

d'indépendance, nous avons l'équivalence suivante

$$\rho_X^{(12)}(h) = 0, \quad h \in \mathbb{Z} \iff \rho_a^{(12)}(h) = 0, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

En conséquence de la proposition 1.2.1 et du théorème 1.1.2, Haugh a défini la statistique suivante

$$Q_{HA}(M) = n \sum_{h=-M}^M (\hat{\rho}_a^{(12)}(h))^2.$$

Sous l'hypothèse d'indépendance $H_0 : \rho_a^{(12)}(h) = 0, \forall h \in \mathbb{Z}$, la statistique de Haugh suit asymptotiquement une distribution khi deux avec $2M + 1$ degrés de liberté. Ainsi, nous rejetons l'hypothèse d'indépendance au niveau de signification α si Q_{HA} est supérieure à $\chi_{2M+1, 1-\alpha}^2$, où $\chi_{dl, p}^2$ représente le quantile d'ordre p d'une loi khi deux à dl degrés de liberté.

Dans le cas où n est petit et M relativement grand, Haugh (1976) a proposé la statistique modifiée

$$Q_{HA}^*(M) = n^2 \sum_{h=-M}^M (n - |h|)^{-1} (\hat{\rho}_a^{(12)}(h))^2.$$

Sa loi asymptotique sous H_0 est aussi χ_{2M+1}^2 et cette dernière fournit une meilleure approximation de la loi exacte lorsque n est petit.

1.2.2. Test de Koch et Yang

Le test d'indépendance de Koch et Yang (1986) emprunte pour l'essentiel la démarche entreprise par Haugh, tout en relevant cependant un inconvénient contenu dans ce dernier. En effet, comme la statistique de Haugh est basée sur le carré des corrélations croisées, elle ne peut prendre en compte une dépendance entre deux séries qui se traduit par plusieurs corrélations croisées consécutives de faible amplitude mais de même signe. Pour pallier à cet inconvénient, Koch et Yang ont développé le test suivant

$$Q_{KY}(M, i) = n \sum_{h=-M}^{M-i} \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(h+k) \right]^2; \quad (1.2.1)$$

pour $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$.

Remarquons que pour $i = 0$, nous obtenons la statistique

$$Q_{KY}(M, 0) = n \sum_{h=-M}^M (\hat{\rho}_a^{(12)}(h))^2,$$

qui n'est autre que la statistique de Haugh. Dans le cas où $i = 1$, nous obtenons

$$Q_{KY}(M, 1) = n \sum_{h=-M}^{M-1} \left[\hat{\rho}_a^{(12)}(h) + \hat{\rho}_a^{(12)}(h+1) \right]^2.$$

Cette statistique prendra une plus grande valeur que $Q_{HA}(M)$ en présence de plusieurs corrélations croisées de même signe. C'est un résultat fort intéressant auquel Koch et Yang sont arrivés, dans la mesure où le calcul de $Q_{KY}(M, i)$ pour les différentes valeurs de i , nous permet d'explorer le type de relations qui pourraient alors lier les différentes corrélations croisées successives.

Il existe aussi une version modifiée de la statistique de Koch et Yang, à l'instar de la statistique de Haugh, et s'écrit comme

$$Q_{KY}^*(M, i) = n^2 \sum_{h=-M}^{M-i} \left[\sum_{k=0}^i \frac{\hat{\rho}_a^{(12)}(h+k)}{\sqrt{(n-|h+k|)}} \right]^2. \quad (1.2.2)$$

La statistique $Q_{KY}(M, i)$ définie par (1.2.1) peut aussi s'écrire comme une forme quadratique en le vecteur des corrélations croisées résiduelles

$$\hat{\rho}_a^{(M)} = (\hat{\rho}_a(-M), \dots, \hat{\rho}_a(0), \dots, \hat{\rho}_a(M))'. \quad (1.2.3)$$

Proposition 1.2.2. *La statistique de Koch et Yang (1.2.1) peut s'écrire*

$$Q_{KY}(M, i) = (n)(\hat{\rho}_a^{(M)})' A_i (\hat{\rho}_a^{(M)}), \quad (1.2.4)$$

où $A_i = C_i' C_i$ est une matrice symétrique de dimension $(2M + 1)$ et C_i est de dimension $(2M + 1 - i) \times (2M + 1)$, chacune de ses colonnes étant composée de $(i + 1)$ 1 et de $(2M - i)$ 0, comme suit :

$$C_i = \begin{bmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1 \dots 1}^{i \text{ fois } 1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2M+1-i) \times (2M+1).$$

Démonstration.

Nous avons

$$C_i \hat{\rho}_a^{(M)} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 & 1 & 1 \dots 1}^{i \text{ fois } 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_a^{(12)}(-M) \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1) \\ \vdots \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1) \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(M) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\rho}_a^{(12)}(-M) + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1) + \dots + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+i) \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1) + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+2) + \dots + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+i+1) \\ \vdots \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1-i) + \dots + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-2) + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1) \\ \hat{\rho}_a^{(12)}(M-i) + \dots + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1) + \hat{\rho}_a^{(12)}(M) \end{bmatrix}.$$

D'où, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
n(C_i \hat{\rho}_a^{(M)})'(C_i \hat{\rho}_a^{(M)}) &= n \left\{ \left[\hat{\rho}_a^{(12)}(-M) + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1) + \cdots + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+i) \right]^2 \right. \\
&+ \left[\hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1) + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+2) + \cdots + \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+i+1) \right]^2 \\
&+ \cdots + \left[\hat{\rho}_a^{(12)}(M-1-i) + \cdots + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-2) + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1) \right]^2 \\
&\left. + \left[\hat{\rho}_a^{(12)}(M-i) + \cdots + \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1) + \hat{\rho}_a^{(12)}(M) \right]^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
n(C_i \hat{\rho}_a^{(M)})'(C_i \hat{\rho}_a^{(M)}) &= n \left\{ \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+k) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(-M+1+k) \right]^2 + \cdots + \right. \\
&+ \left. \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(M-1-i+k) \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(M-i+k) \right]^2 \right\} \\
&= (n) \sum_{h=-M}^{M-i} \left[\sum_{k=0}^i \hat{\rho}_a^{(12)}(h+k) \right]^2,
\end{aligned}$$

et la démonstration est complétée.

1.2.3. La distribution de la statistique de Koch et Yang

Dans la première partie de cette section nous montrons d'abord que la distribution asymptotique de la statistique de Koch et Yang est celle d'une combinaison linéaire de variables aléatoires khi deux indépendantes et dans la deuxième partie, nous décrivons l'algorithme d'Imhof qui permet d'évaluer de façon exacte cette dernière distribution.

1.2.3.1. La distribution asymptotique de $Q_{KY}(M, i)$

De (1.2.4), il est intéressant de voir que pour $i = 0$, le test de Koch et Yang coïncide avec le test de Haugh :

$$Q_{KY}(M, 0) = n(\hat{\rho}_a^{(M)})' A_0 (\hat{\rho}_a^{(M)}) = n(\hat{\rho}_a^{(M)})' (\hat{\rho}_a^{(M)}),$$

car

$$A_0 = C_0' C_0 = I_{2M+1},$$

et ainsi $Q_{KY}(M, 0)$ suit asymptotiquement une loi χ_{2M+1}^2 . Cependant les choses se compliquent pour les cas $i > 0$, car les valeurs propres de la matrice A_i ne sont pas toutes égales à 1.

Illustrons ce constat pour $i = 1$. La matrice C_1' est alors égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où A_1 est égale à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est clair que les valeurs propres de A_1 ne sont pas toutes égales à 1 car elle est différente de la matrice identité. Par conséquent la loi asymptotique de $Q_{KY}(M, i)$ ne sera pas en général une loi khi deux. Ceci découle du théorème suivant (voir Graybill, 1976, p. 136).

Théorème 1.2.1. *Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)'$ un vecteur aléatoire qui suit une loi multinormale $N_d(\mathbf{0}, \Sigma)$ où Σ est une matrice de rang d et soit \mathbf{A} une matrice symétrique de dimension d . La forme quadratique $\mathbf{Y}'\mathbf{A}\mathbf{Y}$ a la même distribution que la variable aléatoire $U = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^2$, où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}\Sigma$, et où Z_1, Z_2, \dots, Z_n sont des variables aléatoires iid selon la loi $N(0, 1)$.*

Nous avons aussi besoin du résultat suivant sur la convergence d'une suite transformée de vecteurs aléatoires (Ferguson, 1996, section 6).

Soient $\mathbf{Y}_n, n = 1, 2, \dots$, une suite de vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^M telle que $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{L} \mathbf{Y}$ où \mathbf{Y} est aussi un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^M .

Théorème 1.2.2. *Soit $g : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction continue. Si $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{L} \mathbf{Y}$, alors*

$$g(\mathbf{Y}_n) \xrightarrow{L} g(\mathbf{Y}).$$

Théorème 1.2.3. *La loi asymptotique de $Q_{KY}(M, i)$ est la même que celle de*

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z_i^2,$$

où les Z_i sont iid selon la loi $N(0, 1)$ et les λ_i sont les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} .

Démonstration

On pose $\mathbf{Y}_n = \hat{\rho}_a^{(M)}$. Soit la fonction $g : \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\mathbf{A}_i\mathbf{y}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^M.$$

La fonction $g(\cdot)$ est continue et par le théorème 1.1.2, $\mathbf{Y}_n \xrightarrow{L} \mathbf{Y}$ où $\mathbf{Y} \sim N_M(\mathbf{0}, \Sigma)$. Ainsi, nous avons $Q_{KY}(M, i) = g(\mathbf{Y}_n) \xrightarrow{L} g(\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}'\mathbf{A}_i\mathbf{Y}$ et la loi de $\mathbf{Y}'\mathbf{A}_i\mathbf{Y}$ est donnée par le théorème 1.2.1. Ce qui complète la démonstration.

1.2.3.2. L'algorithme d'Imhof

Un algorithme développé par Imhof(1961) permet de calculer la distribution exacte d'une forme quadratique Q composée de variables normales qui en fait celle d'une combinaison linéaire de variables khi deux indépendantes.

Le cadre d'application de cet algorithme peut se résumer à la démarche suivante. Soit \mathbf{X} un vecteur aléatoire suivant une loi multinormale $N_l(\mathbf{0}, \Sigma)$ où Σ est de plein rang. Afin de calculer la distribution de la forme quadratique $Q = \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ où \mathbf{A} est une matrice symétrique, posons $\mathbf{Y} = (\Sigma)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$, $\mathbf{Y} \sim N_l(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ et si $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_l)'$, alors ses composantes Y_i sont indépendantes et suivent une loi $N(0, 1)$. Nous savons que

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X} \\ &= \mathbf{Y}'(\Sigma)^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}(\Sigma)^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Y}'\boldsymbol{\beta}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

La matrice $\boldsymbol{\beta} = \Sigma^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\Sigma^{\frac{1}{2}}$ étant symétrique, il existe donc une matrice \mathbf{P} orthogonale telle que $\mathbf{P}'\boldsymbol{\beta}\mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\beta}$ que nous supposons toutes distinctes pour le moment. Posons $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_l)' = \mathbf{P}'\mathbf{Y}$. Alors la forme quadratique Q peut s'écrire

$$\begin{aligned} Q &= \mathbf{Y}'\mathbf{P}'\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)\mathbf{P}'\mathbf{Y} \\ &= \mathbf{Z}'\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)\mathbf{Z} \\ &= \sum_{i=1}^l \lambda_i Z_i^2. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Le vecteur \mathbf{Z} étant $N_l(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, en conséquence les Z_i sont *iid* $N(0, 1)$.

En général, les valeurs propres de la matrice \mathbf{A} ne sont pas toutes distinctes, donc de multiplicité supérieure ou égale à 1. Notons les valeurs propres distinctes par $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ de multiplicité

respectives, n_1, \dots, n_m telles que $n_1 + \dots + n_m = l$. La relation (1.2.5) est alors équivalente à

$$Q = \sum_{j=1}^m \lambda_j U_j,$$

où les U_j sont des variables aléatoires khi deux indépendantes de degré de liberté n_j , $j = 1, \dots, m$. L'algorithme d'Imhof repose sur l'inversion de la fonction caractéristique.

Définition 1.2.1. Soit $F(x)$ une fonction de répartition. Sa fonction caractéristique correspondante est définie par :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} dF(x). \quad (1.2.6)$$

Si $F(x)$ est continue et possède une dérivée $f(x)$ continue, alors (1.2.6) devient

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x) dx. \quad (1.2.7)$$

Par ailleurs, la fonction de répartition $F(x)$ peut être exprimée à partir de sa fonction caractéristique $\Phi(t)$ en utilisant la formule d'inversion de Gil-Peleaz (1951). Ce qui donne

$$\begin{aligned} P[Q \leq x] &= F(x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{itx} \phi(-t) - e^{-itx} \phi(t)}{it} dt \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} I\{e^{-itx} \phi(t)\} dt. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Dans la relation (1.2.8), le terme $I\{e^{-itx} \phi(t)\}$ qui reste à évaluer, désigne la partie imaginaire du nombre complexe $e^{-itx} \phi(t)$. Son calcul dont le développement est donné par Koerts et Abrahamse (1969) aboutit, en posant $u = 2t$, à

$$F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \varepsilon(u)}{u \gamma(u)} du, \quad (1.2.9)$$

où

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [n_j t g^{-1}(\lambda_j u)] - \frac{1}{2} x u, \quad (1.2.10)$$

et

$$\gamma(u) = \prod_{j=1}^m (1 + \lambda_j^2 u^2)^{\frac{1}{4} n_j}. \quad (1.2.11)$$

où $t g^{-1}(\cdot)$ désigne la fonction tangente inverse.

Nous savons aussi que

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon(u)}{u \gamma(u)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j n_j - \frac{1}{2} x. \quad (1.2.12)$$

Comme $u \gamma(u)$ croît de façon monotone vers l'infini, l'intégrale de (1.2.9) sera donc calculé sur l'intervalle fini $0 \leq u \leq U$. Pour $u = 0$, la limite est déduite de (1.2.12).

Deux types d'erreurs sont alors à contrôler : l'erreur d'intégration et l'erreur de troncation. La première notée I_U est donnée par

$$I_U = \frac{1}{\pi} \int_0^U \frac{\sin \varepsilon(u)}{u \gamma(u)} du. \quad (1.2.13)$$

Koerts et Abrahamse (1969) ont utilisé la règle de Simpson, qui permet d'intégrer une fonction $f(x)$ sur un intervalle fermé $[a, b]$ en divisant cet intervalle en de petites parties égales, pour calculer l'intégrale I_U .

L'erreur de troncation est identifiée par

$$t_U = \frac{1}{\pi} \int_U^\infty \frac{\sin \varepsilon(u)}{u \gamma(u)} du. \quad (1.2.14)$$

La valeur absolue de t_U possède une borne supérieure T_U et est égale à

$$T_U^{-1} = \pi k U^k \prod_{j=1}^m |\lambda_j|^{\frac{1}{2} n_j}, \quad (1.2.15)$$

où $k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m n_j$.

Comme nous le constatons, tout dépend des valeurs de I_U et T_U que nous sommes près à supporter. En pratique, Koerts et Abrahamse (1969, p.157-158) suggèrent de retrouver leurs valeurs selon des procédures itératives afin de s'approcher de leurs valeurs fixées à l'avance.

1.2.4. Test de Hong

Le test statistique de Hong (1996) constitue une version standardisée de la somme pondérée des carrés des corrélations croisées des résidus, où les pondérations dépendent d'une fonction de noyau et d'un point de troncature. À ce propos, le test de Haugh (1976) peut être vu comme un cas particulier du test en utilisant le noyau uniforme tronqué. Hong s'appuie sur la notion de puissance d'un test pour motiver sa démarche, arguant qu'il existe d'autres noyaux qui conduisent à des tests plus puissants que celui de Haugh. Ceci dit, nous retraçons les points marquants de cette démarche.

1.2.4.1. La statistique de Hong

Hong a considéré le contexte plus général de deux séries générées par des processus stationnaires admettant une représentation autorégressive d'ordre infini, notée $AR(\infty)$. La classe des processus $AR(\infty)$ englobe la classe des processus $ARMA(p, q)$ stationnaires et inversibles par (1.1.2) et (1.1.6). Dans la première partie de cette section, nous introduisons cette nouvelle statistique et dans la deuxième, nous décrivons sa loi asymptotique sous l'hypothèse d'indépendance des deux séries.

Le travail de Hong repose sur l'hypothèse générale suivante.

Hypothèse 1.2.1. *Les deux processus $\{X_{it} : t \in \mathbb{Z}\}$, $i = 1, 2$, sont deux processus linéaires tels que*

$$X_{it} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij} a_{i,t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où

- i) $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$ sont deux séquences iid avec $\mathbb{E}[a_{it}] = 0$, $\mathbb{E}[a_{it}^2] = \sigma_i^2$, $\mathbb{E}[a_{it}^4] < \infty$, $i = 1, 2$;
- ii) les ψ_{ij} sont des paramètres réels tels que $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_{ij}| < \infty$ avec $\psi_{i0} = 1$, $i = 1, 2$;
- iii) les racines de $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij} z^j$, $i = 1, 2$, sont supérieures à 1, en module.

Sous la condition iii), les processus $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ admettent des représentations autorégressives d'ordre infini ($AR(\infty)$) qui s'écrivent

$$\Phi_i(B)X_{it} = a_{it}, \quad i = 1, 2,$$

où

$$\Phi_i(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \phi_{ij} B^j = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{ij} B^j \right\}^{-1}, \quad i = 1, 2.$$

Par la suite, les deux séries $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ sont modélisées par la méthode des moindres carrés à l'aide de deux modèles $AR(p_1)$ et $AR(p_2)$ respectivement.

Notons

$$\mathbf{X}_{it}(p_i) = (X_{1,t-1}, \dots, X_{1,t-p_i})', \quad i = 1, 2$$

et

$$\phi_i(p_i) = (\phi_{i1}, \dots, \phi_{ip_i})'.$$

En utilisant X_{i1}, \dots, X_{ip_i} comme valeurs initiales, l'estimateur des moindres carrés conditionnels de $\phi_i(p_i)$ est donné par

$$\hat{\phi}_i(p_i) = \left\{ \sum_{t=p_i+1}^n \mathbf{X}_{it}(p_i) \mathbf{X}_{it}(p_i)' \right\}^{-1} \sum_{t=p_i+1}^n \mathbf{X}_{it}(p_i) X_{it}, \quad i = 1, 2, \quad (1.2.16)$$

et les résidus correspondants par

$$\hat{a}_{it} = X_{it} - \hat{\phi}_i(p_i)' \mathbf{X}_{it}(p_i). \quad (1.2.17)$$

Hypothèse 1.2.2. La fonction $w : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est symétrique, continue en 0, a au plus un nombre fini de points de discontinuité, $w(0) = 1$ et $\int_{-\infty}^{\infty} w^2(z) dz < \infty$.

Cette classe inclut les noyaux les plus fréquemment utilisés en analyse spectrale (voir Priestley (1981)) :

$$\text{Noyau uniforme tronqué : } w(z) = \begin{cases} 1 & , |z| \leq 1, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Bartlett : } w(z) = \begin{cases} 1 - |z| & , |z| \leq 1, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\text{Daniell : } w(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Parzen : } w(z) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{\pi z}{6}\right)^2 + 6\left|\left(\frac{\pi z}{6}\right)\right|^3 & , |z| \leq \frac{3}{\pi}, \\ 2\left(1 - \left|\frac{\pi z}{6}\right|\right)^2 & , \frac{3}{\pi} \leq |z| \leq \frac{6}{\pi}, \\ 0 & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

En plus d'un noyau, la statistique de Hong fait intervenir une suite de points de troncature $\{T_n\}$ qui tend vers $+\infty$ mais moins rapidement que n , c'est-à-dire qui satisfait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1.2.3. La suite $\{T_n\}$ est telle que

- $T_n > 0, n \geq 1,$
- et lorsque $n \rightarrow \infty,$
- $T_n \rightarrow \infty,$
- $\frac{T_n}{n} \rightarrow 0.$

La statistique de Hong est définie par

$$Q_{HO}(w, T_n) = \frac{n \sum_{h=1-n}^{n-1} w^2(h/T_n) (\hat{\rho}_a^{(12)}(h))^2 - S_n(w)}{\{2D_n(w)\}^{1/2}}, \quad (1.2.18)$$

où

$$S_n(w) = \sum_{h=1-n}^{n-1} (1 - |h|/n) w^2(h/T_n), \quad (1.2.19)$$

$$D_n(w) = \sum_{h=2-n}^{n-2} (1 - |h|/n)(1 - (|h| + 1)/n) w^4(h/T_n). \quad (1.2.20)$$

Selon Hong (1996), nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(w)}{T_n} = S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} w^2(z) dz$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n(w)}{T_n} = D(w) = \int_{-\infty}^{\infty} w^4(z) dz.$$

Donc, pour n grand, nous avons les approximations suivantes :

$$S_n(w) \simeq T_n S(w)$$

et

$$D_n(w) \simeq T_n D(w).$$

Ce qui donne lieu à la statistique modifiée

$$Q_{HO}^*(w, T_n) = \frac{n \sum_{h=1-n}^{n-1} w^2(h/T_n) (\hat{\rho}_a^{(12)}(h))^2 - T_n S(w)}{\{2T_n D(w)\}^{1/2}}, \quad (1.2.21)$$

dont la loi asymptotique est identique à celle de $Q_{HO}(w, T_n)$. En faisant abstraction des facteurs de standardisation $S_n(w)$ et $D_n(w)$, la statistique de Haugh, comme on le constate à partir de (1.2.18), constitue donc un cas particulier de $Q_{HO}(w, T_n)$ en choisissant le noyau uniforme tronqué.

1.2.4.2. La distribution asymptotique sous H_0

À la différence de Haugh qui modélisent X_{1t} et X_{2t} par des ARMA, Hong les approxime par des modèles autorégressifs d'ordre fini, $AR(p_i)$, $i = 1, 2$, et laisse p_i tendre vers l'infini avec n la taille de l'échantillon, mais moins rapidement que n . Ceci contribue à ce que \hat{a}_{1t} et \hat{a}_{2t} soient plus conformes à a_{1t} et a_{2t} respectivement.

Le théorème suivant est démontré dans Hong (1996). La notation $o(\cdot)$ est la notation usuelle sur les ordres de convergence de suite de nombres réels.

Théorème 1.2.4. *Supposons que les hypothèses 1.2.1, 1.2.2 et 1.2.3 sont satisfaites et que les ordres autorégressifs p_1 et p_2 satisfont les conditions suivantes :*

$$p_i = o\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{T_n^{\frac{1}{4}}}\right), \quad n \sum_{j=p_i+1}^{\infty} \phi_{ij}^2 = o\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{T_n^{\frac{1}{4}}}\right), \quad i = 1, 2.$$

Sous l'hypothèse H_0 que les deux processus innovation $\{a_{1t}\}$ et $\{a_{2t}\}$ sont indépendants, nous avons

$$Q_{HO}(w, T_n) \xrightarrow{L} N(0, 1). \quad (1.2.22)$$

En clair, la condition $p_1 = o\left(\frac{n^{1/2}}{T_n^{1/4}}\right)$ signifie que p_1 ne doit pas augmenter trop rapidement, c'est-à-dire à une vitesse inférieure à $\frac{n^{1/2}}{T_n^{1/4}}$. Par contre, $n \sum_{j=p_1+1}^{\infty} \phi_{1j}^2 = o\left(\frac{n^{1/2}}{T_n^{1/4}}\right)$ suppose que p_1

ne doit pas augmenter trop lentement, dans le but de minimiser l'impact du biais de l'approximation du modèle $AR(\infty)$ pour X_{1t} par un $AR(p_1)$. En règle générale, quand les ϕ_{1j} déclinent rapidement vers 0, les conditions sur p_1 sont satisfaites. Ces explications sont aussi valables pour p_2 .

D'après la forme de la statistique de Hong, l'hypothèse H_0 est rejetée pour les grandes valeurs. Au niveau α , l'hypothèse H_0 sera donc rejetée si

$$Q_{HO}(w, T_n) > z_{1-\alpha}$$

où z_p est le quantile d'ordre p de la loi $N(0, 1)$.

Hong (1996) a aussi étudié la puissance de sa classe de tests et a montré que pour une alternative fixée de corrélation sérielle de forme quelconque entre les deux séries, le noyau de Daniell fournit le test asymptotiquement le plus puissant dans la classe des tests de la forme $Q_{HO}(w, T_n)$.

Chapitre 2

DESCRIPTION DES SIMULATIONS ET ANALYSE DES RÉSULTATS

Dans le chapitre précédent, nous avons décrit les tests de Koch et Yang (1986) et celui de Hong (1996) afin de vérifier l'indépendance de deux séries stationnaires. Dans ce chapitre, nous décrivons des simulations de Monte Carlo afin d'étudier le niveau exact et la puissance de ces tests. Le but de l'étude de niveau est de vérifier si la distribution exacte de chaque statistique de test est approximée de façon satisfaisante par la distribution asymptotique correspondante. Dans l'étude de puissance, différentes alternatives de corrélation sérielle entre les deux séries sont considérées. Nous avons alors, à analyser les pourcentages de rejet de l'hypothèse de l'indépendance des deux séries considérées et ce pour chacun des deux tests avec trois différents niveaux nominaux (1, 5 et 10%) combinés à trois tailles différentes ($n = 100, 200$ et 500).

Notons toutefois que seule la version modifiée du test de Koch et Yang a été prise en compte dans ces simulations, du fait que ses valeurs donnent des niveaux empiriques plus proches des niveaux nominaux que la version non modifiée.

Les simulations ont été effectuées à l'aide de programmes informatiques en langage Fortran avec la librairie NAG version Mark 16. Le progiciel S-Plus a été utilisé pour les représentations graphiques. Enfin les prototypes des programmes utilisés pour faire ces simulations sont fournies dans une disquette annexée à ce mémoire.

2.1. CONTRÔLE DU NIVEAU

Les simulations portent sur 10 000 réalisations de couples de séries $AR(1)$ ou $MA(1)$ indépendantes. Afin d'alléger cette partie, certaines analyses et certains commentaires ne portent que sur le cas $AR(1)$ quand la démarche est identique dans le cas $MA(1)$.

2.1.1. Algorithmes des simulations

Modèles utilisés

Nous avons considéré les deux modèles donnés par le tableau suivant :

Modèle	Équation	Σ_a
AR(1)	$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 \\ 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$
MA(1)	$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_{11} & 0 \\ 0 & -\theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$

TABLEAU 2.1.1. Modèles utilisés dans l'étude de niveau.

où les variables a_{1t} et a_{2t} sont identiquement et indépendamment distribués selon la loi $N(0, 1)$. Nous avons affecté aux paramètres des modèles les valeurs $\phi_{11} = \phi_{22} = \theta_{11} = \theta_{22} = 0.5$, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 1$ et $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$.

Description de l'algorithme

Plus précisément, le processus d'élaboration de chaque réalisation suit les étapes suivantes.

Étape 1 : Générer un couple de séries $AR(1)$ univariées et indépendantes. En fait, nous générons un couple de séries de bruits blancs $N(0, 1)$ indépendantes, à l'aide du sous programme NAG **G05EAF**, duquel nous construisons de façon récursive nos deux séries $AR(1)$ univariées, de longueur initiale de 800 observations. Ces deux séries sont alors amputées des 700, 600 et 300 premières observations pour obtenir des séries de longueur respectivement de 100, 200 et 500, afin de préserver la stationnarité. Ceci est valable pour le cas $AR(1)$, pour le cas $MA(1)$, la

génération des séries des bruits blancs sont de longueur 101, 201 et 501 respectivement, car on a besoin d'une valeur initiale a_0 .

Étape 2 : Estimation des paramètres des modèles décrivant les séries générées. Pour le test de Koch et Yang, l'estimation est faite par la méthode de la vraisemblance maximale exacte pour chacune des deux séries avec le sous programme NAG **G13DCF**. Par contre, pour le test de Hong, chaque série est modélisée par un modèle $AR(p)$, l'ordre p est obtenu par minimisation du critère AIC d'Akaike avec $1 \leq p \leq 12$ suite à une estimation par la méthode des moindres carrés ordinaires avec le sous programme **G13AFF**. Les résidus obtenus ont été utilisés pour le calcul des corrélations croisées, objet de l'étape suivante.

Étape 3 : Calcul des corrélations croisées des séries résiduelles, à l'aide du sous programme **G13BCF**.

Étape 4 : Calcul des statistiques $Q_{KY}^*(M, i)$ selon l'équation (1.2.2) et de $Q_{HO}(w, T_n)$ selon l'équation (1.2.18). Notons que $Q_{HO}(w, T_n)$ a été calculée pour quatre noyaux : **Bartlett**, **Daniell**, **Parzen** et le **noyau uniforme tronqué**.

Étape 5 : À l'inverse de la distribution asymptotique de $Q_{HO}(w, T_n)$ qui est simple à déterminer soit la distribution $N(0, 1)$, celle de $Q_{KY}^*(M, i)$ est plus compliquée. Le sous programme **G01JDF** basée sur l'algorithme d'Imhof permet de calculer sa distribution. L'emploi de cette dernière nécessite le calcul des valeurs propres de la matrice $A_i = C_i' C_i$ par le sous programme **F02FAF**.

Étape 6 : Pour chaque test, nous vérifions s'il y a rejet de l'hypothèse nulle d'indépendance. Un compteur est introduit à cet effet, qui nous aidera à évaluer le nombre total de rejets pour toutes les itérations effectuées, et ce pour les trois niveaux nominaux. Cette étape met fin à la boucle d'itérations, en clair, les étapes 1, 2, 3, 4, 5 et 6 seront répétées 10 000 fois.

Étape 7 : Calculer les pourcentages de rejets pour les deux tests. Cette étape nous permet aussi de calculer les percentiles des statistiques des deux tests correspondants aux trois niveaux

nominaux considérés, qui serviront quant à eux aux calculs des puissances des tests selon la valeur critique "exacte".

2.1.2. Analyse des résultats

Comme il a été souligné au début de ce chapitre, nous avons considéré d'une part, les trois niveaux nominaux 1%, 5% et 10% et d'autre part les délais $T_n = 3, 6, 12, 18$ et 24 pour le test de Hong, et les délais $M = 6, 12, 18$ et 24 pour le test Koch et Yang. Les résultats complets de ces simulations se trouvent dans les tableaux 2.1.2 à 2.1.7. Dans ces tableaux, le paramètre S correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang. Pour avoir une vision plus révélatrice de ces derniers, nous avons tracé les graphiques contenus dans les figures 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 pour les deux tests, chacun avec un couple de modèles $AR(1)$ et $MA(1)$ indépendants et de même longueur 200 (les autres graphiques sont fournis en annexe). Ces derniers retracent les niveaux empiriques avec leurs limites de signification à 5% représentées par des lignes en pointillées.

Ainsi, nous pouvons très facilement juger si le niveau empirique obtenu est significativement différent au seuil de signification 5%. Autrement dit, à l'aide de ces graphiques, nous ne faisons que tester si la différence entre le niveau empirique et le niveau asymptotique est significativement différente de 0 au seuil 5%. La construction de ce test suit la démarche suivante. Soit le nombre de rejet X parmi N réalisations indépendantes. X est donc une variable aléatoire qui suit une loi binômiale avec les paramètres N et p , notée $B(N, p)$, où p est la probabilité réelle d'un rejet. Ainsi, la proportion de rejets $\hat{p} = X/N$ est asymptotiquement $N\left(p, \frac{p(1-p)}{N}\right)$ que nous abrégeons par $\hat{p} \sim AN\left(p, \frac{p(1-p)}{N}\right)$.

Dans l'étude de niveau, nous voulons confronter l'hypothèse $H_0 : p = \alpha$ à la contre-hypothèse $H_1 : p \neq \alpha$. Sous H_0 , $\hat{p} \sim AN\left(\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{N}\right)$ et au niveau de signification 5%, nous rejetons H_0 si

$$|\hat{p} - \alpha| > 1.96\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{N}}.$$

Les limites de signification sont donc

$$\alpha \pm 1.96\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{N}}.$$

Avec $N = 10\,000$ réalisations, l'écart-type $\frac{\alpha(1-\alpha)}{N}$ prend les valeurs (en %) 0.099% au niveau nominal 1%, 0.218% à 5% et 0.300% à 10%.

L'analyse des résultats se fait au cas par cas. Commençons par le test $Q_{KY}^*(M, i)$, et par le couple de modèles $AR(1)$ (graphiques des figures 2.1.1 et 2.1.2). Nous remarquons tout d'abord que les niveaux empiriques sont dans la majorité des cas sous estimés et ce pour les trois tailles des séries considérées mais à des degrés divers. Cette sous estimation s'atténue au fur et à mesure qu'on augmente la taille de la série. Autre remarque intéressante est que les valeurs des niveaux empiriques diminuent avec l'augmentation des valeurs de i , et cette diminution est plus soutenue avec les valeurs de $i \geq 3$. Ce qui donne l'impression que l'augmentation de i provoque une "dégénérescence" des niveaux empiriques. Par comparaison entre les i , les niveaux sont mieux contrôlés pour $i = 0$, qui correspond au test de Haugh, et plus ou moins pour $i = 1$, mais paraissent moins bien contrôlés pour les autres valeurs de i . Toujours est-il que plus nous passons à des séries longues, plus les niveaux deviennent mieux contrôlés. Si on devait comparer les niveaux nominaux du point de vue de leurs niveaux empiriques correspondants, nous pouvons dire que la différence entre les niveaux empiriques et leur niveau nominal correspondant est moins prononcée pour le niveau nominal de 1%. Ceci peut-être vérifié en calculant le ratio de la différence entre le niveau empirique et son niveau nominal correspondant par rapport à ce même niveau nominal par exemple pour le cas de $n = 100$ et de $i = 23$, ce qui donne les pourcentages 50%, 68% et 52% pour les niveaux 1%, 5% et 10% respectivement.

En ce qui concerne le test $Q_{HO}(w, T_n)$, quelques graphiques (voir les figures 2.1.3 et 2.1.4) donnent un aperçu général de l'état du contrôle de niveau. De façon plus détaillée, les niveaux paraissent surestimés pour les niveaux nominaux 1% et 5% correspondants, mais mieux contrôlés pour le niveau nominal de 10%. Nous remarquons aussi, que les niveaux diminuent en augmentant T_n et ainsi, se rapprochent de plus en plus de leur niveau nominal correspondant, au contraire du test $Q_{KY}^*(M, i)$. Des quatre noyaux considérés dans ces simulations, c'est le noyau uniforme tronqué qui fournit les niveaux les plus proches de leur niveau nominal correspondant. Pour finir, et contrairement au test $Q_{KY}^*(M, i)$, les niveaux empiriques pour le test $Q_{HO}(w, T_n)$ ne sont pas affectés par l'augmentation de la taille des séries.

Pour l'analyse du cas des séries $MA(1)$, la plupart des remarques précédentes sont aussi valables.

En conclusion de cette partie, disons qu'en général, le test de Hong contrôle relativement mieux les niveaux que le test de Koch et Yang.

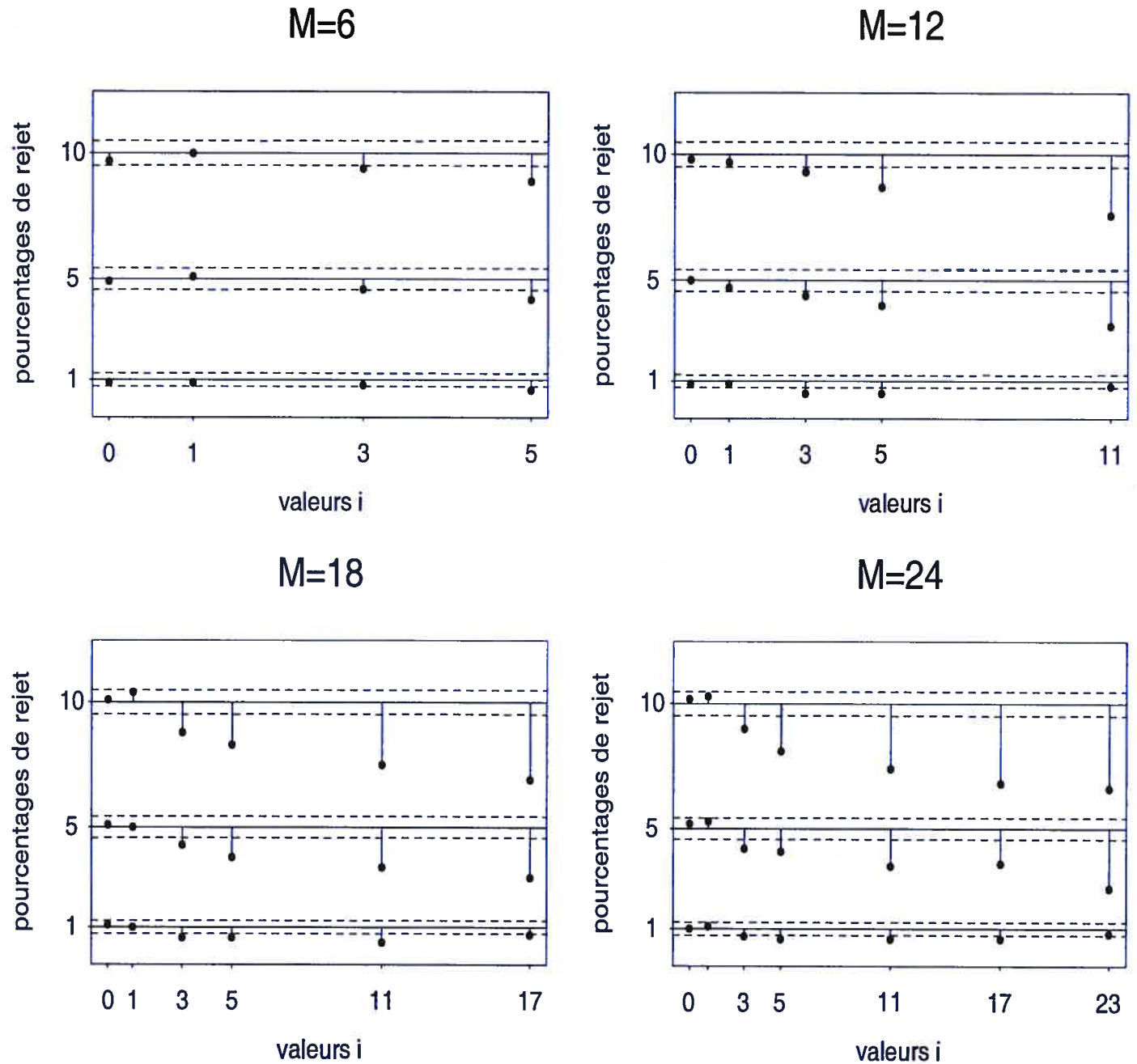


FIGURE 2.1.1. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$.

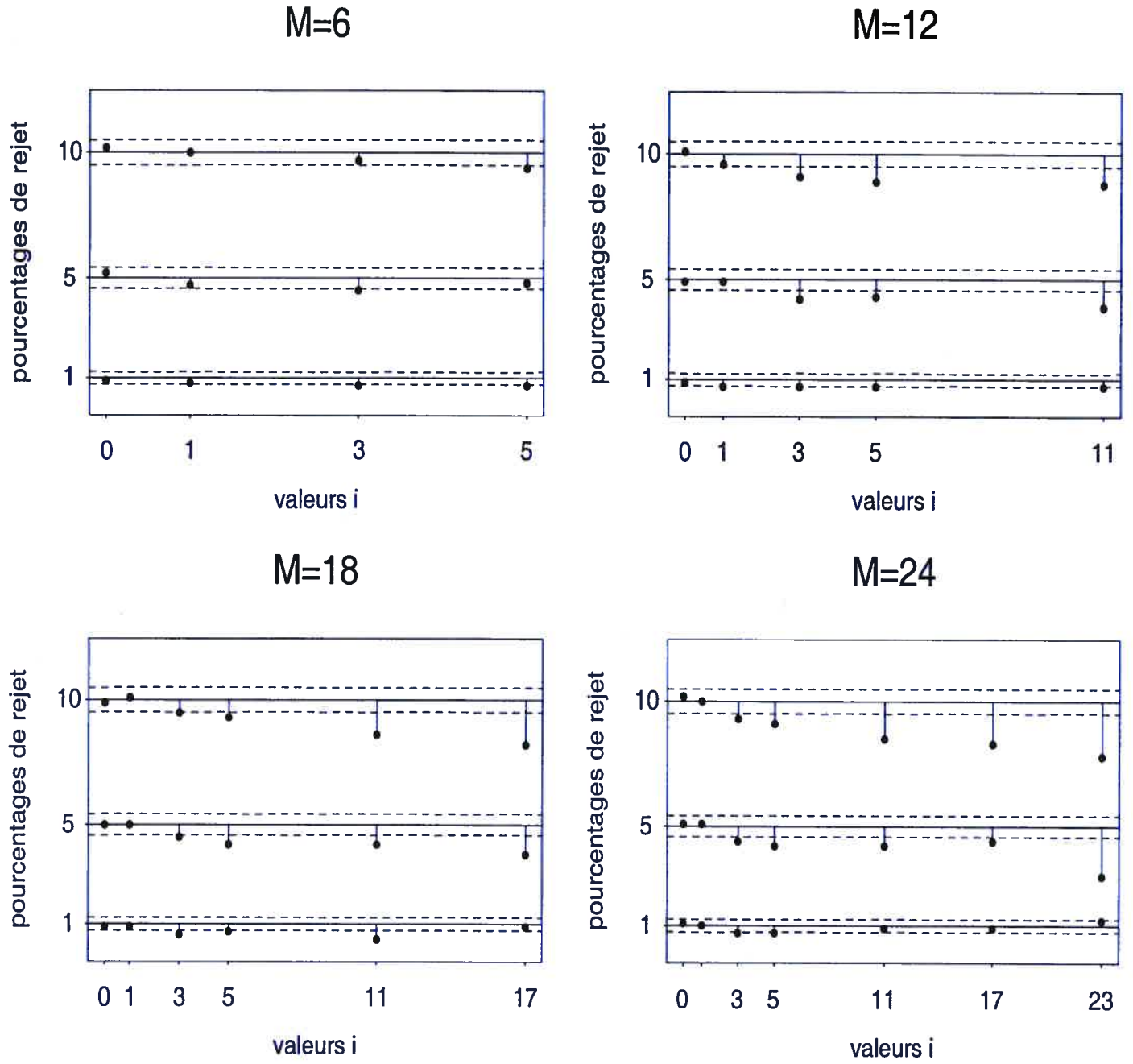


FIGURE 2.1.2. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , pour 2 séries $MA(1)$ indépendantes, $n = 200$.

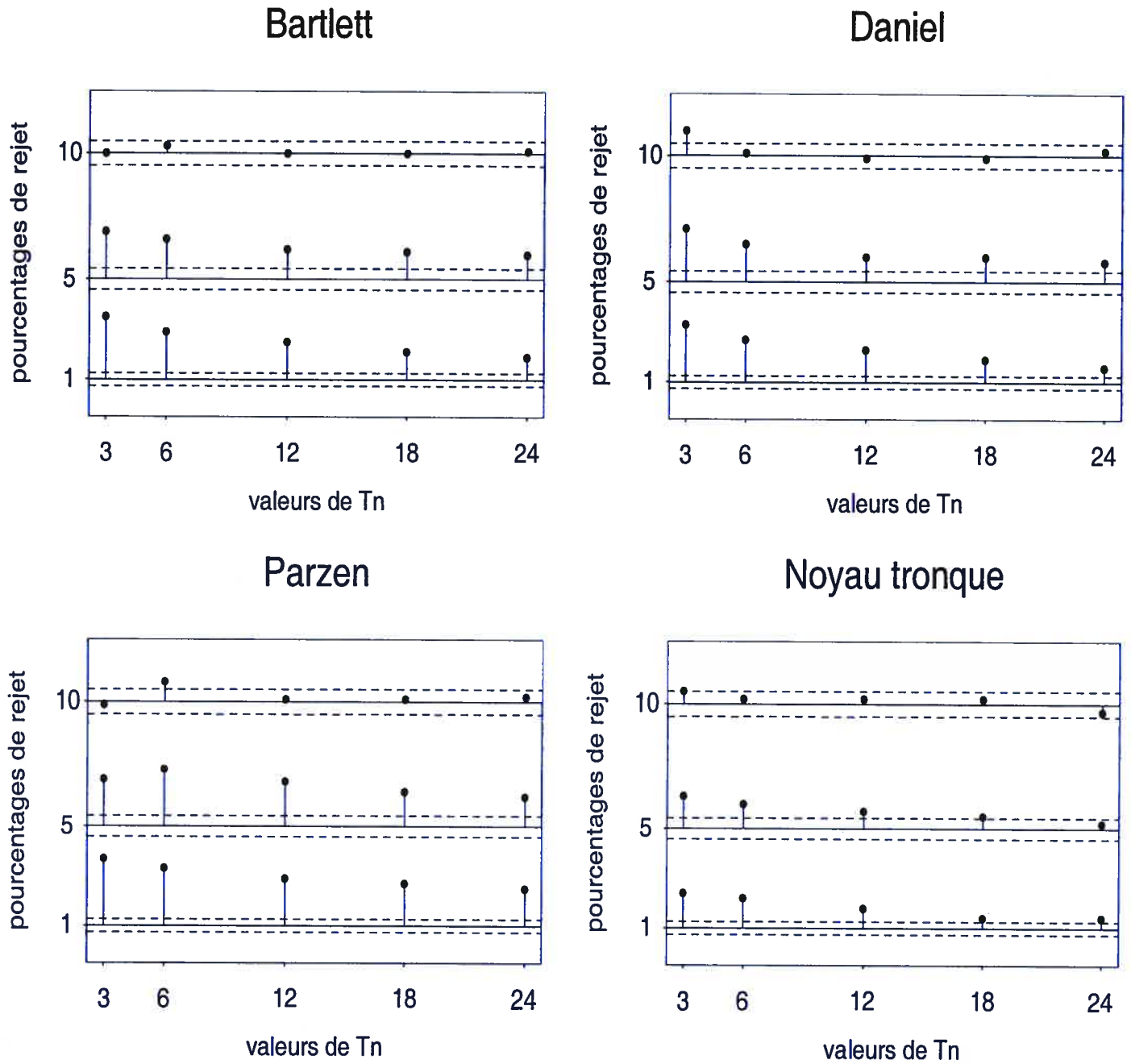


FIGURE 2.1.3. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$.

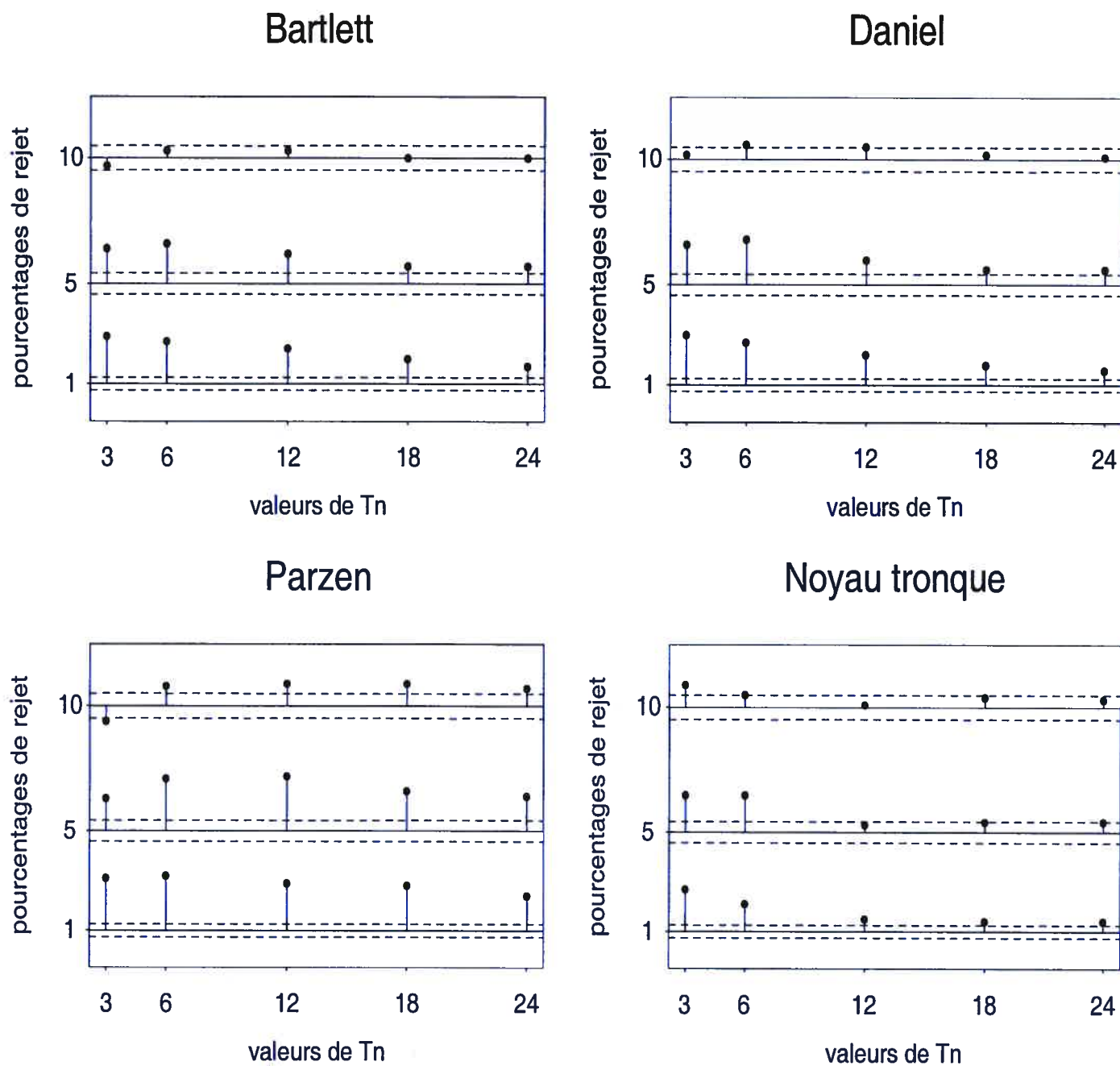


FIGURE 2.1.4. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour 2 séries MA(1) indépendantes, $n = 200$.

		Alpha %																																
		1											5											10										
		$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$												
S	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	valeurs de i	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23							
	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué																								0	1	3	5	11	17	23
3	3.5	3.3	3.7	2.4	-	-	-	-	-	6.9	7.1	6.9	6.3	-	-	-	10.0	11.0	9.9	10.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-					
6	2.9	2.7	3.3	2.2	0.9	0.9	0.8	0.6	-	6.6	6.5	7.3	6.0	4.9	5.1	4.6	10.3	10.1	10.8	10.2	9.7	10.0	9.4	8.9	-	-	-	-	-					
12	2.5	2.3	2.9	1.8	0.9	0.9	0.5	0.5	0.8	6.2	6.0	6.8	5.7	5.0	4.7	4.4	10.0	9.9	10.1	10.2	9.8	9.7	9.3	8.7	7.6	-	-	-	-					
18	2.1	1.9	2.7	1.4	1.1	1.0	0.6	0.6	0.4	6.1	6.0	6.4	5.5	5.1	5.0	4.3	10.0	9.9	10.1	10.2	10.1	10.4	8.8	8.3	7.5	6.9	-	-	-					
24	1.9	1.6	2.5	1.4	1.0	1.1	0.7	0.6	0.6	6.0	5.8	6.2	5.2	5.2	5.3	4.2	10.1	10.2	10.2	9.7	10.2	10.3	9.0	8.1	7.4	6.8	6.6	-	-					

TABLEAU 2.1.3. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries $AR(1)$ indépendantes, $n = 200$.

		Alpha %																																	
		1											5											10											
S	$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$					$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$					$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$												
					valeurs de i					Tronqué				valeurs de i					Tronqué				valeurs de i												
	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23		
3	3.2	3.2	3.1	2.4	-	-	-	-	-	-	6.5	6.7	6.6	6.1	-	-	-	-	-	-	-	9.8	10.1	9.8	10.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
6	2.5	2.3	3.3	1.9	0.8	0.7	0.4	0.6	-	-	6.5	6.4	7.0	5.9	5.1	4.5	4.0	4.5	-	-	-	10.2	10.4	10.6	10.3	10.3	9.3	8.8	8.6	-	-	-	-	-	
12	2.1	1.9	2.9	1.6	1.0	0.9	0.4	0.4	0.6	-	5.9	5.8	6.5	5.6	4.8	4.3	3.5	3.4	3.2	-	-	10.1	10.1	10.4	10.0	10.3	9.4	8.0	7.8	7.4	-	-	-	-	
18	1.9	1.7	2.6	1.3	0.9	0.9	0.5	0.5	0.4	0.6	5.7	5.7	6.4	5.3	5.1	4.5	3.4	3.5	3.3	2.8	-	10.1	10.0	10.3	10.2	10.5	9.6	8.0	7.5	7.1	6.3	-	-	-	-
24	1.7	1.6	2.3	1.4	1.1	1.0	0.5	0.5	0.6	0.7	5.5	5.3	6.3	5.3	5.4	5.0	3.3	3.2	3.5	3.3	1.9	10.0	9.7	10.1	10.2	11.0	10.1	7.7	7.4	7.1	6.4	5.8	-	-	

TABLEAU 2.1.5. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i , et $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n pour 2 séries MA(1) indépendantes, $n = 100$.

2.2. ÉTUDE DE PUISSANCE

2.2.1. Modèles utilisés

Le modèle de base considéré prend la forme ci-dessous, d'où sont déduits les modèles selon les alternatives A, B et C :

$$X_{1t} = \phi_{11}X_{1,t-1} + a_{1t}, \quad (2.2.1)$$

$$U_t = \phi_{22}U_{t-1} + a_{2t}, \quad (2.2.2)$$

$$X_{2t} = \sum_{j=1}^p \delta_j X_{1,t-j} + U_t, \quad (2.2.3)$$

où X_{1t} et U_t sont des modèles $AR(1)$, et a_{1t} et a_{2t} sont identiquement et indépendamment distribués selon la loi $N(0, \sigma_{a_i}^2)$, $i = 1, 2$.

Pour exécuter les simulations, nous avons considéré les versions numériques des modèles (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.3) qui apparaissent dans le tableau 2.2.1.

Nous avons calculé les corrélations croisées théoriques pour chacune des alternatives afin de mieux connaître la structure de dépendance entre les deux séries.

Alternative A

La corrélation croisée instantanée entre les deux séries d'innovation génère des corrélations croisées à tous les délais entre les deux séries X_{1t} et X_{2t} . En effet, nous avons (voir Gerbeau (2001))

$$\gamma_X^{(12)}(0) = \frac{\gamma_a^{(12)}(0)}{1 - \phi_{11}\phi_{22}},$$

$$\gamma_X^{(11)}(0) = \frac{\gamma_a^{(11)}(0)}{1 - \phi_{11}^2},$$

$$\gamma_X^{(22)}(0) = \frac{\gamma_a^{(22)}(0)}{1 - \phi_{22}^2}$$

et

$$\rho_X^{(12)}(0) = \frac{\gamma_a^{(12)}(0) \sqrt{(1 - \phi_{11}^2)(1 - \phi_{22}^2)}}{(1 - \phi_{11}\phi_{22}) \sqrt{\gamma_a^{(11)}(0)\gamma_a^{(22)}(0)}}. \quad (2.2.4)$$

Pour les délais $h \neq 0$, les corrélations croisées sont données par

$$\rho_X^{(12)}(h) = \begin{cases} \phi_{11}^h \rho_X^{(12)}(0), & h > 0, \\ \phi_{22}^{-h} \rho_X^{(12)}(0), & h < 0. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Modèle	Équation	Σ_a
Alternative A :		
AR(1)	$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$
Alternative B :		
	$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & \dots & 0 \\ 0.01 & \dots & 0.01 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{1,t-2} \\ \vdots \\ X_{1,t-12} \\ U_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$
	$U_t = 0.5 U_{t-1} + a_{2t}$	
Alternative C : Processus similaire à l'alternative B avec $p = 6$, dans (2.2.3).		

TABLEAU 2.2.1. Modèles utilisés dans l'étude de puissance.

La figure 2.2.2 présente les valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative A calculées selon les formules (2.2.4) et (2.2.5), pour $h = -24, \dots, 24$. Ce graphique

montre que la corrélation est maximum au délai $h = 0$ et diminue au fur et à mesure qu'on s'éloigne de zéro. Cette diminution est symétrique par rapport à $h = 0$, du fait de l'égalité des coefficients ϕ_{11} et ϕ_{22} . La dépendance entre X_{1t} et X_{2t} , comme on le voit clairement, décroît rapidement à zéro et peut être considérée "courte".

Si $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$, nous retrouvons les deux couples de modèles $AR(1)$ indépendants de l'étude de niveau.

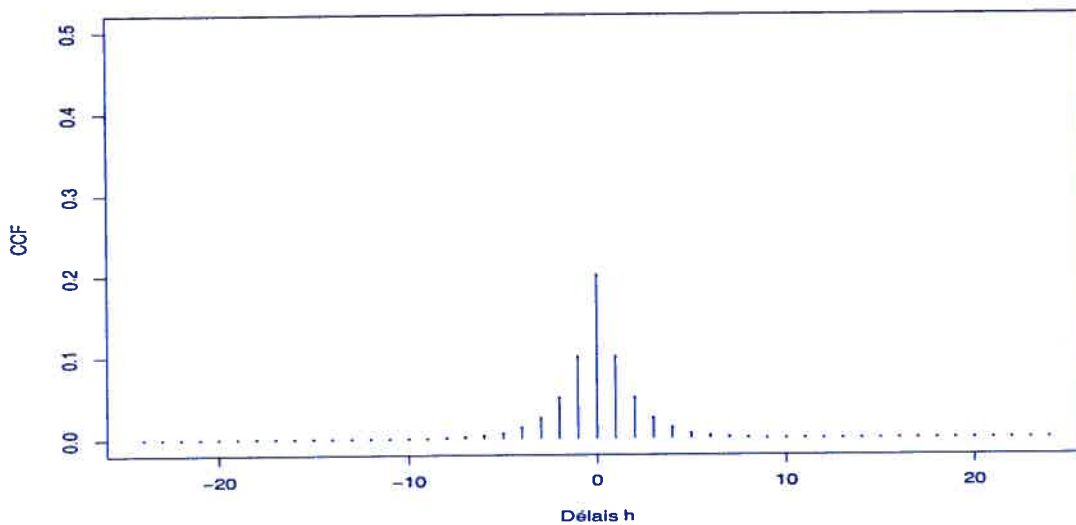


FIGURE 2.2.2. Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative A.

Alternative B

De la relation (1.1.7), nous calculons en prime

$$\gamma_X^{(12)}(h) = \sum_{j=1}^{12} \delta_j \gamma_X^{(11)}(h-j). \quad (2.2.6)$$

Le processus $\{X_{1t}\}$ étant $AR(1)$, nous avons

$$\gamma_X^{(11)}(h-j) = \frac{\gamma_a^{11}(0) \phi_{11}^{|h-j|}}{1 - \phi_{11}^2}, \quad (2.2.7)$$

d'où

$$\gamma_X^{(12)}(h) = \frac{\gamma_a^{(11)}(0)}{1 - \phi_{11}^2} \sum_{j=1}^{12} \delta_j \phi_{11}^{|h-j|}. \quad (2.2.8)$$

En outre, il est facile de vérifier que

$$\gamma_X^{(22)}(0) = \frac{\gamma_a^{(11)}(0)}{1 - \phi_{11}^2} \left(\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \delta_i \delta_j \phi_{11}^{|i-j|} \right) + \frac{\gamma_a^{(22)}(0)}{1 - \phi_{22}^2}, \quad (2.2.9)$$

ce qui donne

$$\rho_X^{(12)}(h) = \frac{\sqrt{\frac{\gamma_a^{(11)}(0)}{1 - \phi_{11}^2} \sum_{j=1}^{12} \delta_j \phi_{11}^{|h-j|}}}{\sqrt{\frac{\gamma_a^{(11)}(0)}{1 - \phi_{11}^2} \left(\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \delta_i \delta_j \phi_{11}^{|i-j|} \right) + \frac{\gamma_a^{(22)}(0)}{1 - \phi_{22}^2}}}. \quad (2.2.10)$$

Nous avons calculé la valeur de $\rho_X^{(12)}(h)$ pour $|h| \leq 24$ et les résultats sont présentés dans la figure 2.2.3. L'intervalle de dépendance est relativement long et les corrélations les plus importantes concernent les délais $h = 1, \dots, 12$. Nous remarquons aussi qu'aux délais $h = -24, \dots, -5$ et $h = 19, \dots, 24$ les corrélations croisées sont quasiment nulles.

Si $\delta_1 = \dots = \delta_{12} = 0$, $X_{2t} = U_t$ et à nouveau, $\{X_{1t}\}$ et $\{X_{2t}\}$ sont deux processus $AR(1)$ indépendants dont les coefficients autorégressifs sont 0.5 comme dans le couple de modèles $AR(1)$ de l'étude de niveau.

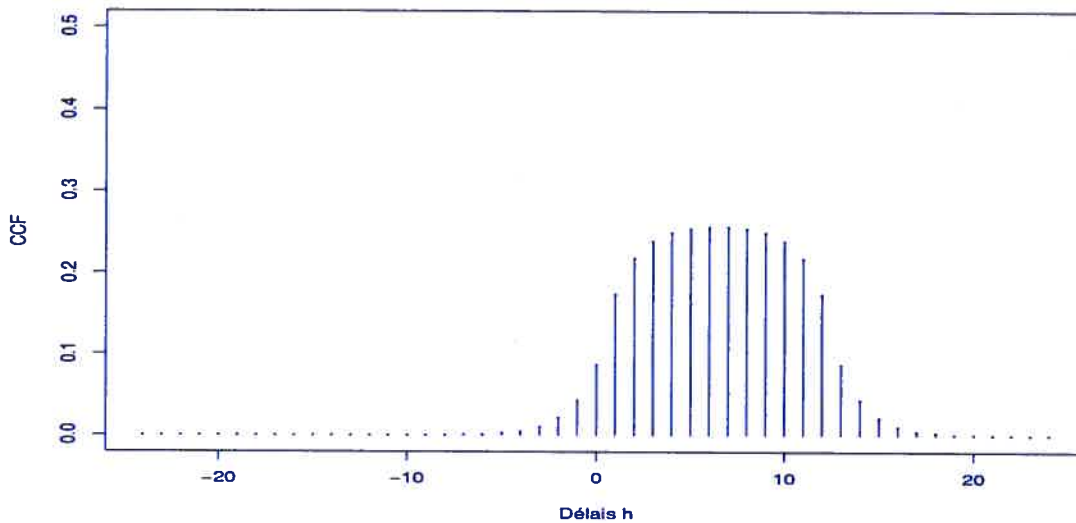


FIGURE 2.2.3. Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative B.

Alternative C

Les corrélations croisées pour cette alternative se calculent aussi à partir de (2.2.10) en remplaçant 12 par 6 dans les sommations. Elles sont illustrées à la figure 2.2.4. Les deux séries X_{1t} et X_{2t} sont fortement corrélées dans l'intervalle des délais $h = 1, \dots, 6$. Cette corrélation s'affaiblit progressivement en dehors de cet intervalle pour devenir quasi-nulle aux délais $h = -24, \dots, -6$ et $h = 15, \dots, 24$. Nous pouvons considérer que ces deux séries sont dépendantes sur un intervalle de délais de longueur moyenne, puisqu'il se situe à mi-chemin entre les intervalles définis dans les alternatives A et B. Lorsque $\delta_1 = \dots = \delta_6 = 0$, nous retrouvons à nouveau le couple de modèles $AR(1)$ indépendants de l'étude de niveau.

Les valeurs critiques exactes

Comme nous avons vu à la section 2.1 que les niveaux réels des tests considérés sont parfois assez loin des niveaux nominaux 1%, 5% et 10%, nous avons non seulement calculé les pourcentages de rejet en utilisant les valeurs critiques asymptotiques (VCA) obtenus des lois asymptotiques de chacun des tests mais aussi les pourcentages de rejet avec les valeurs critiques exactes (VCE) évaluée par simulation. En effet, nous avons remarqué déjà que si $\sigma_{12} = 0$ dans l'alternative A et si $\delta_1 = \dots = \delta_j = 0$ dans (2.2.3), les modèles sous les alternatives B et C correspondent à deux $AR(1)$ indépendants avec 0.5 comme valeur des deux paramètres autorégressifs. Ainsi,

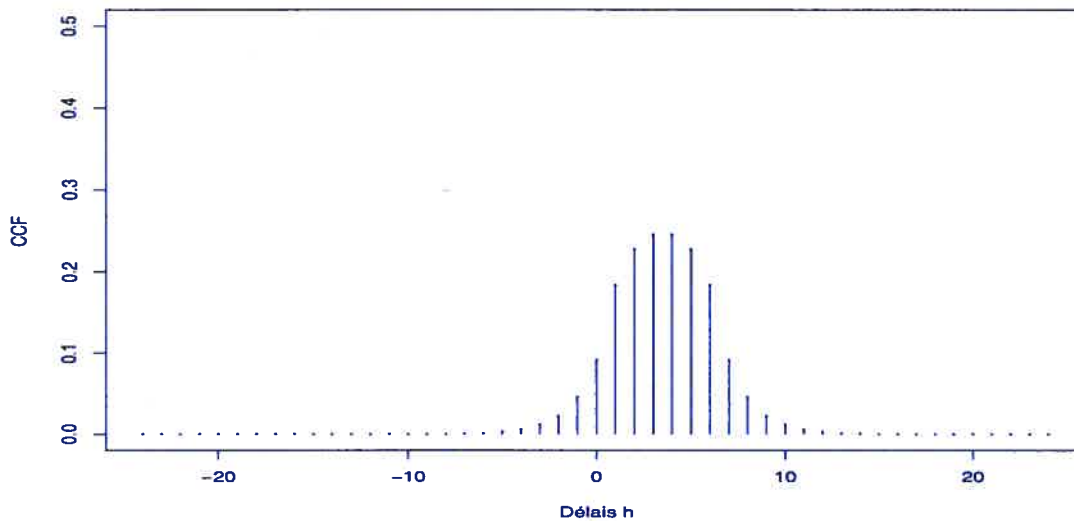


FIGURE 2.2.4. Valeurs des corrélations croisées théoriques entre X_{1t} et X_{2t} selon l'alternative C.

pour chacune des alternatives, les distributions exactes des statistiques de tests pour des séries indépendantes sont celles évaluées dans l'étude de niveau avec le couple de modèles $AR(1)$ indépendants. Pour chaque test, les VCE proviennent donc de la distribution expérimentale obtenue à partir de 10 000 réalisations indépendantes et correspondent respectivement aux percentiles 90, 95 et 99 pour les niveaux nominaux 10%, 5% et 1% respectivement.

Description de l'algorithme

Pour l'essentiel, la procédure d'élaboration de ces simulations a suivi le même cheminement que celle du contrôle de niveau, à quelques détails près que nous préciserons au cas échéant.

Sous l'**alternative A**, la dépendance croisée entre les résidus des deux séries est instantanée avec une valeur de 0.2. Ce sont des séries dépendantes sur des délais très courts. La génération des séries a été faite de la même manière que dans l'étude du niveau en changeant toutefois les valeurs de σ_{12} et σ_{21} .

Sous l'**alternative B**, la dépendance est cette fois-ci sur une longue période (12 délais) et avec des coefficients δ_j égaux et de faibles valeurs (0.01). Dans ce cas précis, pour les simulations nous générons en fait deux séries $AR(1)$, en l'occurrence X_{1t} et U_t en premier lieu, et en second

lieu nous générons la série X_{2t} du modèle de fonction de transfert défini par

$$X_{2t} = U_t + 0.01 \sum_{j=1}^{12} X_{1,t-j}. \quad (2.2.11)$$

Précisons par ailleurs, que les deux séries X_{1t} et X_{2t} sont estimées par des modèles $AR(p)$, l'ordre p étant obtenu en minimisant le critère AIC.

L'**alternative C** est une réplique de l'**alternative B**, cependant avec un intervalle de dépendance plus court, plus exactement six délais. Il va sans dire que le processus des simulations pour le calcul des puissances pour ce cas suit exactement la même procédure.

2.2.2. Analyse des résultats

Les résultats complets qui figurent dans les tableaux à la fin de cette partie, donnent les pourcentages de rejets pour chaque modèle considéré selon les alternatives établies à partir du tableau 2.2.1 par taille et par niveau nominal.

Dans l'étude de puissance, nous construisons un intervalle de confiance de niveau 95%, pour la vraie valeur de la puissance p . Cette dernière étant inconnue, mais l'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$ étant bornée par $\frac{1}{2\sqrt{N}}$ qui correspond à l'écart-type lorsque $p = 1/2$, l'intervalle

$$\hat{p} \pm 1.96 \frac{1}{2\sqrt{N}},$$

évalué à

$$\hat{p} \pm 0.0098,$$

est un intervalle de confiance de niveau supérieur ou égal à 95% pour la vraie puissance p .

La comparaison de deux puissances revient à tester que la différence entre les deux puissances théoriques est égale à 0 au niveau de signification 5%. Ainsi, on rejette l'hypothèse d'égalité des puissances théoriques si

$$|\hat{p}_2 - \hat{p}_1| > 1.96 \frac{1}{\sqrt{2N}} \simeq 0.014. \quad (2.2.12)$$

Donc, la différence est significative si elle est supérieure à 1.4%.

Pour ce qui est de l'analyse des résultats, remarquons tout d'abord les écarts enregistrés entre les puissances selon la VCA et la VCE sont le fait des différences entre les niveaux empiriques et les niveaux nominaux. Sur ce plan, pour le test de Hong, les puissances selon la VCE sont supérieures aux puissances selon la VCA, ceci dénote une propension plus grande pour ce test à rejeter l'hypothèse d'indépendance de deux séries quand elles sont indépendantes, à l'inverse du test de Koch et Yang.

Par ailleurs, pour les deux tests, leurs puissances diminuent lorsque S augmente dans le cas de l'alternative **A**, ce n'est cependant pas le cas pour les autres alternatives.

L'analyse des résultats est faite par rapport au niveau usuel de 5% du fait que le comportement des tests est similaire aux trois niveaux considérés.

Les résultats de puissance obtenus sont analysés selon deux axes. Nous discutons d'abord les résultats des tests individuellement, et en second lieu, l'analyse est faite conjointement dans le but de dégager le ou les tests les plus puissants (correspondant aux cases en gris dans le tableau des résultats).

Alternative A

Test de Hong

Remarquons que le test de Hong atteint sa puissance maximale à $S = 3$ avec le noyau de Parzen pour $n = 100$ (pourcentage de rejets égale à 46.6%, significativement supérieur à tous les autres pourcentages au seuil 5% et pour toutes les valeurs de S). L'analyse par rapport à S , donne la puissance maximale au noyau de Bartlett pour $S = 6, 12, 18$ et 24 . Pour $n = 200$, la palme de la plus grande puissance du test est codétenue par les noyaux de Parzen et de Bartlett à $S = 3$. La différence de leurs puissances n'est pas significative ($77.6 - 76.7 = 0.9\% < 1.4\%$). Cependant par rapport à S , comme pour le cas de $n = 100$, le test est significativement plus puissant avec le noyau de Bartlett aux valeurs $S = 6, 12, 18$ et 24 . Mêmes remarques à peu près pour $n = 500$, la puissance maximale est atteinte avec le noyau de Bartlett à $S = 3$ et 6 , et avec

le noyau de Parzen à $S = 3$. Il est remarquable de voir aussi qu'avec le noyau de Parzen, le test perd beaucoup de sa puissance avec l'augmentation de S , jusqu'à se faire dépasser par le noyau uniforme tronqué.

Test de Koch et Yang

Le test de Koch et Yang est plus puissant avec $i = 0$, qui correspond au test de Haugh, à toutes les valeurs de S . Le résultat peut s'expliquer par l'intervalle de dépendance entre les deux séries qui est court. Nous remarquons aussi que la puissance diminue lorsque i augmente. Par rapport à S , le test est plus puissant pour toutes les valeurs de i à $S = 6$.

Le test le plus puissant

Le test de Hong, avec les noyaux de Parzen et de Bartlett, s'est avéré plus puissant que le test de Koch et Yang pour cette alternative.

Alternative B

Test de Hong

Encore une fois le noyau de Parzen donne une puissance maximale pour presque toutes les valeurs de S , à part $S = 3$, où le premier rang est partagé entre le noyau uniforme tronqué et le noyau de Daniell. Ce qu'il faut aussi relever, c'est que le noyau uniforme tronqué reste à la traîne aux autres valeurs de S . Par ailleurs, avec un certain degré, à partir de $S = 6$ et plus, la puissance du test avec les noyaux de Bartlett, Daniell et Parzen ne changent pas beaucoup. Pour $n = 500$, les puissances pour les différents noyaux sont assez proches. Cependant, le noyau uniforme tronqué et le noyau de Daniell sont plus puissants à $S = 3$, étant donné que la différence de leurs puissances n'est pas significative au seuil de 5%.

Test de Koch et Yang

Le test atteint sa puissance maximale à $i = 5$ et 11 pour $S = 12$, et à $i = 11$ pour $S = 18$. On remarque aussi que le test qui atteint sa puissance maximale à $S = 12$ pour toutes les valeurs de i , commence à fléchir juste après ce délai ($S = 12$). Le test de Haugh (correspondant à $i = 0$) reste relativement faible. Pour $n = 500$, comme dans le cas du test de Hong et à l'exception de $i = 0$, les puissances sont presque toutes égales et proches de 100%.

Le test le plus puissant

Pour $n = 100$ et 200 , le test de Koch et Yang, dans ce cas-ci, est relativement plus puissant que le test de Hong. Pour $n = 500$, les deux tests demeurent plus ou moins équivalents, excepté en $i = 0$.

Alternative C

Test de Hong

Pour $n = 100$, le noyau de Parzen fournit la puissance maximale aux valeurs $S = 6, \dots, 24$. Le noyau uniforme tronqué, dont la puissance commence à faiblir à partir de $S = 6$, et le noyau de Daniell sont plus puissants à $S = 3$. Pour $n = 200$, le test est plus puissant avec le noyau uniforme tronqué aux valeurs $S = 3$ et 12 , et devient plus puissant ailleurs avec le noyau de Parzen. La perte de puissance du test avec le noyau uniforme tronqué à ces délais est relativement importante. Pour $n = 500$, les puissances sont plus ou moins proches.

Test de Koch et Yang

Avec les tailles $n = 100$ et 200 , le test est plus puissant à $S = 6$ et à $i = 3$, alors qu'il reste faible avec $i = 0$, à toutes les valeurs de S . Aux autres valeurs de S à part $S = 24$, où la puissance est partagée entre $i = 3$ et $i = 5$, le test est plus puissant avec $i = 5$. Pour ce qui est de la taille $n = 500$, les différences des puissances les plus élevées sont non significatives aux valeurs de $i = 1, 3, 5$ pour $S = 6$, et pour $S = 12$ avec $i = 3$ et 5 . Donc on peut dire que le test est plus puissant aux valeurs de $i = 1, 3$ et 5 , alors qu'il reste relativement faible à $i = 0$ à toutes les valeurs de S . Enfin, le test diminue de puissance avec l'augmentation des valeurs S et ceci sur toutes les valeurs de i et avec toutes les tailles n considérées.

Le test le plus puissant

À $S = 6$, la puissance maximale est détenue par le test de Koch et Yang avec $i = 3$ pour les deux tailles $n = 100$ et $n = 200$. Ailleurs le test de Hong devient plus puissant avec le noyau de Parzen. Pour $n = 500$, dans la plupart des cas, le test de Hong avec les noyaux de Bartlett, Daniell et Parzen est plus puissant. La puissance du test de Koch et Yang avec $i = 1, 3$ et 5 à $S = 6$ et avec $i = 3$ et $i = 5$ à $S = 12$ est équivalente à la puissance du test de Hong. Mais en

général, avec cette taille, presque toutes les puissances sont proches de 100%.

Si on devait résumer ces résultats dans leur globalité, nous pouvons dire que le test de Hong est plus puissant pour une alternative de dépendance entre les deux séries qui est échelonnée sur un intervalle de délais qui est court ou de longueur moyenne (alternative A et C). Par contre le test de Koch et Yang avec une valeur $i > 0$ est plus puissant que le test de Hong, avec les quatre noyaux considérés, pour l'alternative B qui décrit une dépendance échelonnée sur un long intervalle de délais.

Pour terminer ce chapitre, le tableau récapitulatif 2.2.1 fournit le meilleur test dans chacune des situations considérées. Dans le but de simplifier sa lecture, nous avons changé les notations des tests. Le test de Hong en fonction du noyau a été noté par $Q_{HO}(\text{noyau})$ et le test de Koch et Yang par $Q_{KY}^*(i)$. Par ailleurs, nous avons omis de considérer le cas de la taille $n = 500$, étant donné que la plupart des tests ont des puissances assez proches de 100%, et il est donc plus difficile de discriminer entre eux. Et le cas de $S = 3$ qui n'a pas été expérimenté pour le test de Koch et Yang.

Alternatives	n=100			
	S			
	6	12	18	24
A	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$
B	$Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{KY}^*(5), Q_{KY}^*(11)$	$Q_{KY}^*(11)$	$Q_{HO}(\text{Parzen}), Q_{KY}^*(11)$
C	$Q_{KY}^*(3)$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$
Alternatives	n=200			
A	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$	$Q_{HO}(\text{Bartlett})$
B	$Q_{HO}(\text{Daniell}), Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{KY}^*(5), Q_{KY}^*(11)$	$Q_{KY}^*(11)$	$Q_{KY}^*(11)$
C	$Q_{KY}^*(3)$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$	$Q_{HO}(\text{Parzen})$

TABLEAU 2.2.1. Tableau récapitulatif des tests les plus puissants.

TABLEAU 2.2.3. Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA^a, la VCE^b et S^c, dans le cas de l'alternative A, $n = 200$.

S		Alpha %																																									
		1														5														10													
		$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$													
		Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué														
		0	1	3	5	11	17	23			0	1	3	5	11	17	23			0	1	3	5	11	17	23			0	1	3	5	11	17	23								
3	A	71.7	65.9	73.7	38.8	-	-	-	-	80.2	76.0	81.4	54.2	-	-	-	-	-	-	84.1	81.2	85.1	63.3	-	-	-	-	-	-	-	-	-											
	E	55.6	50.5	56.8	25.8	-	-	-	-	76.7	71.7	77.6	50.5	-	-	-	-	-	-	84.1	80.3	85.2	62.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-											
6	A	61.7	51.5	47.1	25.0	16.5	11.4	6.5	4.6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78.5	72.3	69.2	52.0	51.5	43.2	34.7	32.0	-	-	-	-	-											
	E	47.6	38.6	29.8	17.3	16.9	11.9	7.6	8.1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	78.1	72.0	69.2	51.4	52.2	43.2	36.1	34.0	-	-	-	-	-	-										
12	A	47.3	35.5	18.8	14.8	9.8	6.9	3.8	2.7	2.4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69.4	60.9	44.7	40.0	39.1	32.3	24.9	21.1	19.3	-	-	-	-	-										
	E	35.6	25.7	8.8	10.8	10.1	7.8	5.4	4.1	3.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	69.3	61.1	43.8	39.5	39.7	32.9	26.2	23.5	22.9	-	-	-	-	-	-									
18	A	38.1	26.7	11.1	11.1	7.5	5.3	2.7	2.1	1.1	1.6	-	-	-	-	-	-	-	-	62.7	53.3	33.7	34.3	33.5	28.4	20.7	17.6	13.9	13.4	-	-	-	-	-									
	E	28.6	20.4	4.6	9.0	7.3	5.3	3.8	3.2	2.4	2.5	-	-	-	-	-	-	-	-	62.8	53.5	33.4	33.9	33.2	27.9	23.0	20.1	17.6	18.2	-	-	-	-	-	-								
24	A	31.6	21.6	8.0	9.0	6.0	4.7	2.3	1.8	1.2	1.2	1.5	48.3	37.5	19.1	20.9	18.4	15.6	10.2	8.1	6.3	6.0	4.1	57.7	48.2	28.3	30.7	29.6	25.7	18.7	15.7	12.1	11.0	11.1									
	E	25.4	16.8	3.6	7.7	5.9	4.6	3.2	2.6	2.0	1.8	2.1	45.2	35.1	16.2	20.3	18.1	14.9	11.8	9.7	8.8	8.2	8.8	57.4	47.9	28.0	31.2	29.3	25.1	20.5	18.5	16.1	15.8	16.2									

^aValeur critique asymptotique

^bValeur critique exacte

^cS correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang

TABLEAU 2.2.4. Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA^a, la VCE^b et S^c dans le cas de l'alternative A, $n = 500$.

S		Alpha %																																		
		1										5										10														
		$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$						$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$						$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$										
Bartlett		Daniell		Parzen		Tronqué		valeurs de i		Bartlett		Daniell		Parzen		Tronqué		valeurs de i		Bartlett		Daniell		Parzen		Tronqué		valeurs de i								
								0		1		3		5		11		17		23		0		1		3		5		11		17		23		
3	A	98.8	98.0	99.0	89.6	-	-	-	-	-	99.4	99.0	99.4	94.9	-	-	-	-	-	-	99.6	99.4	99.6	96.5	-	-	-	-	-	-	-	-				
	E	96.5	94.8	96.9	80.2	-	-	-	-	-	99.2	98.6	99.3	93.5	-	-	-	-	-	-	99.6	99.4	99.6	96.3	-	-	-	-	-	-	-	-				
6	A	97.2	95.2	93.8	77.7	67.1	49.8	29.3	17.4	-	-	98.6	97.5	96.9	88.7	85.4	74.3	57.6	49.3	-	-	99.2	98.3	98.0	92.4	91.6	84.3	71.0	63.8	-	-	-				
	E	93.9	89.9	83.9	67.2	66.1	50.2	34.2	29.4	-	-	98.1	96.7	95.7	86.6	86.3	75.1	59.4	53.6	-	-	99.1	98.3	98.0	92.0	91.9	84.9	71.6	66.2	-	-	-				
12	A	93.7	87.9	70.0	59.9	47.9	33.1	17.8	12.9	8.4	-	-	96.6	93.9	83.8	75.8	71.8	58.5	41.3	33.6	25.9	-	-	97.8	96.0	89.5	83.2	82.1	70.9	55.2	47.3	39.6	-			
	E	88.7	80.2	46.9	48.5	50.5	34.9	21.0	16.4	13.0	-	-	96.0	92.6	79.2	72.6	72.7	59.2	43.2	34.6	29.7	-	-	97.7	95.8	89.3	82.5	82.5	71.5	57.0	49.1	41.9	-			
18	A	89.2	79.6	50.4	46.8	37.2	24.9	12.8	8.6	4.1	5.3	-	94.6	89.6	69.8	66.4	62.4	49.5	33.3	26.2	18.7	17.9	-	-	96.5	93.2	79.3	76.3	74.6	63.0	47.3	39.3	30.2	28.4	-	
	E	83.4	71.8	28.0	39.1	38.9	26.1	15.3	11.2	8.3	8.6	-	93.5	87.6	64.0	63.9	63.7	50.3	35.0	28.8	21.6	20.8	-	-	96.3	92.9	78.2	76.1	74.6	63.2	48.9	41.4	33.1	31.3	-	
24	A	84.4	72.8	36.8	37.7	29.3	19.5	9.9	6.8	3.9	3.8	4.9	92.5	84.8	58.6	59.2	54.9	42.6	28.4	21.9	15.6	14.5	11.1	-	-	95.0	90.4	70.2	69.8	67.7	57.1	42.3	34.7	25.7	23.4	23.2
	E	77.3	64.7	19.5	32.8	31.9	20.7	11.7	7.8	5.9	5.4	6.1	90.6	82.4	52.8	57.3	56.2	42.9	29.8	25.4	17.5	16.1	16.7	-	-	94.8	90.2	68.7	69.1	67.9	57.0	44.5	37.9	28.3	26.1	25.7

^aValeur critique asymptotique

^bValeur critique exacte

^cS correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang

TABLEAU 2.2.5. Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA^a, la VCE^b et S^c dans le cas de l'alternative B, $n = 100$.

S		Alpha %																																					
		1												5												10													
		$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$																	
A	E	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	0	1	3	5	11	17	23					
		valeurs de i																																	valeurs de i				valeurs de i
3	A	11.6	17.2	8.9	14.3	-	-	-	-	-	-	-	21.4	28.6	17.3	26.2	-	-	-	-	-	-	-	29.0	36.9	24.3	35.2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-		
	E	3.6	7.5	2.3	7.7	-	-	-	-	-	-	-	15.9	22.7	12.8	22.2	-	-	-	-	-	-	-	28.9	35.2	24.7	33.8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	A	15.8	17.3	23.1	11.0	2.0	3.0	2.8	2.3	-	-	-	27.6	29.8	35.1	23.0	10.7	14.5	17.0	14.9	-	-	-	36.4	39.0	42.8	32.8	20.1	25.9	30.2	27.6	-	-	-	-	-	-	-	
	E	7.6	9.0	11.8	6.3	2.8	3.2	5.4	5.0	-	-	-	22.4	25.0	28.5	20.7	11.4	14.9	21.5	19.3	-	-	-	35.2	37.3	42.8	32.0	20.8	26.0	33.8	33.2	-	-	-	-	-	-	-	-
12	A	15.0	13.7	23.1	8.7	2.2	3.2	4.2	5.3	4.3	-	-	27.6	26.6	35.8	20.7	11.6	15.9	22.1	26.0	22.3	-	-	37.4	36.7	44.4	31.2	21.6	28.7	37.9	43.0	40.8	-	-	-	-	-	-	
	E	7.8	7.4	12.6	5.6	2.5	3.2	7.7	12.5	10.7	-	-	24.6	24.5	30.0	18.8	12.0	16.3	27.8	35.8	37.1	-	-	36.8	36.0	42.6	30.3	21.7	28.5	42.8	51.4	52.3	-	-	-	-	-	-	
18	A	13.5	11.5	21.3	6.9	2.2	2.6	2.8	3.4	3.2	3.7	-	26.9	25.2	34.5	18.0	10.4	12.3	15.2	18.9	23.7	17.4	-	36.9	35.3	43.6	27.3	19.8	22.8	28.7	33.6	38.9	31.4	-	-	-	-	-	
	E	7.3	7.0	11.8	4.8	2.4	2.1	5.4	8.3	11.2	9.2	-	25.1	23.4	29.0	16.3	10.3	11.4	19.9	28.3	35.9	30.6	-	37.1	35.2	42.5	27.0	19.3	21.9	33.9	43.1	51.5	45.5	-	-	-	-	-	
24	A	12.2	10.3	19.5	5.7	1.8	2.1	2.4	2.9	2.8	3.3	3.3	25.8	23.5	33.4	15.8	9.2	10.2	11.6	13.8	16.9	15.8	9.3	35.9	33.7	42.7	25.3	17.6	19.3	22.6	26.6	29.7	27.1	22.4	-	-	-	-	
	E	7.3	6.7	11.2	4.6	1.9	1.6	3.6	5.7	6.6	7.0	6.8	24.2	22.3	28.4	15.2	9.2	9.0	16.1	21.6	27.0	26.6	23.2	35.4	33.3	41.9	25.6	17.0	17.8	27.9	35.8	42.8	39.9	36.1	-	-	-	-	

^aValeur critique asymptotique

^bValeur critique exacte

^cS correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang

TABLEAU 2.2.6. Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA^a , la VCE^b et S^c dans le cas de l'alternative B , $n = 200$.

S	Alpha %																																			
	1												5												10											
	$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$				$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$															
	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué												
3	A	30.8	43.6	22.7	42.0	-	-	-	-	46.1	58.4	37.2	58.5	-	-	-	-	55.6	66.6	47.0	67.5	-	-	-	-											
	E	12.6	25.5	7.1	28.1	-	-	-	-	38.8	51.6	29.1	54.8	-	-	-	-	55.5	64.9	47.2	67.0	-	-	-	-											
6	A	44.2	48.4	53.7	36.7	9.3	18.1	21.3	12.6	-	-	-	-	59.8	63.8	66.9	56.5	28.5	43.9	51.2	46.4	-	-	-	-											
	E	26.9	34.3	37.9	26.8	9.6	19.0	24.4	21.1	-	-	-	-	53.9	58.7	60.0	52.8	29.0	43.6	53.0	50.8	-	-	-	-											
12	A	46.7	45.3	56.7	35.4	13.2	29.3	44.8	50.0	28.6	-	-	-	64.2	64.0	70.2	58.1	36.4	60.0	75.0	79.4	70.4	-	-	-											
	E	32.1	33.1	42.0	28.1	13.5	32.2	52.7	58.9	47.8	-	-	-	59.9	59.7	64.5	55.7	36.6	61.0	76.8	82.6	81.4	-	-	-											
18	A	46.8	43.6	56.3	27.3	10.2	20.5	33.2	40.6	28.6	23.0	-	65.8	63.8	70.8	48.4	29.8	48.6	65.8	72.8	77.2	59.0	-	-	-											
	E	34.3	34.5	41.7	23.6	9.9	20.3	40.2	50.9	54.2	39.1	-	61.5	60.3	66.5	46.5	29.7	48.7	68.9	77.0	82.2	74.6	-	-	-											
24	A	45.0	40.8	55.5	22.0	10.4	18.4	31.3	39.2	32.1	24.3	21.6	65.1	62.3	71.1	41.0	28.4	43.8	60.8	67.8	70.0	59.0	39.6	74.9	72.9	78.4	53.9	42.5	59.2	74.4	79.5	81.9	75.1	65.1		
	E	36.1	34.2	42.1	19.4	10.4	18.0	36.8	46.5	50.0	42.1	34.1	61.8	59.2	68.2	39.9	28.1	42.8	64.1	71.4	76.5	71.2	63.5	74.7	72.7	78.2	54.4	41.9	58.5	76.1	82.0	86.0	82.1	76.1		

^aValeur critique asymptotique

^bValeur critique exacte

^cS correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang

TABLEAU 2.2.7. Pourcentages de rejets avec $Q_{HO}(w, T_n)$ et $Q_{KY}^*(M, i)$ selon la VCA^a, la VCE^b et S^c dans le cas de l'alternative B, $n = 500$.

S		Alpha %																															
		1										5										10											
		$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$						$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$						$Q_{HO}(w, T_n)$				$Q_{KY}^*(M, i)$							
Valeur Critique		Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	valeurs de i						Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	valeurs de i						Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué	valeurs de i							
		0	1	3	5	11	17	23	0	1	3	5	11	17	23	0	1	3	5	11	17	23	0	1	3	5	11	17	23				
3	A	85.4	93.1	75.7	94.5	-	-	-	-	92.7	97.0	87.1	97.6	-	-	-	-	-	-	-	-	95.6	98.1	91.5	98.6	-	-	-	-				
	E	64.7	82.9	47.0	87.9	-	-	-	-	90.1	95.5	82.8	96.7	-	-	-	-	-	-	-	-	95.7	98.1	91.8	98.5	-	-	-	-				
6	A	95.0	96.8	96.4	95.9	62.5	83.5	70.4	45.2	-	-	-	-	-	-	84.4	94.8	95.3	78.0	-	-	98.9	99.3	99.0	99.2	91.6	97.7	98.5	90.3	-			
	E	87.1	92.0	89.9	92.2	61.3	83.8	88.8	83.8	-	-	-	-	-	-	85.4	95.0	97.2	96.2	-	-	98.9	99.3	99.0	99.1	91.8	97.8	98.7	98.7	-			
12	A	97.8	97.9	98.0	98.3	85.7	98.4	98.6	69.6	52.2	-	-	-	-	-	99.3	99.3	99.1	99.6	96.6	99.7	99.9	96.4	63.5	-	-	-	-	-	-	-		
	E	95.0	95.7	94.4	96.6	87.5	98.5	99.7	99.8	99.4	-	-	-	-	-	99.0	99.0	98.8	99.4	96.8	99.7	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	100.0	100.0	100.0	
18	A	98.7	98.6	98.5	95.3	74.6	95.7	99.0	87.7	52.9	51.3	-	-	-	-	99.7	99.6	99.5	98.6	92.3	99.3	99.8	99.7	69.4	67.7	-	-	-	-	-	-	-	
	E	97.2	97.2	96.0	93.1	76.4	96.0	99.3	99.6	99.7	98.2	-	-	-	-	99.5	99.5	99.2	98.3	92.8	99.3	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	99.9	100.0	100.0
24	A	98.8	98.5	98.8	90.7	63.5	91.3	97.8	95.3	56.0	50.5	49.3	-	-	-	99.7	99.7	99.7	96.8	86.4	98.2	99.6	99.8	79.3	68.3	65.5	-	-	-	-	-	-	
	E	97.6	97.4	97.0	88.0	66.5	92.0	98.3	98.9	99.2	97.4	91.8	-	-	-	99.6	99.5	99.5	96.4	87.3	98.2	99.6	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8	99.8

^aValeur critique asymptotique

^bValeur critique exacte

^cS correspond à T_n pour le test de Hong et à M pour le test de Koch et Yang

● Chapitre 3

APPLICATION

Afin de mettre en pratique les tests abordés dans ce projet, deux exemples seront traités. Le premier mettra en application un jeu de données sur des indices de la bourse de New York aux États Unis et de Sydney en Australie. Le second concernera deux séries sur le taux de change entre le dollar canadien et le dollar américain d'une part, et le taux de change entre le dollar canadien et le Yen japonais, d'autre part.

Nous avons utilisé le progiciel S-Plus version 6.0 sur Linux pour traiter ces exemples.

3.1. PREMIER EXEMPLE

3.1.1. Description des données

Les données sont d'ordre financier et ont été obtenues du livre de Brockwell et Davis (1996, p. 219). Ce jeu de données met au prise deux séries, l'une représentée par les valeurs de clôture de l'indice Dow-Jones à la bourse des valeurs à New York, notée D_t , et l'autre représente les valeurs de clôture de l'indice All-ordinaries à la bourse de Sydney noté A_t . Les données ont été enregistrées quotidiennement, du 13 septembre 1993 au 26 août 1994, soit 251 observations et leur représentation graphique est donnée par la figure 3.1.1.

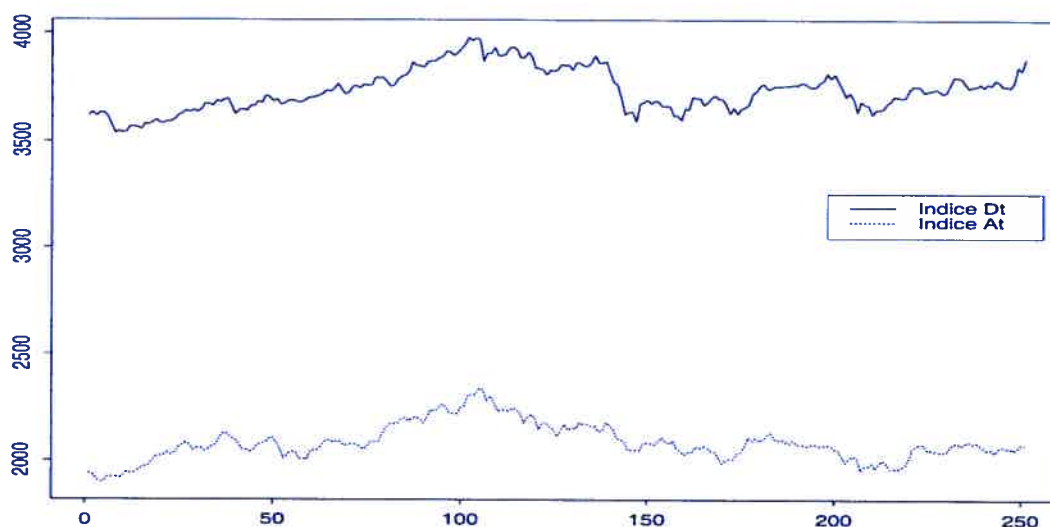


FIGURE 3.1.1. L'indice Dow-Jones (D_t) et l'indice australien All-ordinaries (A_t).

La nature des données suggère que les deux séries se comportent comme des marches aléatoires, donc non stationnaires, comme le montrent d'ailleurs les corrélogrammes correspondants à la figure 3.1.2.

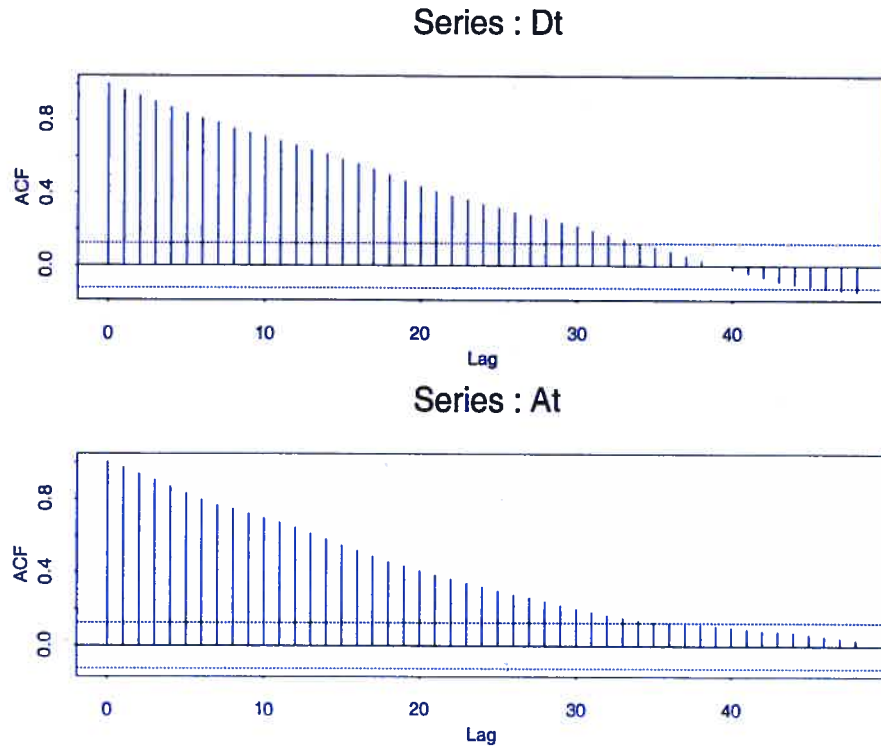


FIGURE 3.1.2. Autocorrélations des indices Dow-Jones et les indices All-ordinaires.

Effectivement les autocorrélations des deux séries décroissent lentement.

La principale caractéristique d'intérêt d'un indice boursier est son taux de croissance. Nous notons X_{1t} , le taux de croissance de l'indice Dow-Jones et par X_{2t} , celui de l'indice All-ordinaires, qui sont définis par

$$X_{1t} = \frac{100(D_t - D_{t-1})}{D_{t-1}},$$

$$X_{2t} = \frac{100(A_t - A_{t-1})}{A_{t-1}},$$

où $t = 1, \dots, 250$.

La figure 3.1.3 montre que les deux séries transformées semblent stationnaires (les moyennes des deux séries semblent se situer sur une droite parallèle à l'axe des abscisses), ce qui sera d'ailleurs confirmé par les corrélogrammes qui sont à la figure 3.1.4. Aussi, à première vue, les corrélogrammes nous portent à croire que ce sont des bruits blancs. Comme on le voit, les valeurs des autocorrélations sont toutes à l'intérieur des limites de signification, donc non significatives au niveau 5%, sauf une pour X_{2t} . Le test d'absence d'autocorrélation de Ljung et Box noté Q_{LB}

basé sur les 48 premiers délais conduit aux valeurs 39.28 (valeur-p=0.811) pour X_{1t} et 44.44 (valeur-p=0.619) pour X_{2t} . Nous ne rejetons donc pas l'hypothèse de bruit blanc pour chacune des deux séries. Aussi, le graphique des corrélations croisées de X_{1t} et X_{2t} (figure 3.1.4) nous renseigne qu'il existe une corrélation croisée significative au délai -1 : $\hat{\rho}_X^{(12)}(-1) = 0.46$. Cela signifie que X_{2t} est fortement corrélé avec X_{1t} , ce qui est due vraisemblablement au décalage horaire entre les deux capitales.

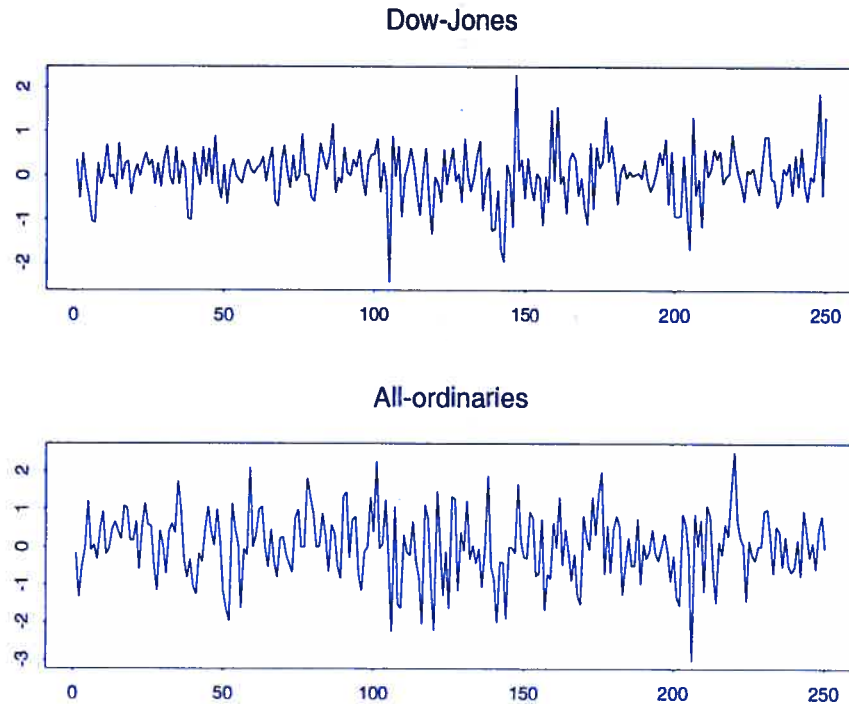


FIGURE 3.1.3. Taux de croissance de l'indice Dow-Jones et de l'indice All-ordinaries.

3.1.2. Analyse de corrélation croisée

Pour cette analyse, nous avons calculé les niveaux de signification empiriques (valeurs-p) du test de Koch et Yang $Q_{KY}^*(M, i)$, ainsi que ceux du test de Hong $Q_{HO}(w, T_n)$. Dans la figure 3.1.5, nous présentons le niveau de signification empirique du test de Koch et Yang pour différentes valeurs de M et de i . Nous remarquons qu'aux délais $M = 6, 12$ et 24 , le test rejette au niveau 5% l'hypothèse de non corrélation entre les deux séries pour toutes les valeurs de i . Par contre, à $M = 36$, nous ne rejetons pas pour $i = 10, \dots, 13$. Enfin, pour $M = 48$ et pour $i = 0$ jusqu'à $i = 7$, l'hypothèse de non corrélation est rejetée, ce qui n'est pas le cas pour $i > 7$.

Pour ce qui est du test de Hong, nous présentons uniquement les valeurs de la statistique, qu'il suffit de comparer au 95^{ième} percentile de la loi $N(0,1)$ qui est 1.65. Comme on le voit à

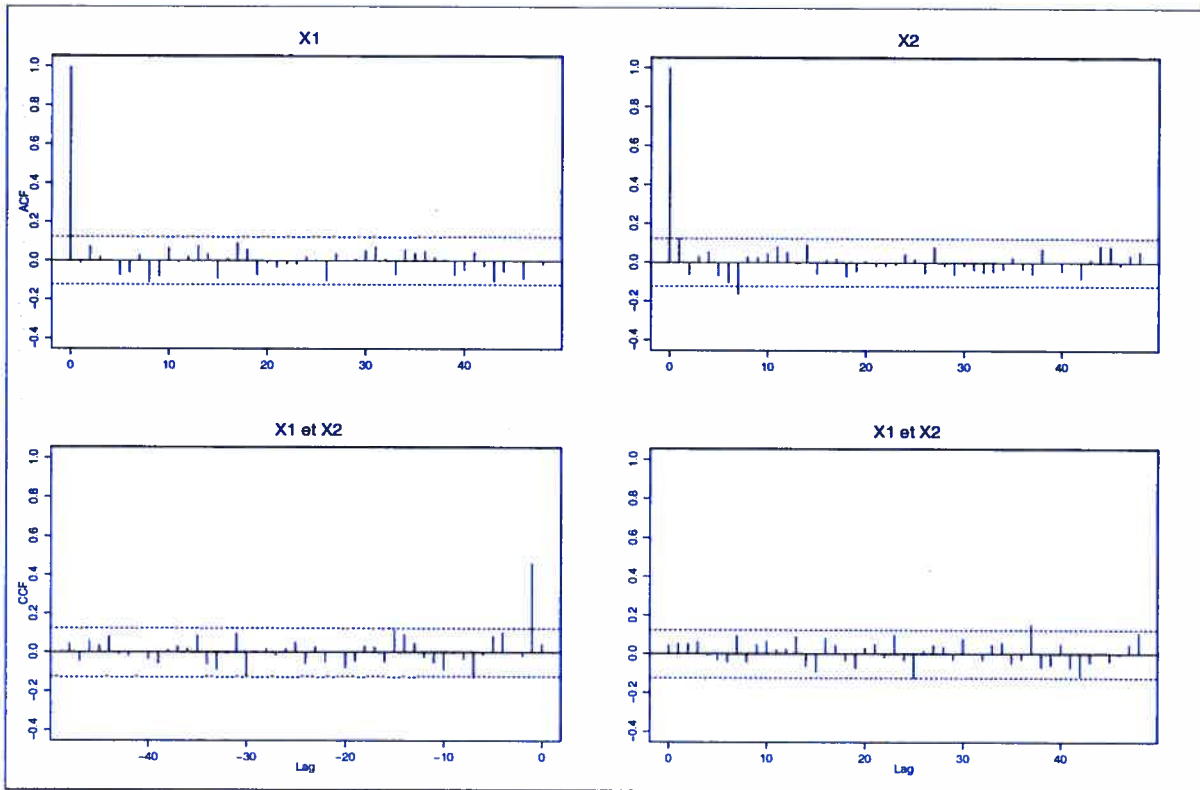


FIGURE 3.1.4. Autocorrélations et corrélations croisées des taux de croissance des indices boursiers X_{1t} et X_{2t} .

partir du tableau 3.1.1, pour toutes ces valeurs nous rejetons l'hypothèse de non corrélation au niveau 5% entre les deux séries avec les quatre noyaux et les cinq valeurs de T_n considérées.

T_n	Valeurs de $Q_{HO}(w, T_n)$			
	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué
6	15.29	15.93	21.70	9.42
12	13.39	12.56	20.31	6.93
24	10.56	8.96	16.32	5.15
36	8.95	7.37	13.97	4.30
48	7.93	6.45	12.42	4.06

TABLEAU 3.1.1. Valeurs de la statistique $Q_{HO}(w, T_n)$ pour différents noyaux et différentes valeurs de T_n , appliqués aux indices boursiers.

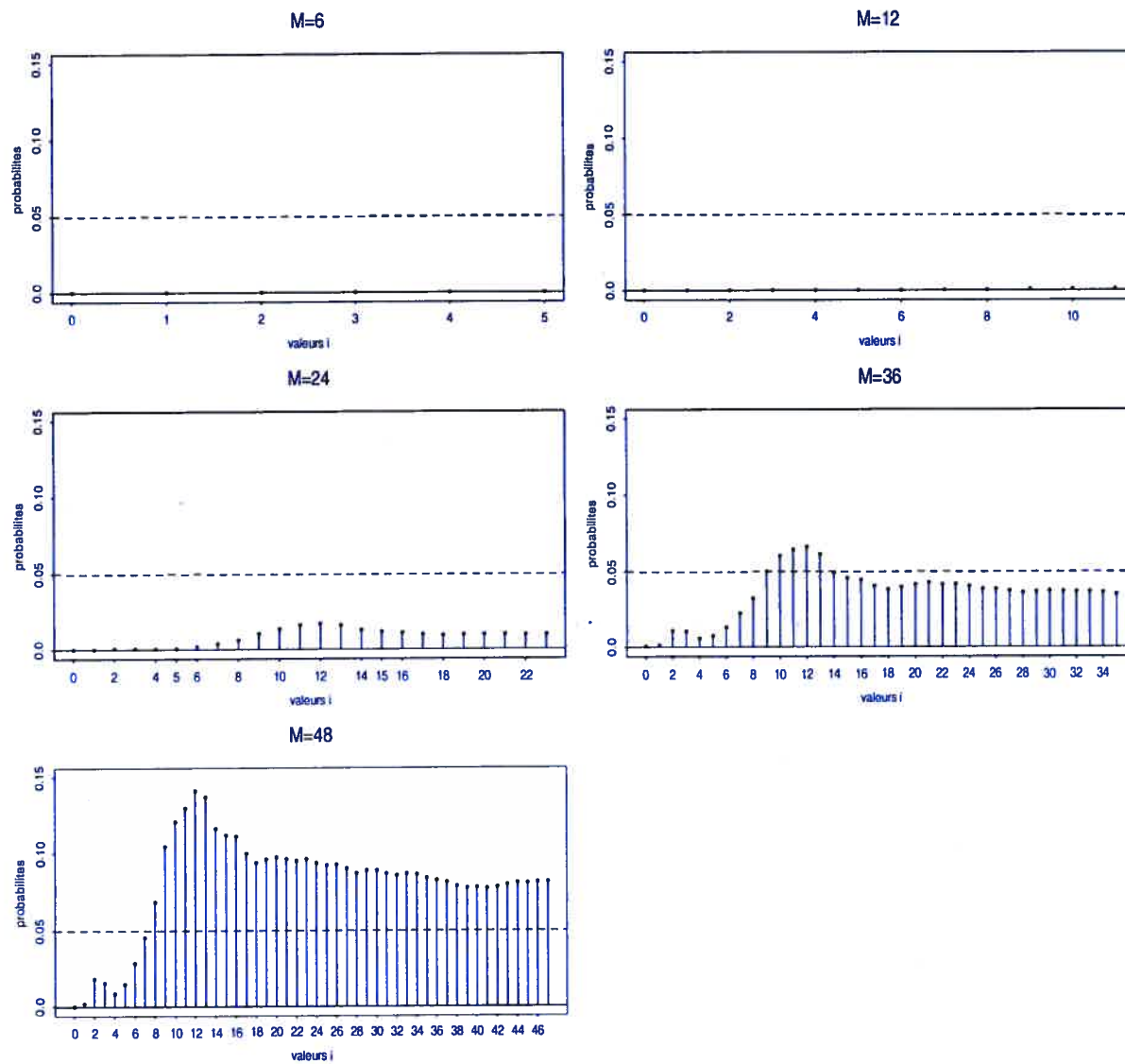


FIGURE 3.1.5. Niveaux de signification empiriques du test $Q_{KY}^*(M, i)$ pour différentes valeurs de M et de i , appliqués aux indices boursiers.

3.2. DEUXIÈME EXEMPLE

3.2.1. Description des données

Le jeu de données de ce deuxième exemple provient de la base de données CANSIM et concerne les taux de change du dollar canadien par rapport au dollar américain et par rapport au yen japonais notés TCEC et TCJC. Les étiquettes CANSIM de ces séries sont respectivement B100000 et B100007. Ce sont deux séries de données quotidiennes, enregistrées du 04 janvier 1994 au 29 avril 2002, la dernière mise à jour a été faite le 01 juin 2002. La longueur des séries,

à l'état brut est de 3287, et après épuration (les week-end et jours fériés), elle est réduite à 1795 données. La représentation graphique de ces deux séries se trouve à la figure 3.2.1.

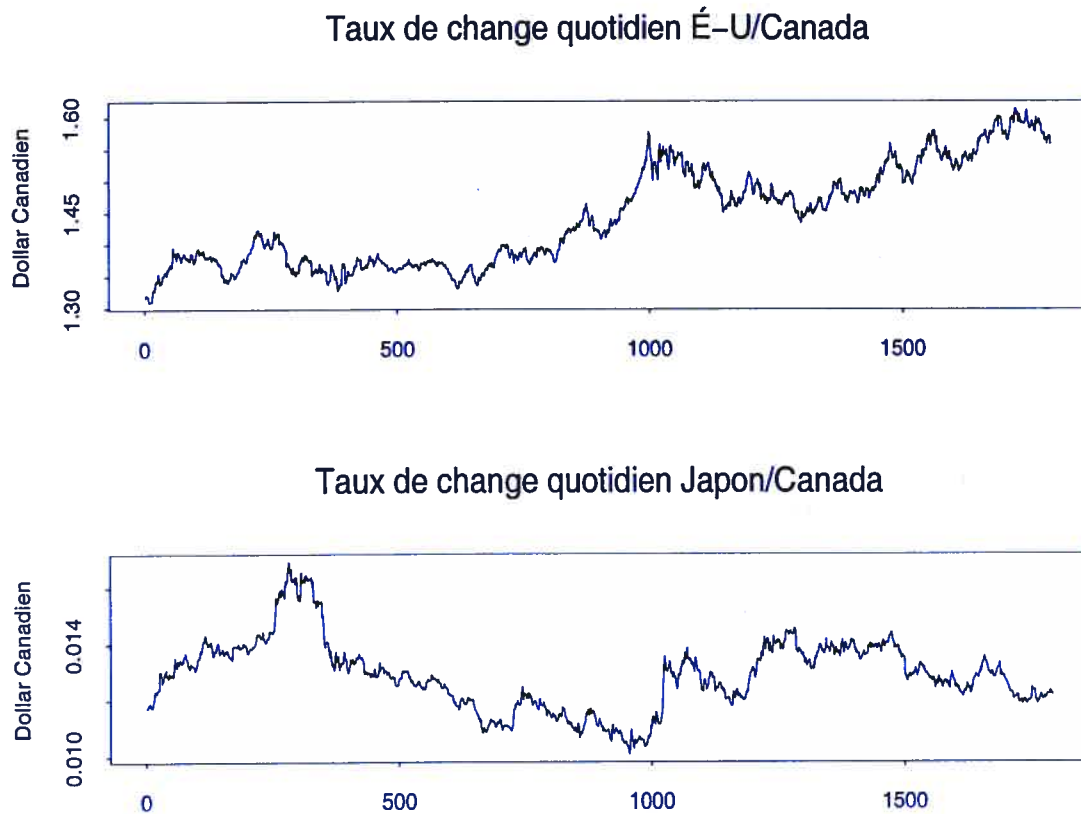


FIGURE 3.2.1. Les taux de change É-U/Canada et Japon/Canada.

Cette dernière indique une non stationnarité des deux séries (on constate par exemple une tendance vers la hausse de TCEC). Cette intuition est vérifiée par le corrélogramme donné par la figure 3.2.2

Examinons à présent les séries TCEC et TCJC différenciées à l'ordre 1 que nous allons noter par X_{1t} et X_{2t} , $t = 1, \dots, 1794$, respectivement. Les graphes de ces deux séries sont présentés à la figure 3.2.3.

Il semble bien que les tendances ont été supprimées, et que les moyennes se situent carrément sur une droite parallèle à l'axe des abscisses. Il semble donc que les deux séries sont devenues stationnaires et ceci est appuyé par les corrélogrammes présentés à la figure 3.2.4.

Comme on le voit, les corrélogrammes ne présentent plus de structure d'autocorrélation particulière, ce qui semble confirmer le caractère stationnaire des deux séries. Ceci constitue une

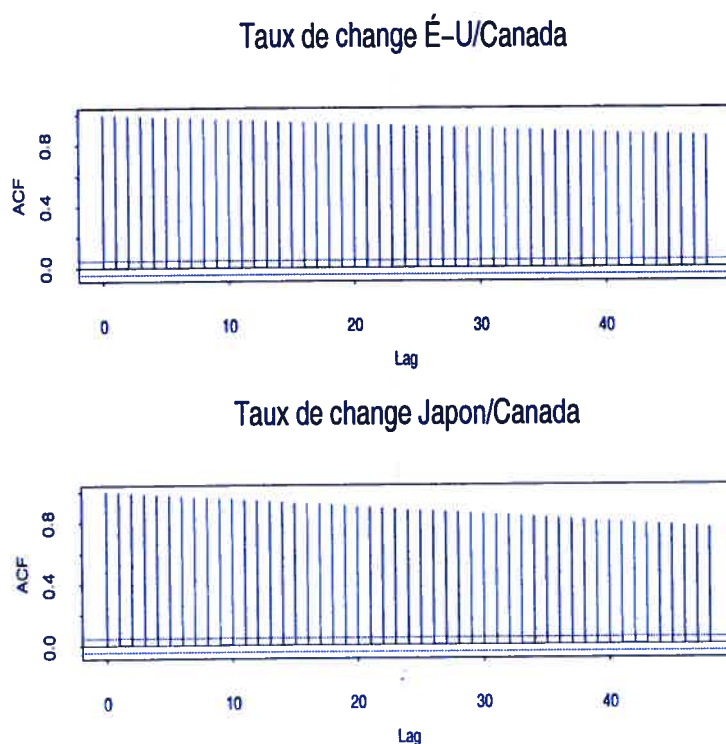


FIGURE 3.2.2. Autocorrélations des séries originales des taux de change É-U/Canada et Japon/Canada.

étape préalable à l'identification et l'estimation de modèles potentiels pour décrire chacune des deux séries.

3.2.2. Modélisation des deux séries

Étant donné la longueur des séries, nous les avons estimées par un $AR(p)$, où la valeur maximale de p a été fixée à 60, selon le critère du minimum de l'AIC par le biais de la fonction prédéfinie `arima.mle()` de `Splus`. La série du taux de change É-U/Canada a débouché sur un modèle estimé $AR(18)$ et celle de Japon/Canada a conduit à un modèle $AR(3)$. L'analyse des résidus notés \hat{a}_{1t} et \hat{a}_{2t} , $t = 1, \dots, 1776$, basée sur leurs corrélogrammes (voir la figure 3.2.5) montre que les deux séries sont non autocorrélées, et le test portemanteau de Ljung-Box appuie ce constat. La valeur de la statistique de ce test pour les résidus de la série TCEC est de 38.34 qui correspond à une valeur- p de 0.14. En conséquence l'hypothèse d'autocorrélation des résidus est rejetée au niveau 5%. Pour la série TCJC, la statistique du test est évaluée à 46.63, c'est-à-dire une valeur- p de 0.41. On rejette également l'hypothèse d'autocorrélation des résidus pour cette série. À la lumière de ces résultats, l'analyse des corrélations croisées se fera sur ces résidus.

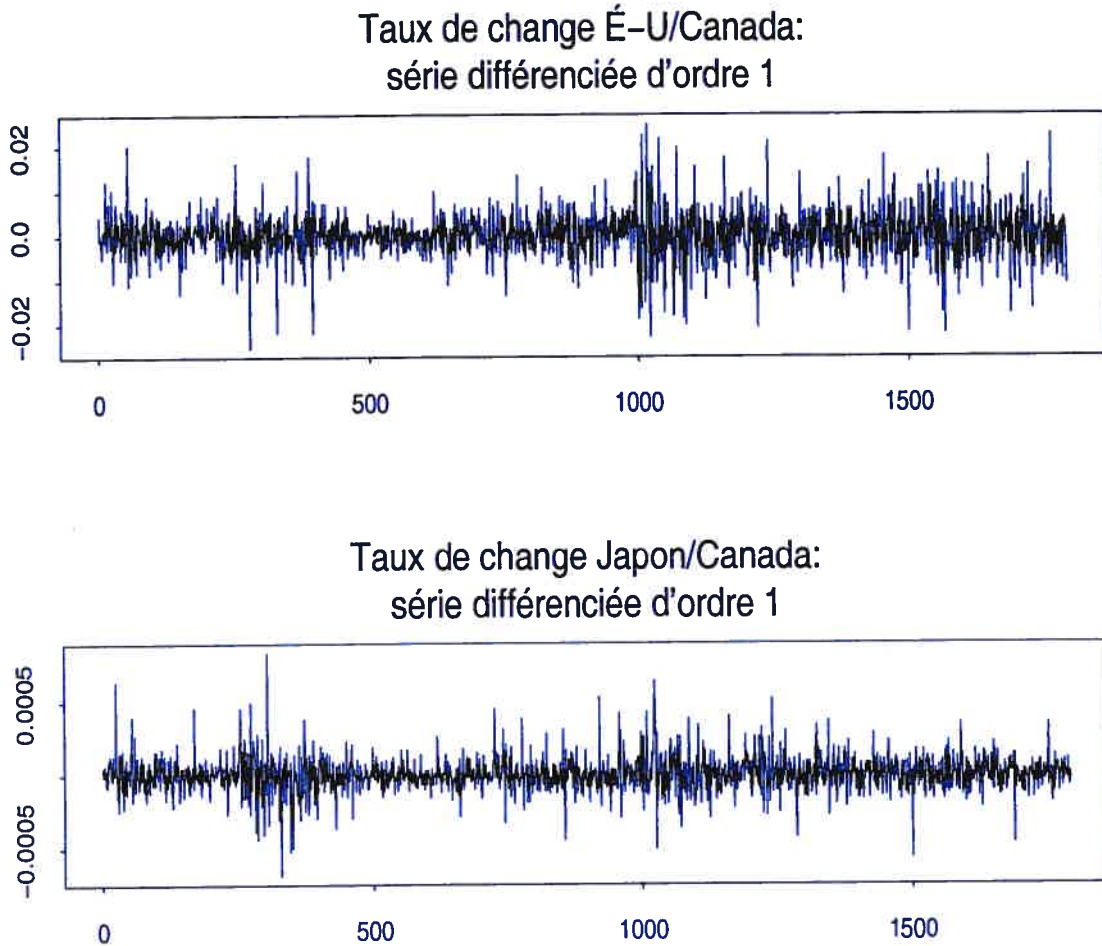


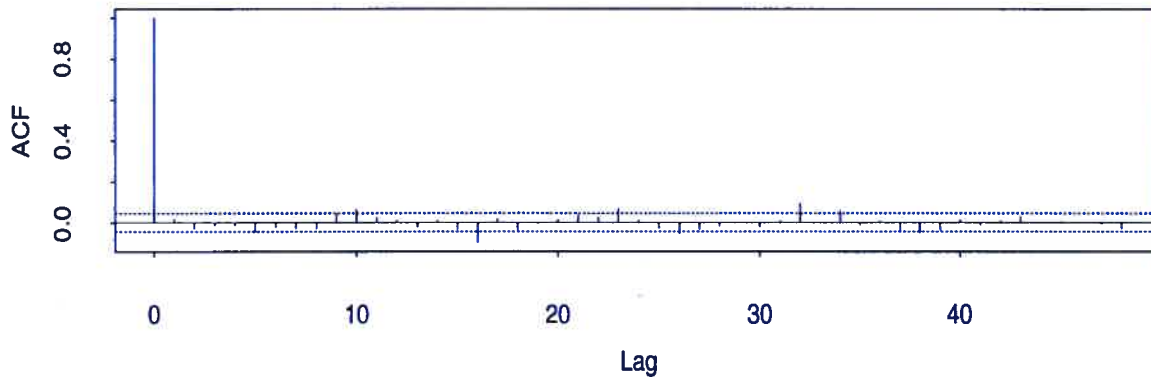
FIGURE 3.2.3. Les taux de change É-U/Canada et Japon/Canada différenciés

3.2.3. Analyse de corrélation croisée

Un bref survol des graphiques des corrélations croisées reportés sur la figure 3.2.5, nous permet de dire qu'il existe trois corrélations croisées significatives au niveau 5%, soit aux délais $-2, 0, 25$. La corrélation entre les deux taux de change est manifestement plus marquée au délai 0, où $\hat{\rho}_a^{(12)}(0) = 0.41$.

Il reste, pour clore cette partie, à analyser les résultats des tests de Koch et Yang et de Hong. La figure 3.2.6 reporte les niveaux de signification empiriques du test $Q_{KY}^*(M, i)$ pour différents délais. Il est remarquable de voir que toutes les probabilités sont largement inférieures au niveau de signification de 0.05 et ce pour les délais $M = 6, 12, 24$. Pour les délai $M = 36$ et $M = 48$,

Taux de change É-U/Canada: série différenciée d'ordre 1



Taux de change Japon/Canada: série différenciée d'ordre 1

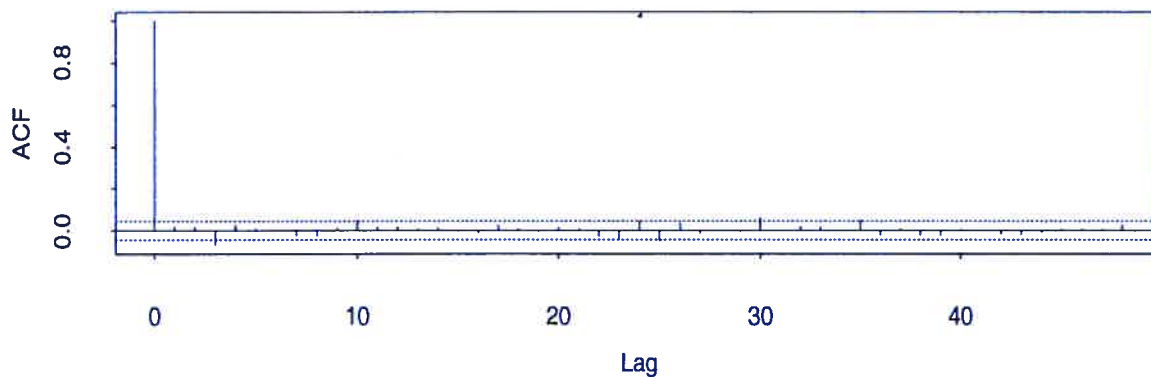


FIGURE 3.2.4. Autocorrélations des taux de change différenciés

nous constatons que l'hypothèse de non corrélation est rejetée de façon évidente pour les valeurs $i = 0, 1, \dots, 15$, alors que les probabilités commencent à augmenter pour les autres valeurs de i sans que cela ne change en rien quant à notre conclusion qui est le rejet de l'hypothèse de non corrélation. Tout compte fait, le test de Koch et Yang, pour cet exemple, rejette l'hypothèse de non corrélation des deux séries considérées à tous les délais.

Pour ce qui est du test de Hong, nous reportons dans le tableau 3.2.1 uniquement les valeurs de la statistique de ce test, pour différents délais et différents noyaux. Les résultats apparaissant dans ce tableau, nous amène sans ambiguïté, à rejeter l'hypothèse de non corrélation au niveau 0.05, car toutes largement supérieures à la valeur critique qui est égale à 1.64 et ceci pour tous les délais et avec tous les noyaux.

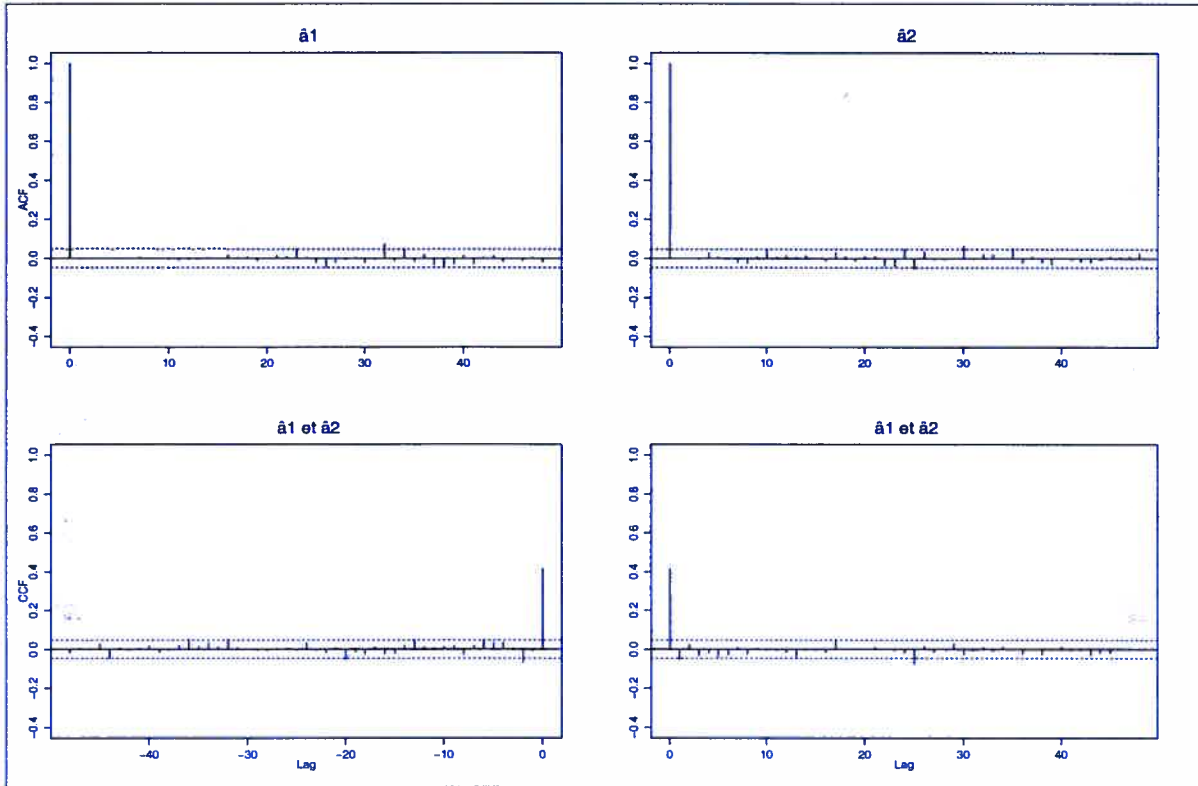


FIGURE 3.2.5. Autocorrélations et corrélations croisées des séries résiduelles \hat{a}_{1t} et \hat{a}_{2t} relatives aux taux de change.

T_n	Valeurs de Q_{HO}			
	Bartlett	Daniell	Parzen	Tronqué
6	138.33	110.50	99.97	63.33
12	100.90	79.46	55.19	44.81
24	72.31	56.51	35.54	32.40
36	59.41	46.34	28.39	27.00
48	51.62	40.37	24.38	22.74

TABLEAU 3.2.1. Valeurs de la statistique $Q_{HO}(w, T_n)$ pour différents noyaux et différentes valeurs de T_n , appliquées aux taux de change.

Pour conclure cette partie pratique, et compte tenu de ce qui vient d'être rapporté à travers ces deux exemples, il semble que le test de Hong a plus d'aptitude à détecter d'éventuelles corrélations que le test de Koch et Yang.

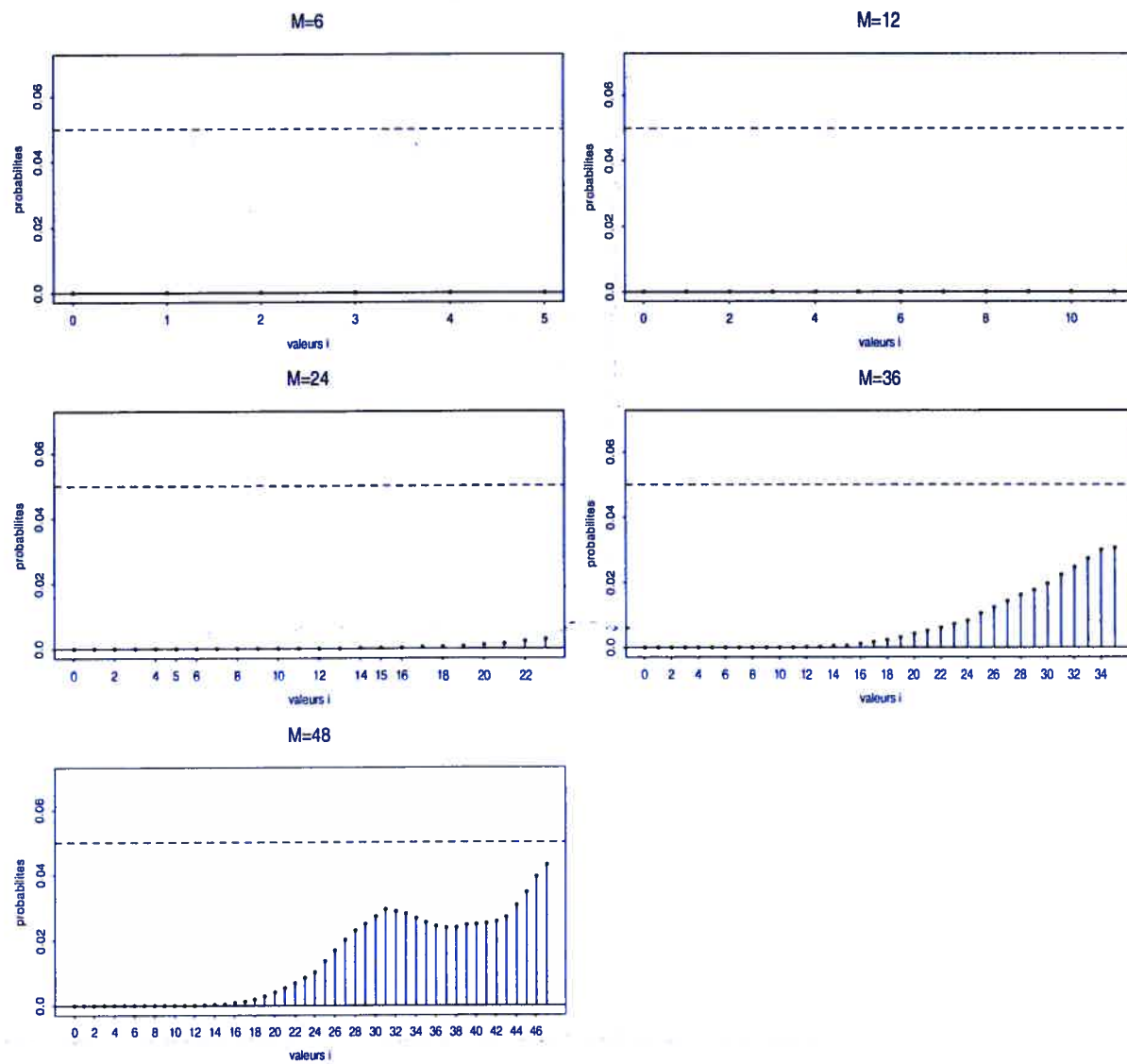


FIGURE 3.2.6. Niveaux de signification empiriques du test $Q_{KY}^*(M, i)$ pour différentes valeurs de M et de i , appliqués aux taux de change.

CONCLUSION

L'objectif assigné à ce mémoire était partagé entre d'une part, tester l'indépendance (ou la non corrélation dans le cas des séries non gaussiennes) de deux séries chronologiques univariées et stationnaires, et d'autre part comparer la puissance des outils utilisés à cet effet. Deux approches ont été retenues pour atteindre ce double objectif.

La première fait intervenir le test de Koch et Yang (1986). Cette approche vient pallier aux insuffisances observées dans le test de Haugh (1976) qui omet de considérer de possibles dépendances existantes entre les différentes corrélations croisées consécutives.

Dans la deuxième démarche, nous nous sommes imprégnés de la méthode de Hong (1996) qui repose sur l'idée d'utiliser des noyaux comme facteurs de pondération dans la somme des corrélations croisées, justifiant cela par le fait qu'ils existent plusieurs noyaux qui rendent le test plus puissant que celui de Haugh.

Cette étude commence, pour ne pas faillir à la règle, par une brève description des principales caractéristiques des séries chronologiques, suivi d'une analyse théorique des tests d'indépendance considérés. Nous avons procédé ensuite à des simulations, à raison de 10 000 réalisations pour chaque cas, dans le but de consolider les propriétés asymptotiques des tests décrits auparavant. Les expériences ainsi effectuées nous ont permis de jauger des valeurs des niveaux empiriques et des puissances des tests sur des séries de tailles finies. Ainsi, nous avons vu que certains niveaux étaient plus ou moins bien contrôlés avec certains modèles.

Bien que le test de Hong avec un noyau autre que le noyau uniforme tronqué soit reconnu pour être plus puissant que le test de Haugh, notre étude de Monte Carlo fait ressortir la supériorité du test de Koch et Yang $Q_{KY}^*(M, i)$, pour des valeurs de $i > 0$, lorsque la deuxième série est définie par un modèle de fonction transfert faisant intervenir un grand nombre de valeurs retardées de la première série.

En ce qui concerne les exemples pratiques, deux cas ont été traités. Le premier concerne deux séries de données sur les indices de la bourse des valeurs à New York et à Sydney. L'analyse des corrélations indique une forte corrélation croisée entre les deux séries au délai -1 . L'analyse des résultats des tests d'indépendance retenus pour cette étude conclut que le test de Hong rejette avec une forte évidence l'hypothèse d'indépendance au niveau 5%, pour tous les noyaux et pour tous les délais. Par contre, le test de Koch et Yang, bien qu'il rejette l'hypothèse d'indépendance aux délais $M = 6, 12$ et 24 au niveau 5%, ne rejette pas au délai $M = 36$ pour les valeurs de $i = 10, \dots, 13$ et au délai $M = 48$ pour les valeurs de $i \geq 8$.

Pour le deuxième exemple, nous avons choisi deux séries représentées par des données sur le taux de change des États-Unis et le Canada, et celui du Japon et le Canada. Le corrélogramme croisé résiduels des deux séries modélisés par des modèles $AR(18)$ et $AR(3)$ respectivement, présente des corrélations croisées significatives aux délais $-2, 0$ et 25 , la plus marquée étant au délai $h = 0$. Par ailleurs, les résultats des tests d'indépendance ont montré que les deux tests considérés rejettent l'hypothèse d'indépendance au niveau de 5%, avec cependant une mention spéciale pour le test de Hong qui le fait avec plus d'évidence.

Ces deux exemples, illustrent la capacité de chacun des deux tests considérés à repérer d'éventuelles dépendances entre deux séries ARMA stationnaires et univariées. Le test de Hong semble plus convaincant que celui de Koch et Yang, du moins dans le deuxième exemple.

ANNEXE

Suite des graphiques illustrant les niveaux empiriques des couples de modèles indépendants $AR(1)$ ou $MA(1)$.

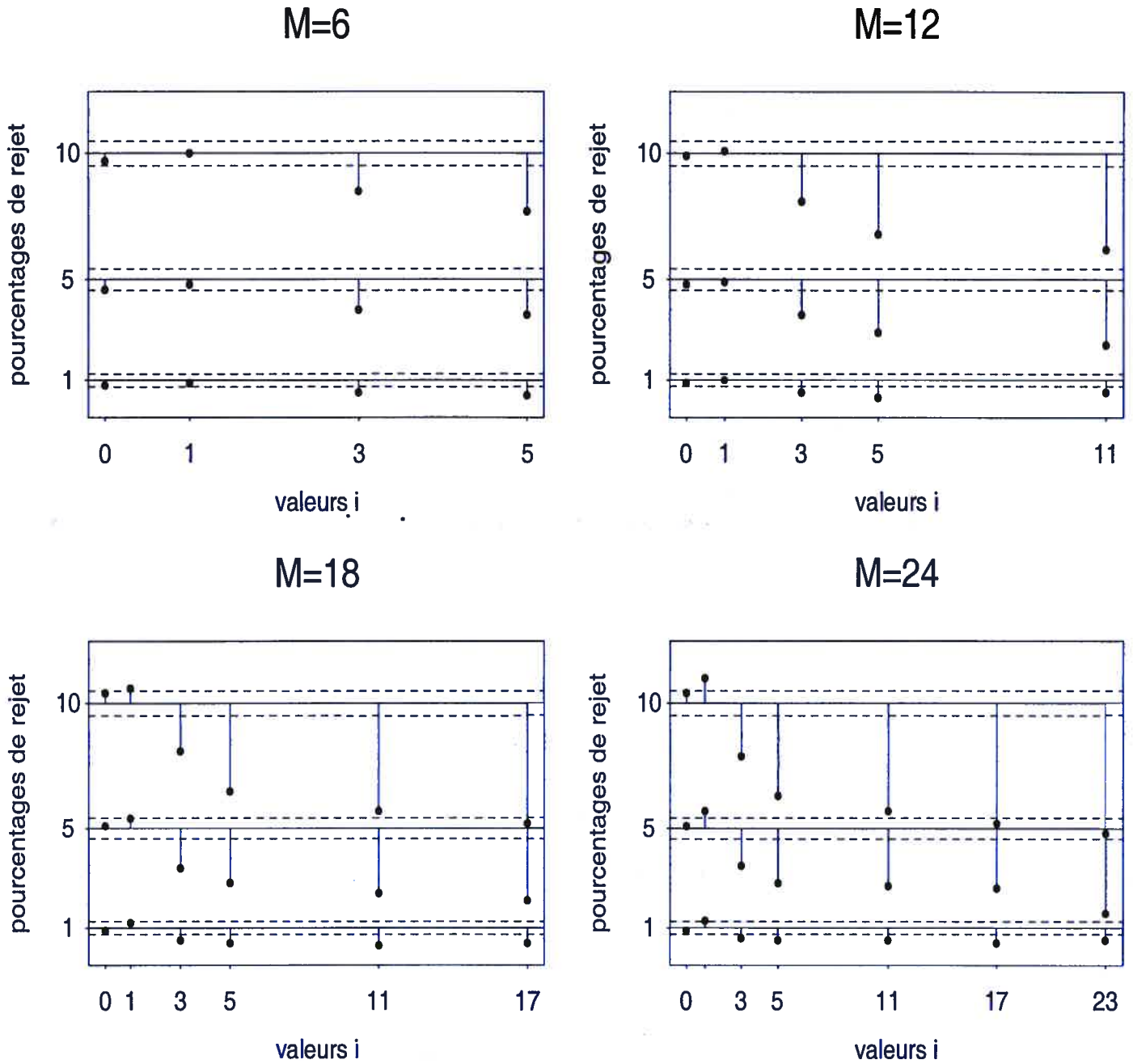


FIGURE 3.2.7. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 100$.

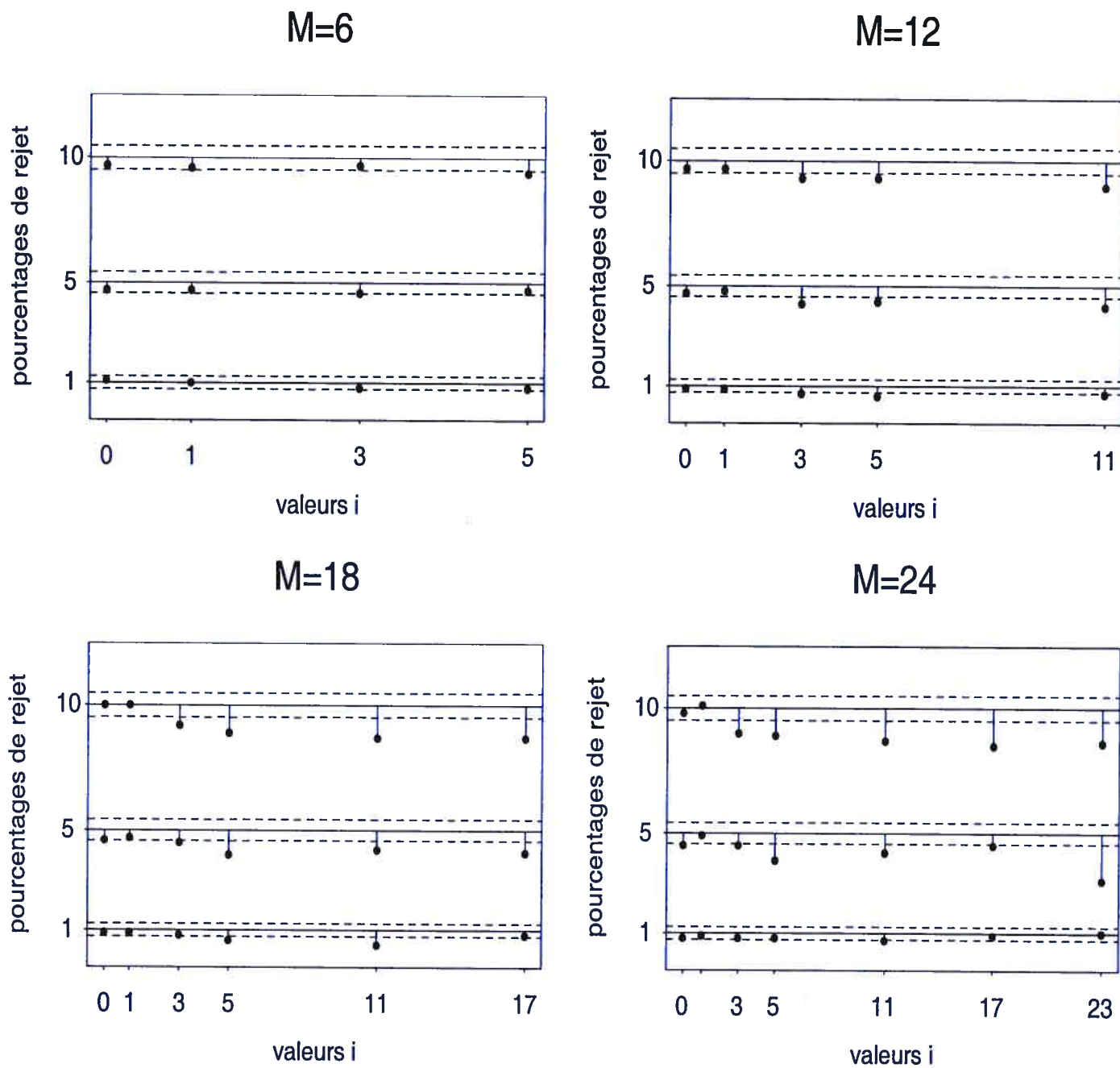


FIGURE 3.2.8. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 500$.

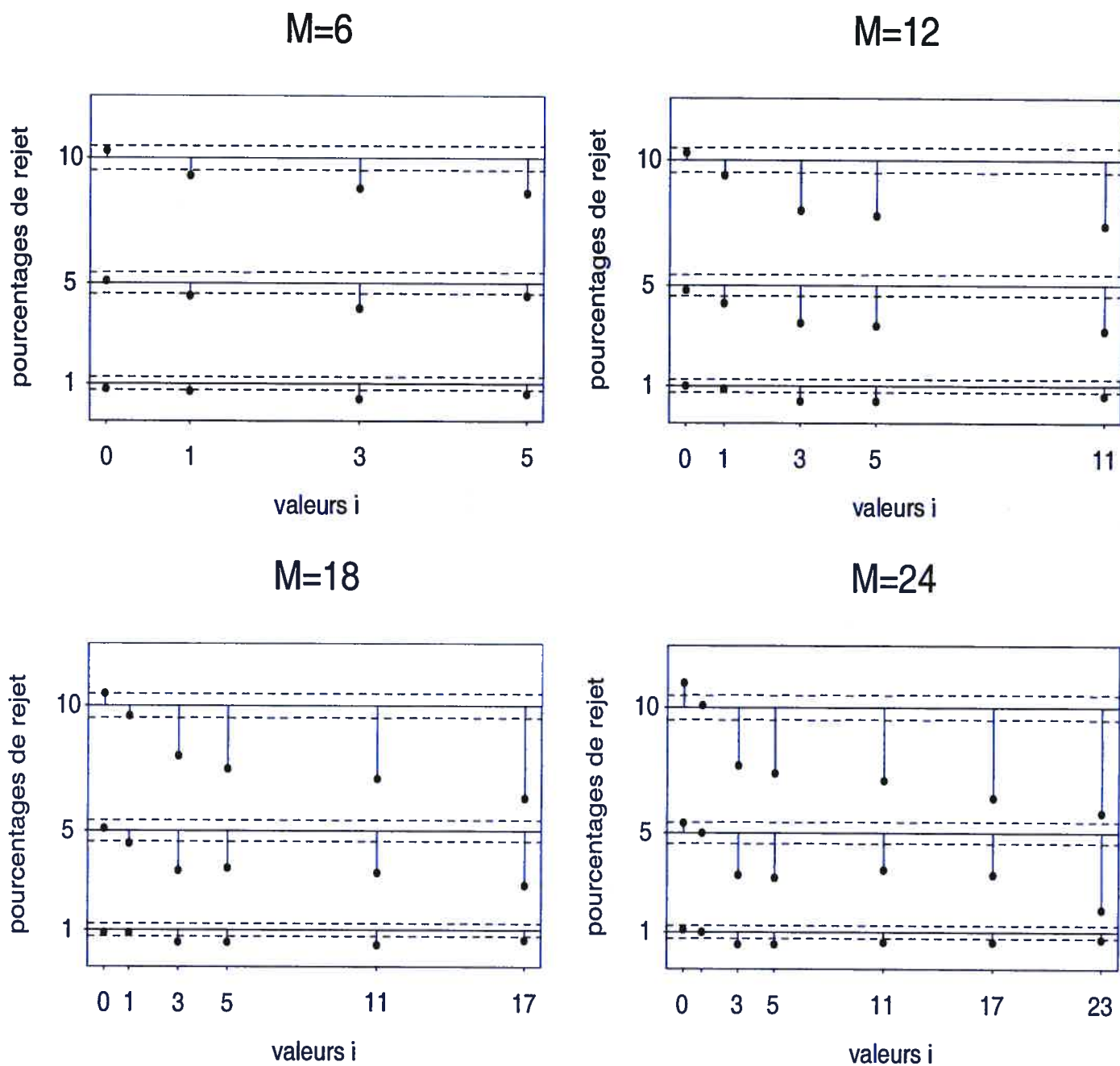


FIGURE 3.2.9. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 100$.

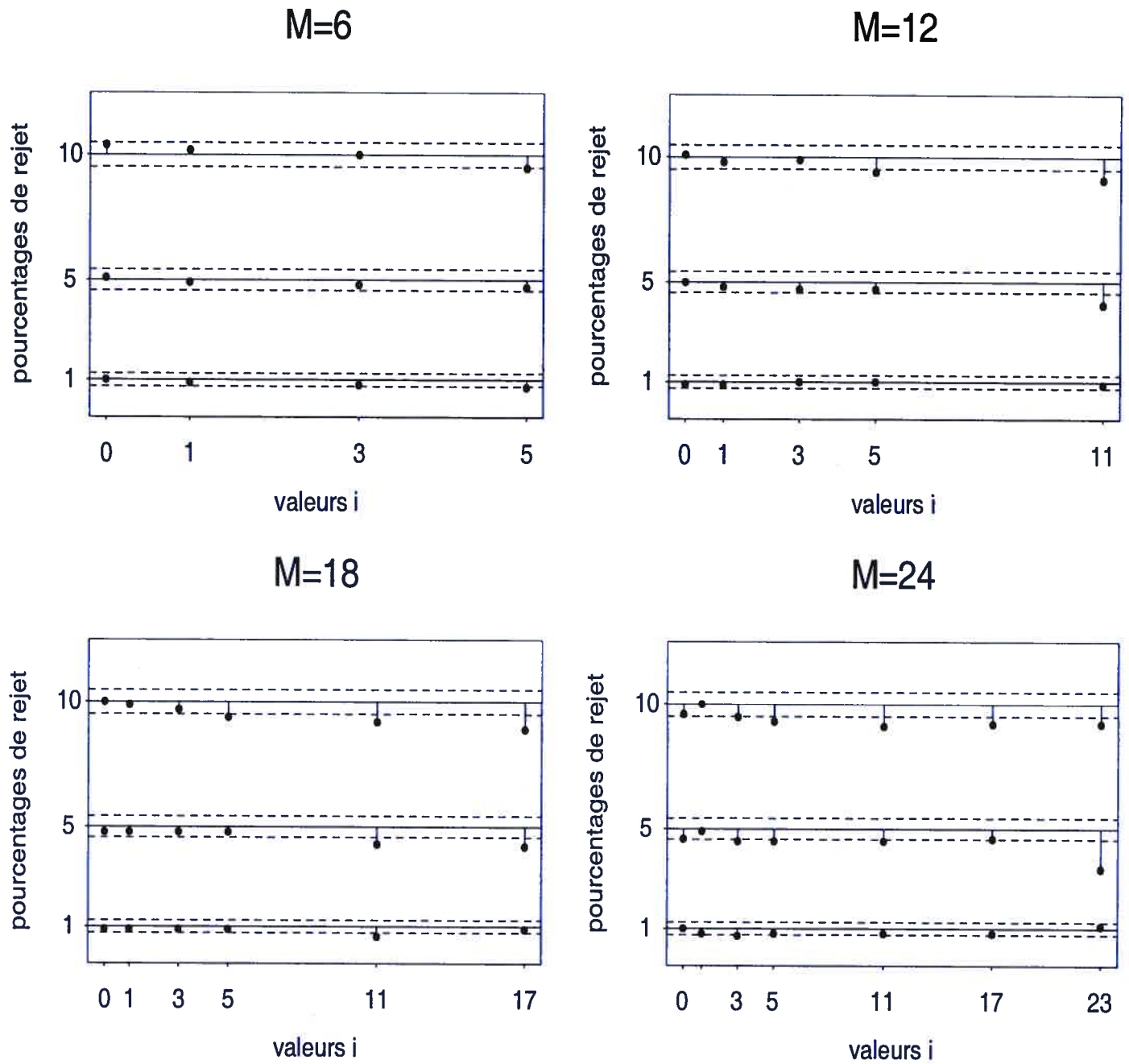


FIGURE 3.2.10. Pourcentages de rejet avec $Q_{KY}^*(M, i)$ en fonction de M et de i pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 500$.

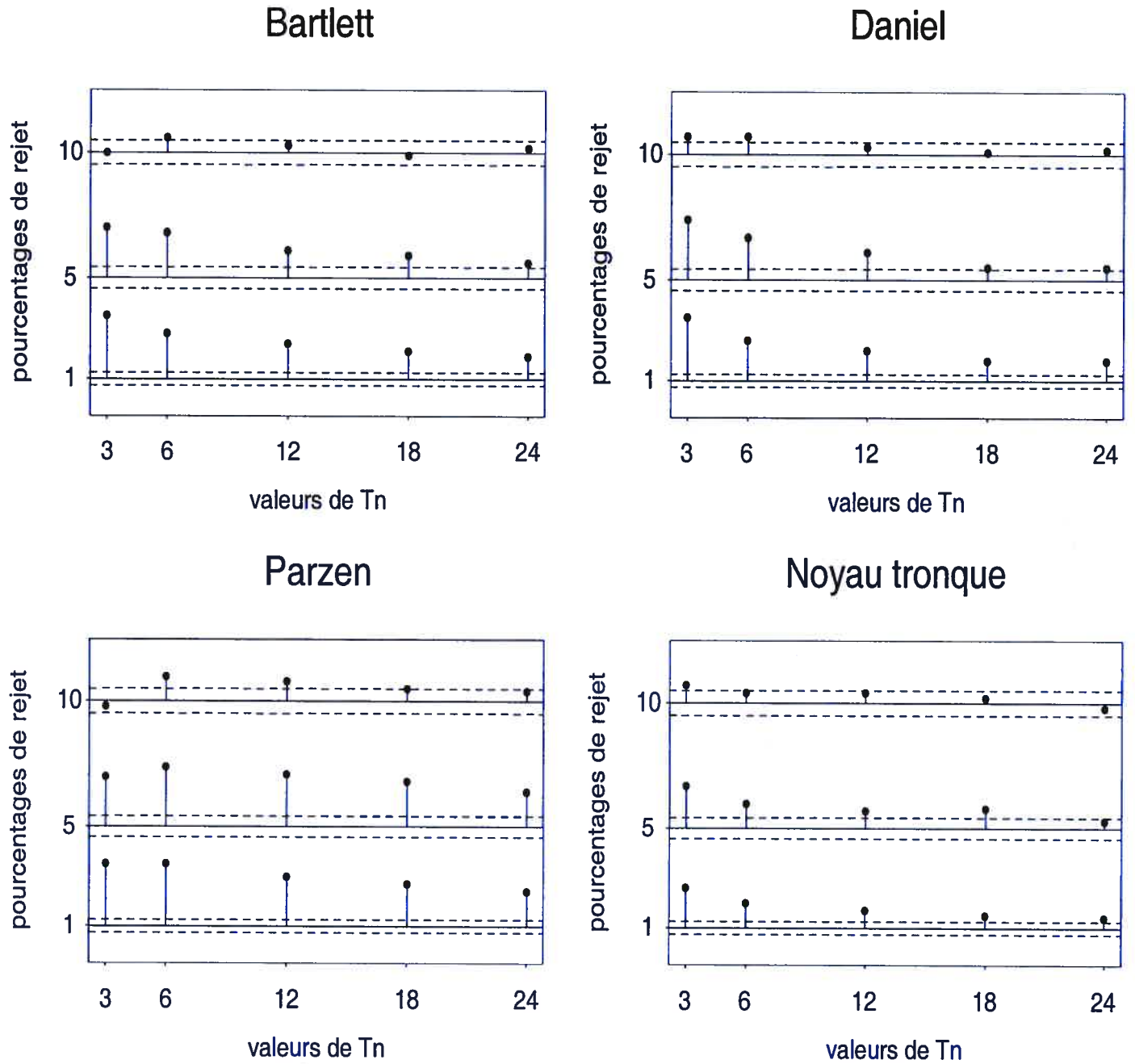


FIGURE 3.2.11. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 100$.

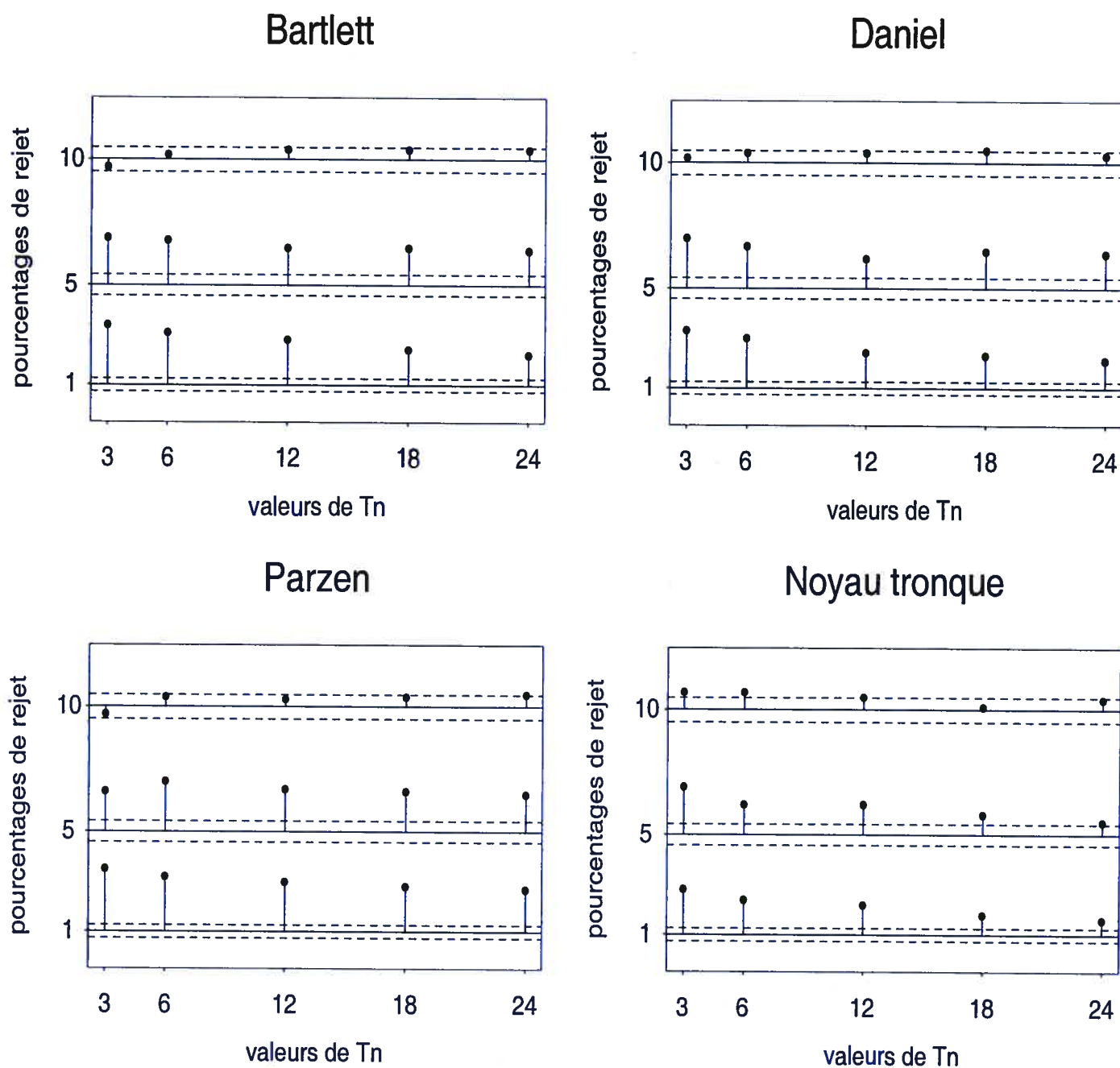


FIGURE 3.2.12. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries AR(1) indépendantes, $n = 500$.

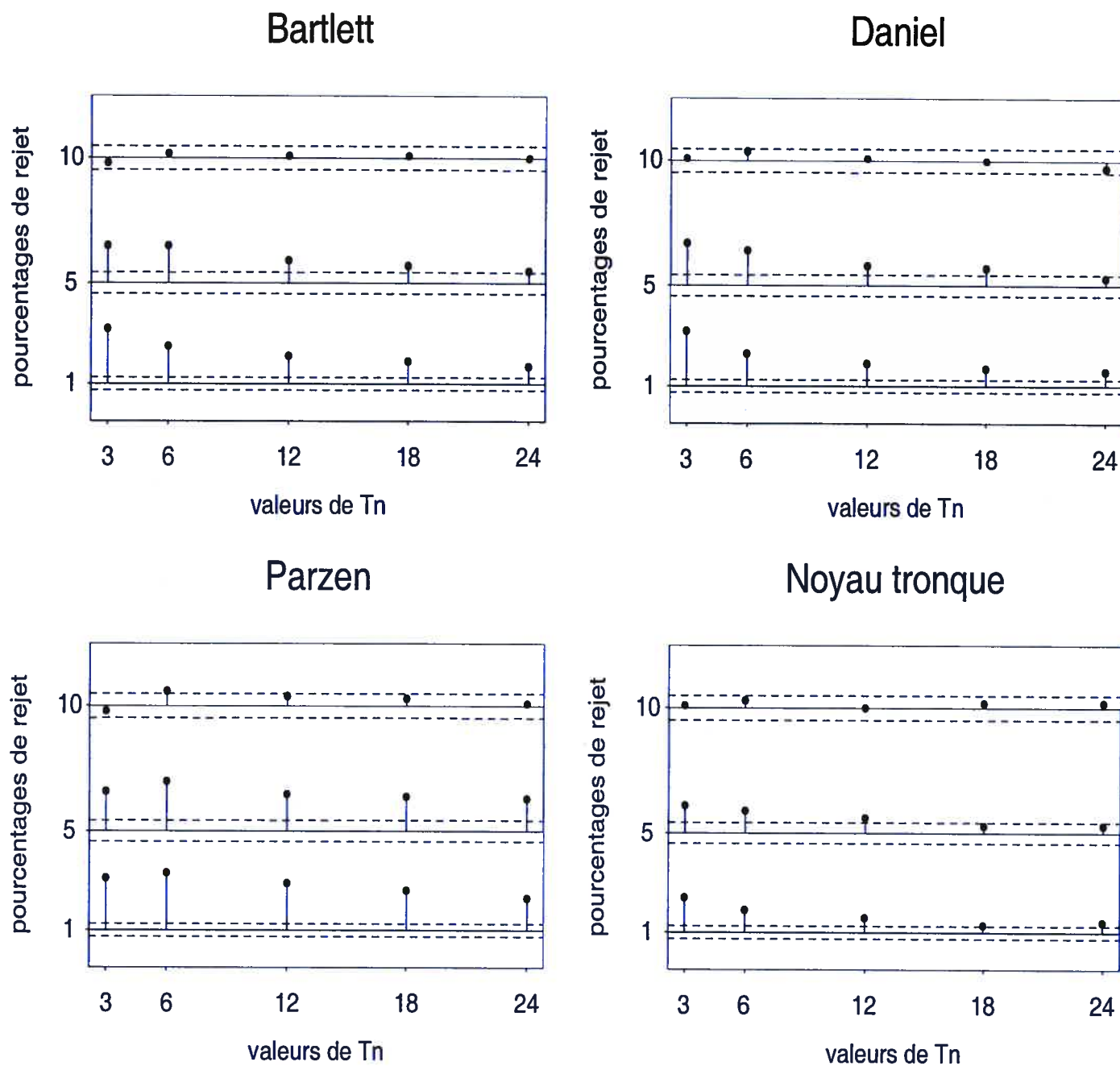


FIGURE 3.2.13. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 100$.

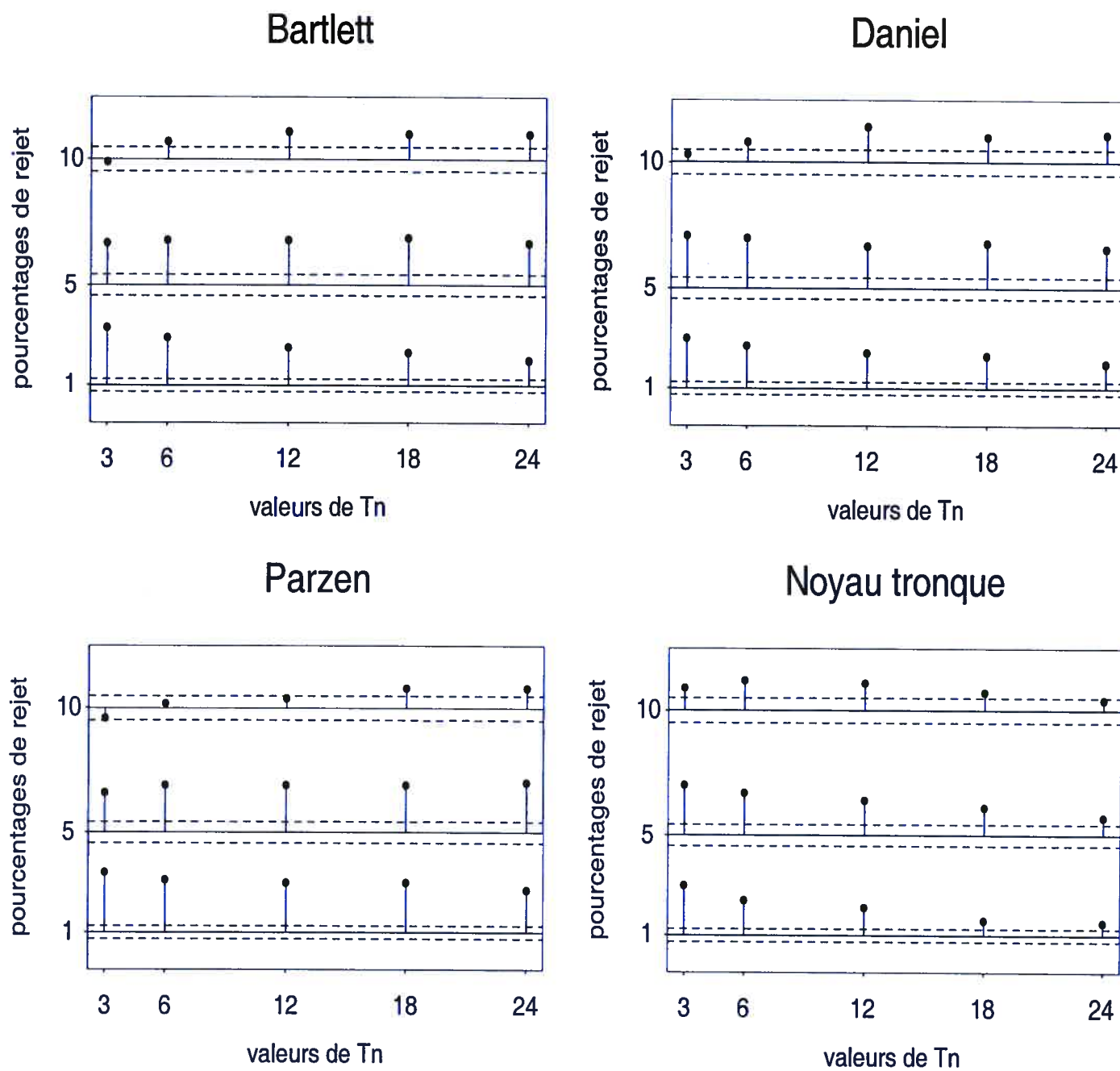


FIGURE 3.2.14. Pourcentages de rejet avec $Q_{HO}(w, T_n)$ en fonction de w et de T_n , pour deux séries MA(1) indépendantes, $n = 500$.

BIBLIOGRAPHIE

BROCKWELL, P.J. et DAVIS, R.A.(1996). *Introduction to Time Series and Forecasting*. Springer-Verlag, New-York.

FERGUSON, T.S.(1996). *A Course in Large Sample Theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Floride.

GERBEAU, A.(2001). Comparaison de tests d'indépendance de deux séries chronologiques. Rapport de travail dirigé, maîtrise en statistique, Département de mathématiques et statistique, Université de Montréal.

GEWEKE, J.(1981a). The approximate slopes of econometric tests. *Econometrica* **49**, 1427-42.

GEWEKE, J.(1981b). A comparison of tests of independence of two covariance stationary time series. *Journal of the American Statistical Association* **76**, 363-73.

GIL-PELAEZ, J.(1951). Note on the inversion theorem. *Biometrika* **38**, 481-2.

GRAYBILL, F.A.(1976). *Theory and Application of the Linear Model*. Duxbury Press, Boston.

HAUGH, L.D.(1976). Checking the independence of two covariance-stationary time series : a univariate residual cross-correlation approach. *Journal of the American Statistical Association*. **71**, 378-385.

HONG, Y.(1996). Testing for independence between two covariance stationary time series. *Biometrika* **83**, 615-625.

IMHOF, J.P.(1961). Computing the distribution of quadratic forms in normal variables. *Biometrika*, **34**, 327-355.

KOCH, P.D. et YANG, S.S.(1986). A method for testing the independence of two time series that accounts for a potential pattern in the cross-correlation function. *Journal of the American Statistical Association*. **81**, 533-544.

KOERTS, J. et ABRAHAMSE, A.P.J.(1969). *On the Theory and Application of the General Linear Model*, Rotterdam University Press, Rotterdam.

PRIESTLEY, M.B.(1981). *Spectral Analysis and Time Series*, Volume 1, Academic Press, London.

