

Université de Montréal

MOYENNAGE BAYÉSIEN DE MODÈLES DE  
RÉGRESSION LINÉAIRE SIMPLE

par

Elena Alice DRAGOMIR

Département de mathématiques et de statistique  
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Maître ès sciences (M.Sc.)  
en statistique

décembre 2003



QA

3

U54

2004

v.004

**Direction des bibliothèques**

**AVIS**

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

**NOTICE**

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

MOYENNAGE BAYÉSIEN DE MODÈLES DE  
RÉGRESSION LINÉAIRE SIMPLE

présenté par

**Elena Alice DRAGOMIR**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Pierre DUCHESNE*

---

(président-rapporteur)

*Jean-François ANGERS*

---

(directeur de recherche)

*Yves LEPAGE*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

*13 février 2004*

---

## SOMMAIRE

---

Dans ce mémoire nous introduisons le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, comme une alternative plus simple à la régression linéaire multiple, du point de vue de la complexité des calculs des prédictions des observations. Nous présentons aussi des mesures de performance. Pour ces mesures, le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est aussi bon dans certains cas que le modèle de régression linéaire multiple. La réalisation et l'analyse des modèles sont faites sous l'approche bayésienne. La comparaison des modèles est réalisée à l'aide de la perte espérée *a posteriori* et d'autres mesures de performance prédictive. Ces comparaisons se font à l'aide de simulations, où nous considérons des valeurs différentes de la corrélation entre les variables explicatives et des valeurs différentes des probabilités *a posteriori* des modèles inclus dans le moyennage bayésien. Elles sont analysées par rapport aux différents "vrais" modèles.

## SUMMARY

---

We introduce a Bayesian averaging of simple linear model as an alternative to multiple regression model. The alternative procedure should decrease the complexity of the evaluation of the predictive observation. We also introduce performance measures to compare both approaches. In certain cases, the Bayesian averaging model is better than the multiple regression model. Using simulations, both approaches are compared for different scenarios involving the correlation of the covariate, the posterior weight and several “true” models.

## MOTS CLÉS

---

Moyennage bayésien de modèles ; Régression linéaire simple ; Régression linéaire multiple ; Modèle bayésien ; Performances prédictives ; Score logarithmique.

## KEYWORDS

---

Bayesian model averaging ; Simple linear regression ; Multiple linear regression ; Bayesian model ; Predictive performance ; Logarithmic scoring.



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>SOMMAIRE</b> .....	iii
<b>SUMMARY</b> .....	iv
<b>MOTS CLÉS</b> .....	v
<b>KEYWORDS</b> .....	vi
<b>Liste des figures</b> .....	ix
<b>Liste des tableaux</b> .....	x
<b>Remerciements</b> .....	xiii
<b>INTRODUCTION</b> .....	1
<b>Chapitre 1. Modèles de régression linéaire multiple</b> .....	4
1.1. Description de la régression linéaire multiple .....	4
1.2. Approche classique .....	5
1.3. Modèle bayésien général .....	9
1.4. Moyennage bayésien de modèles .....	16
1.4.1. Description .....	17
1.4.2. Approche des “fenêtres d’Occam” .....	19
1.4.3. Approche par la méthode de Monte Carlo markovienne .....	20
1.5. Performances prédictives des modèles .....	21
<b>Chapitre 2. Moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple</b> .....	24

2.1.	Description des modèles.....	24
2.2.	Comparaison des modèles analysés.....	28
2.2.1.	Description du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple.....	29
2.2.2.	Fonction de perte espérée <i>a posteriori</i> .....	30
2.2.3.	Analyse de la différence des pertes espérées <i>a posteriori</i> des modèles analysés.....	33
<b>Chapitre 3.</b>	<b>Simulation</b> .....	<b>35</b>
3.1.	Description des simulations.....	36
3.1.1.	Génération des observations.....	36
3.1.2.	Ajuster les observations.....	38
3.1.3.	Calculs des performances prédictives.....	40
3.1.4.	Comparaison des modèles.....	42
3.2.	Analyse de résultats.....	44
3.3.	Conclusions des simulations.....	52
3.4.	Exemple pratique : Crime et châtimeant.....	55
<b>Conclusion.</b>	.....	<b>60</b>
<b>Annexe A.</b>	<b>Programme S-plus pour les simulations</b> .....	<b>A-i</b>
<b>Annexe B.</b>	<b>Résultats des simulations</b> .....	<b>B-i</b>
<b>Annexe C.</b>	<b>Courbes d'ajustement</b> .....	<b>C-i</b>
<b>Annexe D.</b>	<b>Programme S-plus et les résultats pour l'exemple "Crime et châtimeant"</b> .....	<b>D-i</b>
<b>Bibliographie</b>	.....	<b>E-i</b>

## LISTE DES FIGURES

---

1.4.1	Méthode des fenêtres d'Occam : L'interprétation des rapports <i>a posteriori</i> des modèles .....	20
3.2.1	Distribution de $SSE_{M/P}$ par rapport à la corrélation $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles : $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$ ; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1 et 0 .....	48
3.2.2	Distribution de $\text{Var}_{M/P}$ par rapport à la corrélation $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles : $\beta_1 = 2$ et $\beta_2 = 1$ , 0,75; 0,5; 0,25; 0,1 et 0 .....	49
3.2.3	Distribution de $SSE_{M/P}$ par rapport à la corrélation $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles : $(\beta_1; \beta_2) = (0;0)$ , (1;1), (2;2) et (3;3) .....	52
3.2.4	Distribution de $\text{Var}_{M/P}$ par rapport à la corrélation $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles : $(\beta_1; \beta_2) = (0;0)$ , (1;1), (2;2) et (3;3) .....	53
3.2.5	Distribution de $AM_{M/P}$ par rapport à la corrélation $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles : $(\beta_1; \beta_2) = (0;0)$ , (1;1), (2;2) et (3;3) .....	54

## LISTE DES TABLEAUX

---

3.1.1	Valeurs des coefficients $\beta$ considérés dans la génération de Y .....	37
3.2.1	Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple, $n=20$ .....	45
3.2.2	Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple, $n=50$ .....	46
3.2.3	Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple, $n=100$ .....	47
3.2.4	Modèles simulés pour produire des probabilités <i>a posteriori</i> égales....	50
3.2.5	Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple .....	51
3.4.1	Variables explicatives pour le comportement criminel dans les États-Unis en 1960 .....	55
3.4.2	Probabilités <i>a posteriori</i> de modèles inclus dans le moyennage bayésien	57
3.4.3	Résultats de l'analyse de modèles dans l'exemple "Crime et châtement"	58
3.4.4	"Crime et châtement", pourcentage d'amélioration de la performance prédictive. Source : Données 1 : Annexe D ; Données 2 : Madigan, Gavrin et Raftery, 1995 .....	59
B.0.1	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2)=(1;1)$ , $n=20$ .....	B-ii

B.0.2	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ , $n=20$ .....	B-iii
B.0.3	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ , $n=20$ .....	B-iv
B.0.4	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,25)$ , $n=20$ .....	B-v
B.0.5	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,1)$ , $n=20$ .....	B-vi
B.0.6	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ , $n=20$ .....	B-vii
B.0.7	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 1)$ , $n=20$ .....	B-viii
B.0.8	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,75)$ , $n=20$ .....	B-ix
B.0.9	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,5)$ , $n=20$ .....	B-x
B.0.10	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ , $n=20$ .....	B-xi
B.0.11	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ , $n=20$ .....	B-xii
B.0.12	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ , $n=20$ .....	B-xiii
B.0.13	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1)$ , $n=50$ .....	B-xiv
B.0.14	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ , $n=50$ .....	B-xv
B.0.15	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ , $n=50$ .....	B-xvi
B.0.16	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,25)$ , $n=50$ .....	B-xvii
B.0.17	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,1)$ , $n=50$ .....	B-xviii
B.0.18	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ , $n=50$ .....	B-xix
B.0.19	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 1)$ , $n=50$ .....	B-xx
B.0.20	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,75)$ , $n=50$ .....	B-xxi
B.0.21	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,5)$ , $n=50$ .....	B-xxii
B.0.22	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ , $n=50$ .....	B-xxiii
B.0.23	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ , $n=50$ .....	B-xxiv
B.0.24	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ , $n=50$ .....	B-xxv
B.0.25	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1)$ , $n=100$ .....	B-xxvi
B.0.26	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ , $n=100$ .....	B-xxvii

B.0.27	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ , $n=100$ .....	B-xxviii
B.0.28	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,25)$ , $n=100$ .....	B-xxix
B.0.29	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,1)$ , $n=100$ .....	B-xxx
B.0.30	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ , $n=100$ .....	B-xxxi
B.0.31	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 1)$ , $n=100$ .....	B-xxxii
B.0.32	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,75)$ , $n=100$ .....	B-xxxiii
B.0.33	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,5)$ , $n=100$ .....	B-xxxiv
B.0.34	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ , $n=100$ .....	B-xxxv
B.0.35	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ , $n=100$ .....	B-xxxvi
B.0.36	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ , $n=100$ .....	B-xxxvii
B.0.37	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (0; 0)$ , $n=20$ .....	B-xxxviii
B.0.38	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (2; 2)$ , $n=20$ .....	B-xxxix
B.0.39	Résultats de la simulation pour $(\beta_1; \beta_2) = (3; 3)$ , $n=20$ .....	B-xl
C.0.1	Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour $SSE_{M/P}$ par rapport à la corrélation entre les variables explicatives $X_1$ et $X_2$ .....	C-i
C.0.2	Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour $Var_{M/P}$ par rapport à la corrélation entre les variables explicatives $X_1$ et $X_2$ .....	C-iv
C.0.3	Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour $AM_{M/P}$ par rapport à la corrélation entre les variables explicatives $X_1$ et $X_2$ .....	C-vi

## REMERCIEMENTS

---

J'aimerais remercier toute ma famille dans laquelle j'ai toujours trouvé le support dans toutes mes activités et principalement à mon mari, Andrei, qui est depuis plus de 10 ans mon amour et mon meilleur ami et grâce à qui j'ai fait qu'avancer sur tous les plans. Je remercie aussi à ma fille, Catherine, qui est la meilleure fille que Dieu pouvait nous donner, à laquelle j'ai donné naissance il y a un an. Le troisième membre de ma famille que je voudrais remercier, est ma mère, Elena, qui m'a bien remplacé dans mes responsabilités de mère, pendant les moments quand je ne pouvais pas être près de Catherine et avec laquelle j'ai passé des merveilleux moments, tout au long de sa présence chez nous.

Avec la même intensité d'émotions, j'aimerais remercier mon directeur de recherche, Jean-François, dans lequel j'ai trouvé un très grand support et compréhension tout au long de ma recherche et qui a très bien compris que mon nouveau rôle de mère est très excitant et en même temps très demandant. Merci, pour votre disponibilité et votre professionnalisme et votre amitié qui vous caractérisent si bien. Merci, aussi pour la belle ambiance et la belle liaison que vous créez autour des vos étudiants, sans vous on n'aurait pas pu être si proches.

Pour terminer, je voudrais remercier tous mes collègues, pour la bonne collaboration et la bonne amitié que nous avons eu, depuis que je vous connais et qui a embelli notre quotidien. J'aimerais énumérer : Lamya, Alain, Hacène, Nadine, James, les deux Étienne, Annie, Geneviève, Pierre, Najem et je sais que je n'ai pas fini la liste d'amis. Avec vous, les deux années passés à Université de Montréal

sont parmi les meilleurs années de ma vie.

J'aimerais aussi remercier tous les professeurs du Département de Mathématiques et de Statistique pour leur professionnalisme et leur disponibilité, et grâce à qui j'ai pu bénéficier pendant mes deux années de scolarité, de financement pour mon travail de recherche, concrétisé par une bourse d'excellence. Merci aussi à la Faculté des études supérieures, grâce à qui j'ai gagné un concours de bourse et qui m'a accordé la bourse offerte par la compagnie "Bombardier". Merci pour la confiance que vous m'avez accordée.



# INTRODUCTION

---

Dans ce mémoire nous nous intéressons aux modèles de régression linéaire utilisés afin de produire des prédictions de variables dépendant de plusieurs variables explicatives. Notre but est, en utilisant une approche bayésienne, de trouver une façon de combiner plusieurs modèles de régression linéaire simple pouvant remplacer un modèle de régression linéaire multiple et capable de produire des estimations comparables du point de vue des performances prédictives. Nous avons deux raisons pour lesquelles nous voulons remplacer un modèle de régression linéaire multiple. La première est reliée à la situation où nous sommes confrontés avec l'incertitude dans la sélection des modèles. Nous pouvons remarquer que les modèles sélectionnés ne sont pas les mêmes d'une méthode à l'autre. Ainsi une variable explicative peut être sélectionnée par une méthode et non sélectionnée par une autre. Par conséquent, la question qui se pose est : est-ce qu'il faut ou non la considérer comme variable explicative dans la prédiction d'une future observation ? La deuxième raison est que nous voulons trouver un modèle qui est plus simple à calculer qu'un modèle de régression linéaire multiple. Pour répondre au deuxième point, nous savons que le modèle de régression linéaire simple est le seul avec une solution explicite et qui est plus facile à calculer que le modèle de régression linéaire multiple, car il peut se résoudre à l'aide d'une calculatrice de poche. En se limitant aux modèles de régression linéaire simple et sachant que le modèle de moyennage bayésien de modèles est un outil pour résoudre le problème d'incertitude des modèles, nous avons pensé à faire un modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple. Donc, nous prenons toutes les variables explicatives dont nous disposons et nous ajustons pour chacune d'elle, un modèle de régression linéaire simple, qui sera introduit dans le moyennage.

Afin de pouvoir comparer le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, ainsi créé, par rapport au modèle de régression linéaire multiple, nous déterminons la perte espérée *a posteriori* sous chaque modèle. En ce qui concerne les performances prédictives des modèles, nous les comparons à l'aide de la somme des carrés des erreurs, de la variance des prédictions et du score logarithmique, déterminées pour des différents “vrais” modèles, générés à partir des simulations.

Tout d'abord, dans le premier chapitre, nous présentons les principales notions et caractéristiques de la régression linéaire multiple vue par l'approche classique et par l'approche bayésienne, suivie par le moyennage bayésien de modèles dans le cadre de la régression linéaire multiple, présenté sous deux approches : les “fenêtres d'Occam” et Monte Carlo markovienne. À la fin du premier chapitre, nous décrivons les indicateurs à l'aide desquels nous mesurons les performances prédictives des modèles.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple que nous comparerons au modèle de régression linéaire multiple. Dans le moyennage bayésien de modèles nous incluons les modèles de régression linéaire simple, où chacun des modèles inclut une seule variable explicative, tandis que le modèle de régression linéaire multiple est déterminé à partir de l'ensemble de toutes les variables explicatives considérées dans le moyennage. Les modèles ainsi créés, seront comparés par rapport à la perte espérée *a posteriori* calculée pour chaque modèle analysé. Les résultats théoriques, seront illustrés dans le chapitre 3 à l'aide de simulations.

Les simulations, ainsi que l'exemple pratique intitulé “Crime et châtement”, seront décrits et analysés au chapitre 3. Les différentes méthodes sont comparées à l'aide de la somme des carrés des erreurs, de la variance des estimations et du score

logarithmique. À la fin de ce dernier chapitre nous présentons les avantages et les limites du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, en fonction de la corrélation entre les variables explicatives, des probabilités *a posteriori* des modèles et par rapport aux “vrais” modèles.

# Chapitre 1

---

## MODÈLES DE RÉGRESSION LINÉAIRE MULTIPLE

Tout d'abord, dans ce chapitre nous faisons un bref survol des principales notions et caractéristiques de la régression linéaire multiple, tant par l'approche classique et par l'approche bayésienne. Par la suite, nous décrivons la méthode de moyennage bayésien de modèles dans le cadre de la régression linéaire multiple. Les performances de chaque modèle de régression, en ce qui concerne ses capacités de prédiction, sont mesurées à l'aide de la somme des carrés des erreurs, de la variance et du score logarithmique, à la fin du chapitre.

### 1.1. DESCRIPTION DE LA RÉGRESSION LINÉAIRE MULTIPLE

Soit  $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)^t$ ,  $n$  observations d'une variable aléatoire  $Y$ . Supposons qu'il y a  $p$  variables explicatives connues,  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , notées  $\underline{X}_j = (X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn})^t, j = 1, \dots, p$  telles que :

$$Y_i = f(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1.1)$$

où  $\epsilon_i$  est un terme d'erreur et  $f(\cdot)$  est une certaine fonction que nous supposons linéaire. Donc, il existe un vecteur  $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^t$ , composé de  $p+1$  paramètres inconnus, pour lequel nous avons  $f(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{pi}) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} \dots + \beta_p X_{pi}$ . Ce modèle correspond au modèle général de régression linéaire dont il est question dans ce chapitre.

Sous la forme matricielle, ce modèle peut s'écrire comme suit :

$$\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\epsilon} \quad (1.1.2)$$

où  $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_p)$  est la matrice des variables explicatives  $(p + 1) \times n$  de plein rang  $(p + 1)$ ,  $X_0$  étant un vecteur de longueur  $n$ , contenant que des 1,  $\underline{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^t$  est le vecteur des erreurs d'ordre  $n$  et  $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)^t$  est le vecteur de  $p+1$  régresseurs (ou des paramètres du modèle). Pour le modèle (1.1.2) nous avons les hypothèses suivantes.

**Définition 1.1.1.** (*Condition Gauss-Markov*)

*Pour le modèle de régression linéaire (1.1.1), les erreurs  $\epsilon_i$  sont normales, indépendantes et identiquement distribuées, c'est-à-dire*

$$(1) \text{Cov}(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$(2) \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

**Remarque 1.1.1.** *Des équations (1.1.2) et (2) nous obtenons la loi  $\underline{Y} \sim N(\mathbf{X}\underline{\beta}, \sigma^2\mathbf{I})$ , où nous supposons que  $\sigma^2$  est connue.*

**Définition 1.1.2.** *Une variable aléatoire  $\underline{Y}$  est dite de distribution normale multivariée  $N_n(\mu, \Sigma)$ , si  $\underline{Y}$  a la même distribution que  $\underline{Z} = \mathbf{A}\underline{W} + \mu$ , où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $(p + 1) \times n$  de rang  $(p + 1)$ ,  $\Sigma = \mathbf{A}\mathbf{A}^t$  et  $\underline{Z} \sim N_{p+1}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ .*

## 1.2. APPROCHE CLASSIQUE

Pour le modèle (1.1.1) et sous les hypothèses des erreurs (voir définition 1.1.1) nous pouvons estimer les paramètres du modèle de régression linéaire par la méthode des moindres carrés.

**Théorème 1.2.1.** *Pour le modèle de régression linéaire et sous les conditions de Gauss-Markov, le meilleur estimateur sans biais à variance minimale de  $\mathbf{X}\underline{\beta}$ ,*

noté  $\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls}$ , est obtenu lorsque  $\hat{\underline{\beta}}_{ls} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\underline{Y}$ .

Donc, les valeurs ajustées (ou estimées, prédites) de  $\underline{Y}$  ont l'expression suivante :

$$\hat{\underline{Y}}_{ls} = \mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\underline{Y} = \mathbf{H}\underline{Y}, \quad (1.2.1)$$

où  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t$  est appelée "la matrice chapeau", et les estimateurs des erreurs (ou résidus) :

$$\hat{\underline{\epsilon}} = \underline{Y} - \hat{\underline{Y}}_{ls} = \underline{Y} - \mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\underline{Y}.$$

La valeur prédite de  $Y_i$  correspond au  $i$ -ème élément du vecteur  $\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls}$ , et la  $i$ -ème valeur estimée de résidu,  $\hat{\epsilon}_i$ , est la différence entre la  $i$ -ème composante du vecteur  $\underline{Y}$  et sa valeur estimée, c'est-à-dire  $\hat{\epsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$ .

Notons que la matrice de variance-covariance correspondante pour les estimateurs est de la forme,

$$\mathbb{E}[(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})^t] = \sigma^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1},$$

celle des prédicteurs est

$$\mathbb{E}[(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})^t] = \sigma^2\mathbf{H},$$

et celle de estimateurs de résidus est

$$\mathbb{E}[(\hat{\underline{\epsilon}} - \underline{\epsilon})(\hat{\underline{\epsilon}} - \underline{\epsilon})^t] = \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}).$$

Les propriétés des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{I} - \mathbf{H}$  sont énumérées dans le théorème suivant.

**Théorème 1.2.2.** *Sous le modèle de régression linéaire*

- (1)  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{I} - \mathbf{H}$  sont symétriques et idempotentes ;
- (2) le rang de la matrice  $\mathbf{I}_n - \mathbf{H}$  est :  $\text{rang}[\mathbf{I}_n - \mathbf{H}] = \text{tr}[\mathbf{I}_n - \mathbf{H}] = n - (p + 1)$  ;
- (3)  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X} = \mathbf{0}$  ;

(4) les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}$  sont  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{p+1} = 1$ .

**Démonstration :**

(1)  $\mathbf{H}$  est évidemment symétrique et  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})^t = \mathbf{I}_n - \mathbf{H}^t = \mathbf{I}_n - \mathbf{H}$ .

Aussi

$$\mathbf{H}^t\mathbf{H} = [\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t][\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t] = \mathbf{X}\mathbf{I}_{p+1}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t = \mathbf{H}, \text{ et}$$

$$(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})^t(\mathbf{I}_n - \mathbf{H}) = \mathbf{I}_n - 2\mathbf{H} + \mathbf{H}^t\mathbf{H} = \mathbf{I}_n - \mathbf{H}.$$

(2) De (1) nous avons :  $\text{rang}[\mathbf{I}_n - \mathbf{H}] = \text{tr}[\mathbf{I}_n - \mathbf{H}] = n - \text{tr}[\mathbf{H}] = n - (p + 1)$ ,

car

$$\text{tr}[\mathbf{H}] = \text{tr}[\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t] = \text{tr}[\mathbf{X}^t\mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}] = \text{tr}[\mathbf{I}_{p+1}] = p + 1.$$

(3)  $(\mathbf{I}_n - \mathbf{H})\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

Donc, sous les conditions de Gauss-Markov et avec les propriétés énumérées dans la théorème 1.2.2, nous avons les lemmes suivants qui donnent les lois du vecteurs des valeurs prédites et du vecteur des résidus.

**Proposition 1.2.1.** *Pour le modèle de régression linéaire et sous les conditions de Gauss-Markov,  $\hat{\underline{Y}}_{ls} \sim N_n(\mathbf{X}\underline{\beta}, \sigma^2\mathbf{H})$ .*

**Démonstration :** En utilisant l'équation (1.2.1),  $\hat{\underline{Y}}_{ls} = \mathbf{H}\underline{Y}$  et la loi de  $\underline{Y}$ ,  $\underline{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\underline{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ , nous avons :

$$\mathbb{E}(\hat{\underline{Y}}_{ls}) = \mathbb{E}(\mathbf{H}\underline{Y}) = \mathbf{H}\mathbb{E}(\underline{Y}) = \mathbf{H}\mathbf{X}\underline{\beta} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\mathbf{X}\underline{\beta} = \mathbf{X}\underline{\beta}.$$

En ce qui concerne la variance de  $\hat{\underline{Y}}_{ls}$ , celle-ci a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\underline{Y}}_{ls}) &= \mathbb{E}[(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbb{E}(\hat{\underline{Y}}_{ls}))(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbb{E}(\hat{\underline{Y}}_{ls}))^t] = \mathbb{E}[(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})(\hat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})^t] \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})(\mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})^t = \mathbb{E}[\mathbf{X}(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})^t\mathbf{X}^t] \\ &= \mathbf{X}\mathbb{E}[(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})(\hat{\underline{\beta}}_{ls} - \underline{\beta})^t]\mathbf{X}^t = \mathbf{X}\sigma^2(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t = \sigma^2\mathbf{H}. \end{aligned}$$

**Remarque 1.2.1.** La matrice  $\mathbf{H}$  est une matrice singulière, car sa dimension est  $n \times n$ , tandis que son rang est  $(p+1) < n$ , donc le vecteur des valeurs prédites  $\widehat{\underline{Y}}_{ls}$  a une distribution normale singulière. Nous pouvons transformer  $\widehat{\underline{Y}}_{ls}$  par  $\underline{Z} = \mathbf{A}\widehat{\underline{Y}}_{ls} + b$ , où  $\mathbf{A}$  est une matrice  $(p+1) \times n$  de rang  $(p+1)$ . Le vecteur  $\underline{Z}$  a une distribution normale multivariée non singulière de dimension  $(p+1)$ . (voir Srivastava et Khatri, 1979)

**Proposition 1.2.2.** Pour le vecteur des valeurs prédites  $\widehat{\underline{Y}}_{ls}$  de densité singulière, la fonction de densité est donnée par :

$$\left(\frac{2\pi\sigma^2}{n_0+1}\right)^{-\left(\frac{p+1}{2}\right)} \left(\prod_{i=1}^{p+1} \lambda_i\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(n_0+1)}{2\sigma^2}(\widehat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})^t \mathbf{H}^- (\widehat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})\right], \quad (1.2.2)$$

où  $\mathbf{H}^-$  est une matrice inverse généralisée symétrique de  $\mathbf{H}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$  sont les valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}$  et  $n_0$  représente l'importance accordée à l'information a priori. En général  $n_0$  est plus petit que la taille de l'échantillon  $n$  et le rapport  $n_0/n$  caractérise la précision relative de la détermination de la distribution a priori comparée à la précision des observations ( $G$ -prior, voir Zellner, 1971). Donc, conformément au théorème 1.2.2, l'équation (1.2.2) devient :

$$f(\widehat{\underline{Y}}_{ls}) = \left(\frac{2\pi\sigma^2}{n_0+1}\right)^{-\left(\frac{p+1}{2}\right)} \exp\left[-\frac{(n_0+1)}{2\sigma^2}(\widehat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})^t \mathbf{H}^- (\widehat{\underline{Y}}_{ls} - \mathbf{X}\underline{\beta})\right].$$

**Proposition 1.2.3.** Pour le modèle de régression linéaire et sous les conditions de Gauss-Markov,  $\hat{\underline{\epsilon}} \sim N_n(0, \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H}))$ , où la matrice  $(\mathbf{I} - \mathbf{H})$  est singulière.

**Démonstration :** Par la définition de  $\hat{\underline{\epsilon}}$  nous savons que  $\hat{\underline{\epsilon}} = \underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}_{ls} = \underline{Y} - \mathbf{X}\hat{\underline{\beta}}_{ls} = \underline{Y} - \mathbf{H}\underline{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\underline{Y}$ , et en procédant de manière similaire à la démonstration du lemme précédent, nous trouvons la moyenne

$$\mathbb{E}(\hat{\underline{\epsilon}}) = \mathbb{E}[(\mathbf{I} - \mathbf{H})\underline{Y}] = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbb{E}(\underline{Y}) = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{X}\underline{\beta} = 0,$$

car  $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{X}$  et la variance de  $\hat{\underline{\epsilon}}$

$$\text{Var}(\hat{\underline{\epsilon}}) = \mathbb{E}[(\hat{\underline{\epsilon}} - \mathbb{E}(\hat{\underline{\epsilon}}))(\hat{\underline{\epsilon}} - \mathbb{E}(\hat{\underline{\epsilon}}))^t] = \mathbb{E}(\hat{\underline{\epsilon}}\hat{\underline{\epsilon}}^t)$$



$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}((\mathbf{I} - \mathbf{H})\underline{Y}\underline{Y}^t(\mathbf{I} - \mathbf{H})^t) = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbb{E}(\underline{Y}\underline{Y}^t)(\mathbf{I} - \mathbf{H})^t \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{H})\sigma^2,
\end{aligned}$$

car  $\underline{Y} = \mathbf{X}\underline{\beta} + \underline{\epsilon}$ .

La somme des carrés des différences des valeurs observées et leurs valeurs estimées a la forme suivante :

$$\text{SSE}_{ls} = (\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}_{ls})^t(\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}_{ls}) = \underline{\hat{\epsilon}}^t \underline{\hat{\epsilon}}.$$

Nous utilisons cette quantité pour mesurer la performance des modèles, en terme de qualité de leur ajustement.

**Proposition 1.2.4.** *Pour le modèle de régression linéaire, la somme des carrés des erreurs est égale à :*

$$\text{SSE}_{ls} = \underline{Y}^t \underline{Y} - \widehat{\underline{\beta}}_{ls}^t \mathbf{X}^t \underline{Y},$$

car  $\mathbf{X}^t \mathbf{X} \widehat{\underline{\beta}}_{ls} = \mathbf{X}^t \underline{Y}$ .

Plus cette quantité est petite, meilleur sera l'ajustement du modèle. En utilisant la somme des carrés des erreurs, nous pouvons calculer un estimateur de  $\sigma^2$  donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.2.3.** *Sous le modèle de régression linéaire, un estimateur non biaisé de  $\sigma^2$  est donné par :*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SSE}_{ls}}{n - p - 1},$$

où  $n$  est le nombre d'observations et  $p$  est le nombre de variables explicatives  $\underline{X}_j$ .

### 1.3. MODÈLE BAYÉSIEN GÉNÉRAL

Dans cette section nous décrivons un modèle de régression bayésien et pour cela nous donnons quelques définitions qui nous seront utiles par la suite. Nous

appelons fonction de vraisemblance, la loi des observations conditionnée au paramètre  $\underline{\beta}$ , qui est la même dans le contexte bayésien que dans le contexte classique. La seule différence entre les deux approches consiste dans le fait que sous l'approche bayésienne la loi des observations est conditionnée au paramètre  $\underline{\beta}$ . Dans le modèle classique, le paramètre  $\underline{\beta}$  est toujours inconnu mais fixe, tandis que pour le modèle bayésien il est considéré aléatoire. Donc, nous faisons l'hypothèse que le paramètre  $\underline{\beta}$  suit une loi de probabilité que nous appelons loi *a priori*.

**Définition 1.3.1.** *Loi a posteriori (Théorème de Bayes)*

Nous appelons loi a posteriori, la loi du paramètre  $\underline{\beta}$  étant donné les observations  $\underline{Y}$ , c'est-à-dire

$$\pi(\underline{\beta} | \underline{Y}) = \frac{f(\underline{Y} | \underline{\beta})\pi(\underline{\beta})}{m(\underline{Y})},$$

où  $m(\underline{Y}) = \int \cdot \int f(\underline{Y} | \underline{\beta})\pi(\underline{\beta}) d\underline{\beta}$ ,  $f(\underline{Y} | \underline{\beta})$  est la fonction de vraisemblance des observations,  $\pi(\underline{\beta})$  est la loi a priori du paramètre  $\underline{\beta}$  et  $m(\underline{Y})$  est la loi marginale des observations.

Souvent le choix de la loi *a priori* est fait de façon à pouvoir calculer facilement la densité marginale des observations. Une telle loi fait partie d'une classe de densités dites conjuguées.

**Définition 1.3.2.** *Loi a priori conjuguée*

Pour le modèle bayésien général, une famille  $F$  sur  $\underline{\beta}$  est dite conjuguée, si pour toute loi a priori  $\pi(\underline{\beta}) \in F$ , la loi a posteriori  $\pi(\underline{\beta} | \underline{Y})$  appartient également à  $F$ .

**Remarque 1.3.1.** Si  $\pi(\underline{\beta}) \in F$ , où  $F$  est une famille conjuguée, le calcul de  $\pi(\underline{\beta} | \underline{Y})$  revient à faire une mise-à-jour des paramètres. Nous utilisons les densités conjuguées, car l'information sur  $\underline{\beta}$  contenue dans les observations  $\underline{Y}$  est une quantité finie et nous ne pouvons pas changer la forme de la densité a posteriori.

*Les densités conjuguées font toujours un compromis entre l'information a priori et celle contenue dans la fonction de vraisemblance.*

La mesure de la conséquence (ou de l'erreur) lorsque nous estimons  $\underline{\beta}$  par  $\hat{\underline{\beta}}$  est donnée par la fonction de perte. Pour le modèle de régression bayésien, la fonction de perte la plus utilisée est la fonction de perte quadratique.

**Définition 1.3.3.** *Fonction de perte quadratique*

*Pour le modèle bayésien général la fonction de perte quadratique*

$L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}}) : \mathbb{R}_p \times \mathbb{R}_p \xrightarrow{L(\cdot, \cdot)} \mathbb{R}_p^+$  *est de la forme*

$$L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}}) = (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})^t \mathbf{Q} (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})^t,$$

*où  $\mathbf{Q}$  est une matrice connue, symétrique et positive définie.*

**Définition 1.3.4.** *Perte espérée a posteriori*

*Sous la fonction de perte  $L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}})$ , la perte espérée a posteriori de la décision de faire l'inférence sur  $\underline{\beta}$  quand nous observons  $\underline{Y}$ , est donnée par :*

$$\rho(\pi, \hat{\underline{\beta}} | \underline{Y}) = \mathbb{E}^{\pi(\underline{\beta} | \underline{Y})} [L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}})] = \int_{-\infty}^{\infty} L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}}) \pi(\underline{\beta} | \underline{Y}) d\underline{\beta}.$$

Les théorèmes suivants donnent les formes de la loi *a posteriori* et de la densité marginale du modèle de régression bayésien.

**Théorème 1.3.1.** *Considérons le modèle (1.1.2) et supposons que*

$$\underline{\beta} \sim N_{p+1}(\underline{\beta}_0, \frac{\sigma^2}{n_0} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1}),$$

*où  $\underline{\beta}_0$  et  $n_0$  sont connues, et soit le vecteur des erreurs*

$$\underline{\epsilon} \sim N_n(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

La fonction de distribution marginale de  $\underline{Y}$  est :

$$\underline{Y} \sim N_n(\underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_0, \sigma^2(\mathbf{I} + \frac{1}{n_0}\mathbf{H})),$$

où  $\sigma^2$  est connue.

**Démonstration :** Par le théorème de Bayes la fonction de distribution marginale de  $\underline{Y}$  est :

$$m(\underline{Y}) = \int \cdots \int \pi(\underline{\beta})l(\underline{\beta} | \underline{Y}) d\underline{\beta}$$

où  $l(\cdot)$  est la fonction de vraisemblance de  $\underline{Y}$  sachant  $\underline{\beta}$ . En utilisant l'estimateur des moindres carrés trouvé par l'approche classique, noté  $\underline{\beta}_{ls} = (\underline{\mathbf{X}}^t\underline{\mathbf{X}})^{-1}\underline{\mathbf{X}}^t\underline{Y}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} l(\underline{\beta} | \underline{Y}) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta})^t (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls} - \underline{\mathbf{X}}(\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls}))^t (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls} - \underline{\mathbf{X}}(\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})) \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls})^t (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls}) + (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})^t \underline{\mathbf{X}}^t \underline{\mathbf{X}} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls}) \right\}, \end{aligned}$$

car  $(\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})^t \underline{\mathbf{X}}^t (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls}) = 0$ .

Donc, la fonction marginale de  $\underline{Y}$  est :

$$\begin{aligned} m(\underline{Y}) &\propto \int \cdots \int \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [n_0(\underline{\beta} - \underline{\beta}_0)^t \underline{\mathbf{X}}^t \underline{\mathbf{X}} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_0)] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls})^t (\underline{Y} - \underline{\mathbf{X}}\underline{\beta}_{ls}) + (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})^t \underline{\mathbf{X}}^t \underline{\mathbf{X}} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})] \right\} d\underline{\beta}. \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que l'expression

$$n_0(\underline{\beta} - \underline{\beta}_0)^t \underline{\mathbf{X}}^t \underline{\mathbf{X}} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_0) + (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})^t \underline{\mathbf{X}}^t \underline{\mathbf{X}} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})$$

est égale à

$$(n_0 + 1) \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right)^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right) \\ + \frac{n_0}{n_0 + 1} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls})^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls}).$$

Donc,

$$m(\underline{Y}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_{ls})^t (\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_{ls}) \right. \\ \left. + \frac{n_0}{n_0 + 1} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls})^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls}) \right\} \\ = \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(\underline{Y} - \mathbf{H}\underline{Y})^t (\underline{Y} - \mathbf{H}\underline{Y}) \right. \\ \left. + \frac{n_0}{n_0 + 1} (\mathbf{H}\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0)^t (\mathbf{H}\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0) \right\},$$

car  $\mathbf{X}\underline{\beta}_{ls} = \mathbf{H}\underline{Y}$  par l'équation (1.2.1) du modèle de régression linéaire sous l'approche classique. Nous avons aussi que

$$\int \cdots \int \exp \left\{ -\frac{n_0 + 1}{2\sigma^2} \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right)^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right) \right\} d\underline{\beta} \\ = \left( \frac{2\pi}{n_0 + 1} \right)^{p/2} \frac{(\sigma^2)^{p/2}}{|\mathbf{X}^t \mathbf{X}|^{1/2}} = \text{constante.}$$

Donc, en développant l'expression

$$(\underline{Y} - \mathbf{H}\underline{Y})^t (\underline{Y} - \mathbf{H}\underline{Y}) + \frac{n_0}{n_0 + 1} (\mathbf{H}\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0)^t (\mathbf{H}\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0) \\ = \underline{Y}^t \underline{Y} - 2\underline{Y}^t \mathbf{H}\underline{Y} + \underline{Y}^t \mathbf{H}\underline{Y} + \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{Y}^t \mathbf{H}\underline{Y} - 2\frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\beta}_0^t \mathbf{X}^t \mathbf{H}\underline{Y} \\ + \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\beta}_0^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \underline{\beta}_0 \\ = \underline{Y}^t \underline{Y} - \frac{1}{n_0 + 1} \underline{Y}^t \mathbf{H}\underline{Y} - 2\frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\beta}_0^t \mathbf{X}^t \mathbf{H}\underline{Y} + \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\beta}_0^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \underline{\beta}_0$$

nous trouvons :

$$m(\underline{Y}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \underline{Y}^t \left( \mathbf{I} - \frac{1}{n_0 + 1} \mathbf{H} \right) \underline{Y} - 2\frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{Y}^t \mathbf{H}\mathbf{X}\underline{\beta}_0 \right] \right\} \\ \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \left( \underline{Y} - \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\Psi}^t \mathbf{H}\mathbf{X}\underline{\beta}_0 \right) \underline{\Psi}^{-1} \left( \underline{Y} - \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{\Psi}^t \mathbf{H}\mathbf{X}\underline{\beta}_0 \right) \right] \right\},$$

car  $\frac{n_0}{n_0+1}\underline{\beta}_0^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \underline{\beta}_0 = \text{constante}$  et  $\Psi = (\mathbf{I} - \frac{1}{n_0+1}\mathbf{H})^{-1} = (\mathbf{I} + \frac{1}{n_0}\mathbf{H})$  et qui nous donne la loi de  $\underline{Y}$  :

$$\underline{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\underline{\beta}_0, \sigma^2(\mathbf{I} + \frac{1}{n_0}\mathbf{H})), \text{ car } \frac{n_0}{n_0+1}\Psi^t \mathbf{H} \mathbf{X} = \mathbf{X}.$$

**Corollaire 1.3.1.** *Sous les mêmes conditions la fonction de densité a posteriori de  $\underline{\beta}$  est :*

$$\underline{\beta} | \underline{Y} \sim N_p \left( \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1}, \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \right),$$

et la densité marginale de  $\underline{\beta}_{ls}$  est :

$$\underline{\beta}_{ls} \sim N_p \left( \underline{\beta}_0, \frac{n_0 + 1}{n_0} \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \right).$$

**Démonstration :** Par le théorème de Bayes  $\pi(\underline{\beta} | \underline{Y}) \propto \pi(\underline{\beta})l(\underline{\beta} | \underline{Y})$  et en procédant de manière similaire au théorème 1.3.1 nous avons :

$$\begin{aligned} \pi(\underline{\beta} | \underline{Y}) &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [n_0(\underline{\beta} - \underline{\beta}_0)^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_0) + \text{SSE}_{ls} + (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta} - \underline{\beta}_{ls})] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{n_0}{2(n_0 + 1)\sigma^2} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls})^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta}_0 - \underline{\beta}_{ls}) \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{n_0 + 1}{2\sigma^2} \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right)^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} \left( \underline{\beta} - \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] \right) \right\}, \end{aligned}$$

car  $\text{SSE}_{ls} = (\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_{ls})^t (\underline{Y} - \mathbf{X}\underline{\beta}_{ls})$  est la somme des carrés des erreurs sous l'approche classique. Donc, l'équation précédente nous donne les lois suivantes :

$$\underline{\beta} | \underline{\beta}_{ls} \sim N_p \left( \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1}, \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \right),$$

et

$$\underline{\beta}_{ls} \sim N_p \left( \underline{\beta}_0, \frac{n_0 + 1}{n_0} \sigma^2 (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \right).$$

**Corollaire 1.3.2.** *Sous la fonction de perte quadratique  $L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}}) = (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})^t \mathbf{X}^t \mathbf{X} (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})$ , l'estimateur de Bayes est donné par :*

$$\hat{\underline{\beta}} = E^{\pi(\underline{\beta}|\underline{Y})}[\underline{\beta}] = \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} = \underline{\beta}_{ls} - \frac{n_0}{n_0 + 1} (\underline{\beta}_{ls} - \underline{\beta}_0).$$

Donc, les valeurs ajustées de  $\underline{Y}$  ont l'expression suivante :

$$\hat{\underline{Y}} = \mathbf{X} \hat{\underline{\beta}} = \mathbf{X} \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right] = \hat{\underline{Y}}_{ls} - \frac{n_0}{n_0 + 1} (\hat{\underline{Y}}_{ls} - \underline{Y}_0), \quad (1.3.1)$$

car  $\mathbf{X} \underline{\beta}_{ls} = \mathbf{H} \underline{Y} = \hat{\underline{Y}}_{ls}$  (l'équation (1.2.1) du modèle de régression linéaire sous l'approche classique). En procédant de façon similaire à l'approche classique nous avons le lemme suivant qui donne la loi du vecteur des valeurs prédites.

**Lemme 1.3.1.** *Sous les conditions du modèle de régression bayésien général (voir le théorème 1.3.1), la loi de  $\hat{\underline{Y}}$  est :*

$$\hat{\underline{Y}} | \underline{Y} \sim N_n \left( \mathbf{X} \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right], \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \mathbf{H} \right).$$

**Démonstration :** Comme dans le modèle de régression linéaire sous approche classique, nous avons les expressions suivantes pour la moyenne et la variance de  $\hat{\underline{Y}}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\pi(\hat{\underline{Y}}|\underline{Y})}(\hat{\underline{Y}}) &= \mathbb{E}(\mathbf{X} \hat{\underline{\beta}}) = \mathbf{X} \mathbb{E}(\hat{\underline{\beta}}) \\ &= \mathbf{X} \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right], \\ \text{Var}^{\pi(\hat{\underline{Y}}|\underline{Y})}(\hat{\underline{Y}}) &= \mathbb{E}[(\hat{\underline{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta}_0)(\hat{\underline{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta}_0)^t] \\ &= \mathbf{X} \left[ \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \right] \mathbf{X}^t \\ &= \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Comme dans l'approche classique,  $\hat{\underline{Y}}$  est de densité singulière, car la matrice  $\mathbf{H}$  est singulière. La proposition suivante nous donne l'expression de sa fonction de

distribution.

**Proposition 1.3.1.** *Sous le modèle bayésien, la fonction de distribution du vecteur des valeurs prédites  $\widehat{\underline{Y}}$  est :*

$$\left(\frac{2\pi\sigma^2}{n_0+1}\right)^{-\frac{p+1}{2}} \exp\left[-\frac{n_0+1}{2\sigma^2}(\widehat{\underline{Y}} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0)^t \mathbf{H}^{-1}(\widehat{\underline{Y}} - \mathbf{X}\underline{\beta}_0)\right]. \quad (1.3.3)$$

**Proposition 1.3.2.** *Sous le modèle bayésien général, la somme des carrés des erreurs est :*

$$\text{SSE} = (\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}})^t (\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}), \quad (1.3.4)$$

où  $\widehat{\underline{Y}}$  est donné par l'équation (1.3.1).

#### 1.4. MOYENNAGE BAYÉSIEN DE MODÈLES

Dans cette section nous décrivons une méthode bayésienne pour solutionner le problème d'incertitude avec lequel nous sommes confrontés dans la régression en général et dans la régression linéaire en particulier. En conditionnant sur un seul modèle de régression sélectionné, nous ignorons l'incertitude relative au choix du vrai modèle et donc, nous la sous-estimons quand nous faisons l'inférence sur les variables d'intérêt. La méthode de moyennage bayésien de modèles consiste à faire la moyenne pondérée de tous les modèles possibles (combinaisons de prédicteurs) quand nous faisons l'inférence sur les variables d'intérêt. En pratique cette méthode n'est pas efficace, car le nombre de modèles possibles est trop grand. Il existe deux solutions à ce problème proposées par Raftery, Madigan et Hoeting (1997). La première solution est la procédure nommée "les fenêtres d'Occam", qui indique un nombre plus petit de modèles à utiliser pour le moyennage de modèles et la seconde solution est l'utilisation de la procédure de Monte Carlo markovienne, qui va approximer directement le résultat de l'inférence. Dans la situation où nous ne connaissons pas le vrai modèle, les deux procédures proposées donnent des performances prédictives meilleures que tout sous-modèle sélectionné.



Dans la première partie, nous décrivons la méthode de moyennage bayésien de modèles et ensuite dans la deuxième partie, nous détaillons les deux approches concernant cette méthode.

### 1.4.1. Description

Comme nous l'avons déjà spécifié, si nous basons l'inférence sur un seul modèle sélectionné comme étant le meilleur modèle, nous ignorons l'incertitude concernant le vrai modèle, est donc, nous sous-estimons les incertitudes qui planent sur les inférences des variables d'intérêt.

**Théorème 1.4.1.** *Soit  $\underline{Y}$  le vecteur des observations et soit sa valeur prédite  $\hat{Y}$ , la variable d'intérêt du modèle de régression linéaire. Si  $M = \{M_1, \dots, M_K\}$  représente l'ensemble de tous les modèles à considérer, la distribution a posteriori de  $\hat{Y}$  étant donné les observations  $\underline{Y}$  est :*

$$\Pr(\hat{Y} | \underline{Y}) = \sum_{k=1}^K \Pr(\hat{Y} | M_k, \underline{Y}) \Pr(M_k | \underline{Y}), \quad (1.4.1)$$

qui représente la moyenne des distributions marginales sous chaque modèle, pondérée avec la probabilité a posteriori que chaque modèle soit le vrai.

L'équation précédente est ce que nous appelons le moyennage bayésien de modèles, où la probabilité a posteriori du modèle  $M_k$  est donnée par :

$$\Pr(M_k | \underline{Y}) = \frac{\Pr(\underline{Y} | M_k) \Pr(M_k)}{\sum_{l=1}^K \Pr(\underline{Y} | M_l) \Pr(M_l)}, \quad (1.4.2)$$

où

$$\Pr(\underline{Y} | M_k) = \int \Pr(\underline{Y} | \underline{\beta}_k, M_k) \Pr(\underline{\beta}_k | M_k) d\underline{\beta}_k \quad (1.4.3)$$

est la fonction de distribution marginale du modèle  $M_k$ . Dans l'équation (1.4.3)  $\underline{\beta}_k$  est le vecteur des paramètres du modèle  $M_k$ ,  $\Pr(\underline{\beta}_k | M_k)$  est la fonction de densité a priori sous le modèle  $M_k$ ,  $\Pr(\underline{Y} | \underline{\beta}_k, M_k)$  est la fonction de vraisemblance si  $M_k$

est le vrai modèle et  $\Pr(M_k)$  est la probabilité *a priori* que  $M_k$  soit le vrai modèle.

**Théorème 1.4.2.** *Sous le modèle de moyennage bayésien des modèles, la moyenne et la variance a posteriori de la variable d'intérêt  $\underline{\hat{Y}}$  de la régression linéaire sont :*

$$\underline{\hat{Y}}_M = \mathbb{E}[\underline{\hat{Y}} | \underline{Y}] = \sum_{k=1}^K \underline{\hat{Y}}_k \Pr(M_k | \underline{Y}), \quad (1.4.4)$$

$$\text{Var}[\underline{\hat{Y}} | \underline{Y}] = \sum_{k=1}^K (\text{Var}[\underline{\hat{Y}} | \underline{Y}, M_k] + \underline{\hat{Y}}_k^t \underline{\hat{Y}}_k) \Pr(M_k | \underline{Y}) - \mathbb{E}[\underline{\hat{Y}} | \underline{Y}]^t \mathbb{E}[\underline{\hat{Y}} | \underline{Y}], \quad (1.4.5)$$

où  $\underline{\hat{Y}}_k = \mathbb{E}[\underline{\hat{Y}} | M_k, Y]$  (voir Raftery, 1993; Draper, 1995).

**Remarque 1.4.1. :**

- (1) Toutes les probabilités sont implicitement conditionnées par rapport à  $M$ , l'ensemble de tous les modèles possibles (combinaisons des variables prédictives).
- (2) L'implémentation de la méthode de moyennage bayésien de modèles est difficile pour deux raisons. Premièrement, les intégrales dans l'équation (1.4.3) peuvent être difficiles à calculer et deuxièmement, le nombre de termes,  $K$ , dans l'équation (1.4.1) peut être énorme. Dans la suite de cette section, nous présentons des solutions pour les deux problèmes de cette méthode.

**Proposition 1.4.1.** *Sous le modèle de moyennage bayésien des modèles, la somme des carrés des erreurs est :*

$$\text{SSE}_M = (\underline{Y} - \underline{\hat{Y}}_M)^t (\underline{Y} - \underline{\hat{Y}}_M), \quad (1.4.6)$$

où  $\underline{\hat{Y}}_M$  est donné par l'équation (1.4.4).

Tous les modèles considérés dans la méthode de moyennage bayésien des modèles seront de la forme décrite au début de ce chapitre :

$$\underline{Y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j X_j + \varepsilon = \mathbf{X}\underline{\beta} + \varepsilon,$$

avec toutes les hypothèses du modèle bayésien général.

#### 1.4.2. Approche des “fenêtres d’Occam”

L’approche des “fenêtres d’Occam ” représente une extension de l’algorithme de sélection graphique de modèles de Bayes pour les modèles de régression linéaire, qui implique le moyennage sur un ensemble réduit de modèles. La méthode consiste à déterminer le minimum de modèles que nous devons utiliser dans le moyennage pour produire des meilleures performances prédictives, par rapport à tout modèle sélectionné. Donc, si un modèle produit des prédictions très loin des données, comparé à un modèle qui produit de meilleures prédictions, nous devons l’exclure du moyennage, donc, des équations (1.4.1) et (1.4.4). Les modèles qui seront considérés dans le moyennage sont représentés dans l’ensemble suivant :

$$A' = \{M_k : \frac{\max_l \{\Pr(M_l | \underline{Y})\}}{\Pr(M_k | \underline{Y})} \leq C\},$$

où  $C$  est choisi par le statisticien et  $\max_l \{\Pr(M_l | \underline{Y})\}$  dénote le modèle avec la probabilité *a posteriori* la plus élevée. Le nombre de modèles dans les “fenêtres d’Occam” augmente lorsque la valeur de  $C$  augmente.

L’algorithme consiste aussi à exclure du moyennage les modèles qui appartiennent à l’ensemble suivant :

$$B = \{M_k : \exists M_l \in M, M_l \subset M_k, \frac{\Pr(M_l | \underline{Y})}{\Pr(M_k | \underline{Y})} > 1\},$$

où  $M_l \subset M_k$  représente les modèles inclus dans  $M_l$  qui sont des sous-modèles de  $M_k$ . Donc l’équation (1.4.1) est remplacée par l’équation suivante :

$$\Pr(\hat{\underline{Y}} | \underline{Y}) = \frac{\sum_{M_k \in A} \Pr(\hat{\underline{Y}} | M_k, \underline{Y}) \Pr(\underline{Y} | M_k) \Pr(M_k)}{\sum_{M_k \in A} \Pr(\underline{Y} | M_k) \Pr(M_k)},$$

où  $A = A' \setminus B \subset M$ . Avec cette méthode le nombre de modèles utilisés dans le moyennage, et donc dans l'équation (1.4.1), va diminuer considérablement.

Il nous reste maintenant à identifier les modèles qui seront utilisés dans la méthode des "fenêtres d'Occam", qui sera réalisé par l'interprétation du rapport  $\Pr(M_1 | \underline{Y}) / \Pr(M_0 | \underline{Y})$ , où  $M_0$  représente le modèle avec un prédicteur de moins que  $M_1$ . La figure 1.4.1 nous montre l'idée essentielle de cette méthode, où s'il existe évidence pour le modèle  $M_0$ , le modèle  $M_1$  sera rejeté, mais pour rejeter  $M_0$  nous devons avoir une forte évidence pour le modèle  $M_1$ . Dans le cas où il y a une évidence non concluante, aucun modèle ne sera rejeté. La région d'évidence non concluante est bornée inférieurement par  $O_L$ , qui définit la marge où nous commençons à avoir une évidence pour le modèle  $M_1$  et supérieurement par  $O_R$ , qui définit la marge où l'évidence pour le modèle  $M_1$  devient forte.

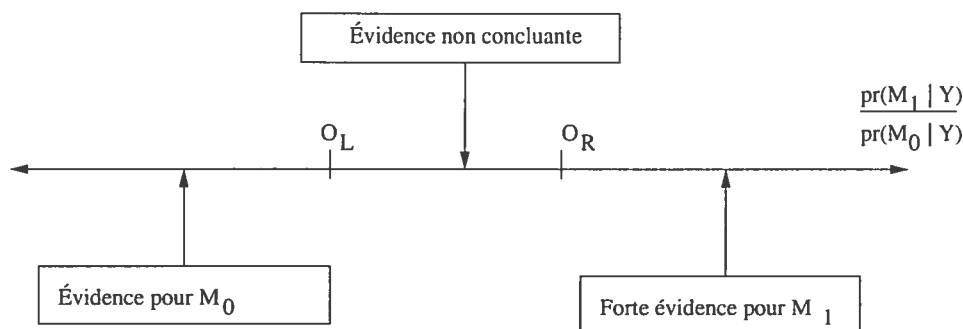


FIGURE. 1.4.1. Méthode des fenêtres d'Occam : L'interprétation des rapports *a posteriori* des modèles

### 1.4.3. Approche par la méthode de Monte Carlo markovienne

Cette deuxième approche de la méthode de moyennage bayésien de modèles consiste à approximer l'équation (1.4.1) par la méthode de Monte Carlo markovienne. Donc, ayant la chaîne de Markov  $\{M(t), t = 1, 2, \dots\}$  sous l'espace  $\mathcal{M}$  (voir la remarque 1.4.1, (1)) et les distributions  $\Pr(M_i | \underline{Y})$ , nous avons le théorème

suivant.

**Théorème 1.4.3.** *Soit la chaîne de Markov simulée pour  $t = 1, \dots, N$ , sous certaines conditions et pour toutes les fonctions  $g(M_i)$  définies sur l'espace  $\mathcal{M}$ , la moyenne :*

$$\hat{G} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N g(M_t),$$

*converge presque sûrement vers  $E(g(M))$ , lorsque  $N \rightarrow \infty$  (voir Smith et Roberts, 1993).*

**Remarque 1.4.2.** *Pour pouvoir calculer l'équation (1.4.1) dans la forme décrite, nous considérons  $g(M) = \Pr(\hat{Y} \mid M, \underline{Y})$ .*

Pour construire une chaîne de Markov, nous définissons un voisinage, noté  $ndb(M)$ , pour tout  $M \in \mathcal{M}$  qui sera constitué du modèle lui-même et l'ensemble de modèles qui ont une variable de plus ou en moins que le modèle  $M$  considéré. Soit  $q$  une matrice de transition telle que  $q(M \rightarrow M') = 0$  pour tout  $M' \notin ndb(M)$  et  $q(M \rightarrow M') = \text{constant}$  pour tout  $M' \in ndb(M)$ . Si la chaîne est dans l'état  $M$ , la transition vers  $M'$  va se faire avec la probabilité

$$\min \left\{ 1, \frac{\Pr(M' \mid \underline{Y})}{\Pr(M \mid \underline{Y})} \right\}.$$

Sinon, l'état  $M$  ne change pas.

## 1.5. PERFORMANCES PRÉDICTIVES DES MODÈLES

Pour l'évaluation des performances des modèles nous prédisons les observations  $\underline{Y}$  à l'aide de chaque modèle de régression que nous analysons, et ensuite nous comparons la somme des carrés des erreurs, SSE, la variance et le score logarithmique ("logarithmic scoring rule" de Good, 1952), calculés pour tous les

modèles.

En ce qui concerne le score logarithmique, pour tout modèle il a la forme suivante :

$$\text{Slog}(M_k) = -\log\{\Pr(\hat{Y} | M_j, \underline{Y})\}, k = 1, \dots, K.$$

Pour le moyennage bayésien de modèles il est basé sur les distributions conditionnelles *a posteriori* de chaque modèle, c'est-à-dire :

$$\text{Slog}_M = -\log \left\{ \sum_{k=1}^K \Pr(\hat{Y} | M_k, \underline{Y}) \Pr(M_k | \underline{Y}) \right\}.$$

Pour le moyennage bayésien, réalisé avec tous les modèles possibles, le score logarithmique est toujours meilleur que celui de tout modèle sélectionné (voir Raftery, Madigan et Hoeting, 1993). Le modèle où le moyennage de modèles avec la meilleure performance prédictive est celui qui a le plus faible score logarithmique (voir Madigan et Raftery, 1994).

Dans ce chapitre nous avons identifié les différentes approches que nous allons utiliser par la suite dans le deuxième chapitre, dans lequel nous comparons le modèle bayésien de régression linéaire multiple et le modèle de moyennage bayésien de modèles. Dans le moyennage bayésien de modèles, nous considérons le cas particulier dans lequel nous incluons uniquement des modèles de régression linéaire simple, tandis que pour le modèle bayésien de régression linéaire multiple nous allons considérer toutes les variables incluent dans le moyennage de modèles simple. Nous comparons ces modèles par rapport aux mesures de performances décrites dans ce chapitre, où la somme des carrés des erreurs est calculée par l'équation (1.3.4), pour le modèle bayésien de régression linéaire multiple, et par l'équation (1.4.6), pour le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple. En ce qui concerne la variance, celle-ci est calculée par l'équation (1.3.2), pour le modèle bayésien de régression linéaire multiple, et par l'équation (1.4.5), pour le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple.

Le score logarithmique pour chacun des modèles est décrit plus en détail dans le troisième chapitre.

## Chapitre 2

---

### MOYENNAGE BAYÉSIEN DE MODÈLES DE RÉGRESSION LINÉAIRE SIMPLE

Dans ce chapitre nous décrivons la méthode de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple et ensuite nous la comparons avec le modèle bayésien de régression linéaire multiple. Nous comprenons par moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, le modèle obtenu par la méthode de moyennage bayésien des modèles, méthode décrite à la section 1.4, où chaque modèle comprend une seule variable explicative  $X_j$ , tandis que par le modèle bayésien de régression linéaire multiple, nous comprenons le modèle bayésien de régression décrit à la section 1.3, qui a comme variables explicatives, toutes les variables  $X_j$ , où chacune correspond à un modèle utilisé dans le moyennage de modèles de régression linéaire simple. La comparaison des modèles sera réalisée par rapport à la perte espérée *a posteriori*, que nous allons calculer à l'aide d'une fonction de perte quadratique.

#### 2.1. DESCRIPTION DES MODÈLES

**Définition 2.1.1.** *Modèle de régression linéaire simple*

*Le modèle  $M_j$  est un modèle de régression linéaire simple si pour chaque variable explicative  $X_j$ , nous considérons le modèle de la forme suivante :*

$$M_j : \underline{Y} = \beta_0^j + \beta_j X_j + \epsilon = \mathbf{X}_j \underline{\beta}_j + \epsilon, \quad j = 1, \dots, p,$$



où  $\mathbf{X}_j = (\underline{X}_0 \ \underline{X}_j)$  est la matrice de la variable explicative et du vecteur "ordonnée à l'origine"  $2 \times n$  de plein rang et  $\underline{\beta}_j = (\beta_0^j \ \beta_j)^t$  est le vecteur des régresseurs.

Notons que  $p$  représente le nombre total de variables explicatives qui seront utilisées dans l'analyse et qui donne aussi le nombre total de modèles utilisés dans le moyennage bayésien de modèles et que toutes les autres variables gardent le même sens introduit au chapitre 1.

**Définition 2.1.2.** *Modèle de régression linéaire multiple*

*Le modèle de régression linéaire multiple,  $M_P$ , est dit plein, si nous considérons comme variables explicatives, toutes les variables explicatives correspondant aux modèles de régression linéaire simple (voir la définition 2.1.1) incluent dans le moyennage bayésien de modèles, c'est-à-dire*

$$M_P : \underline{Y} = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j \underline{X}_j + \underline{\epsilon} = \mathbf{X} \underline{\beta} + \underline{\epsilon},$$

où  $\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p)$ .

**Remarque 2.1.1.** :

- (1) *Le modèle bayésien de régression linéaire multiple correspond au modèle bayésien de régression linéaire avec  $p$  variables explicatives, présenté à la section 1.3.*
- (2) *Les modèles bayésiens simples incluent dans le moyennage bayésien de modèles sont décrits ci-dessous.*

De façon similaire à la section 1.3, la loi *a posteriori* et la densité marginale de chaque modèle bayésien de régression linéaire simple,  $M_j$ , sont données dans

le théorème suivant.

**Théorème 2.1.1.** *Considérons le modèle  $M_j$  (voir définition 2.1.1) et supposons que*

$$\underline{\beta}_j \sim N_2(\underline{\beta}_0^j, \frac{\sigma^2}{n_0}(\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1}),$$

où  $\underline{\beta}_0^j = (b_0, 0)$ , et soit le vecteur des erreurs

$$\underline{\epsilon} \sim N_n(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

La fonction de densité marginale de  $\underline{Y}$  est :

$$\underline{Y} \sim N_n(\mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j, \sigma^2(\mathbf{I} + \frac{1}{n_0} \mathbf{H}_j)),$$

où  $\sigma^2$  connue,  $n_0$  est l'importance accordée à l'information a priori et  $\mathbf{H}_j = \mathbf{X}_j(\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^t$ .

Pour la démonstration voir le théorème 1.3.1.

**Corollaire 2.1.1.** *Sous les mêmes conditions, pour chaque modèle  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$  la fonction de densité a posteriori de  $\underline{\beta}_j$  sachant  $\underline{Y}$  et la fonction de densité marginale de  $\underline{\beta}_{ls}^j$  sont :*

$$\underline{\beta}_j | \underline{Y} \sim N_2\left(\frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1}, \frac{\sigma^2}{n_0 + 1}(\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1}\right)$$

et

$$\underline{\beta}_{ls}^j \sim N_p\left(\underline{\beta}_0^j, \frac{n_0 + 1}{n_0} \sigma^2 (\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1}\right),$$

où  $\underline{\beta}_{ls}^j = (\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^t \underline{Y}$  est l'estimateur de moindres carrés de  $\underline{\beta}_j$  sous l'approche classique et sous le modèle  $M_j$ .

La démonstration est similaire à celle du corollaire 1.3.1.

**Corollaire 2.1.2.** *Sous la fonction de perte quadratique*

$$L(\underline{\beta}_j, \hat{\underline{\beta}}_j) = (\underline{\beta}_j - \hat{\underline{\beta}}_j)^t \mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j (\underline{\beta}_j - \hat{\underline{\beta}}_j),$$

sous chaque modèle  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , l'estimateur de Bayes est donné par :

$$\hat{\underline{\beta}}_j = E^{\pi(\underline{\beta}_j | \underline{Y})}[\underline{\beta}_j] = \frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1} = \underline{\beta}_{ls}^j - \frac{n_0}{n_0 + 1} (\underline{\beta}_{ls}^j - \underline{\beta}_0^j).$$

Sous chaque modèle simple  $M_j$ ,  $\hat{Y}_{ji}$  représente la valeur prédite de la  $i$ -ème observation,  $i = 1, \dots, n$ , c'est-à-dire le  $i$ -ème élément du vecteur  $\mathbf{X}_j \hat{\underline{\beta}}_j$ . Donc, les valeurs ajustées de  $\underline{Y}$  sous chaque modèle  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , ont l'expression suivante :

$$\hat{\underline{Y}}_j = \mathbf{X}_j \hat{\underline{\beta}}_j = \mathbf{X}_j \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1} \right] = \hat{\underline{Y}}_{ls}^j - \frac{n_0}{n_0 + 1} (\hat{\underline{Y}}_{ls}^j - \underline{Y}_0^j), \quad (2.1.1)$$

car  $\mathbf{X}_j \underline{\beta}_{ls}^j = \mathbf{H}_j \underline{Y} = \hat{\underline{Y}}_{ls}^j$  (voir l'équation (1.2.1) du modèle de régression linéaire sous l'approche classique). Par conséquent, de façon similaire à l'approche classique du lemme 1.3.1, nous avons pour chaque modèle  $M_j$  la loi suivante du vecteur des valeurs prédites.

**Lemme 2.1.1.** *Sous les conditions du modèle de régression bayésien général (voir le théorème 2.1.1), la loi de  $\hat{\underline{Y}}_j$  sous le modèle  $M_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , est :*

$$\hat{\underline{Y}}_j | \underline{Y} \sim N_n \left( \mathbf{X} \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1} \right], \frac{1}{n_0 + 1} \sigma^2 \mathbf{H}_j \right)$$

(voir le lemme 1.3.1).

Similaire à l'approche classique,  $\hat{\underline{Y}}_j$  a une densité singulière, car la matrice  $\mathbf{H}_j$  est singulière. La proposition suivante nous donne l'expression de sa fonction de

distribution.

**Proposition 2.1.1.** *Sous le modèle  $M_j$ , la fonction de distribution du vecteur des valeurs prédites  $\widehat{\underline{Y}}_j$  est :*

$$\left(\frac{2\pi\sigma^2}{n_0+1}\right)^{-1} \exp\left[-\frac{n_0+1}{2\sigma^2}(\widehat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j\beta_0^j)' \mathbf{H}_j^- (\widehat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j\beta_0^j)\right], \quad (2.1.2)$$

où  $\mathbf{H}_j^-$  est une matrice inverse généralisée symétrique de  $\mathbf{H}_j$ .

## 2.2. COMPARAISON DES MODÈLES ANALYSÉS

Dans cette section, nous décrivons le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple que nous comparons par la suite au modèle bayésien de régression linéaire multiple, décrit à la section 1.3. Le but de la méthode de moyennage bayésien de modèles simples est de remplacer un modèle plein de régression, car les paramètres des modèles  $M_j$ , sont plus faciles à calculer que le modèle de régression contenant toutes les variables explicatives. Mais, nous devons déterminer si le modèle que nous avons obtenu par la méthode de moyennage bayésien de modèles est meilleur que le modèle bayésien de régression linéaire multiple, en ce qui concerne les qualités d'ajustement des observations. Donc, dans la première partie de cette section, afin de pouvoir comparer les modèles, nous déterminons les valeurs ajustées des valeurs observées  $\underline{Y}$ , obtenues par la méthode de moyennage bayésien de modèles, que nous comparons avec les valeurs ajustées par le modèle bayésien plein, données par l'équation (1.3.1). Ensuite, dans la deuxième partie, nous présentons la fonction de perte à l'aide de laquelle nous comparons les modèles analysés.

### 2.2.1. Description du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple

En utilisant les modèles de régression linéaire simple, décrits à la section 2.1 et la méthode de moyennage bayésien de modèles, décrite à la section 1.4, nous pouvons calculer les valeurs ajustées des observations  $\underline{Y}$  par la méthode de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple (voir l'équation (1.4.4)) :

$$\hat{\underline{Y}}_M = \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}),$$

où  $\hat{\underline{Y}}_j$  sont les valeurs ajustées de  $\underline{Y}$  sous chaque modèle  $M_j$  (voir l'équation (2.1.1)). Donc, l'expression de  $\hat{\underline{Y}}_M$  devient :

$$\begin{aligned} \hat{\underline{Y}}_M &= \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j \hat{\underline{\beta}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1} \right] \Pr(M_j | \underline{Y}) \\ &= \frac{n_0}{n_0 + 1} \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j \Pr(M_j | \underline{Y}) + \frac{1}{n_0 + 1} \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j \underline{\beta}_{ls}^j \Pr(M_j | \underline{Y}) \\ &= \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{Y}_0 + \frac{1}{n_0 + 1} \sum_{j=1}^p \mathbf{X}_j \underline{\beta}_{ls}^j \Pr(M_j | \underline{Y}), \end{aligned}$$

où  $\mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j = b_0 = \underline{Y}_0$ , car  $\underline{\beta}_0^j = (b_0, 0)$  pour  $\forall j$ . Mais  $\mathbf{X}_j \underline{\beta}_{ls}^j = \mathbf{H}_j \underline{Y}$  d'où :

$$\hat{\underline{Y}}_M = \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{Y}_0 + \frac{1}{n_0 + 1} \left[ \sum_{j=1}^p \mathbf{H}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right] \underline{Y}.$$

Donc, conformément au théorème 1.4.2, la moyenne et la variance *a posteriori* pour le modèle de moyennage de modèles sont :

$$\mathbb{E}[\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] = \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n_0}{n_0 + 1} \underline{Y}_0 + \frac{1}{n_0 + 1} \left[ \sum_{j=1}^p \mathbf{H}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right] \underline{Y} \quad (2.2.1) \\
&= \widehat{\underline{Y}}_M, \\
\text{Var}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] &= \sum_{j=1}^p (\text{Var}[\widehat{\underline{Y}}_j | \underline{Y}, M_j] + \widehat{\underline{Y}}_j \widehat{\underline{Y}}_j^t) \Pr(M_j | \underline{Y}) \\
&\quad - \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}]^t,
\end{aligned}$$

où  $\widehat{\underline{Y}}_j = \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}} | M_j, \underline{Y}]$ . En remplaçant les moyennes et les variances de chaque modèle  $M_j$ , la variance du modèle de moyennage bayésien est :

$$\begin{aligned}
\text{Var}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] &= \sum_{j=1}^p \left[ \frac{1}{n_0 + 1} \sigma^2 \mathbf{H}_j + \widehat{\underline{\beta}}_j^t \mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j \widehat{\underline{\beta}}_j \right] \Pr(M_j | \underline{Y}) \\
&\quad - \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}]^t. \quad (2.2.2)
\end{aligned}$$

Donc, la loi des valeurs prédites sous le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, est donnée par :

$$\widehat{\underline{Y}}_M \sim N_n \left( \mathbb{E}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}], \text{Var}[\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] \right),$$

où l'espérance est donnée par l'équation (2.2.1) et la variance par l'équation (2.2.2).

### 2.2.2. Fonction de perte espérée *a posteriori*

Pour évaluer les pertes que nous allons avoir en choisissant l'un ou l'autre des modèles étudiés (le modèle bayésien de régression linéaire multiple ou le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple), nous utilisons la perte espérée *a posteriori*.

**Définition 2.2.1.** *Sous la fonction de perte  $L(\widehat{\underline{Y}}, \underline{Y})$  la perte espérée a posteriori de la décision de faire l'inférence sur  $\underline{Y}$  quand nous connaissons  $\widehat{\underline{\beta}}$ , est donnée par :*

$$\rho(\pi, \widehat{\underline{Y}} | \underline{Y}) = \mathbb{E}^{\pi(\widehat{\underline{Y}} | \underline{Y})} [L(\widehat{\underline{Y}}, \underline{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} L(\widehat{\underline{Y}}, \underline{Y}) \pi(\widehat{\underline{Y}} | \underline{Y}) d\widehat{\underline{Y}}.$$

La fonction de perte donnée au corollaire 1.3.2 peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}}) &= (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})^t \mathbf{X}' \mathbf{X} (\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}}) \\
&= [\mathbf{X}(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})]^t [\mathbf{X}(\underline{\beta} - \hat{\underline{\beta}})] \\
&= [\underline{Y} - \underline{\epsilon} - \hat{\underline{Y}}]^t [\underline{Y} - \underline{\epsilon} - \hat{\underline{Y}}] \\
&= (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y})^t (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y}) - \underline{\epsilon}^t (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y}) + \underline{\epsilon}^t \underline{\epsilon} \\
&= L(\hat{\underline{Y}}, \underline{Y}) - \underline{\epsilon}^t (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y}) + \underline{\epsilon}^t \underline{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Comme  $\epsilon \sim N_n(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ , utiliser la fonction de perte  $L(\underline{\beta}, \hat{\underline{\beta}})$  est équivalente à utiliser  $L(\hat{\underline{Y}}, \underline{Y}) = (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y})^t (\hat{\underline{Y}} - \underline{Y})$ . Ainsi la fonction de perte espérée *a posteriori*, pour le modèle bayésien de régression linéaire multiple est de la forme suivante (voir l'équation (1.3.2) pour la variance) :

$$\begin{aligned}
\rho(\pi, \hat{\underline{Y}} | \underline{Y}) &= \mathbb{E}^{\pi(\hat{\underline{Y}} | \underline{Y})} [L(\hat{\underline{Y}}, \underline{Y})] = \text{tr} \left[ \text{Var}^{\pi(\hat{\underline{Y}} | \underline{Y})} [\hat{\underline{Y}} | \underline{Y}] \right] \\
&= \text{tr} \left[ \frac{1}{n_0 + 1} \mathbf{H} \sigma^2 \right] = \frac{(p + 1) \sigma^2}{n_0 + 1}, \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

tandis que pour le modèle de moyennage bayésien de modèles simples nous avons (voir l'équation (2.2.2) pour la variance) :

$$\begin{aligned}
\rho(\pi, \hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}) &= \mathbb{E}^{\pi(\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y})} [L(\hat{\underline{Y}}_M, \underline{Y})] \\
&= \text{tr} \left[ \text{Var}^{\pi(\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y})} [\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] \right] \\
&= \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^p \left[ \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \mathbf{H}_j + \hat{\underline{Y}}_j \hat{\underline{Y}}_j^t \right] \text{Pr}(M_j | \underline{Y}) \right] \\
&\quad - \text{tr} \left[ \mathbb{E}[\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}] \mathbb{E}[\hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}]^t \right] \\
&= \text{tr} \left[ \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \sum_{j=1}^p \mathbf{H}_j \text{Pr}(M_j | \underline{Y}) \right] + \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \hat{\underline{Y}}_j^t \text{Pr}(M_j | \underline{Y}) \right] \\
&\quad - \text{tr} \left[ \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \hat{\underline{Y}}_j^t \text{Pr}(M_j | \underline{Y})^2 \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^p \hat{\underline{Y}}_i \hat{\underline{Y}}_j^t \text{Pr}(M_i | \underline{Y}) \text{Pr}(M_j | \underline{Y}) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sigma^2}{n_0 + 1} + \left[ \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j^t \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right)^t \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right) \right] \quad (2.2.4)
\end{aligned}$$

car nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\left[ \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j^t \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y})^2 + 2 \sum_{i < j}^p \hat{\underline{Y}}_i^t \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_i | \underline{Y}) \Pr(M_j | \underline{Y}) \right] \\
&= \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right)^t \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right).
\end{aligned}$$

Donc, la différence entre la perte espérée *a posteriori* du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple (l'équation (2.2.4)) et du modèle bayésien de régression linéaire multiple (l'équation (2.2.3)) est donnée par :

$$\begin{aligned}
\rho(\pi, \hat{\underline{Y}}_M | \underline{Y}) - \rho(\pi, \hat{\underline{Y}} | \underline{Y}) &= \left[ \frac{2\sigma^2}{n_0 + 1} + \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j^t \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right)^t \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right) \right] - \frac{(p+1)\sigma^2}{n_0 + 1} \\
&= \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j^t \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) - \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right)^t \left( \sum_{j=1}^p \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right) \\
&\quad - \frac{(p-1)\sigma^2}{n_0 + 1} \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

Donc, nous remarquons que la différence entre les pertes espérées *a posteriori* sous les deux modèles analysés est composée d'un premier terme variable, qui dépend des estimations de  $\underline{Y}$  et des probabilités *a posteriori* sous les modèles de régression linéaire simple incluent dans le moyennage bayésien des modèles et d'un deuxième terme constant, qui dépend seulement du nombre de variables explicatives  $X_j$  et de  $\sigma^2$ .



### 2.2.3. Analyse de la différence des pertes espérées *a posteriori* des modèles analysés

Comme nous avons pu constater dans la sous-section précédente, nous ne pouvons pas spécifier si l'expression (2.2.5) est positive ou négative, mais nous allons essayer de répondre à la question dans quelle situation la différence des pertes espérées *a posteriori* des modèles analysés atteint un point maximum ou minimum. Pour cela nous considérons les estimations de  $\underline{Y}$  constantes tandis que les probabilités *a posteriori* de chaque modèle  $M_j$ , sont considérées comme étant variables. Donc, si nous développons le premier terme de l'expression (2.2.5) pour deux variables explicatives, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \sum_{j=1}^2 \hat{Y}_j^t \hat{Y}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) - \left( \sum_{j=1}^2 \hat{Y}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right)^t \left( \sum_{j=1}^2 \hat{Y}_j \Pr(M_j | \underline{Y}) \right) \\
 &= \hat{Y}_1^t \hat{Y}_1 \Pr(M_1 | \underline{Y}) + \hat{Y}_2^t \hat{Y}_2 \Pr(M_2 | \underline{Y}) - \left( \hat{Y}_1 \Pr(M_1 | \underline{Y}) \right. \\
 &\quad \left. + \hat{Y}_2 \Pr(M_2 | \underline{Y}) \right)^2 \\
 &= \Pr(M_1 | \underline{Y})(1 - \Pr(M_1 | \underline{Y})) \left( \hat{Y}_1 - \hat{Y}_2 \right)^t \left( \hat{Y}_1 - \hat{Y}_2 \right),
 \end{aligned}$$

car  $\Pr(M_2 | \underline{Y}) = 1 - \Pr(M_1 | \underline{Y})$ .

Donc, en considérant constantes les estimations de  $\underline{Y}$  sous les modèles  $M_1$  et  $M_2$  et en faisant les dérivées d'ordre 1 et 2 du terme  $T_1$  par rapport à la probabilité *a posteriori*  $\Pr(M_1 | \underline{Y})$  que le modèle  $M_1$  soit le vrai modèle, nous trouvons que le maximum du terme  $T_1$  est atteint lorsque les modèles inclus dans le moyennage bayésien ont la même probabilité *a posteriori*, c'est-à-dire, lorsque  $\Pr(M_1 | \underline{Y}) = \Pr(M_2 | \underline{Y}) = 1/2$ . Cela signifie que, pour le cas particulier où  $p = 2$ , nous trouvons une différence maximale entre la perte espérée sous le modèle de moyennage de modèles de régression linéaire simple et la perte espérée sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple, quand les modèles inclus dans le moyennage ont des probabilités *a posteriori* égales.

Nous avons trouvé le résultat précédent en faisant l'hypothèse que les estimations de  $\underline{Y}$  sont constantes, mais dans le chapitre 3, nous allons analyser les modèles, à l'aide des simulations, par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_j$ .

## Chapitre 3

---

### SIMULATION

Dans le chapitre précédent, nous avons essayé de répondre à la question suivante : lequel de deux modèles, modèle bayésien de régression linéaire multiple et le modèle de moyennage bayésien de régression linéaire simple, est le meilleur modèle, de point de vue de la perte espérée *a posteriori*. En faisant la différence entre les deux pertes espérées sous chaque modèle analysé, nous avons obtenu l'expression (2.2.5), qui est difficile à interpréter, et qui a répondu partiellement à notre question. En effet, nous avons vu, que par rapport aux probabilités *a posteriori*, la valeur maximale de la différence entre la perte espérée sous le modèle de moyennage et la perte espérée sous le modèle de régression linéaire multiple, pour le cas particulier où  $p = 2$ , est obtenue quand les modèles inclus dans le moyennage bayésien ont des probabilités *a posteriori* égales. Toutefois, nous n'avons pas pu déterminer quelle sera la distribution de cette différence par rapport à la corrélation entre les variables  $X_j$ . Nous supposons que la corrélation change les valeurs des estimations de  $\underline{Y}$  et donc, le terme  $(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2)^t(\hat{Y}_1 - \hat{Y}_2)$ , que nous avons considéré constant dans le chapitre 2. Dans ce chapitre, à l'aide de simulations, nous essayons de répondre à cette question par rapport aux performances prédictives des modèles analysés, c'est-à-dire, à l'aide de la somme des carrés des erreurs, de la variance des prédictions et du score logarithmique.

### 3.1. DESCRIPTION DES SIMULATIONS

Toutes les simulations ont été effectuées à l'aide du logiciel S-Plus sous Unix, pour une taille des observations générés de  $n = 20, 50$  et  $100$ . Pour chaque taille des observations, nous avons considéré les éléments suivants :

- (1) Nombre des variables explicatives,  $X_j$ , dans le modèle de régression linéaire multiple,  $p = 2$  ;
- (2) Nombre des modèles de régression linéaire simple inclus dans le moyennage bayésien de modèles,  $p = 2$  ;
- (3) La corrélation entre les variables explicatives varie de 0 à 1, pour un total de 72 valeurs.
- (4) Pour tous les cas analysés, nous avons fait  $it = 1000$  itérations et les valeurs des variables d'intérêt sont la moyenne arithmétique de ces 1000 itérations.

#### 3.1.1. Génération des observations

Afin de générer les observations  $\underline{Y}$  à partir de distributions multivariées, nous avons suivi la démarche suivante, car à l'époque, sous le logiciel S-Plus, il n'y avait pas une fonction disponible pour résoudre directement ce problème.

**Étape 3.1.1.** *Ainsi, pour obtenir les vecteurs  $\underline{Z}_j = (Z_{j1}, Z_{j2}, \dots, Z_{jn})^t$ ,  $j = 1, 2$ , de loi  $N_n(0, \mathbf{I}_n)$ , nous avons généré  $2 \times n$  observations indépendantes de loi  $N(0, 1)$ . En divisant les  $2 \times n$  observations en 2 tranches de  $n$  observations, nous obtenons ainsi 2 vecteurs. Afin de générer une distribution multivariée de loi  $N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$ , en utilisant la décomposition de Choleski de  $\Sigma$ , c'est-à-dire  $\Sigma = \mathbf{A}^t \mathbf{A}$ , où  $\mathbf{A}$  est une matrice triangulaire supérieure, nous avons transformé :*

$$\underline{X}_j = \mathbf{A}^t \underline{Z}_j, \quad j = 1, 2.$$

Donc, la distribution va avoir la moyenne  $\mathbb{E}(\underline{X}_j) = \mathbf{A}^t \mathbb{E}(\underline{Z}_j) = 0$  et la variance  $\text{Var}(\underline{X}_j) = \mathbf{A}^t \text{Var}(\underline{Z}_j) \mathbf{A} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \Sigma$ . Pour pouvoir générer les variables explicatives  $\underline{X}_j$  avec une certaine corrélation  $\text{corr}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ , nous allons générer la matrice  $\Sigma$  de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} c+d & d \\ d & c+d \end{pmatrix},$$

où la valeur de la variable  $d$  détermine la valeur de la corrélation  $\text{corr}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$ . Donc pour avoir une distribution uniforme de la  $\text{corr}(\underline{X}_1, \underline{X}_2)$  sur l'intervalle  $[0,1]$ , nous prenons pour la variable  $d$ , 72 valeurs dans l'intervalle de  $[0,100]$ . Pour tous les cas analysés nous considérons  $c = 2$ .

**Étape 3.1.2.** Les erreurs  $\underline{\epsilon}$  sont générées à partir de la loi  $N(0, \sigma^2)$ , où  $\sigma^2 = 1$ .

**Étape 3.1.3.** Afin de générer le vecteur des observations, nous fixons  $\underline{\beta} = (1, \beta_1, \beta_2)$ , aux valeurs données dans le tableau 3.1.1 et ensuite nous calculons le vecteur  $\underline{Y}$  par la formule suivante :

$$\underline{Y} = \mathbf{X} \underline{\beta} + \underline{\epsilon},$$

où la matrice  $\mathbf{X}$  est obtenue à partir des vecteurs des variables explicatives,  $\underline{X}_j$ ,  $j = 1, 2$ , calculés à l'étape 3.1.1,  $\mathbf{X} = (\underline{X}_0, \underline{X}_1, \underline{X}_2)$ , où  $\underline{X}_0$  est le vecteur de longueur  $n$ , contenant que des 1 et le vecteur des erreurs  $\underline{\epsilon}$  est obtenu à l'étape 3.1.2.

TABLEAU. 3.1.1. Valeurs des coefficients  $\beta$  considérés dans la génération de  $Y$

$\beta_1$	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
$\beta_2$	1	0,75	0,5	0,25	0,1	0	1	0,75	0,5	0,25	0,1	0

**Remarque 3.1.1.** Les valeurs de  $\beta$  considérées, déterminent "les vrais" modèles de  $\underline{Y}$ . Par exemple une paire  $(\beta_1 = 1, \beta_2 = 0)$  nous donne l'information que "le

vrai" modèle ne dépend pas de la variable  $X_2$ , tandis que la paire  $(\beta_1 = 1, \beta_2 = 1)$  nous renseigne que "le vrai" modèle dépend dans une mesure égale de la variable  $X_1$  et de la variable  $X_2$ .

Après avoir généré le vecteur des observations et afin de pouvoir les estimer par les deux modèles de régression, modèle bayésien de régression linéaire multiple et le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, nous passons aux étapes suivantes, où nous considérons l'importance accordée à l'information *a priori*,  $n_0 = 0, 1$ .

### 3.1.2. Ajuster les observations

**Étape 3.1.4.** Estimation des observations  $\underline{Y}$  par le modèle bayésien de régression linéaire multiple est réalisée à l'aide de l'équation (1.3.1) :

$$\hat{\underline{Y}} = \mathbf{X}\hat{\underline{\beta}} = \mathbf{X} \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0 + \underline{\beta}_{ls}}{n_0 + 1} \right],$$

où  $\underline{\beta}_{ls} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \underline{Y}$ ,  $\mathbf{X} = (\underline{X}_0, \underline{X}_1, \underline{X}_2)$ , avec  $\underline{X}_j$ ,  $j = 1, 2$ , calculés à l'étape 3.1.1 et  $\underline{\beta}_0 = (\bar{Y}, 0, 0)$ .

**Étape 3.1.5.** Estimation des observations  $\underline{Y}$  par les modèles bayésiens de régression linéaire simple,  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ , utilisés dans le moyennage bayésien de modèles (voir l'équation (2.1.1)) :

$$\hat{\underline{Y}}_j = \mathbf{X}_j \hat{\underline{\beta}}_j = \mathbf{X}_j \left[ \frac{n_0 \underline{\beta}_0^j + \underline{\beta}_{ls}^j}{n_0 + 1} \right],$$

où  $\underline{\beta}_{ls}^j = (\mathbf{X}_j^t \mathbf{X}_j)^{-1} \mathbf{X}_j^t \underline{Y}$ ,  $\mathbf{X}_j = (\underline{X}_0, \underline{X}_j)$ , avec  $\underline{X}_j$ ,  $j = 1, 2$ , calculés à l'étape 3.1.1 et  $\underline{\beta}_0^j = (\bar{Y}, 0)$ , pour  $j = 1, 2$ .

**Étape 3.1.6.** Détermination des fonctions de distribution marginale de chaque modèle  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ , par le théorème 1.3.1 :

$$\Pr(\underline{Y} | M_j) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \left| \mathbf{I} + \frac{1}{n_0} \mathbf{H}_j \right|^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (\hat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j)^t \left( \mathbf{I} + \frac{1}{n_0} \mathbf{H}_j \right)^{-1} (\hat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j) \right].$$

**Étape 3.1.7.** Détermination des probabilités a posteriori de chaque modèle bayésien de régression linéaire simple,  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ , à l'aide de l'équation (1.4.2) :

$$\Pr(M_j | \underline{Y}) = \frac{\Pr(\underline{Y} | M_j) \Pr(M_j)}{\sum_{l=1}^p \Pr(\underline{Y} | M_l) \Pr(M_l)},$$

où  $\Pr(\underline{Y} | M_j)$ ,  $j = 1, 2$  sont calculées à l'étape précédente et la probabilité a priori sous chaque modèle,  $\Pr(M_j)$ , est égale sous tous les modèles à  $1/2$ , car nous avons considéré seulement deux modèles dans le moyennage.

**Étape 3.1.8.** Détermination de la fonction de distribution prédictive du modèle de régression linéaire multiple, par l'équation (1.3.3)

$$\pi(\hat{\underline{Y}} | \underline{Y}) = \left( \frac{2\pi\sigma^2}{n_0 + 1} \right)^{-\frac{p+1}{2}} \exp \left[ -\frac{n_0 + 1}{2\sigma^2} (\hat{\underline{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta}_0)^t \mathbf{H}^{-1} (\hat{\underline{Y}} - \mathbf{X} \underline{\beta}_0) \right],$$

car elle est une densité singulière où la matrice  $\mathbf{H}$  est de rang 3 ( $p=2$ ).

**Étape 3.1.9.** Détermination des fonctions de distribution prédictive de chaque modèle,  $M_j$ , par l'équation suivante(2.1.2) :

$$\Pr(\hat{\underline{Y}}_j | M_j, \underline{Y}) = \left( \frac{2\pi\sigma^2}{n_0 + 1} \right)^{-\frac{p}{2}} \exp \left[ -\frac{n_0 + 1}{2\sigma^2} (\hat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j)^t \mathbf{H}_j^{-1} (\hat{\underline{Y}}_j - \mathbf{X}_j \underline{\beta}_0^j) \right],$$

car elle est une densité singulière où la matrice  $\mathbf{H}_j$  est de rang  $p = 2$ .

**Étape 3.1.10.** *Estimation des observations  $\underline{Y}$  par la méthode de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, en utilisant les valeurs estimées de  $\underline{Y}$  sous chaque modèle  $M_j$ , calculées à l'étape 3.1.5 et les probabilités a posteriori de chaque modèle, calculées à l'étape 3.1.7, à l'aide de l'équation (1.4.1) :*

$$\hat{\underline{Y}}_M = \sum_{j=1}^2 \hat{\underline{Y}}_j \Pr(M_j | \underline{Y}).$$

Les étapes précédentes nous permettent d'estimer les observations  $\underline{Y}$ , que nous avons générées par le modèle bayésien de régression linéaire multiple et par le moyennage de modèles de régression linéaire simple, que nous avons présentés dans les chapitres précédentes. À l'aide des valeurs estimées,  $\hat{\underline{Y}}$ , déterminées à l'étape 3.1.4 et  $\hat{\underline{Y}}_M$ , déterminées à l'étape 3.1.10, nous comparons les modèles en ce qui concerne ces performances prédictives, par rapport à la somme des carrés des erreurs, à la variance des prédictions et au score logarithmique. Ces trois variables sont déterminées dans les étapes suivantes.

### 3.1.3. Calculs des performances prédictives

**Étape 3.1.11.** *Détermination de la somme des carrés des erreurs sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple, par l'équation (1.3.4) :*

$$\text{SSE} = (\underline{Y} - \hat{\underline{Y}})^t (\underline{Y} - \hat{\underline{Y}}).$$

**Étape 3.1.12.** *Détermination de la somme des carrés des erreurs sous le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, par l'équation (1.4.6) :*



$$\text{SSE}_M = (\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}_M)^t (\underline{Y} - \widehat{\underline{Y}}_M).$$

**Étape 3.1.13.** *Calcul de la variance des prédictions,  $\widehat{\underline{Y}}$ , sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple, par l'équation (1.3.2) :*

$$\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}|\underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}) = \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \mathbf{H}.$$

**Étape 3.1.14.** *Calcul des variances des prédictions sous chaque modèle  $M_j$ ,  $j = 1, 2$  inclus dans le moyennage bayésien (voir le lemme 2.1.1) :*

$$\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}_j|\underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}_j) = \frac{\sigma^2}{n_0 + 1} \mathbf{H}_j.$$

**Étape 3.1.15.** *Calcul de la variance des prédictions,  $\widehat{\underline{Y}}_M$ , sous le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, à l'aide des valeurs ajustées sous chaque modèle  $M_j$ ,  $\widehat{\underline{Y}}_j$ , déterminées à l'étape 3.1.5, des probabilités a posteriori,  $\Pr(M_j | \underline{Y})$ , déterminées à l'étape 3.1.7 et des variances  $\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}_j|\underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}_j)$ , déterminées à l'étape 3.1.14 (voir l'équation (1.4.5)) :*

$$\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}_M|\underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}_M) = \sum_{j=1}^2 (\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}_j|\underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}_j) + \widehat{\underline{Y}}_j \widehat{\underline{Y}}_j^t) \Pr(M_j | \underline{Y}) - \widehat{\underline{Y}}_M \widehat{\underline{Y}}_M^t.$$

**Étape 3.1.16.** *Calcul du score logarithmique sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple, à l'aide de la fonction de distribution prédictive trouvée à l'étape 3.1.8 :*

$$\text{Slog} = -\log \left\{ \Pr(\widehat{\underline{Y}} \mid \underline{Y}) \right\} = -\sum_{i=1}^n \log \left\{ \Pr(\widehat{Y}_i \mid \underline{Y}) \right\},$$

où  $\widehat{Y}_i$  représente le  $i$ -ème élément du vecteur  $\widehat{\underline{Y}}$ .

**Étape 3.1.17.** *Calcul du score logarithmique sous le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, à l'aide des fonctions de distribution prédictive, trouvées à l'étape 3.1.9 et des probabilités a posteriori sous chaque modèle  $M_j$ , trouvées à l'étape 3.1.7 :*

$$\begin{aligned} \text{Slog}_M &= -\log \left\{ \sum_{j=1}^2 \Pr(\widehat{\underline{Y}}_j \mid M_j, \underline{Y}) \Pr(M_j \mid \underline{Y}) \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^n \log \left\{ \sum_{j=1}^2 \Pr(\widehat{Y}_j^i \mid M_j, \underline{Y}) \Pr(M_j \mid \underline{Y}) \right\}, \end{aligned}$$

où  $\widehat{Y}_j^i$  représente le  $i$ -ème élément du vecteur  $\widehat{\underline{Y}}_j$  (pour la démonstration voir Hoeting, 1994).

### 3.1.4. Comparaison des modèles

La comparaison des modèles en ce qui concerne les performances prédictives, est réalisée comme suit :

- (1) par rapport aux sommes des carrés des erreurs, déterminées aux étapes 3.1.11 et 3.1.12, nous calculons le rapport :

$$\text{SSE}_{M/P} = \frac{\text{SSE}_M}{\text{SSE}},$$

- (2) par rapport aux variances des estimations, déterminées aux étapes 3.1.13 et 3.1.15, nous calculons le rapport :

$$\text{Var}_{M/P} = \frac{\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}}_M | \underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}}_M)}{\text{Var}^{\pi(\widehat{\underline{Y}} | \underline{Y})}(\widehat{\underline{Y}})},$$

- (3) par rapport aux scores logarithmiques, déterminés aux étapes 3.1.16 et 3.1.17, nous calculons la différence :

$$\text{Slog}_{P-M} = \text{Slog} - \text{Slog}_M.$$

Donc, si les rapports  $\text{SSE}_{M/P}$  et  $\text{Var}_{M/P}$  ont des valeurs inférieures à 1, le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est meilleur que le modèle de régression linéaire multiple, par rapport à la somme des carrés des erreurs et respectivement, par rapport à la variance des estimations.

En ce qui concerne les scores logarithmiques, nous avons choisi de faire la différence entre les scores sous les deux modèles, plutôt que de faire le rapport, comme nous avons utilisé dans la comparaison de la somme des carrés des erreurs et de la variance. En effet, cette différence des scores logarithmiques nous donne les points avec lesquels le modèle avec le plus bas score logarithmique, surpasse le score logarithmique du modèle avec lequel nous faisons la comparaison. Donc, par exemple une valeur de 1 de la différence entre 2 scores logarithmiques des deux modèles analysés, nous donne une amélioration de 1 point pour le score prédit pour le modèle avec le score le plus bas. Si le nombre d'observations est  $n = 20$ , nous trouvons qu'en moyenne, la probabilité prédictive du modèle avec le plus bas score logarithmique est de  $\exp(1/20) = 1,051$  fois plus grande, par rapport à la probabilité prédictive du modèle comparé, donc nous avons une amélioration de la probabilité prédictive de 5,1% pour le modèle avec le score logarithmique le plus bas (voir Madigan, Gavrin et Raftery, 1995).

**Remarque 3.1.2.** *Sous le modèle bayésien général, la fonction de distribution du vecteur des valeurs prédites, dépend du nombre de variables explicatives,  $p$ , du modèle (voir l'équation (1.3.3)), et donc, sa valeur diminue quand le nombre  $p$  croît, ce qui fait que, le modèle bayésien de régression linéaire multiple va avoir toujours une valeur supérieure du score logarithmique, par rapport au score logarithmique du modèle bayésien de régression linéaire simple et donc du moyennage de modèles de régression linéaire simple. Afin de pouvoir comparer les modèles*

*analysés, en ce qui concerne le score logarithmique, nous allons remplacer la valeur du score logarithmique sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple, Slog, avec sa racine d'ordre  $\frac{2}{p+1}$ . Notons cette valeur avec  $Slog^*$  et la valeur correspondant de la différence des scores des modèles analysés, nous allons la noter avec  $Slog_{P-M}^*$ .*

Donc, la comparaison des modèles par rapport au score logarithmique, sera réalisée à l'aide de l'indicateur suivant :

$$AM_{M/P} = \exp\left(\frac{Slog_{P-M}^*}{n}\right) - 1,$$

qui nous donne le pourcentage d'amélioration de la probabilité prédictive sous le modèle de moyennage de modèles par rapport au modèle de régression linéaire multiple.

Le programme S-plus que nous avons créé pour produire les variables décrites aux étapes précédentes, pour tous les cas générés (12 valeurs de  $\underline{Y}$  générées à partir du 12 paires  $(\beta_1, \beta_2)$ , présentés dans le tableau 3.1.1, analysées pour un nombre d'observations de  $n=20, 50$  et  $100$ ), est donné dans l'annexe A. Un exemple de résultats obtenus lors des simulations est présenté dans l'annexe B.

### 3.2. ANALYSE DE RÉSULTATS

Après avoir réalisé toutes les simulations décrites dans la section précédente et après avoir calculé les indicateurs de comparaison des modèles, en ce qui concerne les performances des prédictions, nous avons remarqué que les distributions de ces trois indicateurs, de la somme des carrés des erreurs, de la variance et du score logarithmique, en fonction de la corrélation entre les variables  $X_1$  et  $X_2$ , peuvent être ajustées par une fonction polynomiale. Après avoir essayé plusieurs fonctions polynômiales, nous avons observé que celle qui ajuste mieux, correspond à un polynôme d'ordre 4. Étant donné que toutes ces distributions sont ajustées par la même fonction polynomiale, nous allons considérer la comparaison entre

différentes distributions par rapport à l'ordonnée à l'origine. Les valeurs du rapport de détermination varient de 0,75 à 1. Ces valeurs, ainsi que les valeurs des coefficients des fonctions polynomiales, sont données dans l'annexe C. Dans les tableaux 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 nous trouvons les valeurs de l'ordonnée à l'origine de ces fonctions, pour tous les modèles simulés, analysé par rapport à la somme des carrés des erreurs, à la variance et au score logarithmique.

TABLEAU. 3.2.1. Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple,  $n=20$

Nombre d'observations	"Vrai" modèle ( $\beta_1 ; \beta_2$ )	SSE <sub>M/P</sub>	Var <sub>M/P</sub>	AM <sub>M/P</sub>
20	(1 ; 1)	2,37	1,40	-0,27%
20	(1 ; 0,75)	1,94	1,16	0,25%
20	(1 ; 0,5)	1,51	0,88	0,13%
20	(1 ; 0,25)	1,16	0,70	0,03%
20	(1 ; 0,1)	1,06	0,64	0,34%
20	(1 ; 0)	1,04	0,63	0,47%
20	(2 ; 1)	2,99	1,24	-4,1%
20	(2 ; 0,75)	2,12	0,97	-4,3%
20	(2 ; 0,5)	1,55	0,79	-4,5%
20	(2 ; 0,25)	1,17	0,68	-4,5%
20	(2 ; 0,1)	1,07	0,64	-4,7%
20	(2 ; 0)	1,05	0,63	-4,8%

Donc, en analysant les résultats des simulations, nous pouvons faire les analyses suivantes.

(1) Par rapport au nombre d'observations  $n$  :

En regardant les différences entre les modèles analysés, par rapport au

TABLEAU. 3.2.2. Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple,  $n=50$

Nombre d'observations	"Vrai" modèle $(\beta_1; \beta_2)$	$SSE_{M/P}$	$Var_{M/P}$	$AM_{M/P}$
50	(1; 1)	2,41	1,53	-0,15%
50	(1; 0,75)	2,00	0,98	-0,19%
50	(1; 0,5)	1,45	0,86	-0,26%
50	(1; 0,25)	1,12	0,68	-0,37%
50	(1; 0,1)	1,03	0,63	-0,42%
50	(1; 0)	1,01	0,62	-0,44%
50	(2; 1)	2,84	1,24	-1,8%
50	(2; 0,75)	2,05	0,98	-1,9%
50	(2; 0,5)	1,47	0,79	-1,9%
50	(2; 0,25)	1,12	0,68	-2,0%
50	(2; 0,1)	1,03	0,64	-2,0%
50	(2; 0)	1,01	0,63	-2,1%

nombre d'observations  $n$ , nous remarquons qu'il n'y a presque pas de différence, indépendamment si nous analysons les modèles par un des indicateurs de comparaison, soit  $SSE_{M/P}$  ou  $Var_{M/P}$ , tandis que par rapport au  $AM_{M/P}$ , il y plus ou moins de variation. Donc, les différences entre les modèles dépendent que très légèrement du nombre d'observations.

(2) Par rapport à la dépendance d'une variable explicative nous trouvons (voir le tableau 3.2.1) :

Pour les modèles qui ont les coefficients  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_2 = 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1$  et 0, nous observons que les différences entre le modèle de moyennage

TABLEAU. 3.2.3. Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple,  $n=100$

Nombre d'observations	"Vrai" modèle $(\beta_1 ; \beta_2)$	$SSE_{M/P}$	$Var_{M/P}$	$AM_{M/P}$
100	(1 ; 1)	2,48	1,64	-0,07%
100	(1 ; 0,75)	1,99	1,18	-0,05%
100	(1 ; 0,5)	1,48	0,85	-0,14%
100	(1 ; 0,25)	1,11	0,68	-0,22%
100	(1 ; 0,1)	1,01	0,63	-0,23%
100	(1 ; 0)	1,00	0,62	-0,24%
100	(2 ; 1)	2,79	1,23	-0,93%
100	(2 ; 0,75)	2,40	0,99	-0,98%
100	(2 ; 0,5)	1,44	0,79	-1,00%
100	(2 ; 0,25)	1,11	0,68	-1,03%
100	(2 ; 0,1)	1,01	0,64	-1,03%
100	(2 ; 0)	1,00	0,63	-1,04%

bayésien et le modèle bayésien de régression linéaire multiple, par rapport à la somme des carrés des erreurs, décroissent quand la dépendance du vrai modèle de la variable explicative  $X_2$ , décroît. De plus ils atteignent une limite où les modèles de moyennage bayésien et de régression linéaire multiple deviennent similaires (valeurs de  $SSE_{M/P} \simeq 1$ ). Par rapport à la variance des estimations nous retrouvons la même situation (une tendance décroissante de la différence entre les modèles, quand la dépendance du "vrai" modèle par rapport à la variable  $X_2$  décroît), jusqu'à une valeur de  $Var_{M/P} \simeq 0,6$ , ce qui signifie que le meilleur modèle de point de vue de la variance de prédiction, devient le modèle de moyennage bayésien.

Nous retrouvons une situation similaire dans le cas où nous analysons les modèles qui ont le coefficient  $\beta_1 = 2$ , tandis que le coefficient  $\beta_2$  peut prendre les mêmes valeurs que le groupe des modèles analysés ci-haut, à savoir les valeurs : 1 ; 0,75 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,1 et 0. Les valeurs de la  $SSE_{M/P}$  et de la  $Var_{M/P}$  pour les “vrais” modèles  $(\beta_1, \beta_2) = (1;1)$  et  $(2;1)$  sont approximativement 2,4 et 2,8, et respectivement 1,5 et 1,2. La valeur de la  $Var_{M/P}$  changent de supérieure à 1 à inférieure à 1, entre  $\beta_2 = 0,75$  et 0,5, lorsque  $\beta_1 = 1$  et autour de  $\beta_2 = 0,75$ , lorsque  $\beta_1 = 2$ .

- (3) Par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$  nous avons (voir les figures 3.2.1 et 3.2.2) :

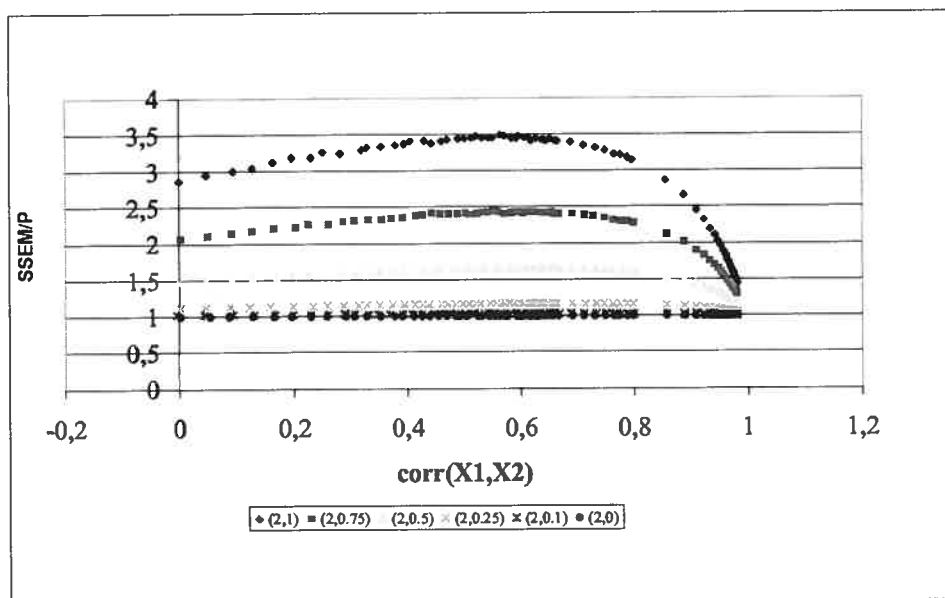


FIGURE. 3.2.1. Distribution de  $SSE_{M/P}$  par rapport à la corrélation  $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles :  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1 ; 0,75 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,1$  et 0



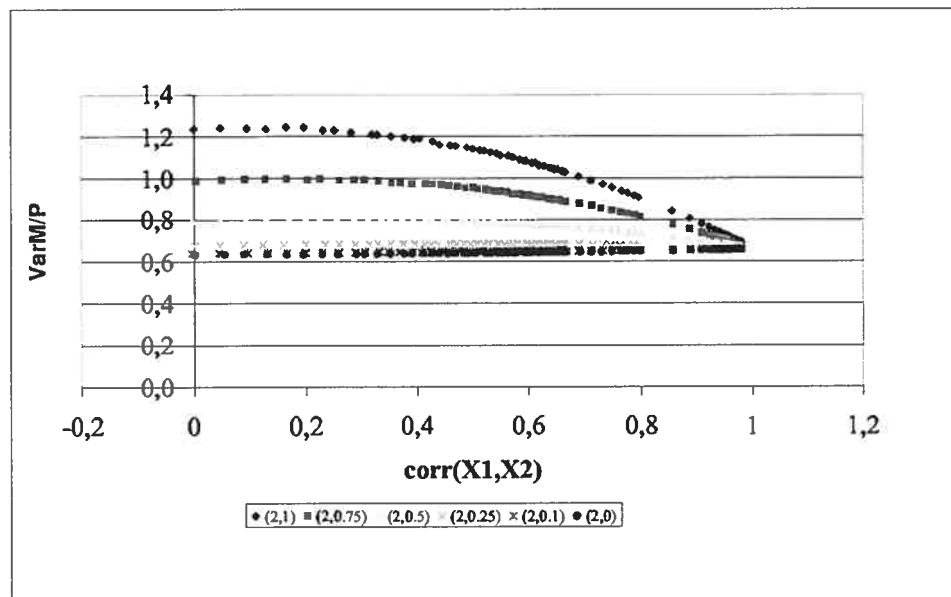


FIGURE. 3.2.2. Distribution de  $\text{Var}_{M/P}$  par rapport à la corrélation  $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles :  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1, 0,75 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,1$  et  $0$

En faisant les graphiques des distributions des indicateurs de comparaison des modèles par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$ , nous constatons que la différence entre le modèle de moyennage bayésien et le modèle de régression linéaire multiple, par rapport à la somme des carrés des erreurs et par rapport à la variance est maximale dans une certaine région entre 0,5 et 0,75. Donc, quand la corrélation des variables explicatives est moyenne le modèle de régression linéaire multiple est meilleur par rapport aux performances prédictives, que le modèle de moyennage bayésien. À partir d'une forte corrélation entre les variables explicatives, d'une valeur supérieure à 0,8, les modèles analysés deviennent presque similaires. Quant à la différence entre les modèles par rapport au

TABLEAU. 3.2.4. Modèles simulés pour produire des probabilités *a posteriori* égales

“Vrai” modèle $(\beta_1, \beta_2)$	(0;0)	(1;1)	(2;2)	(3;3)
$\Pr(M_1   \underline{Y}) \pm \text{SD}$	0,500 $\pm$ 0,004	0,499 $\pm$ 0,01	0,501 $\pm$ 0,01	0,502 $\pm$ 0,011
$\Pr(M_2   \underline{Y}) \pm \text{SD}$	0,500 $\pm$ 0,004	0,501 $\pm$ 0,01	0,499 $\pm$ 0,01	0,498 $\pm$ 0,011

score logarithmique, il n’y a presque plus de variation par rapport à la corrélation entre les variables explicatives.

- (4) Par rapport à la dépendance des variables explicatives, quand les probabilités *a posteriori* des modèles inclus dans le moyennage bayésien sont égales, nous trouvons :

En regardant les simulations qui nous donnent des valeurs égales des probabilités *a posteriori* pour les modèles inclus dans le moyennage des modèles, nous observons que cela correspond aux “vrais” modèles qui dépendent dans une mesure égale des variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$  (le “vrai” modèle avec  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ). Pour élargir l’analyse pour ce cas particulier, nous avons ajouté 3 nouvelles simulations, qui correspondent aux “vrais” modèles suivants :  $(\beta_1; \beta_2) = (0;0), (2;2), (3;3)$ . Ces 3 nouvelles simulations sont réalisées pour un nombre  $n = 20$  d’observations, car nous avons déjà vu, que les conclusions restent les mêmes, lorsque la taille de l’échantillon change. Les probabilités *a posteriori* des modèles inclus dans le moyennage bayésien sont données dans le tableau 3.2.4.

Pour analyser aussi ces nouvelles simulations, nous avons ajusté les distributions de ces trois indicateurs de comparaison des modèles, à l’aide de la fonction polynomiale d’ordre 4. Les valeurs de l’ordonnée à l’origine de la courbe d’ajustement sont données dans le tableau 3.2.5, tandis que les représentations graphiques des distributions par rapport à la corrélation entre les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont données dans les figures 3.2.3, 3.2.4 et

## 3.2.5.

TABLEAU. 3.2.5. Ordonnée à l'origine des polynômes d'ordre 4, utilisés dans l'ajustement des distributions des indicateurs de comparaison du modèle de moyennage avec le modèle de régression multiple

“Vrai” modèle $(\beta_1; \beta_2)$	(0;0)	(1;1)	(2;2)	(3;3)
$SSE_{M/P}$	1,014	2,370	6,281	11,017
$Var_{M/P}$	0,63	1,40	2,37	2,91
$AM_{M/P}$	24,6%	-0,27%	-3,78%	-5,85%

Nous observons que les différences entre les modèles analysés, par rapport aux performances prédictives, croient quand la dépendance du “vrai” modèle, par rapport aux variables explicatives croit, dans le sens que le modèle de régression linéaire multiple est meilleur que le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple.

- (5) Comparaison des modèles quand le “vrai” modèle ne dépend pas de variables explicatives.

Ce cas particulier est obtenu dans la situation quand les coefficients  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ , qui correspondent à la situation présentée précédente dans le tableau 3.2.5. Nous pouvons remarquer que par rapport à la somme des carrés des erreurs, il n'y a pas de différence entre les modèles, tandis que, par rapport à la variance des estimations et au score logarithmique le modèle de moyennage de modèles de régression linéaire simple est meilleur, ayant une valeur de la variance de 40% de moins et une amélioration de la probabilité prédictive de 25% par rapport au modèle de régression linéaire multiple.

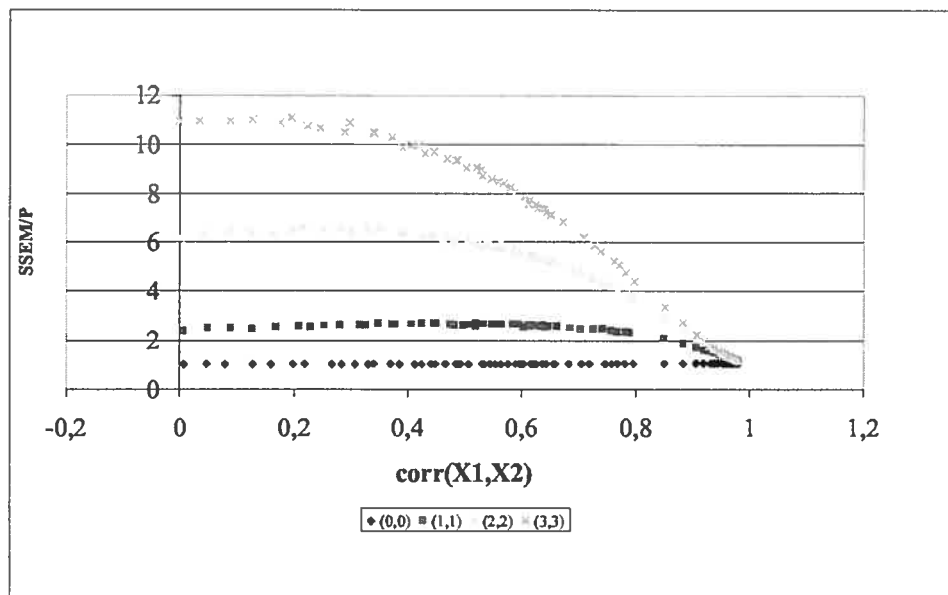


FIGURE. 3.2.3. Distribution de  $SSE_{M/P}$  par rapport à la corrélation  $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles :  $(\beta_1; \beta_2) = (0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(2; 2)$  et  $(3; 3)$

### 3.3. CONCLUSIONS DES SIMULATIONS

Nous avons vu dans le chapitre 2, que la différence entre le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple et le modèle bayésien de régression linéaire multiple, sous l'hypothèse que les estimations des observations sont constantes, a un maximum quand les probabilités *a posteriori* des modèles inclus dans le moyennage bayésien, sont égales. Dans le chapitre 3, nous avons vérifié ces résultats, en essayant de voir aussi, comment ces résultats sont valables par rapport au "vrai" modèle. Pour cela, nous avons créé plusieurs de modèles. Par exemple le groupe des modèles avec  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_2 = 1, 0,75; 0,5; 0,25; 0,1$  et 0, ainsi que le groupe avec  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1; 0,75; 0,5; 0,25; 0,1$  et 0, nous a aidé à confirmer le résultat que, la différence entre les pertes espérées du modèle de

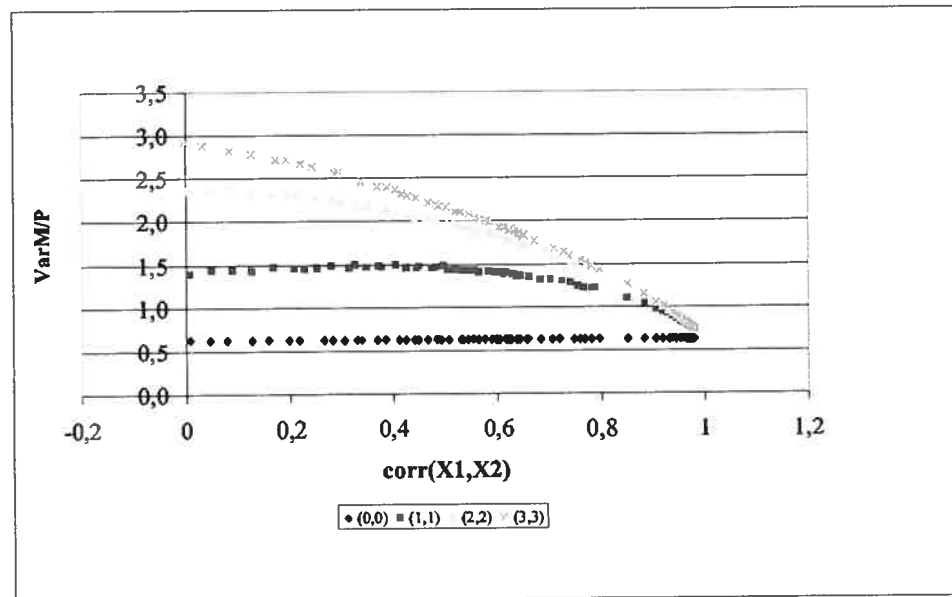


FIGURE. 3.2.4. Distribution de  $\text{Var}_{M/P}$  par rapport à la corrélation  $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles :  $(\beta_1; \beta_2) = (0;0)$ ,  $(1;1)$ ,  $(2;2)$  et  $(3;3)$

moyennage bayésien et du modèle de régression multiple sera maximale, lorsque les probabilités *a posteriori* des modèles inclus dans le moyennage seront égales. Ce cas est obtenu pour les modèles avec  $(\beta_1; \beta_2) = (1;1)$  et  $(2;2)$ , car des valeurs supérieures pour les différences des performances prédictives ont été observées. Nous avons aussi obtenu qu'elles sont presque similaires de point de vue de la somme de carrés des erreurs, quand la dépendance du "vrai" modèle par rapport à une variable explicative, tends vers 0, tandis que, par rapport à la variance des prédictions, le modèle de moyennage bayésien devient meilleur. À ce résultat, nous avons ajouté que la différence entre les modèles est maximale quand la corrélation entre les variables explicatives est moyenne et qu'il n'y a presque

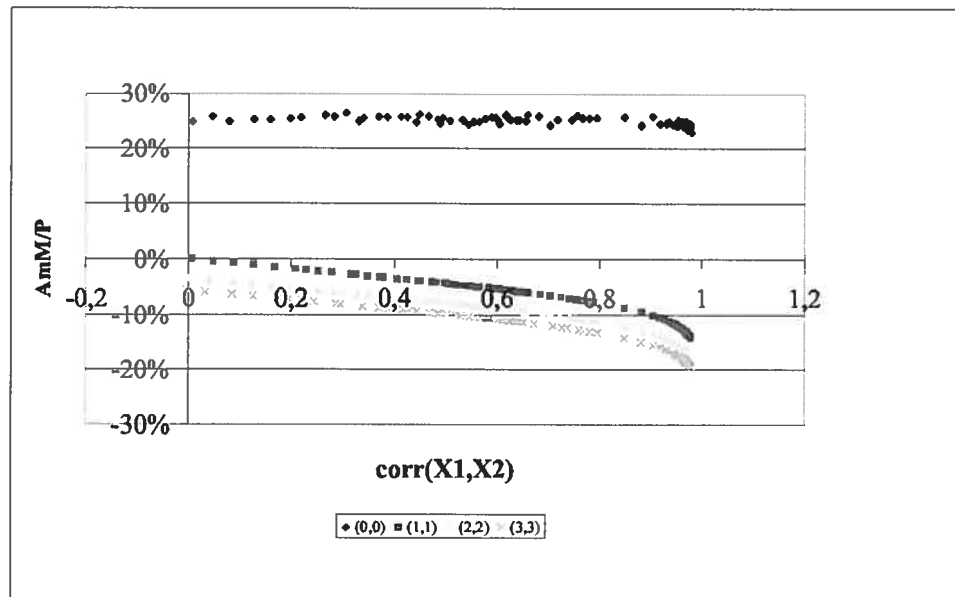


FIGURE. 3.2.5. Distribution de  $AM_{M/P}$  par rapport à la corrélation  $\text{corr}(X_1, X_2)$ , pour les modèles :  $(\beta_1; \beta_2) = (0;0)$ ,  $(1;1)$ ,  $(2;2)$  et  $(3;3)$

plus de différence à partir d'une corrélation supérieure à 0,8. Ce résultat est valable par rapport à la somme des carrés des erreurs, tandis que par rapport à la variance des prédictions nous retrouvons que le modèle de moyennage bayésien est meilleur. Par contre, le score logarithmique n'est pas un bon indicateur pour la classification des modèles, car, le pourcentage d'amélioration de la probabilité prédictive est autour de la valeur 0, et il ne dépend pas de la corrélation des variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$ .

### 3.4. EXEMPLE PRATIQUE : CRIME ET CHÂTIMENT

L'exemple pratique que nous analysons dans cette section, est l'exemple pratique, intitulé "Crime et châtime" utilisé dans l'article "Bayesian Model Averaging for Linear Regression Model" de Raftery, Madigan et Hoeting (1993) et qui a fait l'objet de plusieurs analyses (voir Ehrlich (1973), Vandaele (1978), Cox et Snell (1982)). "Crime et châtime" analyse le comportement criminel aux États-Unis, par rapport à 15 variables explicatives qui représentent des variables psychologiques, sociales et des circonstances familiales de 47 états des États-Unis en 1960 (voir le tableau 3.4.1). La base de données "Crime et châti-

TABLEAU. 3.4.1. Variables explicatives pour le comportement criminel dans les États-Unis en 1960

Numéro de variable	Variable prédictive
1	pourcentage des hommes 14-24
2	variable indicateur pour un état du sud
3	moyenne d'âge de scolarité
4	dépenses de la police en 1960
5	dépenses de la police en 1959
6	taux de participation de main-d'oeuvre
7	nombre d'hommes par 1000 femmes
8	population de l'état
9	nombre des non-blancs
10	taux de chômage des hommes 14-24 en milieu urbain
11	taux de chômage des hommes 35-39 en milieu urbain
12	richesse
13	inégalité de revenu
14	probabilité d'emprisonnement
15	le temps moyen servi dans les prisons d'état

ment” est utilisée dans cet article pour comparer les prédictions de la variable comportement criminel calculées à l’aide des modèles sélectionnés par différentes méthodes (Pas-à-Pas,  $C_p$ ,  $R^2$  ajusté), avec les prédictions calculées à l’aide du moyennage bayésien de modèles réalisé par la méthode des “fenêtres d’Occam” et par la méthode Monte Carlo markovienne. Les résultats de l’étude démontrent que les prédictions données par la méthode de moyennage bayésien de modèles par les deux approches, sont meilleures que les prédictions données par tout autre modèle sélectionné (voir Raftery, Madigan et Hoeting, 1993). Le modèle avec la plus grande probabilité *a posteriori* inclus dans le moyennage bayésien de modèles est le même pour les deux approches, les “fenêtres d’Occam” et Monte Carlo markovienne, à savoir, le modèle qui inclut comme variables explicatives  $X_1$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_9$ ,  $X_{11}$ ,  $X_{13}$  et  $X_{14}$ . Madigan, Gavrin et Raftery (1995) comparent ce modèle qui a la plus grande probabilité *a posteriori*, avec le moyennage de modèle sous l’approche les “fenêtres d’Occam”, par rapport au pourcentage d’amélioration de la performance prédictive. Notre but dans cet exemple, est de comparer le pourcentage d’amélioration ou de diminution de la performance prédictive sous le modèle avec la plus grande probabilité *a posteriori* par rapport au modèle obtenu par la méthode de moyennage de modèles de régression linéaire simple, décrite à la sous-section 2.2.1.. Donc, au total, dans le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple nous avons 7 modèles correspondent aux variables explicatives  $X_1$ ,  $X_3$ ,  $X_4$ ,  $X_9$ ,  $X_{11}$ ,  $X_{13}$  et  $X_{14}$ , que nous comparons par rapport au modèle bayésien de régression linéaire multiple, qui a comme variables explicatives, les 7 variables correspondent aux 7 modèles incluent dans le moyennage bayésien.

Pour réaliser la comparaison des modèles, en ce qui concerne les performances prédictives, par rapport aux mêmes indicateurs décrits à la sous-section 3.1.4., nous faisons les étapes suivantes. Pour chacun des modèles, nous

- (1) réalisons l’ajustement des observations du comportement criminel, sous le modèle bayésien de régression linéaire multiple et sous le moyennage



bayésien de modèles de régression linéaire simple, à l'aide des étapes de 3.1.4 à 3.1.10 ;

(2) calculons les performances prédictives à l'aide des étapes de 3.1.11 à 3.1.17.

Pour les modèles de régression linéaire simple, inclus dans le moyennage bayésien, nous trouvons les probabilités *a posteriori* suivantes (voir le tableau 3.4.2).

Le programme S-plus créé pour l'exemple "Crime et châtement" ainsi que les ré-

TABLEAU. 3.4.2. Probabilités *a posteriori* de modèles inclus dans le moyennage bayésien

Variable explicative dans le modèle simple	Probabilité <i>a posteriori</i>
$X_1$	0,032
$X_3$	0,039
$X_4$	0,726
$X_9$	0,024
$X_{11}$	0,033
$X_{13}$	0,031
$X_{14}$	0,115

sultats, se trouve dans l'annexe D. Donc, en regardant les résultats, les valeurs des indicateurs à l'aide desquels nous comparons les modèles sont données dans le tableau 3.4.3.

Donc, dans l'exemple réel considéré, si nous estimons le comportement criminel à l'aide du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, nous obtenons une valeur de la somme des carrés des erreurs de 57,8% plus grande que la valeur obtenue si nous l'estimons à l'aide du modèle bayésien de régression linéaire multiple, respectivement une valeur de la variance des estimations est 2,34 fois plus grande pour ce dernier. Par rapport au score logarithmique nous trouvons que la différence entre les scores logarithmiques est de 1,725. Ceci vient confirmer, que le modèle de moyennage de modèles de régression linéaire simple

TABLEAU. 3.4.3. Résultats de l'analyse de modèles dans l'exemple "Crime et châtiment"

Indicateur d'analyse de modèles	valeur
$SSE_{M/P}$	1,578
$Var_{P/M}$	2,342
$Slog_{P-M}^*$	1,725
$\exp\left(\frac{Slog_{P-M}^*}{n}\right)$	1,078

est meilleur que le modèle de régression linéaire multiple, et que, en moyenne, la probabilité prédictive observée, a été améliorée de 7,8% sous le modèle de moyennage bayésien.

Dans le tableau 3.4.4 nous donnons les valeurs obtenues de Madigan, Gavrin et Raftery (1995), quand ils comparent le modèle avec la plus grande probabilité *a posteriori*, avec le moyennage de modèle sous l'approche les "fenêtres d'Occam", que nous comparons avec les valeurs que nous obtenons dans la comparaison du même modèle de régression linéaire multiple et le moyennage de modèles de régression linéaire simple. Nous réalisons cette comparaison par rapport au pourcentage d'amélioration de la performance prédictive, car c'est le seul indicateur de comparaison des modèles dont nous disposons dans l'article utilisé. Donc, sous les deux modèles de moyennage, de modèles de régression linéaire simple et les "fenêtres d'Occam", nous obtenons une amélioration de la probabilité *a posteriori*, par rapport au modèle de régression linéaire multiple, mais cette amélioration est supérieure sous l'approche des "fenêtres d'Occam". Nous nous attendions à cela, car nous avons vu que l'algorithme les "fenêtres d'Occam", est un algorithme complexe de sélection de modèles, qui donne toujours de bons résultats (voir section 1.5), tandis que le moyennage bayésien qui fait l'objet de notre recherche est crée sur une base simple, et ne constitue pas un algorithme de sélection de modèles. Le moyennage de modèles de régression linéaire simple, présenté dans ce mémoire,

TABLEAU. 3.4.4. "Crime et châtime"nt", pourcentage d'amélioration de la performance prédictive. Source : Données 1 : Annexe D; Données 2 : Madigan, Gavrín et Raftery, 1995

Modèles comparés	$Slog_{P-M}$	$n$	% amél. prob. préd.
1. régression linéaire multiple versus moyennage - régression linéaire simple	1,73	23	7,8
2. régression linéaire multiple versus moyennage - approche les "fenêtres d'Occam"	11,0	23	61,3

est un modèle exploratoire, que nous avons testé à base de l'exemple réel "Crime et châtime"nt" et où nous avons obtenu de bons résultats. Donc, nous pouvons affirmer que, le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est, dans la plupart des cas, moins bon que le modèle de moyennage bayésien sous les approches les "fenêtres d'Occam" ou Monte Carlo markovienne, mais, qui peut remplacer avec succès un modèle de régression linéaire multiple. L'avantage du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est que les estimations des paramètres sont plus faciles à calculer pour les modèles de régression linéaire simple que pour tout modèle de régression linéaire multiple.

## CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, en abordant une approche bayésienne, nous avons introduit le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple comme une alternative au modèle de régression linéaire multiple. Donc, à chaque variable explicative considérée, correspond un modèle de régression linéaire simple, qui est introduit dans le moyennage bayésien de modèles, tandis que le modèle de régression linéaire multiple est déterminé par toutes ces variables.

Dans le premier chapitre nous avons décrit les modèles de régression linéaire multiple sous l'approche classique et sous l'approche bayésienne, ainsi que la méthode de moyennage bayésien de modèles vue sous les approches les "fenêtres d'Occam" et Monte Carlo markovienne.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté le moyennage de modèles de régression linéaire simple, qui est introduit dans ce mémoire, dans le but de remplacer un modèle de régression linéaire multiple, et comme étant une alternative plus facile à calculer que ce dernier et avec une solution explicite. Comme critères de comparaison des modèles nous avons présenté la perte espérée *a posteriori*, ainsi que des mesures de la performance prédictive des modèles, à savoir : la somme des carrés des erreurs, la variance des estimations et le score logarithmique. En considérant la perte espérée *a posteriori*, nous avons obtenu une différence qui dépend des probabilités *a posteriori* des modèles incluent dans le moyennage bayésien, ainsi que des prédictions des observations sous ces modèles.

Dans le troisième chapitre nous avons vérifié les résultats obtenus du point de vue théorique à l'aide de simulations, qui ont générées différents "vrais" modèles, pour lesquels nous avons ajusté les observations à l'aide du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple et du modèle de régression linéaire multiple, en considérant différents niveaux de corrélation entre les variables explicatives.

Les résultats des simulations nous ont confirmé l'hypothèse que la forme du "vrai" modèle influence les différences entre les modèles, ainsi que la corrélation entre les variables explicatives considérées. Nous avons aussi trouvé, que du point de vue de la somme des carrés des erreurs et de la variance des prédictions, la différence entre les modèles est maximale, quand la corrélation entre les variables explicatives est moyenne, dans le sens que le meilleur modèle est le modèle de régression linéaire multiple, et que à partir d'une corrélation de 0,8, les modèles de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple et de régression linéaire multiple sont presque similaires. Du point de vue de la variance des prédictions, le modèle de moyennage bayésien devient meilleur que le modèle de régression linéaire multiple quand la dépendance d'une variable explicative décroît, tandis que par rapport à la somme des carrés des erreurs, les modèles deviennent similaires quand la dépendance est faible. Nous avons aussi observé que les différences entre les modèles sont maximales, dans le sens que le meilleur modèle est le modèle de régression linéaire multiple, quand les probabilités *a posteriori* des modèles incluent dans le moyennage bayésien sont égales et que cette différence augmente, quand la dépendance des "vrais" modèles des variables explicatives augmentent. Par contre, si nous sommes en présence d'un "vrai" modèle qui ne dépend pas des variables explicatives considérées, le meilleur modèle par rapport à toutes les mesures de performance prédictive, est le moyennage bayésien. En ce qui concerne le score logarithmique, il n'est pas un bon indicateur de comparaison dans toutes les situations, car nous avons obtenu pour le

pourcentage d'amélioration de la probabilité prédictive une valeur près de 0, ce qui rend son analyse difficile. Mais, par contre, nous avons remarqué que dans la présence d'un modèle complexe, introduit à l'aide de l'exemple pratique "Crime et châtement", le score logarithmique est un bon indicateur de mesure de la performance prédictive d'un modèle. Pour cet exemple, nous avons une amélioration de la probabilité prédictive sous le moyennage bayésien de modèle de régression linéaire simple par rapport au modèle de régression linéaire multiple. À l'aide du même exemple pratique, nous avons comparé aussi le moyennage bayésien sous l'approche les "fenêtres d'Occam" avec le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple, que nous avons introduit dans ce mémoire. Les résultats obtenus démontrent que, de point de vue du score logarithmique, le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est moins bon que le moyennage bayésien sous l'approche les "fenêtres d'Occam", mais meilleur que le modèle de régression linéaire multiple. Mais par contre, comme nous avons déjà spécifié, le moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est plus facile à calculer que le moyennage bayésien sous l'approche les "fenêtres d'Occam" ou le modèle de régression linéaire multiple, et qui donne dans certains cas, que nous avons analysés, des résultats similaires et même meilleurs que ce dernier.

Donc, la conclusion générale de cette recherche est que, pour deux variables explicatives, nous pouvons utiliser avec très grande confiance le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple quand nous sommes en présence de variables explicatives fortement corrélées, aussi que dans la situation où le but est d'obtenir des variances des prédictions minimales, même si la somme des carrés des erreurs n'est pas aussi bonne. Le modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire simple est meilleur que le modèle de régression linéaire multiple, aussi dans la situation où nous sommes en présence d'un modèle nul, situation dans laquelle nous retrouvons des valeurs meilleures pour ce premier, quelque soit la mesure de performance prédictive. Malgré ces avantages

du modèle de moyennage bayésien de modèles de régression linéaire multiple, il a aussi des limites dans la situation quand les “vrais” modèles dépendent dans une mesure égale de toutes les variables explicatives identifiées, les probabilités *a posteriori* ayant des valeurs égales pour tous les modèles incluent dans le moyennage. Mais nous savons que cette situation n’est pas très fréquente dans des situations réelles, donc le risque d’obtenir ces résultats est minimal.

Donc, ce mémoire ouvre des portes pour les prochaines recherches dans le domaine de la régression linéaire multiple sous la méthode du moyennage bayésien des modèles de régression linéaire simple, pour plus de deux variables explicatives. Nous pensions avoir des résultats meilleurs que dans le cas de deux variables explicatives, si nous nous basons sous les résultats obtenu à l’aide de l’exemple pratique “Crime et châtement”. Ceci n’a pas été possible dans ce mémoire, car c’est un sujet assez complexe, qui pouvait pas être traité dans un seul chapitre.

# Annexe A

---

## PROGRAMME S-PLUS POUR LES SIMULATIONS

```
simuld_function(n,d,itmean,c,coef1,coef2){  
  
  m_matrix(0,itmean,21)  
  meanm_matrix(0,1,21)  
  Y_matrix(0,n,1)  
  sigYc_matrix(0,1,1)  
  beta_matrix(0,p+1,1)  
  p_2  
  
  for (j in 1:itmean){  
  
    # Déterminer la matrice de variance-covariance:  
  
    sigmaf_function(c,d,p){ dmat_matrix(d,nrow=p,ncol=p)  
    sigmac_diag(c,p)+dmat return(sigmac)}  
    sigmac_sigmaf(c,d,p)  
  
    # Déterminer la matrice A - méthode de décomposition de Choleski  
  
    A_chol(sigmac)  
    sigmac_t(A)%*%A  
  
    # générer des variables  $Z \sim N_p(0, I)$ ,  $Z_i \sim N(0, 1)$   
  
    Z_matrix(rnorm(n*p,0,1),nrow=p,ncol=n,byrow=F)  
  
    # calculer la variable z à partir de :  $z=t(A)*Z$   
  
    z_t(A)%*%Z
```



```

# Générer la matrice X=[1 t(z)]

X0_matrix(1,nrow=n,ncol=1)
X_cbind(X0, t(z))
X1m1_X[,2]
X2m1_X[,3]

# on génère des erreurs  $\text{eps} \sim N(0,1)$ 
sig_1
eps_rnorm(n,0,sig)

# On fixe les bêtas:

beta[1,1]_1
beta[2,1]_coef1
beta[3,1]_coef2

# on calcule les Y : Y=beta*X+eps

Y_X%%beta+eps

#-----

# Estimer Y par: 1)Régression multiple
#                2)Moyennage
#                bayésien des modèles de régression linéaire simple

#1)Régression linéaire multiple

#Estimer les bêtas : bhat=(n0*b0+b1s)/(n0+1)

b1s_solve(t(X)%%X)%%t(X)%%Y
b0f_function(p){
b0_matrix(0,nrow=p+1,ncol=1)
b0[1]_mean(Y)
return(b0)}
b0_b0f(p)
n0_0.1
bhat_(n0*b0+b1s)/(n0+1)

# Calculer la matrice H=[(t(X)*X)^(-1)]*t(X) et la matrice
# phi=[I-(1/(n0+1))*H]^(-1)

H_X%%solve((t(X)%%X)%%t(X)
I_diag(1,n)
invPhi_I-(1/(n0+1))*H

```

```

phi_solve(invPhi)

# Estimer les Y=X*bhat

Yhat_X%%bhat
sigYc_matrix(0,1,1)
sigYc[1,1]_sig
SSE_sum((Y-Yhat)^2)

#2)Moyennage de modèles de régression linéaire simple

# Créer la matrice X pour chaque modèle simple:

X1_cbind(X0,X[,2])
X2_cbind(X0,X[,3])

#Estimer les bêtas : bhat=(n0*b0+bls)/(n0+1) pour chaque
#modèle simple

bls1_solve(t(X1)%%X1)%%t(X1)%%Y
bls2_solve(t(X2)%%X2)%%t(X2)%%Y
b0i_matrix(0,nrow=1+1,ncol=1)
b0i[1]_mean(Y)
n0_0.1
bhat1_(n0*b0i+bls1)/(n0+1)
bhat2_(n0*b0i+bls2)/(n0+1)

# Calculer la matrice H=[(t(X)*X)^(-1)]*t(X) et la matrice
# phi=[I-(1/(n0+1))*H]^(-1) pour chaque modèle
# simple

H1_X1%%solve((t(X1)%%X1)%%t(X1)
I_diag(1,n)
invPhi1_I-(1/(n0+1))*H1
phi1_solve(invPhi1)

# calculer l'inverse de H1

G1_ginverse(H1)
H2_X2%%solve((t(X2)%%X2)%%t(X2)
I_diag(1,n)
invPhi2_I-(1/(n0+1))*H2
phi2_solve(invPhi2)

# calculer l'inverse de H2

```

```
G2_ginverse(H2)
```

```
# Estimer les  $Y=X*\hat{b}$  pour chaque modèle:
```

```
Yhat1_X1%*%bhat1
```

```
Yhat2_X2%*%bhat2
```

```
# Calculer les probabilités a priori pour chaque modele:
```

```
moy1_X1%*%b0i
```

```
sigmac1_sigYc[1,1]*phi1
```

```
err1<-t(Y-moy1)%*%invPhi1%*(Y-moy1)/n
```

```
det1<-sqrt(prod(svd(sigmac1)$d))
```

```
my1_(1/sqrt((2*pi*err1)^n))*(1/sqrt(det1))
```

```
errYhat1_t(Yhat1-moy1)%*%G1%*(Yhat1-moy1)/n
```

```
mYhat1_(1/sqrt((2*pi*errYhat1)^p))*exp(-p/2)
```

```
trH1_sum(diag(H1)) V1_(1/n0+1)*err1*trH1
```

```
moy2_X2%*%b0i
```

```
sigmac2_sigYc[1,1]*phi2
```

```
err2<-t(Y-moy2)%*%invPhi2%*(Y-moy2)/n
```

```
det2<-sqrt(prod(svd(sigmac2)$d))
```

```
my2_(1/sqrt((2*pi*err2)^n))*(1/sqrt(det2))
```

```
errYhat2_t(Yhat2-moy2)%*%G2%*(Yhat2-moy2)/n
```

```
mYhat2_(1/sqrt((2*pi*errYhat2)^p))*exp(-p/2)
```

```
trH2_sum(diag(H2)) V2_(1/n0+1)*err2*trH2
```

```
prM1_1/2
```

```
prM2_1/2
```

```
# Calculer les probabilités a posteriori pour chaque modèle:
```

```
prMy1_(my1*prM1)/(my1*prM1+my2*prM2)
```

```
prMy2_(my2*prM2)/(my1*prM1+my2*prM2)
```

```
# Calculer les probabilités a posteriori pour les
```

```
# valeurs ajustées sous
```

```
#chaque modèle (pr(Yhat/Mk,Y))
```

```
prYhat1_(mYhat1*prM1)/(mYhat1*prM1+mYhat2*prM2)
```

```
prYhat2_(mYhat2*prM2)/(mYhat1*prM1+mYhat2*prM2)
```

```
# Estimer Y par la méthodes de moyennage de modèles simples:
```

```
Yhatm<-(prMy1[1,1]*Yhat1+prMy2[1,1]*Yhat2)
```

```

Yhatm2_sum(Yhatm^2)
SSEM_sum((Y-Yhatm)^2)
SSEM/P_SSEM/SSE
Vm_prMy1[1,1]*(V1+sum(Yhat1^2))+prMy2[1,1]*(V2+sum(Yhat2^2))-Yhatm2
logm_(-log(mYhat1*prMy1+mYhat2*prMy2))
moy_X%%b0
err<-t(Y-moy)%%invPhi%%(Y-moy)/n
trH_sum(diag(H))
Vp_(1/n0+1)*err*trH

# Calculer l'inverse de H

G_ginverse(H)
errYhat_t(Yhat-moy)%%G%%(Yhat-moy)/n
mYhat_(1/sqrt((2*pi*errYhat)^(p+1)))*exp(-(p+1)/2)
logp_(-log(mYhat))

m[j,]_cbind(beta[2,1],beta[3,1],c,d,n,prMy1,prMy2,cor(X1m1,X2m1),
bhat1[2,],bhat2[2,],cor(Y,X1m1),cor(Y,X2m1),diffm,diffp,diffmp,
Vm,Vp,logm,logp,mYhat1, mYhat2) m_round(m,3) dimnames(m)_
list(c(),c("beta1","beta2","c","d","n","prMy1","prMy2","cor(X1m1,X2m1)"
,"bhat1","bhat2","cor(Y,X1m1)","cor(Y,X2m1)","SSEm","SSEp",
"diffm/p","Vm","Vp","Slogm",
"Slogp","mYhat1","mYhat2"))

}
meanm_cbind(mean(m[,1]),mean(m[,2]),mean(m[,3]),mean(m[,4]),
mean(m[,5]),mean(m[,6]),mean(m[,7]),mean(m[,8]),mean(m[,9]),
mean(m[,10]),mean(m[,11]),mean(m[,12]),mean(m[,13]),mean(m[,14]),
mean(m[,15]),mean(m[,16]),mean(m[,17]),mean(m[,18]),
mean(m[,19]),mean(m[,20]),mean(m[,21])) dimnames(meanm)_
list(c(),c("beta1","beta2","c","d","n","prMy1","prMy2","cor(X1m1,X2m1)",
"bhat1","bhat2","cor(Y,X1m1)","cor(Y,X2m1)","SSEm","SSEp","diffm/p",
"Vm","Vp","Slogm","Slogp","mYhat1",
"mYhat2"))
meanm_round(meanm,3)
cat("time:",date(),"\\d",d) return(meanm) }

```

## Annexe B

---

### RÉSULTATS DES SIMULATIONS

Nous présentons les résultats des simulations pour tous les “vrais” modèles analysés, c’est-à-dire : pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1), (1; 0,75), (1; 0,5), (1; 0,25), (1; 0,1), (1; 0)$ , pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 1), (2; 0,75), (2; 0,5), (2; 0,25), (2; 0,1), (2; 0)$  pour un nombre d’observations  $n=20, 50$  et  $100$ , plus les 3 modèles supplémentaires :  $(\beta_1; \beta_2) = (0; 0), (2; 2), (3; 3)$  pour la taille  $n=20$ . Dans les tableaux de B.0.1 à B.0.39, nous présentons les valeurs de la variable  $d$ , qui donne les différentes valeurs de la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$ , valeurs présentées dans la colonne de  $\text{cor}(1,2)$ . Les valeurs des probabilités *a posteriori* des modèles de régression linéaire simple se trouvent dans les colonnes  $\text{prMy1}$  et  $\text{prMy2}$ . Les colonnes  $\text{cor}(Y,1)$  et  $\text{cor}(Y,2)$ , represent les valeurs des corrélations entre la variable  $Y$  et les variables explicatives  $X_1$  et respectivement  $X_2$ . Les valeurs de la somme de carrés des erreurs, de la variance et du score logarithmique sous le modèle de moyennage de modèles de régression linéaire simple sont données dans les colonnes  $SSEm, Vm$  et  $Slogm$  et sous le modèle de régression linéaire multiple sont respectivement  $SSEp, Vp$  et  $Slogp$ .

TABLEAU. B.0.1: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,506	0,494	0,006	0,627	0,623	39,89	17,79	60,82	43,41	3,40	6,33
0,1	0,487	0,513	0,048	0,644	0,648	42,03	18,03	65,04	45,03	3,56	6,47
0,2	0,491	0,509	0,088	0,659	0,665	41,80	17,93	66,15	45,91	3,64	6,56
0,3	0,496	0,504	0,126	0,676	0,677	42,45	18,30	67,45	47,22	3,73	6,62
0,4	0,52	0,48	0,168	0,701	0,693	43,01	17,90	70,99	48,19	3,86	6,75
0,5	0,483	0,517	0,208	0,709	0,717	43,62	17,99	72,04	49,33	3,96	6,84
0,6	0,518	0,482	0,228	0,726	0,715	44,16	18,43	73,98	50,76	4,01	6,89
0,7	0,505	0,495	0,252	0,733	0,73	45,11	18,55	76,83	52,27	4,10	6,99
0,8	0,5	0,5	0,279	0,741	0,743	44,74	18,21	79,01	53,08	4,17	7,08
0,9	0,504	0,496	0,315	0,757	0,755	45,40	18,47	80,10	54,70	4,27	7,15
1	0,507	0,493	0,325	0,764	0,758	45,36	18,51	82,57	55,22	4,28	7,19
1,1	0,519	0,481	0,347	0,773	0,766	46,20	18,39	82,99	56,39	4,37	7,26
1,2	0,483	0,517	0,377	0,778	0,784	47,20	18,96	86,82	59,02	4,45	7,36
1,3	0,496	0,504	0,372	0,779	0,781	46,75	18,59	87,16	58,63	4,44	7,37
1,4	0,492	0,508	0,405	0,791	0,795	47,11	18,62	90,18	60,04	4,54	7,45
1,5	0,506	0,494	0,424	0,801	0,798	47,36	18,73	90,10	61,63	4,58	7,52
1,6	0,503	0,497	0,445	0,806	0,809	47,74	18,87	91,91	62,93	4,65	7,57
1,7	0,491	0,509	0,449	0,81	0,811	47,24	18,64	94,59	63,80	4,68	7,62
1,8	0,479	0,521	0,474	0,817	0,819	47,72	19,10	95,52	65,41	4,73	7,66
1,9	0,498	0,502	0,481	0,819	0,822	47,59	19,03	96,63	65,69	4,75	7,68
2	0,485	0,515	0,497	0,825	0,828	48,11	19,44	100,80	67,91	4,80	7,75
2,1	0,505	0,495	0,506	0,831	0,829	47,59	19,20	97,67	67,90	4,82	7,76
2,2	0,491	0,509	0,519	0,834	0,834	48,53	19,77	101,23	70,29	4,87	7,83
2,3	0,5	0,5	0,519	0,837	0,836	49,11	19,28	103,16	70,98	4,90	7,89
2,4	0,486	0,514	0,533	0,841	0,842	48,93	19,29	103,06	71,93	4,93	7,92
2,5	0,494	0,506	0,548	0,846	0,847	48,70	19,48	104,68	72,89	4,97	7,95
2,6	0,522	0,478	0,558	0,852	0,848	49,32	19,49	106,74	74,74	5,03	8,02
2,7	0,481	0,519	0,564	0,851	0,853	49,27	19,79	107,66	76,04	5,04	8,04
2,8	0,483	0,517	0,565	0,85	0,854	49,31	19,76	107,73	76,60	5,04	8,05
2,9	0,489	0,511	0,584	0,859	0,861	49,15	19,61	111,32	78,25	5,10	8,12
3	0,495	0,505	0,595	0,864	0,864	49,18	19,57	111,94	79,27	5,14	8,16
3,1	0,517	0,483	0,603	0,867	0,864	48,62	20,03	113,19	80,31	5,15	8,16
3,2	0,496	0,504	0,613	0,87	0,87	48,90	19,73	114,05	81,89	5,20	8,23
3,3	0,497	0,503	0,614	0,871	0,87	49,69	20,27	118,59	84,09	5,22	8,27
3,4	0,518	0,482	0,617	0,874	0,87	49,83	20,02	119,44	84,59	5,24	8,30
3,5	0,477	0,523	0,631	0,875	0,878	49,48	20,18	119,53	86,11	5,28	8,33
3,6	0,506	0,494	0,641	0,881	0,878	49,29	20,43	121,29	87,96	5,31	8,37
3,7	0,511	0,489	0,638	0,88	0,878	50,66	20,63	121,85	88,93	5,32	8,39
3,8	0,499	0,501	0,637	0,877	0,88	50,23	20,22	119,69	87,47	5,31	8,37
3,9	0,505	0,495	0,646	0,883	0,881	50,07	20,45	122,69	89,65	5,35	8,42
4	0,506	0,494	0,661	0,887	0,887	49,43	20,22	122,83	90,50	5,38	8,46
4,5	0,51	0,49	0,684	0,896	0,894	50,24	20,89	129,71	98,00	5,49	8,61
5	0,518	0,482	0,703	0,903	0,901	50,33	21,18	137,27	103,72	5,59	8,73
5,5	0,496	0,504	0,725	0,91	0,91	50,17	21,44	143,68	110,05	5,69	8,86
6	0,502	0,498	0,741	0,916	0,915	50,27	21,52	147,25	114,53	5,76	8,95
6,5	0,502	0,498	0,756	0,92	0,92	50,49	22,30	152,04	122,25	5,83	9,05
7	0,513	0,487	0,767	0,924	0,923	50,16	22,32	153,95	126,00	5,88	9,12
7,5	0,497	0,503	0,782	0,929	0,93	50,99	22,80	163,90	134,82	5,99	9,25
8	0,492	0,508	0,789	0,931	0,932	50,21	22,81	169,41	138,45	6,03	9,31
12	0,49	0,51	0,849	0,951	0,952	52,34	26,14	209,14	190,19	6,44	9,88
16	0,503	0,497	0,883	0,963	0,963	51,89	28,70	245,62	236,43	6,72	10,26
20	0,495	0,505	0,906	0,97	0,97	52,20	31,10	278,68	285,89	6,94	10,57
24	0,483	0,517	0,918	0,974	0,974	53,48	33,92	312,01	329,88	7,10	10,81
28	0,493	0,507	0,928	0,977	0,978	54,56	36,21	344,14	375,39	7,25	11,02
32	0,504	0,496	0,937	0,98	0,98	55,44	38,34	372,72	419,52	7,38	11,19
36	0,504	0,496	0,945	0,983	0,982	57,78	41,63	407,48	473,11	7,51	11,39
40	0,491	0,509	0,95	0,984	0,984	59,11	44,03	439,39	517,50	7,61	11,54
44	0,512	0,488	0,954	0,986	0,985	61,01	46,93	473,75	571,19	7,71	11,70
48	0,501	0,499	0,958	0,987	0,987	63,35	49,60	502,93	614,81	7,80	11,81
52	0,489	0,511	0,961	0,988	0,988	64,82	51,78	536,41	665,46	7,88	11,93
56	0,505	0,495	0,964	0,989	0,989	67,91	55,18	575,20	722,97	7,97	12,06
60	0,505	0,495	0,967	0,99	0,99	69,46	57,46	601,66	767,16	8,03	12,16
64	0,495	0,505	0,968	0,99	0,99	71,65	59,95	629,94	806,97	8,08	12,23
68	0,497	0,503	0,97	0,99	0,99	73,57	62,30	653,44	847,31	8,13	12,31
72	0,496	0,504	0,971	0,991	0,991	76,82	65,65	698,05	912,20	8,21	12,42
76	0,505	0,495	0,973	0,992	0,991	79,37	68,28	732,34	960,50	8,27	12,50
80	0,495	0,505	0,974	0,992	0,992	81,05	70,45	756,12	1001,10	8,31	12,57
84	0,494	0,506	0,975	0,992	0,992	83,84	73,39	790,78	1054,36	8,37	12,65
88	0,497	0,503	0,977	0,993	0,993	85,84	75,92	817,95	1099,88	8,41	12,71
92	0,503	0,497	0,977	0,993	0,993	88,13	78,38	844,28	1139,02	8,45	12,77
96	0,498	0,502	0,979	0,993	0,993	91,59	82,16	885,85	1205,71	8,50	12,85
100	0,502	0,498	0,979	0,994	0,994	93,21	83,96	913,93	1247,85	8,54	12,91

TABLEAU. B.0.2: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,74	0,255	0,003	0,679	0,52	33,53	17,79	47,97	40,76	3,16	6,00
0,1	0,78	0,225	0,041	0,706	0,53	33,93	17,74	48,81	41,68	3,35	6,15
0,2	0,76	0,239	0,085	0,718	0,561	34,86	17,78	51,02	42,76	3,46	6,25
0,3	0,77	0,233	0,13	0,73	0,586	35,43	18,10	53,04	43,95	3,55	6,33
0,4	0,77	0,23	0,15	0,739	0,597	35,32	17,93	53,63	44,02	3,61	6,37
0,5	0,76	0,237	0,187	0,754	0,616	36,58	18,15	55,90	45,93	3,74	6,53
0,6	0,74	0,258	0,228	0,76	0,644	37,07	18,40	57,87	46,95	3,81	6,59
0,7	0,76	0,236	0,25	0,773	0,652	37,56	18,32	59,15	47,97	3,90	6,68
0,8	0,77	0,232	0,29	0,788	0,671	37,03	17,98	59,74	48,22	3,98	6,75
0,9	0,77	0,233	0,302	0,792	0,679	37,65	18,01	61,07	49,02	4,03	6,81
1	0,76	0,239	0,32	0,796	0,691	37,85	18,00	61,61	49,58	4,06	6,85
1,1	0,76	0,237	0,352	0,807	0,707	38,40	18,06	64,57	51,02	4,16	6,96
1,2	0,77	0,227	0,355	0,81	0,705	38,75	18,53	64,79	51,97	4,18	6,97
1,3	0,78	0,219	0,386	0,819	0,72	38,96	18,43	64,68	52,76	4,26	7,04
1,4	0,76	0,236	0,405	0,826	0,732	38,73	18,13	67,61	53,18	4,30	7,10
1,5	0,78	0,222	0,414	0,828	0,735	39,15	18,54	67,18	54,34	4,33	7,12
1,6	0,78	0,219	0,43	0,835	0,743	39,38	18,39	69,33	55,02	4,39	7,19
1,7	0,76	0,239	0,446	0,838	0,751	39,88	18,96	70,85	57,03	4,44	7,25
1,8	0,77	0,229	0,475	0,846	0,764	40,04	18,98	71,66	58,73	4,51	7,34
1,9	0,76	0,242	0,466	0,844	0,764	39,68	18,48	72,48	57,61	4,50	7,32
2	0,76	0,238	0,486	0,851	0,771	39,40	18,51	71,92	58,52	4,54	7,38
2,1	0,77	0,232	0,502	0,856	0,78	40,69	18,88	75,39	60,67	4,61	7,45
2,2	0,77	0,233	0,506	0,857	0,781	40,15	18,85	75,93	60,58	4,61	7,45
2,3	0,77	0,234	0,523	0,862	0,787	40,25	18,82	75,18	61,86	4,67	7,51
2,4	0,76	0,237	0,545	0,867	0,802	40,45	18,78	77,27	63,14	4,72	7,59
2,5	0,79	0,212	0,551	0,872	0,8	40,63	18,88	77,25	63,79	4,75	7,61
2,6	0,78	0,219	0,562	0,874	0,806	40,82	19,27	78,81	65,22	4,78	7,65
2,7	0,76	0,239	0,566	0,875	0,809	41,00	19,34	81,32	66,37	4,81	7,69
2,8	0,75	0,247	0,575	0,877	0,815	40,35	18,79	79,67	65,61	4,82	7,70
2,9	0,79	0,212	0,576	0,881	0,815	41,00	18,66	81,61	66,41	4,85	7,74
3	0,78	0,222	0,584	0,881	0,818	41,96	19,54	83,82	68,88	4,88	7,78
3,1	0,77	0,227	0,598	0,885	0,823	41,15	19,46	83,55	69,45	4,91	7,81
3,2	0,78	0,223	0,611	0,89	0,829	41,53	19,63	84,88	70,89	4,96	7,86
3,3	0,77	0,227	0,618	0,892	0,833	41,35	19,29	85,13	71,35	4,99	7,89
3,4	0,79	0,212	0,615	0,892	0,831	41,93	19,44	85,92	72,24	5,00	7,92
3,5	0,78	0,225	0,628	0,894	0,838	41,87	19,70	87,03	73,50	5,03	7,95
3,6	0,78	0,219	0,633	0,897	0,84	41,22	19,35	87,19	73,61	5,04	7,98
3,7	0,79	0,212	0,643	0,899	0,844	41,88	19,91	89,33	75,55	5,08	8,01
3,8	0,78	0,217	0,641	0,899	0,844	42,05	19,72	89,11	75,71	5,09	8,02
3,9	0,78	0,219	0,658	0,904	0,851	42,12	19,82	90,75	77,61	5,14	8,09
4	0,77	0,23	0,658	0,902	0,853	42,00	19,64	91,28	77,24	5,13	8,08
4,5	0,77	0,226	0,685	0,912	0,864	42,45	19,92	94,77	82,34	5,26	8,24
5	0,77	0,227	0,708	0,919	0,875	42,53	20,10	99,99	87,75	5,37	8,38
5,5	0,77	0,234	0,729	0,924	0,884	42,16	20,47	103,29	91,89	5,44	8,48
6	0,78	0,223	0,739	0,928	0,888	43,35	20,77	108,18	96,04	5,51	8,57
6,5	0,78	0,223	0,759	0,933	0,897	43,59	21,34	112,36	102,30	5,60	8,69
7	0,77	0,227	0,771	0,936	0,903	43,60	21,50	115,09	105,39	5,66	8,76
7,5	0,77	0,231	0,777	0,939	0,906	42,86	21,13	116,64	107,28	5,70	8,81
8	0,77	0,23	0,794	0,944	0,914	43,02	21,15	121,47	113,65	5,79	8,94
12	0,76	0,237	0,852	0,96	0,938	44,34	23,89	151,78	153,39	6,19	9,48
16	0,76	0,242	0,883	0,969	0,952	44,99	25,47	177,74	188,07	6,46	9,86
20	0,73	0,269	0,906	0,974	0,961	45,39	27,81	203,44	224,40	6,67	10,17
24	0,73	0,273	0,919	0,978	0,966	46,51	30,02	230,45	260,77	6,85	10,42
28	0,73	0,273	0,928	0,981	0,97	48,01	32,06	256,37	298,26	6,99	10,64
32	0,71	0,294	0,938	0,983	0,975	49,35	34,46	287,67	342,17	7,16	10,87
36	0,71	0,292	0,943	0,985	0,977	50,22	35,85	306,40	370,81	7,25	11,00
40	0,7	0,303	0,95	0,986	0,979	51,39	38,31	333,91	408,91	7,35	11,15
44	0,69	0,31	0,954	0,988	0,981	52,17	39,79	356,78	447,46	7,46	11,31
48	0,68	0,321	0,958	0,989	0,983	53,56	41,82	382,17	482,48	7,54	11,43
52	0,68	0,324	0,962	0,99	0,984	55,11	44,23	407,47	520,33	7,62	11,55
56	0,67	0,332	0,962	0,99	0,985	56,67	45,76	425,99	547,92	7,67	11,63
60	0,66	0,337	0,966	0,991	0,986	58,15	48,16	454,35	594,69	7,76	11,76
64	0,66	0,343	0,967	0,991	0,987	59,72	49,80	474,95	620,77	7,81	11,82
68	0,65	0,355	0,97	0,992	0,988	60,75	51,81	499,51	662,98	7,88	11,93
72	0,64	0,363	0,971	0,992	0,988	63,15	53,70	524,53	692,23	7,93	12,00
76	0,64	0,361	0,973	0,993	0,989	64,74	56,12	551,56	739,20	7,99	12,09
80	0,64	0,358	0,974	0,993	0,989	66,50	57,79	573,71	770,44	8,04	12,16
84	0,63	0,37	0,976	0,994	0,99	67,66	59,72	596,52	809,73	8,09	12,24
88	0,63	0,372	0,976	0,994	0,99	69,86	61,92	620,78	846,29	8,14	12,31
92	0,63	0,374	0,977	0,994	0,991	71,68	64,28	646,53	889,01	8,18	12,39
96	0,61	0,387	0,979	0,994	0,991	73,74	66,37	674,31	926,53	8,23	12,45
100	0,62	0,384	0,98	0,995	0,992	75,76	68,74	699,96	969,18	8,28	12,52

TABLEAU. B.0.3: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	0,94	0,061	0,007	0,752	0,365	26,05	17,62	34,30	39,24	3,14	5,83
0,1	0,94	0,062	0,034	0,759	0,394	26,82	17,68	35,59	39,76	3,24	5,89
0,2	0,93	0,068	0,09	0,772	0,434	26,57	17,30	35,95	39,77	3,34	5,98
0,3	0,93	0,072	0,129	0,78	0,461	27,26	17,67	37,51	40,95	3,44	6,06
0,4	0,93	0,068	0,157	0,788	0,482	27,67	17,67	38,28	41,55	3,50	6,14
0,5	0,93	0,069	0,193	0,795	0,503	28,40	18,32	39,30	43,12	3,59	6,20
0,6	0,93	0,067	0,228	0,806	0,525	28,11	17,91	39,22	42,94	3,66	6,25
0,7	0,95	0,052	0,249	0,819	0,539	28,74	18,00	40,72	44,39	3,77	6,39
0,8	0,93	0,066	0,275	0,823	0,557	28,29	17,74	40,75	44,03	3,80	6,40
0,9	0,92	0,078	0,299	0,828	0,575	28,62	17,74	41,84	44,73	3,87	6,47
1	0,93	0,072	0,33	0,832	0,597	29,47	18,28	43,10	46,19	3,91	6,53
1,1	0,94	0,063	0,354	0,841	0,608	29,17	18,11	43,23	46,55	3,97	6,59
1,2	0,94	0,065	0,364	0,847	0,614	28,89	17,93	43,21	46,89	4,03	6,65
1,3	0,93	0,066	0,383	0,849	0,628	29,86	18,37	44,74	48,18	4,07	6,69
1,4	0,94	0,057	0,411	0,856	0,647	30,38	18,58	45,77	49,27	4,13	6,76
1,5	0,94	0,065	0,412	0,856	0,652	30,18	18,12	45,86	49,05	4,15	6,80
1,6	0,94	0,062	0,432	0,864	0,661	30,23	18,20	46,51	49,91	4,21	6,86
1,7	0,95	0,053	0,454	0,869	0,675	30,64	18,48	47,48	51,04	4,26	6,90
1,8	0,93	0,068	0,466	0,871	0,683	30,47	18,42	47,88	51,34	4,29	6,93
1,9	0,93	0,066	0,476	0,874	0,688	30,61	18,50	47,90	51,97	4,31	6,97
2	0,95	0,052	0,489	0,88	0,695	30,58	18,35	48,37	52,77	4,37	7,04
2,1	0,94	0,064	0,499	0,881	0,7	30,39	18,49	48,84	52,88	4,38	7,04
2,2	0,94	0,064	0,504	0,881	0,709	30,69	18,30	49,37	53,39	4,40	7,09
2,3	0,94	0,064	0,523	0,888	0,717	30,62	18,26	50,33	54,37	4,46	7,15
2,4	0,94	0,064	0,533	0,888	0,727	31,01	18,42	51,10	54,84	4,48	7,16
2,5	0,95	0,048	0,548	0,893	0,734	31,24	18,71	51,92	56,35	4,53	7,23
2,6	0,94	0,064	0,564	0,895	0,746	31,22	18,56	52,65	57,10	4,56	7,29
2,7	0,94	0,061	0,557	0,894	0,738	30,94	18,56	51,61	56,35	4,54	7,25
2,8	0,94	0,058	0,569	0,9	0,747	31,33	18,45	53,03	57,66	4,62	7,33
2,9	0,94	0,062	0,582	0,902	0,754	31,40	18,60	53,74	58,62	4,64	7,37
3	0,94	0,064	0,591	0,903	0,76	31,53	18,80	54,42	59,25	4,66	7,39
3,1	0,93	0,072	0,599	0,903	0,769	31,73	18,75	55,08	59,88	4,69	7,43
3,2	0,94	0,063	0,613	0,909	0,773	31,30	18,64	55,22	60,30	4,73	7,46
3,3	0,94	0,061	0,613	0,91	0,774	31,42	18,57	55,40	61,05	4,74	7,50
3,4	0,95	0,049	0,617	0,911	0,775	31,81	18,80	55,98	61,94	4,77	7,52
3,5	0,94	0,057	0,619	0,912	0,775	31,99	19,12	56,50	62,36	4,78	7,52
3,6	0,93	0,066	0,633	0,912	0,789	32,18	18,91	57,96	63,30	4,81	7,58
3,7	0,94	0,056	0,639	0,917	0,79	32,10	18,79	58,04	63,95	4,85	7,63
3,8	0,95	0,054	0,645	0,917	0,794	32,04	18,97	57,97	64,18	4,85	7,62
3,9	0,94	0,058	0,653	0,918	0,798	32,07	19,17	59,08	65,88	4,88	7,68
4	0,94	0,055	0,653	0,921	0,795	31,63	18,88	58,18	65,42	4,89	7,68
4,5	0,94	0,065	0,683	0,927	0,816	32,38	19,23	61,64	68,87	5,00	7,81
5	0,94	0,063	0,701	0,93	0,828	33,10	19,56	64,95	72,96	5,09	7,94
5,5	0,94	0,065	0,728	0,938	0,844	32,68	19,35	67,07	75,98	5,19	8,06
6	0,94	0,061	0,742	0,942	0,851	33,18	19,77	69,32	79,81	5,27	8,17
6,5	0,94	0,061	0,753	0,944	0,858	33,38	19,97	71,37	82,22	5,32	8,23
7	0,94	0,058	0,769	0,947	0,868	33,92	20,18	74,23	86,42	5,39	8,34
7,5	0,94	0,057	0,781	0,951	0,874	33,85	20,19	76,13	89,73	5,47	8,44
8	0,93	0,066	0,793	0,953	0,881	33,41	20,39	77,74	91,89	5,50	8,48
12	0,93	0,072	0,85	0,966	0,915	35,26	21,89	97,53	119,53	5,88	9,02
16	0,92	0,084	0,881	0,972	0,933	36,69	23,88	116,14	145,30	6,14	9,38
20	0,91	0,09	0,904	0,978	0,946	37,62	25,18	135,67	173,10	6,38	9,71
24	0,9	0,102	0,92	0,982	0,956	38,07	26,45	155,65	202,21	6,56	9,99
28	0,89	0,108	0,928	0,984	0,96	38,78	27,73	169,74	222,93	6,68	10,15
32	0,88	0,124	0,939	0,986	0,966	39,65	29,44	192,26	256,21	6,84	10,39
36	0,85	0,148	0,945	0,987	0,97	40,48	30,82	213,00	282,54	6,96	10,55
40	0,86	0,137	0,948	0,989	0,971	41,78	32,21	225,20	302,81	7,03	10,66
44	0,84	0,156	0,953	0,99	0,974	42,75	33,52	245,59	331,06	7,13	10,82
48	0,84	0,164	0,958	0,991	0,976	44,09	35,59	269,76	367,66	7,25	10,99
52	0,82	0,175	0,96	0,991	0,978	45,37	37,08	284,26	386,49	7,30	11,06
56	0,82	0,18	0,963	0,992	0,979	46,15	38,42	301,17	414,22	7,38	11,18
60	0,81	0,194	0,967	0,993	0,982	46,83	39,88	324,80	448,49	7,47	11,31
64	0,8	0,196	0,967	0,993	0,982	48,62	41,33	337,80	466,50	7,51	11,37
68	0,78	0,216	0,97	0,993	0,984	49,16	42,62	357,34	496,76	7,57	11,47
72	0,79	0,213	0,971	0,994	0,984	50,79	44,37	376,16	525,25	7,63	11,56
76	0,78	0,219	0,973	0,994	0,985	52,49	46,15	397,13	554,64	7,70	11,65
80	0,78	0,222	0,974	0,994	0,985	53,02	47,00	407,86	571,71	7,73	11,69
84	0,76	0,238	0,975	0,995	0,986	54,55	48,91	432,32	608,72	7,79	11,80
88	0,76	0,24	0,976	0,995	0,987	55,74	50,19	447,34	630,11	7,83	11,85
92	0,75	0,249	0,978	0,995	0,988	57,00	51,83	468,47	661,41	7,88	11,92
96	0,75	0,25	0,978	0,995	0,988	58,60	53,37	487,05	688,19	7,93	11,99
100	0,73	0,271	0,979	0,995	0,989	60,07	55,19	506,19	716,32	7,97	12,05



TABLEAU. B.0.4: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,25)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,985	0,015	-0,001	0,792	0,192	20,41	17,51	26,38	37,89	3,09	5,64
0,1	0,985	0,015	0,055	0,803	0,235	20,48	17,59	26,75	38,29	3,19	5,70
0,2	0,988	0,012	0,094	0,81	0,271	20,85	17,80	27,39	39,13	3,30	5,78
0,3	0,989	0,011	0,11	0,817	0,279	20,82	17,68	27,51	39,15	3,34	5,81
0,4	0,991	0,009	0,166	0,829	0,321	20,74	17,65	27,75	39,64	3,44	5,90
0,5	0,989	0,011	0,2	0,836	0,353	21,18	17,91	28,67	40,70	3,52	5,99
0,6	0,990	0,010	0,226	0,838	0,383	21,52	17,87	29,24	41,11	3,57	6,04
0,7	0,992	0,008	0,25	0,844	0,388	21,50	18,18	29,44	41,80	3,61	6,06
0,8	0,991	0,009	0,278	0,852	0,416	21,38	17,76	29,65	41,77	3,68	6,14
0,9	0,990	0,010	0,296	0,856	0,434	21,09	17,48	29,51	41,52	3,72	6,18
1	0,990	0,010	0,321	0,856	0,454	21,40	17,83	30,05	42,48	3,74	6,21
1,1	0,990	0,010	0,347	0,863	0,474	21,74	18,06	30,74	43,22	3,80	6,26
1,2	0,989	0,011	0,37	0,865	0,494	21,97	18,22	31,37	43,95	3,85	6,31
1,3	0,993	0,007	0,378	0,872	0,505	21,81	17,85	31,41	43,98	3,90	6,38
1,4	0,986	0,014	0,415	0,878	0,531	21,64	17,80	31,76	44,64	3,96	6,46
1,5	0,991	0,009	0,421	0,88	0,533	21,58	17,83	31,67	44,57	3,96	6,44
1,6	0,989	0,011	0,439	0,883	0,548	21,68	17,93	32,12	45,20	4,00	6,49
1,7	0,985	0,015	0,448	0,889	0,557	21,79	17,92	32,81	45,88	4,07	6,56
1,8	0,991	0,009	0,466	0,89	0,565	21,72	18,05	32,66	46,43	4,08	6,60
1,9	0,990	0,010	0,479	0,894	0,58	21,70	17,89	33,04	46,57	4,13	6,62
2	0,988	0,012	0,49	0,896	0,589	21,64	17,80	33,26	46,77	4,15	6,65
2,1	0,988	0,012	0,497	0,896	0,598	22,02	17,96	33,83	47,44	4,17	6,69
2,2	0,991	0,009	0,516	0,899	0,608	22,56	18,53	34,84	49,08	4,22	6,75
2,3	0,990	0,010	0,521	0,901	0,614	22,30	18,34	34,85	49,02	4,24	6,76
2,4	0,992	0,008	0,534	0,905	0,623	22,12	18,20	34,83	49,18	4,27	6,80
2,5	0,991	0,009	0,549	0,906	0,637	22,59	18,53	35,58	50,33	4,30	6,85
2,6	0,990	0,010	0,555	0,906	0,645	22,43	18,26	35,57	50,10	4,30	6,86
2,7	0,989	0,011	0,557	0,911	0,644	22,15	18,07	35,62	50,31	4,34	6,90
2,8	0,992	0,008	0,572	0,914	0,655	22,09	18,06	35,91	50,81	4,38	6,94
2,9	0,989	0,011	0,585	0,915	0,664	22,03	18,08	36,01	51,01	4,39	6,95
3	0,991	0,009	0,582	0,915	0,662	22,25	18,20	36,51	51,44	4,41	6,97
3,1	0,993	0,007	0,605	0,918	0,683	22,84	18,59	37,64	53,10	4,46	7,04
3,2	0,990	0,010	0,616	0,92	0,689	22,34	18,32	37,24	52,78	4,47	7,05
3,3	0,990	0,010	0,614	0,922	0,689	22,00	17,94	37,08	52,69	4,49	7,09
3,4	0,991	0,009	0,626	0,922	0,698	22,78	18,75	38,43	54,39	4,51	7,10
3,5	0,995	0,005	0,624	0,926	0,698	22,55	18,28	38,35	54,38	4,56	7,16
3,6	0,990	0,010	0,631	0,925	0,704	23,14	18,75	39,57	55,69	4,57	7,19
3,7	0,994	0,006	0,639	0,927	0,707	22,30	18,36	38,34	54,76	4,57	7,18
3,8	0,991	0,009	0,647	0,929	0,717	22,67	18,41	39,59	55,93	4,61	7,24
3,9	0,991	0,009	0,652	0,929	0,718	22,75	18,71	39,63	56,41	4,62	7,24
4	0,991	0,009	0,659	0,929	0,727	23,01	18,65	40,02	56,65	4,62	7,25
4,5	0,990	0,010	0,685	0,935	0,748	23,27	18,95	41,92	59,41	4,73	7,39
5	0,990	0,010	0,705	0,939	0,763	23,06	18,80	42,89	61,05	4,80	7,48
5,5	0,990	0,010	0,719	0,943	0,776	23,55	19,08	45,06	64,03	4,89	7,60
6	0,989	0,011	0,743	0,947	0,793	23,35	19,11	46,27	66,24	4,96	7,70
6,5	0,989	0,011	0,752	0,95	0,802	23,66	19,14	47,72	68,12	5,03	7,78
7	0,987	0,013	0,762	0,951	0,812	24,15	19,52	49,51	70,49	5,07	7,85
7,5	0,988	0,012	0,776	0,955	0,82	23,84	19,49	50,73	73,00	5,14	7,94
8	0,990	0,010	0,792	0,959	0,833	23,93	19,54	52,29	75,16	5,21	8,02
12	0,980	0,020	0,855	0,97	0,883	25,29	21,00	65,35	94,91	5,57	8,53
16	0,980	0,020	0,884	0,976	0,906	26,31	22,14	77,76	113,79	5,83	8,91
20	0,975	0,025	0,907	0,981	0,926	26,79	22,70	90,84	133,06	6,06	9,23
24	0,970	0,030	0,92	0,984	0,936	27,42	23,52	100,76	147,51	6,20	9,41
28	0,962	0,038	0,931	0,986	0,945	28,43	24,82	115,29	170,69	6,37	9,69
32	0,958	0,042	0,938	0,988	0,95	29,71	26,12	128,43	190,29	6,50	9,88
36	0,951	0,049	0,945	0,989	0,956	30,34	26,86	139,45	206,07	6,60	10,01
40	0,947	0,053	0,949	0,99	0,96	30,88	27,54	150,63	222,81	6,69	10,16
44	0,936	0,064	0,955	0,991	0,964	31,87	28,86	165,24	243,63	6,80	10,31
48	0,928	0,072	0,959	0,992	0,967	32,91	29,91	179,83	264,72	6,90	10,45
52	0,929	0,071	0,96	0,992	0,968	33,85	31,05	190,83	283,06	6,97	10,56
56	0,913	0,087	0,964	0,993	0,971	34,59	31,90	203,11	298,79	7,03	10,65
60	0,904	0,096	0,967	0,993	0,973	35,78	33,47	217,47	322,47	7,11	10,77
64	0,905	0,095	0,968	0,994	0,974	36,69	34,27	228,05	336,68	7,16	10,84
68	0,890	0,110	0,97	0,994	0,976	37,87	35,54	245,98	361,38	7,24	10,96
72	0,895	0,105	0,971	0,994	0,976	38,09	35,92	249,37	369,66	7,26	10,99
76	0,883	0,117	0,972	0,995	0,978	38,96	36,88	264,88	392,03	7,32	11,09
80	0,876	0,124	0,974	0,995	0,979	40,61	38,38	282,86	415,56	7,39	11,18
84	0,871	0,129	0,975	0,995	0,98	41,44	39,35	294,74	434,16	7,44	11,26
88	0,865	0,135	0,976	0,995	0,981	41,96	40,08	301,34	445,45	7,46	11,29
92	0,860	0,140	0,977	0,995	0,981	42,86	40,92	313,18	462,87	7,50	11,35
96	0,854	0,146	0,978	0,996	0,983	43,39	41,64	325,87	482,33	7,55	11,43
100	0,840	0,160	0,979	0,996	0,984	45,13	43,32	346,42	511,16	7,61	11,52

TABLEAU. B.0.5: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,1)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,996	0,004	-0,002	0,804	0,086	18,53	17,39	23,96	37,31	3,01	5,59
0,1	0,995	0,005	0,045	0,814	0,117	18,49	17,49	24,18	37,91	3,13	5,66
0,2	0,996	0,004	0,074	0,819	0,141	18,96	17,78	24,90	38,72	3,20	5,72
0,3	0,997	0,003	0,143	0,829	0,19	18,81	17,76	24,97	38,89	3,30	5,75
0,4	0,993	0,007	0,158	0,835	0,212	18,51	17,32	24,89	38,63	3,34	5,81
0,5	0,995	0,005	0,209	0,842	0,265	18,81	17,48	25,47	39,15	3,41	5,86
0,6	0,995	0,005	0,215	0,845	0,263	18,55	17,29	25,26	38,92	3,46	5,87
0,7	0,997	0,003	0,258	0,854	0,302	18,60	17,37	25,55	39,50	3,54	5,94
0,8	0,996	0,004	0,278	0,852	0,317	19,27	18,04	26,49	41,07	3,56	5,99
0,9	0,998	0,002	0,299	0,861	0,335	19,02	17,77	26,49	41,12	3,63	6,07
1	0,997	0,003	0,331	0,864	0,363	19,29	17,94	27,06	41,82	3,68	6,12
1,1	0,997	0,003	0,343	0,866	0,369	19,11	17,88	26,99	41,85	3,69	6,12
1,2	0,996	0,004	0,369	0,868	0,397	19,38	18,11	27,45	42,36	3,72	6,15
1,3	0,996	0,004	0,377	0,875	0,405	19,20	17,88	27,55	42,42	3,80	6,21
1,4	0,996	0,004	0,409	0,878	0,432	18,98	17,66	27,39	42,28	3,80	6,23
1,5	0,996	0,004	0,415	0,881	0,432	19,21	18,00	27,88	43,26	3,85	6,27
1,6	0,996	0,004	0,439	0,885	0,453	19,07	17,92	28,01	43,62	3,89	6,32
1,7	0,997	0,003	0,46	0,888	0,471	19,30	18,16	28,51	44,40	3,93	6,37
1,8	0,996	0,004	0,458	0,89	0,477	19,15	17,92	28,57	44,30	3,95	6,40
1,9	0,997	0,003	0,471	0,888	0,488	19,51	18,22	28,97	44,77	3,95	6,39
2	0,997	0,003	0,493	0,894	0,509	19,26	17,85	28,93	44,56	4,00	6,44
2,1	0,997	0,003	0,5	0,898	0,512	19,45	18,20	29,58	45,71	4,04	6,50
2,2	0,998	0,002	0,512	0,903	0,524	19,00	17,73	29,24	45,19	4,08	6,52
2,3	0,998	0,002	0,523	0,903	0,535	19,15	17,87	29,46	45,67	4,09	6,55
2,4	0,996	0,004	0,538	0,905	0,549	19,13	17,82	29,71	45,78	4,12	6,56
2,5	0,996	0,004	0,549	0,905	0,556	19,50	18,32	30,42	47,26	4,14	6,61
2,6	0,997	0,003	0,557	0,909	0,564	19,18	17,95	30,23	46,97	4,17	6,65
2,7	0,997	0,003	0,56	0,911	0,574	19,10	17,76	30,34	46,85	4,19	6,66
2,8	0,997	0,003	0,575	0,911	0,579	19,25	18,03	30,56	47,52	4,20	6,69
2,9	0,996	0,004	0,583	0,914	0,584	19,41	18,28	31,10	48,34	4,24	6,72
3	0,996	0,004	0,584	0,915	0,589	19,38	18,14	31,10	48,16	4,25	6,72
3,1	0,996	0,004	0,59	0,917	0,597	19,42	18,15	31,45	48,47	4,28	6,76
3,2	0,998	0,002	0,61	0,918	0,615	19,36	18,07	31,58	48,96	4,29	6,80
3,3	0,998	0,002	0,618	0,922	0,618	19,20	17,96	31,72	49,30	4,33	6,84
3,4	0,997	0,003	0,63	0,92	0,633	19,62	18,31	32,36	49,97	4,33	6,84
3,5	0,998	0,002	0,631	0,921	0,632	19,65	18,36	32,53	50,30	4,35	6,87
3,6	0,997	0,003	0,637	0,923	0,642	19,55	18,23	32,67	50,66	4,37	6,91
3,7	0,996	0,004	0,644	0,925	0,652	19,60	18,23	33,08	51,18	4,41	6,95
3,8	0,998	0,002	0,643	0,927	0,649	19,60	18,26	33,12	51,34	4,42	6,96
3,9	0,995	0,005	0,652	0,924	0,656	19,73	18,43	33,38	51,54	4,41	6,94
4	0,996	0,004	0,659	0,928	0,661	19,59	18,27	33,63	52,07	4,45	7,00
4,5	0,998	0,002	0,682	0,934	0,683	19,80	18,58	34,82	54,01	4,54	7,11
5	0,997	0,003	0,706	0,94	0,707	19,79	18,54	36,25	56,06	4,64	7,23
5,5	0,996	0,004	0,729	0,942	0,728	20,16	18,84	37,57	58,00	4,71	7,32
6	0,996	0,004	0,743	0,946	0,739	20,06	18,94	38,31	59,68	4,76	7,40
6,5	0,997	0,003	0,756	0,947	0,754	20,62	19,27	39,91	61,89	4,82	7,49
7	0,997	0,003	0,768	0,951	0,768	20,27	18,95	40,44	62,72	4,87	7,55
7,5	0,997	0,003	0,783	0,954	0,78	20,60	19,31	42,48	65,88	4,96	7,67
8	0,997	0,003	0,793	0,957	0,791	20,18	18,98	42,99	66,94	5,01	7,74
12	0,994	0,006	0,85	0,968	0,847	21,34	20,07	52,49	81,35	5,34	8,19
16	0,993	0,007	0,886	0,975	0,882	21,89	20,75	61,60	95,38	5,60	8,56
20	0,99	0,01	0,904	0,979	0,902	22,85	21,69	70,51	108,99	5,79	8,83
24	0,986	0,014	0,916	0,983	0,915	23,30	22,25	79,24	122,74	5,95	9,07
28	0,983	0,017	0,929	0,985	0,927	24,39	23,28	89,56	137,91	6,11	9,29
32	0,98	0,02	0,937	0,987	0,936	25,01	23,95	99,03	152,49	6,24	9,48
36	0,976	0,024	0,946	0,988	0,944	25,44	24,67	109,16	168,69	6,36	9,66
40	0,973	0,027	0,949	0,989	0,947	26,61	25,72	118,69	182,06	6,45	9,79
44	0,966	0,034	0,955	0,99	0,954	27,27	26,37	129,93	198,92	6,56	9,96
48	0,96	0,04	0,958	0,991	0,957	27,66	26,91	139,16	213,10	6,64	10,08
52	0,959	0,041	0,961	0,992	0,959	28,45	27,78	147,53	225,85	6,71	10,17
56	0,953	0,047	0,964	0,992	0,963	29,45	28,84	159,57	244,19	6,80	10,31
60	0,95	0,05	0,966	0,993	0,965	29,94	29,28	164,87	251,67	6,84	10,37
64	0,945	0,055	0,968	0,993	0,967	31,16	30,47	176,81	269,24	6,91	10,47
68	0,938	0,062	0,969	0,993	0,968	31,47	30,88	183,74	280,48	6,95	10,54
72	0,932	0,068	0,971	0,994	0,971	32,85	32,24	195,71	297,40	7,02	10,64
76	0,928	0,072	0,973	0,994	0,972	33,40	32,88	206,44	314,26	7,08	10,73
80	0,921	0,079	0,974	0,994	0,973	34,26	33,73	216,25	329,03	7,13	10,81
84	0,915	0,085	0,975	0,995	0,974	34,68	34,09	222,24	336,86	7,16	10,84
88	0,913	0,087	0,976	0,995	0,976	35,71	35,16	236,42	358,62	7,23	10,95
92	0,908	0,092	0,977	0,995	0,977	36,04	35,44	241,80	365,60	7,26	10,98
96	0,894	0,106	0,979	0,995	0,979	37,49	36,90	258,32	390,62	7,32	11,09
100	0,896	0,104	0,979	0,996	0,978	37,76	37,17	261,61	396,01	7,34	11,11

TABLEAU. B.0.6: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ ,  $n=20$ 

$d$	$prMy1$	$prMy2$	$cor(1,2)$	$cor(Y,1)$	$cor(Y,2)$	$SSEm$	$SSEp$	$Vm$	$Vp$	$Slogm$	$Slogp$
0,0	0,996	0,004	-0,003	0,811	-0,003	17,91	17,20	23,31	36,89	3,08	5,56
0,1	0,995	0,005	0,047	0,816	0,045	18,43	17,59	24,13	37,97	3,15	5,64
0,2	0,998	0,002	0,085	0,823	0,071	18,22	17,44	23,97	37,88	3,23	5,67
0,3	0,995	0,005	0,117	0,830	0,100	18,22	17,51	24,18	38,23	3,26	5,71
0,4	0,997	0,003	0,154	0,832	0,125	18,38	17,61	24,53	38,80	3,30	5,77
0,5	0,997	0,003	0,181	0,840	0,159	18,21	17,39	24,51	38,62	3,36	5,80
0,6	0,998	0,002	0,233	0,843	0,191	18,32	17,55	24,79	39,15	3,38	5,84
0,7	0,998	0,002	0,261	0,849	0,214	18,43	17,66	25,09	39,65	3,44	5,89
0,8	0,998	0,002	0,284	0,851	0,243	18,66	17,90	25,51	40,28	3,50	5,92
0,9	0,997	0,003	0,301	0,853	0,264	18,59	17,81	25,58	40,35	3,53	5,95
1,0	0,999	0,001	0,326	0,862	0,285	18,49	17,67	25,70	40,38	3,62	5,99
1,1	0,998	0,002	0,348	0,865	0,301	18,19	17,47	25,46	40,20	3,61	6,01
1,2	0,998	0,002	0,367	0,867	0,319	18,51	17,75	26,04	41,05	3,66	6,07
1,3	0,997	0,003	0,385	0,869	0,334	18,62	17,88	26,31	41,57	3,68	6,10
1,4	0,999	0,001	0,405	0,873	0,356	18,55	17,83	26,38	41,73	3,71	6,13
1,5	0,998	0,002	0,417	0,874	0,366	18,47	17,66	26,52	41,80	3,72	6,16
1,6	0,999	0,001	0,431	0,878	0,381	18,72	17,97	26,93	42,65	3,78	6,21
1,7	0,998	0,002	0,447	0,880	0,395	18,79	18,03	27,19	42,98	3,82	6,24
1,8	0,999	0,001	0,450	0,885	0,399	18,43	17,60	26,89	42,47	3,84	6,27
1,9	0,998	0,002	0,477	0,885	0,428	18,48	17,75	27,16	43,04	3,85	6,29
2,0	0,998	0,002	0,490	0,889	0,440	18,62	17,83	27,57	43,59	3,91	6,34
2,1	0,998	0,002	0,491	0,892	0,441	18,57	17,76	27,74	43,83	3,94	6,38
2,2	0,999	0,001	0,518	0,895	0,466	18,43	17,64	27,70	43,82	3,96	6,40
2,3	0,999	0,001	0,524	0,896	0,474	18,77	17,99	28,31	44,43	3,99	6,40
2,4	0,998	0,002	0,538	0,896	0,490	19,15	18,30	28,83	45,30	4,01	6,45
2,5	0,998	0,002	0,540	0,900	0,483	18,75	17,98	28,53	45,05	4,03	6,47
2,6	0,998	0,002	0,556	0,900	0,504	18,64	17,91	28,48	45,19	4,03	6,49
2,7	0,999	0,001	0,564	0,904	0,512	18,50	17,73	28,54	45,17	4,07	6,52
2,8	0,997	0,003	0,574	0,903	0,518	18,79	18,01	29,00	45,89	4,07	6,54
2,9	0,999	0,001	0,583	0,907	0,527	19,17	18,36	29,81	46,76	4,13	6,57
3,0	0,999	0,001	0,591	0,909	0,538	18,94	18,20	29,67	46,94	4,15	6,61
3,1	0,998	0,002	0,590	0,909	0,539	18,71	17,84	29,33	46,25	4,14	6,60
3,2	0,998	0,002	0,599	0,910	0,544	18,92	18,22	29,81	47,28	4,17	6,65
3,3	0,999	0,001	0,620	0,915	0,567	18,65	17,89	29,60	47,41	4,21	6,70
3,4	0,998	0,002	0,621	0,915	0,575	18,84	18,02	30,24	47,87	4,22	6,71
3,5	0,999	0,001	0,630	0,917	0,577	18,52	17,85	30,06	47,83	4,24	6,73
3,6	0,999	0,001	0,629	0,919	0,581	18,57	17,87	30,22	47,84	4,26	6,74
3,7	0,999	0,001	0,637	0,918	0,586	18,82	18,06	30,65	48,54	4,27	6,76
3,8	0,999	0,001	0,645	0,920	0,594	18,66	17,88	30,62	48,33	4,29	6,78
3,9	0,999	0,001	0,646	0,920	0,596	18,84	18,12	30,91	48,76	4,28	6,77
4,0	0,998	0,002	0,658	0,922	0,607	18,80	18,06	31,20	49,29	4,32	6,83
4,5	0,999	0,001	0,680	0,927	0,631	18,94	18,24	32,12	50,79	4,39	6,91
5,0	0,999	0,001	0,705	0,932	0,656	19,14	18,42	33,39	52,87	4,49	7,05
5,5	0,998	0,002	0,725	0,936	0,679	19,15	18,37	34,24	54,05	4,55	7,12
6,0	0,999	0,001	0,739	0,940	0,695	19,02	18,38	34,72	55,29	4,60	7,21
6,5	0,999	0,001	0,750	0,942	0,707	19,33	18,60	35,92	56,49	4,66	7,25
7,0	0,998	0,002	0,773	0,946	0,733	19,35	18,64	37,02	58,28	4,73	7,35
7,5	0,998	0,002	0,782	0,948	0,742	19,73	19,02	38,12	60,13	4,78	7,42
8,0	0,998	0,002	0,795	0,952	0,760	19,71	19,05	39,61	62,57	4,87	7,53
12,0	0,997	0,003	0,849	0,963	0,816	20,01	19,30	45,82	72,26	5,15	7,92
16,0	0,997	0,003	0,883	0,971	0,858	20,74	20,10	53,94	85,02	5,42	8,31
20,0	0,995	0,005	0,906	0,977	0,884	21,32	20,73	61,77	96,80	5,63	8,59
24,0	0,993	0,007	0,920	0,981	0,902	21,78	21,23	69,53	109,40	5,80	8,85
28,0	0,992	0,008	0,929	0,983	0,913	22,55	22,06	77,46	121,76	5,94	9,06
32,0	0,986	0,014	0,937	0,985	0,923	23,16	22,68	84,67	132,76	6,06	9,22
36,0	0,985	0,015	0,944	0,986	0,931	23,63	23,11	92,01	143,55	6,17	9,38
40,0	0,979	0,021	0,950	0,988	0,939	24,54	24,12	101,36	158,60	6,28	9,55
44,0	0,977	0,023	0,955	0,988	0,944	25,78	25,26	111,02	172,24	6,38	9,69
48,0	0,974	0,026	0,957	0,990	0,948	25,86	25,53	116,84	182,19	6,45	9,80
52,0	0,973	0,027	0,961	0,990	0,952	26,50	26,12	124,92	193,40	6,53	9,91
56,0	0,970	0,030	0,963	0,991	0,955	27,09	26,69	133,46	206,42	6,61	10,03
60,0	0,962	0,038	0,966	0,992	0,958	27,95	27,47	142,48	219,65	6,68	10,13
64,0	0,962	0,038	0,967	0,992	0,960	28,45	27,94	148,95	230,34	6,73	10,21
68,0	0,957	0,043	0,970	0,992	0,962	29,15	28,76	155,45	240,09	6,78	10,28
72,0	0,953	0,047	0,971	0,993	0,964	30,09	29,62	165,27	254,76	6,84	10,37
76,0	0,948	0,052	0,973	0,993	0,966	30,73	30,22	171,83	264,18	6,89	10,44
80,0	0,944	0,056	0,974	0,994	0,968	31,22	30,69	180,73	277,40	6,95	10,52
84,0	0,939	0,061	0,975	0,994	0,970	31,78	31,24	188,24	288,55	6,99	10,59
88,0	0,935	0,065	0,977	0,994	0,971	32,71	32,15	197,54	302,22	7,04	10,66
92,0	0,930	0,070	0,978	0,994	0,972	33,63	33,07	205,65	315,30	7,08	10,73
96,0	0,927	0,073	0,978	0,995	0,973	34,11	33,44	212,95	325,02	7,12	10,78
100,0	0,922	0,078	0,979	0,995	0,974	34,37	33,73	222,07	340,19	7,17	10,86

TABLEAU. B.0.7: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(2;1)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,98	0,02	0,004	0,846	0,419	54,53	19,11	76,44	61,88	4,60	7,50
0,1	0,98	0,019	0,051	0,853	0,457	55,92	18,87	79,48	64,20	4,69	7,63
0,2	0,98	0,016	0,093	0,866	0,475	56,85	19,11	82,01	67,11	4,81	7,74
0,3	0,98	0,022	0,126	0,866	0,506	58,76	19,25	86,33	69,52	4,87	7,83
0,4	0,99	0,013	0,166	0,876	0,529	60,43	19,49	88,92	72,53	4,96	7,93
0,5	0,99	0,013	0,186	0,88	0,541	61,37	19,65	91,74	75,45	5,03	8,02
0,6	0,99	0,014	0,221	0,885	0,565	62,33	19,55	94,27	77,57	5,10	8,10
0,7	0,98	0,015	0,247	0,888	0,583	63,42	19,88	97,12	79,95	5,15	8,16
0,8	0,98	0,017	0,274	0,892	0,6	64,26	20,47	99,37	83,64	5,20	8,24
0,9	0,98	0,017	0,305	0,895	0,623	65,32	20,09	101,96	85,38	5,26	8,32
1	0,99	0,014	0,327	0,901	0,633	65,75	20,20	104,43	88,27	5,33	8,39
1,1	0,99	0,014	0,349	0,902	0,65	68,32	20,84	108,89	91,92	5,38	8,46
1,2	0,99	0,013	0,37	0,907	0,663	68,52	20,23	110,58	93,54	5,43	8,53
1,3	0,98	0,015	0,389	0,91	0,673	68,57	20,47	112,54	96,59	5,48	8,59
1,4	0,99	0,014	0,403	0,91	0,685	71,36	21,21	117,52	99,96	5,52	8,64
1,5	0,98	0,016	0,42	0,914	0,692	70,28	21,00	118,37	102,39	5,57	8,70
1,6	0,99	0,01	0,433	0,916	0,702	73,27	21,59	121,93	106,49	5,61	8,77
1,7	0,99	0,014	0,456	0,92	0,713	72,42	21,35	122,66	107,36	5,65	8,81
1,8	0,98	0,019	0,47	0,92	0,725	72,88	21,17	126,69	109,71	5,68	8,85
1,9	0,99	0,014	0,48	0,923	0,729	73,05	21,30	127,11	112,09	5,71	8,90
2	0,98	0,018	0,499	0,926	0,739	73,96	21,94	130,82	116,62	5,76	8,97
2,1	0,98	0,015	0,503	0,928	0,74	73,40	21,91	130,37	117,98	5,79	9,00
2,2	0,99	0,012	0,512	0,928	0,745	75,25	22,24	134,21	121,07	5,82	9,04
2,3	0,99	0,014	0,522	0,929	0,752	76,28	22,52	137,18	124,87	5,86	9,10
2,4	0,98	0,017	0,532	0,931	0,758	76,42	22,54	138,74	125,26	5,88	9,11
2,5	0,99	0,011	0,533	0,931	0,758	76,58	22,46	137,64	125,56	5,88	9,11
2,6	0,99	0,013	0,555	0,934	0,772	77,91	22,55	143,24	131,19	5,94	9,21
2,7	0,99	0,012	0,567	0,937	0,777	77,70	22,76	144,75	135,01	5,98	9,25
2,8	0,98	0,016	0,572	0,937	0,781	77,18	22,69	145,26	135,02	5,98	9,26
2,9	0,98	0,015	0,58	0,938	0,786	78,91	23,27	149,72	139,55	6,02	9,31
3	0,98	0,017	0,597	0,94	0,795	79,33	23,67	152,77	143,48	6,06	9,36
3,1	0,98	0,015	0,591	0,94	0,791	79,15	23,27	152,82	143,10	6,07	9,37
3,2	0,99	0,013	0,608	0,942	0,801	79,69	23,49	154,91	148,30	6,11	9,42
3,3	0,99	0,014	0,619	0,944	0,806	78,70	23,80	154,87	149,90	6,13	9,45
3,4	0,99	0,011	0,62	0,944	0,808	80,19	23,73	157,94	152,45	6,15	9,48
3,5	0,99	0,011	0,631	0,947	0,811	78,88	24,06	159,07	157,25	6,18	9,53
3,6	0,99	0,014	0,632	0,946	0,814	81,76	24,34	163,40	158,54	6,20	9,55
3,7	0,99	0,014	0,64	0,947	0,818	80,47	24,20	163,79	160,01	6,21	9,56
3,8	0,99	0,012	0,651	0,949	0,823	81,77	24,79	167,95	166,67	6,26	9,64
3,9	0,99	0,013	0,652	0,949	0,825	82,15	24,66	167,35	164,23	6,25	9,62
4	0,99	0,012	0,649	0,949	0,822	81,98	24,71	168,86	167,61	6,26	9,65
4,5	0,99	0,01	0,688	0,956	0,842	83,53	25,84	180,67	185,56	6,41	9,84
5	0,99	0,012	0,702	0,957	0,851	85,20	26,08	189,28	195,25	6,48	9,93
5,5	0,99	0,012	0,72	0,96	0,861	87,48	26,69	200,14	209,23	6,56	10,05
6	0,98	0,015	0,743	0,963	0,873	86,85	28,00	208,00	223,36	6,64	10,15
6,5	0,99	0,013	0,748	0,964	0,875	89,21	28,31	217,03	234,59	6,69	10,24
7	0,99	0,014	0,764	0,967	0,883	89,08	28,92	224,49	246,99	6,76	10,33
7,5	0,98	0,016	0,779	0,968	0,891	90,18	29,92	235,64	261,35	6,83	10,42
8	0,98	0,02	0,793	0,97	0,898	90,72	31,01	247,50	278,86	6,90	10,52
12	0,97	0,028	0,853	0,979	0,929	96,72	36,56	324,41	387,57	7,29	11,08
16	0,96	0,036	0,883	0,984	0,943	100,88	42,64	395,20	492,08	7,54	11,45
20	0,95	0,047	0,906	0,987	0,954	106,40	49,26	483,25	615,34	7,79	11,81
24	0,94	0,056	0,917	0,988	0,96	109,87	54,53	544,94	706,07	7,93	12,03
28	0,93	0,071	0,928	0,99	0,966	111,95	59,55	615,22	800,43	8,08	12,23
32	0,92	0,085	0,938	0,991	0,97	116,79	67,35	707,39	935,89	8,23	12,45
36	0,9	0,098	0,945	0,992	0,974	119,76	73,04	785,61	1044,58	8,35	12,63
40	0,89	0,109	0,949	0,993	0,976	123,07	77,87	844,33	1130,89	8,43	12,76
44	0,88	0,124	0,954	0,994	0,978	125,60	83,89	923,08	1244,78	8,53	12,90
48	0,86	0,135	0,958	0,994	0,98	128,09	89,62	996,20	1351,00	8,61	13,02
52	0,85	0,149	0,961	0,995	0,982	131,89	95,86	1066,82	1452,88	8,69	13,14
56	0,84	0,159	0,964	0,995	0,983	137,65	102,25	1156,18	1574,81	8,79	13,27
60	0,83	0,169	0,966	0,995	0,984	142,91	109,02	1238,82	1697,82	8,85	13,37
64	0,82	0,176	0,968	0,996	0,985	145,69	114,12	1299,85	1789,27	8,91	13,46
68	0,81	0,189	0,97	0,996	0,986	150,52	120,30	1379,97	1900,99	8,97	13,55
72	0,8	0,196	0,971	0,996	0,986	154,21	125,14	1433,37	1985,95	9,01	13,62
76	0,8	0,201	0,972	0,996	0,987	158,62	130,40	1498,48	2083,27	9,06	13,69
80	0,78	0,217	0,975	0,996	0,988	165,17	139,00	1612,42	2243,21	9,14	13,80
84	0,78	0,219	0,976	0,997	0,988	170,97	145,33	1690,04	2355,62	9,19	13,87
88	0,78	0,224	0,976	0,997	0,989	173,29	148,61	1724,50	2417,40	9,21	13,91
92	0,77	0,233	0,977	0,997	0,989	177,96	155,06	1796,12	2530,85	9,26	13,98
96	0,76	0,239	0,978	0,997	0,99	185,04	162,38	1890,86	2665,88	9,31	14,05
100	0,75	0,249	0,98	0,997	0,99	188,22	166,77	1950,49	2747,71	9,35	14,11

TABLEAU. B.0.8: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,75)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	1	0,002	0,008	0,884	0,331	39,26	18,84	57,53	59,17	4,61	7,38
0,1	1	0,003	0,036	0,891	0,35	40,19	18,87	59,84	61,15	4,68	7,48
0,2	1	0,003	0,092	0,895	0,396	40,88	19,00	61,72	63,59	4,76	7,58
0,3	1	0,004	0,144	0,899	0,442	42,63	19,00	65,23	65,80	4,84	7,69
0,4	1	0,002	0,155	0,903	0,448	43,32	19,13	66,63	67,17	4,90	7,74
0,5	1	0,002	0,194	0,906	0,48	44,34	19,30	69,14	69,90	4,97	7,84
0,6	1	0,002	0,213	0,911	0,49	44,00	19,25	69,87	71,81	5,03	7,92
0,7	1	0,002	0,261	0,916	0,526	45,25	19,39	73,22	74,97	5,11	8,03
0,8	1	0,001	0,271	0,915	0,536	46,56	19,80	75,33	76,73	5,13	8,05
0,9	1	0,003	0,309	0,921	0,561	46,00	19,57	76,25	78,71	5,20	8,14
1	1	0,002	0,331	0,924	0,577	47,04	19,79	79,10	81,84	5,27	8,23
1,1	1	0,002	0,336	0,925	0,578	47,58	20,21	80,31	83,48	5,29	8,25
1,2	1	0,002	0,37	0,928	0,606	48,12	20,10	82,35	85,69	5,34	8,32
1,3	1	0,002	0,38	0,931	0,609	48,23	20,08	83,97	88,27	5,40	8,40
1,4	1	0,002	0,403	0,932	0,629	49,37	20,21	86,33	89,98	5,43	8,44
1,5	1	0,001	0,424	0,936	0,639	48,86	20,30	87,54	93,44	5,49	8,53
1,6	1	0,002	0,439	0,936	0,653	50,61	20,65	91,09	95,83	5,53	8,56
1,7	1	0,002	0,437	0,936	0,652	51,14	20,83	91,81	96,87	5,53	8,58
1,8	1	0,002	0,458	0,939	0,665	50,93	20,85	93,17	99,55	5,58	8,65
1,9	1	0,001	0,484	0,941	0,683	51,10	21,04	94,31	101,99	5,61	8,69
2	1	0,003	0,499	0,943	0,693	52,01	21,36	97,74	105,66	5,67	8,77
2,1	1	0,002	0,506	0,944	0,698	52,10	21,57	98,60	107,27	5,68	8,79
2,2	1	0,002	0,506	0,944	0,699	52,67	21,58	99,63	108,24	5,70	8,81
2,3	1	0,001	0,514	0,946	0,703	53,78	21,74	102,42	111,24	5,74	8,87
2,4	1	0,002	0,529	0,948	0,712	53,64	21,84	104,21	114,10	5,78	8,92
2,5	1	0,002	0,553	0,949	0,73	54,07	21,86	106,14	116,06	5,81	8,96
2,6	1	0,001	0,558	0,951	0,731	53,50	21,83	106,65	117,71	5,84	8,99
2,7	1	0,001	0,568	0,952	0,737	53,71	22,09	108,21	121,12	5,87	9,04
2,8	1	0,002	0,563	0,952	0,735	55,10	22,10	110,89	122,40	5,89	9,07
2,9	1	0,003	0,586	0,953	0,751	55,25	22,47	114,22	127,09	5,94	9,13
3	1	0,002	0,59	0,954	0,752	54,92	22,42	113,96	127,53	5,95	9,14
3,1	1	0,002	0,603	0,956	0,761	55,38	22,65	115,83	130,93	5,98	9,20
3,2	1	0,002	0,601	0,955	0,761	55,36	22,57	115,56	130,58	5,97	9,19
3,3	1	0,002	0,614	0,956	0,77	56,12	22,80	118,30	133,07	6,01	9,22
3,4	1	0,003	0,62	0,957	0,773	55,91	22,78	119,22	134,77	6,03	9,25
3,5	1	0,002	0,625	0,958	0,773	55,38	23,21	119,01	136,61	6,04	9,27
3,6	1	0,003	0,634	0,96	0,779	55,39	23,01	121,75	139,89	6,08	9,32
3,7	1	0,002	0,644	0,96	0,788	56,38	23,21	124,05	142,43	6,10	9,35
3,8	1	0,002	0,647	0,961	0,789	56,83	23,34	126,18	145,74	6,13	9,40
3,9	1	0,002	0,647	0,961	0,789	56,97	23,53	126,88	146,37	6,13	9,39
4	1	0,002	0,66	0,962	0,798	57,63	23,98	129,23	150,21	6,16	9,45
4,5	1	0,002	0,679	0,965	0,809	58,49	24,43	136,54	160,80	6,26	9,58
5	1	0,002	0,702	0,968	0,822	58,52	25,13	142,72	171,78	6,34	9,69
5,5	1	0,003	0,726	0,97	0,838	60,53	25,61	153,03	185,01	6,44	9,83
6	1	0,003	0,744	0,971	0,851	60,86	25,94	158,39	193,32	6,49	9,91
6,5	1	0,003	0,754	0,973	0,856	63,01	27,01	168,55	207,48	6,57	10,02
7	1	0,004	0,768	0,974	0,865	63,70	27,51	176,14	216,94	6,64	10,11
7,5	1	0,004	0,782	0,976	0,873	64,71	28,49	185,06	232,14	6,71	10,22
8	0,99	0,006	0,793	0,977	0,88	64,50	28,57	189,73	238,49	6,74	10,27
12	0,99	0,007	0,85	0,984	0,914	70,02	33,55	249,90	329,37	7,12	10,81
16	0,99	0,013	0,881	0,987	0,932	76,00	38,79	311,20	420,35	7,39	11,21
20	0,98	0,018	0,902	0,989	0,944	79,20	43,58	368,98	508,10	7,60	11,51
24	0,97	0,027	0,918	0,991	0,953	82,74	48,66	433,01	603,38	7,78	11,78
28	0,97	0,034	0,929	0,992	0,96	86,42	53,89	493,85	698,53	7,93	12,01
32	0,96	0,041	0,937	0,993	0,964	90,50	58,12	549,91	773,82	8,05	12,18
36	0,94	0,055	0,945	0,994	0,968	93,69	63,96	624,95	886,12	8,19	12,38
40	0,94	0,061	0,949	0,995	0,971	98,86	69,28	691,51	978,64	8,29	12,53
44	0,93	0,074	0,954	0,995	0,974	101,76	73,67	746,15	1053,60	8,37	12,64
48	0,92	0,078	0,957	0,995	0,976	104,61	78,55	802,41	1142,87	8,45	12,77
52	0,91	0,093	0,961	0,996	0,978	109,22	84,29	876,39	1245,61	8,54	12,91
56	0,9	0,103	0,964	0,996	0,98	113,46	89,90	948,23	1350,38	8,62	13,03
60	0,89	0,108	0,965	0,996	0,98	116,91	93,59	991,87	1414,52	8,67	13,10
64	0,88	0,122	0,968	0,997	0,982	121,18	99,96	1063,73	1529,70	8,74	13,22
68	0,87	0,126	0,97	0,997	0,983	124,14	103,46	1117,63	1600,73	8,79	13,28
72	0,87	0,132	0,971	0,997	0,984	130,57	109,86	1195,31	1709,62	8,87	13,39
76	0,86	0,142	0,972	0,997	0,984	131,67	112,87	1233,96	1770,46	8,90	13,44
80	0,85	0,153	0,974	0,997	0,985	136,09	117,84	1298,47	1860,58	8,95	13,51
84	0,84	0,16	0,975	0,997	0,986	141,99	124,86	1377,42	1984,93	9,01	13,61
88	0,83	0,168	0,977	0,998	0,987	145,28	128,86	1431,58	2055,92	9,06	13,67
92	0,83	0,173	0,977	0,998	0,987	150,41	134,13	1494,92	2149,39	9,10	13,74
96	0,82	0,179	0,978	0,998	0,988	153,23	137,76	1536,80	2218,19	9,13	13,79
100	0,82	0,184	0,979	0,998	0,988	158,40	143,18	1599,65	2313,28	9,16	13,84

TABLEAU. B.0.9: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(2; 0,5)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,001	0,912	0,226	28,53	18,58	45,38	57,04	4,60	7,28
0,1	1	0	0,046	0,916	0,266	28,84	18,78	46,59	58,76	4,67	7,36
0,2	1	0	0,077	0,92	0,292	29,48	19,02	48,25	60,54	4,72	7,44
0,3	1	0	0,125	0,926	0,331	29,60	19,00	49,67	62,90	4,82	7,56
0,4	1	0	0,156	0,929	0,357	30,07	18,89	51,30	64,79	4,88	7,65
0,5	1	0	0,178	0,93	0,381	30,91	19,07	53,08	66,16	4,93	7,70
0,6	1	0	0,234	0,936	0,422	30,56	19,07	54,06	67,84	5,00	7,77
0,7	1	0	0,253	0,937	0,439	31,51	19,47	56,13	71,02	5,05	7,87
0,8	1	0,001	0,287	0,939	0,468	31,48	19,29	57,53	72,77	5,11	7,95
0,9	1	0	0,305	0,94	0,486	32,21	19,44	58,67	73,62	5,13	7,98
1	1	0	0,315	0,944	0,484	31,63	19,74	59,25	75,70	5,18	8,03
1,1	1	0	0,343	0,944	0,511	32,32	19,85	61,13	77,71	5,22	8,09
1,2	1	0	0,365	0,946	0,531	33,14	20,18	62,96	79,83	5,26	8,14
1,3	1	0	0,391	0,948	0,55	33,08	20,19	64,37	81,89	5,32	8,21
1,4	1	0	0,398	0,949	0,559	33,50	20,12	65,65	83,52	5,34	8,27
1,5	1	0	0,424	0,952	0,578	33,56	20,12	67,25	85,94	5,39	8,33
1,6	1	0	0,433	0,952	0,584	33,70	20,29	67,79	86,61	5,41	8,34
1,7	1	0,001	0,454	0,954	0,601	33,80	20,19	68,95	88,06	5,44	8,38
1,8	1	0	0,447	0,953	0,599	35,19	20,79	71,56	91,12	5,47	8,44
1,9	1	0	0,483	0,957	0,621	33,62	20,33	71,03	92,03	5,51	8,49
2	1	0	0,487	0,956	0,629	35,17	20,77	73,76	95,20	5,54	8,55
2,1	1	0	0,5	0,958	0,638	35,12	20,93	74,60	96,66	5,57	8,58
2,2	1	0	0,508	0,959	0,645	35,52	20,74	76,39	97,77	5,60	8,61
2,3	1	0	0,512	0,96	0,645	34,86	20,87	76,19	99,14	5,62	8,64
2,4	1	0	0,532	0,962	0,662	34,86	20,72	77,69	100,91	5,66	8,68
2,5	1	0	0,542	0,961	0,672	36,02	21,09	79,44	102,44	5,67	8,70
2,6	1	0	0,558	0,963	0,681	35,45	21,12	80,67	105,18	5,71	8,76
2,7	1	0	0,56	0,963	0,686	36,26	21,36	82,43	107,82	5,73	8,81
2,8	1	0	0,564	0,964	0,684	35,97	21,52	83,11	109,04	5,76	8,82
2,9	1	0	0,577	0,965	0,695	36,55	21,72	84,87	111,40	5,79	8,87
3	1	0	0,59	0,966	0,707	36,58	21,43	86,30	112,98	5,82	8,92
3,1	1	0,001	0,597	0,967	0,71	36,30	21,66	87,12	115,11	5,84	8,94
3,2	1	0	0,6	0,966	0,715	37,06	21,89	88,30	116,43	5,85	8,96
3,3	1	0	0,612	0,967	0,723	37,04	21,96	89,18	117,78	5,87	8,99
3,4	1	0	0,61	0,968	0,721	37,45	22,04	91,40	120,64	5,90	9,03
3,5	1	0	0,625	0,968	0,734	37,71	22,33	92,09	121,47	5,91	9,04
3,6	1	0	0,639	0,97	0,742	37,09	22,23	93,50	124,42	5,95	9,10
3,7	1	0	0,643	0,971	0,744	37,23	22,39	94,35	126,55	5,96	9,13
3,8	1	0	0,645	0,97	0,747	37,59	22,49	95,02	126,83	5,97	9,14
3,9	1	0	0,642	0,971	0,745	37,84	22,33	96,50	128,16	5,99	9,15
4	1	0	0,657	0,972	0,756	37,85	22,74	98,77	133,06	6,03	9,23
4,5	1	0,001	0,68	0,974	0,774	39,34	23,34	106,26	142,35	6,12	9,34
5	1	0	0,702	0,976	0,789	39,23	23,61	111,49	151,93	6,21	9,48
5,5	1	0	0,721	0,978	0,801	39,21	24,10	116,17	160,18	6,28	9,57
6	1	0	0,745	0,979	0,821	40,69	24,83	123,30	170,17	6,35	9,68
6,5	1	0,001	0,757	0,981	0,829	40,78	25,28	129,11	179,84	6,43	9,78
7	1	0,001	0,774	0,982	0,841	41,77	25,89	136,33	190,73	6,50	9,89
7,5	1	0,001	0,779	0,982	0,846	43,28	26,62	142,26	198,01	6,54	9,94
8	1	0,001	0,798	0,983	0,858	42,79	26,84	147,97	207,66	6,60	10,03
12	1	0,002	0,851	0,988	0,896	47,13	30,87	193,38	278,57	6,94	10,53
16	0,99	0,005	0,884	0,99	0,92	52,08	35,36	246,07	357,58	7,22	10,94
20	0,99	0,008	0,905	0,992	0,935	54,91	39,06	293,16	433,21	7,43	11,25
24	0,99	0,011	0,919	0,993	0,945	58,86	42,99	341,33	503,97	7,59	11,49
28	0,98	0,016	0,929	0,994	0,952	62,48	46,87	388,93	573,29	7,74	11,70
32	0,98	0,021	0,938	0,995	0,958	66,08	51,52	443,20	657,69	7,88	11,92
36	0,97	0,028	0,945	0,996	0,963	70,46	55,84	496,49	732,72	8,00	12,09
40	0,97	0,034	0,95	0,996	0,966	74,09	60,60	546,42	814,09	8,10	12,25
44	0,96	0,041	0,955	0,996	0,969	77,43	64,55	597,58	890,61	8,19	12,39
48	0,95	0,047	0,958	0,997	0,971	80,37	68,08	641,68	952,56	8,26	12,49
52	0,94	0,055	0,961	0,997	0,973	84,65	73,14	702,88	1044,85	8,36	12,63
56	0,94	0,062	0,964	0,997	0,975	87,83	76,54	742,52	1102,84	8,41	12,72
60	0,93	0,07	0,966	0,997	0,977	91,04	79,97	793,10	1176,24	8,48	12,81
64	0,92	0,083	0,969	0,997	0,979	96,31	86,21	869,04	1283,25	8,57	12,95
68	0,92	0,082	0,97	0,998	0,979	98,52	88,38	899,08	1327,52	8,61	13,00
72	0,91	0,091	0,972	0,998	0,98	101,10	91,96	939,38	1390,77	8,65	13,07
76	0,9	0,098	0,973	0,998	0,981	107,01	97,60	1009,20	1490,05	8,72	13,17
80	0,9	0,104	0,974	0,998	0,982	110,11	101,27	1053,44	1557,27	8,77	13,25
84	0,89	0,113	0,976	0,998	0,983	113,10	105,08	1095,42	1624,17	8,81	13,31
88	0,88	0,116	0,976	0,998	0,984	118,12	109,31	1151,58	1698,99	8,86	13,38
92	0,87	0,129	0,977	0,998	0,985	122,72	114,12	1221,52	1797,28	8,92	13,46
96	0,87	0,131	0,978	0,998	0,985	126,28	118,41	1261,31	1864,16	8,95	13,52
100	0,86	0,139	0,979	0,998	0,986	128,81	120,99	1299,57	1917,07	8,98	13,56

TABLEAU. B.0.10: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,008	0,933	0,106	21,22	18,36	37,11	55,35	4,60	7,21
0,1	1	0	0,043	0,936	0,153	21,87	18,75	38,98	57,51	4,68	7,30
0,2	1	0	0,088	0,938	0,196	21,72	18,63	39,13	58,18	4,70	7,34
0,3	1	0	0,119	0,943	0,224	22,07	18,75	41,16	60,94	4,81	7,48
0,4	1	0	0,156	0,944	0,258	22,21	18,87	41,71	61,83	4,83	7,52
0,5	1	0	0,207	0,947	0,301	22,32	19,20	43,09	64,47	4,90	7,61
0,6	1	0	0,225	0,95	0,323	22,52	18,99	44,05	65,14	4,95	7,66
0,7	1	0	0,262	0,951	0,353	22,47	19,03	44,65	66,08	4,98	7,70
0,8	1	0	0,277	0,953	0,372	22,76	19,05	45,91	67,81	5,02	7,77
0,9	1	0	0,302	0,954	0,389	23,17	19,60	47,20	69,93	5,06	7,83
1	1	0	0,328	0,955	0,415	23,19	19,52	47,97	71,29	5,10	7,88
1,1	1	0	0,338	0,956	0,425	23,47	19,63	49,12	72,88	5,14	7,93
1,2	1	0	0,363	0,959	0,444	22,91	19,29	49,73	74,14	5,19	8,00
1,3	1	0	0,382	0,959	0,463	23,32	19,51	50,73	75,14	5,21	8,02
1,4	1	0	0,394	0,96	0,473	23,80	19,94	52,05	77,16	5,24	8,07
1,5	1	0	0,417	0,963	0,493	23,45	19,64	53,14	78,96	5,30	8,15
1,6	1	0	0,43	0,962	0,507	24,02	19,98	54,00	80,00	5,30	8,15
1,7	1	0	0,455	0,964	0,525	23,88	20,14	55,08	82,32	5,35	8,23
1,8	1	0	0,462	0,965	0,536	24,12	20,08	56,29	83,65	5,38	8,27
1,9	1	0	0,482	0,967	0,549	23,73	19,95	56,75	84,97	5,41	8,31
2	1	0	0,476	0,966	0,548	24,45	20,27	57,81	85,64	5,42	8,31
2,1	1	0	0,494	0,967	0,563	24,18	20,25	58,09	86,85	5,43	8,34
2,2	1	0	0,525	0,969	0,591	24,21	20,16	59,93	88,68	5,50	8,41
2,3	1	0	0,526	0,97	0,589	24,54	20,61	61,31	91,45	5,53	8,46
2,4	1	0	0,541	0,97	0,606	24,56	20,37	61,39	91,78	5,53	8,48
2,5	1	0	0,544	0,97	0,608	24,99	20,90	63,22	94,39	5,56	8,52
2,6	1	0	0,553	0,971	0,614	24,64	20,70	63,19	94,71	5,58	8,54
2,7	1	0	0,574	0,972	0,634	25,35	21,19	66,11	98,98	5,64	8,63
2,8	1	0	0,58	0,973	0,639	25,27	21,05	66,92	100,46	5,66	8,66
2,9	1	0	0,581	0,973	0,64	25,04	20,91	66,84	100,04	5,66	8,66
3	1	0	0,588	0,973	0,645	25,22	21,12	67,93	101,67	5,68	8,67
3,1	1	0	0,587	0,974	0,645	25,21	20,98	67,49	101,03	5,67	8,67
3,2	1	0	0,597	0,974	0,653	25,38	21,13	69,27	103,47	5,71	8,72
3,3	1	0	0,611	0,975	0,667	25,60	21,29	70,59	105,80	5,74	8,77
3,4	1	0	0,617	0,975	0,67	25,50	21,43	71,08	106,88	5,75	8,79
3,5	1	0	0,622	0,976	0,675	25,39	21,26	71,81	107,87	5,78	8,82
3,6	1	0	0,636	0,977	0,689	26,31	21,94	75,21	112,69	5,83	8,89
3,7	1	0	0,638	0,977	0,69	26,30	22,01	75,17	113,16	5,83	8,90
3,8	1	0	0,645	0,977	0,697	25,76	21,47	75,10	113,08	5,84	8,91
3,9	1	0	0,648	0,978	0,697	25,97	21,76	76,38	114,95	5,86	8,94
4	1	0	0,662	0,978	0,712	26,13	21,75	77,66	116,62	5,88	8,98
4,5	1	0	0,681	0,98	0,727	26,84	22,51	83,41	125,93	5,98	9,11
5	1	0	0,709	0,981	0,75	27,19	22,96	87,88	132,55	6,05	9,22
5,5	1	0	0,723	0,983	0,763	27,16	22,86	92,16	139,57	6,13	9,32
6	1	0	0,738	0,984	0,777	28,00	23,57	97,81	148,09	6,20	9,42
6,5	1	0	0,764	0,985	0,797	28,35	24,25	103,71	157,70	6,27	9,53
7	1	0	0,768	0,985	0,803	28,93	24,39	106,25	161,24	6,30	9,58
7,5	1	0	0,781	0,986	0,813	28,87	24,67	111,26	169,65	6,37	9,68
8	1	0	0,791	0,987	0,822	29,83	25,35	116,66	177,59	6,42	9,75
12	0,999	0,001	0,851	0,991	0,874	33,06	28,54	154,73	237,67	6,77	10,27
16	0,998	0,002	0,882	0,993	0,9	36,34	32,17	193,84	300,19	7,03	10,65
20	0,997	0,003	0,905	0,994	0,919	39,21	35,15	232,55	359,60	7,23	10,95
24	0,995	0,005	0,92	0,995	0,932	42,43	38,45	270,61	417,85	7,40	11,20
28	0,992	0,008	0,929	0,996	0,94	45,94	42,05	311,06	478,52	7,54	11,41
32	0,989	0,011	0,938	0,996	0,948	48,97	45,26	352,01	541,65	7,68	11,61
36	0,986	0,014	0,945	0,997	0,954	52,28	48,94	391,18	603,80	7,79	11,78
40	0,982	0,018	0,95	0,997	0,958	54,98	51,85	427,27	655,53	7,88	11,91
44	0,979	0,021	0,954	0,997	0,961	58,22	55,24	470,12	722,48	7,98	12,06
48	0,975	0,025	0,958	0,997	0,964	61,15	58,45	507,72	779,96	8,06	12,18
52	0,970	0,03	0,961	0,998	0,967	65,13	62,59	556,69	853,04	8,15	12,32
56	0,964	0,036	0,964	0,998	0,97	67,49	65,03	589,76	900,46	8,22	12,41
60	0,964	0,036	0,965	0,998	0,97	70,78	68,76	632,61	969,38	8,28	12,51
64	0,954	0,046	0,968	0,998	0,973	73,73	71,57	667,01	1018,81	8,33	12,60
68	0,948	0,052	0,97	0,998	0,975	77,87	75,81	718,23	1092,90	8,41	12,70
72	0,946	0,054	0,971	0,998	0,976	80,09	77,87	750,06	1136,51	8,45	12,76
76	0,936	0,064	0,973	0,998	0,977	83,61	81,51	792,64	1200,41	8,51	12,85
80	0,929	0,071	0,975	0,998	0,979	88,21	86,33	848,31	1287,17	8,58	12,95
84	0,925	0,075	0,976	0,998	0,979	91,06	88,89	884,11	1331,93	8,62	13,01
88	0,921	0,079	0,976	0,999	0,98	93,71	91,71	915,10	1381,86	8,65	13,06
92	0,911	0,089	0,978	0,999	0,982	98,83	96,74	980,23	1476,00	8,72	13,17
96	0,912	0,088	0,978	0,999	0,982	101,33	99,55	1009,33	1524,25	8,75	13,21
100	0,901	0,099	0,98	0,999	0,983	104,60	102,45	1053,27	1585,16	8,79	13,27

TABLEAU. B.0.11: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,004	0,939	0,044	19,51	18,32	35,39	55,21	4,61	7,20
0,1	1	0	0,048	0,942	0,089	19,75	18,64	36,61	57,18	4,68	7,28
0,2	1	0	0,076	0,944	0,117	19,90	18,85	37,44	58,69	4,71	7,35
0,3	1	0	0,122	0,946	0,159	20,03	18,90	38,15	59,67	4,76	7,41
0,4	1	0	0,156	0,947	0,192	20,16	19,01	39,11	61,04	4,81	7,46
0,5	1	0	0,183	0,95	0,219	20,42	19,21	39,93	62,45	4,85	7,52
0,6	1	0	0,229	0,953	0,258	20,14	19,03	40,58	63,44	4,90	7,58
0,7	1	0	0,25	0,955	0,277	20,16	19,11	41,39	65,30	4,94	7,66
0,8	1	0	0,271	0,956	0,303	20,27	19,12	42,12	65,96	4,97	7,69
0,9	1	0	0,32	0,957	0,349	20,45	19,26	43,31	67,76	5,02	7,75
1	1	0	0,319	0,958	0,348	20,53	19,23	43,88	68,30	5,05	7,78
1,1	1	0	0,345	0,96	0,374	20,80	19,53	45,37	70,53	5,10	7,85
1,2	1	0	0,372	0,961	0,398	20,93	19,77	46,38	72,50	5,14	7,90
1,3	1	0	0,39	0,962	0,415	20,68	19,46	46,59	72,89	5,15	7,94
1,4	1	0	0,404	0,965	0,429	20,58	19,35	47,34	74,02	5,20	7,99
1,5	1	0	0,413	0,964	0,435	21,08	19,97	48,19	75,75	5,21	8,01
1,6	1	0	0,431	0,966	0,45	20,71	19,58	48,56	76,04	5,24	8,05
1,7	1	0	0,448	0,966	0,47	20,72	19,59	49,10	76,98	5,26	8,07
1,8	1	0	0,468	0,968	0,491	20,94	19,66	51,10	79,66	5,32	8,16
1,9	1	0	0,472	0,968	0,496	21,26	19,96	51,88	81,22	5,34	8,20
2	1	0	0,489	0,969	0,511	21,09	19,94	52,13	81,82	5,35	8,21
2,1	1	0	0,499	0,97	0,52	21,07	19,82	52,94	82,76	5,38	8,25
2,2	1	0	0,521	0,971	0,542	21,48	20,19	54,64	84,99	5,43	8,31
2,3	1	0	0,524	0,971	0,544	21,34	20,14	54,74	85,80	5,43	8,33
2,4	1	0	0,534	0,972	0,555	21,47	20,28	55,84	87,84	5,46	8,37
2,5	1	0	0,55	0,973	0,567	21,63	20,40	57,23	89,56	5,50	8,42
2,6	1	0	0,554	0,973	0,572	21,82	20,53	57,69	90,51	5,50	8,43
2,7	1	0	0,561	0,973	0,579	21,71	20,51	58,52	91,21	5,53	8,45
2,8	1	0	0,573	0,975	0,591	21,87	20,55	59,68	93,24	5,56	8,50
2,9	1	0	0,585	0,975	0,601	22,02	20,77	60,56	94,45	5,59	8,53
3	1	0	0,588	0,976	0,605	21,88	20,63	61,60	96,12	5,62	8,58
3,1	1	0	0,598	0,976	0,612	21,83	20,63	62,06	97,22	5,63	8,60
3,2	1	0	0,614	0,977	0,631	22,36	21,02	63,75	99,41	5,66	8,64
3,3	1	0	0,607	0,977	0,623	22,08	20,84	63,68	99,44	5,67	8,65
3,4	1	0	0,623	0,977	0,637	22,25	21,08	63,87	100,20	5,66	8,65
3,5	1	0	0,627	0,978	0,643	22,52	21,25	66,06	103,11	5,71	8,72
3,6	1	0	0,638	0,978	0,651	22,61	21,47	67,35	105,36	5,74	8,76
3,7	1	0	0,633	0,978	0,648	22,37	21,11	66,90	104,74	5,74	8,75
3,8	1	0	0,645	0,979	0,658	22,43	21,31	67,36	105,47	5,75	8,77
3,9	1	0	0,657	0,979	0,671	22,61	21,45	68,62	107,69	5,77	8,81
4	1	0	0,661	0,98	0,674	22,34	21,15	69,42	108,84	5,79	8,84
4,5	1	0	0,68	0,981	0,694	23,26	22,02	74,68	116,84	5,88	8,97
5	1	0	0,705	0,982	0,715	23,49	22,39	78,03	122,39	5,95	9,06
5,5	1	0	0,725	0,984	0,735	23,52	22,44	81,71	128,51	6,02	9,16
6	1	0	0,746	0,985	0,755	24,09	22,96	86,90	136,40	6,09	9,27
6,5	1	0	0,76	0,986	0,768	24,48	23,44	91,10	143,22	6,16	9,37
7	1	0	0,769	0,986	0,777	25,12	24,08	95,69	150,10	6,22	9,45
7,5	1	0	0,78	0,987	0,787	24,99	23,93	97,06	152,51	6,23	9,47
8	1	0	0,789	0,987	0,797	25,57	24,46	102,16	159,74	6,30	9,56
12	1	0	0,85	0,991	0,854	28,18	27,21	136,46	214,11	6,65	10,08
16	0,999	0,001	0,884	0,993	0,888	30,64	29,80	170,59	268,62	6,91	10,47
20	0,999	0,001	0,904	0,994	0,908	33,30	32,61	200,34	315,21	7,10	10,75
24	0,997	0,003	0,919	0,995	0,922	36,81	36,04	238,33	372,45	7,28	11,01
28	0,995	0,005	0,931	0,996	0,934	39,49	39,19	271,26	426,27	7,42	11,23
32	0,993	0,007	0,938	0,996	0,94	42,08	41,77	306,31	480,32	7,55	11,42
36	0,990	0,01	0,946	0,997	0,948	45,69	45,51	349,02	545,47	7,68	11,62
40	0,988	0,012	0,95	0,997	0,952	47,95	48,03	377,29	590,16	7,76	11,74
44	0,985	0,015	0,954	0,997	0,956	50,63	50,57	410,93	638,66	7,85	11,87
48	0,983	0,017	0,958	0,997	0,959	53,27	53,42	440,44	686,96	7,93	11,99
52	0,979	0,021	0,962	0,998	0,963	56,49	56,45	482,02	745,84	8,02	12,12
56	0,974	0,026	0,964	0,998	0,966	59,40	59,57	518,06	802,75	8,09	12,22
60	0,970	0,03	0,965	0,998	0,967	62,34	62,28	554,33	854,34	8,15	12,31
64	0,964	0,036	0,969	0,998	0,97	65,55	65,70	591,85	912,93	8,22	12,42
68	0,965	0,035	0,969	0,998	0,97	67,78	67,90	615,03	947,24	8,26	12,48
72	0,960	0,04	0,971	0,998	0,972	69,71	69,67	642,75	987,67	8,31	12,55
76	0,951	0,049	0,974	0,998	0,975	74,70	74,67	701,52	1075,20	8,40	12,68
80	0,949	0,051	0,974	0,998	0,975	76,70	76,64	726,14	1111,82	8,43	12,73
84	0,944	0,056	0,975	0,999	0,976	79,34	79,32	755,32	1156,17	8,47	12,79
88	0,941	0,059	0,976	0,999	0,977	82,45	82,47	793,15	1215,07	8,52	12,86
92	0,934	0,066	0,978	0,999	0,978	85,32	84,97	830,14	1265,96	8,57	12,93
96	0,930	0,07	0,978	0,999	0,979	88,34	88,09	861,71	1315,29	8,60	12,99
100	0,924	0,076	0,979	0,999	0,98	91,94	91,60	907,20	1384,10	8,65	13,06



TABLEAU. B.0.12: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,019	0,94	0,017	19,38	18,67	35,34	56,09	4,62	7,22
0,1	1	0	0,056	0,943	0,049	19,09	18,30	35,72	56,32	4,66	7,27
0,2	1	0	0,097	0,944	0,094	19,59	18,80	36,91	58,10	4,71	7,32
0,3	1	0	0,113	0,947	0,109	19,38	18,60	37,39	59,19	4,76	7,40
0,4	1	0	0,159	0,948	0,151	19,70	18,88	38,33	60,38	4,79	7,44
0,5	1	0	0,2	0,95	0,192	19,76	18,96	39,06	61,40	4,84	7,49
0,6	1	0	0,217	0,952	0,209	19,46	18,74	39,23	62,02	4,86	7,53
0,7	1	0	0,253	0,955	0,24	19,57	18,91	40,40	63,90	4,92	7,61
0,8	1	0	0,273	0,956	0,268	19,60	18,95	40,94	64,92	4,95	7,66
0,9	1	0	0,3	0,957	0,288	19,90	19,24	41,73	66,26	4,98	7,69
1	1	0	0,326	0,958	0,311	20,03	19,30	42,66	67,33	5,01	7,73
1,1	1	0	0,342	0,96	0,334	19,76	19,10	43,22	68,67	5,05	7,80
1,2	1	0	0,359	0,961	0,345	19,99	19,31	44,25	69,94	5,08	7,83
1,3	1	0	0,382	0,962	0,37	20,18	19,43	45,14	71,20	5,12	7,89
1,4	1	0	0,405	0,963	0,39	20,09	19,38	45,43	71,60	5,14	7,91
1,5	1	0	0,423	0,964	0,405	20,21	19,57	46,12	72,87	5,17	7,94
1,6	1	0	0,448	0,966	0,436	20,38	19,65	47,59	75,03	5,22	8,01
1,7	1	0	0,442	0,967	0,428	19,89	19,27	47,86	75,99	5,25	8,06
1,8	1	0	0,465	0,967	0,45	20,37	19,61	48,86	76,65	5,26	8,07
1,9	1	0	0,476	0,967	0,462	20,46	19,73	49,13	77,64	5,27	8,09
2	1	0	0,499	0,968	0,485	20,92	20,19	50,73	80,28	5,31	8,16
2,1	1	0	0,495	0,968	0,48	21,11	20,39	51,52	81,07	5,34	8,18
2,2	1	0	0,523	0,97	0,51	20,50	19,87	51,32	80,86	5,35	8,19
2,3	1	0	0,525	0,97	0,509	20,79	20,08	52,39	82,86	5,38	8,24
2,4	1	0	0,525	0,97	0,507	20,89	20,24	52,96	83,78	5,39	8,26
2,5	1	0	0,528	0,971	0,514	21,07	20,30	53,90	85,16	5,41	8,30
2,6	1	0	0,555	0,973	0,541	20,75	20,13	54,95	87,01	5,46	8,36
2,7	1	0	0,564	0,972	0,55	20,85	20,09	55,01	86,72	5,45	8,35
2,8	1	0	0,565	0,973	0,55	20,95	20,26	55,85	88,50	5,48	8,39
2,9	1	0	0,582	0,974	0,568	21,03	20,41	56,64	89,78	5,50	8,43
3	1	0	0,59	0,975	0,576	21,14	20,50	58,00	91,68	5,54	8,47
3,1	1	0	0,599	0,975	0,582	20,81	20,17	57,62	90,79	5,54	8,47
3,2	1	0	0,604	0,976	0,591	21,02	20,34	59,28	94,24	5,58	8,54
3,3	1	0	0,617	0,976	0,604	21,33	20,69	59,61	94,25	5,58	8,53
3,4	1	0	0,614	0,976	0,601	21,58	20,99	60,75	96,04	5,60	8,56
3,5	1	0	0,626	0,977	0,613	21,69	20,99	61,88	97,49	5,63	8,60
3,6	1	0	0,637	0,977	0,627	21,54	20,87	62,52	98,35	5,65	8,62
3,7	1	0	0,645	0,977	0,632	21,89	21,19	63,85	100,33	5,67	8,65
3,8	1	0	0,643	0,977	0,629	21,83	21,12	63,79	100,86	5,67	8,67
3,9	1	0	0,649	0,978	0,637	21,49	20,82	64,05	101,33	5,69	8,69
4	1	0	0,647	0,979	0,635	21,68	21,07	65,48	103,50	5,72	8,73
4,5	1	0	0,684	0,98	0,67	22,06	21,50	69,36	110,10	5,80	8,86
5	1	0	0,704	0,982	0,691	22,44	21,94	73,11	115,62	5,87	8,95
5,5	1	0	0,726	0,983	0,714	22,70	22,13	77,34	122,31	5,95	9,07
6	1	0	0,736	0,984	0,724	22,77	22,22	79,80	126,20	6,00	9,13
6,5	1	0	0,746	0,984	0,735	23,50	22,96	83,94	132,44	6,05	9,21
7	1	0	0,773	0,986	0,763	23,54	23,14	88,57	140,35	6,13	9,32
7,5	1	0	0,784	0,987	0,773	23,94	23,42	92,54	145,04	6,19	9,39
8	1	0	0,789	0,987	0,78	24,68	24,18	96,56	153,05	6,23	9,47
12	1	0	0,848	0,991	0,84	26,53	26,17	125,65	198,06	6,56	9,94
16	1	0,001	0,88	0,992	0,874	29,12	28,87	154,15	243,40	6,79	10,30
20	1	0,001	0,904	0,994	0,899	31,96	31,96	188,44	297,62	7,02	10,64
24	1	0,002	0,919	0,995	0,914	34,74	34,72	218,28	343,97	7,19	10,88
28	1	0,004	0,927	0,996	0,922	36,64	36,81	245,93	387,29	7,32	11,07
32	1	0,004	0,938	0,996	0,935	39,11	39,25	275,86	432,98	7,44	11,26
36	0,99	0,006	0,944	0,997	0,941	41,70	42,12	309,02	485,81	7,56	11,44
40	0,99	0,008	0,95	0,997	0,947	44,60	44,89	341,88	534,08	7,67	11,59
44	0,99	0,011	0,954	0,997	0,951	46,99	47,43	368,63	576,92	7,74	11,70
48	0,99	0,014	0,957	0,997	0,955	49,62	50,09	403,91	631,72	7,84	11,85
52	0,98	0,017	0,961	0,998	0,959	52,58	52,99	438,66	682,68	7,92	11,97
56	0,98	0,021	0,964	0,998	0,961	55,26	55,71	468,45	728,50	7,99	12,08
60	0,98	0,022	0,966	0,998	0,963	57,92	58,41	501,28	778,67	8,06	12,18
64	0,97	0,028	0,968	0,998	0,967	61,01	61,27	537,63	831,96	8,13	12,28
68	0,97	0,03	0,97	0,998	0,968	63,01	63,33	562,22	870,47	8,18	12,36
72	0,97	0,034	0,971	0,998	0,97	65,19	65,40	588,83	907,61	8,22	12,42
76	0,96	0,04	0,973	0,998	0,972	69,12	69,27	630,74	971,07	8,29	12,52
80	0,96	0,042	0,974	0,998	0,973	71,86	72,01	662,23	1020,40	8,34	12,60
84	0,95	0,045	0,975	0,998	0,974	73,62	73,59	688,22	1059,46	8,38	12,66
88	0,95	0,05	0,976	0,999	0,975	77,29	77,07	730,36	1121,59	8,43	12,74
92	0,94	0,055	0,977	0,999	0,976	79,25	78,73	748,11	1145,63	8,46	12,77
96	0,94	0,057	0,978	0,999	0,977	82,54	82,03	787,80	1205,93	8,51	12,86
100	0,94	0,064	0,979	0,999	0,978	85,34	84,62	821,51	1255,98	8,56	12,92

TABLEAU. B.0.13: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,5	0,497	0,003	0,628	0,629	119,35	49,43	72,27	46,43	3,42	6,36
0,1	0,48	0,522	0,045	0,646	0,65	122,54	49,21	73,99	47,30	3,56	6,47
0,2	0,49	0,514	0,099	0,67	0,674	124,93	49,06	79,67	48,63	3,70	6,61
0,3	0,49	0,514	0,124	0,681	0,686	128,14	49,19	82,04	49,51	3,78	6,68
0,4	0,49	0,51	0,166	0,699	0,699	129,60	50,20	85,27	51,08	3,87	6,76
0,5	0,51	0,491	0,198	0,714	0,713	132,01	49,63	85,75	52,00	3,97	6,87
0,6	0,52	0,485	0,226	0,727	0,722	133,90	49,80	87,52	53,13	4,05	6,94
0,7	0,52	0,485	0,256	0,738	0,736	136,03	50,28	92,33	54,49	4,13	7,02
0,8	0,5	0,497	0,281	0,748	0,746	136,94	50,28	94,34	55,76	4,20	7,10
0,9	0,5	0,501	0,306	0,758	0,757	138,23	50,21	96,45	56,44	4,27	7,16
1	0,51	0,495	0,332	0,768	0,766	140,51	50,93	99,73	58,50	4,35	7,25
1,1	0,51	0,486	0,358	0,778	0,776	142,23	50,86	101,27	59,53	4,41	7,32
1,2	0,48	0,517	0,367	0,78	0,782	143,74	50,99	101,50	60,45	4,45	7,36
1,3	0,5	0,499	0,387	0,787	0,789	144,45	51,64	105,47	61,84	4,51	7,42
1,4	0,51	0,491	0,404	0,797	0,794	145,49	51,20	107,20	62,76	4,56	7,48
1,5	0,49	0,506	0,424	0,802	0,804	146,61	51,43	111,98	64,43	4,63	7,56
1,6	0,51	0,494	0,441	0,81	0,809	147,64	51,44	114,00	65,46	4,68	7,61
1,7	0,48	0,523	0,46	0,815	0,817	148,42	51,89	112,34	66,82	4,73	7,66
1,8	0,52	0,477	0,47	0,821	0,818	149,58	52,20	114,60	67,88	4,76	7,70
1,9	0,5	0,5	0,486	0,825	0,825	149,39	52,42	116,26	69,13	4,81	7,75
2	0,49	0,506	0,491	0,827	0,828	150,48	52,45	118,54	69,94	4,83	7,78
2,1	0,48	0,52	0,509	0,833	0,835	151,72	52,83	120,96	71,83	4,89	7,85
2,2	0,48	0,515	0,514	0,835	0,837	152,43	52,84	121,49	72,52	4,91	7,87
2,3	0,51	0,491	0,529	0,842	0,841	153,35	52,85	124,81	73,83	4,96	7,93
2,4	0,51	0,487	0,543	0,847	0,845	151,85	53,30	125,54	74,78	4,99	7,95
2,5	0,52	0,48	0,552	0,851	0,849	153,92	53,39	127,16	76,41	5,04	8,01
2,6	0,5	0,499	0,555	0,85	0,851	153,14	53,76	128,59	76,95	5,04	8,02
2,7	0,49	0,508	0,568	0,855	0,856	153,27	53,97	134,74	78,49	5,08	8,07
2,8	0,49	0,512	0,582	0,86	0,861	154,52	53,97	134,12	80,31	5,13	8,14
2,9	0,5	0,504	0,591	0,863	0,863	154,87	54,23	133,62	81,31	5,16	8,16
3	0,48	0,521	0,594	0,865	0,866	154,85	53,21	134,96	81,60	5,18	8,19
3,1	0,51	0,495	0,606	0,869	0,868	154,89	54,40	138,40	83,48	5,22	8,23
3,2	0,51	0,492	0,612	0,871	0,87	155,93	54,38	137,79	84,58	5,24	8,26
3,3	0,52	0,483	0,62	0,875	0,873	155,21	54,44	141,17	85,58	5,27	8,29
3,4	0,5	0,5	0,627	0,876	0,876	157,37	54,85	140,30	87,14	5,30	8,33
3,5	0,5	0,504	0,636	0,88	0,879	156,06	54,66	142,81	88,23	5,33	8,36
3,6	0,5	0,499	0,638	0,881	0,88	157,51	55,15	146,23	89,79	5,35	8,40
3,7	0,49	0,514	0,643	0,881	0,883	159,84	55,74	147,03	91,23	5,37	8,43
3,8	0,5	0,502	0,652	0,885	0,885	158,91	55,58	146,75	92,12	5,40	8,46
3,9	0,51	0,492	0,656	0,887	0,886	158,86	55,51	148,21	92,82	5,42	8,48
4	0,5	0,504	0,662	0,888	0,889	157,45	56,03	152,95	94,04	5,44	8,50
4,5	0,51	0,489	0,686	0,897	0,897	159,51	56,27	156,79	99,76	5,55	8,64
5	0,49	0,514	0,714	0,906	0,907	158,21	57,10	167,73	106,72	5,66	8,78
5,5	0,52	0,484	0,729	0,912	0,911	159,36	58,15	172,14	111,83	5,73	8,88
6	0,49	0,505	0,747	0,918	0,918	160,61	59,31	181,79	119,28	5,83	9,01
6,5	0,49	0,512	0,762	0,923	0,923	161,40	59,72	182,14	123,49	5,89	9,08
7	0,51	0,491	0,777	0,928	0,927	161,61	60,68	189,39	130,34	5,97	9,19
7,5	0,51	0,491	0,788	0,932	0,931	161,78	61,51	197,74	136,28	6,04	9,28
8	0,52	0,483	0,798	0,935	0,934	160,68	62,22	203,36	141,91	6,09	9,36
12	0,53	0,467	0,855	0,954	0,953	162,31	68,33	249,95	189,43	6,49	9,89
16	0,51	0,492	0,886	0,964	0,964	163,33	75,08	292,53	237,45	6,77	10,29
20	0,52	0,482	0,908	0,971	0,971	163,62	82,22	334,59	287,21	7,00	10,61
24	0,48	0,515	0,923	0,975	0,976	164,73	89,29	376,63	337,43	7,19	10,88
28	0,52	0,485	0,932	0,979	0,978	168,90	96,07	417,27	385,79	7,34	11,10
32	0,5	0,5	0,94	0,981	0,981	167,66	101,26	447,72	427,63	7,46	11,27
36	0,51	0,489	0,945	0,983	0,983	171,66	107,61	481,16	470,86	7,56	11,42
40	0,5	0,503	0,951	0,984	0,985	175,95	114,76	519,55	521,26	7,67	11,58
44	0,52	0,485	0,955	0,986	0,986	179,07	121,21	558,03	573,16	7,78	11,74
48	0,5	0,497	0,959	0,987	0,987	185,11	129,02	596,28	626,14	7,87	11,88
52	0,5	0,499	0,962	0,988	0,988	186,71	134,46	624,13	667,70	7,94	11,98
56	0,5	0,502	0,965	0,989	0,989	190,08	140,40	655,62	709,24	8,01	12,07
60	0,5	0,497	0,967	0,99	0,99	196,30	148,16	697,27	766,54	8,09	12,20
64	0,51	0,49	0,969	0,99	0,99	201,74	155,33	730,97	818,02	8,16	12,30
68	0,5	0,499	0,971	0,991	0,991	203,99	160,16	756,90	850,72	8,20	12,36
72	0,5	0,499	0,972	0,991	0,991	211,93	168,35	797,03	909,38	8,27	12,46
76	0,5	0,496	0,974	0,992	0,992	217,04	175,08	833,93	962,17	8,33	12,55
80	0,51	0,486	0,975	0,992	0,992	224,21	182,99	875,54	1019,41	8,39	12,64
84	0,5	0,503	0,976	0,992	0,993	225,23	185,81	891,98	1044,61	8,41	12,68
88	0,51	0,494	0,977	0,993	0,993	234,25	195,23	928,07	1103,11	8,47	12,76
92	0,49	0,506	0,978	0,993	0,993	238,53	199,99	959,63	1145,43	8,51	12,82
96	0,49	0,507	0,979	0,993	0,994	243,97	206,96	989,10	1193,06	8,55	12,88
100	0,5	0,503	0,98	0,994	0,994	250,57	214,16	1024,03	1245,53	8,60	12,95

TABLEAU. B.0.14: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,9	0,103	-0,005	0,693	0,509	97,21	49,28	51,84	43,81	3,28	6,06
0,1	0,89	0,109	0,044	0,707	0,546	100,53	48,91	54,50	44,54	3,40	6,18
0,2	0,89	0,11	0,088	0,724	0,567	101,32	48,63	55,09	45,03	3,51	6,26
0,3	0,89	0,108	0,133	0,739	0,594	104,72	49,04	58,20	46,44	3,63	6,39
0,4	0,89	0,111	0,164	0,75	0,611	105,53	49,00	59,19	47,03	3,71	6,46
0,5	0,9	0,103	0,199	0,761	0,626	107,60	49,66	60,65	48,33	3,79	6,54
0,6	0,91	0,095	0,232	0,774	0,642	109,03	49,72	61,63	49,35	3,89	6,64
0,7	0,9	0,101	0,249	0,78	0,655	109,92	49,14	63,04	49,63	3,94	6,70
0,8	0,9	0,104	0,282	0,79	0,669	111,48	49,88	64,31	50,91	4,02	6,76
0,9	0,89	0,107	0,307	0,797	0,684	112,76	49,65	66,06	51,75	4,09	6,84
1	0,9	0,096	0,334	0,807	0,696	113,78	49,89	66,91	52,68	4,15	6,91
1,1	0,9	0,101	0,357	0,813	0,709	115,31	50,15	69,16	53,86	4,22	6,98
1,2	0,91	0,095	0,369	0,817	0,715	116,72	50,19	69,72	54,35	4,25	7,01
1,3	0,91	0,087	0,391	0,825	0,726	118,74	50,54	70,14	55,93	4,33	7,10
1,4	0,89	0,112	0,411	0,831	0,736	117,87	50,75	73,96	56,79	4,38	7,16
1,5	0,91	0,093	0,428	0,836	0,743	119,54	51,07	73,21	57,75	4,42	7,20
1,6	0,91	0,089	0,442	0,842	0,75	120,44	50,31	73,93	58,16	4,47	7,26
1,7	0,91	0,094	0,46	0,846	0,758	119,88	51,04	75,96	59,44	4,51	7,30
1,8	0,9	0,103	0,472	0,85	0,767	121,40	50,54	77,50	60,06	4,56	7,36
1,9	0,9	0,101	0,485	0,852	0,772	122,90	51,56	78,96	61,51	4,59	7,40
2	0,91	0,092	0,499	0,858	0,779	122,95	50,98	78,39	61,92	4,63	7,44
2,1	0,9	0,097	0,513	0,863	0,785	122,52	50,87	79,78	62,53	4,67	7,48
2,2	0,9	0,098	0,521	0,864	0,789	124,27	51,65	81,44	64,08	4,71	7,53
2,3	0,9	0,101	0,528	0,866	0,793	124,38	51,79	81,77	64,67	4,73	7,56
2,4	0,9	0,1	0,544	0,87	0,8	125,49	52,20	83,10	65,99	4,77	7,61
2,5	0,92	0,077	0,545	0,874	0,799	125,63	51,69	82,48	66,17	4,79	7,63
2,6	0,91	0,092	0,56	0,876	0,808	125,91	51,48	84,53	66,83	4,83	7,67
2,7	0,91	0,093	0,569	0,878	0,813	126,91	52,06	85,58	68,04	4,86	7,71
2,8	0,9	0,103	0,576	0,88	0,816	127,64	52,36	85,76	68,72	4,88	7,73
2,9	0,91	0,093	0,586	0,884	0,821	128,86	52,03	87,41	69,84	4,93	7,79
3	0,91	0,093	0,598	0,887	0,825	127,94	52,67	87,36	71,12	4,95	7,82
3,1	0,91	0,094	0,602	0,888	0,827	128,19	52,81	89,61	72,07	4,98	7,86
3,2	0,91	0,087	0,609	0,892	0,829	129,23	52,55	88,77	72,64	5,01	7,89
3,3	0,91	0,094	0,618	0,893	0,835	130,33	53,23	91,40	74,04	5,04	7,92
3,4	0,91	0,088	0,624	0,896	0,836	130,34	53,19	89,97	74,34	5,06	7,94
3,5	0,92	0,08	0,631	0,898	0,839	131,68	53,45	92,25	76,26	5,10	8,00
3,6	0,91	0,088	0,637	0,899	0,844	131,68	53,40	93,44	76,45	5,11	8,01
3,7	0,91	0,089	0,644	0,901	0,846	131,20	53,54	92,71	77,20	5,13	8,03
3,8	0,91	0,086	0,651	0,903	0,85	132,93	53,61	95,81	78,94	5,17	8,09
3,9	0,91	0,092	0,655	0,904	0,852	131,56	53,43	96,61	78,95	5,18	8,10
4	0,91	0,091	0,664	0,906	0,856	132,68	54,05	96,33	80,42	5,20	8,13
4,5	0,91	0,094	0,686	0,913	0,866	134,85	54,65	101,46	84,82	5,31	8,26
5	0,92	0,084	0,709	0,92	0,876	136,13	55,05	105,72	89,64	5,41	8,40
5,5	0,9	0,099	0,73	0,926	0,886	136,40	55,23	111,22	94,13	5,50	8,52
6	0,92	0,076	0,744	0,93	0,892	139,38	56,57	114,47	99,21	5,58	8,62
6,5	0,91	0,087	0,762	0,935	0,9	139,38	57,20	117,91	103,99	5,66	8,73
7	0,91	0,086	0,772	0,938	0,904	138,92	57,14	119,34	106,91	5,71	8,79
7,5	0,93	0,075	0,787	0,942	0,91	140,79	58,30	123,32	113,01	5,79	8,90
8	0,91	0,091	0,795	0,944	0,914	141,47	59,10	128,39	116,53	5,84	8,96
12	0,93	0,075	0,855	0,961	0,94	147,45	63,90	156,12	154,45	6,24	9,52
16	0,9	0,103	0,887	0,969	0,953	148,70	69,25	186,73	190,41	6,51	9,90
20	0,91	0,092	0,907	0,975	0,962	154,90	74,42	213,92	228,00	6,74	10,22
24	0,9	0,104	0,922	0,979	0,968	155,08	78,98	240,05	262,12	6,91	10,46
28	0,89	0,112	0,934	0,982	0,972	157,72	84,74	270,26	304,42	7,08	10,71
32	0,89	0,113	0,941	0,984	0,975	162,26	90,19	297,21	341,07	7,22	10,90
36	0,87	0,127	0,947	0,986	0,978	163,47	94,65	323,67	374,11	7,32	11,05
40	0,86	0,14	0,952	0,987	0,98	165,59	99,58	354,63	414,66	7,43	11,22
44	0,86	0,142	0,956	0,988	0,982	169,33	105,07	383,40	452,42	7,53	11,36
48	0,84	0,156	0,959	0,989	0,983	171,65	109,38	408,80	485,30	7,60	11,47
52	0,84	0,155	0,962	0,99	0,984	174,51	113,81	429,63	516,52	7,67	11,57
56	0,83	0,167	0,965	0,991	0,985	177,29	119,71	460,06	556,49	7,75	11,69
60	0,82	0,18	0,967	0,991	0,986	179,32	124,60	486,60	593,71	7,82	11,79
64	0,8	0,196	0,969	0,992	0,987	183,05	130,25	519,10	632,29	7,89	11,89
68	0,79	0,207	0,971	0,992	0,988	185,29	134,88	550,43	671,25	7,96	11,99
72	0,8	0,198	0,972	0,993	0,988	188,83	139,04	563,33	698,33	7,99	12,05
76	0,79	0,215	0,973	0,993	0,989	191,72	143,70	591,72	733,68	8,05	12,13
80	0,78	0,22	0,975	0,993	0,99	195,53	150,32	625,30	779,43	8,11	12,22
84	0,77	0,233	0,976	0,994	0,99	199,80	156,04	655,53	819,60	8,16	12,30
88	0,77	0,231	0,977	0,994	0,991	202,95	159,90	675,22	850,44	8,20	12,35
92	0,76	0,236	0,978	0,994	0,991	206,52	164,57	698,24	883,95	8,24	12,42
96	0,76	0,242	0,979	0,994	0,991	210,09	169,41	722,42	917,74	8,28	12,47
100	0,75	0,246	0,98	0,995	0,992	215,22	175,62	755,31	964,17	8,33	12,55

TABLEAU. B.0.15: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0,003	0,005	0,754	0,377	72,67	48,53	35,86	41,81	3,29	5,84
0,1	1	0,004	0,048	0,765	0,407	74,37	49,09	36,94	42,73	3,38	5,93
0,2	0,99	0,005	0,094	0,781	0,436	74,65	48,61	37,49	43,10	3,49	6,02
0,3	0,99	0,007	0,13	0,786	0,467	76,32	48,75	38,74	43,76	3,55	6,10
0,4	1	0,003	0,162	0,797	0,487	77,35	49,09	39,40	44,63	3,63	6,18
0,5	0,99	0,006	0,195	0,806	0,508	77,71	48,79	40,05	45,04	3,71	6,25
0,6	1	0,004	0,234	0,815	0,534	78,77	49,14	40,83	45,90	3,78	6,33
0,7	1	0,003	0,257	0,821	0,549	79,08	49,07	41,28	46,31	3,82	6,37
0,8	1	0,003	0,286	0,829	0,57	80,33	48,91	42,33	47,03	3,90	6,46
0,9	1	0,003	0,302	0,836	0,576	80,09	49,14	42,45	47,73	3,96	6,52
1	0,99	0,005	0,329	0,838	0,599	81,93	49,42	43,62	48,25	3,99	6,55
1,1	1	0,004	0,356	0,847	0,613	81,70	49,74	44,28	49,43	4,07	6,64
1,2	1	0,002	0,378	0,854	0,624	82,13	49,95	44,62	50,19	4,12	6,70
1,3	0,99	0,007	0,388	0,853	0,638	83,35	49,60	45,73	50,20	4,13	6,72
1,4	0,99	0,006	0,412	0,859	0,651	84,00	50,16	46,32	51,38	4,19	6,78
1,5	1	0,001	0,431	0,865	0,661	84,53	50,46	46,74	52,33	4,25	6,85
1,6	1	0,001	0,438	0,867	0,667	85,45	50,41	47,47	52,93	4,28	6,90
1,7	1	0,004	0,464	0,873	0,684	85,18	49,90	48,13	53,44	4,34	6,96
1,8	1	0,004	0,471	0,876	0,688	85,51	50,15	48,55	54,01	4,36	6,99
1,9	1	0,004	0,48	0,878	0,692	85,20	50,06	48,60	54,01	4,38	7,00
2	1	0,003	0,498	0,883	0,705	85,73	49,95	49,29	54,99	4,44	7,07
2,1	0,99	0,006	0,506	0,884	0,71	86,51	50,22	50,12	55,57	4,46	7,10
2,2	1	0,001	0,52	0,888	0,718	87,41	50,50	50,86	56,71	4,51	7,16
2,3	1	0,002	0,53	0,891	0,723	87,21	50,84	51,16	57,49	4,54	7,19
2,4	1	0,004	0,541	0,893	0,731	87,34	50,71	51,61	57,83	4,56	7,22
2,5	1	0,004	0,557	0,895	0,743	88,19	50,85	52,74	58,61	4,59	7,26
2,6	1	0,004	0,561	0,897	0,744	88,75	51,09	53,25	59,37	4,63	7,30
2,7	0,99	0,005	0,564	0,898	0,747	88,83	50,81	53,61	59,59	4,64	7,32
2,8	1	0,003	0,574	0,902	0,752	88,80	50,72	53,75	60,34	4,68	7,37
2,9	0,99	0,005	0,59	0,904	0,762	89,35	51,07	54,68	61,34	4,71	7,41
3	1	0,003	0,599	0,906	0,767	89,61	51,56	55,05	61,79	4,73	7,42
3,1	1	0,004	0,606	0,908	0,771	89,63	51,32	55,43	62,51	4,76	7,46
3,2	1	0,003	0,618	0,912	0,777	90,15	51,70	56,37	64,08	4,81	7,53
3,3	1	0,002	0,613	0,911	0,775	91,08	51,91	56,61	64,04	4,80	7,52
3,4	1	0,002	0,626	0,913	0,785	91,62	51,59	57,54	65,01	4,84	7,58
3,5	1	0,004	0,628	0,915	0,785	90,63	51,43	57,27	65,01	4,85	7,59
3,6	1	0,004	0,636	0,915	0,79	91,74	51,67	58,31	65,67	4,88	7,61
3,7	1	0,001	0,645	0,917	0,796	92,23	52,29	58,42	66,50	4,89	7,63
3,8	0,99	0,005	0,649	0,918	0,799	91,80	51,58	59,44	67,02	4,92	7,67
3,9	1	0,002	0,657	0,922	0,801	91,79	52,36	59,52	68,22	4,95	7,71
4	1	0,002	0,658	0,922	0,803	91,52	51,62	59,51	67,68	4,96	7,70
4,5	1	0,002	0,693	0,93	0,823	92,59	52,47	62,49	72,34	5,08	7,88
5	1	0,004	0,71	0,934	0,834	93,49	52,75	64,55	75,11	5,16	7,98
5,5	1	0,004	0,729	0,938	0,844	94,49	53,38	67,00	78,23	5,24	8,07
6	1	0,003	0,747	0,942	0,855	95,96	54,31	69,82	82,25	5,32	8,19
6,5	1	0,002	0,761	0,946	0,862	95,62	54,51	71,60	85,52	5,39	8,29
7	1	0,003	0,774	0,948	0,871	97,01	55,21	74,02	88,73	5,45	8,37
7,5	1	0,002	0,785	0,951	0,878	98,85	55,59	77,04	92,25	5,52	8,46
8	1	0,002	0,8	0,954	0,887	99,10	55,93	79,35	96,03	5,59	8,55
12	0,99	0,005	0,856	0,968	0,919	102,29	58,89	97,41	122,64	5,96	9,08
16	1	0,004	0,887	0,975	0,936	107,45	63,14	115,73	150,24	6,23	9,47
20	0,99	0,007	0,908	0,979	0,948	111,28	66,86	134,19	177,04	6,45	9,77
24	0,99	0,005	0,921	0,982	0,956	115,57	70,62	151,65	203,02	6,62	10,02
28	0,99	0,007	0,931	0,985	0,961	119,19	74,22	168,57	228,35	6,76	10,22
32	0,99	0,01	0,94	0,987	0,966	122,19	78,53	187,98	256,87	6,90	10,42
36	0,99	0,014	0,947	0,988	0,971	126,60	82,16	209,04	286,36	7,03	10,61
40	0,98	0,015	0,952	0,989	0,973	128,56	85,92	225,98	312,48	7,13	10,75
44	0,98	0,018	0,955	0,99	0,975	132,59	89,45	244,19	338,01	7,21	10,88
48	0,97	0,025	0,959	0,991	0,977	135,59	93,67	264,20	367,35	7,30	11,02
52	0,97	0,026	0,962	0,991	0,979	137,97	96,03	280,07	388,84	7,37	11,11
56	0,97	0,03	0,965	0,992	0,981	140,64	100,44	300,59	419,52	7,45	11,24
60	0,96	0,037	0,968	0,993	0,982	144,39	104,81	324,39	451,06	7,54	11,35
64	0,96	0,039	0,969	0,993	0,983	147,30	108,63	340,88	476,81	7,59	11,44
68	0,96	0,043	0,971	0,994	0,984	150,56	112,19	361,70	504,88	7,66	11,54
72	0,95	0,047	0,972	0,994	0,985	152,39	115,05	375,99	525,80	7,70	11,60
76	0,95	0,051	0,974	0,994	0,985	155,93	119,06	395,98	552,38	7,76	11,68
80	0,94	0,062	0,976	0,994	0,987	158,46	123,14	420,90	585,89	7,82	11,77
84	0,94	0,063	0,976	0,995	0,987	160,27	125,46	432,70	603,67	7,85	11,82
88	0,93	0,066	0,978	0,995	0,988	164,80	130,90	457,74	640,03	7,91	11,91
92	0,93	0,071	0,978	0,995	0,988	166,93	133,91	472,57	662,56	7,94	11,96
96	0,92	0,076	0,979	0,995	0,988	170,17	138,15	494,62	692,15	7,99	12,03
100	0,92	0,079	0,98	0,996	0,989	174,88	142,27	515,16	720,90	8,03	12,10

TABLEAU. B.0.16: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(1;0,25)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,004	0,798	0,194	54,74	48,28	27,70	40,62	3,29	5,68
0,1	1	0	0,041	0,806	0,23	55,25	48,59	28,18	41,15	3,36	5,73
0,2	1	0	0,09	0,816	0,273	55,84	48,61	28,76	41,65	3,44	5,81
0,3	1	0	0,124	0,824	0,301	55,75	48,25	28,94	41,88	3,50	5,88
0,4	1	0	0,165	0,83	0,33	55,85	48,46	29,23	42,32	3,55	5,93
0,5	1	0	0,191	0,838	0,352	55,98	48,26	29,59	42,69	3,61	6,00
0,6	1	0	0,229	0,845	0,383	56,38	48,44	30,08	43,21	3,67	6,05
0,7	1	0	0,253	0,847	0,4	57,01	49,15	30,48	43,92	3,70	6,09
0,8	1	0	0,286	0,855	0,427	57,36	49,20	31,04	44,65	3,77	6,18
0,9	1	0	0,308	0,86	0,446	57,33	48,80	31,28	44,73	3,82	6,22
1	1	0	0,331	0,865	0,463	57,61	49,16	31,69	45,38	3,86	6,27
1,1	1	0	0,354	0,869	0,481	57,80	49,18	32,09	45,86	3,91	6,32
1,2	1	0	0,371	0,874	0,493	57,15	48,73	31,97	45,85	3,94	6,35
1,3	1	0	0,389	0,876	0,509	57,65	48,94	32,44	46,37	3,97	6,39
1,4	1	0	0,407	0,881	0,527	58,43	49,22	33,23	47,30	4,04	6,47
1,5	1	0	0,431	0,885	0,543	57,61	48,75	32,99	47,26	4,05	6,50
1,6	1	0	0,446	0,888	0,557	58,91	49,56	34,03	48,53	4,11	6,57
1,7	1	0	0,453	0,889	0,559	58,85	49,89	34,11	48,83	4,12	6,57
1,8	1	0	0,465	0,893	0,572	58,65	49,28	34,36	48,93	4,16	6,62
1,9	1	0	0,48	0,895	0,583	58,99	49,64	34,69	49,55	4,19	6,66
2	1	0	0,501	0,899	0,599	58,62	49,35	34,85	49,81	4,22	6,70
2,1	1	0	0,509	0,902	0,605	59,00	49,59	35,41	50,47	4,27	6,74
2,2	1	0	0,524	0,904	0,62	59,06	49,39	35,61	50,75	4,29	6,78
2,3	1	0	0,522	0,903	0,619	60,43	50,32	36,35	51,50	4,30	6,79
2,4	1	0	0,536	0,906	0,63	59,91	49,94	36,45	51,75	4,33	6,82
2,5	1	0	0,561	0,911	0,647	59,58	49,91	36,78	52,44	4,38	6,89
2,6	1	0	0,561	0,911	0,65	60,42	50,22	37,31	52,92	4,39	6,91
2,7	1	0	0,568	0,913	0,653	59,90	50,19	37,33	53,28	4,41	6,93
2,8	1	0	0,58	0,915	0,664	59,58	49,63	37,51	53,48	4,44	6,97
2,9	1	0	0,59	0,918	0,67	60,29	50,31	38,32	54,54	4,49	7,02
3	1	0	0,594	0,92	0,672	59,48	49,93	37,97	54,36	4,49	7,03
3,1	1	0	0,606	0,92	0,683	60,47	50,49	38,81	55,37	4,52	7,07
3,2	1	0	0,611	0,921	0,688	60,38	50,26	38,88	55,30	4,53	7,07
3,3	1	0	0,618	0,924	0,695	60,18	49,96	39,16	55,76	4,56	7,12
3,4	1	0	0,62	0,925	0,696	60,15	49,90	39,39	56,18	4,58	7,14
3,5	1	0	0,635	0,926	0,707	60,79	50,48	39,95	56,75	4,60	7,16
3,6	1	0	0,642	0,928	0,713	60,89	50,58	40,35	57,47	4,63	7,20
3,7	1	0	0,646	0,929	0,716	60,85	50,68	40,64	58,13	4,65	7,24
3,8	1	0	0,654	0,93	0,72	60,79	51,05	40,68	58,46	4,66	7,24
3,9	1	0	0,662	0,931	0,729	61,30	50,89	41,30	58,99	4,69	7,28
4	1	0	0,664	0,932	0,73	61,78	51,43	41,80	59,72	4,71	7,31
4,5	1	0	0,688	0,937	0,75	62,10	51,43	43,34	61,79	4,80	7,42
5	1	0	0,706	0,941	0,765	62,31	51,37	44,65	63,66	4,87	7,52
5,5	1	0	0,726	0,946	0,781	62,10	51,26	46,07	66,04	4,95	7,63
6	1	0	0,748	0,949	0,798	63,05	52,09	47,88	68,43	5,03	7,72
6,5	1	0	0,763	0,952	0,811	63,46	52,46	49,57	71,12	5,10	7,83
7	1	0	0,775	0,955	0,82	63,71	52,83	51,12	73,72	5,16	7,92
7,5	1	0	0,788	0,957	0,829	63,88	53,43	52,27	75,72	5,21	7,98
8	1	0	0,8	0,96	0,839	64,49	53,50	54,49	78,60	5,29	8,09
12	1	0	0,854	0,971	0,884	67,73	56,02	66,51	96,55	5,63	8,57
16	1	0	0,887	0,977	0,909	70,55	58,96	79,36	116,33	5,91	8,96
20	1	0	0,907	0,982	0,926	72,83	61,11	91,39	134,53	6,11	9,25
24	1	0	0,922	0,984	0,938	75,69	63,95	103,79	153,36	6,28	9,50
28	1	0	0,932	0,986	0,945	77,72	66,21	115,05	170,79	6,42	9,70
32	0,999	0,001	0,94	0,988	0,952	80,62	68,73	128,33	190,95	6,56	9,91
36	0,999	0,001	0,947	0,989	0,957	82,84	71,61	141,02	210,90	6,68	10,08
40	0,999	0,001	0,951	0,99	0,961	85,80	74,03	151,84	226,89	6,76	10,21
44	0,998	0,002	0,956	0,991	0,965	88,38	77,16	166,02	248,52	6,87	10,37
48	0,998	0,002	0,96	0,992	0,968	91,05	80,08	179,68	268,97	6,96	10,50
52	0,997	0,003	0,961	0,992	0,969	93,03	81,37	187,94	280,89	7,01	10,57
56	0,997	0,003	0,965	0,993	0,972	95,97	84,64	201,47	301,70	7,09	10,69
60	0,997	0,003	0,968	0,993	0,974	99,04	88,01	216,90	324,96	7,18	10,82
64	0,995	0,005	0,969	0,994	0,975	101,42	90,31	228,24	342,59	7,23	10,90
68	0,993	0,007	0,971	0,994	0,977	103,46	92,42	241,52	362,07	7,30	11,00
72	0,994	0,006	0,973	0,995	0,978	106,06	95,17	253,72	380,88	7,35	11,08
76	0,992	0,008	0,974	0,995	0,979	107,61	96,97	263,82	394,60	7,40	11,14
80	0,991	0,009	0,975	0,995	0,98	110,12	99,67	276,98	415,92	7,45	11,23
84	0,990	0,010	0,976	0,995	0,981	112,47	101,88	287,73	430,63	7,49	11,28
88	0,988	0,012	0,977	0,995	0,982	115,94	105,51	304,62	456,06	7,55	11,37
92	0,987	0,013	0,978	0,996	0,983	118,34	108,44	317,73	475,70	7,60	11,44
96	0,985	0,015	0,979	0,996	0,983	119,89	110,02	326,45	488,45	7,62	11,48
100	0,982	0,018	0,98	0,996	0,984	123,06	113,02	341,63	509,96	7,67	11,55

TABLEAU. B.O.17: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(1; 0,1)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,001	0,811	0,081	49,55	48,04	25,38	40,03	3,28	5,60
0,1	1	0	0,041	0,82	0,115	49,78	48,20	25,74	40,57	3,36	5,67
0,2	1	0	0,093	0,827	0,157	49,69	48,15	25,90	40,83	3,40	5,73
0,3	1	0	0,131	0,834	0,191	50,18	48,56	26,37	41,49	3,47	5,79
0,4	1	0	0,164	0,839	0,218	50,44	48,85	26,69	41,96	3,51	5,83
0,5	1	0	0,196	0,845	0,243	49,49	47,88	26,39	41,61	3,54	5,88
0,6	1	0	0,228	0,85	0,271	50,00	48,37	26,88	42,28	3,60	5,93
0,7	1	0	0,255	0,854	0,295	50,58	48,86	27,35	42,84	3,64	5,96
0,8	1	0	0,287	0,86	0,32	50,49	48,90	27,56	43,33	3,69	6,03
0,9	1	0	0,318	0,865	0,349	50,29	48,51	27,67	43,42	3,73	6,08
1	1	0	0,331	0,868	0,362	50,71	48,78	28,05	43,84	3,76	6,11
1,1	1	0	0,355	0,872	0,382	50,40	48,73	28,13	44,26	3,80	6,16
1,2	1	0	0,373	0,875	0,4	50,95	49,03	28,60	44,89	3,84	6,21
1,3	1	0	0,393	0,879	0,415	50,78	48,97	28,76	44,98	3,88	6,23
1,4	1	0	0,409	0,883	0,431	51,01	49,16	29,10	45,55	3,91	6,29
1,5	1	0	0,42	0,885	0,443	50,89	48,93	29,20	45,53	3,94	6,30
1,6	1	0	0,445	0,887	0,465	51,65	49,64	29,78	46,50	3,97	6,35
1,7	1	0	0,453	0,891	0,472	50,79	48,73	29,57	46,09	3,99	6,38
1,8	1	0	0,474	0,895	0,488	50,53	48,68	29,70	46,41	4,03	6,41
1,9	1	0	0,488	0,897	0,504	51,00	49,03	30,14	47,03	4,06	6,46
2	1	0	0,496	0,898	0,512	51,20	49,20	30,40	47,44	4,08	6,49
2,1	1	0	0,508	0,901	0,522	51,25	49,26	30,65	47,76	4,11	6,51
2,2	1	0	0,525	0,902	0,537	51,71	49,72	31,05	48,44	4,13	6,55
2,3	1	0	0,533	0,905	0,542	51,42	49,62	31,10	48,72	4,16	6,58
2,4	1	0	0,544	0,907	0,557	51,46	49,37	31,44	49,02	4,19	6,63
2,5	1	0	0,552	0,909	0,561	51,78	49,84	31,79	49,56	4,22	6,65
2,6	1	0	0,562	0,911	0,571	51,57	49,49	31,86	49,54	4,24	6,67
2,7	1	0	0,572	0,912	0,578	51,87	49,85	32,16	50,23	4,26	6,71
2,8	1	0	0,587	0,916	0,594	51,69	49,71	32,55	50,73	4,31	6,76
2,9	1	0	0,593	0,917	0,601	52,25	50,13	32,97	51,25	4,32	6,78
3	1	0	0,596	0,917	0,604	51,61	49,57	32,68	50,92	4,32	6,78
3,1	1	0	0,606	0,919	0,611	52,22	50,21	33,30	51,80	4,36	6,82
3,2	1	0	0,613	0,921	0,619	52,14	50,10	33,42	52,07	4,37	6,85
3,3	1	0	0,621	0,923	0,626	51,61	49,58	33,43	51,93	4,40	6,86
3,4	1	0	0,622	0,923	0,63	51,23	49,11	33,35	51,84	4,40	6,88
3,5	1	0	0,633	0,925	0,637	52,40	50,39	34,33	53,52	4,44	6,94
3,6	1	0	0,641	0,927	0,645	51,85	49,79	34,29	53,42	4,46	6,96
3,7	1	0	0,646	0,927	0,651	52,89	50,65	34,87	54,15	4,47	6,97
3,8	1	0	0,65	0,928	0,653	51,97	49,94	34,60	53,77	4,48	6,98
3,9	1	0	0,657	0,93	0,664	52,10	49,80	34,95	54,13	4,51	7,01
4	1	0	0,664	0,931	0,667	52,74	50,63	35,48	55,05	4,53	7,04
4,5	1	0	0,685	0,935	0,687	52,56	50,57	36,36	56,57	4,60	7,14
5	1	0	0,709	0,94	0,712	53,12	50,93	37,70	58,48	4,69	7,25
5,5	1	0	0,73	0,944	0,732	53,59	51,40	39,10	60,73	4,77	7,36
6	1	0	0,746	0,947	0,745	53,47	51,32	39,91	61,94	4,82	7,43
6,5	1	0	0,763	0,95	0,763	53,64	51,38	41,21	63,71	4,89	7,52
7	1	0	0,774	0,953	0,774	53,77	51,61	42,45	65,80	4,96	7,62
7,5	1	0	0,784	0,955	0,784	54,46	52,31	43,64	67,51	5,00	7,68
8	1	0	0,801	0,958	0,8	54,36	52,20	44,77	69,45	5,06	7,76
12	1	0	0,854	0,969	0,853	56,38	54,11	54,40	83,93	5,41	8,25
16	1	0	0,887	0,976	0,884	58,34	56,33	63,80	98,70	5,67	8,61
20	1	0	0,907	0,98	0,905	60,71	58,39	73,42	112,85	5,87	8,90
24	1	0	0,922	0,983	0,92	62,67	60,58	83,40	128,17	6,05	9,15
28	1	0	0,933	0,986	0,932	64,47	62,16	92,77	142,21	6,19	9,36
32	1	0	0,94	0,987	0,939	66,52	64,34	102,10	156,80	6,32	9,54
36	1	0	0,946	0,989	0,944	67,60	65,52	110,08	169,17	6,41	9,69
40	1	0	0,952	0,99	0,95	70,09	68,10	121,26	186,21	6,53	9,86
44	1	0	0,956	0,991	0,955	72,38	70,52	130,96	201,05	6,63	10,00
48	1	0	0,959	0,991	0,958	74,29	72,50	140,14	215,23	6,70	10,12
52	1	0	0,962	0,992	0,961	75,70	74,03	148,98	228,78	6,78	10,22
56	0,999	0,001	0,965	0,992	0,964	78,33	76,50	158,80	243,44	6,85	10,33
60	0,999	0,001	0,967	0,993	0,966	80,33	78,60	169,84	260,67	6,93	10,45
64	0,999	0,001	0,969	0,994	0,968	81,77	80,09	178,56	273,31	6,99	10,53
68	0,999	0,001	0,971	0,994	0,97	84,55	83,06	189,68	290,68	7,05	10,63
72	0,998	0,002	0,972	0,994	0,971	85,94	84,33	197,36	301,87	7,10	10,69
76	0,998	0,002	0,974	0,994	0,973	88,05	86,45	207,26	317,15	7,15	10,78
80	0,998	0,002	0,975	0,995	0,974	88,93	87,27	214,16	327,95	7,19	10,83
84	0,997	0,003	0,976	0,995	0,976	92,23	90,54	226,46	345,76	7,25	10,92
88	0,997	0,003	0,977	0,995	0,976	93,12	91,79	234,56	358,64	7,29	10,98
92	0,996	0,004	0,978	0,995	0,977	94,87	93,32	241,44	368,68	7,32	11,03
96	0,995	0,005	0,979	0,996	0,978	97,24	95,92	254,34	388,62	7,38	11,11
100	0,994	0,006	0,98	0,996	0,979	99,80	98,54	264,33	403,62	7,42	11,17

TABLEAU. B.0.18: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,001	0,814	0,002	49,09	48,56	25,23	40,48	3,30	5,62
0,1	1	0	0,043	0,823	0,041	49,00	48,43	25,43	40,70	3,36	5,67
0,2	1	0	0,095	0,829	0,081	48,84	48,34	25,52	40,91	3,40	5,72
0,3	1	0	0,124	0,832	0,101	48,94	48,45	25,64	41,07	3,43	5,73
0,4	1	0	0,168	0,836	0,139	49,16	48,67	25,92	41,53	3,47	5,78
0,5	1	0	0,2	0,843	0,169	48,73	48,22	25,93	41,57	3,51	5,84
0,6	1	0	0,226	0,847	0,191	49,17	48,57	26,33	41,96	3,56	5,86
0,7	1	0	0,262	0,851	0,222	49,00	48,47	26,38	42,15	3,59	5,90
0,8	1	0	0,276	0,856	0,235	48,90	48,40	26,49	42,36	3,62	5,94
0,9	1	0	0,309	0,859	0,266	49,62	49,13	27,06	43,29	3,67	6,00
1	1	0	0,331	0,864	0,287	49,26	48,72	27,06	43,31	3,70	6,04
1,1	1	0	0,352	0,866	0,306	49,38	48,88	27,25	43,48	3,73	6,05
1,2	1	0	0,366	0,871	0,317	49,17	48,68	27,37	43,72	3,77	6,10
1,3	1	0	0,39	0,873	0,34	49,25	48,69	27,51	43,92	3,78	6,12
1,4	1	0	0,408	0,875	0,357	49,62	49,03	27,84	44,36	3,81	6,15
1,5	1	0	0,426	0,878	0,372	49,31	48,78	27,83	44,41	3,83	6,18
1,6	1	0	0,445	0,882	0,392	49,99	49,45	28,49	45,36	3,89	6,24
1,7	1	0	0,457	0,886	0,407	49,58	48,98	28,52	45,46	3,92	6,29
1,8	1	0	0,475	0,889	0,423	49,25	48,79	28,51	45,56	3,94	6,31
1,9	1	0	0,481	0,889	0,431	49,71	49,16	28,81	45,76	3,96	6,31
2	1	0	0,498	0,894	0,447	49,07	48,53	28,78	45,95	3,99	6,38
2,1	1	0	0,507	0,896	0,454	49,17	48,60	29,01	46,14	4,02	6,39
2,2	1	0	0,522	0,896	0,469	49,84	49,41	29,46	46,94	4,04	6,41
2,3	1	0	0,53	0,9	0,478	49,47	48,97	29,47	46,98	4,06	6,46
2,4	1	0	0,545	0,901	0,489	50,03	49,53	29,89	47,59	4,08	6,48
2,5	1	0	0,551	0,904	0,496	49,58	49,05	29,87	47,61	4,11	6,52
2,6	1	0	0,558	0,905	0,506	49,60	49,05	30,06	47,73	4,13	6,53
2,7	1	0	0,57	0,907	0,52	49,62	49,08	30,25	48,06	4,15	6,56
2,8	1	0	0,581	0,907	0,53	50,64	50,04	30,83	49,04	4,17	6,59
2,9	1	0	0,587	0,91	0,537	50,05	49,65	30,82	49,03	4,20	6,61
3	1	0	0,595	0,911	0,541	50,53	49,94	31,22	49,44	4,22	6,63
3,1	1	0	0,605	0,912	0,552	50,52	50,04	31,38	50,02	4,23	6,68
3,2	1	0	0,613	0,915	0,559	49,92	49,47	31,24	49,78	4,25	6,69
3,3	1	0	0,618	0,914	0,565	51,08	50,59	31,91	50,71	4,27	6,71
3,4	1	0	0,622	0,916	0,569	50,06	49,61	31,56	50,22	4,27	6,72
3,5	1	0	0,631	0,918	0,58	50,22	49,74	31,89	50,57	4,30	6,74
3,6	1	0	0,642	0,92	0,591	50,57	50,05	32,34	51,25	4,33	6,78
3,7	1	0	0,645	0,921	0,595	49,89	49,35	32,00	50,78	4,33	6,78
3,8	1	0	0,647	0,921	0,598	50,51	49,98	32,51	51,62	4,35	6,82
3,9	1	0	0,652	0,924	0,603	49,81	49,27	32,49	51,60	4,38	6,85
4	1	0	0,665	0,924	0,615	50,41	49,83	32,89	51,98	4,39	6,85
4,5	1	0	0,687	0,929	0,64	50,48	49,92	33,76	53,40	4,47	6,96
5	1	0	0,711	0,935	0,666	50,89	50,32	35,03	55,39	4,56	7,08
5,5	1	0	0,73	0,939	0,684	51,27	50,78	36,07	57,06	4,63	7,17
6	1	0	0,746	0,941	0,703	51,16	50,75	36,73	58,14	4,68	7,24
6,5	1	0	0,764	0,944	0,723	51,51	51,00	37,77	59,65	4,74	7,32
7	1	0	0,774	0,947	0,734	51,90	51,36	38,95	61,33	4,80	7,40
7,5	1	0	0,782	0,95	0,744	51,76	51,20	39,64	62,41	4,85	7,46
8	1	0	0,799	0,953	0,761	52,05	51,51	40,83	64,22	4,91	7,54
12	1	0	0,855	0,966	0,826	53,58	53,22	48,74	76,59	5,25	8,02
16	1	0	0,888	0,972	0,863	55,49	55,15	56,35	88,22	5,49	8,35
20	1	0	0,909	0,978	0,889	56,96	56,58	64,27	100,30	5,70	8,65
24	1	0	0,922	0,981	0,904	59,01	58,73	72,42	112,72	5,87	8,89
28	1	0	0,933	0,984	0,918	60,28	59,94	80,81	125,30	6,02	9,11
32	1	0	0,94	0,985	0,926	61,74	61,41	87,53	135,69	6,13	9,27
36	1	0	0,946	0,987	0,934	63,69	63,50	96,32	149,27	6,25	9,45
40	1	0	0,951	0,988	0,94	64,92	64,69	103,77	160,53	6,35	9,59
44	1	0	0,956	0,989	0,946	66,83	66,57	111,60	172,41	6,44	9,72
48	1	0	0,959	0,99	0,949	68,06	67,90	118,46	183,05	6,51	9,83
52	1	0	0,962	0,991	0,953	69,69	69,49	127,11	196,47	6,60	9,96
56	1	0	0,965	0,991	0,957	71,51	71,49	135,78	210,01	6,68	10,07
60	1	0	0,967	0,992	0,959	73,06	72,94	141,78	219,03	6,73	10,15
64	1	0	0,969	0,992	0,962	75,09	75,12	151,50	233,72	6,80	10,26
68	1	0	0,971	0,993	0,964	77,12	77,10	160,62	247,32	6,87	10,36
72	0,999	0,001	0,972	0,993	0,965	77,61	77,54	164,49	253,05	6,90	10,40
76	0,999	0,001	0,974	0,993	0,967	79,82	79,83	173,33	266,78	6,96	10,48
80	0,999	0,001	0,975	0,994	0,969	82,06	82,21	184,02	282,87	7,02	10,58
84	0,999	0,001	0,976	0,994	0,97	83,48	83,63	190,91	294,09	7,07	10,65
88	0,998	0,002	0,978	0,994	0,972	84,57	84,73	198,95	306,25	7,11	10,72
92	0,999	0,001	0,978	0,995	0,973	86,38	86,58	206,98	318,53	7,16	10,78
96	0,998	0,002	0,979	0,995	0,974	87,48	87,59	212,99	326,50	7,19	10,83
100	0,998	0,002	0,98	0,995	0,975	88,86	89,27	221,25	340,43	7,23	10,90

TABLEAU. B.0.19: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(2;1)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	1	0	0,001	0,85	0,425	148,46	51,88	79,85	64,48	4,68	7,54
0,1	1	0	0,05	0,859	0,458	151,86	51,77	82,68	66,86	4,78	7,66
0,2	1	0	0,08	0,866	0,476	154,73	51,90	85,46	69,14	4,86	7,76
0,3	1	0	0,134	0,872	0,516	161,52	52,92	89,99	72,86	4,96	7,89
0,4	1	0	0,174	0,877	0,543	164,47	53,45	92,72	75,62	5,03	7,98
0,5	1	0	0,197	0,883	0,556	167,67	53,15	95,58	77,66	5,10	8,06
0,6	1	0	0,233	0,888	0,579	169,04	53,71	97,59	80,42	5,16	8,14
0,7	1	0	0,256	0,891	0,595	173,17	53,61	100,86	82,53	5,22	8,21
0,8	1	0	0,28	0,894	0,611	177,93	54,70	104,54	85,57	5,28	8,29
0,9	1	0,001	0,313	0,899	0,632	180,26	55,17	107,11	88,70	5,34	8,37
1	1	0	0,336	0,903	0,645	183,99	55,55	110,71	92,35	5,41	8,46
1,1	1	0	0,35	0,906	0,652	184,60	56,21	112,19	94,69	5,45	8,51
1,2	1	0	0,374	0,909	0,667	186,32	56,03	114,52	96,97	5,50	8,57
1,3	1	0	0,395	0,912	0,681	188,69	56,12	117,04	99,31	5,55	8,63
1,4	1	0	0,411	0,914	0,688	190,89	57,32	119,68	102,73	5,59	8,69
1,5	1	0	0,421	0,915	0,696	193,91	57,21	121,94	104,10	5,62	8,72
1,6	1	0	0,438	0,917	0,708	197,13	57,92	124,86	107,07	5,66	8,78
1,7	1	0	0,455	0,922	0,714	198,19	58,37	127,78	111,19	5,73	8,86
1,8	1	0	0,475	0,925	0,726	197,81	58,35	129,14	113,78	5,76	8,92
1,9	1	0	0,482	0,925	0,731	199,12	57,95	130,43	114,52	5,78	8,94
2	1	0	0,497	0,928	0,738	200,94	58,88	133,29	118,03	5,83	8,99
2,1	1	0	0,503	0,929	0,743	203,11	59,05	135,29	120,42	5,85	9,04
2,2	1	0	0,523	0,931	0,754	203,49	59,59	137,62	124,12	5,89	9,09
2,3	1	0	0,531	0,932	0,759	207,61	60,21	141,09	126,79	5,93	9,14
2,4	1	0	0,539	0,934	0,762	207,72	60,76	142,32	129,14	5,95	9,17
2,5	1	0	0,55	0,935	0,769	207,38	60,85	143,29	130,93	5,97	9,20
2,6	1	0	0,559	0,937	0,774	210,43	61,08	146,64	133,99	6,01	9,24
2,7	1	0	0,571	0,938	0,781	211,07	61,83	148,42	136,91	6,04	9,28
2,8	1	0	0,584	0,94	0,789	211,44	61,54	150,21	138,91	6,07	9,32
2,9	1	0	0,591	0,941	0,793	215,22	62,83	153,74	143,43	6,10	9,37
3	1	0	0,597	0,942	0,796	217,88	62,87	156,83	146,26	6,13	9,41
3,1	1	0	0,603	0,943	0,799	215,27	63,03	156,50	147,08	6,14	9,42
3,2	1	0	0,614	0,944	0,806	219,10	63,41	160,47	151,38	6,18	9,48
3,3	1	0	0,614	0,945	0,804	217,77	64,00	160,47	152,58	6,19	9,49
3,4	1	0	0,622	0,946	0,809	219,58	64,30	162,99	155,77	6,22	9,53
3,5	1	0	0,633	0,947	0,815	218,73	64,39	163,91	157,78	6,24	9,56
3,6	1	0	0,642	0,949	0,819	219,85	65,19	166,78	162,21	6,27	9,61
3,7	1	0	0,645	0,95	0,82	220,54	65,04	168,42	163,92	6,29	9,63
3,8	1	0	0,654	0,951	0,826	223,57	66,08	172,08	168,27	6,33	9,67
3,9	1	0	0,653	0,95	0,826	225,11	66,03	172,74	168,14	6,32	9,67
4	1	0	0,663	0,952	0,831	224,45	66,79	175,13	172,82	6,36	9,72
4,5	1	0	0,686	0,955	0,844	230,69	67,73	184,85	184,32	6,45	9,84
5	1	0	0,707	0,958	0,855	234,23	70,52	194,31	198,20	6,54	9,97
5,5	1	0	0,727	0,961	0,865	237,20	71,91	203,00	210,74	6,62	10,08
6	1	0	0,747	0,964	0,876	241,48	73,93	214,69	227,91	6,71	10,22
6,5	1	0	0,761	0,966	0,882	244,71	76,27	223,99	240,47	6,78	10,31
7	1	0	0,776	0,968	0,89	246,65	77,82	232,55	253,28	6,85	10,40
7,5	1	0	0,789	0,97	0,896	248,01	79,10	241,10	266,48	6,91	10,49
8	1	0	0,798	0,972	0,901	250,50	81,06	249,70	279,64	6,97	10,57
12	1	0	0,855	0,98	0,93	272,56	95,68	324,79	389,79	7,35	11,12
16	1	0	0,888	0,984	0,946	289,60	110,34	394,14	493,83	7,61	11,50
20	1	0	0,907	0,987	0,956	309,37	125,93	468,65	603,77	7,83	11,82
24	1	0,001	0,922	0,989	0,963	322,98	141,87	542,15	717,20	8,02	12,09
28	1	0,002	0,932	0,99	0,968	337,49	155,81	612,39	820,10	8,16	12,30
32	1	0,003	0,941	0,992	0,972	350,35	171,32	684,78	932,23	8,29	12,50
36	1	0,004	0,946	0,992	0,974	365,67	184,87	753,43	1030,71	8,40	12,65
40	0,99	0,006	0,951	0,993	0,977	379,70	200,70	830,49	1145,40	8,51	12,82
44	0,99	0,009	0,956	0,994	0,979	394,35	216,76	911,95	1263,51	8,61	12,97
48	0,99	0,01	0,959	0,994	0,981	405,76	230,49	976,33	1359,78	8,69	13,08
52	0,99	0,014	0,962	0,995	0,982	417,82	244,85	1050,13	1465,23	8,77	13,20
56	0,98	0,018	0,965	0,995	0,983	429,98	259,11	1125,65	1573,14	8,84	13,31
60	0,98	0,02	0,967	0,995	0,984	444,53	274,72	1201,05	1684,14	8,91	13,41
64	0,97	0,025	0,97	0,996	0,986	454,47	290,79	1285,80	1803,32	8,98	13,51
68	0,97	0,027	0,97	0,996	0,986	468,55	302,92	1343,79	1888,95	9,02	13,58
72	0,97	0,032	0,973	0,996	0,987	483,94	323,54	1449,85	2036,58	9,10	13,70
76	0,96	0,038	0,974	0,996	0,988	490,28	334,29	1509,02	2115,51	9,14	13,76
80	0,96	0,042	0,975	0,997	0,988	502,20	348,44	1580,75	2221,51	9,19	13,83
84	0,95	0,046	0,976	0,997	0,989	516,01	365,08	1664,39	2337,85	9,24	13,91
88	0,95	0,049	0,977	0,997	0,989	525,14	376,54	1728,03	2424,97	9,28	13,96
92	0,95	0,054	0,978	0,997	0,99	536,88	393,52	1808,99	2541,75	9,33	14,03
96	0,94	0,061	0,979	0,997	0,99	548,35	409,86	1897,05	2663,58	9,38	14,11
100	0,94	0,064	0,98	0,997	0,99	561,20	422,13	1962,22	2754,22	9,41	14,16



TABLEAU. B.0.20: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(2; 0,75)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0	0,887	0,329	104,76	51,37	60,33	61,47	4,67	7,41
0,1	1	0	0,045	0,894	0,363	108,83	52,23	63,74	64,56	4,78	7,54
0,2	1	0	0,091	0,899	0,399	109,50	52,17	65,12	66,54	4,85	7,64
0,3	1	0	0,131	0,903	0,432	111,98	52,16	67,29	67,98	4,91	7,70
0,4	1	0	0,166	0,907	0,459	114,67	51,84	70,02	70,41	4,99	7,81
0,5	1	0	0,2	0,91	0,486	117,84	52,76	72,62	72,99	5,05	7,89
0,6	1	0	0,226	0,912	0,507	119,81	53,05	74,35	74,83	5,10	7,96
0,7	1	0	0,253	0,916	0,526	122,31	53,35	77,10	77,60	5,17	8,05
0,8	1	0	0,285	0,919	0,55	124,33	53,64	79,23	79,88	5,22	8,12
0,9	1	0	0,31	0,923	0,565	125,26	53,94	81,21	82,30	5,28	8,20
1	1	0	0,325	0,923	0,579	127,97	54,43	83,18	83,98	5,31	8,24
1,1	1	0	0,353	0,928	0,596	127,95	54,54	84,93	86,82	5,38	8,33
1,2	1	0	0,366	0,93	0,603	129,67	55,54	87,10	89,67	5,43	8,39
1,3	1	0	0,393	0,933	0,622	129,27	55,22	87,98	90,80	5,46	8,43
1,4	1	0	0,405	0,934	0,631	131,94	55,72	90,62	93,56	5,51	8,49
1,5	1	0	0,423	0,936	0,643	133,31	56,08	92,40	95,74	5,54	8,55
1,6	1	0	0,439	0,938	0,653	133,75	56,34	94,07	98,41	5,58	8,60
1,7	1	0	0,458	0,94	0,668	136,20	56,38	96,71	100,88	5,63	8,67
1,8	1	0	0,467	0,941	0,673	138,00	58,10	98,46	103,34	5,65	8,70
1,9	1	0	0,482	0,943	0,683	137,14	57,12	99,24	104,54	5,69	8,74
2	1	0	0,499	0,944	0,695	137,93	57,48	100,96	106,84	5,72	8,78
2,1	1	0	0,506	0,946	0,699	138,52	57,89	102,40	109,17	5,75	8,83
2,2	1	0	0,519	0,947	0,708	139,48	57,93	104,05	110,81	5,78	8,86
2,3	1	0	0,532	0,948	0,716	140,31	58,45	106,26	114,21	5,82	8,92
2,4	1	0	0,538	0,948	0,721	143,07	58,91	108,23	115,84	5,84	8,95
2,5	1	0	0,552	0,951	0,729	142,54	59,11	109,98	118,89	5,88	9,01
2,6	1	0	0,565	0,953	0,737	143,18	59,58	112,03	121,81	5,92	9,05
2,7	1	0	0,571	0,952	0,742	144,72	59,86	113,37	123,11	5,93	9,07
2,8	1	0	0,582	0,955	0,748	144,94	59,90	115,56	126,27	5,97	9,13
2,9	1	0	0,592	0,955	0,754	143,93	60,36	115,33	127,01	5,98	9,14
3	1	0	0,597	0,956	0,758	145,58	60,19	117,55	129,06	6,00	9,17
3,1	1	0	0,6	0,956	0,759	146,06	60,59	118,80	131,01	6,02	9,20
3,2	1	0	0,616	0,957	0,772	148,77	61,14	122,21	134,92	6,06	9,26
3,3	1	0	0,618	0,958	0,772	149,20	61,74	123,13	136,27	6,08	9,27
3,4	1	0	0,626	0,959	0,777	148,86	61,73	124,31	138,71	6,10	9,31
3,5	1	0	0,635	0,96	0,782	149,26	62,03	126,37	141,65	6,13	9,35
3,6	1	0	0,636	0,96	0,784	152,15	62,51	127,97	142,59	6,14	9,36
3,7	1	0	0,639	0,96	0,786	152,90	62,60	129,62	144,60	6,16	9,39
3,8	1	0	0,654	0,962	0,794	150,48	62,80	130,53	147,75	6,19	9,43
3,9	1	0	0,654	0,962	0,794	154,08	63,70	133,79	151,02	6,22	9,47
4	1	0	0,667	0,963	0,803	152,95	63,43	134,71	152,95	6,24	9,50
4,5	1	0	0,685	0,966	0,813	155,85	65,57	141,84	163,18	6,32	9,61
5	1	0	0,707	0,968	0,828	158,81	66,51	149,19	173,47	6,40	9,73
5,5	1	0	0,73	0,971	0,841	160,36	67,69	157,56	186,06	6,49	9,86
6	1	0	0,745	0,972	0,851	164,91	70,01	166,07	197,55	6,57	9,97
6,5	1	0	0,761	0,974	0,861	165,55	71,40	172,57	207,77	6,63	10,05
7	1	0	0,773	0,975	0,868	168,11	72,93	180,72	219,29	6,70	10,15
7,5	1	0	0,785	0,977	0,875	171,28	74,59	189,14	232,08	6,76	10,25
8	1	0	0,797	0,978	0,882	173,59	77,08	198,42	246,17	6,83	10,35
12	1	0	0,855	0,984	0,917	186,87	88,02	255,88	332,38	7,19	10,86
16	1	0	0,887	0,988	0,935	201,93	100,67	316,71	423,00	7,45	11,25
20	1	0	0,908	0,99	0,947	215,49	113,29	377,77	516,15	7,67	11,57
24	1	0	0,924	0,992	0,956	226,71	127,07	438,12	610,06	7,85	11,84
28	1	0	0,931	0,993	0,961	241,02	138,49	493,56	692,75	7,99	12,03
32	1	0	0,94	0,994	0,966	252,66	151,33	554,30	785,80	8,12	12,23
36	1	0,001	0,946	0,994	0,969	265,73	163,65	612,99	873,78	8,23	12,40
40	1	0,001	0,951	0,995	0,973	278,53	176,21	674,69	968,33	8,34	12,56
44	1	0,002	0,956	0,995	0,975	288,31	187,33	728,28	1050,05	8,42	12,68
48	1	0,003	0,959	0,996	0,977	302,38	200,88	793,40	1147,41	8,52	12,82
52	1	0,003	0,962	0,996	0,978	310,71	211,20	845,54	1227,02	8,59	12,93
56	0,99	0,005	0,964	0,996	0,98	327,64	226,41	917,98	1333,01	8,67	13,05
60	0,99	0,006	0,967	0,996	0,982	339,11	240,48	983,30	1433,52	8,75	13,16
64	0,99	0,008	0,969	0,997	0,983	347,69	250,28	1036,64	1510,39	8,80	13,24
68	0,99	0,01	0,971	0,997	0,984	359,16	262,31	1091,80	1590,01	8,85	13,32
72	0,99	0,011	0,972	0,997	0,984	375,23	277,92	1170,50	1705,54	8,93	13,43
76	0,99	0,014	0,974	0,997	0,985	383,24	289,78	1226,04	1792,41	8,98	13,50
80	0,98	0,018	0,976	0,997	0,986	395,82	301,96	1296,98	1886,74	9,03	13,58
84	0,98	0,019	0,976	0,997	0,987	405,81	313,30	1345,48	1961,56	9,07	13,64
88	0,98	0,021	0,977	0,998	0,987	419,46	327,46	1418,41	2065,59	9,12	13,72
92	0,98	0,024	0,978	0,998	0,988	426,80	338,73	1471,41	2148,20	9,16	13,78
96	0,97	0,028	0,98	0,998	0,988	442,23	354,14	1551,19	2257,88	9,21	13,86
100	0,97	0,028	0,98	0,998	0,989	449,21	361,37	1588,52	2313,28	9,24	13,89

TABLEAU. B.O.21: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,5)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,001	0,917	0,225	74,66	50,48	47,23	59,44	4,69	7,32
0,1	1	0	0,043	0,919	0,265	76,57	51,52	48,89	61,61	4,74	7,41
0,2	1	0	0,093	0,923	0,309	77,88	51,59	50,59	63,34	4,82	7,50
0,3	1	0	0,128	0,928	0,338	78,63	51,46	52,16	65,20	4,89	7,59
0,4	1	0	0,163	0,93	0,367	79,82	51,83	53,57	66,71	4,94	7,66
0,5	1	0	0,199	0,932	0,399	81,54	52,38	55,45	68,97	4,99	7,73
0,6	1	0	0,233	0,935	0,427	83,13	52,99	57,31	71,28	5,05	7,82
0,7	1	0	0,258	0,939	0,446	82,56	52,34	58,30	72,70	5,12	7,90
0,8	1	0	0,279	0,941	0,463	84,20	53,27	60,05	75,07	5,16	7,96
0,9	1	0	0,306	0,943	0,485	84,83	53,27	61,42	76,66	5,21	8,02
1	1	0	0,325	0,944	0,503	86,31	53,39	62,97	78,25	5,24	8,07
1,1	1	0	0,35	0,946	0,521	86,34	53,74	64,15	80,24	5,29	8,14
1,2	1	0	0,367	0,948	0,535	86,88	53,51	65,26	81,54	5,32	8,19
1,3	1	0	0,393	0,95	0,556	88,04	54,01	67,36	84,07	5,38	8,25
1,4	1	0	0,409	0,951	0,568	88,20	54,30	68,20	85,54	5,40	8,29
1,5	1	0	0,435	0,953	0,587	89,68	55,32	70,55	89,05	5,46	8,38
1,6	1	0	0,434	0,953	0,587	89,64	54,95	70,84	89,15	5,47	8,38
1,7	1	0	0,455	0,956	0,601	89,11	55,23	72,12	91,65	5,52	8,45
1,8	1	0	0,466	0,957	0,613	91,47	55,43	74,38	93,84	5,56	8,51
1,9	1	0	0,481	0,958	0,623	91,54	55,94	75,43	95,36	5,59	8,54
2	1	0	0,498	0,959	0,635	91,52	56,47	76,37	97,53	5,61	8,58
2,1	1	0	0,505	0,96	0,642	93,18	56,58	78,29	99,25	5,65	8,62
2,2	1	0	0,522	0,961	0,656	92,94	56,37	79,30	100,82	5,67	8,66
2,3	1	0	0,538	0,962	0,667	94,18	57,58	81,12	103,70	5,71	8,71
2,4	1	0	0,541	0,962	0,671	94,20	57,08	81,74	104,33	5,72	8,73
2,5	1	0	0,552	0,963	0,68	95,64	57,58	83,53	106,43	5,75	8,78
2,6	1	0	0,562	0,964	0,686	95,08	57,78	84,56	108,64	5,78	8,82
2,7	1	0	0,568	0,964	0,692	96,07	57,68	85,61	109,19	5,80	8,83
2,8	1	0	0,582	0,965	0,702	97,26	58,42	87,85	112,31	5,84	8,89
2,9	1	0	0,594	0,967	0,709	96,64	58,79	89,30	115,38	5,87	8,94
3	1	0	0,597	0,967	0,712	97,45	59,09	90,13	116,41	5,88	8,96
3,1	1	0	0,603	0,968	0,717	97,55	58,82	91,29	117,77	5,90	8,99
3,2	1	0	0,612	0,969	0,722	97,11	59,07	92,63	120,33	5,94	9,03
3,3	1	0	0,617	0,968	0,728	98,68	59,47	93,48	120,92	5,94	9,04
3,4	1	0	0,627	0,97	0,734	98,56	60,14	94,93	124,04	5,97	9,09
3,5	1	0	0,627	0,97	0,735	99,80	59,88	96,59	125,17	5,99	9,11
3,6	1	0	0,642	0,97	0,747	100,68	60,78	98,34	128,02	6,02	9,15
3,7	1	0	0,644	0,971	0,747	99,95	60,32	99,28	129,54	6,04	9,18
3,8	1	0	0,648	0,971	0,75	100,97	61,09	100,48	131,02	6,05	9,20
3,9	1	0	0,658	0,972	0,758	100,55	60,91	101,29	132,45	6,07	9,22
4	1	0	0,659	0,972	0,759	102,28	61,76	102,51	133,68	6,08	9,23
4,5	1	0	0,692	0,975	0,782	102,18	62,46	109,38	144,85	6,19	9,39
5	1	0	0,71	0,977	0,796	104,68	63,63	115,52	153,37	6,27	9,50
5,5	1	0	0,727	0,978	0,807	105,80	64,96	120,84	161,63	6,34	9,60
6	1	0	0,744	0,979	0,819	108,33	66,85	128,12	172,22	6,42	9,71
6,5	1	0	0,764	0,981	0,836	110,38	67,82	135,14	182,86	6,49	9,83
7	1	0	0,777	0,982	0,844	111,04	68,95	140,64	191,17	6,55	9,91
7,5	1	0	0,784	0,983	0,849	113,25	70,99	146,59	200,05	6,60	9,98
8	1	0	0,795	0,983	0,857	115,32	71,83	152,96	209,53	6,65	10,07
12	1	0	0,854	0,988	0,899	125,68	81,66	201,26	282,45	7,01	10,58
16	1	0	0,887	0,991	0,922	136,07	92,15	249,67	356,61	7,27	10,97
20	1	0	0,907	0,992	0,936	148,01	102,63	300,46	433,11	7,49	11,29
24	1	0	0,922	0,994	0,947	157,74	112,61	349,29	508,00	7,66	11,54
28	1	0	0,931	0,995	0,953	168,14	123,07	397,31	581,82	7,81	11,76
32	1	0	0,94	0,995	0,959	178,40	133,40	447,48	658,04	7,94	11,95
36	1	0	0,947	0,996	0,963	187,10	142,97	494,95	730,60	8,05	12,12
40	1	0	0,952	0,996	0,967	199,38	154,78	549,43	813,95	8,16	12,29
44	1	0	0,956	0,997	0,97	209,20	165,35	600,64	891,97	8,26	12,43
48	1	0,001	0,959	0,997	0,972	218,60	173,75	640,39	951,29	8,32	12,53
52	1	0,001	0,962	0,997	0,974	231,60	186,32	699,84	1041,68	8,42	12,67
56	1	0,001	0,965	0,997	0,976	240,29	196,07	745,21	1112,91	8,49	12,77
60	1	0,002	0,967	0,997	0,978	248,61	205,37	790,25	1181,99	8,55	12,87
64	1	0,002	0,97	0,998	0,979	260,20	216,65	848,59	1266,28	8,62	12,97
68	1	0,003	0,971	0,998	0,98	270,93	226,65	895,22	1337,70	8,68	13,06
72	1	0,004	0,973	0,998	0,981	279,84	237,12	941,11	1408,91	8,73	13,14
76	0,99	0,005	0,974	0,998	0,982	290,91	248,17	997,33	1491,21	8,79	13,22
80	0,99	0,005	0,975	0,998	0,983	300,88	258,33	1044,25	1562,20	8,84	13,29
84	0,99	0,007	0,977	0,998	0,984	309,09	268,55	1096,14	1642,02	8,89	13,37
88	0,99	0,008	0,977	0,998	0,985	320,88	279,87	1149,31	1719,23	8,94	13,44
92	0,99	0,009	0,978	0,998	0,985	328,90	288,30	1191,81	1784,85	8,97	13,50
96	0,99	0,01	0,979	0,998	0,986	337,47	296,66	1236,84	1844,19	9,01	13,55
100	0,99	0,012	0,98	0,998	0,986	347,58	308,83	1289,82	1931,38	9,05	13,62

TABLEAU. B.0.22: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,005	0,935	0,121	57,03	50,55	39,41	58,34	4,68	7,26
0,1	1	0	0,04	0,938	0,154	58,05	51,27	40,69	60,12	4,74	7,33
0,2	1	0	0,092	0,94	0,201	58,29	51,39	41,53	61,51	4,79	7,40
0,3	1	0	0,133	0,944	0,239	58,33	51,03	42,67	62,85	4,86	7,49
0,4	1	0	0,164	0,946	0,267	59,15	51,79	43,90	64,79	4,91	7,56
0,5	1	0	0,204	0,949	0,304	59,17	51,51	45,00	66,15	4,97	7,64
0,6	1	0	0,227	0,951	0,324	59,26	51,60	45,70	67,31	5,00	7,69
0,7	1	0	0,253	0,952	0,35	60,93	52,77	47,26	69,40	5,04	7,75
0,8	1	0	0,286	0,954	0,379	60,83	52,64	48,36	70,98	5,10	7,82
0,9	1	0	0,314	0,956	0,405	61,40	52,77	49,52	72,54	5,14	7,88
1	1	0	0,331	0,958	0,419	60,98	52,62	50,25	73,98	5,18	7,94
1,1	1	0	0,346	0,959	0,432	61,16	52,48	51,06	74,80	5,21	7,97
1,2	1	0	0,369	0,96	0,452	61,92	53,24	52,37	76,79	5,25	8,03
1,3	1	0	0,393	0,962	0,475	62,17	53,37	53,50	78,45	5,29	8,08
1,4	1	0	0,407	0,962	0,487	62,94	54,09	54,64	80,28	5,32	8,13
1,5	1	0	0,423	0,963	0,502	63,51	54,34	55,65	81,71	5,35	8,17
1,6	1	0	0,44	0,965	0,515	62,60	53,80	56,40	83,22	5,39	8,23
1,7	1	0	0,457	0,965	0,531	62,98	54,02	56,92	83,66	5,40	8,24
1,8	1	0	0,472	0,966	0,544	63,39	54,34	57,96	85,21	5,43	8,28
1,9	1	0	0,486	0,968	0,558	64,07	54,45	59,98	87,69	5,49	8,35
2	1	0	0,504	0,968	0,573	64,38	54,90	60,55	88,89	5,50	8,38
2,1	1	0	0,507	0,969	0,575	64,32	54,94	61,53	90,57	5,53	8,43
2,2	1	0	0,516	0,969	0,584	64,98	55,46	62,31	91,58	5,55	8,44
2,3	1	0	0,53	0,97	0,596	65,42	55,77	63,46	93,26	5,57	8,48
2,4	1	0	0,543	0,971	0,606	66,01	56,42	65,01	95,73	5,61	8,54
2,5	1	0	0,554	0,972	0,616	65,31	55,87	65,26	96,07	5,63	8,56
2,6	1	0	0,56	0,972	0,623	65,94	56,13	66,54	97,85	5,65	8,59
2,7	1	0	0,57	0,973	0,631	66,19	56,40	67,53	99,53	5,68	8,63
2,8	1	0	0,576	0,973	0,635	65,97	56,28	68,25	100,54	5,70	8,66
2,9	1	0	0,588	0,974	0,647	66,36	56,57	69,15	101,86	5,72	8,69
3	1	0	0,598	0,974	0,656	66,93	56,98	70,38	103,32	5,74	8,71
3,1	1	0	0,601	0,975	0,658	67,36	57,48	71,68	105,69	5,77	8,76
3,2	1	0	0,615	0,976	0,67	67,62	57,82	72,92	107,49	5,79	8,79
3,3	1	0	0,612	0,976	0,668	66,95	56,88	72,74	107,19	5,80	8,80
3,4	1	0	0,625	0,976	0,679	67,87	57,66	74,34	109,54	5,82	8,84
3,5	1	0	0,637	0,977	0,689	67,97	58,12	75,72	112,02	5,85	8,88
3,6	1	0	0,643	0,977	0,696	68,62	58,23	77,12	113,79	5,88	8,92
3,7	1	0	0,638	0,977	0,69	68,97	58,83	77,45	114,05	5,88	8,91
3,8	1	0	0,646	0,978	0,697	69,05	58,90	78,89	116,30	5,91	8,96
3,9	1	0	0,654	0,978	0,705	68,89	58,44	79,11	116,51	5,92	8,97
4	1	0	0,663	0,979	0,712	69,12	59,00	80,91	119,84	5,95	9,02
4,5	1	0	0,688	0,98	0,734	71,02	60,48	85,81	126,69	6,03	9,13
5	1	0	0,706	0,982	0,749	71,33	61,01	90,03	133,44	6,10	9,24
5,5	1	0	0,731	0,983	0,77	72,26	62,02	95,78	142,38	6,18	9,36
6	1	0	0,749	0,984	0,786	73,44	62,84	100,42	149,16	6,25	9,45
6,5	1	0	0,761	0,985	0,797	74,71	64,21	105,53	157,24	6,31	9,55
7	1	0	0,774	0,986	0,808	76,33	65,50	110,09	163,61	6,37	9,62
7,5	1	0	0,788	0,987	0,82	77,42	66,69	116,42	173,21	6,44	9,73
8	1	0	0,796	0,987	0,827	77,73	66,98	120,46	179,69	6,49	9,80
12	1	0	0,856	0,991	0,878	86,60	75,55	162,11	243,11	6,85	10,33
16	1	0	0,888	0,993	0,905	95,06	84,23	200,23	301,35	7,09	10,69
20	1	0	0,907	0,994	0,921	102,72	92,03	238,57	360,88	7,29	10,99
24	1	0	0,922	0,995	0,934	112,49	100,91	281,21	424,86	7,47	11,26
28	1	0	0,932	0,996	0,943	120,64	109,49	320,44	484,33	7,62	11,47
32	1	0	0,941	0,996	0,95	128,46	118,14	360,26	546,60	7,75	11,66
36	1	0	0,946	0,997	0,955	137,34	126,33	399,97	605,51	7,86	11,82
40	1	0	0,952	0,997	0,96	145,61	135,09	443,48	673,19	7,97	11,99
44	1	0	0,956	0,997	0,963	154,29	143,92	482,65	733,44	8,06	12,13
48	1	0	0,96	0,997	0,966	160,09	150,50	515,27	784,30	8,13	12,23
52	1	0	0,962	0,998	0,968	169,16	158,97	558,60	848,27	8,21	12,35
56	1	0	0,965	0,998	0,971	177,23	167,12	597,78	907,51	8,28	12,46
60	1	0	0,967	0,998	0,972	186,60	176,87	638,01	971,00	8,35	12,56
64	1	0	0,969	0,998	0,974	194,72	184,61	677,69	1028,21	8,41	12,65
68	0,999	0,001	0,971	0,998	0,976	203,25	193,90	718,45	1094,75	8,47	12,75
72	0,999	0,001	0,973	0,998	0,977	212,26	202,97	763,58	1163,22	8,54	12,84
76	0,999	0,001	0,974	0,998	0,978	219,06	210,08	798,79	1213,59	8,58	12,91
80	0,998	0,002	0,975	0,998	0,979	226,06	216,98	832,33	1265,73	8,62	12,97
84	0,998	0,002	0,976	0,999	0,98	234,00	225,42	871,00	1325,19	8,67	13,04
88	0,998	0,002	0,977	0,999	0,981	243,28	234,79	917,57	1394,51	8,72	13,12
92	0,997	0,003	0,978	0,999	0,982	250,87	242,50	952,79	1449,89	8,76	13,18
96	0,996	0,004	0,98	0,999	0,983	259,85	251,91	999,52	1520,09	8,81	13,25
100	0,996	0,004	0,98	0,999	0,983	266,71	258,88	1032,71	1568,68	8,84	13,30

TABLEAU. B.0.23: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0	0,941	0,044	52,53	51,13	37,39	58,54	4,69	7,25
0,1	1	0	0,047	0,944	0,092	52,65	51,12	38,31	59,88	4,74	7,33
0,2	1	0	0,088	0,946	0,129	52,26	50,73	38,85	60,61	4,79	7,38
0,3	1	0	0,129	0,948	0,166	53,15	51,64	39,90	62,31	4,83	7,44
0,4	1	0	0,166	0,95	0,203	53,07	51,48	40,54	63,19	4,87	7,50
0,5	1	0	0,195	0,952	0,231	53,09	51,45	41,38	64,42	4,92	7,56
0,6	1	0	0,239	0,954	0,27	53,70	52,25	42,53	66,30	4,97	7,62
0,7	1	0	0,257	0,956	0,291	54,14	52,25	43,80	67,80	5,02	7,69
0,8	1	0	0,287	0,958	0,318	53,84	52,20	44,55	69,26	5,06	7,76
0,9	1	0	0,303	0,959	0,33	54,51	53,00	45,62	70,94	5,10	7,81
1	1	0	0,328	0,96	0,358	54,58	52,76	46,27	71,62	5,13	7,84
1,1	1	0	0,354	0,962	0,381	54,19	52,42	46,61	72,32	5,15	7,88
1,2	1	0	0,372	0,963	0,398	54,37	52,67	47,59	73,87	5,19	7,93
1,3	1	0	0,397	0,964	0,422	54,79	53,05	48,79	75,81	5,24	8,00
1,4	1	0	0,407	0,965	0,433	54,96	53,19	49,45	76,79	5,26	8,03
1,5	1	0	0,426	0,966	0,451	54,86	53,06	50,33	78,03	5,29	8,07
1,6	1	0	0,441	0,967	0,463	55,75	53,92	51,39	79,63	5,32	8,11
1,7	1	0	0,458	0,968	0,479	56,11	54,33	52,43	81,15	5,35	8,15
1,8	1	0	0,469	0,969	0,491	55,57	53,68	52,70	81,63	5,37	8,18
1,9	1	0	0,482	0,97	0,502	56,10	54,34	54,18	83,96	5,41	8,24
2	1	0	0,496	0,97	0,517	56,92	54,95	54,94	85,02	5,42	8,26
2,1	1	0	0,51	0,971	0,53	55,79	53,98	55,40	85,76	5,46	8,31
2,2	1	0	0,514	0,971	0,534	57,07	55,10	56,68	87,76	5,48	8,34
2,3	1	0	0,533	0,972	0,554	57,12	55,08	57,75	89,16	5,51	8,38
2,4	1	0	0,538	0,973	0,556	56,78	54,93	57,89	89,30	5,52	8,39
2,5	1	0	0,548	0,973	0,567	57,77	55,93	59,09	91,60	5,54	8,44
2,6	1	0	0,56	0,974	0,579	57,41	55,42	60,02	92,49	5,58	8,47
2,7	1	0	0,572	0,974	0,59	57,74	55,81	61,05	94,15	5,60	8,50
2,8	1	0	0,583	0,975	0,6	56,89	55,05	61,35	95,03	5,62	8,54
2,9	1	0	0,592	0,976	0,609	58,16	56,18	62,88	96,86	5,65	8,57
3	1	0	0,594	0,976	0,609	58,05	56,33	63,36	97,97	5,66	8,59
3,1	1	0	0,601	0,976	0,617	58,71	56,73	64,30	99,30	5,68	8,62
3,2	1	0	0,607	0,977	0,623	58,14	56,24	64,65	99,54	5,69	8,63
3,3	1	0	0,618	0,978	0,633	58,17	56,33	65,64	101,33	5,72	8,68
3,4	1	0	0,624	0,978	0,638	58,71	56,83	67,37	103,70	5,75	8,72
3,5	1	0	0,634	0,978	0,648	59,25	57,20	67,97	104,78	5,76	8,74
3,6	1	0	0,639	0,979	0,653	59,31	57,36	68,97	106,12	5,79	8,77
3,7	1	0	0,641	0,979	0,656	59,34	57,33	69,14	106,59	5,79	8,78
3,8	1	0	0,648	0,979	0,662	59,49	57,56	70,06	108,30	5,81	8,81
3,9	1	0	0,656	0,98	0,67	59,14	57,21	70,98	109,57	5,83	8,84
4	1	0	0,661	0,98	0,675	59,68	57,79	71,68	110,74	5,84	8,86
4,5	1	0	0,689	0,982	0,702	60,65	58,58	76,19	117,17	5,93	8,98
5	1	0	0,712	0,983	0,723	61,66	59,76	80,81	124,53	6,01	9,10
5,5	1	0	0,729	0,984	0,74	62,88	60,89	85,61	131,73	6,09	9,21
6	1	0	0,745	0,985	0,755	63,99	61,92	89,43	137,29	6,14	9,29
6,5	1	0	0,762	0,986	0,77	64,84	62,89	94,26	144,93	6,21	9,39
7	1	0	0,775	0,986	0,783	66,23	64,29	98,52	151,56	6,27	9,47
7,5	1	0	0,788	0,987	0,796	66,57	64,59	102,81	158,32	6,33	9,56
8	1	0	0,799	0,988	0,807	67,13	65,13	107,32	164,80	6,38	9,64
12	1	0	0,855	0,992	0,861	74,55	72,73	142,30	218,16	6,73	10,14
16	1	0	0,888	0,993	0,892	81,74	79,97	176,74	270,46	6,98	10,51
20	1	0	0,907	0,994	0,91	88,32	86,61	208,19	319,41	7,16	10,79
24	1	0	0,921	0,995	0,924	95,48	93,83	243,42	373,12	7,34	11,05
28	1	0	0,932	0,996	0,934	102,42	101,23	278,71	427,74	7,48	11,27
32	1	0	0,94	0,996	0,942	110,24	109,13	314,53	481,97	7,61	11,46
36	1	0	0,947	0,997	0,949	117,82	116,60	350,26	535,17	7,73	11,63
40	1	0	0,952	0,997	0,954	123,44	122,62	380,22	582,81	7,81	11,76
44	1	0	0,956	0,997	0,957	132,55	131,77	420,24	643,65	7,92	11,92
48	1	0	0,959	0,998	0,961	139,21	138,73	455,35	697,21	8,01	12,05
52	1	0	0,962	0,998	0,964	146,28	145,77	489,82	750,00	8,08	12,16
56	1	0	0,965	0,998	0,966	152,63	152,13	520,08	795,40	8,14	12,25
60	1	0	0,967	0,998	0,968	159,05	158,80	551,38	844,95	8,21	12,35
64	1	0	0,969	0,998	0,97	167,27	167,05	589,14	900,78	8,27	12,45
68	1	0	0,971	0,998	0,972	175,12	175,32	626,59	959,50	8,34	12,54
72	1	0	0,972	0,998	0,973	181,47	181,78	659,74	1010,82	8,39	12,62
76	0,999	0,001	0,974	0,998	0,975	188,48	188,78	695,63	1063,59	8,45	12,70
80	0,999	0,001	0,975	0,999	0,976	195,91	196,45	729,86	1117,06	8,50	12,78
84	0,999	0,001	0,976	0,999	0,977	203,89	204,52	766,36	1171,90	8,54	12,85
88	0,999	0,001	0,977	0,999	0,978	211,16	212,20	804,13	1230,91	8,59	12,93
92	0,999	0,001	0,978	0,999	0,979	217,27	218,08	832,01	1271,11	8,63	12,98
96	0,998	0,002	0,98	0,999	0,98	227,78	228,92	883,70	1351,11	8,69	13,07
100	0,998	0,002	0,98	0,999	0,981	233,51	234,93	911,32	1394,14	8,72	13,12

TABLEAU. B.0.24: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ ,  $n=50$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	1	0	0,005	0,943	0,006	50,78	50,32	36,75	58,10	4,69	7,25
0,1	1	0	0,05	0,945	0,046	51,27	50,86	37,68	59,60	4,74	7,32
0,2	1	0	0,096	0,947	0,092	51,33	50,88	38,22	60,37	4,77	7,36
0,3	1	0	0,118	0,948	0,113	51,90	51,42	39,05	61,57	4,81	7,41
0,4	1	0	0,16	0,95	0,152	51,78	51,32	39,76	62,72	4,86	7,47
0,5	1	0	0,2	0,952	0,187	52,62	52,10	41,12	64,83	4,92	7,56
0,6	1	0	0,238	0,955	0,229	52,02	51,53	41,59	65,38	4,96	7,60
0,7	1	0	0,252	0,956	0,242	51,94	51,50	42,15	66,43	4,99	7,65
0,8	1	0	0,286	0,957	0,275	52,79	52,32	43,25	67,96	5,02	7,70
0,9	1	0	0,307	0,959	0,294	52,92	52,46	44,04	69,20	5,06	7,75
1	1	0	0,331	0,96	0,317	52,99	52,55	44,76	70,34	5,09	7,79
1,1	1	0	0,356	0,961	0,343	52,97	52,43	45,50	71,37	5,13	7,84
1,2	1	0	0,374	0,962	0,361	53,56	53,01	46,33	72,74	5,15	7,88
1,3	1	0	0,39	0,964	0,376	52,87	52,45	46,98	73,79	5,19	7,93
1,4	1	0	0,407	0,965	0,395	53,59	53,11	47,90	75,00	5,22	7,97
1,5	1	0	0,429	0,965	0,414	54,07	53,62	48,88	76,39	5,25	8,00
1,6	1	0	0,445	0,966	0,43	54,04	53,62	49,50	77,68	5,27	8,05
1,7	1	0	0,458	0,967	0,444	54,31	53,82	50,28	78,93	5,30	8,09
1,8	1	0	0,469	0,968	0,455	54,66	54,20	51,25	80,13	5,33	8,12
1,9	1	0	0,483	0,969	0,467	54,08	53,62	51,74	80,94	5,36	8,16
2	1	0	0,495	0,969	0,481	54,41	53,94	52,41	82,14	5,38	8,19
2,1	1	0	0,501	0,97	0,486	54,70	54,27	53,21	83,34	5,40	8,22
2,2	1	0	0,522	0,971	0,508	54,63	54,30	54,19	85,10	5,43	8,28
2,3	1	0	0,526	0,971	0,51	55,11	54,71	54,84	85,67	5,45	8,29
2,4	1	0	0,542	0,972	0,528	55,09	54,70	55,82	87,20	5,48	8,33
2,5	1	0	0,549	0,973	0,534	55,38	54,95	56,53	88,40	5,50	8,37
2,6	1	0	0,557	0,973	0,543	55,40	54,90	57,04	89,18	5,51	8,39
2,7	1	0	0,569	0,974	0,554	55,42	55,03	57,91	90,69	5,54	8,43
2,8	1	0	0,578	0,975	0,564	55,37	54,96	58,66	91,57	5,56	8,45
2,9	1	0	0,587	0,975	0,574	55,58	55,20	59,31	92,39	5,58	8,47
3	1	0	0,594	0,975	0,58	55,95	55,64	60,30	94,21	5,60	8,51
3,1	1	0	0,603	0,976	0,589	55,85	55,49	61,02	95,29	5,62	8,54
3,2	1	0	0,612	0,976	0,599	56,06	55,72	61,64	96,21	5,64	8,56
3,3	1	0	0,615	0,977	0,6	56,22	55,81	62,40	97,26	5,66	8,59
3,4	1	0	0,629	0,977	0,615	56,30	55,81	63,16	98,44	5,67	8,62
3,5	1	0	0,628	0,978	0,614	56,78	56,32	63,98	99,58	5,69	8,64
3,6	1	0	0,646	0,978	0,632	57,08	56,68	65,42	101,80	5,72	8,68
3,7	1	0	0,65	0,978	0,635	57,04	56,68	65,48	102,40	5,73	8,70
3,8	1	0	0,649	0,979	0,636	57,48	57,05	66,40	103,37	5,75	8,71
3,9	1	0	0,655	0,979	0,641	57,94	57,59	67,60	105,47	5,77	8,75
4	1	0	0,662	0,979	0,649	57,59	57,25	68,23	106,49	5,79	8,78
4,5	1	0	0,687	0,981	0,672	59,03	58,53	72,51	112,59	5,87	8,89
5	1	0	0,707	0,982	0,695	59,38	59,07	75,87	118,11	5,93	8,99
5,5	1	0	0,726	0,983	0,714	60,28	59,89	80,04	124,41	6,01	9,10
6	1	0	0,743	0,984	0,731	61,13	60,83	83,70	129,80	6,07	9,18
6,5	1	0	0,762	0,985	0,751	62,81	62,42	88,24	136,81	6,13	9,28
7	1	0	0,773	0,986	0,762	62,13	61,82	91,79	142,46	6,19	9,37
7,5	1	0	0,786	0,987	0,775	63,52	63,20	95,92	148,44	6,25	9,44
8	1	0	0,799	0,987	0,789	64,42	64,14	99,74	154,45	6,30	9,51
12	1	0	0,855	0,991	0,848	70,59	70,44	130,43	201,21	6,63	9,99
16	1	0	0,887	0,993	0,881	77,21	77,14	162,59	250,51	6,89	10,38
20	1	0	0,907	0,994	0,902	83,96	84,13	193,81	298,52	7,08	10,67
24	1	0	0,922	0,995	0,917	90,46	90,72	226,03	347,51	7,25	10,93
28	1	0	0,932	0,996	0,928	96,30	96,78	257,68	396,64	7,40	11,15
32	1	0	0,941	0,996	0,937	103,79	104,38	290,25	446,54	7,53	11,34
36	1	0	0,947	0,997	0,944	110,34	110,95	321,50	493,17	7,64	11,50
40	1	0	0,951	0,997	0,949	115,11	116,16	348,63	536,42	7,73	11,63
44	1	0	0,956	0,997	0,954	122,22	123,12	382,78	587,00	7,83	11,77
48	1	0	0,959	0,998	0,957	128,56	129,59	415,11	637,23	7,91	11,90
52	1	0	0,962	0,998	0,96	135,23	136,65	444,53	683,39	7,98	12,01
56	1	0	0,965	0,998	0,963	142,42	143,53	478,52	732,81	8,06	12,12
60	1	0	0,967	0,998	0,965	148,90	150,35	509,33	780,93	8,12	12,22
64	1	0	0,969	0,998	0,967	155,72	157,43	542,96	832,91	8,19	12,32
68	1	0	0,971	0,998	0,969	162,20	163,81	573,86	879,45	8,25	12,41
72	1	0	0,972	0,998	0,971	168,10	170,21	603,35	926,11	8,30	12,49
76	1	0	0,974	0,998	0,972	174,69	176,60	635,06	972,88	8,35	12,57
80	1	0	0,975	0,998	0,974	182,69	184,94	671,78	1030,17	8,41	12,65
84	0,999	0,001	0,977	0,999	0,975	189,87	191,94	708,09	1083,68	8,47	12,73
88	0,999	0,001	0,977	0,999	0,976	192,87	194,93	722,32	1104,57	8,49	12,76
92	0,999	0,001	0,978	0,999	0,977	199,14	201,59	754,00	1154,79	8,53	12,83
96	0,999	0,001	0,979	0,999	0,978	206,81	209,62	789,26	1210,32	8,58	12,90
100	0,999	0,001	0,98	0,999	0,979	212,85	215,44	821,21	1256,53	8,62	12,96

TABLEAU. B.0.25: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 1)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	0,497	0,503	0,006	0,633	0,633	258,75	101,40	80,21	47,30	3,43	6,39
0,1	0,494	0,506	0,046	0,651	0,652	264,47	100,55	82,74	48,02	3,54	6,49
0,2	0,515	0,485	0,087	0,67	0,667	272,43	101,84	87,37	49,53	3,67	6,60
0,3	0,497	0,503	0,13	0,688	0,686	279,33	102,39	90,49	50,85	3,79	6,70
0,4	0,496	0,504	0,164	0,701	0,701	285,74	103,19	92,15	52,03	3,88	6,78
0,5	0,492	0,508	0,2	0,715	0,717	287,79	102,86	99,24	53,18	3,97	6,88
0,6	0,509	0,491	0,222	0,725	0,725	292,28	103,65	103,41	54,39	4,05	6,96
0,7	0,526	0,474	0,258	0,74	0,738	297,51	103,62	102,12	55,43	4,13	7,03
0,8	0,494	0,506	0,282	0,749	0,749	301,20	103,67	107,89	56,71	4,21	7,12
0,9	0,532	0,468	0,306	0,76	0,757	302,05	103,42	109,17	57,56	4,27	7,18
1	0,527	0,473	0,329	0,769	0,766	306,13	104,03	113,21	58,92	4,34	7,25
1,1	0,493	0,507	0,353	0,776	0,777	309,71	104,42	114,71	60,15	4,41	7,32
1,2	0,516	0,484	0,374	0,785	0,783	315,02	105,24	116,04	61,60	4,47	7,38
1,3	0,49	0,51	0,393	0,791	0,792	318,69	105,31	116,88	62,73	4,53	7,45
1,4	0,524	0,476	0,409	0,799	0,797	317,22	104,86	122,04	63,50	4,58	7,49
1,5	0,522	0,478	0,43	0,806	0,805	320,30	105,59	123,23	64,96	4,63	7,56
1,6	0,478	0,522	0,445	0,81	0,811	321,28	106,46	124,76	66,01	4,67	7,59
1,7	0,493	0,507	0,452	0,814	0,814	329,27	107,39	127,92	67,57	4,72	7,65
1,8	0,491	0,509	0,478	0,822	0,823	325,96	107,56	129,51	68,97	4,78	7,71
1,9	0,489	0,511	0,482	0,825	0,826	333,99	107,35	131,56	69,93	4,81	7,76
2	0,486	0,514	0,501	0,831	0,832	332,24	108,32	133,90	71,39	4,86	7,81
2,1	0,494	0,506	0,509	0,834	0,835	336,95	108,96	136,08	72,46	4,89	7,85
2,2	0,481	0,519	0,524	0,84	0,84	336,65	109,17	137,23	73,79	4,94	7,90
2,3	0,491	0,509	0,531	0,842	0,843	338,69	108,53	137,25	74,46	4,97	7,93
2,4	0,501	0,499	0,545	0,848	0,847	336,04	109,44	146,64	76,10	5,01	7,98
2,5	0,501	0,499	0,554	0,851	0,851	336,97	109,41	146,56	77,02	5,04	8,02
2,6	0,498	0,502	0,562	0,854	0,854	342,55	109,35	145,08	78,15	5,07	8,06
2,7	0,512	0,488	0,574	0,858	0,858	342,20	110,50	149,09	79,73	5,11	8,10
2,8	0,499	0,501	0,581	0,86	0,861	341,37	110,36	156,44	80,82	5,14	8,14
2,9	0,498	0,502	0,594	0,865	0,865	339,89	110,96	155,35	82,04	5,17	8,17
3	0,518	0,482	0,599	0,867	0,867	345,66	111,11	154,21	83,07	5,20	8,21
3,1	0,497	0,503	0,604	0,868	0,869	348,89	111,65	154,16	83,88	5,22	8,23
3,2	0,485	0,515	0,617	0,873	0,874	347,40	111,43	160,48	85,94	5,27	8,29
3,3	0,507	0,493	0,618	0,874	0,874	349,95	111,87	159,66	86,42	5,28	8,30
3,4	0,506	0,494	0,627	0,877	0,877	350,13	112,32	159,45	87,62	5,31	8,33
3,5	0,493	0,507	0,637	0,88	0,88	352,26	113,14	161,73	89,22	5,34	8,37
3,6	0,49	0,51	0,642	0,881	0,882	346,18	113,14	169,78	89,88	5,35	8,39
3,7	0,518	0,482	0,646	0,884	0,883	352,16	113,35	170,58	91,61	5,38	8,44
3,8	0,512	0,488	0,65	0,885	0,885	355,58	113,99	169,63	92,50	5,40	8,46
3,9	0,513	0,487	0,657	0,888	0,887	356,21	113,67	170,45	93,79	5,44	8,49
4	0,496	0,504	0,664	0,89	0,89	354,24	114,30	174,25	95,01	5,46	8,52
4,5	0,488	0,512	0,69	0,898	0,899	356,55	115,23	178,85	100,61	5,56	8,65
5	0,501	0,499	0,715	0,907	0,907	357,08	117,58	192,16	107,52	5,67	8,79
5,5	0,507	0,493	0,731	0,913	0,912	359,63	119,53	198,64	112,80	5,75	8,89
6	0,492	0,508	0,746	0,918	0,918	368,20	121,96	207,98	119,59	5,84	9,01
6,5	0,511	0,489	0,763	0,924	0,923	360,70	122,66	216,08	124,72	5,91	9,10
7	0,503	0,497	0,777	0,928	0,928	366,25	124,10	217,45	131,26	5,99	9,21
7,5	0,496	0,504	0,787	0,931	0,931	371,78	125,82	221,80	136,51	6,05	9,28
8	0,531	0,469	0,798	0,936	0,935	367,90	128,01	234,58	143,13	6,11	9,37
12	0,49	0,51	0,856	0,954	0,954	372,96	140,66	288,38	191,20	6,51	9,91
16	0,508	0,492	0,888	0,964	0,964	370,90	153,53	341,09	237,45	6,79	10,30
20	0,514	0,486	0,907	0,971	0,971	376,41	167,03	394,06	286,55	7,01	10,62
24	0,515	0,485	0,923	0,976	0,976	375,62	180,72	443,46	336,14	7,20	10,89
28	0,486	0,514	0,933	0,979	0,979	376,97	194,41	490,20	385,75	7,36	11,11
32	0,498	0,502	0,941	0,981	0,981	387,30	207,80	524,63	433,34	7,49	11,30
36	0,516	0,484	0,946	0,983	0,983	393,46	219,37	564,94	478,25	7,60	11,46
40	0,506	0,494	0,952	0,985	0,985	397,41	235,43	615,72	532,43	7,71	11,63
44	0,487	0,513	0,956	0,986	0,986	405,78	246,41	649,19	575,20	7,80	11,76
48	0,497	0,503	0,96	0,987	0,987	409,75	260,67	690,36	624,61	7,89	11,88
52	0,497	0,503	0,963	0,988	0,988	410,75	273,33	731,40	670,20	7,96	12,00
56	0,495	0,505	0,965	0,989	0,989	422,78	287,78	774,56	723,61	8,05	12,12
60	0,497	0,503	0,968	0,99	0,99	433,92	299,93	805,28	770,69	8,12	12,22
64	0,491	0,509	0,97	0,99	0,99	439,14	313,30	844,75	817,46	8,18	12,31
68	0,509	0,491	0,971	0,991	0,991	449,96	325,63	873,42	862,78	8,23	12,39
72	0,495	0,505	0,973	0,991	0,991	454,84	338,39	916,33	906,66	8,29	12,47
76	0,495	0,505	0,974	0,992	0,992	468,44	352,16	948,57	956,45	8,34	12,55
80	0,505	0,495	0,976	0,992	0,992	480,51	368,62	995,91	1017,41	8,41	12,65
84	0,494	0,506	0,977	0,993	0,993	488,60	380,16	1031,74	1063,78	8,45	12,72
88	0,487	0,513	0,978	0,993	0,993	492,75	392,46	1064,92	1104,05	8,49	12,77
92	0,496	0,504	0,979	0,993	0,993	507,88	407,40	1102,60	1157,11	8,54	12,85
96	0,495	0,505	0,98	0,994	0,994	518,01	418,31	1128,57	1200,39	8,58	12,90
100	0,51	0,49	0,98	0,994	0,994	527,27	430,63	1162,89	1243,68	8,62	12,96

TABLEAU. B.0.26: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,75)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,95	0,05	-0,006	0,691	0,52	207,02	99,86	51,77	44,26	3,30	6,08
0,1	0,96	0,039	0,05	0,712	0,549	212,23	100,57	54,15	45,40	3,44	6,20
0,2	0,97	0,025	0,087	0,725	0,569	217,29	100,79	54,65	46,22	3,53	6,29
0,3	0,97	0,032	0,13	0,74	0,591	219,74	100,97	56,57	47,01	3,63	6,37
0,4	0,97	0,027	0,172	0,755	0,614	224,70	100,77	58,04	47,97	3,74	6,48
0,5	0,96	0,036	0,198	0,763	0,629	229,42	102,00	60,52	49,22	3,82	6,56
0,6	0,98	0,024	0,234	0,776	0,647	232,04	101,28	60,74	49,92	3,91	6,65
0,7	0,97	0,025	0,257	0,784	0,658	234,72	102,01	61,68	50,82	3,97	6,71
0,8	0,97	0,028	0,28	0,79	0,672	238,57	101,93	64,47	51,60	4,03	6,78
0,9	0,97	0,029	0,308	0,8	0,687	243,62	101,79	65,50	52,65	4,12	6,87
1	0,97	0,028	0,33	0,807	0,696	245,07	103,22	65,55	53,75	4,17	6,92
1,1	0,96	0,035	0,354	0,813	0,709	245,90	103,03	67,87	54,36	4,22	6,97
1,2	0,96	0,036	0,377	0,819	0,722	249,03	103,61	69,98	55,68	4,28	7,05
1,3	0,97	0,033	0,395	0,826	0,73	251,45	103,46	70,34	56,42	4,34	7,10
1,4	0,98	0,023	0,411	0,832	0,736	253,18	104,26	70,93	57,50	4,39	7,16
1,5	0,96	0,036	0,426	0,835	0,746	256,85	104,52	72,88	58,34	4,43	7,21
1,6	0,97	0,025	0,441	0,841	0,75	257,73	105,54	72,01	59,37	4,48	7,25
1,7	0,97	0,032	0,459	0,846	0,762	260,00	104,21	74,79	60,07	4,53	7,32
1,8	0,97	0,026	0,469	0,85	0,765	261,83	104,61	75,31	60,91	4,57	7,36
1,9	0,98	0,022	0,487	0,854	0,774	263,65	105,25	76,23	62,03	4,61	7,41
2	0,97	0,028	0,493	0,856	0,778	265,33	105,17	77,38	62,48	4,63	7,43
2,1	0,97	0,028	0,506	0,86	0,783	265,93	105,79	78,94	63,66	4,67	7,49
2,2	0,98	0,023	0,522	0,865	0,79	266,77	105,91	78,01	64,71	4,72	7,54
2,3	0,98	0,021	0,532	0,868	0,795	270,31	106,61	80,10	65,76	4,76	7,58
2,4	0,97	0,026	0,544	0,871	0,801	269,83	106,95	81,39	66,61	4,79	7,61
2,5	0,97	0,025	0,551	0,874	0,804	271,57	106,93	81,96	67,26	4,82	7,65
2,6	0,97	0,03	0,564	0,877	0,812	272,91	106,36	83,77	68,19	4,86	7,70
2,7	0,97	0,032	0,574	0,88	0,816	274,27	107,20	84,60	69,32	4,89	7,74
2,8	0,97	0,027	0,583	0,883	0,819	273,77	107,01	82,95	69,91	4,92	7,76
2,9	0,98	0,019	0,589	0,885	0,822	277,36	107,89	84,42	71,07	4,94	7,80
3	0,97	0,028	0,599	0,888	0,826	275,54	107,58	86,12	71,87	4,98	7,84
3,1	0,97	0,029	0,606	0,89	0,828	276,99	108,53	85,45	72,80	5,00	7,87
3,2	0,97	0,026	0,614	0,891	0,834	280,48	109,22	88,10	73,99	5,03	7,90
3,3	0,97	0,026	0,62	0,894	0,836	281,18	109,61	89,30	75,10	5,06	7,94
3,4	0,97	0,025	0,627	0,896	0,839	283,83	109,66	88,39	76,00	5,09	7,97
3,5	0,97	0,027	0,636	0,899	0,844	283,15	108,81	89,82	76,79	5,12	8,02
3,6	0,98	0,02	0,64	0,9	0,845	284,06	109,30	90,49	77,46	5,13	8,03
3,7	0,98	0,022	0,648	0,902	0,849	284,60	109,56	90,53	78,51	5,16	8,07
3,8	0,98	0,019	0,653	0,904	0,851	285,85	109,72	91,87	79,33	5,18	8,10
3,9	0,97	0,025	0,66	0,906	0,854	284,93	110,36	92,89	80,44	5,21	8,13
4	0,98	0,023	0,665	0,908	0,857	287,03	110,55	94,00	81,42	5,23	8,16
4,5	0,98	0,018	0,69	0,915	0,868	292,79	112,19	97,08	86,16	5,34	8,29
5	0,97	0,025	0,712	0,921	0,878	294,33	112,74	102,40	90,24	5,43	8,41
5,5	0,98	0,022	0,733	0,927	0,886	297,63	115,01	104,77	95,50	5,52	8,53
6	0,98	0,019	0,751	0,931	0,895	299,40	114,99	107,83	99,41	5,60	8,63
6,5	0,98	0,024	0,761	0,935	0,899	303,09	116,65	111,39	103,63	5,66	8,72
7	0,98	0,021	0,779	0,939	0,906	302,31	118,58	116,64	109,09	5,74	8,82
7,5	0,98	0,018	0,791	0,943	0,912	310,05	120,77	119,60	114,98	5,82	8,93
8	0,98	0,021	0,8	0,945	0,917	310,19	120,39	124,27	118,43	5,87	9,00
12	0,98	0,018	0,857	0,961	0,941	324,77	131,10	148,54	155,16	6,26	9,52
16	0,98	0,017	0,887	0,97	0,953	336,92	140,93	174,13	190,18	6,53	9,90
20	0,98	0,023	0,909	0,975	0,962	348,36	151,07	202,66	228,79	6,76	10,23
24	0,97	0,025	0,923	0,979	0,968	357,20	161,20	231,04	265,27	6,94	10,49
28	0,97	0,027	0,933	0,982	0,972	364,85	170,63	255,43	300,10	7,08	10,69
32	0,97	0,032	0,941	0,984	0,976	374,46	181,32	283,80	337,17	7,22	10,89
36	0,97	0,033	0,947	0,986	0,978	381,29	190,36	307,92	372,32	7,33	11,05
40	0,96	0,042	0,952	0,987	0,98	389,48	201,71	341,88	413,13	7,44	11,22
44	0,96	0,04	0,956	0,988	0,982	400,52	212,51	367,16	447,39	7,53	11,35
48	0,96	0,043	0,959	0,989	0,983	407,80	222,56	394,01	485,11	7,62	11,48
52	0,95	0,049	0,963	0,99	0,985	413,42	232,03	422,78	521,21	7,70	11,60
56	0,95	0,053	0,965	0,991	0,986	421,71	242,85	452,55	561,36	7,78	11,72
60	0,94	0,06	0,967	0,991	0,987	427,04	252,59	478,38	595,47	7,84	11,81
64	0,93	0,068	0,969	0,992	0,987	432,25	261,27	506,62	629,15	7,90	11,90
68	0,93	0,07	0,971	0,992	0,988	439,71	271,56	535,85	667,65	7,97	11,99
72	0,92	0,077	0,973	0,993	0,989	449,60	285,00	570,22	713,21	8,04	12,09
76	0,92	0,077	0,974	0,993	0,989	455,77	293,99	593,48	745,92	8,09	12,17
80	0,91	0,086	0,975	0,993	0,99	460,49	302,55	621,87	779,72	8,13	12,23
84	0,9	0,099	0,977	0,994	0,99	465,49	313,70	656,65	817,95	8,18	12,31
88	0,91	0,092	0,978	0,994	0,991	476,77	324,61	680,49	858,16	8,23	12,38
92	0,9	0,104	0,978	0,994	0,991	484,00	335,23	713,84	895,94	8,28	12,45
96	0,89	0,111	0,979	0,994	0,992	486,59	343,60	738,88	925,49	8,31	12,50
100	0,88	0,118	0,98	0,995	0,992	494,63	353,69	769,14	963,02	8,35	12,56

TABLEAU. B.0.27: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,5)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,001	0,752	0,379	149,01	99,74	36,36	42,47	3,30	5,83
0,1	1	0	0,044	0,768	0,408	150,17	99,20	37,01	42,96	3,41	5,93
0,2	1	0	0,095	0,78	0,44	153,49	100,79	38,16	44,18	3,51	6,03
0,3	1	0,001	0,129	0,788	0,467	156,19	100,58	39,10	44,64	3,58	6,10
0,4	1	0	0,164	0,798	0,49	157,79	100,87	39,80	45,39	3,65	6,19
0,5	1	0	0,199	0,808	0,511	158,52	101,07	40,35	46,06	3,73	6,26
0,6	1	0	0,232	0,817	0,534	159,50	100,25	40,96	46,41	3,80	6,33
0,7	1	0	0,254	0,821	0,55	162,72	101,26	41,97	47,25	3,85	6,39
0,8	1	0	0,288	0,83	0,572	164,32	101,26	42,79	48,06	3,92	6,47
0,9	1	0	0,312	0,835	0,588	165,73	101,95	43,42	48,73	3,97	6,52
1	1	0	0,337	0,842	0,603	165,71	101,25	43,85	49,15	4,03	6,58
1,1	1	0	0,356	0,847	0,614	168,21	102,62	44,81	50,24	4,09	6,64
1,2	1	0	0,37	0,852	0,625	169,20	101,91	45,45	50,61	4,13	6,70
1,3	1	0	0,39	0,857	0,64	170,45	101,20	46,06	51,11	4,18	6,76
1,4	1	0	0,412	0,862	0,651	170,90	102,21	46,56	52,09	4,23	6,81
1,5	1	0	0,427	0,865	0,661	172,94	103,06	47,34	52,85	4,26	6,85
1,6	1	0	0,443	0,87	0,67	172,20	102,38	47,64	53,31	4,31	6,91
1,7	1	0	0,456	0,872	0,678	174,73	103,99	48,57	54,35	4,35	6,95
1,8	1	0	0,475	0,877	0,69	174,32	103,34	48,91	54,91	4,39	7,00
1,9	1	0	0,483	0,879	0,698	177,12	103,34	49,84	55,33	4,42	7,03
2	1	0	0,497	0,882	0,705	178,21	104,38	50,49	56,37	4,46	7,08
2,1	1	0	0,509	0,885	0,713	177,67	103,70	50,68	56,63	4,48	7,11
2,2	1	0	0,525	0,889	0,722	178,29	103,97	51,33	57,38	4,53	7,16
2,3	1	0	0,531	0,891	0,727	180,15	104,58	52,09	58,20	4,56	7,20
2,4	1	0	0,543	0,893	0,734	179,94	104,20	52,43	58,63	4,59	7,23
2,5	1	0	0,554	0,896	0,741	181,37	104,60	53,20	59,48	4,62	7,27
2,6	1	0	0,561	0,899	0,743	179,81	104,50	53,16	59,90	4,65	7,30
2,7	1	0	0,569	0,9	0,749	180,69	104,57	53,66	60,57	4,67	7,34
2,8	1	0	0,582	0,903	0,758	182,44	105,00	54,61	61,49	4,71	7,38
2,9	1	0	0,588	0,903	0,763	184,38	105,38	55,29	61,95	4,72	7,40
3	1	0	0,592	0,906	0,763	182,01	104,29	55,06	62,15	4,74	7,43
3,1	1	0	0,604	0,908	0,771	183,78	105,52	55,98	63,33	4,78	7,47
3,2	1	0	0,615	0,912	0,777	183,48	105,35	56,49	64,16	4,82	7,52
3,3	1	0	0,62	0,913	0,779	184,33	105,98	57,06	65,05	4,84	7,55
3,4	1	0	0,63	0,914	0,786	185,84	106,45	57,71	65,60	4,86	7,57
3,5	1	0	0,634	0,915	0,789	186,59	106,46	58,26	66,15	4,88	7,60
3,6	1	0	0,641	0,918	0,793	186,13	106,32	58,59	66,80	4,91	7,63
3,7	1	0	0,646	0,919	0,795	186,87	107,07	59,13	67,60	4,93	7,66
3,8	1	0	0,651	0,92	0,799	187,81	107,20	59,71	68,17	4,95	7,68
3,9	1	0	0,664	0,922	0,806	189,24	108,08	60,68	69,61	4,98	7,74
4	1	0	0,664	0,923	0,807	187,75	106,70	60,49	69,18	4,99	7,74
4,5	1	0	0,692	0,929	0,823	190,13	107,72	63,12	72,88	5,10	7,88
5	1	0	0,712	0,934	0,835	192,17	108,85	65,47	76,11	5,18	7,99
5,5	1	0	0,731	0,939	0,846	194,51	110,42	68,07	79,88	5,27	8,11
6	1	0	0,751	0,943	0,858	196,65	111,30	70,91	83,69	5,36	8,22
6,5	1	0	0,763	0,946	0,866	197,70	111,41	72,75	86,24	5,41	8,30
7	1	0	0,777	0,95	0,872	197,72	112,51	74,94	89,86	5,49	8,40
7,5	1	0	0,787	0,952	0,879	201,16	114,24	77,64	93,37	5,54	8,48
8	1	0	0,799	0,954	0,885	202,22	115,63	79,78	96,76	5,60	8,56
12	1	0	0,855	0,967	0,919	215,43	123,40	98,89	124,10	5,98	9,09
16	1	0	0,887	0,975	0,936	221,55	129,67	116,19	150,30	6,25	9,47
20	1	0	0,908	0,979	0,948	229,68	137,58	133,86	177,07	6,46	9,77
24	1	0	0,922	0,983	0,956	237,13	144,74	151,94	204,22	6,64	10,03
28	1	0	0,932	0,985	0,962	244,68	151,06	170,23	231,22	6,80	10,25
32	1	0	0,941	0,987	0,967	254,67	160,49	188,65	259,04	6,93	10,44
36	1	0	0,947	0,988	0,971	261,09	166,93	206,22	285,90	7,04	10,61
40	1	0	0,952	0,989	0,973	268,17	173,85	224,21	312,38	7,15	10,76
44	1	0	0,956	0,99	0,976	276,90	182,48	242,68	340,63	7,24	10,90
48	1	0	0,96	0,991	0,978	281,95	189,26	260,65	368,66	7,33	11,04
52	1	0,001	0,963	0,992	0,979	290,59	195,61	277,57	392,58	7,40	11,14
56	1	0,001	0,966	0,992	0,981	297,01	204,00	296,72	421,98	7,48	11,26
60	1	0,001	0,967	0,993	0,982	306,73	211,36	313,89	447,08	7,54	11,35
64	1	0,002	0,969	0,993	0,983	313,38	218,84	332,31	474,99	7,61	11,45
68	1	0,002	0,971	0,994	0,984	319,59	226,29	350,82	502,53	7,67	11,54
72	1	0,003	0,973	0,994	0,985	326,48	233,54	366,86	526,51	7,72	11,61
76	1	0,004	0,974	0,994	0,986	333,29	240,49	386,13	554,48	7,78	11,69
80	1	0,004	0,975	0,995	0,986	341,54	248,86	405,18	582,24	7,83	11,77
84	0,99	0,005	0,976	0,995	0,987	347,68	253,94	419,81	603,44	7,87	11,83
88	0,99	0,006	0,978	0,995	0,988	356,14	264,05	442,83	638,57	7,93	11,92
92	0,99	0,006	0,978	0,995	0,988	362,63	270,94	460,16	663,58	7,97	11,98
96	0,99	0,008	0,979	0,995	0,988	368,78	276,75	476,08	685,48	8,00	12,03
100	0,99	0,008	0,98	0,996	0,989	375,29	284,81	495,82	715,35	8,05	12,10



TABLEAU. B.0.28: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,25)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,002	0,798	0,201	112,09	99,72	28,28	41,52	3,31	5,67
0,1	1	0	0,048	0,81	0,236	112,16	99,44	28,59	41,92	3,39	5,76
0,2	1	0	0,09	0,818	0,267	112,60	99,79	28,94	42,41	3,46	5,82
0,3	1	0	0,13	0,826	0,302	112,96	99,16	29,30	42,63	3,52	5,88
0,4	1	0	0,163	0,834	0,333	114,39	99,55	29,93	43,31	3,59	5,97
0,5	1	0	0,196	0,84	0,355	114,58	100,02	30,22	43,79	3,64	6,01
0,6	1	0	0,229	0,845	0,38	114,89	100,30	30,51	44,22	3,69	6,06
0,7	1	0	0,263	0,85	0,412	116,14	100,30	31,04	44,62	3,74	6,11
0,8	1	0	0,288	0,856	0,43	116,49	100,71	31,44	45,37	3,79	6,19
0,9	1	0	0,308	0,861	0,446	116,81	100,85	31,76	45,71	3,83	6,23
1	1	0	0,33	0,865	0,463	117,70	101,33	32,24	46,33	3,88	6,28
1,1	1	0	0,355	0,87	0,481	117,87	101,66	32,62	46,88	3,93	6,33
1,2	1	0	0,374	0,874	0,496	117,44	101,21	32,73	47,08	3,97	6,37
1,3	1	0	0,391	0,878	0,514	118,85	101,28	33,37	47,65	4,01	6,43
1,4	1	0	0,409	0,882	0,529	118,63	100,98	33,58	47,90	4,05	6,46
1,5	1	0	0,425	0,884	0,54	118,80	101,37	33,85	48,40	4,08	6,50
1,6	1	0	0,438	0,886	0,55	119,88	102,13	34,29	49,02	4,10	6,54
1,7	1	0	0,455	0,892	0,562	118,32	100,89	34,30	49,15	4,15	6,59
1,8	1	0	0,47	0,894	0,576	120,83	102,45	35,19	50,12	4,19	6,63
1,9	1	0	0,486	0,897	0,588	120,30	102,28	35,34	50,48	4,22	6,67
2	1	0	0,497	0,898	0,596	120,62	102,39	35,58	50,77	4,24	6,70
2,1	1	0	0,512	0,901	0,611	121,57	102,58	36,13	51,43	4,27	6,75
2,2	1	0	0,521	0,905	0,619	120,81	101,59	36,30	51,56	4,31	6,79
2,3	1	0	0,535	0,906	0,629	121,53	102,56	36,69	52,20	4,33	6,81
2,4	1	0	0,546	0,909	0,635	120,72	102,34	36,78	52,53	4,36	6,84
2,5	1	0	0,552	0,911	0,641	121,57	102,69	37,28	53,20	4,39	6,89
2,6	1	0	0,562	0,912	0,647	121,44	102,94	37,41	53,50	4,41	6,91
2,7	1	0	0,572	0,913	0,656	123,20	104,18	38,11	54,40	4,43	6,94
2,8	1	0	0,584	0,916	0,667	122,78	103,55	38,39	54,75	4,47	6,98
2,9	1	0	0,588	0,917	0,67	123,45	104,02	38,83	55,34	4,49	7,02
3	1	0	0,6	0,919	0,68	122,92	103,27	38,97	55,54	4,51	7,05
3,1	1	0	0,605	0,921	0,685	123,11	103,26	39,33	55,96	4,54	7,08
3,2	1	0	0,612	0,922	0,69	123,30	103,63	39,59	56,49	4,56	7,10
3,3	1	0	0,621	0,924	0,697	123,36	103,70	39,94	56,98	4,59	7,14
3,4	1	0	0,627	0,926	0,701	123,37	103,79	40,16	57,37	4,60	7,16
3,5	1	0	0,636	0,927	0,708	124,15	104,14	40,75	58,06	4,63	7,20
3,6	1	0	0,645	0,928	0,717	124,72	104,43	41,14	58,64	4,65	7,23
3,7	1	0	0,651	0,93	0,72	123,85	104,08	41,17	58,81	4,67	7,24
3,8	1	0	0,652	0,93	0,721	124,60	104,49	41,49	59,17	4,68	7,26
3,9	1	0	0,66	0,931	0,727	124,67	104,66	41,77	59,65	4,70	7,28
4	1	0	0,666	0,933	0,732	125,42	104,94	42,47	60,53	4,74	7,33
4,5	1	0	0,694	0,938	0,754	126,10	105,66	43,84	62,73	4,82	7,44
5	1	0	0,714	0,943	0,771	127,49	106,69	45,70	65,31	4,91	7,56
5,5	1	0	0,733	0,946	0,786	127,76	107,15	47,11	67,53	4,98	7,65
6	1	0	0,751	0,95	0,801	127,69	106,64	48,61	69,64	5,06	7,76
6,5	1	0	0,764	0,953	0,811	129,44	107,98	50,33	72,13	5,12	7,84
7	1	0	0,777	0,955	0,822	130,19	108,47	51,77	74,23	5,18	7,92
7,5	1	0	0,79	0,957	0,831	130,93	109,28	53,26	76,41	5,23	8,00
8	1	0	0,798	0,959	0,839	132,17	110,00	54,84	78,73	5,29	8,07
12	1	0	0,856	0,971	0,884	137,15	114,78	67,24	97,27	5,65	8,58
16	1	0	0,888	0,978	0,91	142,15	119,87	79,31	115,57	5,91	8,95
20	1	0	0,909	0,982	0,928	148,84	125,03	92,40	135,19	6,13	9,27
24	1	0	0,922	0,984	0,938	154,61	131,10	104,60	153,80	6,29	9,51
28	1	0	0,932	0,986	0,946	160,54	137,11	117,43	173,16	6,45	9,73
32	1	0	0,94	0,988	0,952	164,44	141,23	129,36	191,04	6,57	9,91
36	1	0	0,947	0,989	0,958	169,26	145,62	141,96	210,08	6,69	10,08
40	1	0	0,952	0,99	0,962	174,89	151,87	154,75	229,87	6,80	10,24
44	1	0	0,956	0,991	0,965	179,74	156,31	165,85	246,33	6,88	10,36
48	1	0	0,959	0,992	0,968	184,08	160,79	178,19	265,13	6,96	10,49
52	1	0	0,963	0,993	0,97	190,69	167,42	193,23	287,71	7,06	10,62
56	1	0	0,965	0,993	0,972	195,00	172,25	204,22	304,61	7,12	10,72
60	1	0	0,968	0,994	0,974	200,53	177,28	217,13	323,91	7,19	10,82
64	1	0	0,97	0,994	0,976	206,37	182,53	229,54	342,64	7,26	10,92
68	1	0	0,971	0,994	0,977	210,38	187,74	241,65	361,54	7,31	11,00
72	1	0	0,973	0,995	0,978	216,77	193,33	254,80	380,84	7,37	11,09
76	1	0	0,974	0,995	0,979	221,66	198,53	266,33	398,67	7,42	11,16
80	1	0	0,975	0,995	0,98	227,00	202,99	278,48	416,57	7,47	11,24
84	1	0	0,977	0,995	0,981	231,52	208,54	290,68	435,97	7,52	11,31
88	1	0	0,978	0,995	0,982	236,33	213,06	302,68	452,99	7,56	11,37
92	1	0	0,979	0,996	0,983	242,42	219,54	317,46	475,98	7,62	11,45
96	1	0	0,98	0,996	0,984	245,76	223,18	327,22	491,41	7,65	11,50
100	1	0	0,98	0,996	0,984	251,30	228,46	338,81	508,30	7,69	11,56

TABLEAU. B.0.29: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0,1)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	1	0	-0,004	0,812	0,077	101,43	99,43	25,91	41,11	3,31	5,62
0,1	1	0	0,049	0,821	0,124	101,93	99,61	26,28	41,51	3,38	5,68
0,2	1	0	0,088	0,827	0,155	101,95	99,66	26,47	41,88	3,43	5,74
0,3	1	0	0,123	0,832	0,187	102,89	100,50	26,90	42,50	3,48	5,79
0,4	1	0	0,165	0,839	0,22	102,34	99,91	26,97	42,58	3,53	5,84
0,5	1	0	0,192	0,846	0,243	102,44	99,94	27,24	42,93	3,58	5,89
0,6	1	0	0,226	0,852	0,272	101,74	99,11	27,27	42,95	3,62	5,93
0,7	1	0	0,254	0,855	0,297	102,92	100,23	27,76	43,73	3,66	5,99
0,8	1	0	0,284	0,86	0,319	103,40	100,90	28,09	44,23	3,71	6,03
0,9	1	0	0,309	0,865	0,343	102,75	100,06	28,18	44,35	3,75	6,09
1	1	0	0,333	0,87	0,364	103,04	100,35	28,51	44,79	3,80	6,13
1,1	1	0	0,348	0,873	0,378	102,58	99,87	28,50	44,83	3,81	6,16
1,2	1	0	0,374	0,876	0,399	103,53	100,72	28,96	45,41	3,85	6,19
1,3	1	0	0,392	0,88	0,417	103,47	100,55	29,16	45,69	3,89	6,23
1,4	1	0	0,41	0,883	0,434	104,42	101,45	29,66	46,46	3,93	6,29
1,5	1	0	0,43	0,887	0,453	104,44	101,31	29,92	46,79	3,97	6,34
1,6	1	0	0,442	0,889	0,464	104,33	101,26	30,08	47,11	4,00	6,37
1,7	1	0	0,461	0,892	0,478	104,32	101,43	30,30	47,47	4,03	6,40
1,8	1	0	0,476	0,896	0,491	103,92	101,02	30,43	47,64	4,06	6,44
1,9	1	0	0,485	0,897	0,499	104,44	101,61	30,75	48,21	4,09	6,48
2	1	0	0,5	0,9	0,514	104,15	101,12	30,91	48,33	4,11	6,50
2,1	1	0	0,509	0,901	0,523	104,30	101,22	31,05	48,44	4,13	6,51
2,2	1	0	0,519	0,903	0,531	104,88	101,96	31,38	49,13	4,15	6,56
2,3	1	0	0,533	0,907	0,546	104,02	100,93	31,53	49,30	4,19	6,61
2,4	1	0	0,54	0,908	0,552	104,81	101,69	31,88	49,74	4,21	6,62
2,5	1	0	0,553	0,91	0,563	105,12	102,08	32,20	50,28	4,24	6,66
2,6	1	0	0,564	0,912	0,573	105,34	102,22	32,42	50,57	4,26	6,68
2,7	1	0	0,572	0,914	0,581	105,09	102,00	32,60	50,89	4,29	6,72
2,8	1	0	0,578	0,915	0,588	105,53	102,22	32,90	51,30	4,31	6,75
2,9	1	0	0,591	0,917	0,598	105,52	102,43	33,14	51,76	4,33	6,78
3	1	0	0,601	0,919	0,608	105,42	102,32	33,35	52,02	4,35	6,80
3,1	1	0	0,608	0,921	0,612	106,01	103,01	33,83	52,74	4,39	6,84
3,2	1	0	0,615	0,923	0,62	105,64	102,53	33,95	52,86	4,41	6,87
3,3	1	0	0,619	0,923	0,625	106,06	102,70	34,09	53,11	4,41	6,88
3,4	1	0	0,628	0,924	0,631	106,52	103,43	34,41	53,70	4,43	6,91
3,5	1	0	0,632	0,925	0,639	107,32	103,71	34,83	54,05	4,45	6,93
3,6	1	0	0,637	0,926	0,643	106,18	102,78	34,71	54,00	4,47	6,95
3,7	1	0	0,648	0,928	0,65	106,91	103,78	35,22	54,83	4,50	6,98
3,8	1	0	0,653	0,929	0,657	106,62	103,37	35,35	55,06	4,51	7,01
3,9	1	0	0,658	0,93	0,663	106,73	103,32	35,55	55,29	4,53	7,03
4	1	0	0,665	0,931	0,669	107,82	104,19	36,05	55,91	4,55	7,05
4,5	1	0	0,691	0,937	0,692	107,11	103,79	36,96	57,46	4,63	7,17
5	1	0	0,713	0,941	0,713	108,28	105,06	38,39	59,60	4,72	7,27
5,5	1	0	0,73	0,945	0,73	107,58	104,18	39,13	60,72	4,78	7,36
6	1	0	0,744	0,947	0,745	109,27	105,68	40,50	62,65	4,84	7,44
6,5	1	0	0,764	0,951	0,763	109,35	105,84	41,84	64,79	4,92	7,54
7	1	0	0,776	0,954	0,774	109,18	105,96	42,79	66,23	4,97	7,61
7,5	1	0	0,788	0,956	0,786	109,74	106,50	44,00	68,09	5,03	7,69
8	1	0	0,798	0,958	0,796	110,89	107,42	45,37	70,17	5,08	7,77
12	1	0	0,856	0,97	0,854	115,53	111,74	55,08	84,67	5,43	8,25
16	1	0	0,887	0,976	0,886	118,98	115,22	64,53	99,05	5,69	8,62
20	1	0	0,909	0,981	0,907	122,85	119,15	74,00	113,34	5,89	8,91
24	1	0	0,923	0,984	0,921	127,69	124,07	84,26	128,96	6,07	9,17
28	1	0	0,932	0,986	0,931	129,63	126,19	92,74	142,07	6,20	9,36
32	1	0	0,94	0,987	0,939	134,91	131,26	102,81	157,10	6,33	9,55
36	1	0	0,947	0,989	0,945	138,99	135,43	112,19	171,14	6,44	9,71
40	1	0	0,952	0,99	0,951	143,35	139,74	122,03	186,40	6,54	9,87
44	1	0	0,956	0,99	0,955	147,66	143,97	131,14	199,84	6,63	9,99
48	1	0	0,96	0,991	0,959	151,57	148,04	142,34	216,85	6,73	10,14
52	1	0	0,963	0,992	0,962	154,75	151,24	150,72	229,38	6,80	10,24
56	1	0	0,965	0,993	0,964	158,35	155,00	160,66	244,43	6,87	10,35
60	1	0	0,967	0,993	0,966	162,50	159,11	170,06	258,78	6,94	10,44
64	1	0	0,969	0,994	0,969	166,64	163,24	179,93	273,80	7,01	10,54
68	1	0	0,971	0,994	0,97	171,02	167,60	188,70	286,89	7,06	10,62
72	1	0	0,973	0,994	0,972	174,45	171,33	198,36	302,10	7,11	10,71
76	1	0	0,974	0,994	0,973	177,71	174,57	207,48	315,84	7,17	10,78
80	1	0	0,976	0,995	0,975	182,64	179,57	218,86	332,68	7,23	10,87
84	1	0	0,977	0,995	0,976	186,69	183,51	227,76	346,23	7,27	10,93
88	1	0	0,978	0,995	0,977	190,78	187,67	238,70	362,97	7,32	11,01
92	1	0	0,978	0,995	0,978	195,17	192,00	246,66	374,64	7,36	11,06
96	1	0	0,979	0,996	0,979	198,37	195,37	256,64	389,93	7,40	11,13
100	1	0	0,98	0,996	0,98	202,04	198,98	264,37	401,97	7,43	11,18

TABLEAU. B.0.30: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (1; 0)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,001	0,816	-0,001	99,52	99,36	25,53	41,08	3,32	5,62
0,1	1	0	0,047	0,821	0,043	99,92	99,66	25,77	41,43	3,36	5,66
0,2	1	0	0,082	0,828	0,07	99,59	99,45	25,89	41,63	3,41	5,71
0,3	1	0	0,131	0,832	0,113	100,07	99,85	26,14	41,97	3,45	5,74
0,4	1	0	0,167	0,838	0,14	100,15	99,96	26,36	42,28	3,50	5,79
0,5	1	0	0,204	0,845	0,172	100,20	100,02	26,60	42,72	3,55	5,85
0,6	1	0	0,233	0,848	0,198	100,45	100,37	26,81	43,12	3,58	5,90
0,7	1	0	0,258	0,853	0,22	100,80	100,64	27,08	43,39	3,62	5,92
0,8	1	0	0,285	0,856	0,242	100,84	100,74	27,20	43,63	3,65	5,96
0,9	1	0	0,308	0,862	0,263	100,41	100,28	27,35	43,89	3,69	6,01
1	1	0	0,329	0,865	0,285	100,35	100,14	27,51	44,05	3,73	6,04
1,1	1	0	0,357	0,867	0,31	101,70	101,54	27,95	44,67	3,75	6,07
1,2	1	0	0,368	0,872	0,321	99,85	99,70	27,73	44,36	3,78	6,10
1,3	1	0	0,396	0,874	0,347	101,55	101,46	28,27	45,31	3,81	6,15
1,4	1	0	0,41	0,877	0,362	100,78	100,66	28,25	45,23	3,84	6,17
1,5	1	0	0,428	0,882	0,375	101,05	100,90	28,61	45,79	3,89	6,23
1,6	1	0	0,444	0,883	0,392	102,18	102,06	28,98	46,32	3,91	6,25
1,7	1	0	0,456	0,886	0,404	101,16	101,02	28,90	46,18	3,93	6,27
1,8	1	0	0,471	0,888	0,419	101,88	101,73	29,31	46,81	3,96	6,32
1,9	1	0	0,486	0,892	0,433	100,43	100,38	29,13	46,64	3,99	6,35
2	1	0	0,499	0,895	0,446	101,18	100,97	29,59	47,16	4,03	6,39
2,1	1	0	0,51	0,896	0,457	102,30	102,21	29,97	47,82	4,05	6,42
2,2	1	0	0,525	0,898	0,472	101,61	101,48	29,94	47,76	4,06	6,43
2,3	1	0	0,532	0,899	0,478	102,43	102,18	30,24	48,21	4,08	6,46
2,4	1	0	0,541	0,902	0,489	102,07	101,97	30,41	48,51	4,11	6,49
2,5	1	0	0,557	0,904	0,504	102,47	102,38	30,78	49,03	4,14	6,53
2,6	1	0	0,563	0,905	0,51	101,66	101,55	30,60	48,73	4,14	6,53
2,7	1	0	0,57	0,906	0,517	103,19	103,04	31,22	49,67	4,18	6,57
2,8	1	0	0,585	0,909	0,532	102,23	102,09	31,17	49,69	4,20	6,61
2,9	1	0	0,59	0,912	0,539	101,67	101,57	31,26	49,71	4,22	6,63
3	1	0	0,596	0,913	0,546	101,72	101,56	31,43	49,98	4,24	6,65
3,1	1	0	0,605	0,914	0,554	101,89	101,77	31,64	50,39	4,26	6,68
3,2	1	0	0,617	0,915	0,565	102,88	102,75	32,04	50,97	4,28	6,70
3,3	1	0	0,615	0,916	0,563	102,46	102,32	32,09	51,01	4,29	6,72
3,4	1	0	0,629	0,918	0,577	102,55	102,45	32,27	51,29	4,31	6,74
3,5	1	0	0,636	0,92	0,586	102,53	102,47	32,55	51,78	4,34	6,78
3,6	1	0	0,639	0,92	0,587	102,77	102,73	32,69	51,97	4,35	6,79
3,7	1	0	0,643	0,922	0,594	102,51	102,48	32,81	52,14	4,36	6,81
3,8	1	0	0,653	0,923	0,603	102,46	102,40	33,03	52,40	4,39	6,83
3,9	1	0	0,659	0,924	0,61	102,39	102,24	33,18	52,58	4,40	6,85
4	1	0	0,668	0,926	0,619	102,35	102,15	33,36	52,92	4,42	6,88
4,5	1	0	0,692	0,931	0,643	103,16	102,98	34,49	54,61	4,50	6,99
5	1	0	0,715	0,935	0,669	103,65	103,54	35,35	55,91	4,57	7,07
5,5	1	0	0,731	0,938	0,686	104,81	104,81	36,53	57,81	4,64	7,17
6	1	0	0,747	0,942	0,705	104,38	104,29	37,32	58,89	4,70	7,24
6,5	1	0	0,761	0,944	0,718	105,43	105,32	38,35	60,39	4,75	7,31
7	1	0	0,776	0,948	0,737	105,05	105,00	39,27	61,98	4,82	7,41
7,5	1	0	0,787	0,951	0,748	105,49	105,40	40,33	63,50	4,88	7,48
8	1	0	0,799	0,953	0,762	106,38	106,30	41,46	65,28	4,93	7,56
12	1	0	0,854	0,965	0,824	109,44	109,35	49,07	76,70	5,26	8,00
16	1	0	0,889	0,973	0,865	112,25	112,20	57,27	89,15	5,52	8,38
20	1	0	0,908	0,978	0,888	116,52	116,55	65,23	101,27	5,72	8,66
24	1	0	0,923	0,981	0,906	118,66	118,80	73,07	113,19	5,89	8,91
28	1	0	0,933	0,984	0,918	122,62	122,64	81,08	125,19	6,03	9,11
32	1	0	0,941	0,985	0,928	126,93	127,08	89,38	137,88	6,16	9,30
36	1	0	0,946	0,987	0,934	129,10	129,22	96,35	148,35	6,26	9,44
40	1	0	0,952	0,988	0,941	131,82	131,91	104,63	160,63	6,36	9,60
44	1	0	0,956	0,989	0,946	135,68	135,90	112,48	172,95	6,45	9,73
48	1	0	0,959	0,99	0,95	139,68	139,99	120,95	185,75	6,54	9,86
52	1	0	0,963	0,991	0,954	141,68	142,09	128,36	196,99	6,62	9,97
56	1	0	0,965	0,991	0,957	145,16	145,50	136,77	209,39	6,69	10,08
60	1	0	0,967	0,992	0,959	148,60	148,98	143,77	220,23	6,75	10,17
64	1	0	0,97	0,992	0,962	152,31	152,70	152,86	234,22	6,82	10,27
68	1	0	0,971	0,993	0,964	154,89	155,26	158,80	242,74	6,87	10,33
72	1	0	0,973	0,993	0,966	158,69	159,10	168,23	257,26	6,93	10,43
76	1	0	0,974	0,994	0,968	162,15	162,60	177,92	271,90	7,00	10,53
80	1	0	0,975	0,994	0,969	164,91	165,46	183,67	280,90	7,03	10,58
84	1	0	0,976	0,994	0,971	167,42	168,07	190,95	291,76	7,08	10,65
88	1	0	0,977	0,994	0,972	171,21	171,82	199,35	304,23	7,12	10,72
92	1	0	0,979	0,995	0,974	175,70	176,39	209,39	319,67	7,18	10,80
96	1	0	0,98	0,995	0,975	179,46	179,99	217,23	331,02	7,22	10,86
100	1	0	0,98	0,995	0,976	181,83	182,55	224,17	342,18	7,26	10,91

TABLEAU. B.O.31: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 1)$ ,  $n=100$ 

d	n	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	100	1	0	0	0,852	0,424	299,71	105,92	80,43	65,04	4,71	7,56
0,1	100	1	0	0,047	0,859	0,458	310,57	106,59	84,26	67,71	4,80	7,67
0,2	100	1	0	0,094	0,866	0,491	319,99	107,75	87,81	70,63	4,89	7,79
0,3	100	1	0	0,128	0,872	0,512	325,51	108,16	90,31	72,84	4,96	7,87
0,4	100	1	0	0,164	0,876	0,539	337,34	109,02	94,46	75,69	5,04	7,97
0,5	100	1	0	0,196	0,881	0,561	345,22	109,60	97,58	78,27	5,11	8,06
0,6	100	1	0	0,23	0,887	0,58	350,16	111,11	100,39	81,43	5,19	8,15
0,7	100	1	0	0,251	0,891	0,594	356,71	110,78	103,19	83,64	5,24	8,23
0,8	100	1	0	0,281	0,896	0,611	361,12	112,71	105,74	86,65	5,30	8,30
0,9	100	1	0	0,319	0,901	0,635	367,25	113,10	109,10	90,08	5,38	8,40
1	100	1	0	0,328	0,903	0,641	371,86	113,24	111,23	91,92	5,42	8,45
1,1	100	1	0	0,353	0,906	0,656	375,86	114,08	113,61	94,52	5,47	8,51
1,2	100	1	0	0,378	0,91	0,671	383,38	115,52	117,32	98,23	5,53	8,59
1,3	100	1	0	0,394	0,912	0,681	385,40	115,53	118,84	100,00	5,56	8,64
1,4	100	1	0	0,404	0,913	0,688	393,40	116,68	121,80	102,35	5,60	8,69
1,5	100	1	0	0,429	0,917	0,701	395,55	117,28	124,38	105,83	5,66	8,76
1,6	100	1	0	0,441	0,92	0,707	394,82	118,16	125,35	108,12	5,69	8,80
1,7	100	1	0	0,46	0,923	0,719	399,10	118,43	128,34	111,10	5,74	8,87
1,8	100	1	0	0,47	0,924	0,724	406,31	119,86	131,40	113,98	5,77	8,92
1,9	100	1	0	0,49	0,926	0,737	409,31	120,07	133,72	116,65	5,81	8,97
2	100	1	0	0,5	0,928	0,742	412,43	120,95	135,97	119,33	5,85	9,01
2,1	100	1	0	0,513	0,93	0,749	415,91	121,51	138,62	122,40	5,89	9,06
2,2	100	1	0	0,521	0,931	0,755	419,97	122,05	140,54	124,34	5,91	9,10
2,3	100	1	0	0,532	0,933	0,76	420,87	123,17	142,22	126,78	5,94	9,13
2,4	100	1	0	0,543	0,934	0,766	424,04	123,84	144,54	129,43	5,97	9,18
2,5	100	1	0	0,55	0,936	0,769	423,28	123,84	145,73	131,71	6,00	9,21
2,6	100	1	0	0,564	0,937	0,779	431,86	124,73	149,64	135,17	6,04	9,27
2,7	100	1	0	0,572	0,939	0,783	431,30	125,22	150,82	137,33	6,06	9,30
2,8	100	1	0	0,584	0,941	0,788	432,14	126,54	153,02	140,66	6,10	9,34
2,9	100	1	0	0,593	0,942	0,793	434,54	127,30	155,13	143,62	6,12	9,38
3	100	1	0	0,596	0,942	0,796	440,75	128,17	157,76	145,88	6,15	9,41
3,1	100	1	0	0,606	0,944	0,8	440,82	128,93	159,73	148,93	6,18	9,45
3,2	100	1	0	0,613	0,944	0,806	446,31	130,18	162,11	151,16	6,19	9,48
3,3	100	1	0	0,619	0,946	0,807	441,38	130,33	162,34	153,21	6,22	9,50
3,4	100	1	0	0,628	0,947	0,813	447,67	130,92	165,65	156,61	6,25	9,55
3,5	100	1	0	0,639	0,948	0,819	449,29	132,05	168,40	160,68	6,28	9,60
3,6	100	1	0	0,643	0,949	0,821	451,99	133,22	170,45	163,36	6,30	9,62
3,7	100	1	0	0,646	0,95	0,822	453,18	134,01	171,66	164,91	6,31	9,64
3,8	100	1	0	0,652	0,95	0,826	455,44	133,41	173,53	166,71	6,33	9,67
3,9	100	1	0	0,66	0,951	0,83	456,81	134,90	175,57	170,19	6,36	9,70
4	100	1	0	0,665	0,952	0,832	458,09	135,80	177,59	172,94	6,38	9,73
4,5	100	1	0	0,689	0,956	0,845	469,90	139,87	188,19	186,76	6,48	9,87
5	100	1	0	0,711	0,959	0,856	474,39	143,03	196,91	199,28	6,57	9,99
5,5	100	1	0	0,732	0,962	0,868	483,76	147,06	207,76	214,12	6,66	10,12
6	100	1	0	0,749	0,964	0,877	491,29	151,19	217,08	227,27	6,73	10,22
6,5	100	1	0	0,766	0,967	0,885	491,15	153,83	224,97	240,14	6,80	10,32
7	100	1	0	0,776	0,968	0,89	503,72	158,07	235,88	254,18	6,87	10,41
7,5	100	1	0	0,788	0,97	0,896	510,47	162,13	246,50	269,05	6,94	10,51
8	100	1	0	0,796	0,971	0,9	515,38	165,39	253,12	279,03	6,98	10,57
12	100	1	0	0,855	0,98	0,93	554,84	194,87	326,08	386,66	7,36	11,11
16	100	1	0	0,887	0,984	0,945	592,08	224,24	400,23	495,93	7,64	11,52
20	100	1	0	0,909	0,987	0,956	624,79	255,99	474,55	608,16	7,86	11,84
24	100	1	0	0,922	0,989	0,963	654,38	282,51	542,14	709,25	8,03	12,09
28	100	1	0	0,933	0,991	0,968	683,68	313,32	613,88	819,38	8,18	12,31
32	100	1	0	0,941	0,992	0,972	723,84	345,56	691,08	932,41	8,32	12,51
36	100	1	0	0,946	0,993	0,974	748,86	371,95	755,68	1030,81	8,42	12,67
40	100	1	0	0,951	0,993	0,977	780,01	400,61	824,60	1133,64	8,52	12,81
44	100	1	0	0,956	0,994	0,979	811,39	434,14	903,93	1254,68	8,63	12,97
48	100	1	0	0,96	0,994	0,981	839,60	462,57	973,09	1360,03	8,71	13,10
52	100	1	0	0,962	0,995	0,982	872,11	492,81	1044,15	1467,29	8,79	13,21
56	100	1	0	0,965	0,995	0,983	898,67	519,98	1110,54	1567,10	8,85	13,31
60	100	1	0	0,967	0,995	0,984	929,51	551,25	1185,40	1681,25	8,93	13,42
64	100	1	0,001	0,969	0,996	0,985	959,55	581,74	1259,90	1790,88	8,99	13,52
68	100	1	0,001	0,971	0,996	0,986	984,50	608,84	1325,12	1891,52	9,05	13,60
72	100	1	0,001	0,973	0,996	0,987	1018,52	640,80	1403,48	2005,55	9,11	13,69
76	100	1	0,002	0,974	0,996	0,988	1048,73	671,83	1477,85	2117,31	9,16	13,77
80	100	1	0,002	0,975	0,997	0,988	1075,02	700,82	1551,03	2226,73	9,22	13,85
84	100	1	0,003	0,977	0,997	0,989	1103,59	732,90	1626,49	2341,54	9,27	13,92
88	100	1	0,003	0,978	0,997	0,989	1131,71	760,94	1696,65	2444,37	9,31	13,99
92	100	1	0,004	0,979	0,997	0,99	1161,88	792,22	1773,98	2556,76	9,36	14,06
96	100	1	0,004	0,979	0,997	0,99	1187,44	816,83	1833,91	2644,87	9,39	14,11
100	100	0,99	0,005	0,98	0,997	0,991	1215,33	848,78	1913,19	2761,49	9,43	14,18

TABLEAU. B.0.32: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,75)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	1	0	0,003	0,888	0,335	214,99	105,35	61,72	62,45	4,70	7,43
0,1	1	0	0,049	0,893	0,371	220,99	105,79	64,34	64,74	4,79	7,54
0,2	1	0	0,091	0,898	0,406	227,29	106,73	67,00	67,10	4,87	7,64
0,3	1	0	0,127	0,904	0,43	230,99	107,48	69,20	69,52	4,95	7,74
0,4	1	0	0,165	0,907	0,46	236,74	108,22	71,74	71,84	5,01	7,83
0,5	1	0	0,203	0,912	0,488	238,99	108,45	73,60	74,08	5,08	7,92
0,6	1	0	0,225	0,914	0,505	242,52	108,09	75,40	75,59	5,13	7,98
0,7	1	0	0,26	0,918	0,529	246,40	109,91	77,73	78,51	5,19	8,07
0,8	1	0	0,286	0,92	0,549	252,64	110,70	80,42	80,91	5,25	8,14
0,9	1	0	0,305	0,922	0,563	255,14	111,24	81,86	82,50	5,28	8,19
1	1	0	0,33	0,926	0,58	257,94	111,94	84,24	85,38	5,35	8,27
1,1	1	0	0,354	0,929	0,596	259,92	112,80	86,06	87,96	5,40	8,34
1,2	1	0	0,37	0,931	0,607	260,59	112,16	87,20	89,09	5,43	8,38
1,3	1	0	0,391	0,933	0,621	264,53	113,58	89,65	92,15	5,48	8,45
1,4	1	0	0,414	0,934	0,639	270,09	114,60	92,06	94,33	5,52	8,50
1,5	1	0	0,426	0,936	0,647	272,25	114,99	93,85	96,59	5,56	8,56
1,6	1	0	0,443	0,938	0,659	273,98	114,40	95,56	98,44	5,60	8,61
1,7	1	0	0,457	0,94	0,668	276,31	115,97	97,40	101,03	5,64	8,66
1,8	1	0	0,472	0,941	0,678	278,54	116,67	99,07	103,05	5,67	8,70
1,9	1	0	0,487	0,944	0,687	280,66	117,76	101,37	106,30	5,72	8,77
2	1	0	0,502	0,945	0,698	282,49	117,54	102,87	107,82	5,74	8,80
2,1	1	0	0,509	0,946	0,701	284,01	119,33	104,45	110,12	5,77	8,84
2,2	1	0	0,523	0,948	0,71	284,62	119,33	106,04	112,09	5,81	8,88
2,3	1	0	0,528	0,948	0,714	287,50	119,46	107,71	114,12	5,83	8,92
2,4	1	0	0,541	0,95	0,723	288,53	119,77	109,19	116,36	5,86	8,96
2,5	1	0	0,551	0,951	0,729	290,55	119,99	111,22	118,73	5,89	9,01
2,6	1	0	0,562	0,952	0,736	292,98	121,60	112,97	121,23	5,92	9,04
2,7	1	0	0,571	0,953	0,741	293,05	122,66	114,39	123,67	5,95	9,08
2,8	1	0	0,585	0,954	0,752	295,47	123,26	116,34	126,18	5,98	9,12
2,9	1	0	0,591	0,955	0,755	297,38	123,47	118,12	128,37	6,00	9,16
3	1	0	0,6	0,956	0,761	298,07	123,78	119,48	130,03	6,03	9,19
3,1	1	0	0,605	0,957	0,764	300,81	125,16	121,48	132,79	6,05	9,22
3,2	1	0	0,617	0,958	0,772	303,99	126,02	124,13	136,40	6,09	9,28
3,3	1	0	0,623	0,959	0,776	302,98	125,90	125,03	137,63	6,10	9,30
3,4	1	0	0,624	0,959	0,776	305,35	126,44	126,22	138,88	6,12	9,32
3,5	1	0	0,637	0,96	0,784	307,78	127,87	129,51	143,69	6,16	9,38
3,6	1	0	0,64	0,961	0,786	305,63	127,66	128,87	143,26	6,16	9,38
3,7	1	0	0,646	0,962	0,79	307,01	128,15	131,07	146,53	6,19	9,42
3,8	1	0	0,655	0,962	0,796	312,61	129,86	134,10	149,94	6,22	9,46
3,9	1	0	0,66	0,963	0,798	309,77	129,89	134,22	150,87	6,23	9,47
4	1	0	0,666	0,964	0,802	309,99	130,06	135,59	152,71	6,25	9,50
4,5	1	0	0,691	0,966	0,818	320,09	133,69	144,67	164,58	6,35	9,64
5	1	0	0,713	0,968	0,832	323,92	136,38	151,80	174,90	6,43	9,75
5,5	1	0	0,729	0,97	0,841	329,33	139,69	159,61	186,28	6,51	9,86
6	1	0	0,748	0,973	0,852	331,45	142,06	167,84	198,75	6,59	9,99
6,5	1	0	0,764	0,974	0,862	338,82	147,18	176,47	211,32	6,66	10,09
7	1	0	0,776	0,976	0,87	341,48	149,15	182,97	220,53	6,72	10,17
7,5	1	0	0,789	0,977	0,878	348,48	152,40	191,26	232,14	6,78	10,26
8	1	0	0,799	0,978	0,884	352,70	155,77	199,78	244,86	6,84	10,35
12	1	0	0,857	0,985	0,918	380,99	180,18	260,18	335,12	7,21	10,88
16	1	0	0,887	0,988	0,935	412,80	205,68	321,53	425,78	7,48	11,27
20	1	0	0,909	0,99	0,948	434,59	230,36	380,47	516,41	7,69	11,58
24	1	0	0,923	0,992	0,956	464,83	255,74	442,12	608,16	7,87	11,84
28	1	0	0,932	0,993	0,961	489,38	280,36	501,88	699,08	8,02	12,06
32	1	0	0,941	0,994	0,966	514,66	304,73	560,60	787,77	8,14	12,25
36	1	0	0,947	0,994	0,97	540,39	329,04	619,01	875,67	8,25	12,42
40	1	0	0,953	0,995	0,973	567,37	358,07	686,87	978,54	8,37	12,59
44	1	0	0,956	0,995	0,975	591,54	381,18	743,58	1063,46	8,46	12,72
48	1	0	0,96	0,996	0,977	618,08	407,83	807,14	1160,37	8,55	12,85
52	1	0	0,963	0,996	0,979	643,96	433,18	867,00	1251,24	8,63	12,97
56	1	0	0,965	0,996	0,98	664,86	454,98	918,01	1329,55	8,69	13,06
60	1	0	0,968	0,997	0,982	692,51	481,91	984,13	1428,47	8,76	13,17
64	1	0	0,969	0,997	0,983	719,29	508,20	1048,13	1525,06	8,83	13,27
68	1	0	0,971	0,997	0,984	743,99	531,89	1104,65	1609,70	8,89	13,35
72	1	0	0,972	0,997	0,984	766,24	553,52	1157,30	1688,89	8,94	13,43
76	1	0	0,974	0,997	0,985	793,89	581,28	1224,48	1788,84	9,00	13,52
80	1	0	0,975	0,997	0,986	812,09	601,56	1273,05	1864,30	9,04	13,58
84	1	0	0,977	0,997	0,987	839,56	630,17	1339,15	1966,00	9,09	13,66
88	1	0	0,978	0,998	0,987	866,04	656,82	1404,68	2063,34	9,14	13,73
92	1	0	0,978	0,998	0,988	887,24	677,73	1456,12	2139,24	9,18	13,79
96	1	0,001	0,979	0,998	0,988	915,53	706,16	1525,27	2245,05	9,23	13,86
100	1	0,001	0,98	0,998	0,989	940,68	730,48	1583,45	2331,87	9,26	13,92

TABLEAU. B.0.33: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(2; 0,5)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,003	0,916	0,227	153,76	104,84	48,11	60,46	4,70	7,33
0,1	1	0	0,046	0,922	0,267	155,57	105,39	49,82	62,64	4,78	7,44
0,2	1	0	0,092	0,925	0,308	158,22	105,38	51,36	64,05	4,84	7,51
0,3	1	0	0,128	0,928	0,339	161,11	105,85	53,14	66,03	4,91	7,61
0,4	1	0	0,169	0,932	0,372	162,81	106,58	54,80	68,24	4,98	7,70
0,5	1	0	0,198	0,934	0,398	165,77	107,46	56,27	69,90	5,02	7,76
0,6	1	0	0,224	0,937	0,418	166,65	107,27	57,66	71,60	5,08	7,83
0,7	1	0	0,255	0,938	0,444	170,45	109,40	59,51	73,97	5,13	7,90
0,8	1	0	0,285	0,941	0,469	172,12	109,70	61,03	75,82	5,18	7,97
0,9	1	0	0,311	0,943	0,491	173,53	109,49	62,39	77,45	5,22	8,03
1	1	0	0,335	0,945	0,509	174,58	110,39	63,83	79,55	5,27	8,10
1,1	1	0	0,35	0,947	0,521	176,72	110,57	65,35	81,14	5,31	8,15
1,2	1	0	0,373	0,948	0,54	178,33	111,38	66,62	82,92	5,35	8,20
1,3	1	0	0,392	0,95	0,555	179,30	111,44	68,12	84,77	5,39	8,26
1,4	1	0	0,415	0,952	0,572	180,12	112,11	69,59	87,01	5,44	8,32
1,5	1	0	0,426	0,953	0,582	182,27	112,68	71,11	88,92	5,47	8,37
1,6	1	0	0,446	0,954	0,598	183,69	113,71	72,46	90,73	5,51	8,41
1,7	1	0	0,455	0,955	0,604	184,91	114,00	73,71	92,59	5,53	8,46
1,8	1	0	0,478	0,957	0,622	186,00	114,83	75,37	94,75	5,58	8,51
1,9	1	0	0,487	0,958	0,629	187,50	114,59	76,73	96,26	5,61	8,55
2	1	0	0,499	0,959	0,638	188,53	115,61	78,20	98,63	5,64	8,60
2,1	1	0	0,508	0,96	0,645	188,80	115,36	79,04	99,65	5,66	8,63
2,2	1	0	0,52	0,961	0,654	190,91	116,56	80,66	101,87	5,69	8,68
2,3	1	0	0,534	0,962	0,666	192,10	116,28	82,30	104,04	5,73	8,73
2,4	1	0	0,538	0,963	0,668	193,60	117,85	83,56	105,86	5,75	8,76
2,5	1	0	0,555	0,964	0,681	193,40	117,58	84,74	107,59	5,78	8,80
2,6	1	0	0,564	0,965	0,687	192,40	117,89	85,77	109,45	5,81	8,83
2,7	1	0	0,579	0,966	0,699	193,86	118,39	87,10	111,48	5,83	8,87
2,8	1	0	0,58	0,966	0,701	196,42	119,08	88,30	112,56	5,85	8,89
2,9	1	0	0,59	0,967	0,708	195,88	118,84	89,32	114,36	5,87	8,93
3	1	0	0,6	0,968	0,715	197,32	120,33	91,23	117,17	5,91	8,97
3,1	1	0	0,605	0,968	0,718	198,34	120,98	92,28	118,48	5,92	9,00
3,2	1	0	0,612	0,968	0,725	201,36	121,43	93,95	120,12	5,94	9,02
3,3	1	0	0,623	0,969	0,732	200,63	121,45	95,21	122,55	5,97	9,07
3,4	1	0	0,624	0,97	0,733	202,00	122,53	96,46	124,23	5,99	9,09
3,5	1	0	0,635	0,97	0,742	203,42	123,11	98,39	126,92	6,02	9,14
3,6	1	0	0,639	0,971	0,743	203,29	123,70	99,01	127,94	6,03	9,15
3,7	1	0	0,646	0,971	0,749	204,49	124,45	100,65	130,48	6,06	9,19
3,8	1	0	0,653	0,972	0,755	205,37	124,66	101,42	131,35	6,07	9,20
3,9	1	0	0,658	0,972	0,758	206,32	125,25	103,42	134,40	6,10	9,25
4	1	0	0,667	0,973	0,764	206,08	125,51	104,28	135,58	6,12	9,27
4,5	1	0	0,689	0,975	0,78	210,51	128,48	110,54	144,90	6,20	9,40
5	1	0	0,713	0,977	0,798	214,26	131,01	118,02	155,73	6,30	9,54
5,5	1	0	0,732	0,978	0,812	216,04	133,09	123,23	163,71	6,37	9,63
6	1	0	0,748	0,98	0,823	220,01	135,78	129,61	172,88	6,44	9,73
6,5	1	0	0,761	0,981	0,832	223,22	138,16	135,55	181,65	6,50	9,82
7	1	0	0,779	0,982	0,846	226,90	141,66	142,73	192,50	6,57	9,92
7,5	1	0	0,79	0,983	0,854	230,81	144,56	149,83	202,94	6,64	10,02
8	1	0	0,8	0,984	0,861	233,02	146,64	155,34	211,51	6,68	10,09
12	1	0	0,856	0,988	0,901	257,02	166,85	205,13	285,43	7,04	10,61
16	1	0	0,887	0,991	0,922	278,22	186,95	253,44	358,27	7,30	10,99
20	1	0	0,907	0,993	0,936	299,75	207,39	303,48	434,08	7,51	11,30
24	1	0	0,922	0,994	0,946	320,70	228,34	354,00	510,08	7,69	11,56
28	1	0	0,933	0,995	0,954	341,18	249,32	403,62	585,16	7,84	11,78
32	1	0	0,94	0,995	0,959	362,59	269,92	453,34	661,07	7,96	11,97
36	1	0	0,948	0,996	0,964	385,37	292,22	507,36	741,68	8,09	12,16
40	1	0	0,951	0,996	0,967	404,09	310,64	549,86	806,33	8,17	12,29
44	1	0	0,956	0,996	0,97	425,00	332,48	602,54	885,66	8,27	12,43
48	1	0	0,959	0,997	0,972	445,78	352,49	651,42	960,34	8,36	12,56
52	1	0	0,963	0,997	0,975	466,32	373,70	702,13	1036,85	8,44	12,68
56	1	0	0,965	0,997	0,976	488,10	396,02	754,71	1117,51	8,51	12,79
60	1	0	0,967	0,997	0,978	508,12	415,51	799,60	1184,56	8,57	12,88
64	1	0	0,969	0,998	0,979	527,55	434,91	847,83	1258,88	8,64	12,98
68	1	0	0,971	0,998	0,98	545,89	453,97	894,40	1329,87	8,69	13,06
72	1	0	0,973	0,998	0,981	569,16	475,87	947,25	1407,70	8,75	13,15
76	1	0	0,974	0,998	0,982	587,26	496,22	994,38	1481,74	8,80	13,23
80	1	0	0,975	0,998	0,983	609,96	517,42	1045,91	1557,19	8,85	13,30
84	1	0	0,977	0,998	0,984	632,40	540,86	1102,46	1643,18	8,91	13,39
88	1	0	0,977	0,998	0,985	648,57	557,38	1140,21	1701,45	8,94	13,44
92	1	0	0,978	0,998	0,985	669,65	578,31	1193,27	1779,31	8,99	13,51
96	1	0	0,98	0,998	0,986	690,89	600,56	1245,94	1860,28	9,04	13,58
100	1	0	0,98	0,998	0,986	710,34	619,61	1291,56	1930,11	9,07	13,63

TABLEAU. B.0.34: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,25)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,002	0,935	0,119	117,44	105,12	40,26	59,61	4,71	7,27
0,1	1	0	0,047	0,939	0,16	117,55	104,70	41,18	60,87	4,77	7,35
0,2	1	0	0,089	0,941	0,199	119,21	105,84	42,39	62,51	4,82	7,42
0,3	1	0	0,124	0,944	0,232	119,21	105,41	43,16	63,53	4,87	7,49
0,4	1	0	0,16	0,947	0,265	119,72	105,38	44,35	65,29	4,93	7,57
0,5	1	0	0,2	0,949	0,301	121,15	106,42	45,60	66,95	4,98	7,64
0,6	1	0	0,234	0,951	0,329	120,85	106,45	46,37	68,22	5,02	7,70
0,7	1	0	0,259	0,953	0,353	122,68	107,52	47,80	70,16	5,07	7,77
0,8	1	0	0,288	0,955	0,38	122,82	107,49	48,62	71,49	5,11	7,83
0,9	1	0	0,314	0,957	0,403	123,74	108,07	50,00	73,39	5,16	7,89
1	1	0	0,329	0,958	0,418	125,16	108,69	51,02	74,58	5,19	7,93
1,1	1	0	0,351	0,959	0,436	125,83	109,42	52,12	76,21	5,24	7,99
1,2	1	0	0,374	0,96	0,457	126,36	109,57	53,03	77,67	5,27	8,04
1,3	1	0	0,394	0,961	0,476	127,02	109,83	53,86	78,76	5,29	8,07
1,4	1	0	0,413	0,963	0,492	127,48	110,08	55,16	80,74	5,34	8,14
1,5	1	0	0,426	0,964	0,504	127,99	110,72	56,23	82,46	5,37	8,19
1,6	1	0	0,438	0,965	0,514	128,73	111,24	57,27	83,78	5,40	8,23
1,7	1	0	0,46	0,966	0,534	129,14	111,21	58,26	85,21	5,44	8,27
1,8	1	0	0,471	0,967	0,544	129,71	111,82	59,25	86,63	5,46	8,31
1,9	1	0	0,485	0,967	0,556	130,65	112,64	60,28	88,32	5,49	8,35
2	1	0	0,497	0,969	0,567	130,71	112,55	61,39	89,96	5,52	8,40
2,1	1	0	0,509	0,969	0,577	131,78	113,60	62,19	91,03	5,54	8,42
2,2	1	0	0,521	0,97	0,589	132,47	113,48	63,63	93,01	5,58	8,47
2,3	1	0	0,529	0,971	0,595	133,01	114,30	64,55	94,41	5,60	8,51
2,4	1	0	0,546	0,971	0,611	133,07	114,01	65,37	95,58	5,62	8,54
2,5	1	0	0,557	0,972	0,62	132,45	113,78	66,19	97,04	5,65	8,58
2,6	1	0	0,565	0,972	0,626	134,52	115,69	67,49	98,92	5,67	8,61
2,7	1	0	0,572	0,973	0,633	135,34	115,98	68,33	99,87	5,69	8,63
2,8	1	0	0,58	0,973	0,641	136,12	116,26	69,57	101,69	5,72	8,67
2,9	1	0	0,589	0,974	0,648	136,14	116,57	70,64	103,35	5,74	8,71
3	1	0	0,597	0,975	0,656	136,95	116,63	71,99	105,26	5,77	8,75
3,1	1	0	0,605	0,975	0,661	137,30	118,01	72,56	106,38	5,78	8,77
3,2	1	0	0,614	0,975	0,67	137,08	117,19	73,07	107,03	5,80	8,79
3,3	1	0	0,619	0,976	0,674	138,41	118,58	74,56	109,57	5,83	8,83
3,4	1	0	0,627	0,976	0,681	139,79	119,78	75,99	111,38	5,85	8,86
3,5	1	0	0,634	0,977	0,687	138,40	118,62	76,45	112,26	5,87	8,89
3,6	1	0	0,639	0,977	0,691	139,28	119,40	77,65	113,87	5,89	8,92
3,7	1	0	0,648	0,978	0,699	140,41	120,40	78,95	115,88	5,91	8,95
3,8	1	0	0,656	0,978	0,707	140,50	120,45	79,71	117,10	5,93	8,97
3,9	1	0	0,66	0,979	0,709	140,49	120,82	80,63	118,65	5,94	9,00
4	1	0	0,663	0,979	0,711	140,73	121,04	81,49	119,76	5,96	9,02
4,5	1	0	0,691	0,981	0,737	144,84	124,05	87,22	128,01	6,05	9,15
5	1	0	0,714	0,982	0,756	145,71	125,61	92,41	136,25	6,14	9,28
5,5	1	0	0,733	0,983	0,773	149,35	128,23	97,30	143,28	6,21	9,37
6	1	0	0,747	0,984	0,785	151,86	130,78	102,42	151,13	6,27	9,47
6,5	1	0	0,762	0,985	0,798	152,62	131,73	106,64	157,79	6,33	9,56
7	1	0	0,775	0,986	0,809	155,21	134,07	111,91	165,43	6,39	9,65
7,5	1	0	0,787	0,987	0,819	157,54	135,86	116,78	172,58	6,45	9,73
8	1	0	0,798	0,987	0,829	159,03	137,52	121,89	180,39	6,50	9,81
12	1	0	0,856	0,991	0,877	176,79	155,21	161,79	240,69	6,85	10,32
16	1	0	0,888	0,993	0,906	193,18	170,71	201,87	301,28	7,11	10,70
20	1	0	0,908	0,994	0,922	210,57	188,21	243,68	364,62	7,32	11,02
24	1	0	0,922	0,995	0,934	227,65	205,02	282,62	423,16	7,49	11,26
28	1	0	0,932	0,996	0,943	243,86	221,77	322,80	484,43	7,64	11,48
32	1	0	0,941	0,996	0,95	260,51	237,82	362,42	544,14	7,76	11,67
36	1	0	0,947	0,997	0,956	277,01	254,56	402,68	605,58	7,87	11,84
40	1	0	0,952	0,997	0,959	293,66	271,53	442,18	665,28	7,97	11,99
44	1	0	0,956	0,997	0,963	311,77	289,74	486,32	731,83	8,08	12,14
48	1	0	0,96	0,998	0,966	327,33	305,29	523,77	788,15	8,15	12,25
52	1	0	0,963	0,998	0,969	342,79	321,19	562,48	847,37	8,23	12,36
56	1	0	0,965	0,998	0,971	361,05	339,08	603,07	909,34	8,30	12,47
60	1	0	0,967	0,998	0,973	375,67	354,42	643,55	970,26	8,37	12,58
64	1	0	0,97	0,998	0,974	393,67	372,30	685,51	1033,04	8,44	12,67
68	1	0	0,971	0,998	0,976	411,06	389,82	725,08	1093,64	8,49	12,76
72	1	0	0,973	0,998	0,977	425,89	404,99	760,81	1148,69	8,54	12,84
76	1	0	0,974	0,998	0,978	442,13	421,75	802,44	1211,60	8,60	12,92
80	1	0	0,975	0,999	0,979	461,14	440,71	847,73	1279,42	8,66	13,00
84	1	0	0,977	0,999	0,98	474,17	454,28	880,20	1330,23	8,69	13,06
88	1	0	0,978	0,999	0,981	491,66	471,31	921,88	1392,34	8,74	13,13
92	1	0	0,979	0,999	0,982	509,46	489,38	963,99	1455,84	8,79	13,20
96	1	0	0,979	0,999	0,983	524,38	504,40	1000,14	1510,59	8,83	13,26
100	1	0	0,98	0,999	0,983	546,12	525,71	1050,78	1584,98	8,88	13,33

TABLEAU. B.0.35: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0,1)$ ,  $n=100$

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	-0,004	0,942	0,042	105,68	103,75	37,70	58,94	4,71	7,26
0,1	1	0	0,044	0,944	0,087	106,87	104,95	38,73	60,57	4,76	7,33
0,2	1	0	0,095	0,946	0,138	107,93	105,57	39,76	61,93	4,81	7,40
0,3	1	0	0,131	0,949	0,171	108,06	105,79	40,57	63,21	4,86	7,46
0,4	1	0	0,167	0,951	0,205	107,94	105,45	41,28	64,24	4,90	7,52
0,5	1	0	0,2	0,953	0,236	108,29	105,93	42,19	65,67	4,95	7,59
0,6	1	0	0,23	0,954	0,265	108,90	106,34	43,01	66,79	4,98	7,63
0,7	1	0	0,26	0,956	0,294	110,34	107,76	44,38	68,96	5,04	7,71
0,8	1	0	0,289	0,958	0,321	109,56	106,84	44,90	69,61	5,07	7,75
0,9	1	0	0,307	0,959	0,338	111,51	108,74	46,06	71,23	5,11	7,80
1	1	0	0,332	0,961	0,36	111,04	108,44	46,77	72,18	5,14	7,84
1,1	1	0	0,348	0,962	0,376	111,13	108,42	47,60	73,58	5,18	7,90
1,2	1	0	0,368	0,963	0,395	110,75	108,09	48,15	74,64	5,21	7,94
1,3	1	0	0,391	0,964	0,417	110,93	108,25	49,08	76,00	5,24	7,99
1,4	1	0	0,408	0,965	0,432	112,21	109,56	50,15	77,64	5,27	8,04
1,5	1	0	0,425	0,966	0,449	113,05	110,36	51,10	78,98	5,31	8,08
1,6	1	0	0,446	0,967	0,47	113,49	110,57	51,93	80,30	5,33	8,12
1,7	1	0	0,458	0,968	0,48	113,35	110,56	52,85	81,74	5,37	8,17
1,8	1	0	0,475	0,969	0,497	113,61	110,66	53,56	82,59	5,39	8,19
1,9	1	0	0,484	0,969	0,505	114,57	111,75	54,60	84,28	5,42	8,24
2	1	0	0,501	0,97	0,523	115,34	112,23	55,86	86,34	5,46	8,30
2,1	1	0	0,514	0,971	0,534	114,98	112,03	56,53	87,07	5,48	8,32
2,2	1	0	0,518	0,972	0,538	115,63	112,62	57,13	88,10	5,49	8,35
2,3	1	0	0,536	0,973	0,554	115,85	112,93	58,49	90,10	5,54	8,40
2,4	1	0	0,544	0,973	0,562	116,15	113,30	58,79	90,68	5,54	8,41
2,5	1	0	0,552	0,974	0,57	116,42	113,37	60,03	92,53	5,58	8,46
2,6	1	0	0,566	0,974	0,585	117,47	114,27	61,13	94,31	5,60	8,50
2,7	1	0	0,571	0,975	0,589	117,37	114,49	61,48	94,78	5,61	8,52
2,8	1	0	0,582	0,975	0,598	117,49	114,55	62,41	95,96	5,64	8,55
2,9	1	0	0,591	0,976	0,607	118,20	115,22	63,51	97,84	5,66	8,59
3	1	0	0,599	0,976	0,615	118,15	115,18	64,33	98,99	5,69	8,62
3,1	1	0	0,603	0,977	0,619	118,88	115,78	65,08	99,96	5,70	8,63
3,2	1	0	0,617	0,977	0,631	119,26	116,26	66,10	101,74	5,73	8,67
3,3	1	0	0,624	0,978	0,639	119,71	116,47	66,98	102,93	5,74	8,70
3,4	1	0	0,627	0,978	0,641	119,81	116,79	67,86	104,42	5,76	8,73
3,5	1	0	0,633	0,978	0,648	119,78	116,62	68,38	105,15	5,78	8,75
3,6	1	0	0,641	0,979	0,656	120,20	117,13	69,29	106,74	5,80	8,78
3,7	1	0	0,651	0,979	0,664	121,40	118,41	70,79	108,76	5,82	8,82
3,8	1	0	0,656	0,98	0,669	121,57	118,39	71,55	109,81	5,84	8,84
3,9	1	0	0,659	0,98	0,673	122,06	118,96	72,63	111,53	5,86	8,87
4	1	0	0,668	0,98	0,681	123,03	119,91	73,64	113,16	5,88	8,90
4,5	1	0	0,689	0,982	0,7	123,98	120,87	76,93	117,97	5,95	8,99
5	1	0	0,711	0,983	0,722	125,35	122,23	81,39	124,85	6,02	9,10
5,5	1	0	0,733	0,984	0,743	127,71	124,49	86,24	132,31	6,10	9,22
6	1	0	0,75	0,985	0,759	130,00	126,77	90,52	138,43	6,16	9,31
6,5	1	0	0,763	0,986	0,772	131,88	128,73	95,34	145,80	6,23	9,41
7	1	0	0,776	0,987	0,784	132,50	129,32	98,82	151,19	6,28	9,48
7,5	1	0	0,788	0,987	0,796	135,28	132,05	103,65	158,46	6,34	9,57
8	1	0	0,799	0,988	0,806	136,97	133,84	107,88	164,99	6,39	9,64
12	1	0	0,857	0,991	0,862	152,11	148,82	143,28	218,65	6,74	10,15
16	1	0	0,888	0,993	0,892	165,91	162,98	178,84	272,42	7,00	10,53
20	1	0	0,909	0,995	0,912	181,26	177,90	213,43	324,32	7,20	10,82
24	1	0	0,922	0,995	0,925	194,88	191,96	247,41	376,34	7,36	11,07
28	1	0	0,933	0,996	0,935	209,91	206,75	283,10	429,59	7,51	11,29
32	1	0	0,94	0,996	0,942	222,91	220,29	315,82	479,61	7,63	11,46
36	1	0	0,947	0,997	0,949	238,01	235,61	351,83	534,73	7,74	11,64
40	1	0	0,952	0,997	0,954	253,13	250,85	388,28	589,64	7,85	11,79
44	1	0	0,956	0,997	0,958	266,79	264,65	421,22	639,23	7,93	11,92
48	1	0	0,959	0,998	0,961	281,11	278,93	457,41	694,28	8,02	12,05
52	1	0	0,963	0,998	0,964	296,26	294,10	492,95	748,12	8,10	12,17
56	1	0	0,965	0,998	0,966	309,75	307,78	524,81	796,69	8,16	12,27
60	1	0	0,967	0,998	0,969	323,76	321,84	559,06	847,88	8,23	12,36
64	1	0	0,969	0,998	0,97	338,31	336,73	594,20	902,06	8,29	12,46
68	1	0	0,971	0,998	0,972	353,30	352,06	633,05	960,45	8,36	12,56
72	1	0	0,973	0,998	0,974	370,28	369,21	670,51	1018,01	8,42	12,65
76	1	0	0,974	0,998	0,975	383,34	382,07	702,89	1065,41	8,47	12,72
80	1	0	0,975	0,999	0,976	395,23	394,18	731,51	1109,73	8,51	12,78
84	1	0	0,977	0,999	0,978	414,24	413,24	778,13	1180,05	8,57	12,88
88	1	0	0,978	0,999	0,978	426,24	425,50	807,17	1224,35	8,61	12,93
92	1	0	0,979	0,999	0,98	442,50	441,96	849,10	1287,94	8,66	13,01
96	1	0	0,979	0,999	0,98	456,13	455,54	881,08	1335,10	8,70	13,07
100	1	0	0,98	0,999	0,981	470,60	470,46	914,43	1387,07	8,74	13,13



TABLEAU. B.0.36: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 0)$ ,  $n=100$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	1	0	0,002	0,943	0,001	103,60	103,54	37,17	58,69	4,70	7,25
0,1	1	0	0,054	0,945	0,052	105,61	105,49	38,45	60,61	4,76	7,32
0,2	1	0	0,088	0,947	0,083	105,20	105,08	39,04	61,50	4,80	7,38
0,3	1	0	0,129	0,95	0,123	104,94	104,80	39,82	62,69	4,85	7,45
0,4	1	0	0,166	0,952	0,16	105,14	105,05	40,49	63,79	4,89	7,51
0,5	1	0	0,196	0,953	0,186	106,23	106,24	41,29	65,09	4,92	7,55
0,6	1	0	0,23	0,955	0,22	106,28	106,29	42,35	66,57	4,98	7,62
0,7	1	0	0,258	0,956	0,245	107,24	107,18	43,02	67,59	5,01	7,66
0,8	1	0	0,291	0,957	0,277	107,61	107,54	43,85	68,89	5,04	7,71
0,9	1	0	0,306	0,959	0,295	107,61	107,71	44,63	70,06	5,08	7,76
1	1	0	0,328	0,96	0,316	108,16	108,12	45,38	71,17	5,11	7,80
1,1	1	0	0,352	0,961	0,339	107,98	107,89	46,00	72,05	5,14	7,84
1,2	1	0	0,377	0,963	0,364	108,42	108,40	46,87	73,33	5,17	7,89
1,3	1	0	0,391	0,964	0,378	109,31	109,30	47,84	74,88	5,21	7,94
1,4	1	0	0,411	0,965	0,398	108,79	108,73	48,31	75,54	5,23	7,97
1,5	1	0	0,426	0,966	0,412	109,39	109,31	49,43	77,13	5,27	8,02
1,6	1	0	0,439	0,967	0,424	110,12	110,01	50,22	78,40	5,30	8,06
1,7	1	0	0,455	0,967	0,439	109,35	109,33	50,55	79,09	5,31	8,09
1,8	1	0	0,469	0,968	0,455	110,58	110,54	51,69	80,73	5,35	8,13
1,9	1	0	0,485	0,969	0,471	110,44	110,38	52,27	81,58	5,37	8,16
2	1	0	0,493	0,97	0,478	110,93	110,87	52,94	82,62	5,39	8,19
2,1	1	0	0,505	0,971	0,491	110,27	110,25	53,63	83,69	5,42	8,23
2,2	1	0	0,524	0,971	0,509	111,35	111,36	54,82	85,47	5,45	8,28
2,3	1	0	0,532	0,972	0,517	112,32	112,30	55,94	87,19	5,48	8,32
2,4	1	0	0,545	0,972	0,53	112,71	112,73	56,47	87,97	5,49	8,34
2,5	1	0	0,554	0,973	0,54	112,43	112,39	57,06	88,83	5,51	8,37
2,6	1	0	0,563	0,974	0,548	113,05	113,06	57,88	90,08	5,54	8,40
2,7	1	0	0,573	0,974	0,558	113,34	113,37	58,87	91,56	5,56	8,44
2,8	1	0	0,578	0,975	0,564	113,76	113,66	59,54	92,52	5,58	8,46
2,9	1	0	0,593	0,975	0,579	114,76	114,80	60,73	94,35	5,61	8,50
3	1	0	0,598	0,976	0,584	114,41	114,45	61,11	94,95	5,62	8,52
3,1	1	0	0,605	0,976	0,59	114,79	114,81	62,14	96,51	5,65	8,56
3,2	1	0	0,615	0,976	0,601	116,18	116,18	63,11	97,98	5,66	8,58
3,3	1	0	0,618	0,977	0,604	115,87	115,86	63,58	98,77	5,68	8,60
3,4	1	0	0,626	0,977	0,612	116,04	116,06	64,24	99,74	5,69	8,63
3,5	1	0	0,633	0,977	0,619	116,66	116,67	65,04	100,91	5,71	8,65
3,6	1	0	0,641	0,978	0,626	115,85	115,88	65,93	102,32	5,74	8,69
3,7	1	0	0,645	0,979	0,631	116,80	116,85	66,72	103,33	5,75	8,71
3,8	1	0	0,655	0,979	0,642	117,44	117,50	67,65	104,94	5,77	8,74
3,9	1	0	0,657	0,979	0,644	117,17	117,22	68,20	105,67	5,79	8,76
4	1	0	0,666	0,98	0,653	117,40	117,43	69,26	107,27	5,81	8,79
4,5	1	0	0,692	0,981	0,679	118,76	118,77	72,93	112,66	5,89	8,90
5	1	0	0,712	0,982	0,7	120,61	120,74	76,80	118,79	5,96	9,00
5,5	1	0	0,73	0,983	0,718	122,54	122,71	80,74	124,90	6,02	9,10
6	1	0	0,749	0,985	0,738	123,82	123,93	84,64	130,63	6,09	9,20
6,5	1	0	0,765	0,985	0,754	126,55	126,64	88,94	137,03	6,15	9,28
7	1	0	0,774	0,986	0,764	126,59	126,73	92,71	142,97	6,21	9,38
7,5	1	0	0,788	0,987	0,777	129,16	129,39	96,40	148,47	6,26	9,44
8	1	0	0,799	0,988	0,789	131,03	131,28	101,31	156,10	6,32	9,54
12	1	0	0,857	0,991	0,849	142,91	143,26	132,46	203,19	6,65	10,02
16	1	0	0,889	0,993	0,883	156,58	157,03	164,47	251,59	6,91	10,40
20	1	0	0,908	0,994	0,903	170,04	170,67	195,79	299,13	7,10	10,69
24	1	0	0,922	0,995	0,918	182,39	183,08	226,86	346,36	7,27	10,93
28	1	0	0,933	0,996	0,929	196,02	196,93	259,99	396,25	7,42	11,16
32	1	0	0,941	0,996	0,937	209,68	210,76	289,76	441,75	7,54	11,33
36	1	0	0,947	0,997	0,944	221,32	222,38	321,63	489,83	7,65	11,50
40	1	0	0,952	0,997	0,949	235,71	236,83	354,68	539,15	7,75	11,65
44	1	0	0,956	0,997	0,953	247,48	248,83	384,04	584,05	7,84	11,78
48	1	0	0,96	0,997	0,957	260,88	262,50	415,83	632,88	7,92	11,91
52	1	0	0,962	0,998	0,96	274,82	276,27	449,12	682,44	8,00	12,03
56	1	0	0,965	0,998	0,963	287,16	288,77	479,98	729,14	8,07	12,13
60	1	0	0,967	0,998	0,965	299,49	301,34	510,14	775,20	8,14	12,23
64	1	0	0,97	0,998	0,968	314,49	316,25	546,21	829,09	8,21	12,33
68	1	0	0,971	0,998	0,969	325,79	328,12	573,87	872,45	8,26	12,41
72	1	0	0,973	0,998	0,971	340,58	342,84	608,45	924,26	8,32	12,50
76	1	0	0,974	0,998	0,973	355,82	357,90	645,83	979,59	8,38	12,59
80	1	0	0,976	0,999	0,974	366,17	368,74	671,94	1020,60	8,42	12,65
84	1	0	0,977	0,999	0,975	379,27	381,77	702,86	1066,78	8,47	12,72
88	1	0	0,977	0,999	0,976	394,90	397,56	739,28	1121,87	8,52	12,80
92	1	0	0,979	0,999	0,977	406,80	409,79	766,74	1164,37	8,56	12,85
96	1	0	0,979	0,999	0,978	418,24	421,08	797,26	1209,22	8,60	12,92
100	1	0	0,98	0,999	0,979	428,76	431,95	820,68	1245,83	8,63	12,96

TABLEAU. B.0.37: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (0; 0)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogg
0	0,502	0,498	0,007	0,005	0,007	17,11	16,91	19,53	31,03	-1,89	4,04
0,1	0,505	0,495	0,046	-0,004	-0,004	17,23	17,02	19,67	31,21	-2,04	4,04
0,2	0,492	0,508	0,079	0,006	0	17,23	17	19,66	31,16	-1,91	4,03
0,3	0,502	0,498	0,127	-0,012	0,005	17,36	17,13	19,77	31,38	-1,96	4,03
0,4	0,490	0,510	0,159	0,005	0,003	17,67	17,45	20,13	31,88	-1,97	4,02
0,5	0,496	0,504	0,198	-0,002	0,003	17,26	17,03	19,66	31,26	-1,97	4,05
0,6	0,503	0,497	0,218	-0,005	-0,001	17,61	17,39	20,05	31,89	-1,99	4,08
0,7	0,490	0,510	0,266	0,009	0,01	17,35	17,11	19,75	31,37	-2,08	4,04
0,8	0,503	0,497	0,283	-0,007	-0,011	17,27	17,06	19,64	31,25	-2,03	4,03
0,9	0,502	0,498	0,306	0,005	-0,001	17,51	17,31	19,89	31,74	-2,13	4,08
1	0,500	0,500	0,33	-0,002	-0,007	17,48	17,22	19,89	31,52	-1,92	4,04
1,1	0,497	0,503	0,339	-0,01	-0,009	17,68	17,4	20,1	31,9	-1,99	4,06
1,2	0,510	0,490	0,369	-0,008	-0,005	17,53	17,23	19,92	31,56	-2,03	4,05
1,3	0,509	0,491	0,385	0	-0,004	17,7	17,45	20,1	31,89	-2,04	4,02
1,4	0,497	0,503	0,412	-0,005	-0,006	17,78	17,49	20,17	31,98	-2,04	4,05
1,5	0,502	0,498	0,424	-0,002	0,011	17,32	17,05	19,66	31,25	-2,03	4,04
1,6	0,509	0,491	0,448	0,002	0,001	17,3	16,98	19,62	31,12	-2,1	4,04
1,7	0,495	0,505	0,441	0	-0,007	17,68	17,37	20,07	31,76	-1,89	4,03
1,8	0,502	0,498	0,466	-0,017	-0,01	17,48	17,17	19,81	31,47	-2,05	4,04
1,9	0,497	0,503	0,484	-0,006	0,002	17,36	17,02	19,67	31,2	-1,96	4,05
2	0,503	0,497	0,493	0,003	-0,003	17,23	16,9	19,54	31,13	-1,97	4,1
2,1	0,499	0,501	0,488	-0,006	0,002	17,21	16,83	19,57	30,9	-1,85	4,05
2,2	0,505	0,495	0,507	0,003	0,002	17,74	17,4	20,12	31,93	-1,91	4,09
2,3	0,503	0,497	0,531	0,007	0,011	17,13	16,73	19,41	30,72	-1,95	4,04
2,4	0,504	0,496	0,534	0,006	-0,003	17,14	16,82	19,41	30,9	-1,92	4,05
2,5	0,512	0,488	0,544	-0,008	-0,001	17,43	17,03	19,75	31,27	-1,81	4,08
2,6	0,497	0,503	0,554	-0,008	0,002	17,64	17,27	19,96	31,56	-1,91	4,01
2,7	0,496	0,504	0,564	0,013	-0,003	17,57	17,21	19,88	31,53	-1,9	4,03
2,8	0,500	0,500	0,576	0,005	0,002	17,57	17,17	19,86	31,46	-1,99	4,03
2,9	0,504	0,496	0,589	0,002	-0,004	17,58	17,14	19,86	31,43	-2,02	4,05
3	0,498	0,502	0,597	-0,001	-0,003	17,78	17,37	20,09	31,82	-2,01	4,07
3,1	0,505	0,495	0,6	0,01	0,009	17,64	17,3	19,91	31,69	-1,95	4,05
3,2	0,503	0,497	0,604	-0,003	-0,004	17,72	17,32	20,04	31,74	-1,84	4,06
3,3	0,500	0,500	0,616	-0,016	-0,001	17,48	17,08	19,72	31,23	-2,1	4,01
3,4	0,503	0,497	0,617	0,003	0,002	17,66	17,28	19,92	31,67	-2,1	4,06
3,5	0,500	0,500	0,626	-0,009	-0,017	17,7	17,33	19,96	31,71	-1,96	4,03
3,6	0,492	0,508	0,622	0,005	-0,007	17,74	17,34	20,02	31,8	-1,98	4,08
3,7	0,501	0,499	0,637	-0,004	0,004	17,85	17,45	20,12	31,9	-1,95	4,04
3,8	0,499	0,501	0,643	0,008	0,004	17,41	16,98	19,64	31,16	-1,94	4,05
3,9	0,495	0,505	0,656	-0,001	0	17,62	17,21	19,88	31,51	-1,92	4,04
4	0,494	0,506	0,659	-0,006	-0,001	17,68	17,24	19,92	31,57	-2,1	4,04
4,5	0,497	0,503	0,683	-0,008	-0,01	17,33	16,89	19,52	30,98	-2,05	4,04
5	0,498	0,502	0,705	0,009	0,007	17,32	16,93	19,5	31,12	-1,78	4,07
5,5	0,499	0,501	0,719	-0,003	0,002	17,49	17,01	19,68	31,2	-1,95	4,05
6	0,502	0,498	0,747	-0,011	-0,012	17,57	17,1	19,75	31,37	-1,94	4,06
6,5	0,504	0,496	0,758	0,007	-0,001	17,89	17,41	20,07	31,89	-2,05	4,06
7	0,506	0,494	0,768	-0,006	-0,002	17,62	17,1	19,75	31,38	-1,99	4,07
7,5	0,494	0,506	0,781	-0,018	-0,013	17,64	17,1	19,77	31,33	-1,99	4,03
8	0,502	0,498	0,796	0,011	0,008	17,58	17,01	19,7	31,18	-2,01	4,04
12	0,499	0,501	0,85	0	0	18,01	17,41	20,11	31,85	-2,02	4,04
16	0,501	0,499	0,883	-0,001	-0,01	17,76	17,15	19,81	31,36	-1,81	4,01
20	0,494	0,506	0,905	-0,005	-0,009	18,13	17,46	20,17	32,02	-2,02	4,09
24	0,501	0,499	0,919	0,001	-0,004	17,61	16,98	19,6	31,13	-1,85	4,04
28	0,504	0,496	0,931	0,002	0,002	17,76	17,05	19,74	31,28	-1,84	4,06
32	0,504	0,496	0,937	0,004	0,009	17,83	17	19,83	31,13	-1,9	4,02
36	0,500	0,500	0,944	-0,007	-0,009	17,86	17,19	19,83	31,41	-1,83	4,01
40	0,497	0,503	0,952	-0,008	-0,006	17,73	17,02	19,68	31,2	-1,78	4,04
44	0,498	0,502	0,955	-0,008	-0,008	18,16	17,35	20,14	31,77	-1,93	4,06
48	0,500	0,500	0,959	0,001	0,002	18,1	17,32	20,07	31,74	-1,87	4,07
52	0,497	0,503	0,962	-0,006	-0,004	18,24	17,44	20,21	31,97	-1,89	4,08
56	0,502	0,498	0,964	0,011	0,011	17,76	17	19,69	31,16	-1,77	4,03
60	0,499	0,501	0,966	0,003	0,003	18,13	17,36	20,1	31,82	-1,79	4,08
64	0,500	0,500	0,968	0,001	-0,001	18,11	17,34	20,06	31,75	-1,89	4,04
68	0,499	0,501	0,97	0	-0,003	17,73	16,97	19,65	31,23	-1,88	4,09
72	0,501	0,499	0,972	-0,003	-0,003	17,98	17,22	19,91	31,55	-1,77	4,04
76	0,502	0,498	0,973	-0,007	-0,005	17,87	17,14	19,8	31,47	-1,68	4,06
80	0,500	0,500	0,975	0,011	0,007	17,78	17,04	19,7	31,18	-1,74	4,02
84	0,497	0,503	0,976	-0,009	-0,01	18,09	17,34	20,02	31,71	-1,85	4,03
88	0,501	0,499	0,977	0,003	0,003	18,11	17,38	20,06	31,73	-1,74	4,01
92	0,501	0,499	0,978	-0,004	-0,006	17,72	16,97	19,62	31,13	-1,75	4,05
96	0,500	0,500	0,978	0,001	0	17,63	16,96	19,52	31,19	-1,8	4,09
100	0,499	0,501	0,98	0	0,002	17,64	16,9	19,54	31	-1,62	4,03

TABLEAU. B.0.38: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2) = (2; 2)$ ,  $n = 20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	0,495	0,505	0,001	0,675	0,677	112,94	19,69	186,54	78,65	4,74	8,13
0,1	0,507	0,493	0,04	0,694	0,69	118,20	20,01	199,46	84,36	4,88	8,29
0,2	0,512	0,488	0,087	0,713	0,708	120,15	19,79	211,32	88,00	4,99	8,40
0,3	0,488	0,512	0,124	0,722	0,726	123,41	20,48	218,15	93,51	5,10	8,52
0,4	0,500	0,5	0,163	0,738	0,738	126,69	21,21	230,28	99,00	5,21	8,63
0,5	0,489	0,511	0,196	0,75	0,751	131,30	21,43	242,90	104,45	5,31	8,74
0,6	0,514	0,486	0,214	0,759	0,754	131,65	21,34	249,47	107,45	5,37	8,81
0,7	0,504	0,496	0,251	0,77	0,77	131,34	21,46	253,86	111,36	5,45	8,88
0,8	0,471	0,529	0,282	0,778	0,785	136,08	21,70	266,47	118,10	5,55	9,00
0,9	0,512	0,488	0,299	0,788	0,786	133,44	22,14	271,76	121,54	5,57	9,05
1	0,515	0,485	0,327	0,798	0,795	139,30	22,52	281,25	128,28	5,68	9,15
1,1	0,503	0,497	0,35	0,805	0,804	140,24	22,65	289,36	132,93	5,74	9,23
1,2	0,489	0,511	0,353	0,805	0,807	142,10	22,73	296,94	135,50	5,77	9,27
1,3	0,504	0,496	0,386	0,817	0,817	141,27	23,36	308,78	142,79	5,85	9,36
1,4	0,492	0,508	0,389	0,817	0,819	143,35	23,57	310,61	144,99	5,87	9,38
1,5	0,509	0,491	0,426	0,831	0,828	141,57	23,91	314,87	152,12	5,95	9,47
1,6	0,500	0,5	0,441	0,835	0,834	142,81	23,95	316,03	155,17	5,99	9,52
1,7	0,501	0,499	0,462	0,842	0,841	142,58	24,74	329,48	163,12	6,05	9,59
1,8	0,520	0,48	0,469	0,846	0,842	144,32	24,59	337,86	167,07	6,09	9,65
1,9	0,526	0,474	0,483	0,849	0,847	142,85	25,01	346,62	170,76	6,13	9,69
2	0,506	0,494	0,48	0,848	0,847	145,68	25,29	349,28	173,56	6,13	9,71
2,1	0,498	0,502	0,505	0,855	0,856	148,21	25,47	355,08	179,51	6,21	9,78
2,2	0,487	0,513	0,516	0,857	0,861	147,10	26,00	370,05	186,59	6,25	9,84
2,3	0,504	0,496	0,525	0,861	0,862	145,58	25,78	364,27	187,31	6,26	9,85
2,4	0,492	0,508	0,534	0,864	0,865	145,86	25,94	375,26	193,90	6,30	9,91
2,5	0,509	0,491	0,542	0,867	0,868	151,93	26,68	391,26	202,32	6,36	9,99
2,6	0,498	0,502	0,552	0,87	0,871	148,63	26,74	379,75	202,69	6,37	9,99
2,7	0,504	0,496	0,563	0,874	0,874	149,27	27,06	395,77	208,90	6,41	10,04
2,8	0,514	0,486	0,564	0,875	0,873	152,61	26,84	396,88	211,49	6,43	10,06
2,9	0,516	0,484	0,587	0,882	0,881	146,28	27,74	410,45	219,24	6,48	10,12
3	0,498	0,502	0,585	0,881	0,88	149,34	27,64	415,11	223,68	6,50	10,16
3,1	0,512	0,488	0,598	0,886	0,884	149,35	27,97	418,43	227,14	6,53	10,19
3,2	0,486	0,514	0,612	0,888	0,891	148,56	28,47	429,63	234,43	6,58	10,25
3,3	0,488	0,512	0,622	0,89	0,893	146,90	28,70	419,24	237,29	6,59	10,26
3,4	0,507	0,493	0,619	0,891	0,891	151,18	29,09	431,92	243,48	6,62	10,30
3,5	0,503	0,497	0,625	0,893	0,893	148,02	28,78	442,52	246,50	6,63	10,33
3,6	0,512	0,488	0,629	0,896	0,893	147,30	29,19	444,31	249,06	6,65	10,34
3,7	0,507	0,493	0,643	0,899	0,898	149,17	29,88	447,98	258,06	6,70	10,40
3,8	0,511	0,489	0,644	0,9	0,898	149,72	29,68	456,48	259,19	6,71	10,41
3,9	0,483	0,517	0,648	0,899	0,901	150,37	29,88	458,63	263,62	6,72	10,44
4	0,478	0,522	0,654	0,901	0,902	150,57	30,22	465,24	271,72	6,76	10,49
4,5	0,485	0,515	0,689	0,912	0,913	148,18	31,78	493,01	297,96	6,89	10,65
5	0,479	0,521	0,704	0,916	0,918	150,26	32,80	505,56	316,06	6,96	10,74
5,5	0,502	0,498	0,723	0,923	0,922	149,33	34,56	548,23	346,74	7,07	10,89
6	0,500	0,5	0,742	0,928	0,928	148,94	36,12	567,22	369,95	7,15	10,99
6,5	0,510	0,49	0,753	0,932	0,93	150,17	37,13	587,82	391,06	7,21	11,09
7	0,487	0,513	0,768	0,935	0,937	146,79	38,22	614,06	416,32	7,29	11,19
7,5	0,494	0,506	0,788	0,941	0,942	146,20	39,53	619,04	439,77	7,37	11,28
8	0,503	0,497	0,794	0,943	0,943	144,44	40,87	652,61	467,28	7,42	11,38
12	0,518	0,482	0,85	0,959	0,959	145,38	51,46	809,91	651,93	7,80	11,90
16	0,495	0,505	0,885	0,969	0,969	145,38	62,28	959,99	851,07	8,10	12,32
20	0,506	0,494	0,907	0,975	0,975	146,59	73,35	1099,79	1051,75	8,32	12,64
24	0,508	0,492	0,918	0,978	0,978	151,84	81,88	1213,17	1206,53	8,47	12,85
28	0,506	0,494	0,929	0,981	0,981	159,01	94,27	1372,72	1430,40	8,65	13,11
32	0,503	0,497	0,937	0,983	0,983	162,78	102,66	1458,31	1583,62	8,76	13,27
36	0,496	0,504	0,945	0,985	0,985	171,07	114,72	1605,26	1802,48	8,89	13,47
40	0,505	0,495	0,95	0,987	0,986	178,44	123,74	1727,01	1970,13	8,99	13,61
44	0,502	0,498	0,953	0,988	0,988	188,48	136,39	1873,43	2193,52	9,09	13,76
48	0,500	0,5	0,958	0,989	0,989	197,38	146,61	2004,50	2383,81	9,19	13,90
52	0,501	0,499	0,962	0,99	0,99	205,02	157,19	2118,29	2570,66	9,27	14,01
56	0,501	0,499	0,964	0,99	0,99	214,58	166,87	2231,72	2747,50	9,33	14,11
60	0,503	0,497	0,967	0,991	0,991	228,40	182,55	2419,14	3032,55	9,44	14,26
64	0,501	0,499	0,969	0,992	0,992	234,96	191,10	2508,80	3184,01	9,48	14,33
68	0,500	0,5	0,97	0,992	0,992	241,62	198,20	2596,68	3317,66	9,52	14,39
72	0,494	0,506	0,971	0,992	0,992	251,83	207,48	2720,75	3484,11	9,58	14,47
76	0,501	0,499	0,973	0,993	0,993	264,68	223,68	2890,98	3777,76	9,66	14,59
80	0,503	0,497	0,974	0,993	0,993	272,31	231,46	2988,89	3920,37	9,70	14,64
84	0,501	0,499	0,975	0,993	0,993	279,36	238,12	3071,64	4037,98	9,73	14,69
88	0,496	0,504	0,976	0,994	0,994	291,78	251,97	3226,28	4289,11	9,78	14,78
92	0,498	0,502	0,977	0,994	0,994	301,39	262,67	3351,74	4484,85	9,84	14,85
96	0,502	0,498	0,979	0,994	0,994	309,91	275,01	3464,13	4710,83	9,88	14,93
100	0,498	0,502	0,979	0,994	0,994	317,33	281,14	3550,47	4821,98	9,90	14,95

TABLEAU. B.0.39: Résultats de la simulation pour  $(\beta_1; \beta_2)=(3;3)$ ,  $n=20$ 

d	prMy1	prMy2	cor(1,2)	cor(Y,1)	cor(Y,2)	SSEm	SSEp	Vm	Vp	Slogm	Slogp
0	0,498	0,502	-0,003	0,685	0,688	240,70	23,13	407,79	139,48	5,56	9,31
0,1	0,487	0,513	0,032	0,697	0,703	249,34	23,87	430,52	149,46	5,67	9,44
0,2	0,472	0,528	0,085	0,717	0,723	253,68	24,34	453,01	160,50	5,80	9,57
0,3	0,526	0,474	0,126	0,739	0,729	259,75	24,86	477,70	171,51	5,91	9,69
0,4	0,510	0,49	0,174	0,751	0,752	265,37	25,74	500,36	184,09	6,04	9,82
0,5	0,492	0,508	0,194	0,757	0,761	271,14	25,74	524,30	192,61	6,10	9,91
0,6	0,510	0,49	0,222	0,77	0,766	273,70	26,79	543,03	203,15	6,18	9,99
0,7	0,489	0,511	0,244	0,774	0,778	278,45	27,38	559,01	211,90	6,24	10,07
0,8	0,487	0,513	0,287	0,789	0,791	281,92	28,06	582,66	227,47	6,36	10,19
0,9	0,510	0,49	0,295	0,794	0,793	290,97	28,11	605,63	234,82	6,40	10,25
1	0,509	0,491	0,338	0,809	0,805	291,22	29,00	611,89	249,71	6,50	10,35
1,1	0,498	0,502	0,339	0,809	0,806	294,80	29,64	633,97	255,94	6,53	10,39
1,2	0,516	0,484	0,37	0,819	0,817	294,81	30,00	642,53	266,95	6,59	10,47
1,3	0,510	0,49	0,389	0,825	0,823	295,18	31,31	676,40	281,93	6,66	10,55
1,4	0,489	0,511	0,405	0,827	0,83	295,80	31,03	683,48	288,11	6,70	10,59
1,5	0,513	0,487	0,417	0,834	0,831	301,85	31,87	694,12	298,38	6,74	10,65
1,6	0,506	0,494	0,428	0,837	0,835	302,69	32,79	711,39	309,38	6,78	10,70
1,7	0,506	0,494	0,444	0,843	0,84	303,50	32,89	720,83	316,26	6,82	10,75
1,8	0,486	0,514	0,468	0,847	0,85	304,50	33,83	745,11	335,23	6,90	10,83
1,9	0,504	0,496	0,483	0,854	0,853	305,39	34,48	760,37	344,87	6,94	10,89
2	0,516	0,484	0,487	0,855	0,854	310,34	34,72	774,27	354,52	6,97	10,93
2,1	0,519	0,481	0,502	0,861	0,858	306,59	35,53	798,62	367,47	7,01	10,99
2,2	0,500	0,5	0,52	0,865	0,865	310,73	36,01	800,86	378,53	7,06	11,03
2,3	0,514	0,486	0,53	0,869	0,867	309,57	37,27	834,13	394,66	7,10	11,10
2,4	0,498	0,502	0,528	0,867	0,867	318,63	37,44	840,18	398,96	7,12	11,12
2,5	0,490	0,51	0,546	0,873	0,873	310,21	38,25	853,64	409,41	7,16	11,16
2,6	0,498	0,502	0,558	0,876	0,877	313,32	38,77	862,04	422,55	7,20	11,21
2,7	0,496	0,504	0,567	0,879	0,88	311,77	39,13	870,16	431,59	7,23	11,25
2,8	0,496	0,504	0,579	0,883	0,883	313,42	40,14	898,88	447,94	7,27	11,31
2,9	0,512	0,488	0,586	0,886	0,884	311,44	40,54	906,08	453,94	7,29	11,33
3	0,506	0,494	0,581	0,883	0,884	317,52	40,49	922,78	460,80	7,30	11,35
3,1	0,515	0,485	0,604	0,892	0,889	311,87	41,83	916,52	473,19	7,34	11,39
3,2	0,490	0,51	0,611	0,892	0,893	307,09	42,55	943,57	486,16	7,37	11,44
3,3	0,491	0,509	0,614	0,893	0,894	311,40	42,29	939,30	487,43	7,39	11,45
3,4	0,512	0,488	0,627	0,898	0,897	304,89	43,31	964,91	504,34	7,42	11,49
3,5	0,500	0,5	0,624	0,897	0,896	317,58	44,29	984,55	519,41	7,45	11,54
3,6	0,480	0,52	0,639	0,899	0,902	313,43	44,78	982,12	534,45	7,48	11,59
3,7	0,512	0,488	0,634	0,9	0,898	317,12	45,38	1015,17	540,10	7,49	11,60
3,8	0,502	0,498	0,641	0,901	0,902	308,90	45,31	1012,37	540,46	7,50	11,60
3,9	0,481	0,519	0,651	0,903	0,905	313,92	46,51	1023,79	560,08	7,54	11,66
4	0,520	0,48	0,65	0,905	0,903	310,31	46,35	1039,01	561,85	7,54	11,66
4,5	0,515	0,485	0,672	0,911	0,909	320,07	49,28	1082,26	610,20	7,64	11,79
5	0,500	0,5	0,709	0,921	0,921	308,73	52,73	1144,50	679,35	7,78	11,96
5,5	0,523	0,477	0,727	0,928	0,925	307,83	55,65	1201,26	730,43	7,87	12,08
6	0,509	0,491	0,738	0,93	0,929	305,50	58,09	1227,90	770,69	7,92	12,15
6,5	0,512	0,488	0,761	0,936	0,936	307,34	62,28	1314,54	849,91	8,04	12,32
7	0,486	0,514	0,77	0,938	0,939	311,07	65,20	1367,23	902,08	8,10	12,41
7,5	0,503	0,497	0,782	0,942	0,942	301,46	67,32	1395,47	941,58	8,15	12,47
8	0,517	0,483	0,797	0,946	0,945	294,28	71,15	1469,35	1015,73	8,24	12,59
12	0,487	0,513	0,85	0,96	0,961	294,19	94,06	1810,63	1424,12	8,61	13,11
16	0,496	0,504	0,882	0,969	0,969	296,43	116,72	2130,80	1837,69	8,89	13,50
20	0,507	0,493	0,906	0,976	0,975	301,20	143,38	2457,66	2319,54	9,13	13,85
24	0,506	0,494	0,92	0,979	0,979	312,53	167,05	2774,22	2747,38	9,31	14,11
28	0,504	0,496	0,931	0,982	0,982	330,85	193,24	3119,53	3225,22	9,48	14,35
32	0,495	0,505	0,937	0,983	0,984	343,46	211,33	3325,43	3559,84	9,58	14,50
36	0,502	0,498	0,946	0,986	0,986	358,14	236,20	3620,97	4007,92	9,71	14,69
40	0,498	0,502	0,95	0,987	0,987	377,91	260,70	3919,31	4456,38	9,82	14,84
44	0,499	0,501	0,954	0,988	0,988	403,51	287,68	4235,45	4935,72	9,92	14,99
48	0,503	0,497	0,957	0,989	0,989	421,21	308,94	4506,31	5327,94	10,00	15,11
52	0,501	0,499	0,961	0,99	0,99	433,84	327,41	4707,09	5666,51	10,06	15,20
56	0,500	0,5	0,964	0,991	0,991	458,12	352,73	5019,15	6120,27	10,15	15,32
60	0,503	0,497	0,966	0,991	0,991	481,83	378,65	5323,77	6593,95	10,22	15,43
64	0,501	0,499	0,968	0,992	0,992	502,87	404,23	5604,06	7060,50	10,28	15,53
68	0,500	0,5	0,97	0,992	0,992	530,82	434,55	5957,50	7610,64	10,36	15,65
72	0,499	0,501	0,971	0,993	0,993	552,41	455,44	6224,11	7985,27	10,41	15,72
76	0,499	0,501	0,974	0,993	0,993	570,93	480,34	6470,48	8437,09	10,47	15,80
80	0,499	0,501	0,975	0,994	0,994	599,01	508,48	6823,62	8949,73	10,53	15,89
84	0,500	0,5	0,975	0,994	0,994	613,47	523,72	6996,16	9222,85	10,56	15,93
88	0,503	0,497	0,976	0,994	0,994	636,41	548,16	7274,41	9665,85	10,60	16,01
92	0,500	0,5	0,977	0,994	0,994	655,44	571,07	7514,17	10078,93	10,64	16,07
96	0,496	0,504	0,978	0,994	0,994	673,72	590,44	7743,74	10439,39	10,68	16,13
100	0,500	0,5	0,98	0,995	0,995	705,16	621,98	8132,21	11008,94	10,74	16,20

# Annexe C

## COURBES D'AJUSTEMENT

Les fonctions polynomiales d'ordre 4 qui ajustent les distributions des indicateurs de comparaison de modèles par rapport à la corrélation entre les variables explicatives, ont la forme suivante :

$$I_{M/P} = coef_4 C_{12}^4 + coef_3 C_{12}^3 + coef_2 C_{12}^2 + coef_1 C_{12} + coef_0,$$

où  $C_{12}$  est la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$ ,  $X_2$  et  $I_{M/P}$  représente  $SSE_{M/P}$ ,  $Var_{M/P}$  ou  $AM_{M/P}$ . Les coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour tous les modèles simulés, pour une taille de  $n=20, 50$  et  $100$ , sont donnés dans les tableaux C.0.1, C.0.2 et C.0.3.

TABLEAU. C.0.1: Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour  $SSE_{M/P}$  par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$

$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$coef_4$	$coef_3$	$coef_2$	$coef_1$	$coef_0$	$R^2$
20	1	1	-8,51	11,46	-6,38	1,97	2,37	0,998
20	1	0,75	-10,76	16,38	-8,98	2,37	1,94	0,996
20	1	0,5	-8,73	13,79	-7,29	1,73	1,51	0,988
20	1	0,25	-3,26	5,34	-2,89	0,6	1,162	0,969
20	1	0,1	-0,96	1,62	-0,92	0,20	1,06	0,952

20	1	0	-0,21	0,28	-0,13	0,02	1,0489	0,952
----	---	---	-------	------	-------	------	--------	-------

20	2	1	-16,2	22,4	-11,90	3,52	2,982	0,998
20	2	0,75	-13,59	21,17	-12,07	3,29	2,13	0,996
20	2	0,5	-5,96	8,77	-4,57	1,19	1,55	0,992
20	2	0,25	-1,79	2,67	-1,41	0,34	1,169	0,990
20	2	0,1	-0,13	-0,025	0,10	-0,03	1,068	0,984
20	2	0	-0,17	-0,49	0,37	-0,11	1,05	0,957

50	1	1	-14,88	21,81	-11,68	3,26	2,41	0,998
50	1	0,75	-12,58	19,72	-11,05	3,01	2,00	0,995
50	1	0,5	-9,93	16,62	-9,13	2,19	1,45	0,952
50	1	0,25	-2,23	3,73	-2,04	0,50	1,12	0,923
50	1	0,1	-0,47	0,76	-0,39	0,08	1,03	0,905
50	1	0	-0,9	0,306	-0,16	0,025	1,010	0,911

50	2	1	-18,99	28,32	-15,17	4,11	2,84	0,996
50	2	0,75	-12,58	19,72	-11,05	3,01	2,00	0,995
50	2	0,5	-5,719	8,81	-4,74	1,26	1,466	0,991
50	2	0,25	-1,72	2,72	-1,48	0,38	1,123	0,987
50	2	0,1	-0,51	0,82	-0,44	0,10	1,027	0,982
50	2	0	-0,23	0,39	-0,22	0,04	1,010	0,979

100	1	1	-20,29	31,012	-16,48	4,124	2,481	0,997
100	1	0,75	-18,88	31,73	-16,40	3,88	1,998	0,967
100	1	0,5	-7,37	12,02	-6,41	1,62	1,460	0,954
100	1	0,25	-1,90	3,21	-1,78	0,46	1,113	0,927

100	1	0,1	-0,36	0,63	-0,35	0,09	1,019	0,867
100	1	0	-0,08	0,13	-0,07	0,01	1,002	0,867

100	2	1	-17,40	25,69	-13,77	3,89	2,79	0,997
100	2	0,75	-11,17	16,89	-9,05	2,48	2,01	0,995
100	2	0,5	-5,49	8,39	-4,42	1,17	1,449	0,993
100	2	0,25	-1,53	2,36	-1,24	0,32	1,112	0,987
100	2	0,1	-0,37	0,62	-0,36	0,09	1,017	0,979
100	2	0	-0,04	0,06	-0,02	0,002	1,001	0,975

TABLEAU. C.0.2: Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour  $\text{Var}_{M/P}$  par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$

$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$coef_4$	$coef_3$	$coef_2$	$coef_1$	$coef_0$	$R^2$
-----	-----------	-----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------

20	1	1	-2,01	2,34	-1,67	0,61	1,40	0,998
20	1	0,75	-1,67	2,15	-1,55	0,60	1,158	0,998
20	1	0,5	-0,63	0,82	-0,69	0,31	0,88	0,997
20	1	0,25	0,12	-0,26	0,089	0,04	0,696	0,965
20	1	0,1	0,29	-0,45	0,19	-0,01	0,64	0,978
20	1	0	0,38	-0,64	0,34	-0,6	0,64	0,867

20	2	1	0,97	-1,82	0,43	-0,13	1,24	0,998
20	2	0,75	0,41	-0,64	-0,16	0,09	0,974	0,998
20	2	0,5	0,77	-1,45	0,67	-0,12	0,798	0,994
20	2	0,25	0,52	-0,95	0,49	-0,08	0,68	0,857
20	2	0,1	0,51	-0,92	0,54	-0,11	0,644	0,969
20	2	0	0,42	-0,75	0,43	-0,09	0,64	0,978

50	1	1	-4,55	6,78	-4,39	1,38	1,53	0,9978
50	1	0,75	0,13	-0,29	-0,28	0,13	0,979	0,999
50	1	0,5	0,06	-0,54	0,20	0,11	0,86	0,9962
50	1	0,25	-0,13	0,13	-0,09	0,07	0,683	0,9823
50	1	0,1	0,105	-0,19	0,12	-0,02	0,64	0,966
50	1	0	-0,13	-0,19	0,10	-0,01	0,624	0,986



50	2	1	0,76	-1,51	0,28	-0,08	1,24	0,999
50	2	0,75	0,13	-0,29	-0,29	0,13	0,979	0,999
50	2	0,5	0,042	-0,17	-0,07	0,063	0,794	0,998
50	2	0,25	0,026	-0,08	0,02	0,02	0,675	0,986
50	2	0,1	-0,02	0,04	-0,03	0,02	0,639	0,945
50	2	0	0,004	0,02	-0,01	0,02	0,632	0,982

100	1	1	-6,76	10,69	-6,75	2,03	1,65	0,997
100	1	0,75	0,74	-2,17	0,90	0,11	1,175	0,997
100	1	0,5	-0,37	0,18	-0,15	0,16	0,855	0,999
100	1	0,25	-0,23	0,62	-0,19	0,09	0,679	0,990
100	1	0,1	0,07	-0,09	0,05	0,01	0,631	0,993
100	1	0	0,16	-0,24	0,13	-0,02	0,622	0,996

100	2	1	0,01	-0,13	-0,58	0,12	1,238	0,999
100	2	0,75	0,03	-0,21	-0,23	0,09	0,989	0,999
100	2	0,5	-0,02	-0,7	-0,12	0,08	0,795	0,999
100	2	0,25	0,004	-0,05	0,01	0,022	0,676	0,991
100	2	0,1	-0,02	0,05	-0,04	0,0928	0,639	0,986
100	2	0	0,053	-0,09	0,06	-0,002	0,634	0,997

TABLEAU. C.0.3: Coefficients des fonctions polynomiales d'ordre 4 et les rapports de détermination pour  $AM_{M/P}$  par rapport à la corrélation entre les variables explicatives  $X_1$  et  $X_2$

$n$	$\beta_1$	$\beta_2$	$coef_4$	$coef_3$	$coef_2$	$coef_1$	$coef_0$	$R^2$
20	1	1	-0,62	1,00	-0,53	0,001	-0,0027	0,9978
20	1	0,75	-0,59	0,93	-0,47	-0,006	0,0025	0,997
20	1	0,5	-0,62	0,99	-0,52	0,01	0,0013	0,997
20	1	0,25	-0,59	0,92	-0,47	0,015	0,0003	0,996
20	1	0,1	-0,59	0,93	-0,47	0,012	0,0032	0,996
20	1	0	0,012	-0,023	0,02	-0,057	0,047	0,999
20	2	1	-0,60	0,96	-0,52	0,033	-0,0409	0,996
20	2	0,75	-0,63	1,03	-0,56	0,05	-0,043	0,996
20	2	0,5	-0,62	0,99	-0,54	0,05	-0,045	0,996
20	2	0,25	-0,61	0,98	-0,53	0,06	-0,046	0,995
20	2	0,1	-0,63	1,02	-0,56	0,07	-0,047	0,995
20	2	0	-0,65	1,067	-0,61	0,08	-0,05	0,995
50	1	1	-0,28	0,459	-0,25	0,009	-0,0015	0,997
50	1	0,75	-0,28	0,46	-0,25	0,03	-0,019	0,995
50	1	0,5	-0,28	0,45	-0,25	0,02	-0,0026	0,996
50	1	0,25	-0,27	0,43	-0,24	0,023	-0,0037	0,995
50	1	0,1	-0,27	0,44	-0,24	0,029	-0,0042	0,995
50	1	0	-0,27	0,45	-0,25	0,03	-0,0044	0,994

50	2	1	-0,29	0,47	-0,26	0,025	-0,0183	0,996
50	2	0,75	-0,28	0,46	-0,25	0,026	-0,019	0,995
50	2	0,5	-0,28	0,46	-0,25	0,028	-0,019	0,995
50	2	0,25	-0,28	0,46	-0,25	0,03	-0,020	0,995
50	2	0,1	-0,28	0,46	-0,26	0,03	-0,020	0,994
50	2	0	-0,28	0,46	-0,26	0,03	-0,021	0,994

100	1	1	-0,14	0,23	-0,12	0,004	-0,0007	0,997
100	1	0,75	-0,14	0,3	-0,12	0,005	-0,0005	0,996
100	1	0,5	-0,14	0,23	-0,12	0,009	-0,0014	0,996
100	1	0,25	-0,14	0,23	-0,13	0,01	-0,0022	0,995
100	1	0,1	-0,14	0,22	-0,12	0,01	0,0023	0,994
100	1	0	-0,14	0,23	-0,13	0,02	-0,0024	0,994

100	2	1	-0,15	0,24	-0,13	0,01	-0,009	0,996
100	2	0,75	-0,15	0,24	-0,13	0,014	0,0098	0,995
100	2	0,5	-0,14	0,23	-0,13	0,01	-0,01	0,995
100	2	0,25	-0,15	0,24	-0,13	0,02	-0,01	0,994
100	2	0,1	-0,14	0,23	-0,13	0,017	-0,01	0,994
100	2	0	-0,15	0,24	-0,13	0,02	-0,010	0,994

## Annexe D

---

### PROGRAMME S-PLUS ET LES RÉSULTATS POUR L'EXEMPLE "CRIME ET CHÂTIMENT"

```
# Écrire les variables x1, x3, x4, x9, x11, x13, x14 et Y:
n_23
x1_uscrime[1:23,1]
x3_uscrime[1:23,3]
x4_uscrime[1:23,4]
x9_uscrime[1:23,9]
x11_uscrime[1:23,11]
x13_uscrime[1:23,13]
x14_uscrime[1:23,14]
Y_uscrime[1:23,16]

x1_t(t(x1))
x3_t(t(x3))
x4_t(t(x4))
x9_t(t(x9))
x11_t(t(x11))
x13_t(t(x13))
x14_t(t(x14))
Y_t(t(Y))

# Créer les matrices X1, X3, X4, X9, X11, X13 et X14:

X0_matrix(1,23,1)
X1_matrix(1,23,2)
X1[,2]_x1
X3_matrix(1,23,2)
X3[,2]_x3
X4_matrix(1,23,2)
X4[,2]_x4
X9_matrix(1,23,2)
X9[,2]_x9
```

```

X11_matrix(1,23,2)
X11[,2]_x11
X13_matrix(1,23,2)
X13[,2]_x13
X14_matrix(1,23,2)
X14[,2]_x14

```

```

X_matrix(1,23,7+1)
X[,2]_x1
X[,3]_x3
X[,4]_x4
X[,5]_x9
X[,6]_x11
X[,7]_x13
X[,8]_x14

```

```
# Estimer les bêtas par l'approche classique:
```

```

bls_solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y
bls1_solve(t(X1)%*%X1)%*%t(X1)%*%Y
bls3_solve(t(X3)%*%X3)%*%t(X3)%*%Y
bls4_solve(t(X4)%*%X4)%*%t(X4)%*%Y
bls9_solve(t(X9)%*%X9)%*%t(X9)%*%Y
bls11_solve(t(X11)%*%X11)%*%t(X11)%*%Y
bls13_solve(t(X13)%*%X13)%*%t(X13)%*%Y
bls14_solve(t(X14)%*%X14)%*%t(X14)%*%Y

```

```

b0_mean(Y)
b0i_matrix(0,2,1)
b0i[1,]_b0
b00_matrix(0,7+1,1)
b00[1,]_b0 n0_1

```

```
# Déterminer les bêtas sous l'approche bayésienne:
```

```

bhat_(n0*b00+bls)/(n0+1)
bhat1_(n0*b0i+bls1)/(n0+1)
bhat3_(n0*b0i+bls3)/(n0+1)
bhat4_(n0*b0i+bls4)/(n0+1)
bhat9_(n0*b0i+bls9)/(n0+1)
bhat11_(n0*b0i+bls11)/(n0+1)
bhat13_(n0*b0i+bls13)/(n0+1)
bhat14_(n0*b0i+bls14)/(n0+1)

```

```
# Estimer Y sous chaque modèle:
```

```
Yhat_X)%*%bhat
```

```

Yhat1_X1%*%bhat1
Yhat3_X3%*%bhat3
Yhat4_X4%*%bhat4
Yhat9_X9%*%bhat9
Yhat11_X11%*%bhat11
Yhat13_X13%*%bhat13
Yhat14_X14%*%bhat14

```

```
SSE_sum(Y-Yhat)^2
```

```

H_X%*%solve((t(X)%*%X))%*%t(X)
I_diag(1,n)
invPhi_I-(1/(n0+1))*H
phi_solve(invPhi)

```

```

H1_X1%*%solve((t(X1)%*%X1))%*%t(X1)
H3_X3%*%solve((t(X3)%*%X3))%*%t(X3)
H4_X4%*%solve((t(X4)%*%X4))%*%t(X4)
H9_X9%*%solve((t(X9)%*%X9))%*%t(X9)
H11_X11%*%solve((t(X11)%*%X11))%*%t(X11)
H13_X13%*%solve((t(X13)%*%X13))%*%t(X13)
H14_X14%*%solve((t(X14)%*%X14))%*%t(X14)

```

```

invPhi1_I-(1/(n0+1))*H1
invPhi3_I-(1/(n0+1))*H3
invPhi4_I-(1/(n0+1))*H4
invPhi9_I-(1/(n0+1))*H9
invPhi11_I-(1/(n0+1))*H11
invPhi13_I-(1/(n0+1))*H13
invPhi14_I-(1/(n0+1))*H14

```

```

phi1_solve(invPhi1)
phi3_solve(invPhi3)
phi4_solve(invPhi4)
phi9_solve(invPhi9)
phi11_solve(invPhi11)
phi13_solve(invPhi13)
phi14_solve(invPhi14)

```

```

G_ginverse(H)
G1_ginverse(H1)
G3_ginverse(H3)
G4_ginverse(H4)
G9_ginverse(H9)
G11_ginverse(H11)
G13_ginverse(H13)
G14_ginverse(H14)

```

```
# Calculer les probabilités a posteriori pour chaque modèle:
```

```
moy_X%>%b00
moy1_X1%>%b0i
moy3_X3%>%b0i
moy4_X4%>%b0i
moy9_X9%>%b0i
moy11_X11%>%b0i
moy13_X13%>%b0i
moy14_X14%>%b0i

sig_1
sigYc_matrix(0,1,1)
ss_sum((Y-mean(Y))^2)
sigYc[1,1]_ss

sigmac_sigYc[1,1]*phi sigmac1_sigYc[1,1]*phi1
sigmac3_sigYc[1,1]*phi3 sigmac4_sigYc[1,1]*phi4
sigmac9_sigYc[1,1]*phi9 sigmac11_sigYc[1,1]*phi11
sigmac13_sigYc[1,1]*phi13 sigmac14_sigYc[1,1]*phi14

err<-t(Y-moy)%>%invPhi%*(Y-moy)/n
err1<-t(Y-moy1)%>%invPhi1%*(Y-moy1)/n
err3<-t(Y-moy3)%>%invPhi3%*(Y-moy3)/n
err4<-t(Y-moy4)%>%invPhi4%*(Y-moy4)/n
err9<-t(Y-moy9)%>%invPhi9%*(Y-moy9)/n
err11<-t(Y-moy11)%>%invPhi11%*(Y-moy11)/n
err13<-t(Y-moy13)%>%invPhi13%*(Y-moy13)/n
err14<-t(Y-moy14)%>%invPhi14%*(Y-moy14)/n

det<-sqrt(prod(svd(sigmac)$d))
det1<-sqrt(prod(svd(sigmac1)$d))
det3<-sqrt(prod(svd(sigmac3)$d))
det4<-sqrt(prod(svd(sigmac4)$d))
det9<-sqrt(prod(svd(sigmac9)$d))
det11<-sqrt(prod(svd(sigmac11)$d))
det13<-sqrt(prod(svd(sigmac13)$d))
det14<-sqrt(prod(svd(sigmac14)$d))

my_(1/sqrt((2*pi*err)^n))*(1/sqrt(det))
my1_(1/sqrt((2*pi*err1)^n))*(1/sqrt(det1))
my3_(1/sqrt((2*pi*err3)^n))*(1/sqrt(det3))
my4_(1/sqrt((2*pi*err4)^n))*(1/sqrt(det4))
my9_(1/sqrt((2*pi*err9)^n))*(1/sqrt(det9))
my11_(1/sqrt((2*pi*err11)^n))*(1/sqrt(det11))
my13_(1/sqrt((2*pi*err13)^n))*(1/sqrt(det13))
```

```
my14_(1/sqrt((2*pi*err14)^n))*(1/sqrt(det14))
```

```
errYhat_t(Yhat-moy)%*%G%*(Yhat-moy)/n
errYhat1_t(Yhat1-moy1)%*%G1%*(Yhat1-moy1)/n
errYhat3_t(Yhat3-moy3)%*%G3%*(Yhat3-moy3)/n
errYhat4_t(Yhat4-moy4)%*%G4%*(Yhat4-moy4)/n
errYhat9_t(Yhat9-moy9)%*%G9%*(Yhat9-moy9)/n
errYhat11_t(Yhat11-moy11)%*%G11%*(Yhat11-moy11)/n
errYhat13_t(Yhat13-moy13)%*%G13%*(Yhat13-moy13)/n
errYhat14_t(Yhat14-moy14)%*%G14%*(Yhat14-moy14)/n
```

```
p_2
v_7
```

```
mYhat_(1/sqrt((2*pi*errYhat)^(v+1)))*exp(-(v+1)/2)
mYhat1_(1/sqrt((2*pi*errYhat1)^p))*exp(-p/2)
mYhat3_(1/sqrt((2*pi*errYhat3)^p))*exp(-p/2)
mYhat4_(1/sqrt((2*pi*errYhat4)^p))*exp(-p/2)
mYhat9_(1/sqrt((2*pi*errYhat9)^p))*exp(-p/2)
mYhat11_(1/sqrt((2*pi*errYhat11)^p))*exp(-p/2)
mYhat13_(1/sqrt((2*pi*errYhat13)^p))*exp(-p/2)
mYhat14_(1/sqrt((2*pi*errYhat14)^p))*exp(-p/2)
```

```
prM1_1/v
prM3_1/v
prM4_1/v
prM9_1/v
prM11_1/v
prM13_1/v
prM14_1/v
```

```
sumprMY7_(my1*prM1+my3*prM3+ my4*prM4+my9*prM9+
my11*prM11+my13*prM13+ my14*prM14)
```

```
sumprMY_sumprMY7
prMy1_(my1*prM1)/sumprMY
prMy3_(my3*prM3)/sumprMY
prMy4_(my4*prM4)/sumprMY
prMy9_(my9*prM9)/sumprMY
prMy11_(my11*prM11)/sumprMY
prMy13_(my13*prM13)/sumprMY
prMy14_(my14*prM14)/sumprMY
```

```
# Estimer Y par la méthode de moyennage bayésien de modèles simples:
```

```
Yhatm<-(prMy1[1,1]*Yhat1+ prMy3[1,1]*Yhat3+
prMy4[1,1]*Yhat4+prMy9[1,1]*Yhat9+prMy11[1,1]*Yhat11+
```



```

prMy13[1,1]*Yhat13+prMy14[1,1]*Yhat14)

Yhatm2_sum(Yhatm^2)

# Performances prédictives:
#SSE

SSE_sum((Y-Yhat)^2)
SSEM_sum((Y-Yhatm)^2)

#Variance des prédictions:

Vp_(1/n0+1)*err*v

V1_(1/n0+1)*err1*2
V3_(1/n0+1)*err3*2
V4_(1/n0+1)*err4*2
V9_(1/n0+1)*err9*2
V11_(1/n0+1)*err11*2
V13_(1/n0+1)*err13*2
V14_(1/n0+1)*err14*2

Vm_prMy1[1,1]*(V1+sum(Yhat1^2))+ prMy3[1,1]*(V3+sum(Yhat3^2))+
prMy4[1,1]*(V4+sum(Yhat4^2))+prMy9[1,1]*(V9+sum(Yhat9^2))+
prMy11[1,1]*(V11+sum(Yhat11^2))+ prMy13[1,1]*(V13+sum(Yhat13^2))+
prMy14[1,1]*(V14+sum(Yhat14^2))-Yhatm2

#Score logarithmique:

logm_(-log(mYhat1*prMy1+mYhat3*prMy3+ mYhat4*prMy4+mYhat9*prMy9+
mYhat11*prMy11+ mYhat13*prMy13+ mYhat14*prMy14))

logp_(-log(mYhat))

diffmp_SSEM/SSE
logpm_logp-logm
varpm_Vp/Vm

prMy1[1,1]+prMy3[1,1]+prMy4[1,1]+prMy9[1,1]+prMy11[1,1]+prMy13[1,1]
+prMy14[1,1]

#pour normaliser:

logpn_-log(mYhat^(2/8))
logpnm_logpn-logm
exp(logpnm/n)

```

```
logpnm diffmp varpm
```

```
#Résultats
```

```
> logp
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 52.76601
```

```
> logm
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 11.46646
```

```
> logpn
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 13.1915
```

```
> exp(logpnm/n)
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 1.077886
```

```
> logpnm
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 1.725041
```

```
> diffmp
```

```
[1] 1.578185
```

```
> varpm
```

```
      [,1]
```

```
[1,] 2.34209
```

```
> prMy1[1,1]
```

```
[1] 0.03191747
```

```
> prMy3[1,1]
```

```
[1] 0.03918724
```

```
> prMy4[1,1]
```

```
[1] 0.72632
```

```
> prMy9[1,1]
```

```
[1] 0.02388513
```

```
> prMy11[1,1]
```

```
[1] 0.03273448
```

```
> prMy13[1,1]
```

```
[1] 0.0310876
```

```
> prMy14[1,1]
```

```
[1] 0.1148681
```

## BIBLIOGRAPHIE

---

COX, D.R. ET SNELL, E.J. (1982), *Applied statistics : Principles and Examples*, New York, Chapman et Hall.

DRAPER, D. (1995), Assessment and propagation of model uncertainty, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 57, pages 45-97.

EHRlich, I. (1973), Participation in illegitimate activities : a theoretical and empirical investigation, *Journal of Political Economy*, 81, pages 521-565.

GOOD, I.J. (1952), Rational decisions, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 14, pages 107-114.

HOETING, J.A. (1994), Accounting for model uncertainty in linear regression, *Thèse de doctorat*, University of Washington.

MADIGAN, D., GAVRIN, J. ET RAFTERY, A.E. (1995), Enhancing the predictive performance of Bayesian graphical models, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 24, pages 2271-2292.

MADIGAN, D. ET RAFTERY, A.E. (1994), Model selection and accounting for model uncertainty in graphical models using Occam's windows, *Journal of the American Statistical Association*, 89, pages 1535-1546.

RAFTERY, A.E. (1993), Bayesian model selection in structural equation models. In Bollen, K and Long, J., editors, *Testing Structural Equation Models*, pages 163-180.

RAFTERY, A.E, MADIGAN, D. ET HOETING, J.A. (1997), Bayesian model averaging for linear regression models, *Journal of the American Statistical Association*, 92, pages 179-191.

SMITH, A.F.M. ET ROBERTS, G.O. (1993), Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo methods, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 55, pages 3-23.

SRIVASTAVA, M.S. ET KHATRI, C.G. (1979), *An introduction to multivariate statistics*, New York, North-Holland.

VANDAELE, W. (1978), Participation in illegitimate activities, Ehrlich revisited, In Blumstein, A., Cohen, J. and Nagin, D., editors, *Deterrence and incapacitation*, National Academy of Sciences, pages 270-335.

ZELLNER, A. (1971), *An introduction to Bayesian inference in econometrics*, New York, Wiley.

