

Université de Montréal

Modélisation de séries chronologiques non  
linéaires et modèles ARMA faibles

par

Zahia Salmi

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Maître ès sciences (M.Sc.)  
en Statistique

avril 2003

QA

3

454

2003

N. 009

## AVIS

L'auteur a autorisé l'Université de Montréal à reproduire et diffuser, en totalité ou en partie, par quelque moyen que ce soit et sur quelque support que ce soit, et exclusivement à des fins non lucratives d'enseignement et de recherche, des copies de ce mémoire ou de cette thèse.

L'auteur et les coauteurs le cas échéant conservent la propriété du droit d'auteur et des droits moraux qui protègent ce document. Ni la thèse ou le mémoire, ni des extraits substantiels de ce document, ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans l'autorisation de l'auteur.

Afin de se conformer à la Loi canadienne sur la protection des renseignements personnels, quelques formulaires secondaires, coordonnées ou signatures intégrées au texte ont pu être enlevés de ce document. Bien que cela ait pu affecter la pagination, il n'y a aucun contenu manquant.

## NOTICE

The author of this thesis or dissertation has granted a nonexclusive license allowing Université de Montréal to reproduce and publish the document, in part or in whole, and in any format, solely for noncommercial educational and research purposes.

The author and co-authors if applicable retain copyright ownership and moral rights in this document. Neither the whole thesis or dissertation, nor substantial extracts from it, may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

In compliance with the Canadian Privacy Act some supporting forms, contact information or signatures may have been removed from the document. While this may affect the document page count, it does not represent any loss of content from the document.

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Modélisation de séries chronologiques non  
linéaires et modèles ARMA faibles**

présenté par

**Zahia Salmi**

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

*Jean-François Angers*

---

(président-rapporteur)

*Roch Roy*

---

(directeur de recherche)

*Pierre Duchesne*

---

(membre du jury)

Mémoire accepté le:

15 avril 2003



## REMERCIEMENTS

---

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers les personnes qui m'ont aidé à réaliser ce travail.

J'aimerais tout d'abord remercier mon directeur de recherche, M. Roch Roy, pour ses judicieux conseils, sa disponibilité, sa patience ainsi que pour son support financier qui m'ont permis de réaliser ce mémoire.

Cette recherche a bénéficié d'une bourse de la Faculté des études supérieures, d'un appui financier du Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (CRNSG) et du réseau de centre d'excellence sur les mathématiques des technologies de l'information et des systèmes complexes (MATISC), par le biais de subventions à mon directeur de recherche.

Je remercie Christian Francq pour m'avoir permis l'utilisation de ses programmes et je remercie également Claude Beauchamp de m'avoir aidé à résoudre mes problèmes informatiques et rendre mes simulations plus efficaces.

Finalement, je dois remercier de tout coeur ma famille, spécialement mes enfants Imane et Abdessamad et mon mari Mostafa pour son soutien continu.

## SOMMAIRE

---

Plusieurs classes de modèles non linéaires admettent une représentation ARMA faible c'est-à-dire une représentation linéaire ARMA dans laquelle les innovations sont non corrélées mais dépendantes. La majeure partie de l'inférence dans la modélisation linéaire ARMA repose sur l'hypothèse que les innovations sont indépendantes et identiquement distribuées, hypothèse qui n'est pas satisfaite en général par les représentations linéaires ARMA des processus non linéaires. Dans ce mémoire, nous étudions les principales propriétés des modèles ARMA faibles. Nous décrivons les méthodes utilisées pour l'identification et l'estimation de ces modèles et nous analysons leur efficacité à l'aide de simulations de Monte Carlo. Finalement, nous appliquons la méthodologie décrite à la modélisation d'une série financière.

**Mots clés :** Modèles non linéaires, modèles ARMA faibles, bootstrap blocs mobiles, estimateurs des moindres carrés, critères de sélection des modèles.

## SUMMARY

---

Several classes of nonlinear models admit a weak ARMA representation, that is an ARMA representation in which the innovations are not correlated but dependent. The major part of the inference in linear ARMA modeling is based on the assumption that the innovations are independent and identically distributed. That assumption is not satisfied in general by the linear ARMA representations of nonlinear processes. In this Master thesis, we study the principal properties of the weak ARMA models. We describe the methods used for the identification and estimation of these models and we analyze their efficiency by Monte Carlo simulations. Finally, we apply the described methodology to the modeling of a financial series.

**Keywords :** Nonlinear models, weak ARMA models, moving blocks bootstrap, least squares estimation, model selection criteria.

## Table des matières

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Remerciements</b> .....   | <b>i</b>   |
| <b>Sommaire</b> .....  | <b>ii</b>  |
| <b>Summary</b> .....   | <b>iii</b> |
| <b>Table des figures</b> .....   | <b>vii</b> |
| <b>Liste des tableaux</b> .....  | <b>xi</b>  |
| <b>INTRODUCTION</b> .....  | <b>1</b>   |
| <b>Chapitre 1. LES PROCESSUS ARMA FAIBLES</b> .....  | <b>5</b>   |
| 1.1. Préliminaires.....  | 5          |
| 1.2. Processus ARMA faibles.....   | 9          |
| 1.2.1. Exemples de modèles non linéaires admettant une représentation<br>ARMA faible ..... | 11         |
| <b>Chapitre 2. INFÉRENCE POUR LES AUTOCORRÉLATIONS</b>                                     | <b>16</b>  |
| 2.1. Approche classique.....   | 16         |
| 2.2. Distribution asymptotique de la première autocorrélation échantionnale                |            |

|                    |  |           |
|--------------------|--|-----------|
| 2.3.               | Distribution asymptotique d'un vecteur d'autocorrélations échantionnales                       |           |
|                    | 20   |           |
| 2.4.               | Bootstrap blocs mobiles.....   | 21        |
| 2.4.1.             | Méthode empirique pour le choix de la taille des blocs dans le<br>bootstrap blocs mobiles..... | 23        |
| 2.5.               | Simulations.....   | 24        |
| 2.5.1.             | Plan des simulations.....  | 25        |
| 2.5.2.             | Résultats des simulations.....   | 27        |
| <b>Chapitre 3.</b> | <b>ESTIMATION ET CRITÈRES DE SÉLECTION...</b>  | <b>33</b> |
| 3.1.               | Estimation.....  | 34        |
| 3.1.1.             | Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance d'un<br>ARMA fort.....                   | 34        |
| 3.1.2.             | Estimation par la méthode des moindres carrés d'un ARMA<br>faible.....                         | 37        |
| 3.2.               | Critères de sélection de modèles.....  | 43        |
| 3.2.1.             | Modèles ARMA forts.....  | 43        |
| 3.2.2.             | Modèles ARMA faibles.....  | 44        |
| <b>Chapitre 4.</b> | <b>Simulations.....</b>  | <b>47</b> |
| 4.1.               | Identification.....  | 48        |
| 4.1.1.             | Plan des simulations.....  | 48        |
| 4.1.2.             | Résultats des simulations.....   | 49        |
| 4.2.               | Estimation.....  | 60        |

|  |            |
|--|------------|
| 4.2.1. Plan des simulations .....      | 61         |
| 4.2.2. Résultats des simulations ..... | 63         |
| <b>Chapitre 5. EXEMPLE.....</b>        | <b>90</b>  |
| 5.1. Description de la série .....     | 90         |
| 5.2. Modélisation de la série .....    | 91         |
| <b>CONCLUSION .....</b>                | <b>96</b>  |
| <b>Annexe .....</b>                    | <b>99</b>  |
| CODE FORTRAN.....                      | 99         |
| <b>Bibliographie .....</b>             | <b>114</b> |

## Table des figures

---

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.5.1 | Limites de signification des autocorrélations échantillonnales à différents délais pour différentes tailles des blocs avec une série de longueur 300 du modèle MA(1) défini par (2.5.1).....                       | 31 |
| 2.5.2 | Limites de signification des autocorrélations échantillonnales à différents délais pour différentes tailles des blocs avec une série de longueur 300 du modèle MA(4) défini par (2.5.2).....                       | 32 |
| 4.2.1 | Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100. ....       | 69 |
| 4.2.2 | Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300. ....       | 70 |
| 4.2.3 | Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500. ....       | 71 |
| 4.2.4 | Écart types des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100. .... | 72 |

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 4.2.5  | Écart types des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300. ....   | 73 |
| 4.2.6  | Écart types des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500. ....   | 74 |
| 4.2.7  | Biais des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100. ....       | 76 |
| 4.2.8  | Biais des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300. ....       | 77 |
| 4.2.9  | Biais des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500. ....       | 78 |
| 4.2.10 | Écart types des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100. .... | 79 |
| 4.2.11 | Écart types des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG)   |    |

|  |    |
|--|----|
| et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300. ....  | 80 |
| 4.2.12 Écart type des estimateurs des paramètres $A_1$ , $A_2$ et $B_1$ du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500. .... | 81 |
| 4.2.13 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 100 défini par (4.2.3).....                    | 83 |
| 4.2.14 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 300 défini par (4.2.3).....                    | 84 |
| 4.2.15 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 500 défini par (4.2.3).....                    | 85 |
| 4.2.16 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque $n = 100$ .....              | 87 |
| 4.2.17 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque $n = 300$ .....              | 88 |
| 4.2.18 Biais et écart type de l'estimateur de $\theta$ d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque $n = 500$ .....              | 89 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 5.1.1 | Graphiques de la série S&P 500.....   | 91 |
| 5.2.1 | Graphiques des autocorrélations résiduelles correspondant aux modèles<br>AR(1), MA(1) et ARMA(1,1) estimés dans l'analyse de la série S&P<br>500..... | 95 |

## Liste des tableaux

---

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 2.5.1 | Estimation de l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonales décrite dans (2.4.5) pour plusieurs longueurs des blocs lorsque la série est MA(1).      | 29 |
| 2.5.2 | Estimation de l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonales décrite dans (2.4.5) pour plusieurs longueurs des blocs lorsque la série est MA(4).      | 30 |
| 4.1.1 | Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ), $p, q = 0, 1, 2$ selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 100. | 52 |
| 4.1.2 | Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ), $p, q = 0, 1, 2$ selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 300. | 53 |
| 4.1.3 | Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ), $p, q = 0, 1, 2$ selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 500. | 54 |
| 4.1.4 | Pourcentages de sélection de chaque modèle AR( $p$ ), $p = 0, 1, \dots, 12$ selon les critères AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 100.              | 57 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 4.1.5 | Pourcentages de sélection de chaque modèle $AR(p)$ , $p= 0, 1, \dots, 12$ selon les critères AIC et SBC pour des séries $MA(1)$ fortes et faibles de longueur 300.....   | 58 |
| 4.1.6 | Pourcentages de sélection de chaque modèle $AR(p)$ , $p= 0, 1, \dots, 12$ selon les critères AIC et SBC pour des séries $MA(1)$ fortes et faibles de longueur 500.....   | 59 |
| 4.2.1 | Comparaison des vrais écarts types des paramètres du modèle $ARMA(2,1)$ fort et des écarts types moyens obtenus avec les deux méthodes d'estimation.....   | 68 |
| 4.2.2 | Comparaison des vrais écarts types des paramètres du modèle $ARMA(2,1)$ faible et des écarts types moyens obtenus avec les deux méthodes d'estimation.....   | 75 |
| 4.2.3 | Comparaison du vrai écart type du paramètre $\theta$ d'un modèle $MA(1)$ et de l'écart type moyen obtenu par les deux méthodes d'estimation (NAG) et (FZ) lorsque la série est un bruit blanc faible défini par (4.2.3)..... | 82 |
| 4.2.4 | Comparaison du vrai écart type du paramètre $\theta$ d'un modèle $MA(1)$ et de l'écart type moyen obtenus par les deux méthodes d'estimation (NAG) et (FZ) pour un modèle à changement de régimes (4.2.4).....               | 86 |

# INTRODUCTION

---

Depuis la publication du livre de Box et Jenkins (1970), les modèles autorégressifs moyennes mobiles (ARMA) ont joué un rôle de premier plan dans la modélisation des séries chronologiques. La majeure partie de l'inférence dans ces modèles a été développée sous l'hypothèse que les innovations (erreurs) sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et nous parlons alors de modèles ARMA forts. Ces modèles constituent une sous-classe des processus linéaires. Cependant, plusieurs phénomènes donnent lieu à des séries chronologiques non linéaires qui ne peuvent être décrites de façon satisfaisante avec des modèles ARMA forts. C'est pourquoi il y a eu un intérêt grandissant pour les modèles non linéaires dans la littérature sur les séries chronologiques. Plusieurs classes de modèles ont été développées voir par exemple Tong (1990), Guégan (1994) et Tsay (2001). Cependant, les modèles non linéaires restent plus difficiles à utiliser et les modèles linéaires demeurent encore les plus fréquemment utilisés par les praticiens. Comme décrit dans Francq et Zakoïan (1998a), plusieurs classes de modèles non linéaires admettent une représentation linéaire ARMA faible c'est-à-dire une représentation ARMA dont les innovations sont non corrélées mais dépendantes.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'identification et à l'estimation des modèles ARMA faibles. Nous étudions certaines propriétés de ces modèles, les méthodes d'identification des ordres autorégressif et moyenne mobile

ainsi que l'estimation des paramètres. Comme illustration, nous présentons les résultats des applications de ces méthodes à l'aide de données simulées et réelles.

Au chapitre 1, nous présentons les préliminaires nécessaires pour l'étude des processus ARMA. Par la suite, nous introduisons la définition et les propriétés des processus ARMA faibles. Nous concluons ce chapitre par des exemples de modèles non linéaires qui admettent une représentation ARMA faible.

Étant donné le rôle de la fonction d'autocorrélation dans l'identification de modèles en séries chronologiques, nous introduisons au deuxième chapitre quelques résultats sur le comportement asymptotique des autocorrélations échantillonnales pour des ARMA faibles.

Pour les modèles ARMA forts, l'estimation de la matrice des covariances des autocorrélations est basée sur la formule de Bartlett, cette formule présuppose que les innovations sont i.i.d. Cette hypothèse n'est pas satisfaite pour plusieurs classes de modèles non linéaires. Romano et Thombs (1996), Berline et Francq (1997) ont développé des méthodes pour l'estimation de la variance asymptotique des autocorrélations dans le cas non linéaire. Dans ce mémoire, nous nous limitons aux travaux de Romano et Thombs (1996), qui proposent l'utilisation de méthodes bootstrap non paramétriques. Nous présentons dans ce chapitre la méthode bootstrap blocs mobiles introduite par Künsch (1989) et Liu et Singh (1992). Pour le choix de la taille optimale des blocs, nous décrivons la méthode empirique développée par Hall, Horowitz et Jing (1995). Pour conclure ce chapitre, nous discutons certains résultats de simulation pour le calcul des limites de signification des autocorrélations échantillonnales pour certains modèles ARMA

faibles en utilisant le bootstrap blocs mobiles.

Au chapitre 3, nous abordons le problème de l'estimation des paramètres autorégressifs et moyennes mobiles ainsi que la détermination des ordres autorégressif et moyenne mobile en utilisant des critères de sélection de modèles. Nous présentons la méthode d'estimation exacte par vraisemblance maximale pour des modèles ARMA forts et la méthode des moindres carrés proposée par Francq et Zakoïan (1998a, 2000) pour les modèles ARMA faibles. Étant donné que la méthode bootstrap par blocs mobiles n'a pas bien fonctionné pour l'identification des ordres des modèles, nous avons utilisé les critères de sélection de modèles, notamment le critère d'information d'Akaike (AIC), le critère d'information bayésien d'akaike (BIC) et le critère bayésien de Schwartz (SBC) afin d'estimer les ordres d'un ARMA faible. Dans cette partie, nous étudions les propriétés de ces critères dans les cas fort et faible.

Dans le quatrième chapitre, nous avons procédé par simulations afin d'évaluer la performance des méthodes d'identification et d'estimation appliquées aux modèles ARMA faibles. Nous exposons les résultats de simulations qui ont tenté de vérifier si les résultats théoriques obtenus pour ces méthodes pouvaient être utiles dans un cadre concret de réalisations de tailles finies. Dans ce cadre, nous utilisons les critères de sélection de modèles AIC et SBC définis dans le cas des modèles ARMA faibles pour l'identification des ordres des séries simulées provenant de modèles ARMA forts et faibles. Pour l'estimation, nous comparons les résultats de la méthode d'estimation standard et celle de Francq et Zakoïan (1998a, 2000) appliquées à certains modèles ARMA forts et faibles.

Enfin, au dernier chapitre, nous illustrons l'application de ces modèles à des données financières. Nous décrivons la modélisation ARMA faible de la série des rendements excédentaires mensuels de l'indice S&P 500 et nous comparons nos résultats à ceux de la modélisation GARCH présentée dans Tsay (2001). Il est rassurant de constater que les deux approches conduisent à des modèles très similaires.

# Chapitre 1

---

## LES PROCESSUS ARMA FAIBLES

### 1.1. PRÉLIMINAIRES

Considérons le processus stochastique  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  où  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs.

**Définition 1.1.1.** *Le processus  $\{X_t\}$  est stationnaire :*

A- *Au sens large si :*

1-  $E[X_t^2] < \infty, \forall t,$

2-  $E[X_t] = \mu, \forall t,$

3-  $Cov(X_{t+h}, X_t)$  est indépendante de  $t, \forall h$  et  $\forall t$  et nous notons  $\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t)$  l'autocovariance de délai  $h$ .

B- *Au sens strict si :*

*La loi de probabilité de  $(X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{n+h})$  est la même que celle de  $(X_1, X_2, \dots, X_n) \forall h$  et  $\forall n \geq 1$ .*

Si  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens strict et si  $E[X_t^2] < \infty$ , alors  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens large.

**Définition 1.1.2.** *Le processus  $\{X_t\}$  est un bruit blanc :*

A- Faible si, pour tout  $t$  :

$$1- E[X_t] = 0,$$

$$2- Var(X_t) = \sigma_X^2,$$

$$3- Cov(X_{t+h}, X_t) = 0, \text{ pour } h \neq 0.$$

On le note bruit blanc faible  $(0, \sigma_X^2)$ .

B- Fort si :

Les variables  $X_t$  sont indépendantes et identiquement distribuées.

Si le second moment d'un bruit blanc fort existe et si sa moyenne est 0, alors ce dernier est aussi un bruit blanc faible et on écrit alors bruit blanc fort  $(0, \sigma^2)$ . Un exemple de bruit blanc faible qui n'est pas un bruit blanc fort est fourni par la classe des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques, notée ARCH, introduite par Engle (1982).

**Définition 1.1.3.** Le processus  $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$  est dit ARCH d'ordre  $q$ , noté ARCH( $q$ ) si :

$$X_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.1.1)$$

où

$$h_t = Var(X_t | F_{t-1}) = E[X_t^2 | F_{t-1}] = \alpha'_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 \quad (1.1.2)$$

et  $\alpha'_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q$  sont des paramètres réels tels que  $\alpha'_0 > 0, \alpha_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, q$ . Le processus  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit fort de moyenne 0 et de variance  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ , et  $\varepsilon_t$  est supposé indépendant de  $F_{t-1}$ , où  $F_{t-1}$  désigne la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$

Le processus  $\{X_t\}$  est stationnaire au sens large si et seulement si les racines du polynôme  $\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z - \dots - \alpha_q z^q$ , sont supérieures à 1 en module, ce qui est équivalent à  $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ . De (1.1.2), on déduit qu'un processus ARCH( $q$ ) n'est pas un bruit blanc fort puisque  $Var(X_t | F_{t-1})$  dépend des valeurs passées

$X_{t-1}, \dots, X_{t-q}$ . Par contre, c'est un bruit blanc faible. Supposons que  $\alpha'_0 = \alpha_0(1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i)$ , alors (1.1.2) est équivalent à

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (X_{t-i}^2 - \alpha_0).$$

On aura donc,

$$(i) \quad E[X_t] = E[E[X_t|F_{t-1}]] = E[E[h_t^{1/2} \varepsilon_t | F_{t-1}]] = E[h_t^{1/2}] E[\varepsilon_t | F_{t-1}] = E[h_t^{1/2}] E[\varepsilon_t] = 0$$

car  $E[\varepsilon_t] = 0$ .

$$(ii) \quad E[X_t^2] = E[h_t \varepsilon_t^2] = E[h_t] E[\varepsilon_t^2] = E[\alpha'_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (X_{t-i}^2 - \alpha_0)] E[\varepsilon_t^2] \\ = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (E[X_{t-i}^2] - \alpha_0).$$

La relation précédente permet d'écrire

$$\sigma_X^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\sigma_X^2 - \alpha_0) \\ \iff \sigma_X^2 (1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i) = \alpha_0 (1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i) \\ \iff \sigma_X^2 = \alpha_0.$$

$$(iii) \quad Cov(X_{t+h}, X_t) = E[(h_t^{1/2} \varepsilon_t)(h_{t+h}^{1/2} \varepsilon_{t+h})] = E[E[h_t^{1/2} h_{t+h}^{1/2} \varepsilon_t \varepsilon_{t+h} | F_{t+h-1}]] \\ = E[h_t^{1/2} h_{t+h}^{1/2} \varepsilon_t] E[\varepsilon_{t+h} | F_{t+h-1}] = E[h_t^{1/2} h_{t+h}^{1/2} \varepsilon_t] E[\varepsilon_{t+h}] = 0,$$

car  $E[\varepsilon_{t+h}] = 0$ . Donc  $E[X_t] = 0$ ,  $Var(X_t) = \sigma_X^2$  et  $Cov(X_{t+h}, X_t) = 0$ ,  $\forall t, h$ .

Le concept de bruit blanc joue un rôle clé dans la définition d'un processus linéaire.

**Définition 1.1.4.** *Le processus  $\{X_t\}$ , est linéaire s'il admet une représentation de la forme :*

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (1.1.3)$$

où  $\mu$  et  $\psi_j$  sont des paramètres réels tels que  $\psi_0 = 1$  et

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty \quad (1.1.4)$$

et  $\{\varepsilon_t : t \in \mathbb{Z}\}$  est un bruit blanc.

Un processus linéaire est stationnaire au sens large d'après (1.1.4) avec  $E[X_t] = \mu$  et  $\gamma(h) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}$ ,  $h \geq 0$ .

Le processus  $\{X_t\}$  est déterministe si

$$E(X_t - P_{t-1}X_t)^2 = 0, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où  $P_{t-1}X_t$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $X_t$  sur le  $\text{span}\{X_j : j \leq t-1\}$ . L'espace  $\text{span}\{X_j : j \leq t-1\}$  est l'espace linéaire engendrée par les variables  $X_j$ ,  $j \leq t-1$ , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des  $X_j$  ou des limites de suites de combinaisons linéaires de ces variables. Un processus qui n'est pas déterministe, c'est-à-dire dont les valeurs futures ne peuvent être prévues de façon exacte à partir des valeurs présentes et passées est dit non déterministe. Le théorème de Wold établit le lien entre les processus stationnaires au sens large et les processus linéaires.

**Théorème 1.1.1.** *(Décomposition de Wold) Si  $\{X_t\}$  est un processus stationnaire au sens large non déterministe avec  $\mu = 0$  alors, il admet la représentation suivante :*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} + V_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

où

- 1-  $\psi_0 = 1$  et  $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ ,
- 2-  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible  $(0, \sigma_\varepsilon^2)$ ,
- 3-  $\text{Cov}(Z_s, V_t) = 0$  pour tout  $s$  et  $t$ ,
- 4-  $\varepsilon_t \in \text{span}\{X_s : s \leq t\}$  et  $\varepsilon_t \perp \text{span}\{X_s : s \leq t-1\} \quad \forall t$ ,
- 5-  $\{V_t\}$  est déterministe.

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Brockwell et Davis (1991, p 181).

Si  $V_t \equiv 0$ , alors  $\{X_t\}$  est purement non déterministe et est un processus linéaire. La décomposition de Wold fournit une représentation intéressante d'un processus stationnaire au sens large mais d'un point de vue pratique, elle présente tout de même l'inconvénient d'être caractérisée par une infinité de paramètres. C'est ce qui a motivé l'introduction des processus ARMA.

**Définition 1.1.5.** *Le processus  $\{X_t\}$ , tel que  $E[X_t] = 0$ , est inversible s'il admet une représentation de la forme*

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où les  $\pi_j$  sont réels tels que  $\sum_{j=1}^{\infty} |\pi_j| < \infty$ , et  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc.

## 1.2. PROCESSUS ARMA FAIBLES

**Définition 1.2.1.** *Le processus  $\{X_t\}$  est dit autorégressif moyenne mobile d'ordre  $(p, q)$ , abrégé par ARMA( $p, q$ ) s'il admet la représentation suivante :*

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = \theta_0 + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.1)$$

où le processus  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc et  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  sont des paramètres

*réels et sont appelés respectivement paramètres autorégressifs et paramètres moyennes mobiles. Le paramètre  $\theta_0$  est aussi un paramètre réel appelé paramètre de tendance. Si le processus  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort, le processus  $\{X_t\}$  est dit ARMA fort, s'il est un bruit blanc faible, on parle alors de processus ARMA faible.*

L'équation (1.2.1) peut être écrite de la façon suivante :

$$\phi(B)X_t = \theta_0 + \theta(B)\varepsilon_t, \quad (1.2.2)$$

où B est l'opérateur retard vérifiant :  $B^m X_t = X_{t-m}$  pour  $m \geq 0$  avec  $B^0 = 1$ , et

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p,$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q.$$

Un processus ARMA est stationnaire si et seulement si les racines du polynôme  $\phi(z)$  sont de module strictement supérieur à 1 et inversible si les racines de  $\theta(z)$  sont aussi de module strictement supérieur à 1. Les processus ARMA faibles stationnaires sont nécessairement linéaires par le théorème de Wold.

Un processus ARMA faible est un processus dont les innovations sont possiblement dépendantes. La modélisation de séries chronologiques avec des modèles ARMA forts introduite par Box et Jenkins (1970) a été largement développée et expérimentée, néanmoins la condition de bruit blanc fort n'est pas toujours satisfaite pour certains modèles qui admettent la représentation (1.2.2) mais où les  $\varepsilon_t$  ne sont pas i.i.d. En conséquence, l'approche standard pour ces modèles peut mener à des conclusions erronées. Plusieurs auteurs [Francq et Zakoïan (1998a), Romano et Thombs (1996)] ont montré que la modélisation avec des modèles ARMA faibles donne des estimateurs des paramètres autorégressifs et moyennes mobiles fortement convergents et asymptotiquement normaux et que cette classe

de modèles est susceptible d'être plus appropriée que celle des modèles ARMA forts dans plusieurs cas pratiques.

### 1.2.1. Exemples de modèles non linéaires admettant une représentation ARMA faible

#### Exemple 1.2.1. Modèles GARCH

Le processus ARCH défini précédemment permet une forme autorégressive pour la variance conditionnelle. Bollerslev (1986) a introduit une partie moyenne mobile à ce modèle pour obtenir un modèle ARCH généralisé, noté GARCH. La définition est la suivante.

**Définition 1.2.2.** *Le processus  $\{X_t\}$  est GARCH( $p, q$ ) si*

$$X_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad (1.2.3)$$

où

$$h_t = \text{Var}(X_t | F_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (1.2.4)$$

avec  $p \geq 0, q \geq 0, \alpha_i, \beta_j \geq 0, i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$  et  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort de moyenne 0 et de variance  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$  et  $\varepsilon_t$  est indépendant de  $F_{t-1}$ , où  $F_{t-1}$  désigne la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ .

Pour  $p = 0$  et  $q > 0$  on retrouve le modèle ARCH( $q$ ). Si  $\{X_t\}$  est GARCH( $p, q$ ), alors  $\{X_t^2\}$  admet une représentation ARMA. Soit  $\eta_t = X_t^2 - h_t$ , en remplaçant  $h_t$  par  $X_t^2 - \eta_t$  dans l'équation (1.2.4), nous avons

$$\begin{aligned} X_t^2 - \eta_t &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j (X_{t-j}^2 - \eta_{t-j}) \\ \iff X_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^p \beta_j \eta_{t-j} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

où  $m = \max(p, q)$ .

De cette équation on remarque que le processus  $\{X_t^2\}$  admet une représentation ARMA faible puisque le processus  $\{\eta_t\}$  est un bruit blanc faible, voir par exemple Tsay (2001, section 3.4).

**Exemple 1.2.2. Modèles à seuils**

Les modèles à seuils (TAR) pour “Threshold autoregressive model” ont été introduits par Tong et Lim (1980). Ils prennent en compte des phénomènes avec transition de phases ou changement d’états. Ce sont des modèles autorégressifs par morceaux où les changements de régimes sont régis par des seuils. Ces modèles sont utilisés dans de nombreuses applications présentant des phénomènes cycliques avec transition de phases comme l’hydrologie, la météorologie, la biologie, l’économie, etc. Plusieurs exemples sont présentés dans Mélard et Roy (1988).

**Définition 1.2.3.** Soient  $\{X_t\}$  et  $\{Y_t\}$  deux processus stochastiques du second ordre. On dit que  $\{X_t\}$  suit un modèle  $TAR(l; p_1, \dots, p_l)$  si  $\{X_t\}$  est régi par un modèle autorégressif d’ordre  $p_i$  et de coefficients

$$\phi_i = (\phi_i(1), \dots, \phi_i(p_i))' \quad \text{et} \quad \theta_{0i},$$

*c’est-à-dire*

$$X_t = \theta_{0i} + \sum_{j=1}^{p_i} \phi_i(j) X_{t-j} + a_t, \quad (1.2.6)$$

pour tout  $t$  tel que  $\alpha_{i-1} \leq Y_t < \alpha_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ). Les  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, l$ ) sont appelés les seuils et sont tels que  $\alpha_0 = -\infty < \alpha_1 \dots < \alpha_{l-1} < \alpha_l = \infty$ . Dans (1.2.6) les  $a_t$  sont des variables aléatoires normales indépendantes, de moyenne zéro et de variance  $\sigma_i^2$ .

En général, il semble difficile de montrer l’existence de représentations ARMA pour les processus TAR. Un cas particulier de processus à seuils, introduit par

Gouriéroux et Monfort (1992), est donné par

$$Y_t = \sum_{j=1}^J \alpha_j I_{A_j}(Y_{t-1}) + \sum_{j=1}^J \beta_j I_{A_j}(Y_{t-1}) u_t, \quad (1.2.7)$$

où  $(A_j, j = 1, \dots, J)$  est une partition de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont des paramètres réels inconnus,  $I_{A_j}$  est la fonction caractéristique de  $A_j$  et  $\{u_t : t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite i.i.d. avec moyenne zéro et variance égale à un.

Sous une condition sur la distribution de  $Y_0$ ,  $\{Y_t\}$  peut s'avérer strictement stationnaire et ergodique, et il admet une représentation ARMA( $J - 1, J - 1$ ).

**Exemple 1.2.3.** *Modèles à changements de régimes markoviens*

Plusieurs variables macroéconomiques et financières subissent des changements excessifs lorsqu'on les observe sur une longue période. De tels changements peuvent résulter d'événements tels que des guerres, des changements cruciaux dans les politiques gouvernementales, des paniques financières, etc.

Les modèles à changements de régimes markoviens ont été introduits par Hamilton (1994) et ils sont largement utilisés pour modéliser des séries économiques qui présentent des changements de régimes. Dans les modèles TAR la transition ou le changement est déterminé par une variable particulière, alors que pour les modèles à changements de régimes, la transition est conduite par une chaîne de Markov cachée à deux états. En conséquence, les modèles TAR utilisent une répartition déterministe pour régir le modèle de transition alors que les modèles à changements de régimes utilisent une répartition stochastique. La nature stochastique des états implique qu'on est jamais sûr de l'état auquel appartient  $X_t$  dans un tel modèle.

**Définition 1.2.4.** Soit  $\{\Delta_t : t \in \mathbb{Z}\}$  une chaîne de Markov stationnaire, apériodique, irréductible et à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Sa distribution stationnaire est définie par  $\pi(0) = P(\Delta_t = 0)$  et  $\pi(1) = P(\Delta_t = 1) = 1 - \pi(0)$ . Soit  $\{\eta_t : t \in \mathbb{Z}\}$  un bruit blanc fort  $(0, 1)$  indépendant de la chaîne de Markov  $\{\Delta_t : t \in \mathbb{Z}\}$ . Le processus  $\{X_t\}$  défini par

$$X_t = \eta_t + (a + (b - a)\Delta_t)\eta_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1.2.8)$$

est un processus à changements de régimes markoviens.

On peut vérifier qu'un tel processus est stationnaire et que

$$E(X_t) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma(h) = \begin{cases} 1 + a^2\pi(0) + b^2\pi(1) & , \quad h = 0 \\ a\pi(0) + b\pi(1) & , \quad h = 1 \\ 0 & , \quad h > 1. \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque  $a\pi(0) + b\pi(1) \neq 0$ , le processus  $\{X_t\}$  est 1-corrélé et par la proposition 2.1.1 de Brockwell et Davis (2002), il admet une représentation MA(1) de la forme suivante :

$$X_t = \varepsilon_t + c\varepsilon_{t-1}, \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

où  $c$  est une constante qui dépend de  $a$ ,  $b$  et  $\pi(0)$  et qui est donnée par

$$c = \gamma(0)/2\gamma(1) - \sqrt{(\gamma(0)^2/4\gamma(1)^2) - 1},$$

et  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible de variance égale à  $\gamma(1)/c$ .

**Exemple 1.2.4.** *Modèles autorégressifs à durées conditionnelles*

Les modèles autorégressifs à durées conditionnelles (ACD) introduits par Engle et Russell (1998) sont très importants dans les applications économiques, surtout dans l'analyse des données financières relatives à des événements se produisant de façon aléatoire. Cette classe de modèles a été utilisée pour décrire les amas dans

les durées (duration clustering) des données financières tels que le temps d'arrivée des transactions boursières et des changements dans les prix. C'est en effet une importante contribution dans le sens où elle propose une méthodologie alternative aux modèles de séries chronologiques à temps discrets où les intervalles de temps sont fixes.

Soit  $X_t$  l'intervalle entre deux temps d'arrivée d'un événement aléatoire, qui est souvent appelée durée.

**Définition 1.2.5.** Soit  $D_t = E[X_t | \mathcal{I}_{t-1}]$  l'espérance conditionnelle de la durée entre le  $(t-1)$ -ème et le  $t$ -ème événement, où  $\mathcal{I}_{t-1}$  est l'ensemble d'information disponible au temps  $t-1$ . Le processus  $\{X_t\}$  est ACD( $m, l$ ) si

$$X_t = D_t \varepsilon_t, \quad (1.2.9)$$

où

$$D_t = \beta_0 + \sum_{h=1}^m \alpha_h X_{t-h} + \sum_{h=1}^l \beta_h D_{t-h}, \quad (1.2.10)$$

et  $\{\varepsilon_t\}$  est une suite i.i.d., non négative, telle que  $E[\varepsilon_t] = 1$ ,  $\beta_0 > 0$  et  $\sum_{h=1}^{\infty} (\alpha_h + \beta_h) < 1$  où l'on suppose que  $\alpha_h = 0$  pour  $h > m$  et  $\beta_h = 0$  pour  $h > l$ .

On ne fait pas d'hypothèses sur la distribution des innovations  $\{\varepsilon_t\}$ . La distribution peut être une exponentielle, une loi gamma généralisée, une lognormale, etc. Un modèle ACD avec des innovations exponentielles est appelée EACD.

D'une façon similaire aux modèles GARCH, le processus  $\eta_t = X_t - D_t$  est une différence de martingales, i.e.  $E[\eta_t | \mathcal{I}_{t-1}] = 0$ , voir Tsay (2001, section 5.5.1). Le modèle ACD( $m, l$ ) peut s'écrire comme

$$X_t = \beta_0 + \sum_{h=1}^{\max(m,l)} (\alpha_h + \beta_h) X_{t-h} - \sum_{h=1}^l \beta_h \eta_{t-h} + \eta_t. \quad (1.2.11)$$

Donc, il admet une représentation ARMA( $\max(m, l), m$ ) faible.

## Chapitre 2

---

# INFÉRENCE POUR LES AUTOCORRÉLATIONS

L'analyse des séries chronologiques repose souvent sur l'étude de fonctions des autocorrélations échantillonnales. Soit  $X_1, \dots, X_n$  une réalisation de longueur  $n$  d'un processus stationnaire au sens strict  $\{X_t\}$ . L'autocovariance de délai  $h$ ,  $\gamma(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$ , est estimée par

$$\hat{\gamma}(h) = \sum_{j=1}^{n-h} (X_{j+h} - \bar{X}_n)(X_j - \bar{X}_n)/n, \quad h = 0, 1, \dots, n-1,$$

$\hat{\gamma}(h) = \hat{\gamma}(-h)$ ,  $h = -1, \dots, -n+1$  puisque  $\gamma(h) = \gamma(-h)$  où  $\bar{X}_n = \sum_{j=1}^n X_j/n$  est la moyenne échantillonnale.

L'autocorrélation de délai  $h$ ,

$$\rho(h) = \text{Corr}(X_{t+h}, X_t) = \gamma(h)/\gamma(0), \quad h \in \mathbb{Z}$$

est estimée par  $\hat{\rho}(h) = \hat{\gamma}(h)/\hat{\gamma}(0)$ ,  $|h| \leq n-1$ .

### 2.1. APPROCHE CLASSIQUE

Les autocorrélations échantillonnales  $\hat{\rho}(h)$  jouent un rôle fondamental dans la modélisation des séries chronologiques à l'aide des modèles ARMA tels que popularisée par Box et Jenkins (1970). En particulier, si  $\{X_t\}$  est un processus

linéaire,

$$X_t - \mu = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.1.1)$$

où  $\mu = E[X_t]$ ,  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort  $(0, \sigma^2)$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  et  $\sum_{j=0}^{\infty} j \psi_j^2 < \infty$ , alors  $\hat{\rho}_k = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(k))'$  est asymptotiquement distribué selon une loi multivariée normale de vecteur moyenne  $\rho_k = (\rho(1), \dots, \rho(k))'$  et de matrice de covariance  $n^{-1}\mathbf{W}$ , c'est-à-dire que  $\hat{\rho}_k$  est  $AN(\rho_k, n^{-1}\mathbf{W})$  où le  $(i, j)$ -ème élément de  $\mathbf{W}$  est donné par la formule de Bartlett

$$w_{ij} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\rho(k+i)\rho(k+j) + \rho(k-i)\rho(k+j) + 2\rho(i)\rho(j)\rho^2(k) - 2\rho(i)\rho(k)\rho(k+j) - 2\rho(j)\rho(k)\rho(k+i)\}. \quad (2.1.2)$$

Ces résultats sont beaucoup utilisés dans la modélisation de séries chronologiques. L'application la plus courante de la formule de Bartlett est lorsque le processus  $\{X_t\}$  est un bruit blanc fort. Dans ce cas,  $\rho(k) = 0$ , pour tout  $k \neq 0$ , et nous retrouvons le résultat classique  $\hat{\rho}(k)$  est  $AN(0, n^{-1})$ . Cependant ce résultat n'est plus valide si le processus  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc faible, c'est-à-dire lorsque les  $\varepsilon_t$  sont non corrélées mais dépendantes. Romano et Thombs (1996) ainsi que Berline et Francq (1997) ont proposé une théorie asymptotique générale pour les fonctions d'autocorrélations échantillonnées de séries chronologiques dont les innovations ne sont pas indépendantes. Berline et Francq (1997) ont proposé une approche similaire à celle développée par Mélard et Roy (1984, 1987) et Mélard, Paesmans et Roy (1991). Romano et Thombs se sont concentrés sur les techniques de rééchantillonnage (bootstrap) pour obtenir des intervalles de confiance ou faire des tests pour les autocorrélations.

## 2.2. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE DE LA PREMIÈRE AUTOCORRÉLATION ÉCHANTIONNALE

Considérons la distribution asymptotique de  $\hat{\rho}(1)$  lorsque le processus est stationnaire et faiblement dépendant. Tout d'abord, introduisons la notion de processus mélangeant qui est une notion fondamentale pour les résultats qui suivent.

**Définition 2.2.1.** *Une suite de variables aléatoires  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est  $\alpha$ -mélangeante si pour tout  $k \geq 1$  et  $n \geq 1$ ,*

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \alpha(n)$$

pour tout  $A \in \sigma(\dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k)$ ,  $B \in \sigma(\varepsilon_{n+k}, \dots)$ , où  $\{\alpha(n)\}$  est une suite de nombres réels tels que  $\alpha(n) \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sigma(\dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k)$  et  $\sigma(\varepsilon_{n+k}, \dots)$  sont les  $\sigma$ -algèbres engendrées par  $\{\varepsilon_j, j \leq k\}$  et  $\{\varepsilon_j, j \geq n+k\}$  respectivement.

Pour un processus stationnaire  $X = \{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , le coefficient de mélange de Rosenblatt  $\alpha_X(j)$  est défini par  $\alpha_X(j) = \sup_{A,B} |P(AB) - P(A)P(B)|$ , où A et B varient dans les  $\sigma$ -algèbres  $\sigma(\dots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k)$  et  $\sigma(\varepsilon_{n+k}, \dots)$ . Athreya et Pantula (1986) donnent des conditions sous lesquelles des processus ARMA sont  $\alpha$ -mélangeants ; voir aussi Doukhan (1994, section 2.4).

Romano et Thombs ont établi le résultat suivant.

**Théorème 2.2.1.** *Supposons que  $X_1, \dots, X_n$  est une série générée d'un processus stationnaire dont la moyenne est  $\mu$ , tel que  $\gamma(0) > 0$ , et que  $\rho(1) = 0$ . Si pour un certain  $\delta > 0$ ,  $E[|X_i|^{4+2\delta}] < \infty$  et  $\sum_j [\alpha_X(j)]^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ , alors*

$$n^{1/2} \hat{\rho}(1) \text{ est } AN(0, \tau^2),$$

où

$$\tau^2 \equiv \gamma^{-2}(0)[\text{Var}(X_1X_2) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{Cov}(X_1X_2, X_{i+1}X_{i+2})]. \quad (2.2.1)$$

**Exemple 2.2.1.** *Séquence non corrélée*

Soit  $\{Z_i\}$  un bruit blanc fort  $(0, \sigma^2)$  dont le quatrième moment existe. Pour un  $m$  fixé, soit  $X_i = \prod_{k=0}^m Z_{i-k}$ . Alors les  $X_i$  forment un bruit blanc faible  $m$ -dépendant, de coefficients de mélange  $\alpha_X(j) = 0$  si  $j > m$  et satisfont les conditions du théorème 2.2.1.

Pour calculer  $\tau^2$ , notons d'abord que  $E[X_iX_{i+1}] = 0$ ,  $\forall i$  et

$$\text{Cov}(X_1X_2, X_{i+1}X_{i+2}) = E[X_1X_2X_{i+1}X_{i+2}] = 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1X_2) &= E[X_1^2X_2^2] \\ &= E\left[\left(\prod_{k=0}^m Z_{1-k}\right)^2 \left(\prod_{k=0}^m Z_{2-k}\right)^2\right] \\ &= E\left[\prod_{k=0}^m Z_{1-k}^2 \prod_{k=0}^m Z_{2-k}^2\right] \\ &= (E[Z_0^2])^2 \prod_{k=1}^m E[Z_k^4] \\ &= \sigma^4 (E[Z_i^4])^m. \end{aligned}$$

Puisque  $\gamma(0) = \sigma^{2(m+1)}$ , nous avons

$$\tau^2 = (E[Z_i^4]/\sigma^4)^m,$$

et par conséquent  $n^{1/2}\hat{\rho}(1)$  est  $AN(0, (E[Z_i^4]/\sigma^4)^m)$ . En particulier, si les  $Z_i$  suivent une loi normale, alors  $\tau^2 = 3^m$ . En fait,  $\tau^2$  peut être rendu arbitrairement grand même si  $m = 1$ , et dans ce cas, nous avons un processus 1-dépendant et non corrélé. Les conséquences de ce résultat sur l'inférence pour  $\rho(1)$  devraient être claires. Si  $\tau^2$  est grand, le test de l'hypothèse  $H_0 : \rho(1) = 0$ , basée sur la loi

asymptotique  $N(0, \frac{1}{n})$  plutôt que sur la loi  $N(0, \tau^2/n)$  va conduire à une grande probabilité de rejeter incorrectement l'hypothèse  $H_0$ . De plus, Si  $\tau^2 \rightarrow \infty$ , la probabilité de rejet tend vers 1. On peut donc construire un bruit blanc faible pour lequel la formule de Bartlett conduit à des résultats arbitrairement mauvais.

### 2.3. DISTRIBUTION ASYMPTOTIQUE D'UN VECTEUR D'AUTOCORRÉLATIONS ÉCHANTIONNALES

Nous commençons tout d'abord par la présentation de la distribution conjointe des autocovariances estimées. Dans les théorèmes qui suivent,  $k(s, r, v)$  est le quatrième cumulant joint de la distribution de  $(X_j, X_{j+s}, X_{j+r}, X_{j+s+r+v})$ .

**Théorème 2.3.1.** *Supposant que  $X_1, \dots, X_n$  est une série générée d'un processus stationnaire de moyenne zéro, tel que  $\gamma(0) > 0$ . Pour un  $\delta > 0$ ,  $E[|X_i|^{4+2\delta}] < \infty$  et  $\sum_j [\alpha_X(j)]^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ . Alors, pour tout entier  $k$  fixé et non négatif, le vecteur*

$$n^{1/2}[\hat{\gamma}(0) - \gamma(0), \hat{\gamma}(1) - \gamma(1), \dots, \hat{\gamma}(k) - \gamma(k)]$$

est

$$AN_{k+1}(\mathbf{0}, \mathbf{C}),$$

où  $\mathbf{C}$  est une matrice de taille  $(k+1)$  par  $(k+1)$ , dont le  $(i+1, j+1)$ -ème élément  $c_{i+1, j+1}$  est défini par

$$\begin{aligned} c_{i+1, j+1} &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \{nCov(\hat{\gamma}(i), \hat{\gamma}(j))\} \\ &\equiv \sum_{d=-\infty}^{\infty} [\gamma(d)\gamma(d+j-i) + \gamma(d+j)\gamma(d-i) + k(d, i, j-i)] \\ &= \sum_{d=-\infty}^{\infty} Cov(X_0 X_i, X_d X_{d+j}). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

De ce théorème, nous pouvons déduire la loi asymptotique d'un vecteur d'autocorrélations.

**Théorème 2.3.2.** *Sous les hypothèses du théorème 2.3.1, le vecteur d'autocorrélations*

$$n^{1/2}[\hat{\rho}(1) - \rho(1), \dots, \hat{\rho}(k) - \rho(k)]$$

*est AN(0, T), où T est une matrice de taille k × k, dont le (i, j)-ème élément est donné par :*

$$\begin{aligned} \tau_{i,j} &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \{nCov(\hat{\rho}(i), \hat{\rho}(j))\} \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty} n\gamma^{-2}(0)Cov[\hat{\gamma}(i) - \rho(i)\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(j) - \rho(j)\hat{\gamma}(0)] \\ &= \gamma^{-2}(0)[c_{i+1,j+1} - \rho(i)c_{1,j+1} - \rho(j)c_{1,i+1} + \rho(i)\rho(j)c_{1,1}] \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

où  $c_{i,j}$  est défini par (2.3.1).

Pour plus de détails sur l'interprétation des théorèmes 2.2.1, 2.3.1 et 2.3.2 ainsi que leurs démonstrations, nous référons le lecteur à Romano et Thombs (1996).

## 2.4. BOOTSTRAP BLOCS MOBILES

Une méthodes bootstrap valide pour des données dépendantes est le bootstrap blocs mobiles introduit par Künsch (1989) et Liu et Singh (1992).

Étant donné la forme compliquée des covariances asymptotiques des autocorrélations échantionnales, Romano et Thombs ont suggéré l'utilisation du bootstrap que nous discutons dans cette section. Il s'agit d'une méthode non paramétrique et qui est donc générale. Elle donne de bons résultats dans plusieurs situations en séries chronologiques. Une synthèse des principales méthodes de rééchantillonnage en séries chronologiques est présentée dans Bühlmann (2002).

Soit  $X_1, \dots, X_n$  les valeurs observées d'une série chronologique stationnaire. La méthode des blocs mobiles consiste à rééchantillonner les blocs construits à

partir d'observations consécutives de la série observée afin de préserver sa structure originale. Ensuite les blocs sont réunis dans un vecteur qui représente une nouvelle série construite à partir des observations originales qu'on appelle série bootstrap. Notons la taille des blocs par  $b$  et supposons que  $n = kb$  où  $k$  est un entier. Soit  $B_i$  le bloc de  $b$  observations consécutives commençant par  $X_i$ , on aura donc,  $B_i = (X_i, \dots, X_{i+b-1})$ , où  $i = 1, \dots, q$  et  $q = n - b + 1$ . On sélectionne avec remise  $k$  blocs parmi les  $q$  blocs  $\{B_1, \dots, B_q\}$  pour obtenir l'ensemble de blocs  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  qu'on va réunir pour former l'échantillon bootstrap  $X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*)$ . Ce processus est répété un grand nombre de fois, disons  $M$ , et on calcule la statistique d'intérêt pour chaque échantillon bootstrap. Dans notre cas, il s'agit de l'autocorrélation échantillonnale de délai  $k$

$$\hat{\rho}_i^*(k) = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} (X_{j+k}^{*i} - \bar{X}^{*i})(X_j^{*i} - \bar{X}^{*i})}{\sum_{j=1}^n (X_j^{*i} - \bar{X}^{*i})^2} \quad i = 1, \dots, M. \quad (2.4.1)$$

L'idée du bootstrap est d'estimer la vraie distribution de  $n^{1/2}[\hat{\rho}(k) - \rho(k)]$  par la distribution expérimentale des  $n^{1/2}[\hat{\rho}_i^*(k) - \hat{\rho}(k)]$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Soient  $C_1$  et  $C_2$  les quantiles d'ordre  $\alpha/2$  et  $1 - \alpha/2$  de la distribution bootstrap de  $n^{1/2}[\hat{\rho}_i^*(k) - \hat{\rho}(k)]$ . Nous avons alors

$$P^*(C_1 \leq n^{1/2}[\hat{\rho}_i^*(k) - \hat{\rho}(k)] \leq C_2) = 1 - \alpha, \quad (2.4.2)$$

où  $P^*$  réfère à la distribution bootstrap des données originales. L'intervalle de confiance bootstrap approximatif pour  $\rho(k)$  est donné par

$$[\hat{\rho}(k) - C_2/\sqrt{n}, \hat{\rho}(k) + C_1/\sqrt{n}]. \quad (2.4.3)$$

La validité asymptotique de cette méthode de rééchantillonnage a été étudiée notamment par Künsch (1989), Liu et Singh (1992) et Politis et Romano (1992). En particulier, il a été établi que la probabilité asymptotique que l'intervalle (2.4.3) contienne la vraie valeur  $\rho(k)$  est  $1 - \alpha$  lorsque la taille de l'échantillon  $n$ , le nombre de séries bootstrap  $M$  et la taille des blocs  $b$  tendent vers l'infini.

Cependant,  $b$  doit tendre vers l'infini moins rapidement que  $n$ , c'est-à-dire que  $b \rightarrow \infty$  mais  $b/n \rightarrow 0$ . Un problème pratique, important et difficile est le choix optimal de la taille des blocs.

#### 2.4.1. Méthode empirique pour le choix de la taille des blocs dans le bootstrap blocs mobiles

Le choix de la taille optimale des blocs dépend largement du contexte de l'application de la méthode bootstrap blocs mobiles. En effet, ce choix dépend des données observées, de la statistique à estimer et de l'objectif pour lequel le bootstrap est utilisé. Dans ce sens, Hall, Horowitz et Jing (1995) ont développé un algorithme pour le choix de la longueur  $b$  dans le bootstrap blocs mobiles. Leur méthode consiste à estimer empiriquement la meilleure longueur  $b$  pour des sous séries de taille  $n' < n$  et puis extrapoler pour obtenir la meilleure longueur  $b$  pour la série originale. Leur technique procède comme suit.

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble de toutes les sous séries possibles de taille  $n' < n$ . Il y a donc  $n - n' + 1$  sous séries obtenues de la série originale et on applique la méthode bootstrap blocs mobiles à chaque sous série de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Soit  $b'$  la taille des blocs, chaque application du bootstrap blocs mobiles donne lieu à un estimateur du paramètre d'intérêt  $\phi$ . Considérons  $\hat{\phi}_i$  ( $1 \leq i \leq n - n' + 1$ ) l'estimateur bootstrap de  $\phi$  calculé à partir de  $n - n' + 1$  séries de taille  $n'$  dans  $\mathcal{S}$  et  $\hat{\phi}$  l'estimateur de  $\phi$  calculé à partir de la série originale de taille  $n$  en utilisant une valeur pilote pour la taille des blocs, disons  $b^*$ . Un estimateur de l'erreur quadratique moyenne (EQM) de  $\hat{\phi}$  avec un échantillon de taille  $n'$ , en utilisant une longueur de blocs  $b'$ , est la moyenne des différences  $\hat{\phi}_i - \hat{\phi}$  au carré soit

$$EQM(\hat{\phi}; b') = \frac{1}{n - n' + 1} \sum_{i=1}^{n-n'+1} (\hat{\phi}_i - \hat{\phi})^2.$$

On choisit la valeur de  $b'$ , soit  $\hat{b}'_n$ , qui minimise cette quantité et on prend la taille  $b = (\frac{n}{n'})^{1/k} \hat{b}'_n$  où  $k$  prend les valeurs 3, 4 ou 5 selon le contexte. Les trois contextes sont respectivement l'estimation du biais ou de la variance, l'estimation unilatérale de la fonction de répartition et l'estimation bilatérale de la fonction de répartition.

Dans le cas de l'estimation de la matrice de covariances des autocorrélations empiriques  $\Sigma_n = Cov(\hat{\rho})$ , on cherche la taille  $b'$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne de  $\hat{\Sigma}_n$

$$\hat{b}'_n = \arg \min_{b'} \left\{ \sum_{i=1}^{n-n'+1} tr(\hat{\Sigma}_n^i - \hat{\Sigma}_n)(\hat{\Sigma}_n^i - \hat{\Sigma}_n)' / (n - n' + 1) \right\} \quad (2.4.4)$$

$$= \arg \min_{b'} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n-n'+1} \{ \sum_{h=1}^m (\hat{\sigma}_{hi}^2 - \hat{\sigma}_h^2)^2 \}}{n - n' + 1} \right\}, \quad (2.4.5)$$

où  $\hat{\Sigma}_n^i$  et  $\hat{\sigma}_{hi}^2$  sont les estimateurs de  $\Sigma_n$  et de la variance de  $\hat{\rho}_h$  respectivement calculés avec la  $i$ -ème sous série,  $i = 1, \dots, n - n' + 1$  de longueur  $b'$ . Les quantités  $\hat{\Sigma}_n$  et  $\hat{\sigma}_h^2$  représentent les estimateurs bootstrap blocs mobiles de  $\Sigma_n$  et de la variance de  $\hat{\rho}_h$  respectivement calculés avec la série originale en utilisant une valeur pilote pour  $b^*$ .

## 2.5. SIMULATIONS

Nous étudions maintenant le comportement du bootstrap blocs mobiles appliqué à l'estimation de la variance des autocorrélations échantillonnales afin de construire des limites de signification pour l'hypothèse que les autocorrélations sont zéro. Nous désirons aussi analyser la méthode empirique pour le choix de la taille optimale des blocs dans le bootstrap blocs mobiles, telle que décrite dans la section précédente.

Pour réaliser ces deux objectifs, nous avons développé quelques programmes Fortran permettant le calcul de l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonnales afin d'estimer la taille optimale des blocs et ensuite le calcul des écarts types des autocorrélations en appliquant le bootstrap blocs mobiles.

### 2.5.1. Plan des simulations

Pour donner un aperçu de l'éventail des comportements de la méthode permettant le choix de la taille optimale des blocs dans le bootstrap blocs mobiles nous avons procédé comme suit.

- 500 jeux de données de taille  $n = 300$  provenant de deux modèles différents : MA(1) et MA(4) faibles, ont été générés. Les deux modèles sont respectivement

$$X_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} \quad (2.5.1)$$

et

$$X_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-4}, \quad (2.5.2)$$

où  $\varepsilon_t = Z_t Z_{t-1}$  et  $\{Z_t\}$  est i.i.d.  $N(0, 1)$ .

- Pour générer une réalisation du modèle MA(1) faible, nous avons tout d'abord, généré  $n + 2$  bruits blancs forts de loi  $N(0, 1)$  avec le sous-programme GO5DDF de la librairie NAG. Puis, nous avons généré  $n + 1$  bruits blancs faibles de la relation  $\varepsilon_t = Z_t Z_{t-1}$ . Enfin, de (2.5.1) nous avons simulé les  $n$  observations de la série. Pour l'autre modèle, nous avons procédé de la même manière sauf que nous avons généré  $n + 5$  bruits blancs forts et  $n + 4$  bruits blancs faibles et nous avons utilisé la relation (2.5.2).
- Pour chaque réalisation et chaque modèle, 1000 échantillons bootstrap blocs mobiles ont été simulés pour estimer les écarts types des  $m$  premières

autocorrélations échantillonnales à partir de la série originale. Pour ce calcul, nous avons pris  $m = 24$  et  $b^* = 8, 24$  comme valeurs pilotes de la longueur des blocs.

- Pour calculer les écarts types à partir des sous séries, nous avons tout d'abord, pris  $n' = 100$  la taille des sous séries. Pour chaque sous série parmi les  $n - n' + 1$ , nous avons appliqué le bootstrap blocs mobiles pour calculer les écarts types des  $m$  premières autocorrélations échantillonnales, 500 échantillons bootstrap blocs mobiles ont été simulés et nous avons fait varier la longueur des blocs  $b'$ ,  $b' = 1, \dots, 30$ .
- Ensuite pour chaque réalisation, chaque valeur pilote  $b^*$  et chaque longueur  $b'$ , nous avons calculé l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations telle que décrite dans (2.4.4) et (2.4.5).
- Enfin, à partir de l'ensemble des réalisations, nous avons calculé la moyenne des EQM obtenus pour chaque longueur  $b'$  pour déterminer celle qui minimise ce dernier avec chaque valeur pilote.

Pour la construction des limites de signification des autocorrélations échantillonnales, nous avons appliqué la méthode bootstrap blocs mobiles aux modèles (2.5.1) et (2.5.2) afin d'estimer leurs écarts types. Pour chacun des deux modèles, nous avons généré des jeux de données de taille  $n = 300$ ; pour un jeu de données particulier, 1000 échantillons bootstrap blocs mobiles ont été générés pour estimer les écarts types. Nous avons calculé les écarts types des autocorrélations échantillonnales de délais 1 jusqu'à  $m = 24$  pour les tailles des blocs  $b = \lceil n^{1/k} \rceil$  où  $k$  prend les valeurs 2, 3 et 5 et qui correspondent aux longueurs 3, 7 et 17 ainsi que la longueur obtenue à partir de la méthode de Hall, Horowitz et Jing et qui est un selon les résultats des tableaux 2.5.1 et 2.5.2.

### 2.5.2. Résultats des simulations

Nous allons en premier lieu examiner les résultats de la première simulation afin d'illustrer le choix de la taille optimale des blocs dans le bootstrap blocs mobiles. Nous enchaînerons avec l'analyse des simulations portant sur l'estimation des limites de signification. Nous terminerons cette section avec un rappel des résultats les plus importants.

Nous présentons dans les tableaux 2.5.1 et 2.5.2 les moyennes des EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonnales obtenus en appliquant la méthode empirique pour le choix de la taille optimale des blocs aux séries des modèles MA(1) et MA(4) respectivement. Nous constatons que l'EQM, comme fonction de  $b'$ , n'a pas une forme concave et qu'elle n'est pas monotone. Pour chacun des deux modèles et pour chacune des longueurs pilotes, nous remarquons que l'EQM est à son minimum lorsque  $b' = 1$ , c'est-à-dire  $\hat{b}'_n = 1$ . Ainsi, la taille optimale des blocs est  $\hat{b} = (\frac{n}{n'})^{1/3} \hat{b}'_n = (\frac{300}{100})^{1/3} = 1.44 \simeq 1$ .

Dans les figures 2.5.1 et 2.5.2, nous retrouvons les graphiques des limites de signification des autocorrélations échantillonnales estimées à partir de l'application du bootstrap blocs mobiles aux modèles MA(1) et MA(4) respectivement pour 4 longueurs des blocs. Elles sont représentées par des points alors que les limites classiques sous l'hypothèse de bruit blanc fort, c'est-à-dire  $\pm 1.96 \frac{1}{\sqrt{n}}$ , sont représentées par une ligne continue. Une analyse sommaire permet de constater que les limites calculées à l'aide du bootstrap blocs mobiles dépendent fortement de la taille des blocs. Lorsque  $b = 1$ , nous constatons qu'elles sont très proches des limites classiques. Ce résultat est dû au fait que lorsque  $b = 1$ , le bootstrap blocs mobiles est identique au bootstrap d'Efron pour des données indépendantes.

Avec une longueur de blocs différente de 1, les limites bootstrap sont généralement différentes des limites classiques. Nous observons aussi qu'avec ces résultats, une autocorrélation d'un délai donné peut être significative avec une longueur des blocs et ne plus l'être avec une autre. Par exemple, si l'autocorrélation de délai 4 du modèle MA(1) ou MA(4) est égale à la limite de signification du même délai lorsque  $b = 3$ , elle sera significative avec  $b = 7$  mais risque de ne plus l'être avec  $b = 3$ .

Suite à cette analyse, nous retenons que la méthode de Hall, Horowitz et Jing (1995) pour le choix à partir des données de la longueur optimale des blocs dans le bootstrap blocs mobiles n'a pas donné des résultats réalistes puisqu'elle conduit à  $b = 1$  alors qu'on est en présence de données dépendantes. Aussi, nous avons constaté que la longueur des blocs a un effet remarquable sur les limites de signification des autocorrélations échantillonales et pour un délai donné, la variation en fonction de  $b$  ne suit pas une tendance systématique soit à la hausse ou à la baisse.

Tableau 2.5.1: Estimation de l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonales décrite dans (2.4.5) pour plusieurs longueurs des blocs lorsque la série est MA(1).

| Taille des blocs | 10 <sup>2</sup> EQM |            | Taille des blocs | 10 <sup>2</sup> EQM |            |
|------------------|---------------------|------------|------------------|---------------------|------------|
|                  | $b^* = 8$           | $b^* = 24$ |                  | $b^* = 8$           | $b^* = 24$ |
| $b' = 1$         | 7.30                | 7.84       | $b' = 16$        | 16.19               | 15.66      |
| $b' = 2$         | 9.43                | 9.96       | $b' = 17$        | 20.10               | 19.43      |
| $b' = 3$         | 11.44               | 11.91      | $b' = 18$        | 18.24               | 17.52      |
| $b' = 4$         | 12.24               | 12.68      | $b' = 19$        | 16.53               | 15.78      |
| $b' = 5$         | 12.90               | 13.26      | $b' = 20$        | 14.98               | 14.18      |
| $b' = 6$         | 14.64               | 14.93      | $b' = 21$        | 20.16               | 19.20      |
| $b' = 7$         | 14.42               | 14.64      | $b' = 22$        | 18.44               | 17.45      |
| $b' = 8$         | 15.36               | 15.51      | $b' = 23$        | 16.79               | 15.79      |
| $b' = 9$         | 14.65               | 14.72      | $b' = 24$        | 15.22               | 14.22      |
| $b' = 10$        | 14.62               | 14.60      | $b' = 25$        | 13.68               | 12.71      |
| $b' = 11$        | 15.10               | 15.00      | $b' = 26$        | 20.34               | 19.18      |
| $b' = 12$        | 16.09               | 15.90      | $b' = 27$        | 18.64               | 17.49      |
| $b' = 13$        | 17.69               | 17.42      | $b' = 28$        | 17.07               | 15.93      |
| $b' = 14$        | 15.46               | 15.13      | $b' = 29$        | 15.63               | 14.49      |
| $b' = 15$        | 18.14               | 17.67      | $b' = 30$        | 14.30               | 13.19      |

Tableau 2.5.2: Estimation de l'EQM de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonales décrite dans (2.4.5) pour plusieurs longueurs des blocs lorsque la série est MA(4).

| Taille des blocs | 10 <sup>2</sup> EQM |             | Taille des blocs | 10 <sup>2</sup> EQM |            |
|------------------|---------------------|-------------|------------------|---------------------|------------|
|                  | $b^* = 8$           | $b^* = 24$  |                  | $b^* = 8$           | $b^* = 24$ |
| $b' = 1$         | <b>9.95</b>         | <b>9.23</b> | $b' = 16$        | 16.55               | 14.63      |
| $b' = 2$         | 10.36               | 9.58        | $b' = 17$        | 20.62               | 18.37      |
| $b' = 3$         | 10.79               | 9.97        | $b' = 18$        | 18.87               | 16.64      |
| $b' = 4$         | 10.79               | 9.95        | $b' = 19$        | 17.25               | 15.04      |
| $b' = 5$         | 11.26               | 10.39       | $b' = 20$        | 15.77               | 13.59      |
| $b' = 6$         | 13.16               | 12.12       | $b' = 21$        | 21.14               | 18.54      |
| $b' = 7$         | 13.23               | 12.14       | $b' = 22$        | 19.42               | 16.88      |
| $b' = 8$         | 14.35               | 13.16       | $b' = 23$        | 17.76               | 15.30      |
| $b' = 9$         | 13.86               | 12.62       | $b' = 24$        | 16.15               | 13.77      |
| $b' = 10$        | 14.17               | 12.78       | $b' = 25$        | 14.57               | 12.31      |
| $b' = 11$        | 14.87               | 13.35       | $b' = 26$        | 21.46               | 18.67      |
| $b' = 12$        | 15.93               | 14.29       | $b' = 27$        | 19.72               | 17.03      |
| $b' = 13$        | 17.57               | 15.78       | $b' = 28$        | 18.13               | 15.54      |
| $b' = 14$        | 15.52               | 13.80       | $b' = 29$        | 16.67               | 14.19      |
| $b' = 15$        | 18.33               | 16.37       | $b' = 30$        | 15.34               | 12.95      |

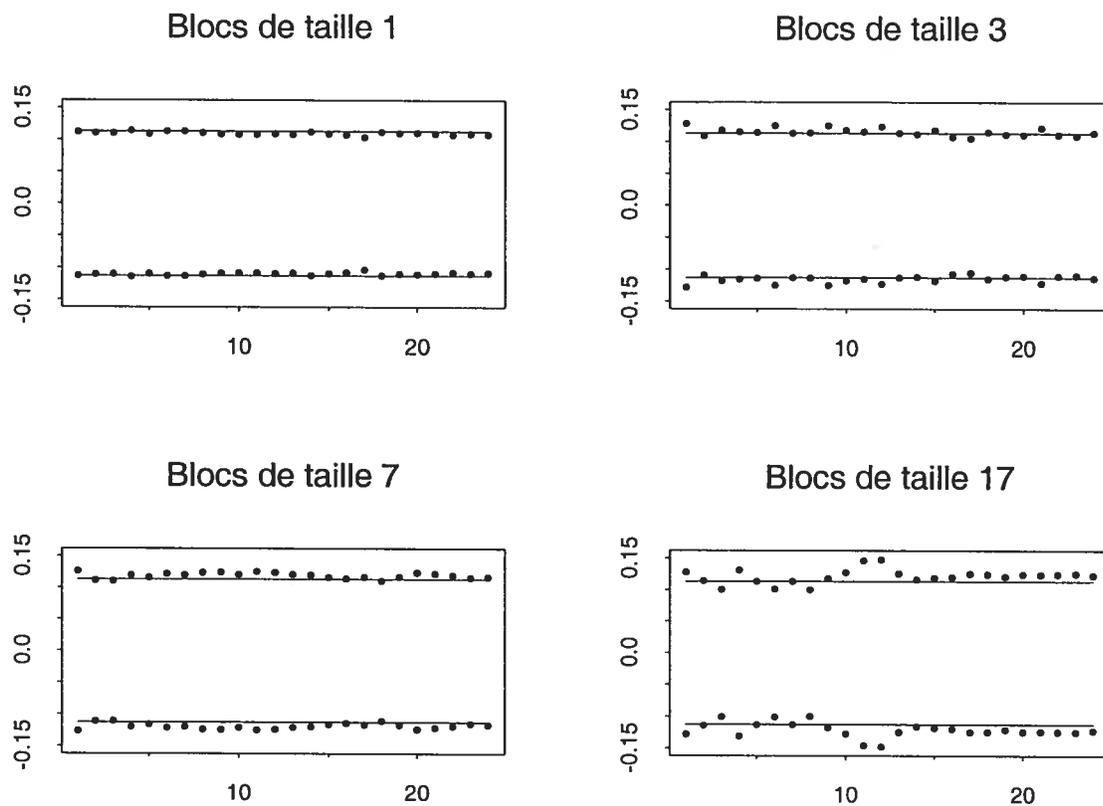


FIGURE 2.5.1. Limites de signification des autocorrélations échantillonnelles à différents délais pour différentes tailles des blocs avec une série de longueur 300 du modèle MA(1) défini par (2.5.1).

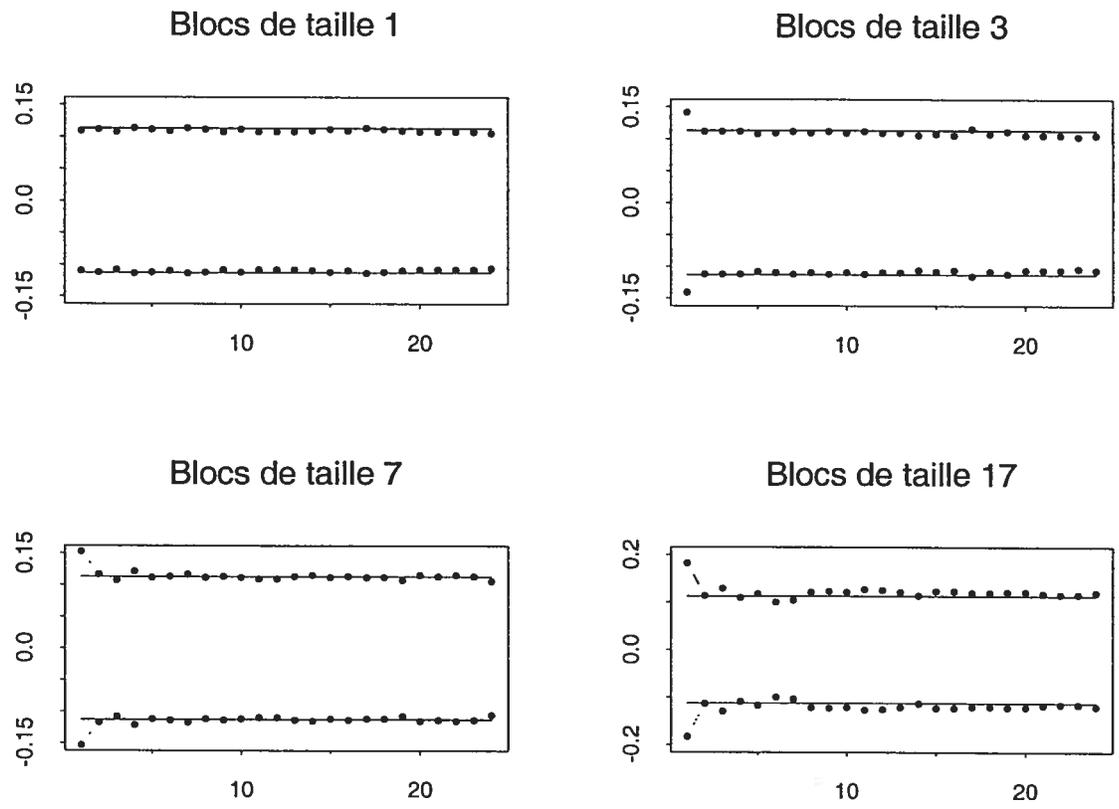


FIGURE 2.5.2. Limites de signification des autocorrélations échantillonnelles à différents délais pour différentes tailles des blocs avec une série de longueur 300 du modèle MA(4) défini par (2.5.2).

# Chapitre 3

---

## ESTIMATION ET CRITÈRES DE SÉLECTION

Dans ce chapitre, nous présentons les principaux critères de sélection de modèles pour les processus ARMA forts et faibles ainsi que les méthodes d'estimation pour les deux classes de modèles. Pour les modèles ARMA forts, les méthodes d'identification et d'estimation ont été largement développées et expérimentées. Pour les modèles ARMA faibles, des travaux récents de Francq et Zakoïan (1998a, 1998b, 2000) ont conduit à certaines méthodes d'identification et d'estimation que nous présentons dans ce chapitre.

### 3.1. ESTIMATION

L'estimation des paramètres d'un modèle de séries chronologiques est une des étapes importantes de la modélisation. Pour les modèles ARMA forts, il existe plusieurs méthodes, dont la méthode des moments, la méthode des moindres carrés et la méthode du maximum de vraisemblance. Dans cette section, nous décrivons l'estimation de vraisemblance maximale gaussienne. L'application de ces méthodes pour l'estimation des modèles ARMA faibles peut mener à des résultats erronés étant donné que ces modèles ne satisfont pas les conditions nécessaires. Pour cette classe de modèles, Francq et Zakoïan (1998a) ont développé une nouvelle méthode d'estimation basée sur la méthode des moindres carrés.

#### 3.1.1. Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance d'un ARMA fort

Considérons le modèle ARMA( $p, q$ ) fort suivant :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (3.1.1)$$

où  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc fort  $(0, \sigma^2)$ . Nous supposons que le modèle est stationnaire, inversible, que  $E[X_t] = \mu = 0$  et que les polynômes  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$  et  $\theta(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q$  n'ont pas de racines communes. Nous cherchons les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$  et  $\sigma^2$  lorsque  $\{\varepsilon_t\}$  est gaussien. Lorsque le bruit est gaussien, il s'en suit de la représentation MA( $\infty$ ),

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

que  $\{X_t\}$  est aussi gaussien et posons  $\mu = 0$ .

Soit  $X_1, \dots, X_n$  les  $n$  observations. Si  $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)'$  alors  $\mathbf{X}_n$  est  $N_n(\mathbf{0}, \Gamma_n)$  où  $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{n \times n}$  est complètement déterminée par les paramètres  $\phi, \theta$  et  $\sigma^2$ . Ainsi la fonction de vraisemblance pour estimer  $\phi, \theta$  et  $\sigma^2$  s'écrit

$$L(\Gamma_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Gamma_n|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n' \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n\right) \quad (3.1.2)$$

en supposant que  $\Gamma_n$  est de plein rang. Les estimateurs de vraisemblance maximale, abrégés EVM, de  $\phi, \theta$  et  $\sigma^2$  sont les valeurs de  $\phi, \theta$  et  $\sigma^2$  qui maximisent (3.1.2).

Afin d'éviter le calcul de  $|\Gamma_n|$  et de  $\Gamma_n^{-1}$ ,  $L(\Gamma_n)$  peut être exprimée en termes des erreurs de prévision d'horizon 1 :  $X_j - \hat{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , et de leurs variances  $v_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , en utilisant l'algorithme des innovations (Brockwell et Davis, 2002, p 70)

$$\hat{X}_j = \begin{cases} 0 & , \quad j = 1 \\ P_{j-1} X_j & , \quad j = 2, \dots, n \end{cases}$$

où  $P_{j-1}$  est l'opérateur de projection orthogonale de  $X_j$  sur  $\text{span}\{X_t : t \leq j-1\}$  et

$$v_{j-1} = E[(X_j - \hat{X}_j)^2], \quad j = 1, \dots, n.$$

Les erreurs de prévision  $(X_j - \hat{X}_j)$  sont indépendantes et (3.1.2) s'écrit

$$L(\Gamma_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n v_0 \cdots v_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{X}_j)^2 / v_{j-1}\right\}. \quad (3.1.3)$$

Dans le cas des processus ARMA,  $v_{j-1} = \sigma^2 r_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$  et la vraisemblance gaussienne est de la forme :

$$L(\Gamma_n) = L(\phi, \theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n r_0 \cdots r_{n-1}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{(X_j - \hat{X}_j)^2}{r_{j-1}}\right\}. \quad (3.1.4)$$

En différenciant  $\ln L(\phi, \theta, \sigma^2)$  par rapport à  $\sigma^2$  et en notant que  $\hat{X}_j$  et  $r_j$  ne dépendent pas de  $\sigma^2$ , on trouve que les EVM  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$ , et  $\hat{\sigma}^2$  satisfont les équations

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) \quad (3.1.5)$$

où

$$S(\hat{\phi}, \hat{\theta}) = \sum_{j=1}^n (X_j - \hat{X}_j)^2 / r_{j-1}$$

et  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{\theta}$  sont les valeurs de  $\phi$  et  $\theta$  qui minimisent

$$l(\phi, \theta) = \ln(n^{-1} S(\phi, \theta)) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(r_{j-1}). \quad (3.1.6)$$

La minimisation de  $l(\phi, \theta)$  doit être faite numériquement.

Les principales propriétés des EVM sont les suivantes (Brockwell et Davis, 2002, section 5.2).

Soit  $\hat{\beta}' = (\hat{\phi}', \hat{\theta}')$  l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\beta = (\phi, \theta)$ . Alors

1-  $\hat{\beta} \rightarrow \beta$  et  $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$  en probabilité quand  $n \rightarrow \infty$ .

2-  $\hat{\beta}$  est  $AN_m(\beta, \frac{1}{n} V(\beta))$  où  $m = p + q$  et  $V(\beta)$  est la matrice de covariance asymptotique du vecteur  $\hat{\beta}$ . La matrice  $V(\beta)$  est donnée par la formule suivante pour  $p \geq 1$  ou  $q \geq 1$  :

$$V(\beta) = \sigma^2 \begin{bmatrix} E[\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t'] & E[\mathbf{U}_t \mathbf{V}_t'] \\ E[\mathbf{V}_t \mathbf{U}_t'] & E[\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t'] \end{bmatrix} \quad (3.1.7)$$

où  $\mathbf{U}_t = (U_t, \dots, U_{t+1-p})'$ ,  $\mathbf{V}_t = (V_t, \dots, V_{t+1-q})'$  et  $\{U_t\}$ ,  $\{V_t\}$  sont les processus autorégressifs définis par les équations  $\phi(B)U_t = Z_t$  et  $\theta(B)V_t = Z_t$  où  $\{Z_t\}$  est un bruit blanc fort (0,1).

Pour  $p = 0$ ,  $V(\beta) = \sigma^2 (E[\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t'])^{-1}$  et pour  $q = 0$ ,  $V(\beta) = \sigma^2 (E[\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t'])^{-1}$ .

3- Si  $\{X_t\}$  n'est pas gaussien et qu'on utilise quand même la fonction de vraisemblance gaussienne (3.1.3), l'estimateur  $\hat{\beta}$  de  $\beta$  a les mêmes propriétés asymptotiques que dans le cas gaussien, à savoir que

$$\hat{\beta} \text{ est } AN_m(\beta, \frac{1}{n}V(\beta)).$$

Aussi,  $\hat{\sigma}^2 \rightarrow \sigma^2$ .

On dit alors que  $\hat{\beta}$  est un estimateur de pseudo-vraisemblance maximale de  $\beta$  et  $L(\Gamma_n)$  défini par (3.1.2) est la fonction de pseudo-vraisemblance.

Tous les résultats que nous avons présenté dans cette section sont démontrés dans Brockwell et Davis (1991, chap 10).

### 3.1.2. Estimation par la méthode des moindres carrés d'un ARMA faible

Dans le cas d'un modèle ARMA faible, défini par (3.1.1), on ne sait en général écrire la fonction de vraisemblance puisque les innovations  $\varepsilon_t$  sont non corrélées mais dépendantes. Le processus  $\{\varepsilon_t\}$  ne peut être gaussien et ainsi le processus  $\{X_t\}$  n'est pas gaussien non plus. En effet, un processus ARMA faible stationnaire et inversible admet les deux représentations

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.1.8)$$

et

$$\varepsilon_t = X_t - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.9)$$

En utilisant les représentations (3.1.8) et (3.1.9), on peut montrer que  $\{X_t\}$  est gaussien si et seulement si  $\{\varepsilon_t\}$  est gaussien. De (3.1.8),  $\{\varepsilon_t\}$  est gaussien implique que  $\{X_t\}$  est gaussien. De même de (3.1.9),  $\{X_t\}$  est gaussien entraîne que le processus innovation  $\{\varepsilon_t\}$  est gaussien. Donc, puisque les innovations  $\varepsilon_t$  d'un

ARMA faible ne sont pas gaussiennes, le processus  $\{X_t\}$  ne peut être gaussien.

Une alternative à l'estimation de vraisemblance maximale qui conduit dans le cas ARMA fort à des estimateurs de même efficacité asymptotique est la méthode des moindres carrés.

Notons  $\beta_0 = -(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$  le vecteur des paramètres autorégressifs et moyennes mobiles. Le signe “-” permet d'harmoniser notre notation à celle de Francq et Zakoïan (1998a, 2000). Puisqu'on a supposé la stationnarité et l'inversibilité,  $\beta_0$  appartient à l'espace des paramètres

$\mathcal{B} = \{\beta : \beta = (\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q})' \in \mathbb{R}^{p+q}, \phi_\beta(z) = 1 + \beta_1 z + \dots + \beta_p z^p$   
et  $\theta_\beta(z) = 1 + \beta_{p+1} z^{p+1} + \dots + \beta_{p+q} z^{p+q}$  ont toutes leurs racines à l'extérieur du cercle unité et n'ont pas de racines communes }.

Pour tout  $\beta \in \mathcal{B}$ , soit  $\{\varepsilon_t(\beta)\}$  le processus stationnaire du second ordre qui est la solution de

$$\varepsilon_t(\beta) = X_t + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \beta_{p+i} \varepsilon_{t-i}(\beta), \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.10)$$

Notons que  $\varepsilon_t(\beta_0) = \varepsilon_t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , le processus innovation de  $\{X_t\}$ . La représentation MA( $\infty$ ) du processus  $\varepsilon_t(\beta)$  implique qu'il existe une suite de constantes  $\{c_i(\beta)\}$  telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(\beta)| < \infty$$

et

$$\varepsilon_t(\beta) = X_t + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\beta) X_{t-i}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \quad (3.1.11)$$

Si nous avons une réalisation de longueur  $n$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $\varepsilon_t(\beta)$  peut être approximée, pour tout  $0 < t \leq n$ , par  $e_t(\beta)$  définie récursivement par

$$e_t(\beta) = X_t + \sum_{i=1}^p \beta_i X_{t-i} - \sum_{i=1}^q \beta_{p+i} e_{t-i}(\beta), \quad (3.1.12)$$

où les valeurs initiales inconnues sont fixées à zéro :  $e_0(\beta) = e_{-1}(\beta) = \dots = e_{-q+1}(\beta) = X_0 = X_{-1} = \dots = X_{-p+1} = 0$ . Soit  $\delta$  une constante strictement positive choisie de façon à ce que la vraie valeur du paramètre  $\beta_0$  appartienne à  $\mathcal{B}_\delta = \{ \beta : \beta \in \mathbb{R}^{p+q}, \text{ les racines des polynômes } \phi_\beta(z) \text{ et } \theta_\beta(z) \text{ sont de module supérieur ou égal à } 1 + \delta \text{ et } \phi_\beta(z) \text{ et } \theta_\beta(z) \text{ n'ont pas de racines communes} \}$ . Le vecteur aléatoire  $\hat{\beta}_n$  est appelé l'estimateur des moindres carrés s'il satisfait, presque sûrement,

$$\mathcal{Q}_n(\hat{\beta}_n) = \min_{\beta \in \mathcal{B}_\delta} \mathcal{Q}_n(\beta), \quad (3.1.13)$$

où

$$\mathcal{Q}_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2(\beta). \quad (3.1.14)$$

Pour prouver la convergence et la normalité asymptotique de l'estimateur des moindres carrés, il est plus commode de considérer la somme suivante

$$\mathcal{O}_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\beta). \quad (3.1.15)$$

où  $\{\varepsilon_t(\beta)\}$  est donné par (3.1.10). La minimisation de (3.1.15) conduit à des estimateurs asymptotiquement équivalents.

**Théorème 3.1.1.** *Soit  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  un processus ARMA( $p, q$ ) faible stationnaire au sens strict, ergodique, et dont le second moment existe. Soit  $\{\hat{\beta}_n\}$  une suite d'estimateurs des moindres carrés définis par (3.1.13). Supposons que  $\beta_0 \in \mathcal{B}_\delta$ , alors*

$$\hat{\beta}_n \longrightarrow \beta_0 \quad \text{presque sûrement quand} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Afin d'obtenir la normalité asymptotique, nous avons besoin d'hypothèses plus fortes.

Pour tout  $\beta \in \mathcal{B}_\delta$ , soit

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{O}_n(\beta) = \left( \frac{\partial}{\partial \beta_1} \mathcal{O}_n(\beta), \dots, \frac{\partial}{\partial \beta_{p+q}} \mathcal{O}_n(\beta) \right)'.$$

Aussi, posons les matrices suivantes :

$$I(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \sqrt{n} \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{O}_n(\beta_0) \right), \quad J(\beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \mathcal{O}_n(\beta_0) \right].$$

**Théorème 3.1.2.** *Sous les hypothèses du théorème 3.1.1 et si le processus  $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est  $\alpha$ -mélangeant avec  $E[|X_t|^{4+2\delta}] < \infty$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} [\alpha_X(k)]^{\delta/(2+\delta)} < \infty$ , pour un  $\delta > 0$ . Alors*

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) \text{ est } AN(\mathbf{0}, \Sigma)$$

où

$$\Sigma = J^{-1}(\beta_0) I(\beta_0) J^{-1}(\beta_0).$$

Il est important de noter que, dans le cas d'un ARMA fort, nous avons

$$I(\beta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n 2\varepsilon_t(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0) \right) = 4\sigma^2 \text{Var} \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0) \right)$$

car d'après (3.1.10),  $\varepsilon_t(\beta_0)$  et  $\frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0)$  sont indépendants puisque  $\frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0)$  ne fait intervenir que des valeurs passées par rapport à  $t$  des  $X_j$  et des  $\varepsilon_j(\beta_0)$ . Aussi, on a

$$\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) = 2\sigma^2 J^{-1}(\beta_0). \quad (3.1.16)$$

Cependant, cette simplification ne peut être utilisée dans le cas d'un ARMA faible.

Soit

$$\hat{J}_n(\beta) = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta} e_t(\beta) \left( \frac{\partial}{\partial \beta} e_t(\beta) \right)',$$

où  $\frac{\partial}{\partial \beta} e_t(\beta) = \left( \frac{\partial}{\partial \beta_1} e_t(\beta), \dots, \frac{\partial}{\partial \beta_{p+q}} e_t(\beta) \right)'$ .

**Théorème 3.1.3.** *Sous les hypothèses du théorème 3.1.1, nous avons*

$$\hat{J}_n(\beta) \longrightarrow J(\beta) \quad \text{presque sûrement quand } n \longrightarrow \infty.$$

Dans le cas d'un ARMA fort, La matrice  $\Sigma$  peut être estimée par  $\hat{\Sigma} = 2\hat{\sigma}_n^2 \hat{J}_n^{-1}(\beta)$ , où  $\hat{\sigma}_n^2 = \mathcal{Q}_n(\hat{\beta}_n)$ . Dans le cas général d'un ARMA faible, il nous reste à estimer  $I(\beta_0)$ .

Soit

$$\Delta_i(\beta) = 4E \left[ \left( \varepsilon_t(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta) \right) \left( \varepsilon_{t+i}(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_{t+i}(\beta) \right)' \right].$$

Sous les hypothèses du théorème 3.1.2, il est possible de montrer que la suite  $\{\Delta_i(\beta)\}$  est absolument sommable. De la stationnarité du processus centré  $\{\varepsilon_t(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0)\}$ , nous avons que

$$\begin{aligned} I(\beta_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \text{Cov} \left( \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t^2(\beta_0), \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_s^2(\beta_0) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \text{Cov} \left( \varepsilon_t(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_t(\beta_0), \varepsilon_s(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_s(\beta_0) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \sum_{|i| < n} (n - |i|) \text{Cov} \left( \varepsilon_1(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_1(\beta_0), \varepsilon_{1+i}(\beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} \varepsilon_{1+i}(\beta_0) \right) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \Delta_i(\beta_0). \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Le moment  $\Delta_i(\beta_0)$  peut être estimé par  $\hat{\Delta}_i(\beta_n)$ , où

$$\hat{\Delta}_i(\beta_n) = \frac{4}{n} \sum_{t=1}^{n-i} e_t(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} e_t(\beta) \left( e_{t+i}(\beta) \frac{\partial}{\partial \beta} e_{t+i}(\beta) \right)', \quad 0 \leq i \leq n,$$

et  $\hat{\Delta}_{-i}(\beta_n) = \hat{\Delta}_i(\beta_n)'$ .

Sous les hypothèses du théorème 3.1.2, nous pouvons donc démontrer que  $\hat{\Delta}_i(\hat{\beta}_n)$  est un estimateur convergent de  $\Delta_i(\beta_0)$ . Alors il est naturel de se demander si

l'estimateur  $\hat{I}_n(\hat{\beta}_n) = \sum_{i=-n+1}^{n-1} \hat{\Delta}_i(\hat{\beta}_n)$  obtenu de (3.1.17) en remplaçant  $\Delta_i(\beta_0)$  par  $\hat{\Delta}_i(\hat{\beta}_n)$  est convergent pour  $I(\beta_0)$ . La réponse est non car pour tout  $n$

$$\hat{I}_n(\hat{\beta}_n) = \frac{4}{n} \left( \sum_{t=1}^n e_t(\hat{\beta}_n) \frac{\partial}{\partial \beta} e_t(\hat{\beta}_n) \right)^2 = n \left( \frac{\partial}{\partial \beta} Q_n(\hat{\beta}_n) \right)^2 = 0.$$

La solution classique pour remédier à ce genre de problèmes est d'assigner des poids aux moments échantillonnaires  $\hat{\Delta}_i(\hat{\beta}_n)$  de la forme  $\omega(ib_n)$  où  $\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$  est une suite de réels et  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction bornée à support compact  $[-a, a]$ , continue à l'origine, telle que  $\omega(0) = 1$  et ayant au plus un nombre fini de discontinuités. La fenêtre rectangulaire  $\omega(x) = 1_{[-1,1]}(x)$  de même que la fenêtre de Bartlett  $\omega(x) = (1 - |x|)1_{[-1,1]}(x)$  sont des exemples de telles fonctions de poids. La fonction  $I_A(x)$  désigne la fonction indicatrice de l'ensemble  $A$ . Cela nous conduit à définir l'estimateur suivant de  $I(\beta_0)$  :

$$\hat{I}_n(\beta) = \sum_{i=-T_n}^{T_n} \omega(ib_n) \hat{\Delta}_i(\beta), \quad (3.1.18)$$

où  $T_n = [a/b_n]$ ,  $[x]$  représentant la partie entière de  $x$ .

**Théorème 3.1.4.** *Sous les hypothèses du théorème 3.1.2 et si la suite  $\{b_n\}$  est telle que  $b_n \rightarrow 0$  et  $nb_n^{4+10/\nu} \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , alors*

$$\hat{I}_n(\hat{\beta}_n) \rightarrow I(\beta_0)$$

*en probabilité lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

Des théorèmes 3.1.3 et 3.1.4 il résulte que  $\hat{\Sigma}_n = \hat{J}_n^{-1}(\hat{\beta}_n) \hat{I}_n(\hat{\beta}_n) \hat{J}_n^{-1}(\hat{\beta}_n)$  est un estimateur convergent en probabilité de  $\Sigma$ . L'estimateur  $\hat{\Sigma}_n$  n'est pas nécessairement défini non négatif. On peut remédier à cette lacune en choisissant une fonction de poids définie non négative.

**Théorème 3.1.5.** *Supposons que les hypothèses du théorème 3.1.4 sont satisfaites. Si en plus  $\omega(\cdot)$  est une fonction définie non négative, alors  $\hat{\Sigma}_n$  est une matrice définie non négative.*

Les démonstrations des théorèmes 3.1.1 à 3.1.5 sont présentées dans Francq et Zakoïan (1998a, 2000)

## 3.2. CRITÈRES DE SÉLECTION DE MODÈLES

Lorsqu'on dispose de données, l'un des premiers problèmes à résoudre est de savoir comment ajuster le bon modèle. Dans la modélisation ARMA, cela revient à déterminer les ordres autorégressif  $p$  et moyenne mobile  $q$ . Pour les modèles ARMA forts, plusieurs critères ont été proposés permettant la sélection des ordres  $p$  et  $q$ . On se limitera dans cette partie aux plus importants, soit le AIC, le BIC et le SBC. Dans le cas des ARMA faibles, les propriétés des critères usuels de sélection ont été étudiées par Francq et Zakoïan (1998b).

### 3.2.1. Modèles ARMA forts

#### *Critère d'information d'Akaike (AIC)*

Utilisant des principes de la théorie de l'information, Akaike a proposé le critère suivant pour mesurer l'ajustement d'un modèle à des données :

$$AIC(m) = n \ln \hat{\sigma}^2 + 2m$$

où  $m$  est le nombre de paramètres et  $\hat{\sigma}^2$  est l'estimateur de maximum de vraisemblance de  $\sigma^2$  la variance du bruit blanc. Le premier terme est une mesure de l'ajustement du modèle aux données alors que le deuxième est une pénalité pour le nombre de paramètres. Le problème avec le AIC est qu'il n'est pas un critère convergent, c'est-à-dire qu'il a tendance à surestimer le nombre de paramètres.

*Critère bayésien d'information d'Akaike (BIC)*

Pour palier aux lacunes du AIC, Akaike (1978) a proposé la modification suivante au AIC qui a conduit au critère BIC qui est défini comme suit

$$BIC(m) = (n - m) \ln \hat{\sigma}^2 - (n - m) \ln \left(1 - \frac{m}{n}\right) + m \ln n + m \ln \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) \right].$$

En utilisant l'approximation  $-(n - m) \ln \left(1 - \frac{m}{n}\right) \simeq m$ , on obtient

$$BIC(m) = (n - m) \ln \hat{\sigma}^2 + m(\ln n + 1) + m \ln \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) \right].$$

Le BIC est un critère convergent dans le sens que si  $\{X_t\}$  est un processus ARMA( $p, q$ ) et que  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  sont les estimateurs des ordres  $p$  et  $q$  qui minimisent le BIC, alors  $\hat{p} \rightarrow p$  et  $\hat{q} \rightarrow q$  avec probabilité 1.

*Critère bayésien d'information de Schwarz (SBC)*

Schwarz (1978) a présenté une méthode bayésienne pour estimer les dimensions d'un modèle. Il stipule que les ordres à choisir sont ceux qui minimisent le critère suivant

$$SBC(m) = n \ln \hat{\sigma}^2 + m \ln n.$$

Ce critère est aussi convergent. Pour des séries assez longues, le BIC et le SBC sont équivalents. Plus de détails sur les propriétés des critères de sélections de modèles en séries chronologiques sont présentés dans Brockwell et Davis (2002, section 5.5).

### 3.2.2. Modèles ARMA faibles

Les propriétés des critères de sélection décrites dans la section précédente ne sont pas nécessairement valides pour des ARMA faibles. Comme la fonction de vraisemblance est inconnue même sous des hypothèses restrictives sur la classe

des modèles ARMA, les critères de sélection de modèles ne peuvent être définis à partir de la fonction de vraisemblance. Francq et Zakoïan (1998b) ont proposé de les définir à partir de la somme des carrés des erreurs.

Supposons que la série  $X_1, \dots, X_n$  est générée par un modèle ARMA( $p, q$ ) faible et choisissons  $P$  et  $Q$  tels que  $p_0 \leq P$  et  $q_0 \leq Q$ . Pour un ARMA( $p, q$ ) faible quelconque,  $\hat{\beta}_n(p, q)$  représente l'estimateur des moindres carrés du vecteur  $\beta$  des paramètres autorégressifs et moyennes mobiles décrit à la section 3.1.2. Les estimateurs de  $p_0$  et  $q_0$  sont obtenus en minimisant la quantité suivante :

$$K_n(p, q) = n \ln \mathcal{Q}_n(\hat{\beta}_n(p, q)) + a(p, q, n)$$

où  $\mathcal{Q}_n(\hat{\theta}_n(p, q))$  donné par (3.1.13) est l'estimateur de  $\sigma^2$  et  $a(p, q, n)$  est un terme de pénalité satisfaisant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a(p, q, n) & \geq 0 \\ a(p, q, n) & \geq a(p', q', n) \text{ si } p \geq p' \text{ et } q \geq q' \end{cases}$$

Ces conditions ne sont pas nécessaires, il suffit que le terme de pénalité tende vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Les choix les plus répandus pour  $a(p, q, n)$  sont

- AIC :  $a(p, q, n) = 2(p + q)$ ,
- BIC :  $a(p, q, n) = (p + q)(\ln n + 1) + (p + q) \ln \left[ \frac{1}{(p+q)} \left( \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}^2} - 1 \right) \right]$ ,
- SBC :  $a(p, q, n) = (p + q) \ln n$ .

Soient  $\hat{p}_n$  et  $\hat{q}_n$  les valeurs de  $p$  et  $q$  qui minimisent  $K_n(p, q)$ , c'est-à-dire

$$K_n(\hat{p}_n, \hat{q}_n) = \min_{(0,0) \leq (p,q) \leq (P,Q)} K_n(p, q). \quad (3.2.1)$$

**Théorème 3.2.1.** *Soit  $\{X_t\}$  un processus ARMA( $p_0, q_0$ ) faible satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1.2. Supposons que pour tout  $p \leq P$  et  $q \leq Q$ ,  $a(p, q, n)$*

converge vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si  $\hat{p}_n$  et  $\hat{q}_n$  sont les valeurs de  $p$  et  $q$  données par (3.2.1), alors nous avons presque sûrement

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{p}_n \geq p_0 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n \geq q_0.$$

Ce résultat est démontré dans Francq et Zakoïan (1998b) et nous assure que  $\hat{p}_n$  et  $\hat{q}_n$  ne sous-estiment pas asymptotiquement les vrais ordres  $p_0$  et  $q_0$ .

La modélisation ARMA comporte trois étapes : l'identification des ordres  $p_0$  et  $q_0$ , l'estimation des paramètres du modèle et finalement la validation du modèle estimé. Dans ce chapitre nous avons traité les deux premières étapes. La troisième qui porte sur l'analyse des résidus du modèle estimé ne sera pas discuté ici car très peu de résultats généraux existent. Justement, ceci fait l'objet d'un projet de recherche en cours par Francq, Roy et Zakoïan (2003).

# Chapitre 4

---

## SIMULATIONS

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les méthodes d'estimation et d'identification pour les processus ARMA faibles. Nous allons maintenant procéder à une étude expérimentale de ces méthodes. Dans la première section, nous étudions la validité des méthodes d'identification du "vrai" modèle à savoir les critères de sélection de modèles AIC et SBC définis dans la sous-section 3.2.2. Dans la section 2, nous appliquons les méthodes d'estimation à certains modèles ARMA faibles.

Pour réaliser ces deux objectifs, nous avons utilisé le langage Fortran 77. La librairie NAG version mark 16 de sous-routines Fortran a servi dans l'élaboration de nos programmes. Le code Fortran des programmes utilisés est fourni en annexe.

## 4.1. IDENTIFICATION

Nous allons étudier la validité des critères de sélection de modèles pour les processus ARMA faibles. Pour des séries simulées, nous avons considéré deux modélisations : une modélisation ARMA et une modélisation purement autorégressive en minimisant un critère d'information.

### 4.1.1. Plan des simulations

Dans nos simulations, nous avons considéré deux modèles MA(1) fort et faible :

- MA(1) fort :  $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_t$  où  $\{\varepsilon_t\}$  est i.i.d  $N(0, 1)$
- MA(1) faible :  $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_t$  où  $\varepsilon_t = Z_t Z_{t-1}$  avec  $\{Z_t\}$  est i.i.d.  $N(0, 1)$

Pour chaque modèle, nous avons généré 1000 réalisations indépendantes de tailles  $n = 100, 300$  et  $500$  respectivement et nous avons considéré trois valeurs du paramètre  $\theta : 0, 0.5$  et  $-0.5$ .

Pour générer une réalisation de longueur  $n$  du modèle MA(1) faible, nous avons procédé comme suit :

1. Nous avons généré  $n + 2$  bruits blancs forts  $Z_t$  de loi  $N(0, 1)$  grâce au sous-programme G05DDF de la librairie NAG de Fortran .
2. Nous avons obtenu  $n + 1$  bruits blancs faibles  $\varepsilon_t$  de la formule  $\varepsilon_t = Z_t Z_{t-1}$ .
3. Pour obtenir les  $n$  observations de la série, nous avons utilisé la relation

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}.$$

Pour la simulation du modèle MA(1) fort, nous avons utilisé le sous-programme G05EGF de la librairie NAG.

Afin de modéliser la série générée, nous avons utilisé deux approches : d'abord la modélisation ARMA( $p, q$ ) où  $0 \leq p \leq P = 2$  et  $0 \leq q \leq Q = 2$  et la modélisation purement autorégressive AR( $p$ ), avec  $0 \leq p \leq P = 12$ . Dans les deux approches, les valeurs ( $p, q$ ) ou  $p$  retenues sont celles qui minimisent le critère

de sélection de modèles. Nous avons fait deux simulations indépendantes pour chaque modélisation. Nous commençons par la description de la simulation de la modélisation ARMA.

Pour un modèle donné, une taille de série donnée et une valeur du paramètre  $\theta$  fixé, nous avons exécuté les étapes suivantes pour chaque réalisation.

1. Nous avons généré  $n$  observations du modèle considéré.
2. Nous avons estimé les modèles ARMA( $p, q$ ),  $p, q = 0, 1, 2$ , par la méthode des moindres carrés décrite à la sous-section 3.1.2 en utilisant le sous-programme E04JAF.
3. Les valeurs des critères AIC et SBC définis pour les modèles ARMA faibles ont été calculées pour chaque modèle ARMA( $p, q$ ) estimé à l'étape précédente.
4. Nous avons déterminé les valeurs des ordres  $p$  et  $q$  qui minimisent les critères AIC et SBC grâce au sous-programme G01AAF de la librairie NAG.
5. Finalement, à partir de l'ensemble des réalisations, nous avons calculé la proportion de réalisations pour lesquelles chaque modèle ARMA( $p, q$ ),  $p, q = 0, 1, 2$  a été retenu selon les critères AIC et SBC.

Pour la modélisation autorégressive, nous avons procédé de la même façon sauf que nous avons estimé un modèle AR( $p$ ) avec  $p = 0, 1, \dots, 12$ .

#### 4.1.2. Résultats des simulations

Nous allons maintenant exposer les résultats de nos simulations en commençant par ceux de la modélisation ARMA. Pour chacun des tableaux 4.1.1 à 4.1.3, nous retrouvons dans la première colonne les valeurs du paramètre  $\theta$  du modèle MA(1), dans la deuxième le type d'innovations, c'est-à-dire fortes ou faibles, dans

la troisième le critère de sélection de modèle et dans les autres la fréquence (en pourcentage) de sélection de chacun des neuf modèles  $\text{ARMA}(p, q)$ ,  $p, q = 0, 1, 2$ . les trois tableaux correspondent aux trois longueurs de séries  $n = 100, 300$  et  $500$ .

Nous pouvons faire les remarques suivantes concernant les résultats présentés dans les tableaux. Tout d'abord, en comparant les pourcentages de sélection du vrai modèle, nous constatons que ceux obtenus à l'aide du critère SBC sont plus élevés que ceux obtenus en utilisant le critère AIC, ceci est vrai quelque soit la taille de la série, le type d'innovations et la valeur du paramètre  $\theta$ . Ce constat n'est pas surprenant car dans le cas fort, il est bien connu que le critère SBC est un critère convergent alors que le critère AIC surestime avec une probabilité plus grande que 0 les ordres du modèle; voir par exemple Brockwell et Davis (2002).

Analysons maintenant l'effet de la taille des séries sur les fréquences de sélection. Lorsque la taille de l'échantillon est égale à 100, nous remarquons que le critère AIC ne donne pas de bon résultats, à savoir que les proportions associées aux vrais modèles varient entre 38 et 60%. Cependant la situation s'améliore lorsque le nombre d'observations augmente à 300, sauf quand le modèle est un bruit blanc faible ( $\theta = 0$ ). Lorsque la taille passe à 500, nous constatons une légère amélioration. Pour ce qui est du critère SBC, nous obtenons d'excellents résultats. Lorsque la taille des séries est 100, les pourcentages de sélection des vrais modèles sont entre 53 et 86%. Avec des séries de longueur 300, nous notons une importante amélioration des résultats, c'est-à-dire que ces pourcentages varient entre 77 et 97%. L'amélioration est cependant minime lorsque l'on passe de 300 à 500 observations. Au niveau des valeurs des paramètres du modèle étudié, en analysant les résultats lorsque  $\theta = 0.5$  et  $-0.5$ , nous aboutissons aux mêmes

conclusions qu'avec  $n = 300$ .

Les résultats obtenus avec le critère SBC portent à croire que ce dernier est aussi convergent dans le cas faible, tout au moins avec les modèles utilisés, bien que Francq et Zakoïan (1998b) prouvent seulement que  $P[\hat{p} \geq p, \hat{q} \geq q] = 1$ .

Tableau 4.1.1: Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ),  $p, q = 0, 1, 2$  selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 100.

| para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordres $p$ et $q$ du modèle ARMA sélectionné |             |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|------------------|---------|--|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 |                  |         | (0,0)  | (0,1)       | (0,2) | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (2,0) | (2,1) | (2,2) |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>51.7</b>                                  | 4.7         | 2.2   | 4.8   | 5.5   | 12.0  | 2.2   | 2.2   | 14.7  |
|                 |                  | SBC     | <b>85.8</b>                                  | 3.3         | 0.4   | 1.9   | 0.7   | 7.1   | 0.2   | 0.1   | 0.5   |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>40.5</b>                                  | 12.5        | 2.5   | 13.6  | 6.3   | 8.8   | 1.7   | 1.5   | 12.6  |
|                 |                  | SBC     | <b>75.0</b>                                  | 8.9         | 0.7   | 9.7   | 0.6   | 4.5   | 0.4   | 0.0   | 0.2   |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 1.7  | <b>38.7</b> | 0.0   | 18.6  | 5.9   | 0.0   | 5.5   | 2.9   | 8.5   |
|                 |                  | SBC     | 10.7   | <b>53.7</b> | 0.0   | 21.7  | 1.9   | 0.0   | 2.3   | 0.2   | 0.8   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.8  | <b>58.5</b> | 8.1   | 2.6   | 7.3   | 11.1  | 5.9   | 2.5   | 3.2   |
|                 |                  | SBC     | 4.4  | <b>80.3</b> | 3.2   | 4.6   | 1.4   | 4.0   | 1.8   | 0.1   | 0.2   |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 1.5  | <b>38.1</b> | 3.0   | 17.5  | 6.1   | 15.4  | 5.8   | 3.2   | 9.4   |
|                 |                  | SBC     | 10.5   | <b>53.0</b> | 1.1   | 21.6  | 2.1   | 9.5   | 1.8   | 0.2   | 0.2   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.9  | <b>51.2</b> | 8.5   | 2.8   | 7.8   | 13.5  | 8.4   | 3.4   | 3.5   |
|                 |                  | SBC     | 3.4  | <b>76.3</b> | 3.3   | 4.2   | 2.7   | 7.0   | 2.8   | 0.1   | 0.2   |

Tableau 4.1.2: Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ),  $p, q = 0, 1, 2$  selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 300.

| para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordres $p$ et $q$ du modèle ARMA sélectionné |             |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|------------------|---------|--|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 |                  |         | (0,0)  | (0,1)       | (0,2) | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (2,0) | (2,1) | (2,2) |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>53.2</b>                                  | 5.8         | 2.3   | 4.8   | 6.4   | 7.0   | 2.7   | 1.4   | 16.4  |
|                 |                  | SBC     | <b>96.7</b>                                  | 1.0         | 0.0   | 1.0   | 0.4   | 0.7   | 0.1   | 0.0   | 0.1   |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>38.3</b>                                  | 11.3        | 2.1   | 12.3  | 6.7   | 6.6   | 2.6   | 2.4   | 17.2  |
|                 |                  | SBC     | <b>84.5</b>                                  | 7.0         | 0.2   | 6.4   | 0.2   | 1.2   | 0.4   | 0.0   | 0.1   |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 0.0  | <b>57.6</b> | 3.6   | 12.6  | 3.7   | 8.5   | 5.7   | 5.0   | 3.3   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>81.4</b> | 0.7   | 15.9  | 0.5   | 0.8   | 0.6   | 0.0   | 0.1   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0  | <b>60.8</b> | 8.4   | 0.5   | 7.3   | 9.8   | 5.6   | 4.5   | 3.1   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>91.2</b> | 2.4   | 1.6   | 1.0   | 1.6   | 2.0   | 0.1   | 0.1   |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 0.0  | <b>55.3</b> | 3.9   | 12.3  | 3.0   | 10.9  | 6.9   | 3.8   | 3.9   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>77.5</b> | 0.6   | 15.6  | 0.7   | 4.1   | 1.3   | 0.2   | 0.0   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0  | <b>58.9</b> | 7.9   | 0.5   | 8.5   | 10.1  | 7.3   | 4.3   | 2.5   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>90.3</b> | 2.5   | 1.4   | 1.7   | 2.1   | 1.8   | 0.2   | 0.0   |

Tableau 4.1.3: Pourcentages de sélection de chaque modèle ARMA( $p, q$ ),  $p, q = 0, 1, 2$  selon les critères de sélection AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 500.

| para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordres $p$ et $q$ du modèle ARMA sélectionné |             |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|------------------|---------|--|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                 |                  |         | (0,0)  | (0,1)       | (0,2) | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (2,0) | (2,1) | (2,2) |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>52.9</b>                                  | 4.7         | 1.3   | 4.5   | 6.8   | 5.6   | 2.7   | 2.8   | 18.7  |
|                 |                  | SBC     | <b>97.5</b>                                  | 0.7         | 0.1   | 0.9   | 0.2   | 0.3   | 0.2   | 0.1   | 0.0   |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>36.5</b>                                  | 14.7        | 3.3   | 10.4  | 7.1   | 6.8   | 2.2   | 1.6   | 17.4  |
|                 |                  | SBC     | <b>84.7</b>                                  | 7.2         | 0.2   | 6.7   | 0.2   | 1.1   | 0.0   | 0.0   | 0.0   |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 0.0  | <b>55.3</b> | 4.4   | 7.7   | 4.0   | 9.9   | 9.4   | 5.4   | 3.9   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>85.2</b> | 0.6   | 11.0  | 0.6   | 0.8   | 1.4   | 0.3   | 0.1   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0  | <b>62.2</b> | 9.5   | 0.0   | 8.5   | 9.9   | 2.8   | 4.7   | 2.4   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>93.2</b> | 2.1   | 0.0   | 2.0   | 1.9   | 0.8   | 0.0   | 0.0   |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 0.0  | <b>57.1</b> | 3.5   | 8.5   | 3.4   | 13.1  | 8.1   | 3.9   | 2.4   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>83.5</b> | 0.5   | 11.3  | 0.4   | 3.0   | 1.3   | 0.0   | 0.0   |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0  | <b>59.5</b> | 10.7  | 0.1   | 8.1   | 10.7  | 4.3   | 3.5   | 3.1   |
|                 |                  | SBC     | 0.0  | <b>92.8</b> | 1.8   | 0.1   | 1.4   | 2.7   | 1.2   | 0.0   | 0.0   |

Afin de bien comprendre les résultats de la modélisation purement autorégressive, nous voyons d'abord la représentation autorégressive d'un modèle MA(1). Le modèle MA(1) inversible :  $X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$  où  $|\theta| < 1$  et  $\{\varepsilon_t\}$  est un bruit blanc admet la représentation autorégressive d'ordre infini suivante

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j X_{t-j} + \varepsilon_t, \quad (4.1.1)$$

où  $\phi_j = -\theta^j$ . Comme nous l'avons déjà mentionné dans le plan des simulations, nous avons utilisé  $|\theta| = 0.5$ . Dans ce cas, pour  $j = 1, \dots, 5$ , nous obtenons  $|\phi_1| = 0.5$ ,  $|\phi_2| = 0.25$ ,  $|\phi_3| = 0.125$ ,  $|\phi_4| = 0.0625$  et  $|\phi_5| = 0.0312$ . Au vu de ces coefficients, il ne sera donc pas surprenant d'obtenir une petite valeur de  $p$  en utilisant un critère de sélection de modèles.

Nous pouvons maintenant exposer les résultats des simulations pour la modélisation purement autorégressive. Dans les tableaux 4.1.4 à 4.1.6, nous présentons les pourcentages de sélection de chaque modèle AR( $p$ ),  $p = 0, 1, \dots, 12$  pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueurs respectives 100, 300 et 500.

Dans notre analyse, le modèle sélectionné réfère au modèle qui a le pourcentage de sélection le plus élevé. Ce pourcentage est en gras dans les tableaux susmentionnés.

En examinant ces tableaux, lorsque le paramètre  $\theta = 0$ , nous observons à peu près le même scénario que celui de la modélisation ARMA sauf que le critère AIC fait un peu mieux. Considérons maintenant les deux cas où le paramètre  $\theta$  est différent de zéro. Pour ces deux cas, nous remarquons que quel que soit le critère de sélection, l'ordre  $p$  du modèle AR sélectionné avec des innovations

faibles est généralement supérieur à celui obtenu quand les innovations sont fortes.

En fonction de la longueur des séries, nous pouvons faire les remarques suivantes. Lorsque la longueur est égale à 100, le modèle sélectionné quand les innovations sont fortes est un AR(1). Lorsque ces dernières sont faibles, les résultats diffèrent selon la valeur du paramètre  $\theta$  et le critère de sélection. Avec  $\theta = -0.5$ , nous obtenons un AR(2) pour les deux critères mais quand  $\theta = 0.5$ , nous avons un AR(2) avec le AIC et un AR(1) avec le SBC. En augmentant la taille des séries à 300, lorsque les innovations sont fortes, le critère AIC sélectionne un AR(2), alors que le critère SBC conduit à un AR(1). Quand les innovations sont faibles, l'ordre du modèle AR sélectionné augmente, soient 3 et 2 avec les critères AIC et SBC respectivement. Quand le nombre d'observations passe à 500, nous obtenons les mêmes ordres qu'avec  $n=300$ . Cependant les pourcentages des modèles sélectionnés en utilisant le critère AIC augmentent. La tendance est inverse pour l'autre critère. Néanmoins, ceux réalisés avec le AIC sont toujours plus petits que ceux réalisés avec le SBC.

Tableau 4.1.4: Pourcentages de sélection de chaque modèle  $AR(p)$ ,  $p = 0, 1, \dots, 12$  selon les critères AIC et SBC pour des séries  $MA(1)$  fortes et faibles de longueur 100.

| Para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordre $p$ du modèle AR sélectionné |             |             |      |      |     |     |     |     |     |
|-----------------|------------------|---------|------------------------------------|-------------|-------------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|                 |                  |         | 0                                  | 1           | 2           | 3    | 4    | 5   | 6   | 7   | 8   | >8  |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>65.3</b>                        | 14.7        | 6.2         | 4.6  | 3.1  | 1.7 | 1.0 | 0.7 | 0.9 | 1.8 |
|                 |                  | SBC     | <b>92.7</b>                        | 6.0         | 1.0         | 0.2  | 0.1  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>51.1</b>                        | 30.3        | 7.5         | 4.0  | 3.1  | 0.3 | 0.9 | 0.5 | 0.9 | 1.2 |
|                 |                  | SBC     | <b>80.3</b>                        | 18.1        | 1.1         | 0.5  | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 2.4                                | <b>49.4</b> | 24.7        | 9.7  | 4.5  | 3.3 | 1.6 | 1.8 | 0.7 | 1.9 |
|                 |                  | SBC     | 12.8                               | <b>70.8</b> | 13.8        | 2.2  | 0.3  | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 1.7                                | 14.0        | <b>43.9</b> | 18.9 | 10.1 | 4.1 | 1.6 | 2.1 | 1.1 | 2.5 |
|                 |                  | SBC     | 6.9                                | 41.7        | <b>44.2</b> | 5.9  | 1.1  | 0.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 5.3                                | <b>47.2</b> | 23.7        | 9.0  | 4.7  | 3.0 | 2.2 | 1.3 | 1.3 | 2.3 |
|                 |                  | SBC     | 19.2                               | <b>65.3</b> | 13.5        | 1.8  | 0.1  | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.7                                | 18.0        | <b>41.6</b> | 17.9 | 9.5  | 4.1 | 2.7 | 1.5 | 1.3 | 2.7 |
|                 |                  | SBC     | 5.5                                | <b>45.3</b> | 41.8        | 6.1  | 1.1  | 0.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tableau 4.1.5: Pourcentages de sélection de chaque modèle AR(p),  $p= 0, 1, \dots, 12$  selon les critères AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 300.

| Para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordre $p$ du modèle AR sélectionné |             |             |             |      |     |     |     |     |     |
|-----------------|------------------|---------|------------------------------------|-------------|-------------|-------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
|                 |                  |         | 0                                  | 1           | 2           | 3           | 4    | 5   | 6   | 7   | 8   | >8  |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>65.7</b>                        | 15.7        | 7.1         | 3.6         | 1.7  | 1.7 | 1.7 | 0.6 | 1.0 | 1.2 |
|                 |                  | SBC     | <b>97.7</b>                        | 1.9         | 0.3         | 0.1         | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>48.1</b>                        | 32.7        | 7.4         | 4.1         | 2.5  | 1.5 | 1.2 | 0.5 | 0.5 | 1.5 |
|                 |                  | SBC     | <b>86.3</b>                        | 13.0        | 0.7         | 0.0         | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 0.0                                | 28.8        | <b>41.8</b> | 13.0        | 4.9  | 3.8 | 1.8 | 1.6 | 1.2 | 3.1 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | <b>73.1</b> | 24.4        | 2.1         | 0.3  | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0                                | 0.8         | 30.6        | <b>32.8</b> | 17.8 | 6.8 | 4.4 | 2.0 | 1.5 | 2.3 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | 11.6        | <b>67.0</b> | 18.8        | 2.6  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 0.0                                | 27.8        | <b>42.8</b> | 13.4        | 6.4  | 3.4 | 1.9 | 1.8 | 0.7 | 1.8 |
|                 |                  | SBC     | 0.4                                | <b>73.1</b> | 24.3        | 1.9         | 0.0  | 0.3 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0                                | 1.1         | 28.3        | <b>34.8</b> | 18.2 | 7.3 | 3.8 | 2.0 | 0.8 | 3.7 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | 13.4        | <b>64.3</b> | 19.4        | 2.7  | 0.2 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Tableau 4.1.6: Pourcentages de sélection de chaque modèle AR(p),  $p= 0, 1, \dots, 12$  selon les critères AIC et SBC pour des séries MA(1) fortes et faibles de longueur 500.

| Para-<br>mètre  | Innov-<br>ations | Critère | Ordre $p$ du modèle AR sélectionné |             |             |             |      |      |     |     |     |     |
|-----------------|------------------|---------|------------------------------------|-------------|-------------|-------------|------|------|-----|-----|-----|-----|
|                 |                  |         | 0                                  | 1           | 2           | 3           | 4    | 5    | 6   | 7   | 8   | >8  |
| $\theta = 0$    | Fortes           | AIC     | <b>68.6</b>                        | 14.1        | 7.2         | 3.1         | 1.8  | 1.3  | 1.0 | 0.9 | 0.7 | 1.3 |
|                 |                  | SBC     | <b>97.8</b>                        | 1.8         | 0.4         | 0.0         | 0.0  | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | <b>48.3</b>                        | 31.7        | 8.1         | 3.3         | 2.6  | 2.1  | 1.3 | 0.6 | 0.5 | 1.3 |
|                 |                  | SBC     | <b>85.8</b>                        | 14.0        | 0.3         | 0.0         | 0.0  | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = -0.5$ | Fortes           | AIC     | 0.0                                | 14.8        | <b>50.8</b> | 16.5        | 6.1  | 4.3  | 2.6 | 1.5 | 0.7 | 2.4 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | <b>59.7</b> | 38.3        | 1.9         | 0.1  | 0.0  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0                                | 0.2         | 15.1        | <b>38.2</b> | 23.6 | 9.9  | 3.8 | 3.4 | .18 | 3.2 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | 2.6         | <b>61.7</b> | 30.5        | 4.5  | 0.6  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| $\theta = 0.5$  | Fortes           | AIC     | 0.0                                | 14.8        | <b>48.7</b> | 17.2        | 6.7  | 5.1  | 2.2 | 1.8 | 0.7 | 2.1 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | <b>61.2</b> | 36.7        | 1.9         | 0.1  | 0.1  | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
|                 | Faibles          | AIC     | 0.0                                | 0.0         | 14.0        | <b>38.8</b> | 22.9 | 10.4 | 5.0 | 3.1 | 1.9 | 3.2 |
|                 |                  | SBC     | 0.0                                | 2.0         | <b>60.5</b> | 32.3        | 4.9  | 0.3  | 0.1 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

## 4.2. ESTIMATION

À l'aide de simulations, nous allons évaluer la performance de la méthode d'estimation d'un ARMA faible proposée par Francq et Zakoïan (1998a, 2000) et qui est décrite au chapitre 3. Nous avons fait quatre simulations. La première consiste à vérifier si cette méthode fonctionne bien dans le cas d'un ARMA fort. Dans les autres simulations, nous avons appliqué cette méthode à des modèles ARMA faibles. Les modèles considérés sont les suivants :

1. ARMA(2,1) fort :

$$X_t = 0.4X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}, \quad (4.2.1)$$

où  $\{\varepsilon_t\}$  est i.i.d.  $N(0, 1)$ .

2. ARMA(2,1) faible :

$$X_t = 0.4X_{t-1} + 0.2X_{t-2} + \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}, \quad (4.2.2)$$

où  $\{\varepsilon_t\} = Z_t Z_{t-1}$  avec  $\{Z_t\}$  est i.i.d.  $N(0, 1)$ .

3. Bruit blanc faible :

$$X_t = Z_t Z_{t-1}, \quad (4.2.3)$$

où  $\{Z_t\}$  est i.i.d.  $N(0, 1)$ .

4. Modèle à changement de régimes :

$$X_t = \eta_t + (0.7 - 1.4\Delta_t)\eta_{t-1}, \quad (4.2.4)$$

où  $\{\eta_t\}$  est une suite i.i.d.  $N(0, 1)$  et  $\{\Delta_t\}$  est une chaîne de Markov stationnaire à valeurs dans l'espace  $\{0, 1\}$ , indépendante de  $\{\eta_t\}$ . Ses probabilités de transition sont

$$P(\Delta_t = 1 | \Delta_{t-1} = 0) = P(\Delta_t = 0 | \Delta_{t-1} = 1) = 0.05.$$

### 4.2.1. Plan des simulations

Dans chacune des simulations, nous comparons cette méthode à la méthode d'estimation par moindres carrés non conditionnels faisant appel à l'algorithme de prévisions à rebours (backforecasting) décrit dans Box et Jenkins (1970). Les comparaisons sont faites pour les estimateurs des paramètres ainsi que pour leurs écarts types.

Pour chaque modèle et pour chacune des trois longueurs de séries : 100, 300 et 500, nous avons généré 1000 réalisations indépendantes. Dans la suite, nous référons à la méthode d'estimation par moindres carrés non conditionnels telle qu'implantée dans la librairie NAG par moindres carrés (NAG) et à la méthode développée par Francq et Zakoïan (1998a, 2000) par moindres carrés conditionnels (FZ).

#### - Modèles ARMA(2,1) fort et faible.

Pour générer une série de taille  $n$  du modèle ARMA faible, tout d'abord nous avons généré  $n + 503$   $Z_t$  i.i.d. de loi  $N(0, 1)$  avec le sous-programme G05DDF de la librairie NAG. En suite, de la formule  $\varepsilon_t = Z_t Z_{t-1}$  nous avons obtenu  $n + 502$  bruits blancs faibles. Enfin, nous avons utilisé la relation (4.2.1) pour générer  $n + 500$  observations de notre modèle et nous n'avons inclu que les  $n$  dernières observations dans la série afin d'atténuer l'effet des valeurs initiales.

Pour le modèle ARMA(2,1) fort, nous avons agi de la même façon, sauf que nous avons généré  $n + 502$  bruits blancs  $Z_t$  et nous avons pris  $\varepsilon_t = Z_t$ . Pour une

longueur de série donnée, les opérations suivantes ont été exécutées pour chaque réalisation de ce modèle.

1. Nous avons généré  $n$  observations du modèle considéré.
2. Nous avons estimé les paramètres du modèle ainsi que leurs écarts types par moindres carrés (NAG) à l'aide du sous-programme G13AFF de la librairie NAG.
3. Nous avons calculé les estimateurs des paramètres et de leurs écarts types par la méthode des moindres carrés (FZ). Nous avons utilisé la fenêtre rectangulaire  $w(x) = 1_{[-1,1]}(x)$  et le paramètre de troncature  $T_n = 1/b_n = [\ln(n)] + 1$ .
4. À partir des 1000 réalisations, nous calculons l'écart type des 1000 estimateurs de chaque paramètre que l'on dénote  $\sigma$  (approximation du vrai écart type) et nous calculons aussi  $\bar{\sigma}$  la moyenne des estimés de l'écart type de chacun des paramètres.

#### - Bruit blanc faible et modèle à changement de régimes.

Pour simuler une réalisation de longueur  $n$  du modèle (4.2.3), nous avons généré  $n + 1$  bruits blancs forts  $N(0, 1)$  à l'aide du sous-programme G05DDF de NAG, puis de la formule du modèle, nous avons obtenu les  $n$  observations de la série.

Pour produire  $n$  observations du modèle à changement de régimes, nous avons utilisé les sous-programmes G05EXF et G05EYF pour simuler la chaîne de Markov cachée  $\Delta_t$  à deux états. Nous générons un MA(1) de paramètre  $\theta = -0.7$  ou  $\theta = 0.7$  selon que la valeur de la chaîne de Markov cachée est égale à 0 ou 1

respectivement.

Pour l'estimation de ces deux modèles, nous avons procédé de la même façon qu'avec les modèles ARMA(2,1), sauf que dans ce cas, nous estimons un MA(1) dont la vraie valeur est nulle. Au niveau de l'estimation par moindres carrés de Francq et Zakoïan, nous avons utilisé à nouveau la fenêtre rectangulaire et les points de troncature  $T_n = \lfloor \ln(n) \rfloor + 1$  (FZ1) et 26 (FZ2). Ces deux valeurs de  $T_n$  ont été utilisées dans Francq et Zakoïan (2000).

#### 4.2.2. Résultats des simulations

Débutons notre analyse avec l'application des méthodes d'estimation moindres carrés (NAG) et moindres carrés (FZ) au modèle (4.2.1).

Pour commencer, regardons ce qui se passe au niveau de l'estimation des paramètres du modèle. Dans les figures 4.2.1 à 4.2.3, nous retrouvons les diagrammes en boîtes des estimateurs du biais des paramètres  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\theta_1$  notés respectivement A1, A2 et B1 pour des séries de longueurs 100, 300 et 500. En les examinant, nous constatons que les deux méthodes donnent des résultats très similaires. Ce qui n'est pas surprenant avec les longueurs de séries considérées. Nous remarquons aussi que la variabilité du biais diminue lorsque le nombre d'observations augmente. Lorsque la taille des séries est égale à 100, ces estimateurs varient entre -1 et 1.5 avec la méthode standard (NAG) et entre -0.5 et 0.9 avec la méthode de Francq et Zakoïan. Pour les deux méthodes, le biais varie entre -0.4 et 0.4 lorsque  $n = 300$  et entre 0.3 et -0.3 quand  $n = 500$ .

Au niveau de l'estimation des écarts types des paramètres, nous présentons dans le tableau 4.2.2 les vrais écarts types  $\sigma_{\hat{\phi}_1}, \sigma_{\hat{\phi}_2}$  et  $\sigma_{\hat{\theta}_1}$  approximés à partir de

la simulation ainsi que les moyennes des estimés des écarts types des paramètres du modèle. Nous présentons également les diagrammes en boîtes de ces derniers aux figures 4.2.4 à 4.2.6. Dans ces figures, les écarts types de  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\theta_1$  sont notés respectivement SA1, SA2 et SB1.

Analysons ces résultats en tenant compte de la taille des séries. Lorsque celle-ci est égale à 100, nous constatons que les estimateurs obtenus par les deux méthodes sont très proches. Mais en les comparant avec les vrais valeurs des écarts types, nous observons qu'ils s'éloignent de ces derniers. Avec des séries de longueur 300, les estimateurs des écarts types des paramètres sont presque semblables pour les deux méthodes et ils sont aussi très proches des vrais écarts types. Nous signalons aussi que l'intervalle de variation de ces estimateurs diminue lorsque  $n$  augmente : (0, 0.8) avec  $n = 100$ , (0, 20) avec  $n = 300$ . Lorsque  $n = 500$ , nous tirons les mêmes remarque qu'avec  $n = 300$ , mais encore une fois la variabilité diminue et les estimateurs des écarts types varient entre 0 et 0.14. Notons également que la variabilité des estimateurs obtenus par moindres carrés (FZ) est légèrement supérieure à celle réalisée par la méthode standard pour les trois longueurs des séries. Tout au moins avec le modèle ARMA(2,1) fort considéré, l'utilisation des moindres carrés (FZ) plutôt que les moindres carrés (NAG) ne présente pas une grande perte d'efficacité.

Analysons maintenant l'application des deux méthodes d'estimation par moindres carrés (NAG) et (FZ) au modèle ARMA(2,1) faible. Examinons les figures 4.2.7 à 4.2.12 qui contiennent les diagrammes en boîtes des estimateurs du biais des paramètres  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  et  $\theta_1$  ainsi que ceux de leurs écarts types obtenus par les deux méthodes pour des séries de tailles 100, 300 et 500 et le tableau 4.2.2 qui est similaire au tableau 4.2.1. Nous remarquons que ces résultats sont très semblables

à ceux du modèle ARMA(2,1) fort tant au niveau de l'estimation des paramètres du modèle qu'au niveau de l'estimation de leurs écarts types. D'après le tableau 4.2.2, à  $n = 100$ , les écarts types estimés par moindres carrés (FZ) sont un peu plus petits que ceux de (NAG) et donc, nous avons avantage à utiliser la méthode d'estimation par moindres carrés (FZ) quand nous ne savons pas si nous sommes en présence d'un ARMA faible ou d'un ARMA fort.

L'application des deux méthodes d'estimation étudiées au bruit blanc faible (4.2.3) a donné les résultats suivants. À noter que dans ce cas nous estimons le paramètre  $\theta$  d'un MA(1) dont la vraie valeur est égale à zéro. Aux figures 4.2.13 à 4.2.15, nous présentons les diagrammes en boîtes de  $\hat{\theta}$  et de  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$  estimés par les deux méthodes pour des séries de longueurs 100, 300 et 500. Nous exposons dans le tableau 4.2.3 le vrai écart type de  $\theta$ , noté  $\sigma_{\theta}$  ainsi que son écart type estimé moyen pour chacune des deux méthodes.

En ce qui concerne l'estimation du paramètre  $\theta$ , les deux méthodes aboutissent à des estimateurs très proches pour les différentes tailles des séries et leurs variabilités diminuent en augmentant le nombre d'observations, ce qui n'est pas surprenant.

Voyons maintenant ce qui se passe au niveau de l'estimation de  $\sigma_{\hat{\theta}}$ . À partir des graphiques, nous constatons une variabilité presque nulle des  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$  obtenus par la méthode standard ce qui est un peu étonnant. Pour la méthode de Francq et Zakoïan, nous observons que la variabilité des  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$  calculés avec  $T_n = [\ln(n)] + 1$  (FZ1) est inférieure à celle réalisée quand  $T_n = 26$  (FZ2). Du tableau 4.2.3, nous remarquons que le vrai écart type calculé par les deux méthodes est presque identique quelle que soit la taille des séries. Ce qui n'est pas étonnant puisque

les deux méthodes ont donné des estimateurs similaires de  $\theta$ . Nous observons aussi que l'écart type estimé moyen  $\bar{\hat{\sigma}}_{\hat{\theta}}$  obtenu par moindres carrés (NAG) sont très proches du vrai écart type. Lorsque la méthode de Francq et Zakoïan est appliquée, nous réalisons le même constat lorsque  $T_n = \lfloor \ln(n) \rfloor + 1$ . Mais quand  $T_n = 26$ , nous constatons que  $\bar{\hat{\sigma}}_{\hat{\theta}}$  est un peu plus éloigné de  $\sigma_{\hat{\theta}}$ .

Nous concluons cette section par l'analyse des résultats obtenus suite à l'application des deux méthodes au modèle à changement de régimes (4.2.4) qui est non linéaire. Comme dans l'exemple précédent, nous estimons un MA(1) dont le paramètre est nul. Les figures 4.2.16 à 4.2.18 et le tableau 4.2.4 présentent les mêmes informations que les figures 4.2.13 à 4.2.15 et le tableau 4.2.3 respectivement.

Pour l'estimation du paramètre du modèle, nous faisons les mêmes constatations que pour le modèle précédent, c'est-à-dire que les deux méthodes donnent des résultats semblables.

Pour ce qui est de l'estimation de l'écart type de  $\hat{\theta}$ , les diagrammes en boîtes de  $\hat{\sigma}_{\hat{\theta}}$  pour les différentes longueurs des séries montrent que ceux obtenus par moindres carrés (NAG) sont éloignés de ceux obtenus par moindres carrés (FZ). En ce qui concerne la variabilité de cet estimateur, nous remarquons qu'elle est proche de zéro quand la première méthode est appliquée. Lorsque la deuxième méthode d'estimation est utilisée, nous retenons la même remarque qu'avec le bruit blanc faible, c'est-à-dire que la variabilité augmente en fonction de la valeur de  $T_n$ .

En examinant le tableau 4.2.4, nous observons que le vrai écart type de  $\hat{\theta}$  est presque identique dans les deux méthodes. En le comparant avec l'écart type

moyen observé, nous constatons que ce dernier est très éloigné de  $\sigma_{\hat{\theta}}$  quand la méthode standard est appliquée. En effet, cette méthode le sous-estime d'une façon drastique même lorsque  $n = 500$ . En appliquant l'autre méthode qui prend en compte la dépendance des erreurs, lorsque  $n = 100$ , les écarts types moyens de  $\hat{\theta}$  calculés avec les deux points de troncature sont très proches. Ils sont par contre assez éloignés du vrai écart type, mais pas autant qu'avec la méthode standard. Lorsque  $n = 300$  ou  $500$ , les  $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$  obtenus avec les deux points de troncature sont proches des vrais écarts types. Notons que ceux obtenus avec  $T_n = 26$  sont les plus proches.

Tableau 4.2.1: Comparaison des vrais écarts types des paramètres du modèle ARMA(2,1) fort et des écarts types moyens obtenus avec les deux méthodes d'estimation.

| taille de<br>la série | Moindres carrés (NAG)   |                         |                           |                               |                               |                                 |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
|                       | $\sigma_{\hat{\phi}_1}$ | $\sigma_{\hat{\phi}_2}$ | $\sigma_{\hat{\theta}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_2}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}_1}$ |
| $n = 100$             | 0.233                   | 0.219                   | 0.216                     | 0.190                         | 0.174                         | 0.151                           |
| $n = 300$             | 0.114                   | 0.107                   | 0.094                     | 0.109                         | 0.100                         | 0.085                           |
| $n = 500$             | 0.088                   | 0.079                   | 0.070                     | 0.085                         | 0.078                         | 0.066                           |
| taille de<br>la série | Moindres carrés (FZ)    |                         |                           |                               |                               |                                 |
|                       | $\sigma_{\hat{\phi}_1}$ | $\sigma_{\hat{\phi}_2}$ | $\sigma_{\hat{\theta}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_2}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}_1}$ |
| $n = 100$             | 0.217                   | 0.195                   | 0.191                     | 0.177                         | 0.158                         | 0.141                           |
| $n = 300$             | 0.115                   | 0.105                   | 0.093                     | 0.106                         | 0.097                         | 0.083                           |
| $n = 500$             | 0.088                   | 0.079                   | 0.070                     | 0.083                         | 0.076                         | 0.065                           |

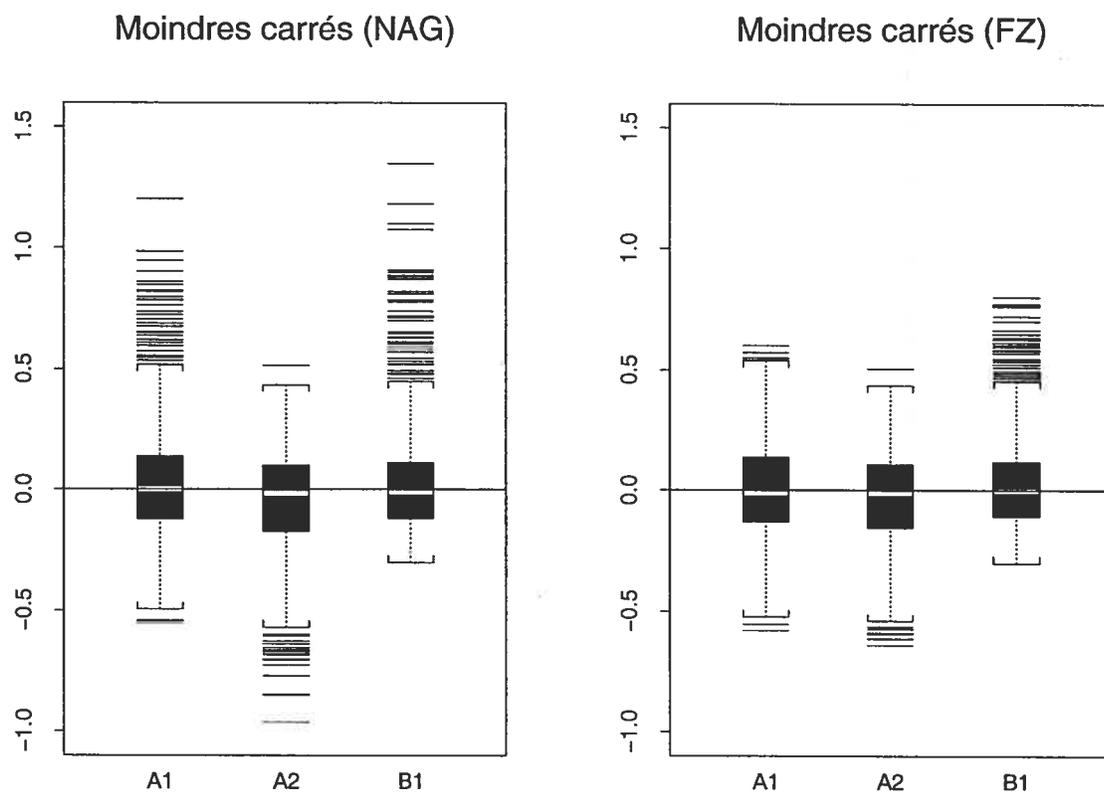


FIGURE 4.2.1. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100.

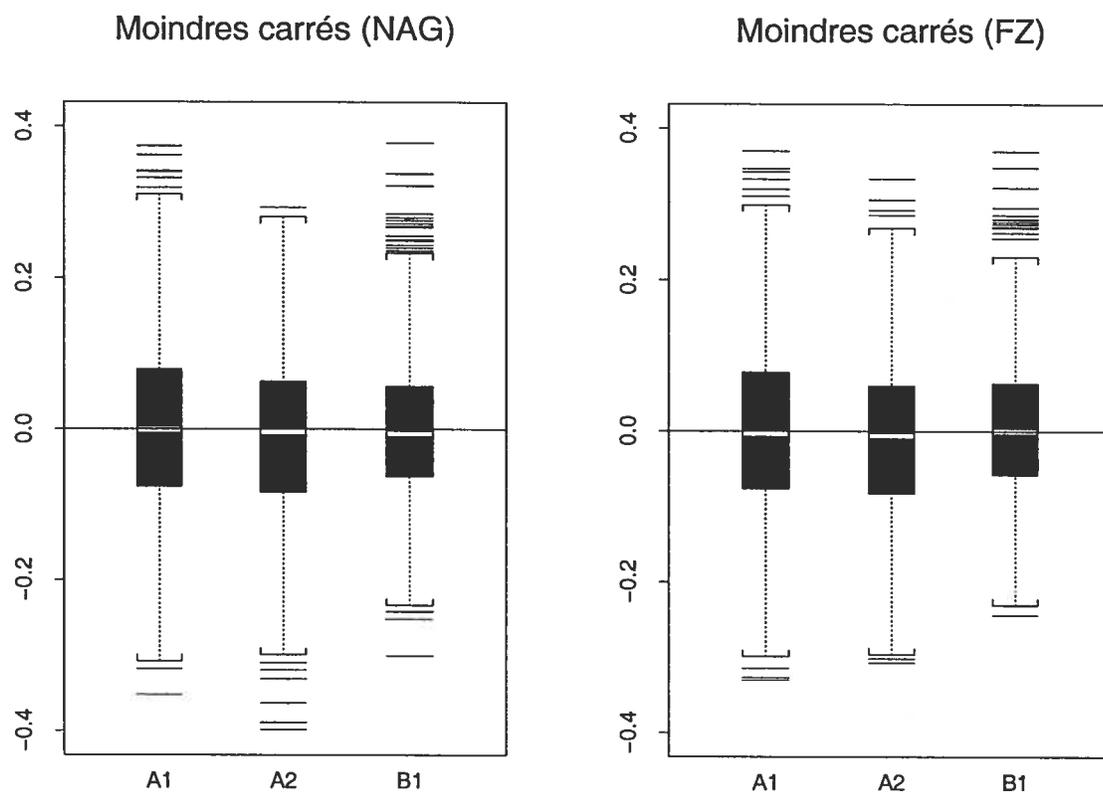


FIGURE 4.2.2. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300.

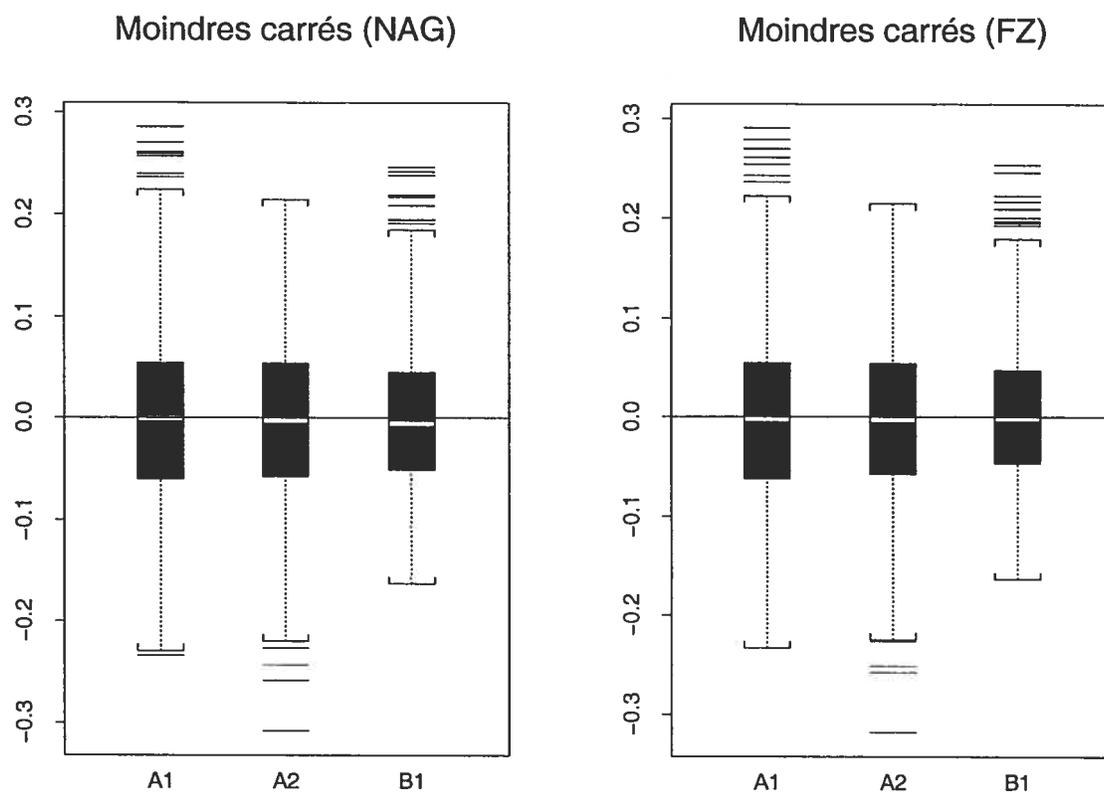


FIGURE 4.2.3. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500.

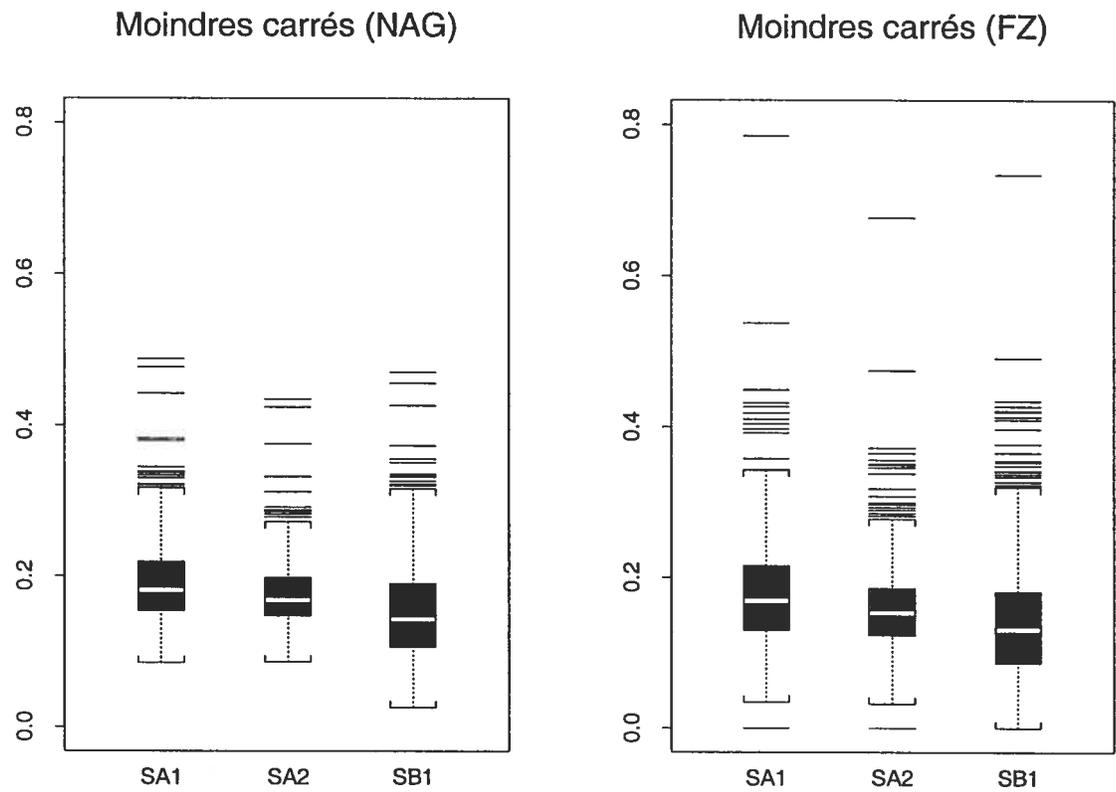


FIGURE 4.2.4. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle  $ARMA(2,1)$  fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100.

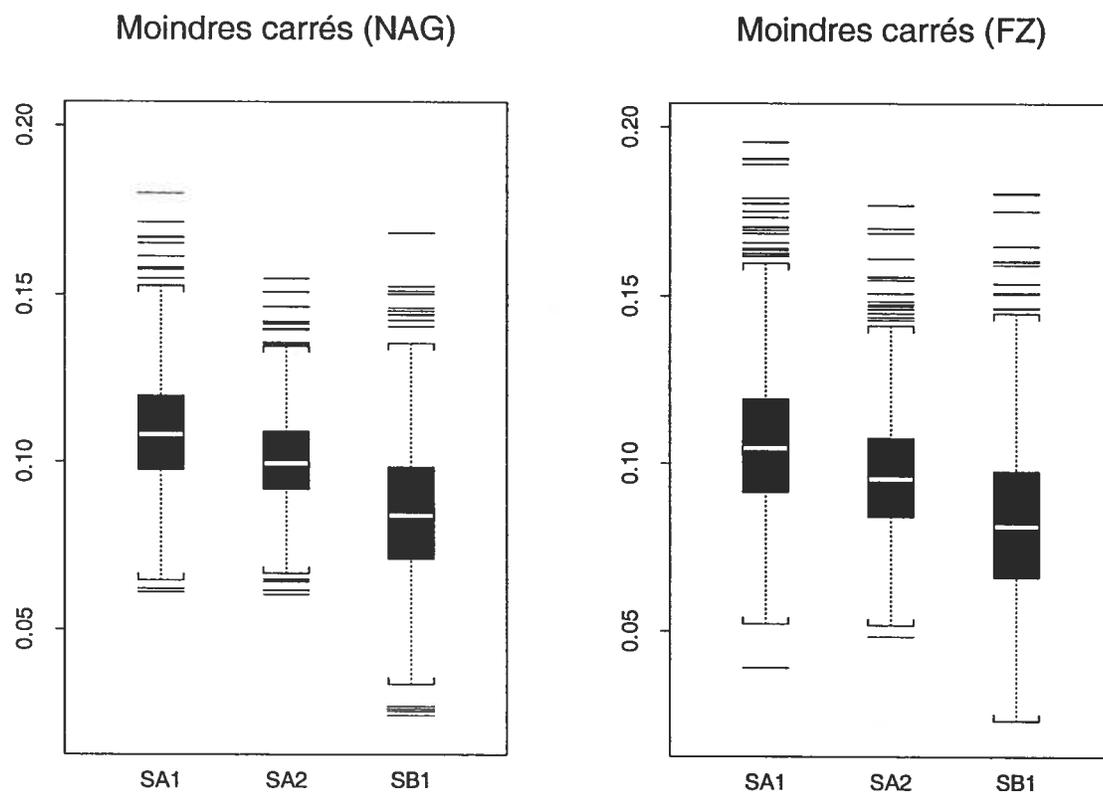


FIGURE 4.2.5. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle  $ARMA(2,1)$  fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300.

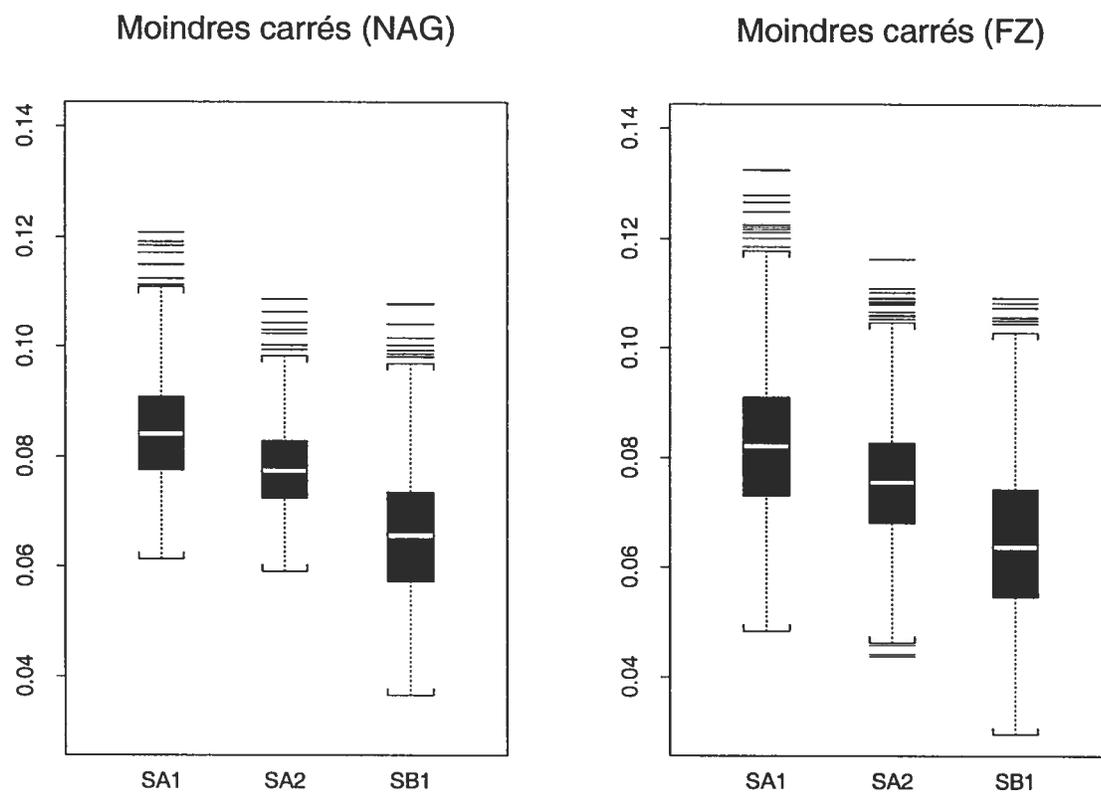


FIGURE 4.2.6. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle  $ARMA(2,1)$  fort obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500.

Tableau 4.2.2: Comparaison des vrais écarts types des paramètres du modèle ARMA(2,1) faible et des écarts types moyens obtenus avec les deux méthodes d'estimation.

| taille de<br>la série | Moindres carrés (NAG)   |                         |                           |                               |                               |                                 |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
|                       | $\sigma_{\hat{\phi}_1}$ | $\sigma_{\hat{\phi}_2}$ | $\sigma_{\hat{\theta}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_2}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}_1}$ |
| $n=100$               | 0.226                   | 0.212                   | 0.208                     | 0.188                         | 0.174                         | 0.148                           |
| $n=300$               | 0.115                   | 0.108                   | 0.094                     | 0.109                         | 0.100                         | 0.085                           |
| $n=500$               | 0.088                   | 0.081                   | 0.067                     | 0.085                         | 0.078                         | 0.066                           |
| taille de<br>la série | Moindres carrés (FZ)    |                         |                           |                               |                               |                                 |
|                       | $\sigma_{\hat{\phi}_1}$ | $\sigma_{\hat{\phi}_2}$ | $\sigma_{\hat{\theta}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_1}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\phi}_2}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}_1}$ |
| $n=100$               | 0.212                   | 0.191                   | 0.187                     | 0.177                         | 0.158                         | 0.139                           |
| $n=300$               | 0.116                   | 0.108                   | 0.095                     | 0.107                         | 0.097                         | 0.083                           |
| $n=500$               | 0.088                   | 0.081                   | 0.070                     | 0.084                         | 0.077                         | 0.065                           |

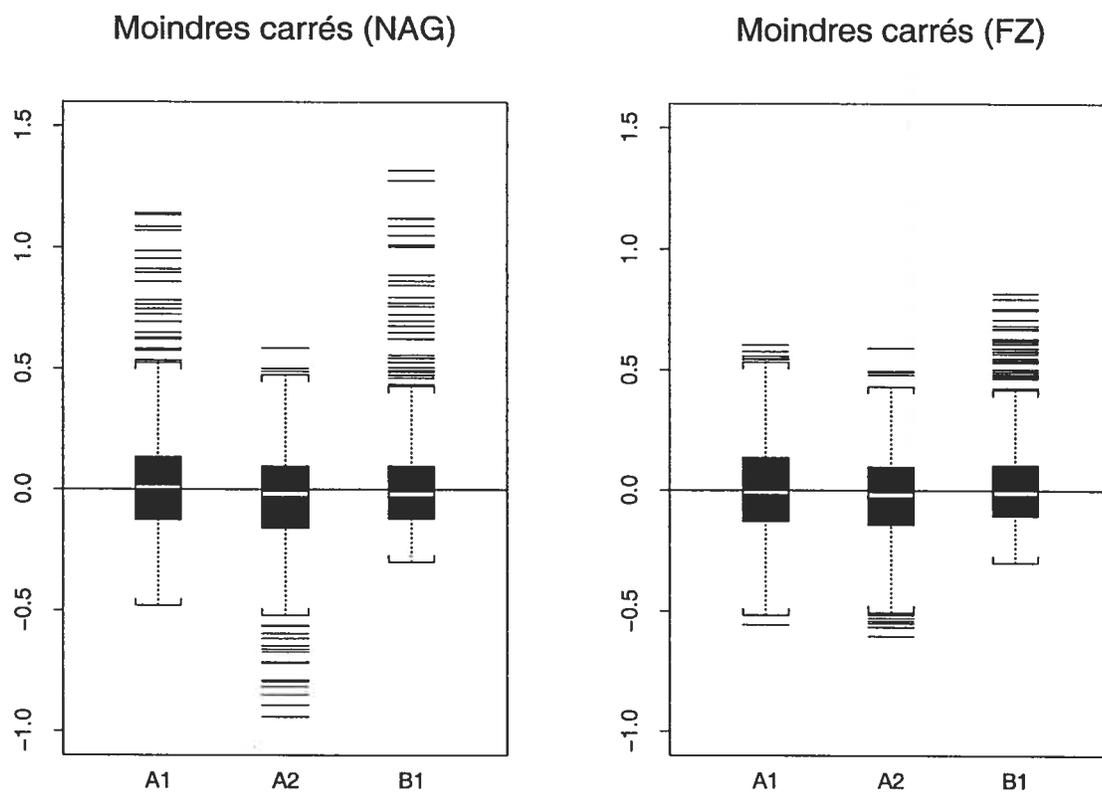


FIGURE 4.2.7. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100.

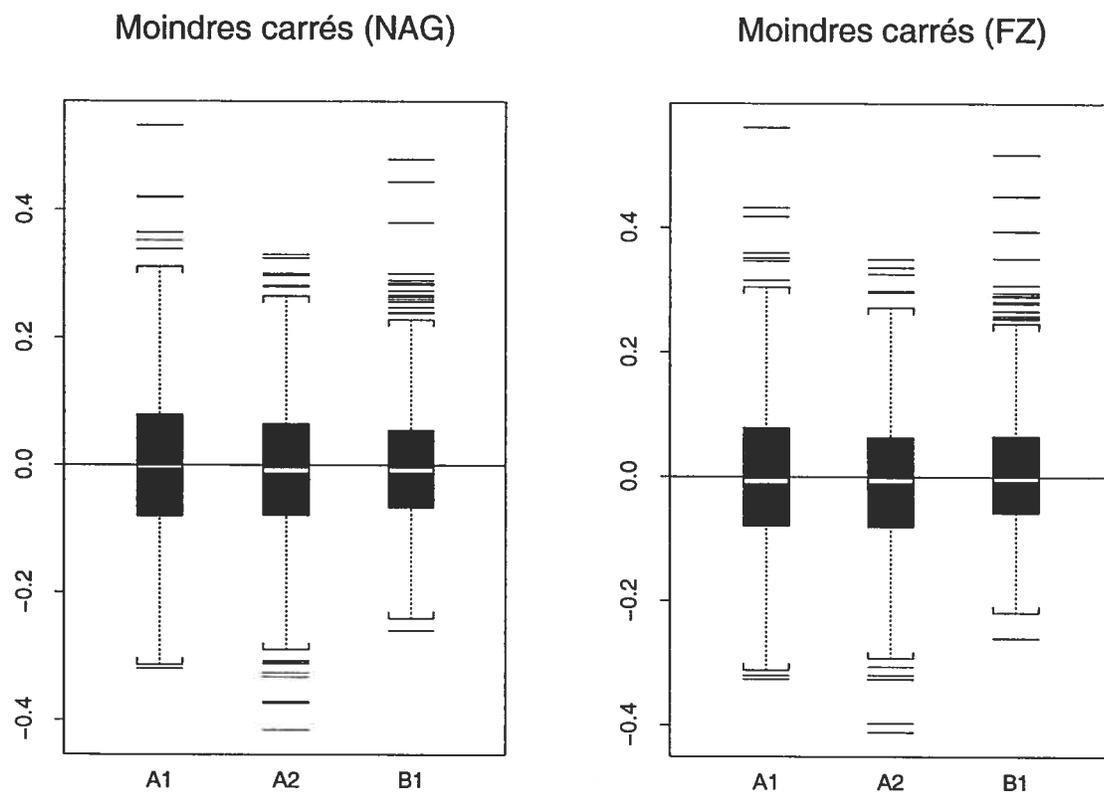


FIGURE 4.2.8. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300.

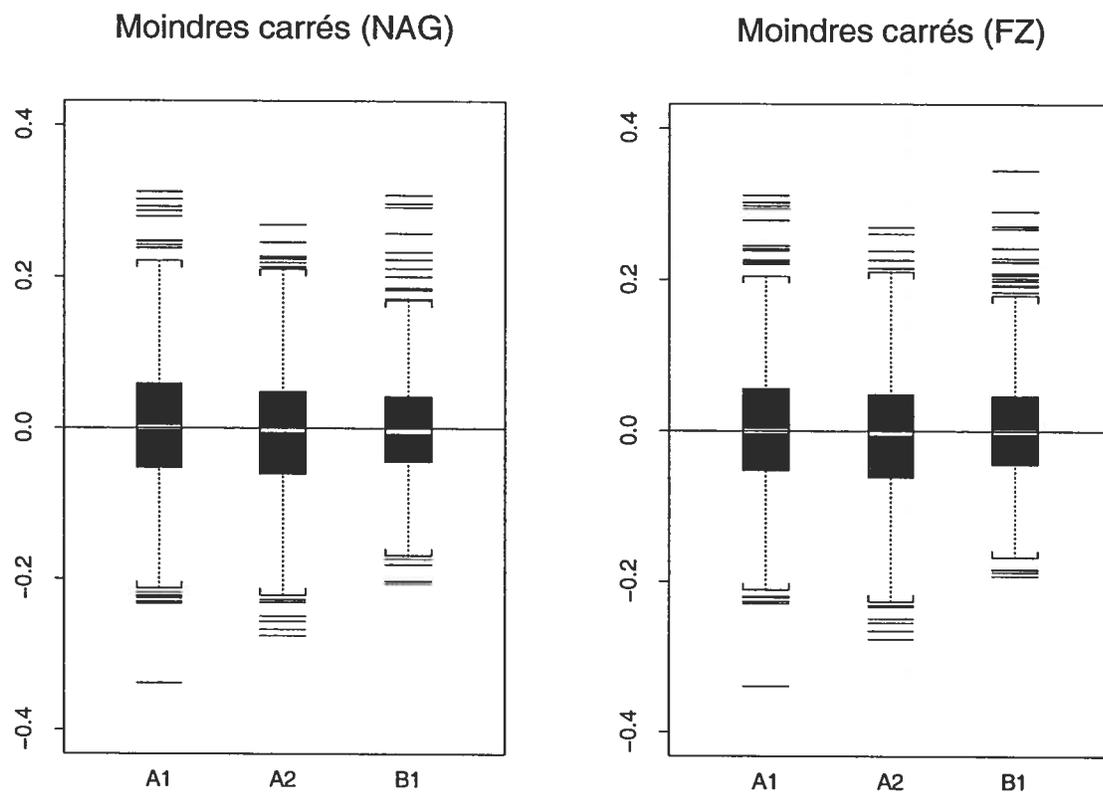


FIGURE 4.2.9. Biais des estimateurs des paramètres A1, A2 et B1 du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500.

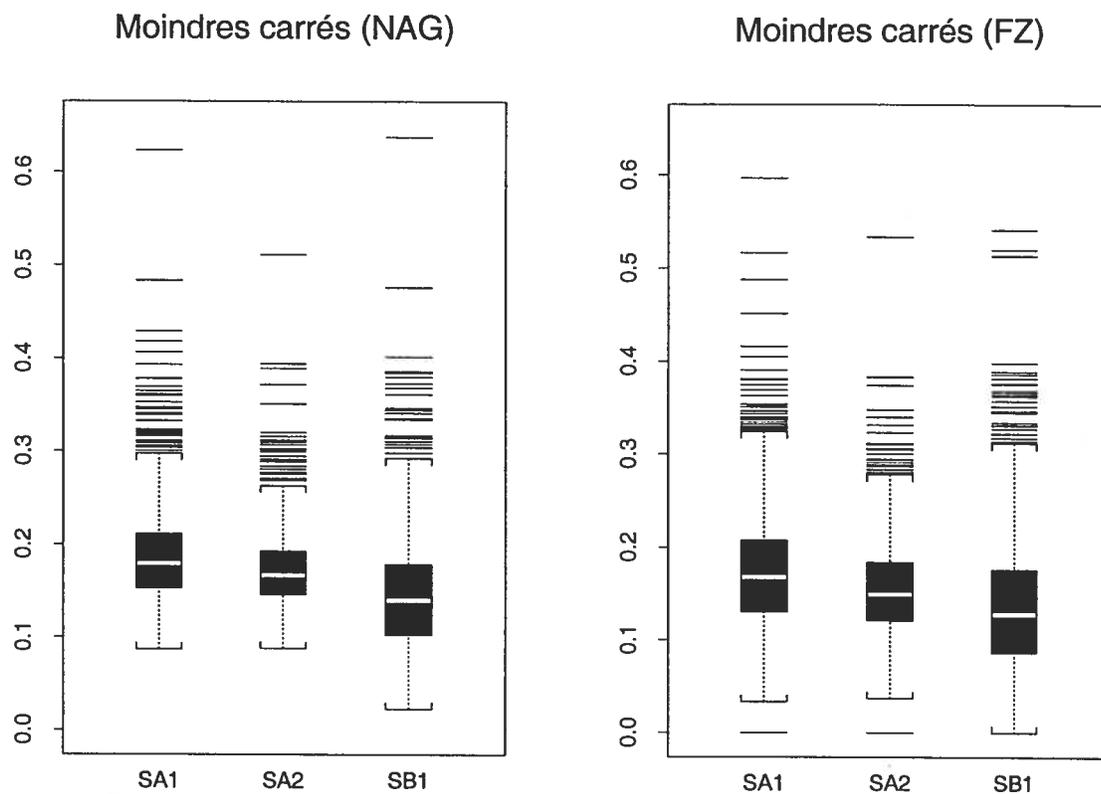


FIGURE 4.2.10. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 100.

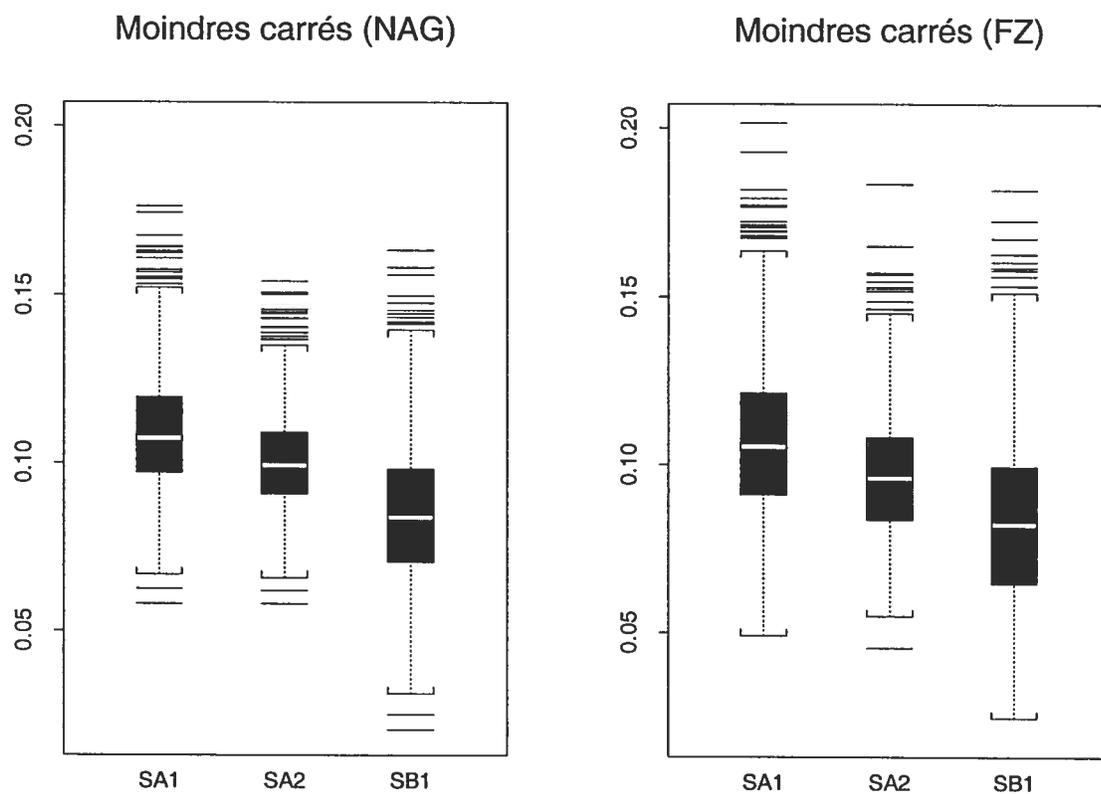


FIGURE 4.2.11. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle  $ARMA(2,1)$  faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 300.

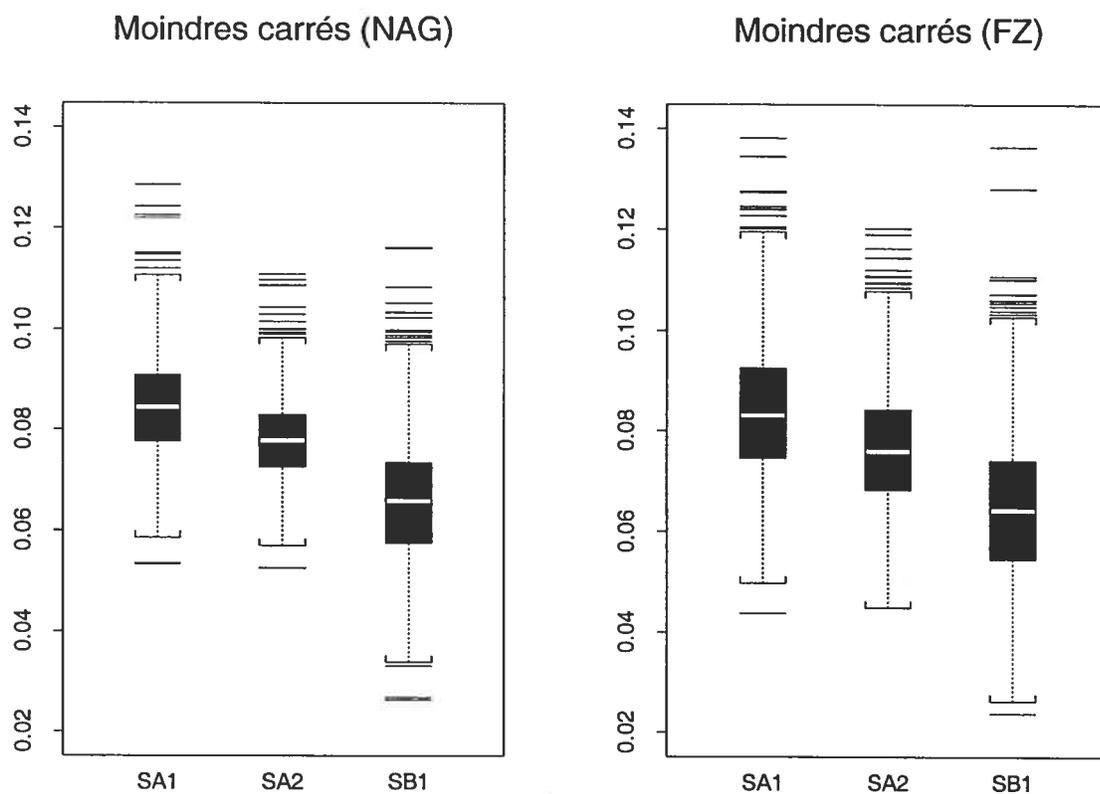


FIGURE 4.2.12. Écart types des estimateurs des paramètres  $A_1$ ,  $A_2$  et  $B_1$  du modèle ARMA(2,1) faible obtenus avec la méthode des moindres carrés (NAG) et avec la méthode des moindres carrés (FZ) pour des séries de taille 500.

Tableau 4.2.3: Comparaison du vrai écart type du paramètre  $\theta$  d'un modèle MA(1) et de l'écart type moyen obtenu par les deux méthodes d'estimation (NAG) et (FZ) lorsque la série est un bruit blanc faible défini par (4.2.3).

| taille de<br>la série | Moindres carrés (NAG)   |                               | Moindres carrés (FZ)    |                                     |                                     |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|                       | $\sigma_{\hat{\theta}}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ | $\sigma_{\hat{\theta}}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (FZ1) | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (FZ2) |
| $n=100$               | 0.110                   | 0.100                         | 0.108                   | 0.097                               | 0.079                               |
| $n=300$               | 0.060                   | 0.058                         | 0.060                   | 0.058                               | 0.053                               |
| $n=500$               | 0.050                   | 0.045                         | 0.048                   | 0.045                               | 0.042                               |

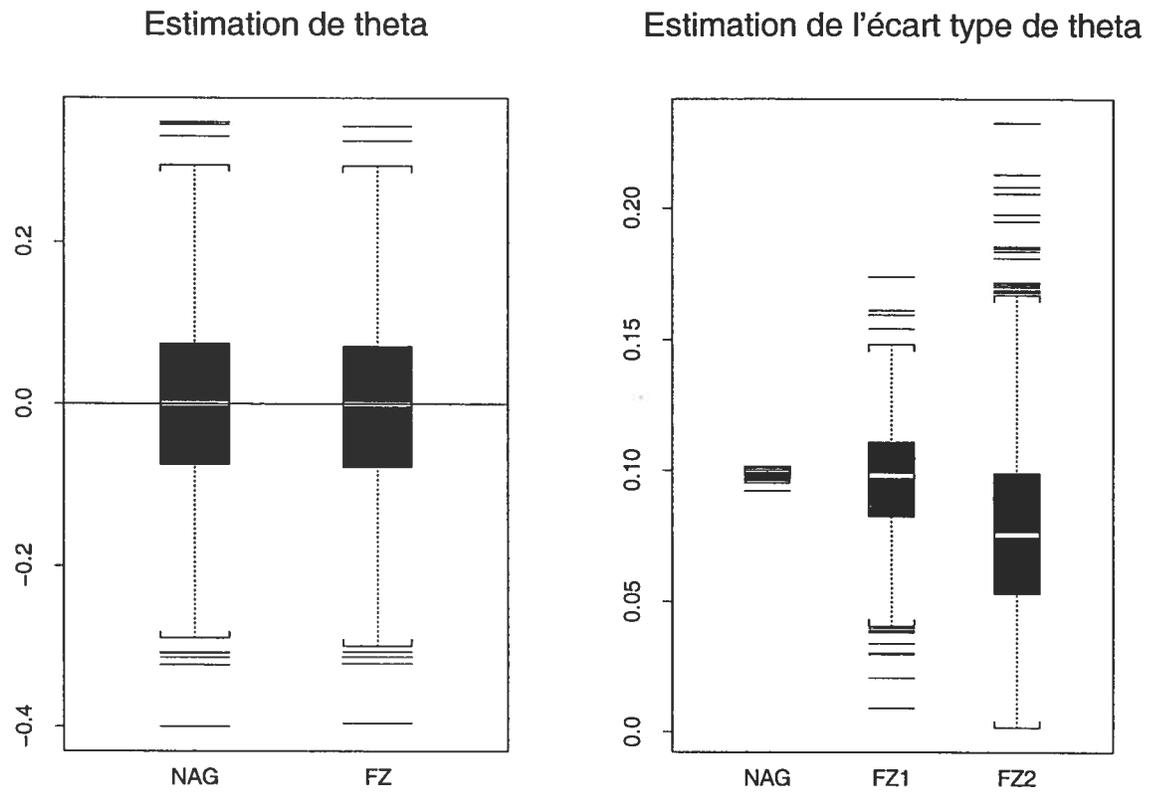


FIGURE 4.2.13. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 100 défini par (4.2.3).

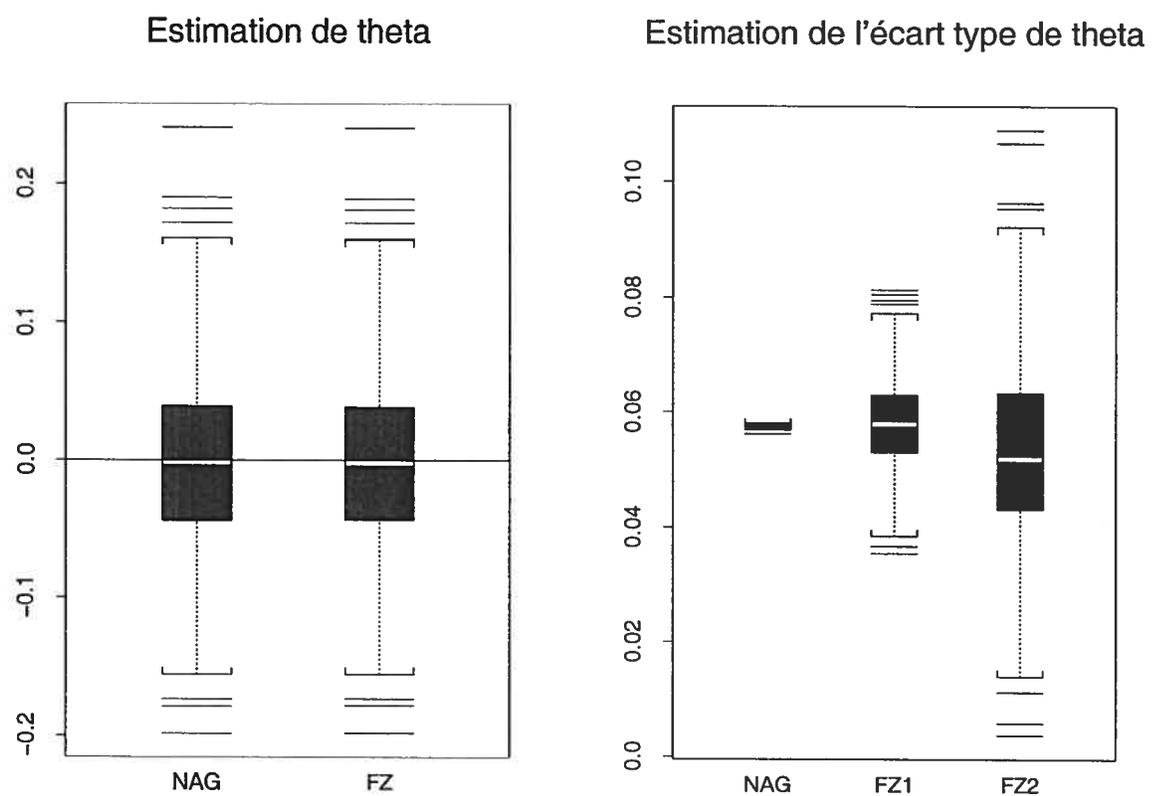


FIGURE 4.2.14. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 300 défini par (4.2.3).

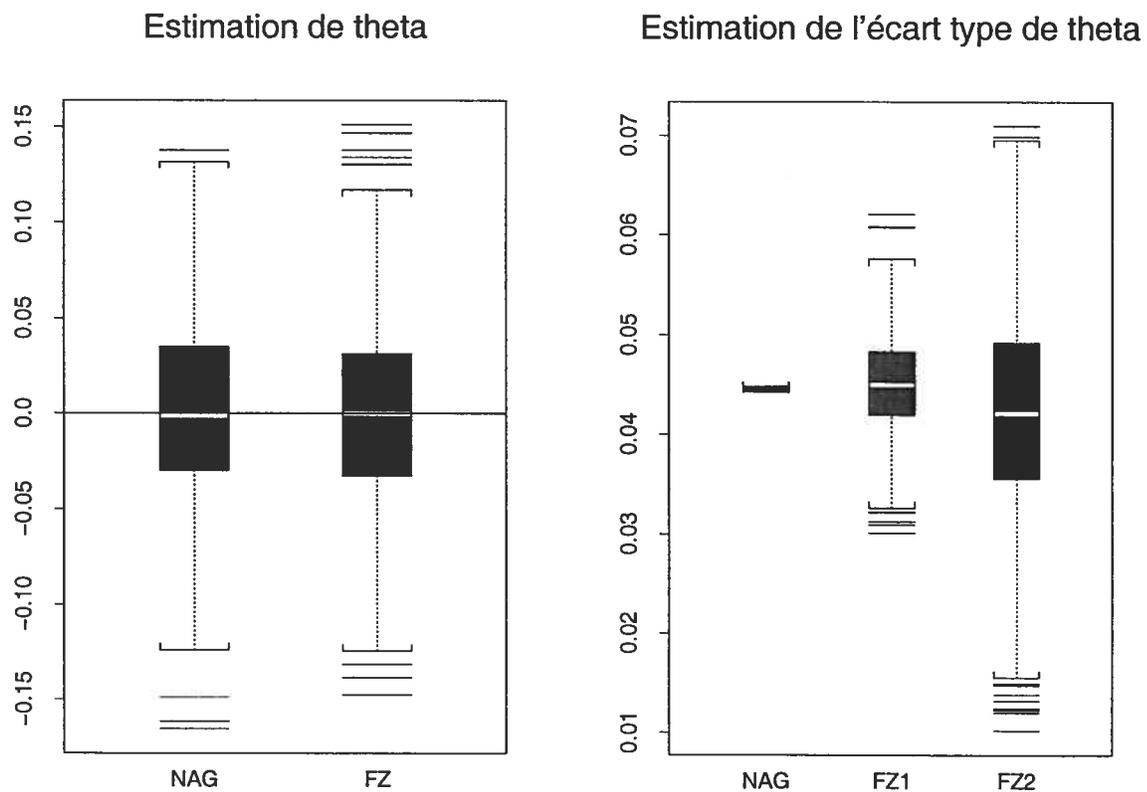


FIGURE 4.2.15. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour un bruit blanc faible de taille 500 défini par (4.2.3).

Tableau 4.2.4: Comparaison du vrai écart type du paramètre  $\theta$  d'un modèle MA(1) et de l'écart type moyen obtenus par les deux méthodes d'estimation (NAG) et (FZ) pour un modèle à changement de régimes (4.2.4).

| taille de<br>la série | Moindres carrés (NAG)   |                               | Moindres carrés (FZ)    |                                     |                                     |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
|                       | $\sigma_{\hat{\theta}}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ | $\sigma_{\hat{\theta}}$ | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (FZ1) | $\bar{\sigma}_{\hat{\theta}}$ (FZ2) |
| $n=100$               | 0.280                   | 0.097                         | 0.273                   | 0.151                               | 0.152                               |
| $n=300$               | 0.151                   | 0.057                         | 0.150                   | 0.099                               | 0.121                               |
| $n=500$               | 0.115                   | 0.044                         | 0.114                   | 0.081                               | 0.097                               |

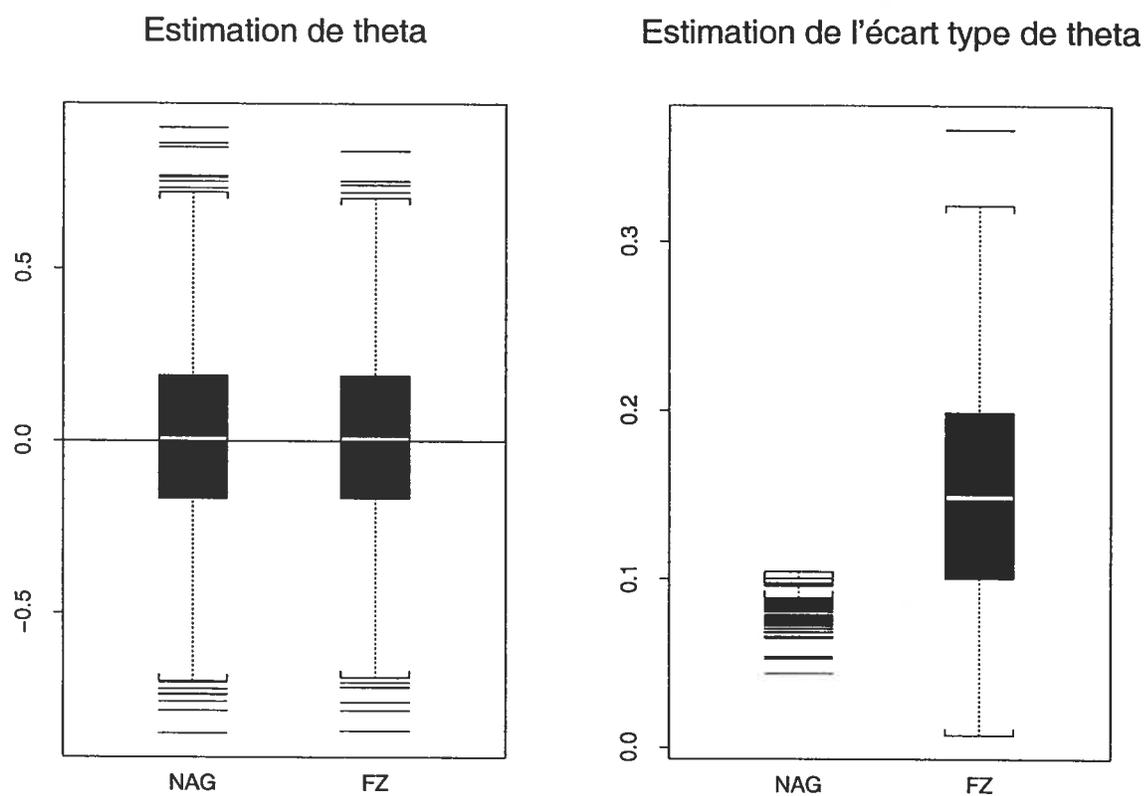


FIGURE 4.2.16. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque  $n = 100$ .

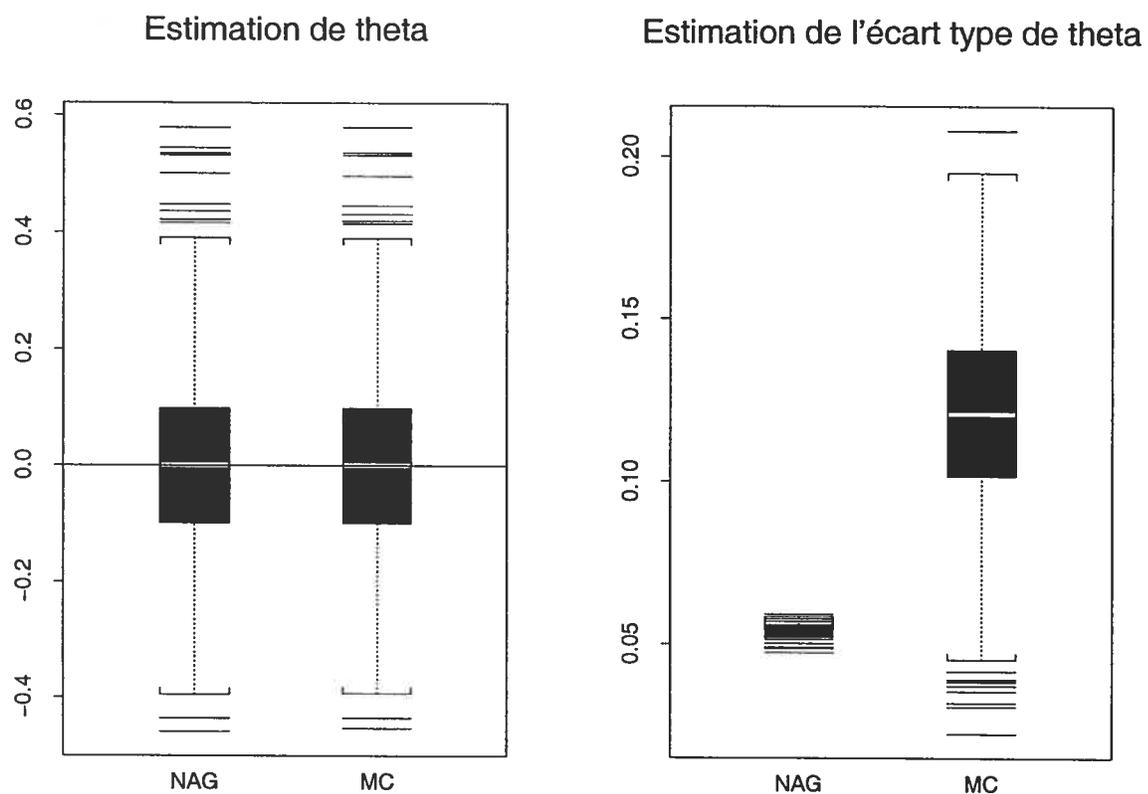


FIGURE 4.2.17. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque  $n = 300$ .

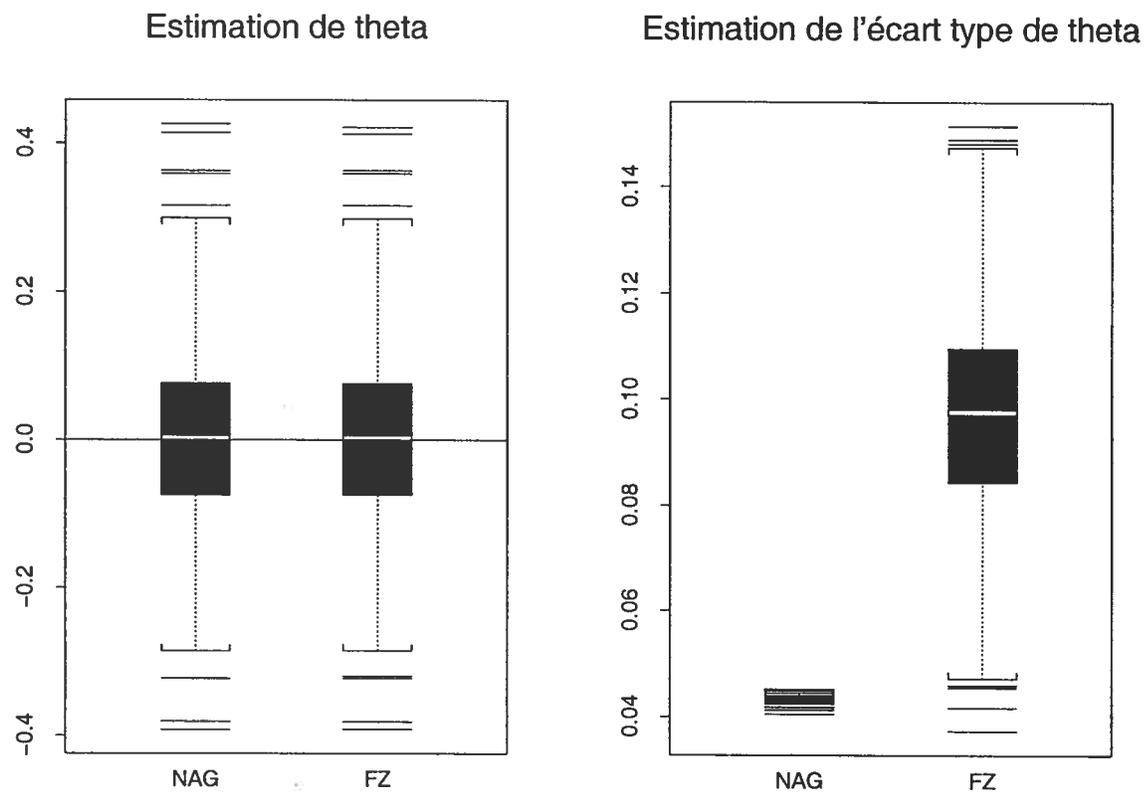


FIGURE 4.2.18. Biais et écart type de l'estimateur de  $\theta$  d'un modèle MA(1) selon la méthode standard (NAG) et la méthode de Francq et Zakoïan (FZ) pour le modèle à changement de régimes (4.2.4) lorsque  $n = 500$ .

# Chapitre 5

---

## EXEMPLE

Dans ce chapitre, nous appliquons les méthodes d'identification et d'estimation des modèles ARMA faibles à des données réelles. Nous considérons une série financière. Nous commençons par la description de cette série, ensuite, nous exposons les résultats de notre analyse.

### 5.1. DESCRIPTION DE LA SÉRIE

Le jeu de données que nous considérons se trouve dans Tsay (2001). Il représente les rendements excédentaires mensuels de l'indice S&P 500 (Standard & Poor's 500) à partir de 1926. Il contient 792 observations. Les graphiques de la série (SP500), de ses autocorrélations ainsi que les autocorrélations et les autocorrélations partielles de son carré (SP500\*SP500) sont fournis à la figure 5.1.1. D'après ces graphiques, la série semble stationnaire.

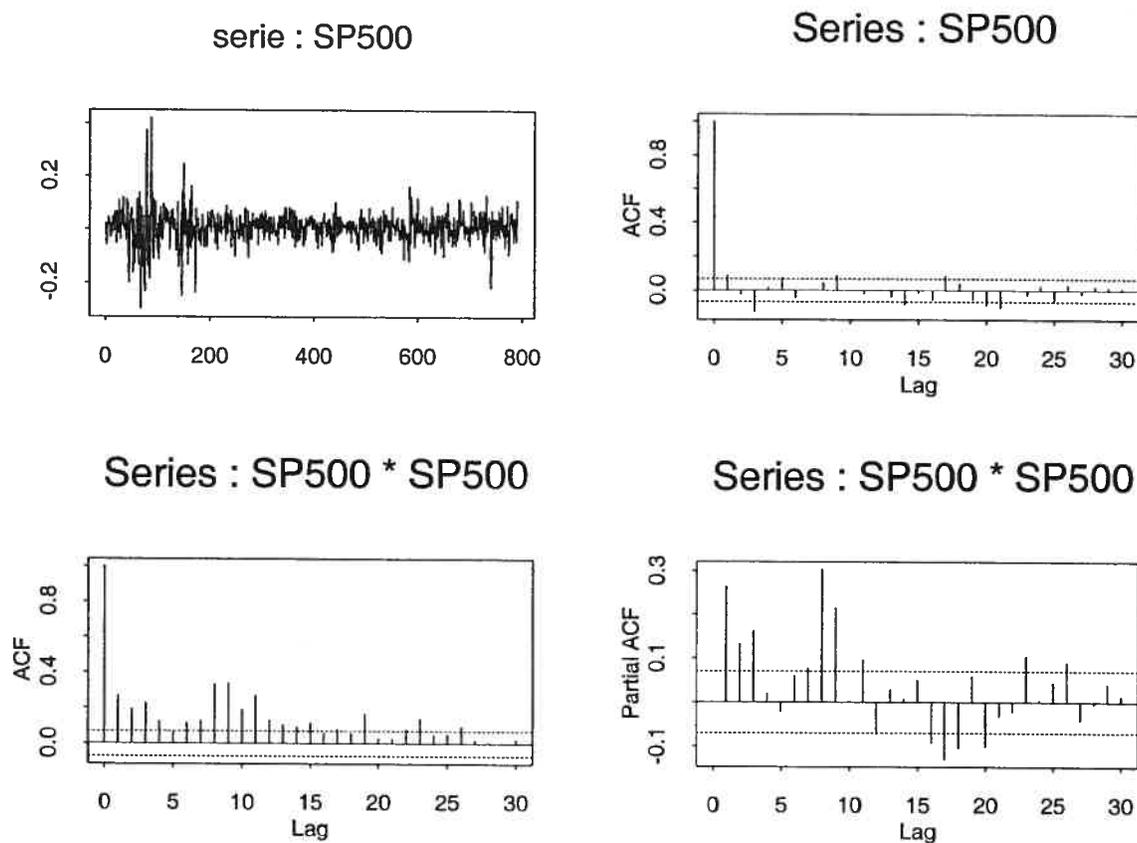


FIGURE 5.1.1. Graphiques de la série S&P 500

## 5.2. MODÉLISATION DE LA SÉRIE

À partir du corrélogramme de la série, nous remarquons que les autocorrélations de délais 1 et 3 sont à l'extérieur des limites de signification à 5% sous l'hypothèse de bruit blanc fort. Les autocorrélations et les autocorrélations partielles de la série au carré révèlent une dépendance linéaire forte. Dans son analyse, Tsay a ajusté un modèle GARCH(1,1) qui est un modèle non linéaire et hétéroscédastique. Nous n'allons pas suivre son approche et nous essayons plutôt de la modéliser par un ARMA faible. Dans notre analyse, tout d'abord, nous traitons les données originales de la série. En suite, nous analysons son carré.

L'identification d'un modèle ARMA( $p, q$ ) faible a été faite en calculant le critère SBC pour  $0 \leq p, q \leq 2$ . Les ordres  $p, q$  sont obtenus en minimisant ce critère. Nous avons trouvé  $p = q = 0$ . Donc, la série est compatible avec un bruit blanc faible mais il ne s'agit pas d'un bruit blanc fort. À l'étape estimation, nous avons estimé deux modèles ARMA, un modèle AR(1) et un modèle MA(1) en appliquant les deux méthodes d'estimation des moindres carrés (NAG) et (FZ). Les modèles estimés sont les suivants.

$$1- \text{AR}(1) : X_t = 0.100X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

$$2- \text{MA}(1) : X_t = \varepsilon_t + 0.101\varepsilon_{t-1}.$$

Avec la méthode standard (NAG), l'écart type de l'estimateur  $\hat{\phi}$  du modèle AR(1) est de 0.0354 et celui de l'estimateur  $\hat{\theta}$  du modèle MA(1) est 0.0355. En utilisant la méthode de Francq et Zakoïan, les écarts types de  $\hat{\phi}$  et  $\hat{\theta}$  sont respectivement 0.0733 et 0.0851. Pour le calcul de ces deux écarts types, nous avons utilisé la fenêtre rectangulaire et le point de troncature  $T_n = [\ln(n)] + 1$ . Donc, avec la première méthode on rejette l'hypothèse d'un bruit blanc fort, alors qu'avec la deuxième, on ne rejette pas l'hypothèse d'un bruit blanc faible.

En ce qui concerne la modélisation du carré de cette série, nous avons identifié un ARMA(1,1) en utilisant le critère SBC avec  $0 \leq p, q \leq 2$ . L'équation du modèle est la suivante :

$$X_t^2 = \theta_0 + \phi X_{t-1}^2 + a_t - \theta a_{t-1},$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc faible. L'estimation de ce modèle a été faite avec les deux méthodes d'estimation (NAG) et (FZ). Ainsi, le modèle s'écrit comme suit où  $Y_t = X_t - \bar{X}$ ,

$$X_t = 0.0061 + Y_t, \quad Y_t^2 = 0.0034 + 0.961Y_{t-1}^2 + a_t - 0.850a_{t-1}.$$

La méthode standard a donné des écarts types égaux à 0.0163 pour l'estimateur autorégressif  $\hat{\phi}$  et 0.0309 pour l'estimateur moyenne mobile  $\hat{\theta}$ . Les écarts types de ces deux estimateurs avec la méthode de Francq et Zakoïan sont 0.0284 et 0.0829 respectivement. Ils ont été calculés en utilisant la fenêtre rectangulaire et le paramètre de troncature  $T_n = [\ln(n)] + 1$ .

Dans la deuxième section du premier chapitre, nous avons décrit la représentation ARMA faible des processus GARCH. Pour cet exemple, établissons la relation entre la modélisation GARCH faite par Tsay et la nôtre. Dans son analyse, Tsay a ajusté le modèle GARCH(1,1) suivant

$$X_t = 0.0065 + Y_t, \quad Y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad h_t = 0.00014 + 0.1353Y_{t-1}^2 + 0.8220h_{t-1}.$$

Nous rappelons que l'équation du modèle GARCH(1,1) est comme suit :

$$Y_t = h_t^{1/2} \varepsilon_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

et que la représentation ARMA faible correspondante est la suivante :

$$Y_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)Y_{t-1}^2 + a_t - \beta_1 a_{t-1}$$

où  $\{a_t\}$  est un bruit blanc faible.

Au niveau de l'identification du modèle ARMA pour le carré des observations, le modèle GARCH(1,1) correspond au modèle ARMA(1,1) dont les paramètres estimés sont

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha}_0 = 0.00014,$$

$$\hat{\phi} = \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 = 0.1353 + 0.8220 = 0.9573,$$

$$\hat{\theta} = \hat{\beta}_1 = 0.8220.$$

En comparant ces résultats à ceux trouvés en estimant directement un ARMA faible, nous réalisons que notre démarche conduit à des résultats similaires.

Pour la validation du modèle estimé, nous avons déjà mentionné que pour cette classe de modèles, il n'existe pas encore d'approches établies. Cependant, des résultats préliminaires sur le test de Box et Pierce dans le contexte ARMA faible sont présentés dans Francq, Roy et Zakoïan (2003). Nous présentons quand même les corrélogrammes des résidus des trois modèles ajustés AR(1), MA(1) et ARMA(1,1) à la figure 5.2.1 et nous remarquons que les autocorrélations résiduelles des modèles AR(1) et MA(1) ajustés à la série S&P 500 sont presque identiques. En se basant sur l'approche classique (indépendance des erreurs), nous pouvons dire que les séries résiduelles des deux méthodes se comportent comme un bruit blanc puisqu'il y a seulement une ou deux autocorrélations qui sont à l'extérieur des limites de signification au niveau 5%. Pour ce qui est de la série résiduelle du modèle ARMA(1,1), le graphique des autocorrélations montre que cette série est fortement corrélée et qu'elle ne se comporte pas comme un bruit blanc fort puisque les autocorrélations aux délais 5, 8, 9 et 11 sont élevées.

La question qui se pose naturellement : Peut-on se fier à ces limites de signification pour décider si le modèle ajusté est adéquat ou non ? La réponse est bien sûr que non puisque ces limites supposent que les observations de la série sont indépendantes, ce qui n'est pas le cas. Le travail de Francq, Roy et Zakoïan (2003) devrait nous en dire plus à ce sujet.

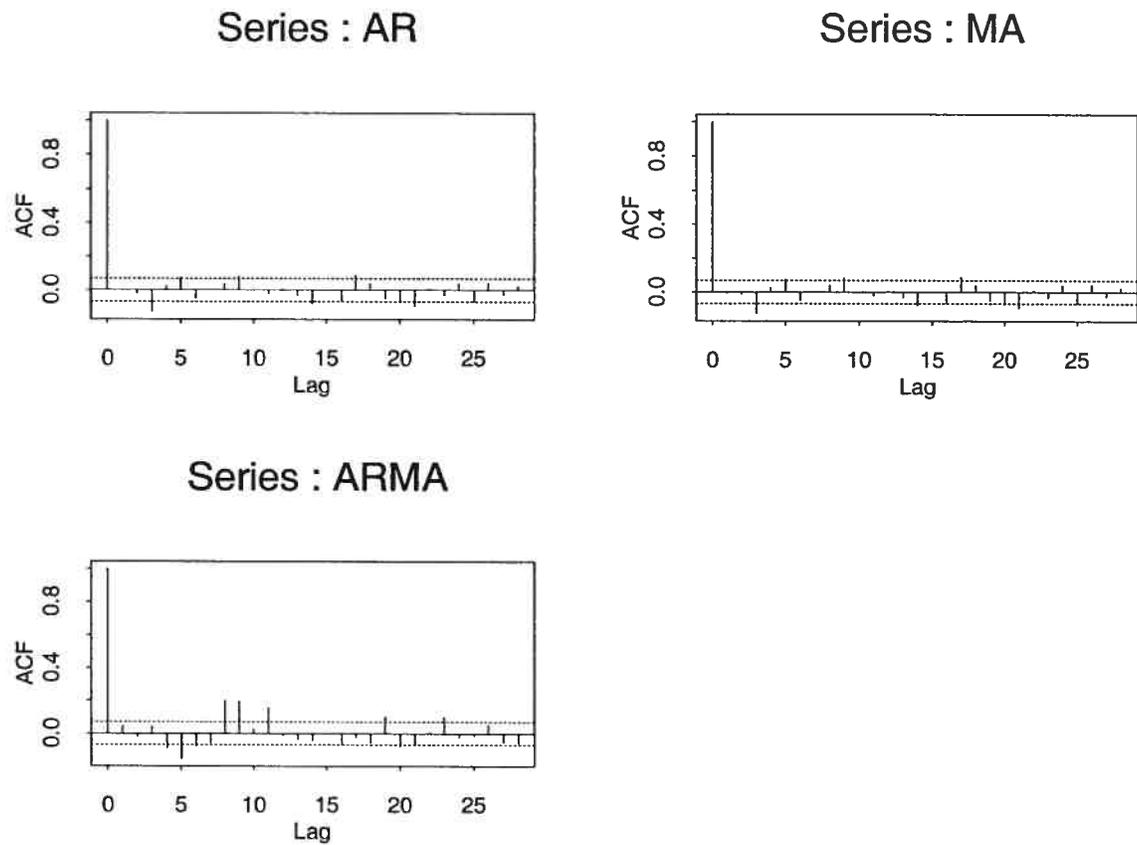


FIGURE 5.2.1. Graphiques des autocorrélations résiduelles correspondant aux modèles  $AR(1)$ ,  $MA(1)$  et  $ARMA(1,1)$  estimés dans l'analyse de la série S&P 500.

## CONCLUSION

---

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés aux problèmes d'identification et d'estimation des processus ARMA faibles, c'est-à-dire lorsque l'hypothèse d'indépendance des innovations n'est pas satisfaite.

Dans un premier temps, nous avons examiné les méthodes d'estimation de la matrice des covariances des autocorrélations échantillonnelles des modèles ARMA étant donné leur importance dans l'identification de ces modèles. Nous avons vu que la méthode classique reposant sur l'indépendance des erreurs peut mener à des résultats erronés lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite. Ainsi, nous avons proposé l'utilisation du bootstrap blocs mobiles qui est une méthode simple et pratique pour l'estimation de cette matrice de covariance et de la méthode empirique de Hall, Horowitz et Jing (1995) pour le choix de la taille optimale des blocs dans cette méthode bootstrap. Cependant, en procédant par simulations, nous avons illustré que les deux méthodes ne conduisent pas à des résultats satisfaisants. D'abord, la méthode de Hall, Horowitz et Jing conduit à l'utilisation de blocs de longueur un, ce qui n'est pas réaliste puisque cela revient à appliquer le bootstrap d'Efron pour des observations i.i.d. alors que nous sommes en présence d'observations dépendantes. Aussi les résultats obtenus avec le bootstrap blocs mobiles dépendent fortement de la longueur des blocs. Le choix de cette longueur

peut constituer en soi un projet futur de recherche afin d'assurer le bon fonctionnement du bootstrap blocs mobiles.

Nous avons ensuite concentré nos efforts sur la méthode d'estimation et d'identification des modèles ARMA faibles en se basant sur les derniers travaux de Francq et Zakoïan (1998a, 1998b, 2000). Au niveau de l'estimation, nous avons exposé leur méthode basée sur la méthode des moindres carrés pour estimer les écarts types des estimateurs des paramètres du modèle lorsque les innovations sont non corrélées mais dépendantes. Nous avons aussi étudié les critères de sélection des modèles AIC, BIC et SBC proposés par Francq et Zakoïan (1998b) pour remédier au problème d'identification de ces modèles.

À l'aide de simulations, nous avons étudié de près l'application de ces méthodes à des modèles ARMA forts et faibles. Nous retenons de ces simulations, que les critères AIC et SBC proposés pour l'identification des ordres des modèles ARMA faibles fonctionnent bien tant dans le cas fort que dans le cas faible. En général, ils sont cependant plus performants dans le dernier cas.

Nous étions particulièrement intéressé à savoir si la méthode d'estimation de Francq et Zakoïan performe bien même pour les modèles ARMA forts. Les simulations que nous avons faites indiquent que cette méthode peut être appliquée pour ces modèles sans une grande perte de précision.

De plus, nous retenons que l'application de cette méthode et de la méthode standard ont donné de bons résultats lorsque les séries ont été simulées directement de modèles ARMA faibles linéaires. Nous avons cependant obtenu des résultats étonnants pour l'estimation de l'écart type de l'estimateur du paramètre du

modèle MA(1) lorsque le vrai modèle est un bruit blanc faible. Lorsque le modèle est non linéaire (modèle à changement de régimes), la méthode standard fournit des écarts types très éloignés du vrai écart type alors que la méthode de Francq et Zakoïan est beaucoup plus rapprochée.

L'exemple pratique du chapitre 5, illustre que la méthode d'estimation de Francq et Zakoïan est compatible avec les critères de sélection de modèles en ne rejetant pas l'hypothèse d'un bruit blanc faible. La méthode standard conduit au rejet de cette hypothèse lorsque des modèles AR(1) ou MA(1) forts sont estimés. Cet exemple illustre aussi le lien entre la modélisation ARMA faible et la modélisation GARCH.

Le troisième point important dans la modélisation des séries chronologiques qui est à approfondir est la validation des modèles ARMA faibles. Cette étape fait l'objet de travaux en cours par Francq, Roy et Zakoïan (2003).

Ces derniers travaux devraient conduire à une méthodologie en trois étapes (identification, estimation, validation) de construction des modèles ARMA faibles similaires à celle proposée par Box et Jenkins (1970) pour les modèles ARMA forts.

# ANNEXE

---

## CODE FORTRAN

Nous présentons seulement un exemple de modèles pour les différentes simulations que nous avons faites.

### I. PROGRAMMES DES SIMULATIONS DU BOOTSTRAP BLOCS MOBILES

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme pour le calcul des EQM de la matrice des C
C covariances des autocorrélations d'un MA(1) faible C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Déclaration
      integer n,B1,B2,m,bp,np,l,npp,qpp
      parameter(nmax=502, mmax=24, npp=100, qpp=550)
      parameter(Bm=1000)
      double precision epsi(nmax),z(nmax),w(nmax)
      double precision MVAR(mmax),MVARSS(qpp,mmax),SS(npp)
      double precision EQM,ECART,AVAR(mmax)
      integer qp,i,j,t,k1,k2,q1,q2
      common /m /m
      double precision g05ddf
      external g05ddf
      external g05cbf
C Initialisation
      write(*,*)'bp=?'
      read(*,*)bp
C bp valeur pilote de la taille des blocs b*
      call g05cbf(0)
      n=300
      B1=1000
      B2=500
      m=24
      bp=24
      np=100
      qp=n-np+1
```

```

      k1=int(n/bp)
      q1=n-bp+1
      do 300 f=1,500
C  simulation d'un MA(1)faible
      do 20 i=1,n+2
      z(i)=g05ddf(0.0d0,1.0d0)
20  continue
      do 30 i=1,n+1
      epsi(i)=z(i+1)*z(i)
30  continue
      do 40 i=1,n
      w(i)=epsi(i+1)-0.7d0*epsi(i)
40  continue
C Calcul des EQM de la matrice des covariances des autocorrélations
      CALL varauto(w,n,bp,B1,k1,q1,MVAR)
      do 200 l=1,30
      do 110 i=1,qp
      do 120 j=1,np
      SS(j) = w(i+j-1)
120 CONTINUE
      k2=int(np/l)
      q2=np-l+1
      call varauto(SS,np,l,B2,k2,q2,AVAR)
      do 130 t=1,m
      MVARSS(i,t)=AVAR(t)
130 CONTINUE
110 CONTINUE
      EQM = 0.0d0
      do 140 i=1,qp
      do 150 j=1,m
      ECART=(MVARSS(i,j)-MVAR(j))**2
      EQM =EQM+ECART
150 CONTINUE
140 CONTINUE
      EQM=EQM/qp
      write(80,*)l,EQM
200 continue
300 continue
      STOP
      END
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Sous-routine qui applique le bootstrap blocs mobiles C
C de longueur bp à une série w de taille n C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Déclaration
      SUBROUTINE varauto(w,n,bp,B,k,q,MVAR)
      DOUBLE PRECISION wt(1000),xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum
      integer n,B,m,bp
      parameter(nmax=502, mmax=24)

```

```

parameter(Bm=1000)
INTEGER indice, B, q, bp, n, m
INTEGER s,i,j,k,p,iwt
DOUBLE PRECISION U,G05CAF
EXTERNAL G05CAF,G05CBF
DOUBLE PRECISION V(1000),w(nmax),VM,VVM,STAT
DOUBLE PRECISION R(mmax), Auto(Bm,mmax),VV(Bm),MVAR(m)
INTEGER IFAIL1,ifail2
Common /m /m
EXTERNAL G13ABF,G01AAF
C Sélection des blocs et constitution de l'échantillon bootstrap
IFAIL1=0
do 50 i=1,B
do 60 j=1,k
U = G05CAF(0)
indice =INT(U*q) + 1
do 70 p=1,bp
V((j-1)*bp+p) = w(indice+p-1)
70 CONTINUE
60 CONTINUE
C calcul des autocorrélations de la série bootstrap V
call G13ABF(V,k*bp,m,VM,VVM,R,STAT,IFAIL1)
do 80 s=1,m
Auto(i,s)= R(s)
80 CONTINUE
50 CONTINUE
C Calcul de la variance des autocorrélations
do 90 i=1,m
do 100 j=1,B
VV(j) = Auto(j,i)
100 CONTINUE
ifail2=0
call g01aaf(B,VV,iwt,wt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum,ifail2)
MVAR(i) = s2**2
90 CONTINUE
RETURN
END

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

C Programme permettant le calcul des moyennes des EQM C

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC

```

```

C Déclaration

```

```

double precision x1(1000),a,wt(1000)
double precision x2(1000),x3(1000),x4(1000),x5(1000),x6(1000)
double precision x7(1000),x8(1000),x9(1000),x10(1000),x11(1000)
double precision x12(1000),x13(1000),x14(1000),x15(1000),x16(1000)
double precision x17(1000),x18(1000),x19(1000),x20(1000),x21(1000)
double precision x22(1000),x23(1000),x24(1000),x25(1000),x26(1000)

```

```

double precision x27(1000),x28(1000),x29(1000),x30(1000)
double precision xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum
C Lecture des EQM obtenus en appliquant la méthode empirique pour le
C choix de la longueur des blocs dans le BBM ( résultats du programme
C précédent )
    i=0
1   read(80,*,end=2)a,x1(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x2(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x3(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x4(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x5(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x6(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x7(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x8(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x9(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x10(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x11(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x12(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x13(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x14(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x15(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x16(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x17(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x18(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x19(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x20(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x21(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x22(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x23(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x24(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x25(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x26(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x27(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x28(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x29(i+1)
    read(80,*,end=2)a,x30(i+1)
    i=i+1
    goto1
2   continue
    n=i
C Calcul des moyennes des EQM
    write(111,*)'CCCCCCCCCCCC 1(1) CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC'
    write(111,*)'n=',n
    ifail=0
    call g01aaf(n,x1,iwt,wt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum,ifail)
    write(111,*)'mean = ',xmean
    write(111,*)'standard deviation = ',s2
    write(111,*)'xmin = ',xmin
    write(111,*)'xmax = ',xmax

```

C Nous faisons appel à cette sous-routine 30 fois pour le calcul des  
C moyennes de  $x_1$  à  $x_{30}$ .

```
stop
end
```

```
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme permettant le calcul des écarts types des C
C autocorrélations échantillonales en appliquant le C
C bootstrap blocs mobiles à un MA(1) faible. C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
```

C Déclaration

```
integer n,B1,m,bp,qpp
parameter(nmax=502, mmax=24, qpp=550)
parameter(Bm=1000)
double precision epsi(nmax),z(nmax),w(nmax)
double precision MVAR(mmax)
integer i,k1,q1,j
common /n /n
common /m /m
common /B1 /B1
double precision g05ddf
external g05ddf
external g05cbf
```

C Initialisation

```
call g05cbf(2)
n=300
```

C Simulation d'un MA(1)

```
do 20 i=1,n+2
z(i)=g05ddf(0.0d0,1.0d0)
20 continue
do 30 i=1,n+1
epsi(i)=z(i+1)*z(i)
30 continue
do 40 i=1,n
w(i)=epsi(i+1)+0.5d0*epsi(i)
40 continue
B1=1000
m=24
```

C Calcul des écarts types des autocorrélations échantillonales  
C en appliquant le BBM avec des longueurs des blocs  $bp=1, \dots, 30$

```
do bp=1,30
q1=n-bp+1
k1=int(n/bp)
CALL varauto(w,n,bp,B1,k1,q1,MVAR)
write(100,3)(MVAR(j),j=1,m)
3 format(24f8.4)
end do
```

```

      STOP
      END
C Sous-routine qui calcule les écarts types des autocorrélations
C en utilisant le BBM
      SUBROUTINE varauto(w,n,bp,B,k,q,MVAR)
      double precision wt(1000),xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum
      integer n,B,m,bp,iwt
      parameter(nmax=502, mmax=24)
      parameter(Bm=1000)
      INTEGER indice, B, q, bp, n, m
      INTEGER s,i,j,k,p
      DOUBLE PRECISION U,G05CAF,VM,VVM,STAT
      EXTERNAL G05CAF,G05CBF
      DOUBLE PRECISION V(1000),w(nmax)
      DOUBLE PRECISION R(mmax), Auto(Bm,mmax),VV(Bm),MVAR(mmax)
      INTEGER IFAIL1,ifail2
      Common /m /m
      EXTERNAL G13ABF,G01AAF
      IFAIL1=0
      do 50 i=1,B
      do 60 j=1,k
      U = G05CAF(U)
      indice =INT(U*q) + 1
      do 70 p=1,bp
      V((j-1)*bp+p) = w(indice+p-1)
70  CONTINUE
60  CONTINUE
      call G13ABF(V,k*bp,m,VM,VVM,R,STAT,IFAIL1)
      do 80 s=1,m
      Auto(i,s)= R(s)
80  CONTINUE
50  CONTINUE
C Calcul des écarts types des autocorrélations
      do 90 i=1,m
      do 100 j=1,B
      VV(j) = Auto(j,i)
100 CONTINUE
      ifail2=0
      call g01aaf(B,VV,iwt,wt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,
&wtsum,ifail2)
      MVAR(i) = s2
90  CONTINUE
      RETURN
      END

```

## II. PROGRAMMES DES SIMULATIONS POUR L'IDENTIFICATION

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme pour le calcul des critères de sélection C
C AIC et SBC pour un MA(1) faible, modélisation ARMA C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Déclaration
  implicit double precision (a-h, o-z)
  double precision z(10000),epsi(10000)
  double precision w(10000),x(4),sigma,theta
  double precision f,bl(4),bu(4),ww(220),aic,sbc
  integer iw(14),ndon,ifail,ip,iq,pq,k,n,i
  double precision xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum,wt(500)
  common /ndon/ ndon
  common /w/ w
  common /ip/ ip
  common /iq/ iq
  common /k/ k
  external e04jaf,g13aaf,g05cbf,g05ddf
C Initialisation
  write(*,*)'ndon et theta'
  read(*,*) ndon,theta
  call g05cbf(2)
  do 50 k=1,1000
C Simulation d'un MA(1) faible
  do 20 i=1,ndon+2
  z(i)=g05ddf(0.0d0,1.0d0)
  20  continue
  do 30 i=2,ndon+2
  epsi(i-1)=z(i)*z(i-1)
  30  continue
  do 40 i=2,ndon+1
  w(i-1)=epsi(i)-theta*epsi(i-1)
  40  continue
CCCCC
  ifail=0
  call g01aaf(ndon,w,iwt,wt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum,ifail)
  sigma=s2**2
C Calcul du critère k(n,p,q)
  do 60 ip=0,2
  do 70 iq=0,2
  ip+iq=n
  do 4 i=1,n
  bu(i)=1.0d0
  bl(i)=-1.0d0
  x(i)=0.0d0
  4  continue
  pq=0
  if(n.eq.0)then

```

```

aic=ndon*log(sigma)
sbc=ndon*log(sigma)
else
ifail=1
call e04jaf(n,0,bl,bu,x,f,iw,14,ww,220,ifail)
do 7 i=1,n
if(x(i).gt.0.000001.or.x(i).lt.-0.000001)then
pq=pq+1
endif
7 continue
if(pq.ne.0)then
aic=ndon*log(f)+2.0d0*pq
sbc=ndon*log(f)+pq*log(ndon*1.0d0)
endif
endif
write(1,*)k,ip,iq,pq,aic,sbc
70 continue
60 continue
50 continue
stop
end
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
subroutine funct1(n,xc,fc)
double precision w(10000),eps(10000),xc(n),fc
integer ip, iq,n,i
common /ndon/ ndon
common /w/ w
common /ip/ ip
common /iq/ iq
fc=0.0d0
CCCCCCC
eps(1)=w(1)
if(iq.eq.0)then
if(ip.eq.1)then
do1i=2,ndon
1 eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)
endif
if(ip.eq.2)then
eps(2)=w(2)-xc(1)*w(1)
do3i=3,ndon
3 eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)-xc(2)*w(i-2)
endif
endif
if(iq.eq.1)then
if(ip.eq.0)then
do5i=2,ndon
5 eps(i)=w(i)+xc(1)*eps(i-1)
endif
if(ip.eq.1)then

```

```

do 7 i=2,ndon
7  eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)+xc(2)*eps(i-1)
   endif
   if(ip.eq.2)then
   eps(2)=w(2)-xc(1)*w(1)+xc(3)*eps(1)
   do 8 i=3,ndon
8  eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)-xc(2)*w(i-2)+xc(3)*eps(i-1)
   endif
   endif
   if(iq.eq.2)then
   if(ip.eq.0)then
   eps(2)=w(2)+xc(1)*eps(1)
   do 10 i=3,ndon
10  eps(i)=w(i)+xc(1)*eps(i-1)+xc(2)*eps(i-2)
   endif
   if(ip.eq.1)then
   eps(2)=w(2)-xc(1)*w(1)+xc(3)*eps(1)
   do 11 i=3,ndon
11  eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)+xc(2)*eps(i-1)+xc(3)*eps(i-2)
   endif
   if(ip.eq.2)then
   eps(2)=w(2)-xc(1)*w(1)+xc(3)*eps(1)
   do 12 i=3,ndon
12  eps(i)=w(i)-xc(1)*w(i-1)-xc(2)*w(i-2)+xc(3)*eps(i-1)+xc(4)
&*eps(i-2)
   endif
   endif
   do 13i=1,ndon
   fc=fc+eps(i)**2
13  continue
   fc=fc/ndon
   return
   end

```

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme pour le calcul des critères de sélection      C
C AIC et SBC pour un MA(1) faible, modélisation AR      C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
double precision epsi(10000),z(10000)
double precision w(10000),x(24),sig,sigma
double precision f,bl(24),bu(24),ww(220),theta
integer iw(14),ndon,ifail,ip,iq,pq,k
double precision xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum,wt(500)
double precision aic,bic
integer iwt,ifail1,i
common /ndon/ ndon
common /w/ w
common /ip/ ip

```

```

        common /iq/ iq
        external e04jaf,g13aaf,g05cbf,g05ddf
C Initialisation
        write(*,*)'ndon et theta'
        read(*,*) ndon,theta
        call g05cbf(0)
        do 50 k=1,1000
C Simulation d'un MA(1) faible
        do 20 i=1,ndon+2
            z(i)=g05ddf(0.0d0,1.0d0)
20        continue
            do 30 i=2,ndon+2
                epsi(i-1)=z(i)*z(i-1)
30        continue
            do 40 i=2,ndon+1
                w(i-1)=epsi(i)-theta*epsi(i-1)
40        continue
            ifail1=0
            call g01aaf(ndon,w,iwt,wt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsun,ifail1)
            sigma=s2**2
C Calcul du critère k(n,p,q)
            iq=0
            do 60 ip=1,12
                n=ip+iq
                do 4 i=1,n
                    bu(i)=2.0d0
                    bl(i)=-2.
                    x(i)=0.0d0
4                continue
                    if(n.eq.0)then
                        aic=ndon*log(sigma)
                        sbc=ndon*log(sigma)
                    else
                        ifail=1
                        call e04jaf(n,0,bl,bu,x,f,iw,14,ww,220,ifail)
                        pq=0
                        do 7 i=1,n
                            if(x(i).gt.0.000001.or.x(i).lt.-0.000001)then
                                pq=pq+1
                            endif
7                continue
                    if(pq.ne.0)then
                        aic=ndon*log(f)+2.0d0*pq
                        bic=ndon*log(f)+pq*log(ndon*1.0d0)
                        write(30,*)k,ip,pq,aic
                        write(40,*)k,ip,pq,bic
                    endif
                endif
60        continue

```

```

50  continue
    stop
    end
CCCCCCCCCCCC
    subroutine funct1(n,xc,fc)
    double precision w(10000),eps(10000),xc(n),fc
    integer ip, iq,n
    common /ndon/ ndon
    common /w/ w
    common /ip/ ip
    common /iq/ iq
    fc=0.0d0
    do1i=1,ndon
    eps(i)=w(i)
    if(ip.gt.0)then
    do3j=1,ip
    if((i-j).gt.0)then
    eps(i)=eps(i)+xc(j)*w(i-j)
    end if
3   continue
    end if
1   continue
    do2i=1,ndon
2   fc=fc+(eps(i)**2)/ndon
    return
    end

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme pour déterminer les ordres p et q qui minimisent      C
C les critères AIC et SBC et calculer les proportions              C
C associées à la sélection du modèle ARMA(p,q), modélisation ARMA C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Déclaration
    double precision x(20000),y(20000)
    double precision xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,wtsum
    double precision v(9),wt(9),ymin,vt(9),vtsum,w(9)
    double precision ymean,s22,s33,s44,ymax,s1,s2
    double precision c(9),m(9),s1,s2
    integer k,p(20000),q(20000),d,f,e
    integer iwt,ifail,i,it,k,ivt,ifail1
    i=0
C Lecture des résultats du programme qui calcule les critères
C AIC et SBC
1   read(10,*,end=2)k,p(i+1),q(i+1),pq,x(i+1),y(i+1)
    read(10,*,end=2)k,p(i+2),q(i+2),pq,x(i+2),y(i+2)
    read(10,*,end=2)k,p(i+3),q(i+3),pq,x(i+3),y(i+3)
    read(10,*,end=2)k,p(i+4),q(i+4),pq,x(i+4),y(i+4)
    read(10,*,end=2)k,p(i+5),q(i+5),pq,x(i+5),y(i+5)

```

```

      read(10,*,end=2)k,p(i+6),q(i+6),pq,x(i+6),y(i+6)
      read(10,*,end=2)k,p(i+7),q(i+7),pq,x(i+7),y(i+7)
      read(10,*,end=2)k,p(i+8),q(i+8),pq,x(i+8),y(i+8)
      read(10,*,end=2)k,p(i+9),q(i+9),pq,x(i+9),y(i+9)
      do 3 d=1,8
      v(d)=x(d+i)
      w(d)=y(d+i)
3      continue
C Calcul des minimums de AIC et SBC
      ifail=0
      ifail1=0
      call g01aaf(9,v,ivt,vt,xmean,s2,s3,s4,xmin,xmax,vtsum,ifail)
      call g01aaf(9,w,iwt,wt,ymean,s22,s33,s44,ymin,ymax,wtsum,ifail1)
      do 5 f=1,9
      if(x(i+f).eq.xmin)then
      do 20 j=0,2
      do 22 it=0,2
      if(p(i+f).eq.j.and.q(i+f).eq.it)then
      c(f)=c(f)+1
      endif
22      continue
20      continue
      endif
5      continue
      do 6 e=1,9
      if(y(i+e).eq.ymin)then
      do 30 j=0,2
      do 32 it=0,2
      if(p(i+e).eq.j.and.q(i+e).eq.it))then
      m(e)=m(e)+1
      endif
32      continue
30      continue
      endif
6      continue
      i=i+1
      go to 1
2      continue
      s1=0.0d0
      s2=0.0d0
C Calcul des pourcentages
      do 8 j=1,9
      c(j)=(c(j)*100)/1000
      s1=s1+c(j)
      m(j)=(m(j)*100)/1000
      s2=s2+m(j)
8      continue
      write(800,*)'i c00 c01 c02 c10 c11 c12 c20 c21 c22'
      write(800,10)i,(c(j),j=1,9)

```

```
write(800,*)'somme s1',s1
write(800,*)'i m00 m01 m02 m10 m11 m12 m20 m21 m22 '
write(800,10)i,(m(j),j=1,9)
write(800,*)'somme s2',s2
10 format(1x,i5,1x,9f5.1)
stop
end
```

### III. PROGRAMMES DES SIMULATIONS POUR L'ESTIMATION

```

CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Programme pour l'estimation des paramètres PHI et C
C THETA d'un ARMA(2,1) fort et de leurs écarts types C
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C Déclaration
      double precision w(5000),epsi(5000),x(5000)
      double precision par(3),c,s,sd(3),cm(3,3),
&st(1300),res(60000)
      integer mr(7),isf(4),nb,ndon,nd
      common /ndon/ ndon
      common /w/ w
      common /ipas/ ipas
      external g05egf,g05cbf
C Initialisation
      write(*,*)'ndon'
      read(*,*) ndon
      call g05cbf(2)
      ip=2
      iq=1
      do 1 ipas=1,1000
C Simulation d'un ARMA(2,1) faible
      nd=1000
      do 20 i=1,nd+2
      epsi(i)=g05ddf(0.0d0,1.0d0)
20      continue
      do 40 i=3,nd+2
      x(i)=0.4d0*x(i-1)+0.2d0*x(i-2)+epsi(i)+0.7*epsi(i-1)
40      continue
      do 50 i=1,ndon
      w(i)=x(i+500)
50      continue
C Estimation par NAG
      mr(1)=2
      mr(2)=0
      mr(3)=1
      mr(4)=0
      mr(5)=0
      mr(6)=0
      mr(7)=0
      par(1)=0.0d0
      par(2)=0.0d0
      par(3)=0.0d0
      c=0.0d0
      ifail=1
      nst=3
      call g13aff(mr,par,3,c,0,w(1),ndon,s,ndf,sd,3,cm,3,st,nst,

```

```
&0,50,itc,isf,res,60000,nres,ifail)
write(3,30)ipas,par(1),par(2),par(3)
write(33,30) ipas,sd(1),sd(2),sd(3)
30 format(i5,3f18.14)
CCCCCC
C Estimation par la méthode des moindres carrés (FZ)
CCCCCCCC
call estimarma(ip,iq)
CCCCCC
1 continue
stop
end
```

C La sous-routine estimarma(ip,iq) est une sous-routine développée par  
C C. Francq permettant l'estimation des paramètres du modèle et le  
C calcul des écarts types des estimateurs. Il fait appel à la  
C sous-routine NAG E04JAF pour le calcul des estimateurs des paramètres  
C et une autre sous-routine qui permet le calcul des résidus et de  
C leurs dérivées pour l'estimation des écarts types.

# BIBLIOGRAPHIE

---

Akaike, H (1978) Time series analysis and control through parametric models. *Applied Time Series*, 1-23. Ed. D.F Findley, Academic Press, New York.

Athreya, K. B. et Pantula, S. G. (1986). A note on strong mixing of ARMA processus. *Statistics and Probability Letters*, 4, 187-190.

Berlinet, A. et Francq, C. (1997). On Bartlett's formula for non-linear processes. *Journal of Time Series Analysis*, 18, 535-552.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 37, 307-327.

Box, G. E. P. et Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis : Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco.

Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (1991). *Time Series : Theory and Methods*, 2<sup>e</sup> édition. Springer-Verlag, New York.

Brockwell, P. J. et Davis, R. A. (2002). *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2<sup>e</sup> édition. Springer-Verlag, New York.

Bühlmann, P, (2002). Bootstraps for time series. *Statistical Science*, 17, 52-72.

Doukhan, P. (1994). *Mixing : Properties and Examples*. Lecture Notes in Statistics, no. 85. Springer-Verlag, New York.

Engle, R, F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of variance of U. K. inflation. *Econometrica*, 50, 987-1007.

Engle, R, F. et Russell, J. R.(1998). Autoregressive conditional duration : A new model for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, 66,

1127-1162.

Francq, C., Roy, R. et Zakoïan, J-M. (2003). Goodness-of-fit tests for ARMA models with uncorrelated errors. Document de travail.

Francq, C. et Zakoïan, J-M. (1998a). Estimating linear representations of non linear processes. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **68**, 145-165.

Francq, C. et Zakoïan, J-M. (1998b). Estimating the order of weak ARMA models. Dans *Proceedings of the 98 Prague Conference on Nonparametric Statistics*, Ed. J. Jureckova.

Francq, C. et Zakoïan, J-M. (2000). Covariance matrix estimation for estimators of mixing weak ARMA models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **83**, 369-394.

Gouriéroux, C. et Monfort, A. (1992). Qualitative threshold ARCH models. *Journal of Econometrics*, **52**, 159-199.

Guégan, D. (1994). *Séries chronologiques non linéaires à temps discret*. Economica, Paris.

Hall, P. Horowitz, J. L. et Jing. B. (1995). On blocking rules for the bootstrap with dependent data. *Biometrika*, **82**, 3, 561-74.

Hamilton, J. D. (1994). *Times Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

Künsch, H. R. (1989). The jackknife and the bootstrap for general stationary observations. *Annals of Statistics*, **17**, 1217-1241.

Liu, R. Y. et Singh, K. (1992). Moving blocks jackknife and bootstrap capture weak dependence : in *Explorating the limits of bootstrap*, 225-248 Ed. Lepage and Billard, John Wiley, New York, 225-248.

Mélard, G. et Roy, R. (1984). Sur un test d'égalité des autocovariances de deux séries chronologiques. *La revue canadienne de statistique*, **12**, 333-342.

Mélard, G. et Roy, R. (1987). On confidence intervals and tests for autocorrelations. *Computational Statistics and Data Analysis*, **5**, 31-44.

Mélard, G. et Roy, R. (1988). Modèles de séries chronologiques avec seuils. *Revue de statistique appliquée*, **36**, 5-24.

Mélard, G. Paesmans, M. et Roy, R. (1991). Consistent estimation of the asymptotic covariance structure of multivariate serial correlations. *Journal of Time Series Analysis*, **12**, 351-361.

Politis, D. et Romano, J. P. (1992). A general resampling scheme for triangular arrays of  $\alpha$ -mixing random variables with application to the problem of spectral density estimation. *Annals of Statistics*, **20**, 1985-2007.

Romano, J. P. et Thombs, L. A. (1996). Inference for autocorrelations under weak assumptions. *Journal of the American Statistical Association*, **434**, 590-600.

Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, **6**, 461-464.

Tong, H. (1990). *Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach*. Clarendon press, Oxford.

Tong, H. et Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **42**, 245-292.

Tsay, R. S. (2001). *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, New York.