Université de Montréal

Étude de l'enseignement et de l'apprentissage des formes indéterminées

par
Mélanie ODIERNA

Département de didactique
Faculté des sciences de l'éducation

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de maîtrise ès arts (M.A.)
en sciences de l'éducation,
option didactique

février, 2004

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Étude de l'enseignement et de l'apprentissage
des formes indéterminées

présenté par

Mélanie ODIERNA

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Philippe R. Richard
président-rapporteur

France Caron
directeur de recherche

Gisèle Lemoyne
membre du jury

RÉSUMÉ

Les formes indéterminées représentent une notion qui requiert la compréhension de plusieurs concepts mathématiques fondamentaux. Dans cette étude, nous nous intéressons aux dispositifs d'enseignement mis à contribution pour l'apprentissage des formes indéterminées et à leur impact sur les conceptions de deux groupes d'étudiants du collégial.

L'analyse des résultats d'un premier questionnaire a d'abord permis de faire ressortir les conceptions des étudiants sur les notions de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini. L'analyse des dispositifs d'enseignement a ensuite cherché à repérer la prise en compte de ces conceptions et à évaluer l'impact de l'enseignement sur ces conceptions. Les résultats montrent que ces dispositifs ne tiennent pas toujours compte de façon explicite des conceptions des étudiants sur les notions de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini. Néanmoins, l'analyse des résultats d'un second questionnaire montre que les conceptions des étudiants sur les notions de limite, de division par zéro et d'infini ne semblent pas influencer de façon importante les réponses des étudiants. Les différences, pour certaines spectaculaires, entre les taux de réussite entre les deux groupes relèvent davantage de l'enseignement reçu.

MOTS CLÉS : conceptions, limite, infini, analyse mathématique, transposition didactique et technologie

ABSTRACT

The understanding of indeterminate forms requires the knowledge of many fundamental mathematical concepts. In this present study, we are interested in the pedagogical and didactic approaches which contribute to the learning of indeterminate forms and their impact on the students' conceptions. This study was conducted with two groups of college students.

Analysis of the results of a first questionnaire pointed out the student's conceptions on the notions of limits, indetermination, division by zero and infinity. Then, analysis of the pedagogical and didactic approaches aimed at identifying the impact of these conceptions on the teaching and learning of indeterminate forms. Results show that students' conceptions on the notions of limits, indetermination, division by zero and infinity are not always explicitly taken into account in the teaching. Nevertheless, analysis of the results of a second questionnaire demonstrated that the students' conceptions on limits, division by zero and infinity did not have a major impact on their answers. The differences that we observed between students answers were mainly explained by the teaching received.

KEYS WORDS: conceptions, limit, infinity, calculus, didactic transposition, technology and advanced mathematics

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX

À ma cousine Nathalie

REMERCIEMENTS

J'aimerais, tout d'abord, remercier ma directrice de recherche, madame France Caron, d'avoir accepté de diriger ce mémoire. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude de m'avoir fait bénéficier de ses vastes connaissances et de son expérience dans le domaine. Son contact au fil des jours a été pour moi une source constante de stimulation.

Ce projet n'aurait pu se faire sans la contribution d'un bon nombre d'individus. Plus particulièrement, je tiens à remercier les soixante-sept étudiants des deux collèges pour s'être gentiment portés volontaires lors de ma collecte de données. De plus, je tiens à témoigner ma gratitude aux professeurs de ces groupes pour m'avoir permis de réaliser mes observations dans leur classe. Leur appui et leur ouverture d'esprit à cette recherche ont été incontestables.

J'éprouve une reconnaissance toute spéciale envers mesdames Gisèle Lemoyne et Lalina Coulange pour leurs excellents conseils et la confiance qu'elles m'ont témoignée en début de projet. Nos nombreuses conversations m'ont été bénéfiques lors de la mise en place du projet.

Finalement, mes plus grands remerciements vont à ma famille et mes amis, qui ont su me soutenir lors de la réalisation de ce projet. Leur appui et leur encouragement quotidiens m'ont été très précieux.

INTRODUCTION

Dans une étude récente, Maurice (2000) a mis en évidence un nombre important de conceptions naïves ou erronées sur les formes indéterminées chez les étudiants du collégial. L'enseignement des formes indéterminées est aussi reconnu problématique par un nombre non négligeable d'enseignants des cours de calcul de niveau collégial. Les formes indéterminées font ressortir des conceptions erronées sur la division par zéro, l'infini, la limite et l'indétermination. Divers parcours didactiques et mathématiques sont actuellement utilisés. Comment ces parcours affectent-ils les rapports des étudiants à ce savoir? Quelles situations pouvons-nous envisager pour aider les étudiants à construire des rapports plus adéquats? Ces questions ne peuvent être examinées sans une analyse de la transposition didactique de ce savoir.

L'objet de cette recherche est donc de mieux cerner le statut de ce savoir dans les cours de calcul de niveau collégial. Pour ce faire, une analyse comparative de manuels contrastés sera réalisée. Les dispositifs didactiques et les organisations de savoirs mathématiques mises en avant dans chacun de ces manuels seront ainsi examinés : choix, ordonnancement et présentations (discursives, graphiques) des définitions, des théorèmes, des applications, des exercices.

Les observations sont effectuées dans quelques classes dans lesquelles chacun des manuels est utilisé. Nous comptons nous appuyer sur l'épreuve formulée par Louise Maurice sur les conceptions erronées des formes indéterminées. Cela va nous permettre de mieux comprendre la transposition didactique des formes indéterminées. Les résultats de ce test vont être mis en parallèle avec les connaissances apprises à travers la transposition faite par les manuels. Les résultats de cette recherche rendront sûrement plus intelligibles les conceptions naïves ou inadéquates identifiées dans l'étude de Maurice; ils seront sans doute d'une grande utilité pour les professeurs de niveau collégial qui désirent comprendre les difficultés de compréhension que les étudiants rencontrent lors de l'apprentissage des formes indéterminées.

Dans le premier chapitre, nous présentons la problématique associée au passage aux mathématiques avancées, c'est-à-dire à l'analyse mathématique. Nous allons également nous interroger sur la place de la technologie dans l'enseignement des mathématiques en essayant de situer les formes indéterminées dans ces mathématiques expérimentales.

Au deuxième chapitre, nous poursuivons en présentant une analyse conceptuelle des formes indéterminées et une analyse des dispositifs d'enseignement en prenant bien soin de situer la place de la preuve et de l'informatique dans les cours de mathématiques.

Nous présentons ensuite la méthodologique de la recherche au chapitre 3 puis les résultats et analyses au chapitre 4 en distinguant bien les deux groupes observés. Enfin, le chapitre 5 reprendra notre problématique et présentera une synthèse des résultats.

1 PROBLÉMATIQUE

La situation dans les établissements de niveau collégial est inquiétante. Seulement 39% des étudiants réussissent à compléter leurs études en deux ans; 17% en trois ou quatre ans et 22% en mettant plus de quatre ans (Ministère de l'éducation, 1999). Les programmes en sciences connaissent un taux d'échec ou d'abandon particulièrement élevé. De ceux qui choisissent un programme scientifique au cégep, 50 p.100 finissent par échouer ou abandonner.[1] Parmi les disciplines de ce programme, les mathématiques ne sont peut-être pas étrangères à ce phénomène. En citant les études de Beaulac et Robitaille (1976), Denis (1978), Cudoch-Dussiaume (1988), Maurice (2000) signale des taux d'échec et d'abandon importants dans les cours de mathématiques au niveau collégial. Selon le Service régional d'admission du Montréal métropolitain (SRAM), les cohortes[2] de 1993 à 1997, ont connu un taux d'échec en mathématiques de 21% à 26 % chez les élèves de sciences (Terrill, 1999, voir : Maurice, 2000)

En 1997, dans l'ensemble des établissements publics de niveau collégial, le taux de réussite du premier trimestre dans le programme de Sciences de la nature se situait à 78% (Ministère de l'éducation, 1999). Parmi les disciplines offertes lors de ce trimestre, le premier cours de calcul (103 ou NYA : *calcul différentiel*) détenait un des taux d'échec et d'abandon les plus élevés. Les cohortes de 1993 à 1997 (Terril, SRAM, 1999, voir : Maurice, 2000) ont connu un taux d'échec de 22 % à 26 % pour ce cours. Au collège Montmorency, durant ces mêmes années, les taux de réussite se situaient entre 40 % et 59 %. La Figure 1 illustre l'évolution du taux de réussite dans ce cours selon les différentes sessions :

[1] Extrait de l'allocution du ministre d'État à l'Éducation et à la Jeunesse, monsieur François Legault, prononcée à l'occasion de la conférence grand public du Congrès mathématique de l'an 2000 et reproduite dans Le Bulletin AMQ, Vol. XL, n° 2, mai 2000, Bibliothèque Nationale du Québec.
[2] L'ensemble des étudiants qui ont commencé leurs études collégiales la même année.

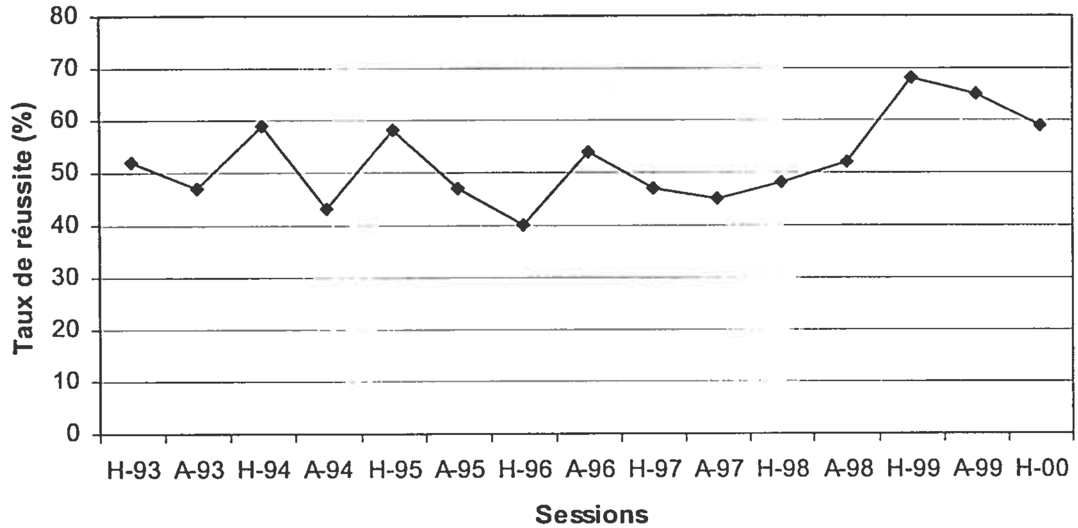


Figure 1- Évolution du taux de réussite dans le cours de calcul différentiel (NYA)

On constate par ce graphique que la période de 1993 à 1997 a connu les taux de réussite les plus faibles des dix dernières années. Toutefois, une augmentation des taux de réussite s'est produite à partir de 1999. Il se pourrait que ces taux aient été influencés par les remaniements des programmes d'étude en mathématiques au secondaire dont l'implantation dans les écoles a été complétée pour la cinquième secondaire en juillet 1998 où une plus grande place est accordée à la résolution de problèmes (Ministère de l'éducation, 1997).

Dans ce cours de calcul différentiel, les étudiants sont souvent amenés à faire, pour la première fois, un travail d'*analyse mathématique*.

1.1 Le passage à l'analyse mathématique

Ce passage à l'*analyse mathématique* serait, comme le décrivent Gray, Pinto, Pitta et Tall (1999), une ouverture à une pensée mathématique avancée, en ce sens où les concepts ne se fonderaient plus sur les idées intuitives basées sur l'expérience mais plutôt sur les définitions des concepts mathématiques. Pour arriver à cette pensée, une transition serait donc nécessaire. Le succès de cette transition passerait par la clarification d'hypothèses, la reconstruction du processus cognitif, le contrôle de ce nouvel apprentissage, la formalisation et la systématisation (Tall, 1992).

De nombreuses difficultés cognitives doivent être surmontées lors de ce passage. Les étudiants sont amenés, tout d'abord, à confronter leurs conceptions à l'endroit des mathématiques formelles en les envisageant comme un aspect de l'activité humaine. Par la suite, les étudiants reconstruisent leur conception des différents concepts pour les faire passer de *processus* à *objets*. Cette habileté serait indispensable pour une compréhension profonde des mathématiques (Sfard, 1991). Finalement, les étudiants sont amenés à affronter les conflits véhiculés par leurs anciennes croyances. Il ne s'agit plus de convaincre, mais de prouver logiquement en se basant sur les définitions (Tall, 1992).

Cette transition des mathématiques élémentaires aux mathématiques avancées est, de plus, influencée par trois aspects changeants de l'enseignement des mathématiques: l'utilisation croissante de l'*abstraction*, l'éloignement de la « *formule* » et l'introduction de la *démonstration* dans toute sa complexité. Examinons de plus près ces trois aspects.

Selon Goodson-Epsy (1998), l'abstraction est un mécanisme important qui explique la manière dont les étudiants construisent leur connaissance conceptuelle. Piaget (voir : Gray, Pinto, Pitta et Tall, 1999) définit cette abstraction sous trois formes :

- *L'abstraction empirique* fait appel aux objets du monde externe. L'étude se spécialise sur ces *objets* et les connaissances dérivent des propriétés de ces objets.

- *L'abstraction pseudo-empirique* se concentre sur les *actions*. Les propriétés des actions des sujets sont introduites aux objets.

- *L'abstraction réflexive* utilise des *structures* existantes lors de la construction de nouvelles structures en liant objets abstraits et processus.

Gray, Pinto, Pitta et Tall (1999) soulignent, en se référant à certains auteurs (ex. Dubinsky, 1991), que l'abstraction réflexive ne peut se faire qu'à l'aide d'un processus de *réification*. Selon cette théorie, la réification est la transition nécessaire pour qu'un étudiant pense à un concept comme à un objet abstrait plutôt qu'à un processus opérationnel. Cette transition comprendrait trois étapes de formation de concept :

1) *L'intériorisation* est la première étape, l'étudiant effectue des opérations sur des objets de niveau mathématique élémentaire. L'étudiant se familiarise avec le processus en question jusqu'à un point où il n'a plus besoin de penser au processus pour appliquer les opérations.

2) La deuxième étape, *la condensation*, voit la transformation d'un processus compliqué sous une forme facile à utiliser et à penser. Tant et aussi longtemps que le nouveau concept n'est relié qu'à un processus algorithmique, l'étudiant ne pourra passer à l'étape suivante. C'est à ce moment que l'étudiant développe des habiletés d'alterner entre les différents registres sémiotiques d'un concept.

3) La dernière étape, *la réification*, est atteinte lorsque l'étudiant peut concevoir le concept mathématique comme un objet complet et « détachable » (Skemp, 1971) avec des caractéristiques qui lui sont propres

Les mathématiques avancées se situent donc dans un nouveau contexte : les étudiants doivent parvenir, à partir des propriétés et des axiomes, à une construction mentale des concepts tels que les nombres réels, les limites de fonctions. Cette construction ne peut se faire par la répétition et la pratique; il convient plutôt d'arriver à développer une pensée mathématique qui fasse appel à l'imaginatif, au conjectural en utilisant des axiomes et des définitions créés par les autres. Il ne suffit pas d'appliquer une « *formule* » pour résoudre le problème et ainsi prétendre comprendre le concept en question. L'étudiant doit être capable de saisir un concept selon ses différents registres de représentations et d'en expliquer le sens.[3]

L'utilisation des axiomes demande une pensée déductive. Ceci renvoie à la place importante que détient la démonstration dans les mathématiques avancées. Hanna (2000) précise que les preuves sont omniprésentes dans les mathématiques et qu'elles méritent une place prédominante dans le curriculum des mathématiques. Mary (1999) dresse une liste de cinq fonctions pour les preuves : statuer et systématiser, expliquer et éclairer, convaincre, produire des connaissances et communiquer. L'habileté à réaliser des démonstrations devient donc un enjeu de l'apprentissage à ce niveau. Weber (2001) soutient que cette habileté correspond au premier objectif à atteindre dans les cours de mathématiques avancées. Plusieurs recherches montrent que les étudiants rencontrent de nombreuses difficultés lors de la construction de preuves (Weber, 2001; Dreyfus, 1999; Recio et Godino, 2001). En effet, Recio et Godino (2001) précisent que les étudiants ont des habiletés limitées à produire des preuves mathématiques, même pour des propositions élémentaires. Weber (2001) et Dreyfus (1999) soulignent que les étudiants ont de la difficulté lors de la construction

[3] On constate que cette vision des mathématiques avancées teinte de plus en plus les pratiques d'enseignement prônées pour l'apprentissage des mathématiques élémentaires.

de démonstrations car, bien souvent, ils n'ont aucune conception précise de ce qui constitue une preuve mathématique. Il est donc important à ce stade de distinguer les différents niveaux de preuve. Rouche (1989 voir : Mary 1999) mentionne qu'il existe au moins trois niveaux de preuve :

- *L'induction* qui amène à conclure par observation,
- *La pensée discursive* où une suite d'opérations intermédiaires mène à la conclusion,
- *L'hypothético-déductif* où les objets sont construits, où l'hypothèse est distinguée de la conclusion et où les opérations permises sont bien définies.

À bien des égards, le passage à ce troisième niveau constitue un des enjeux importants de l'enseignement des mathématiques au niveau collégial.

Cependant, Hanna (2000) note que plusieurs professeurs accordent plus d'importance à développer des habiletés pour la résolution de problèmes plutôt que des habiletés à rédiger des preuves mathématiques.

1.2 La technologie dans l'enseignement des mathématiques

Pour faciliter ce passage à l'analyse mathématique, l'utilisation d'outils technologiques est mise de l'avant. Hitt et Santos (2002, p. 1) mentionnent que « *les réformes faites du curriculum reconnaissent que l'utilisation de la technologie*[4] *joue un rôle important dans l'apprentissage des mathématiques.* »

L'informatique est désormais implantée dans l'environnement et le travail mathématique de l'étudiant. Ce phénomène se reflète de plus en plus dans les classes

[4] Nous utilisons le terme technologie comme un terme générique qui inclut plusieurs outils de calcul (symbolique, graphique et numérique) : logiciels et calculatrices.

de mathématiques. En effet, au niveau secondaire, l'usage des calculatrices à affichage graphique est devenu répandu dans l'enseignement. Du côté collégial, un nouvel objectif figure au programme de certains collèges: développer chez l'étudiant la capacité à utiliser l'outil informatique[5]. Les logiciels tels que Maple, Mathematica, DERIVE et les calculatrices graphiques (TI-89 et TI-92) s'introduisent donc dans le contenu des cours de calcul différentiel et intégral où la disponibilité des fonctionnalités de calcul symbolique est maintenant prise en compte.

L'utilisation croissante de ces outils impose donc une réflexion sur leur influence dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ces outils d'une grande puissance permettent d'atteindre un haut niveau de complexité dans les problèmes abordés. Ils ouvrent la porte à la visualisation des concepts mathématiques étudiés. Cette possibilité facilite un accès conjoint aux différentes représentations sémiotiques (numérique, graphique et symbolique), et cela est vu par plusieurs comme une façon d'aider les étudiants à saisir le sens des concepts.

La technologie ouvre aussi une porte sur l'exploration et l'expérimentation multiple. L'enseignement des mathématiques entre donc dans une révolution où une place nouvelle est faite à l'apprentissage « *expérimental* » des mathématiques (Pérez Fernàndez, 1998, voir : Lagrange, 2000). Toutefois, Lagrange (2000) soutient que ces « *mathématiques expérimentales* » sont problématiques du côté de l'enseignement. Deux caractéristiques de cette pratique peuvent s'ériger en obstacles :

- *L'immédiateté des gestes* élimine le délai entre l'action et la visualisation de son résultat.

[5] Plan de formation du Collège Montmorency (mars 2001).

- *La double référence* crée un décalage entre les significations mathématiques et les significations plus spécifiques des contraintes d'un système informatique.

Compte tenu de ces obstacles, cette approche expérimentale est-elle adéquate pour un enseignement des mathématiques avancées? Y a-t-il vraiment, comme le prétendent plusieurs, substitution d'un travail technique par un travail conceptuel plus apte à favoriser la compréhension? À cette question, Lagrange (2000, p.14) répond :

> *« Les habiletés manipulatoires tendent à prendre moins de place dans les apprentissages que dans un enseignement sans ordinateurs mais que, pour autant, la technologie ne permet pas un enseignement directement conceptuel. Le chemin des élèves vers la compréhension reste long et hasardeux. Comme en papier/crayon, il leur faut, à partir de tâches soigneusement organisées par le professeur, élaborer les techniques de résolution comme bases sur lesquelles peuvent se développer des compréhensions suffisamment riches des concepts. L'opposition entre les concepts et les habiletés manipulatoires masque donc un point essentiel. Il existe une dimension technique dans l'activité mathématique des élèves qui ne se réduit pas aux habiletés. Quand la technologie est utilisée, cette dimension est différente, mais elle garde son importance dans l'accès des élèves à la compréhension. »*

Vinner (1989, p.1) soutient que « *l'habileté à visualiser peut ne pas être une condition tant cruciale pour le succès dans les mathématiques supérieures* ». Caron (2001) précise que l'acceptation des calculs faits par les ordinateurs hausse la barre des compétences mathématiques minimales pour porter un regard critique sur les résultats produits. Ainsi, il est raisonnable de croire qu'un recours à l'analyse mathématique et à la preuve demeure nécessaire pour comprendre certaines des notions mathématiques enseignées à ce niveau.

Plusieurs notions du cours de calcul différentiel telles que les limites, les fonctions continues et discontinues, l'infini, les formes indéterminées nécessitent ce travail d'analyse mathématique, car l'outil technologique ne permet qu'une représentation partielle et souvent assez peu fidèle de ces notions.

1.3 Les formes indéterminées

« Une forme indéterminée est toute expression de la forme 0/0, ∞/∞, ∞-∞, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 ou 1^∞ qui intervient formellement dans le calcul des limites.» (Caussidy, 1996 voir : Maurice, 2000, p. 19) Elle constitue donc une des notions qui se prêtent difficilement à un enseignement expérimental, car il est particulièrement difficile de représenter avec fidélité l'infiniment grand et l'infiniment petit qui interviennent dans le calcul des limites: phénomènes de troncature, représentations par pixel, etc. Par conséquent, les professeurs doivent-ils se restreindre à un enseignement plus traditionnel où l'approche algébrique prédomine? Zimmermann (voir : Hitt, 2000) soutient que le rôle de la pensée visuelle est fondamental dans la compréhension du calcul différentiel et intégral et qu'il est difficile d'imaginer un cours de calcul sans mettre l'emphase sur la visualisation des concepts. La visualisation serait donc un atout essentiel lors de la compréhension des concepts mathématiques. L'enseignement des formes indéterminées apparaît donc particulièrement délicat : la visualisation y serait essentielle mais elle devrait obligatoirement être confrontée à l'analyse.

L'enseignement et l'apprentissage des formes indéterminées sont également problématiques car les formes indéterminées représentent une notion qui requiert la compréhension de plusieurs notions mathématiques (limite, infini, indétermination) associées à des obstacles épistémologiques connus.

Maurice (2000) examine l'enseignement de ces notions selon différents manuels scolaires[6]. Quelques faits ressortent de son étude :

- Depuis les années 1980, la majorité des manuels ont adopté une approche graphique pour travailler la notion de limite d'une fonction. Cette approche se heurte à un obstacle lorsque les limites enseignées font appel aux concepts

[6] Charron et Parent (1989); Ouellet (1988); Beaudoin et Laforest (1994); Laliberté (1994) et Anton (1994)

d'infini et d'indétermination. En effet, Maurice (2000, p.9 et p.12) précise que « *la présence d'un décalage entre le concept d'infini et la façon de calculer les limites rend l'enseignement de cette notion obscur* » et que « *les explications fournies sur les formes indéterminées dans le calcul de limite sont souvent très brèves sinon absentes.* »

- De plus, le traitement dans ces manuels des notions d'infini et d'indétermination ne ferait que compliquer davantage l'apprentissage de la limite. Le formalisme qui pourrait aider à surmonter cet obstacle n'apparaît qu'au troisième cours de calcul (NYC).

Le traitement des notions d'infini et de limite dans les manuels scolaires mérite donc une attention particulière. Pour mieux saisir l'impact des manuels sur les conceptions des étudiants sur les formes indéterminées, les questions suivantes doivent être examinées. Les dispositifs actuels d'enseignement des formes indéterminées prennent-ils en compte les difficultés des étudiants envers les concepts d'infini et de limite pour leur permettre de les dépasser? Les conceptions des étudiants sont-elles modifiées lors de l'apprentissage des formes indéterminées?

Avant de répondre à ces questions, il convient de procéder à une analyse des conceptions des étudiants et des dispositifs d'enseignement qui entrent en jeu lors de l'enseignement et l'apprentissage des formes indéterminées. Cette analyse permettra de préciser l'objet, les questions et les objectifs de recherche.

2 CADRE THÉORIQUE

Pour s'assurer que les étudiants atteignent un certain niveau de compréhension des formes indéterminées, plusieurs aspects doivent être considérés lors de leur enseignement. En effet, une analyse des conceptions des étudiants sur des notions mathématiques fondamentales en jeu peut permettre de mieux cibler les difficultés rencontrées par les étudiants lors de leur apprentissage. Également, une étude des dispositifs d'enseignement semble importante pour saisir leur impact lors de cet apprentissage.

2.1 Analyse conceptuelle des formes indéterminées

Rappelons que les formes indéterminées requièrent la connaissance de plusieurs notions qui représentent les fondements du développement de l'analyse mathématique. Comme il est mentionné en 1.3, il existe sept formes indéterminées impliquant 0, 1 et ∞: [7] « $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞-∞, 0^0, ∞^0 et 1^∞ ». Cette notion fait appel aux notions d'infini, de division par zéro, de fonctions et continuité et de limite. Il est raisonnable de croire que les conceptions des étudiants sur ces notions ont une certaine répercussion sur l'apprentissage de nouveaux concepts qui leur sont connexes.

2.1.1 L'infini

Comme le témoigne son évolution historique, l'infini en mathématiques est sans aucun doute l'une des notions les plus abstraites et complexes de ce domaine. Il n'est donc pas étonnant de voir chez les étudiants de nombreuses conceptions naïves ou erronées sur cette notion.

[7] WEINSSTEIN, E. *Eric Weisstein's world of Mathematic, a wolfram web resource.* http://mathworld.wolfram.com/Indeterminate.html (page consultée le 16 juillet 2003)

Un peu d'histoire…

C'est à partir des nombres naturels que la notion d'infini s'est imposée dans l'Antiquité. En se situant dans l'ensemble des naturels, les penseurs commencèrent à envisager l'infini comme le plus grand nombre donné puisqu'il suffisait d'ajouter l'unité au plus grand naturel pour avoir un nombre encore plus grand qui fasse lui aussi partie de cet ensemble. Au VI^{e} siècle avant J.C, Pythagore démontre que les nombres rationnels ne suffisent plus pour mesurer n'importe quel segment géométrique. Les pythagoriciens établissent que la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté est de longueur 1 n'est pas un nombre exprimable comme un rapport de deux entiers. Cette nouvelle découverte a beaucoup de répercussions dans les différentes écoles de pensée de la philosophie grecque. Il faut remarquer que deux conceptions étaient présentes dans ces écoles : la première, *continuiste*, concevait le nombre, l'espace, le temps et la matière comme divisibles à l'infini et, la seconde, dite *atomiste*, supposait l'existence d'éléments premiers indivisibles et homogènes. À cette époque, Zénon d'Élée, né vers 495-480 avant J.-C., proposa des paradoxes de l'infini, dont le plus célèbre est « Achille et la tortue »[8], pour mettre en doute l'interprétation que les penseurs de l'époque avaient sur l'infini. C'est avec Aristote que les paradoxes de Zénon se font connaître. Il les décrit dans sa *Physique* pour les étudier de plus près. Aristote expose, à ce moment-là, une distinction fondamentale entre *l'infini potentiel* et *infini actuel*. Pour lui, aucun objet réel ne peut être effectivement infini; un objet réel ne peut être infini que de façon potentielle. Archimède, en 212 avant J.-C., voit *l'infini en acte* et non *en puissance*; partant du principe que la totalité des grains de sable sur la Terre est inépuisable, il estime que la

---

[8] Paradoxe d'Achille et la tortue :
Achille voit une tortue loin devant lui. Il se met à courir pour la rattraper, mais malgré sa grande vélocité, il ne pourra y arriver car lorsque Achille atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé; il doit donc atteindre maintenant la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite : Achille ne rattrapera donc jamais la tortue.
MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Zenon.html (page consultée le 16 juillet 2003)

suite des nombres entiers peut être prolongée à l'infini de manière actuelle. Néanmoins, il évite de parler de l'infini dans ses travaux.

Archimède a peu de disciples dans le monde grec et de nombreux philosophes tels que Thabit Ben Q'ra (836-901) et Hasdai Crescas (1340-1412) vont s'opposer aux positions d'Aristote. Ce n'est que plus tard, au début du XIII^{e} siècle, que Robert Grosseteste (1168-1253) clarifie les résultats des travaux de Thabit Ben Q'ra en affirmant qu'il y a des infinis plus grands que d'autres et des infinis plus petits que d'autres. À ce moment-là, il est impossible de déterminer qui a raison sur l'infini. Plus tard, Galilée (1564-1642) mettra en doute certains axiomes d'Euclide.[9] Il va toutefois falloir attendre Bolzano (1781-1848) avec son livre *Les paradoxes de l'infini*, publié après sa mort en 1851, pour en savoir davantage sur les fameux paradoxes de Galilée.

Le XVII^{e} siècle connaît de nombreux progrès en mathématiques tels que la possibilité de découper des grandeurs en des grandeurs de plus en plus petites et de les additionner. Ce progrès va permettre de calculer des aires et des volumes (arrivée du calcul intégral). Le calcul intégral va se développer surtout avec les travaux de Pierre de Fermat (1601-1655), de Blaise Pascal (1623-1662) et de John Wallis (1616-1703). Parallèlement, les bases du calcul infinitésimal, c'est-à-dire le calcul portant sur l'infiniment petit vont être posées par Isaac Newton (1642-1727) et G.W. Leibniz (1646-1716). Il faut remarquer que si l'infiniment petit commence à être apprivoisé par les mathématiciens de l'époque, tout n'est pas réglé. Par exemple, Leibniz est très attaché à l'idée d'*infini actuel* sur le plan métaphysique mais il reste perplexe sur le plan mathématique. Il n'est pas convaincu que le tout peut être aussi grand que la partie. D'ailleurs, il n'est pas le seul, tous les mathématiciens se butent à cette question et pour éviter d'y faire face, ils se restreignent à une approche géométrique

---

[9] Axiomes d'Euclide:
- Le tout est plus grand que la partie.
- Il y a « autant » de points dans un petit et un grand segment.
- Il y a « autant » d'entiers naturels que de carrés de ces entiers.

de l'infini. Il faudra attendre les mathématiciens du XIX^{e} siècle tels que Bolzano, Cauchy, Weierstrass, Dedekind, Cantor, Heine...pour que se précisent les notions d'infini et d'infiniment petit. Pour résoudre le problème de taille de l'infini, Georg Cantor (1845-1918) propose de comparer deux ensembles infinis en appariant les membres de la collection. Si tous les membres de chacun des ensembles trouvent un homologue, alors les deux « infinis » sont égaux. Cantor va baptiser le premier infini : *aleph 0* ($\aleph_0$), c'est-à-dire l'infini des nombres naturels. Ensuite, il utilise à nouveau la méthode des associations pour montrer que le cardinal de l'ensemble des nombres réels est infiniment plus grand que $\aleph_0$. Grâce à un symbolisme approprié, Cantor met en place une arithmétique de l'infini. Cette arithmétique se situe au-dessus des nombres finis et concerne uniquement le nombre infini. Cette théorie fait appel à un infini donné comme un tout, traité dans sa totalité. De nos jours, l'infini actuel est encore interprété selon cette théorie.

Conceptions des étudiants sur l'infini

Au fil de l'histoire, le développement conceptuel de l'infini a créé de nombreux conflits, interprétations et réfutations chez les mathématiciens de l'époque. Aujourd'hui encore, ce conflit est vécu au niveau individuel lors de l'apprentissage de la notion d'infini. En effet, Fischbein (1978, voir : Tall et Tirosh, 2001) affirme que la nature conflictuelle de la notion d'infini se reflète dans les intuitions des étudiants. Elle provient, selon Tall (2002), du fait que l'infini fait référence à deux concepts distincts : le concept « *naturel* » de l'infini, qui découle de l'extension d'expériences finies à des cas infinis, et le concept « *formel* » de l'infini, qui se construit à partir d'approches axiomatiques. De plus, plusieurs études (Maurice (2000), Fischbein (2001) et Tall (1992)) soulignent la difficulté de reconnaître l'existence de deux infinis : *infini potentiel* et *infini actuel*. Bouvier et George (1979, voir : Maurice 2000) définissent ces deux infinis de la façon suivante : « *l'infini potentiel évoque une possibilité de dépassement* » tandis que « *l'infini actuel est une prise de conscience de tous les éléments à la fois d'un ensemble infini* ». Rappelons que Sfard (1991) mentionne que les notions abstraites (par exemple : l'infini) peuvent être considérées soit comme des *processus (infini potentiel)* ou des *objets (infini actuel)*. Ces deux perspectives complémentaires doivent pouvoir s'intégrer pour arriver à une compréhension profonde des mathématiques. Cette distinction faite entre l'infini potentiel et l'infini actuel est donc le germe de nombreux conflits cognitifs dans l'apprentissage de l'infini. En effet, Monaghan (1986, 2001) établit un questionnaire qui a permis d'identifier les conceptions des étudiants sur la notion d'infini. L'étude montre que les étudiants voient principalement l'infini comme un processus sans fin. Certains des étudiants considèrent l'infini comme objet, en l'associant souvent à un très grand nombre. L'analyse du questionnaire permet de conclure que les conceptions des étudiants sur l'infini sont contradictoires et que les premiers cours de calcul ont un effet négligeable sur leurs conceptions. Ces cours de calcul ne font pas appel de façon formelle à l'infini. Toutefois, quelques expériences peuvent permettre le développement de cette notion, mais elles semblent néanmoins avoir peu d'effets sur les conceptions des étudiants.

Fischbein (2001) souligne que c'est l'infini actuel qui est difficilement saisissable par notre intelligence. Dans son étude empirique de 1978, il identifie des conflits paradoxaux possibles en rapport avec la cardinalité de l'infini (infini actuel) selon que les réponses des étudiants correspondaient à l'infini potentiel ou actuel :

1) Nos structures cognitives sont construites selon les expériences de la vie courante, alors des propositions telles que « *le tout peut être équivalent à ses parties* » contredisent notre représentation de la réalité.

2) Notre interprétation intuitive de l'infini est purement potentielle et cette interprétation amène naturellement à la conclusion que tous les ensembles infinis ont le même nombre (infini) d'éléments.

Par conséquent, il anticipe que les réponses des étudiants sur des questions variées concernant la comparaison de quantités infinies peuvent être classées en deux catégories de pensée:

1) Réponses avec une pensée infinie (par exemple, tous les ensembles infinis sont égaux)

2) Réponses avec une pensée finie (par exemple, une partie d'un ensemble ne peut pas avoir le même cardinal que l'ensemble en question)

Il conclut son étude en affirmant que les conceptions des étudiants sont contradictoires entre elles. Pour préciser davantage le conflit engendré par l'infini actuel, l'étude de Tsamir (2001) s'oriente vers les conceptions des étudiants envers la cardinalité d'ensembles infinis. Les étudiants sont amenés à comparer des ensembles infinis. La recherche montre que la décision des étudiants à savoir si deux ensembles infinis ont le même cardinal dépend des représentations données des deux ensembles infinis en question.

2.1.2 La division par zéro

L'interprétation d'une division par zéro diffère selon qu'elle est considérée dans une expression mathématique ou dans un processus de limite. Dans une expression mathématique finie, il est impossible de diviser par zéro, mais lors d'un calcul de limite, la division par zéro peut représenter un cas d'indétermination (0/0) qu'il peut être possible de lever ou une situation de non-indétermination (k/0) menant à l'infini. La confusion entre ces deux fonctions semble amener de nombreuses conceptions erronées chez les étudiants.

Un peu d'histoire…

Le zéro, tel que connu aujourd'hui, possède principalement deux utilisations extrêmement importantes qui ont émergé à des moments différents:

- Le zéro comme indicateur de position dans le système numérique.

- Le zéro comme nombre.

Le zéro a fait sa première apparition comme indicateur de position dans les mathématiques babyloniennes. Le zéro est alors représenté comme deux apostrophes et remplace un espace vide. Toutefois, cette découverte n'influence pas la pensée des Grecs. Laissant de côté l'étude des nombres pour la géométrie, les Grecs n'adoptent pas le système proposé par leurs prédécesseurs. C'est néanmoins, avec les astronomes grecs que le symbole « O » est adopté pour représenter le zéro. Vers l'an 650, les Indiens utilisent un système de position des valeurs; le zéro est alors utilisé pour représenter la place vide. Il est considéré comme un nombre positionnel, mais ne possède pas encore de symbole. Le premier manuscrit qui utilise le zéro comme indicateur de position daterait de 876.

La première apparition du zéro comme nombre est arrivée beaucoup plus tard. Au tout début de leur histoire, les nombres représentaient des mots qui faisaient référence à des collections d'objets, le zéro et les négatifs ne pouvaient donc pas se conformer à cette idée. Le nombre est devenu de plus en plus abstrait et a ainsi permis une intégration du zéro et des négatifs. Les mathématiciens se butaient toutefois aux opérations arithmétiques connues : l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Trois importants mathématiciens indiens ont essayé de répondre à ces questions : Brahmagupta, Mahavira et Bhaskara.

Au VII^{e} siècle, Brahmagupta essaie de créer des règles d'arithmétiques pour le zéro et les nombres négatifs. C'est la division par zéro qui lui cause quelques problèmes et il en parle très peu dans ses écrits. Par la suite, Mahariva mettra à jour le livre de

Brahmagupta. Lui aussi connaît des difficultés par rapport à la division par zéro. Il écrit qu'un nombre demeure inchangé en le divisant par zéro. Cinq cents ans plus tard, Bhaskara essaie de résoudre le problème de la division par zéro en affirmant que « $n/0 = \infty$ ».

Conceptions des étudiants sur la division par zéro

Si certains mathématiciens se sont refusés à accepter l'impossibilité de la division par zéro, cet entêtement à trouver une réponse à la division par zéro est toujours présent chez les étudiants. Les études de Ball (1990, voir : Maurice, 2000) et de Watson (1991, voir : Maurice 2000) montrent que les réponses concernant les questions sur la division par zéro peuvent être classées selon les catégories suivantes : le zéro, le dividende, l'indétermination, l'infini ou l'impossibilité.

Lajoie et Mura (1995) présentent les explications fournies par des étudiantes et des étudiants en enseignement préscolaire et primaire au sujet de l'impossibilité de la division par zéro. Au lieu de mettre à profit le lien entre la division et la multiplication, les explications sont basées sur les modèles de division de « partage »[10] et de « mesure »[11] et mènent vers des conclusions erronées. Les auteures précisent que les difficultés reliées à la division par zéro sont principalement dues à un attachement à des représentations concrètes lors de l'apprentissage de concepts mathématiques et à l'absence de modèle physique associé à ce type de division.

2.1.3 La notion de fonction et de continuité

Concept mathématique fondamental, la fonction occupe une place primordiale dans les cours de calcul différentiel et intégral. On la retrouve au cœur de plusieurs autres

---

[10] *« La division de partage consiste à partager un ensemble (ou une grandeur) en un nombre donné de parties égales, le quotient étant la cardinalité (ou la mesure) de chacune des parties. »* (Lajoie et Mura, 1995, p. 12)

[11] *« La division de mesure consiste à partager un ensemble 9ou une grandeur) en parties égales, mais cette fois-ci la cardinalité (ou la mesure) des parties est donnée et le quotient est le nombre de parties. »* (Ibid., p. 12)

concepts tels que la continuité, la limite. L'histoire nous renseigne sur la façon dont ces concepts se sont élaborés.

Un peu d'histoire...

C'est avec Viète (1540-1603) et Descartes (1596-1650) que les fonctions algébriques[12] sous forme de formule font leur apparition. Deux idées principales ressortent de leur définition : « *variation* » et « *dépendance* ». Il va falloir attendre cent ans pour voir la naissance des fonctions analytiques[13]. À cette époque, les idées sur le calcul différentiel et intégral deviennent de plus en plus claires avec la notation de Leibniz. En 1692, il adopte le terme « fonction » qui signifie en latin *functio = accomplissement, exécution*. Les mathématiciens de l'époque, Bernouilli (1667-1748) et Euler (1707-1783) représentent la notion de fonction comme une variation, une grandeur variable, une variation de grandeurs ou une quantité variable (Youschkevitch,1976, voir : Maurice, 2000). Une première notation : f_x est utilisée par Euler pour désigner l'image par une fonction f d'un nombre x. C'est à la fin du XVIII[e] siècle que Lagrange commence à rédiger sa rigoureuse théorie sur les fonctions. Ses principaux traités mathématiques résident dans sa *Théorie des fonctions analytiques* (1797). À partir de ces travaux, Cauchy entame un travail sur l'analyse et commence à étudier la théorie des fonctions sur les nombres complexes. C'est avec les mathématiciens Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), Lobatchevsky (1793-1856) et Dirichlet (1805-1859) que la conception de fonction change : « *une fonction univoque y, d'une variable indépendante x, est considérée comme une correspondance arbitraire* » (Dahan-Dalmedico et Pfeiffer, 1986, voir : Maurice, 2000). Les idées de « *variation* » et de « *dépendance* » sont toujours présentes mais un nouvel aspect y figure : l'idée de « *correspondance* ». Aujourd'hui encore, le concept de fonction est défini formellement comme un cas particulier de relation de correspondance entre deux ensembles.

---

[12] Fonctions ayant un nombre fini de termes.

[13] « *Fonctions conçues comme des séries infinies de puissance* » (Maurice, 2000, p. 39)

La notion de fonction a ouvert la porte à de nombreux concepts connexes, entre autres à la continuité. C'est avec Leibniz que le concept de continuité fait son apparition. Il énonce « le principe de la loi de la continuité » :

> *« [...] rien ne se fait par saut dans la nature et [...] un être ne passe point d'un état à un autre, sans passer par tous les différents états qu'on peut concevoir entre eux.*[14] »

D'un point de vue graphique, Euler considère qu'une fonction définie par parties, écrite avec plus d'une équation, est une fonction discontinue (El Bouazzaoui, 1986, voir : Maurice, 2000). En 1821, Cauchy publia son *Cours d'analyse* où l'analyse fonctionnelle est rénovée en reformulant plusieurs concepts tels que la limite, les fonctions et la continuité. Il définit la continuité d'un intervalle de la façon suivante :

> *« (h désignant une quantité infiniment petite) : Lorsque, la fonction f(x) admettant une valeur unique et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites données, la différence f(x + h) - f(x) est toujours entre ces limites une quantité infiniment petite, on dit que f(x) est une fonction continue de la variable x entre les limites dont il s'agit. »*[15]

Cauchy utilisait implicitement que, hormis en quelques points singuliers, toute fonction continue admet une dérivée. Bolzano et Weierstrass donneront un exemple de fonction continue en tout point d'un intervalle et n'étant pourtant dérivable en aucun point.

De plus, c'est à Weierstrass que l'on doit la définition formelle de la limite d'une fonction et de la continuité d'une fonction:

---

[14] Ce principe provient de l'axiome de la raison suffisante: « *Ainsi aucun être ne passe d'un état à un autre, sans passer par les états intermédiaires : de même que l'on ne vas pas d'une ville à une autre, sans parcourir le chemin qui est entre eux.* » (d'Alembert, voir : El Bouazzaoui, 1986, dans Maurice, 2000, p. 41)

[15] MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Cauchy.html
(page consultée le 16 juillet 2003)

> « *Une fonction numérique f admet la limite L au point x_o, si quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel h tel que pour tout x vérifiant $0 < |x - x_o| < h$, l'on ait $|f(x) - L| < \varepsilon$. Si f est définie au point x_o, f est dite continue en x_o si sa limite en x_o est $f(x_o)$.* » [16]

C'est à partir de cette définition que le concept de continuité est étudié de nos jours dans les cours de calcul différentiel et intégral.

Conceptions des étudiants sur les fonctions et la continuité

Au fil de son histoire, le concept de fonction s'est vu attribuer diverses définitions où des idées de « *variation* », de « *dépendance* » et de « *correspondance* » ressortent. Vinner et Dreyfus (1989, voir : Maurice, 2000) et Tall (1992) montrent que ces idées font toujours partie du vocabulaire des étudiants et des professeurs. Ils font ressortir quelques conceptions de la notion de fonction :

- À chaque x *correspond* un seul y.
- Une règle de *correspondance* entre x et y.
- Une relation de *dépendance* entre deux variables.
- Une manipulation algébrique sur un nombre pour en obtenir un autre.
- Une formule, une équation.
- Un graphique, y = f(x).

Il semble raisonnable de croire que les conceptions des étudiants sur ce concept sont influencées principalement par le type de représentation utilisé et le choix de

---

[16] MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Weierstrass.html
(page consultée le 16 juillet 2003)

l'enseignement. Premièrement, Ervynck (1981) mentionne que la fonction peut être située à deux niveaux :

1) L'étudiant identifie une fonction à une courbe ou un graphe (représentation graphique).

2) Il l'identifie à une formule (représentation symbolique).

Parallèlement, Barnes (1988, voir : Tall, 1992) montre que les étudiants changent leur conception d'une fonction selon la représentation. En effet, lors de l'étude d'une fonction constante, par exemple $y = 4$, les étudiants affirment que cette fonction est continue lorsqu'elle est représentée sous forme algébrique, mais qu'une droite horizontale ne peut désigner une fonction. L'aspect conflictuel de leur réponse démontre bien que les conceptions erronées des étudiants proviennent principalement de leur difficulté à coordonner les diverses représentations de la fonction (Tall, 1992).

Deuxièmement, plusieurs études (Markovits, Eylon et Bruckheimer,1986, voir : Maurice, 2000 et Tall (1992)) montrent que les conceptions des étudiants sur la notion de fonction découlent du choix de l'enseignement. En effet, Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986, voir Maurice : 2000) signalent qu'une utilisation excessive des fonctions linéaires lors de l'enseignement des fonctions limite la pensée des étudiants à croire que les fonctions sont systématiquement linéaires. De son côté, Tall (1992) montre qu'un enseignement de la notion reliée à une formule amène les étudiants à croire que la formule est essentielle à la fonction.

Le choix de l'enseignement a également beaucoup de répercussions lors de l'apprentissage de la notion de continuité (Hitt et Planchart, 1998).

Les études de Hitt et Lara-Chavez (1999), de Tall et Vinner (1981, voir Maurice, 2000) et Hitt et Planchart (1998) font valoir les différentes raisons, selon les étudiants, pour qu'une fonction soit continue ou discontinue :

- Raisons pour lesquelles une fonction est continue :
    - La fonction est continue parce qu'elle est donnée par une seule formule.
    - Le graphe n'a pas de « trous » ou de « manque ».
    - Le graphe est donné en un seul morceau.
- Raisons pour lesquelles une fonction est discontinue :
    - Le graphe n'est pas donné en un seul morceau.
    - La fonction n'est pas définie.
    - La fonction est infinie.
    - La fonction n'est pas donnée par une seule formule.
    - La fonction a un saut.

2.1.4 La notion de la limite

S'il est vrai que le concept de fonction a une place primordiale dans les cours de mathématiques, le passage aux mathématiques avancées se fait avec l'apprentissage de la notion de limite (Tall, 1992).

Un peu d'histoire...

Tout comme pour l'infini, c'est chez les Anciens que la notion de la limite fait son apparition avec les paradoxes de Zénon. Toutefois, les mathématiciens de l'époque ne pouvaient accepter qu'un processus sans fin admette une limite. Pour éviter ce passage à la limite, dont l'introduction de l'infiniment petit et l'infiniment grand posait beaucoup de problèmes chez les anciens grecs, Zénon définit le principe de dichotomie. Il fournit un exemple de ce principe :

> *« Si on intercale des couples "espace-temps" supplémentaires, le problème est alors récurrent : l'espace doit être divisé à l'infini et la flèche devra d'abord parcourir la moitié de la distance qui la sépare de sa cible, puis la moitié de la distance restante et ainsi de suite indéfiniment car la moitié d'une distance non nulle ne sera jamais nulle. Ainsi, dans les deux hypothèses, la flèche n'atteindra pas la cible : le mouvement est impossible ! »*[17]

Ce principe a constitué un obstacle historique au développement du concept de limite car il évitait de parler de l'infini actuel (Maurice, 2000).

Les paradoxes de Zénon ont également amené les mathématiciens à se questionner sur la possibilité d'atteindre ou non la limite. Les Anciens refusaient d'accepter la convergence d'une suite infinie. De même, Newton, Leibniz et Robins au XVII[e] siècle et d'Alembert au XVIII[e] siècle pensaient que la limite n'était pas atteinte. Au contraire, certains mathématiciens comme Jurin au XVII[e] siècle affirmaient qu'elle était atteinte. Il va falloir attendre le développement de l'infiniment petit et l'infiniment grand pour arriver à une première formalisation du concept de limite qui intégrera les limites qu'on atteint et celles que l'on n'atteint pas. Cauchy en 1821 publia, dans son *Cours d'analyse*, une définition de la limite :

---

[17] MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Zenon.html
(page consultée le 16 juillet 2003)

> « *Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.* »[18]

C'est Weierstrass (1815-1897) qui fournit la première définition de la limite avec les ε :

> « *La fonction f(x) a une limite L pour x = a si, pour tout nombre positif* ε*, il existe un* δ *positif tel que* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *pour tout x pour lequel* $0<|x-a|<\delta$*.* »[19]

Aujourd'hui encore, cette définition est enseignée à partir du troisième cours de calcul de niveau collégial.

Conceptions des étudiants sur la limite d'une fonction

Au fil de l'histoire, les mathématiciens ont rencontré quelques obstacles épistémologiques à l'endroit de la notion de limite. On verra que certaines de ces difficultés sont encore présentes chez les étudiants lors de l'apprentissage du concept de limite. Dans son étude, Williams (1991, voir : Manoma-Downs, 2001) identifie différentes approches des étudiants pour appréhender le concept de limite :

- *Dynamique-théorique* : Une limite décrit comment une fonction bouge lorsque x tend vers un certain point.

- *Bornée* : Une limite est un nombre ou un point où une fonction ne peut pas aller.

- *Formelle* : Une limite est un nombre où les valeurs du y d'une fonction peuvent être arbitrairement proches en restreignant les valeurs de x.

---

[18] MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques* http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Cauchy.html (page consultée le 16 juillet 2003)

[19] Boyer (1996, voir : Maurice 2000), p. 51

- *Inaccessible* : Une limite est un nombre ou un point dont une fonction se rapproche sans jamais l'atteindre.

- *Approximation* : Une limite est une approximation qui peut être aussi précise qu'on le désire.

- *Dynamique-pratique* : Une limite est déterminée en remplaçant des nombres de plus en plus proches d'un certain nombre jusqu'à ce que la limite soit atteinte.

À partir de ces approches, différents aspects des modèles de limite utilisés par les étudiants peuvent être répertoriés (Cornu, 1981; Cobb, 1986, voir : Szydlik, 2000 et Williams, 1991, voir : Mamona-Downs, 2001).

- Une limite est infranchissable, c'est une borne.

- Une limite est une borne supérieure ou une borne inférieure.

- La limite peut être atteinte.

- La limite est impossible à atteindre.

- La limite est dynamique.

2.1.5 Les formes indéterminées

Les limites peuvent parfois présenter des formes indéterminées de plusieurs types :

$\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

> « *A mathematical expression can also be said to be indeterminate if it is not definitively or precisely determined. Certain forms of limits are said to be indeterminate when merely knowing the limiting behaviour of individual parts of the expression is not sufficient to actually determine the overall limit.* »[20]

À titre d'exemple, une limite de type 0/0, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$ où $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$, est indéterminée puisque la valeur de la limite dépend du comportement de deux fonctions (par exemple, $\lim_{x\to 0} x/x = 1$, alors que $\lim_{x\to 0} x^2/x = 0$).[21] Cet exemple montre que comparativement à des « valeurs indéterminées », les « formes indéterminées » peuvent être remplacées, à la suite d'un certain travail mathématique, par des expressions qu'on pourra évaluer. Il existe plusieurs méthodes possibles pour lever une indétermination. La règle de L'Hospital permet de lever une indétermination de type 0/0 ou ∞/∞

> « *Soit f et g, deux fonctions dérivables et* $g'(x) \neq 0$ *proche de a (mais peut être pas en a). On suppose que* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ou que* $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$
>
> *(En d'autres mots, nous avons des formes indéterminées de type 0/0 ou ∞/∞). Alors*
>
> $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
>
> *si la limite du côté droit existe (ou est ∞ ou -∞).* »[22]

Cette règle possède certaines limites. À titre d'exemple, en évaluant la limite :

$\lim_{u\to\infty} \frac{u}{(u^2+1)^{1/2}}$ à l'aide de la règle de L'Hospital, l'indétermination ne peut être levée :

---

[20] WEINSSTEIN, E. *Eric Weisstein's world of Mathematic, a wolfram web resource.* http://mathworld.wolfram.com/Indeterminate.html (page consultée le 16 juillet 2003)

[21] Ibid.

[22] Traduction libre de STEWART, J. (1999) Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, p. 486

« $$\lim_{u\to\infty}\frac{u}{(u^2+1)^{1/2}} = \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u(u^2+1)^{-1/2}}$$
$$= \lim_{u\to\infty}\frac{(u^2+1)^{1/2}}{u} = \lim_{u\to\infty}\frac{u(u^2+1)^{-1/2}}{1}$$
$$= \lim_{u\to\infty}\frac{u}{(u^2+1)^{1/2}}.$$ »[23]

Malgré les quelques problèmes de limites où elle se révèle inefficace à lever l'indétermination, la règle de L'Hospital occupe une grande place dans l'enseignement des limites présentant des formes indéterminées. Il apparaît donc utile de comprendre son contexte historique d'émergence.

Un peu d'histoire…

En 1696, le Marquis Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704) publia la premier traité de calcul différentiel et intégral : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Dans ce traité, on retrouve avec clarté un travail sur l'analyse des infiniment petits de Leibniz. Également, c'est dans cette publication que L'Hospital présente la règle de L'Hospital qui permet de calculer la limite des fractions dont le numérateur et le dénominateur tendent vers zéro ou l'infini:

C'est grâce à cette règle et au traité que L'Hospital se fit connaître comme mathématicien. Néanmoins, c'est Jean Bernoulli (1667-1748) qui fut le premier à énoncer cette règle en 1694. Dans une lettre datée du 17 mars 1694, L'Hospital demanda à Bernoulli, qui était son professeur de mathématiques à l'époque, de lui faire parvenir ses découvertes. Après la mort de L'Hospital, Bernoulli publia cette lettre et fut reconnu comme le véritable « inventeur » de la règle de L'Hospital.

---

[23]WEINSSTEIN, E. *Eric Weisstein's world of Mathematic, a wolfram web resource.* http://mathworld.wolfram.com/LHospitalsRule.html (page consultée le 16 juillet 2003)

Pour pouvoir prouver la règle de L'Hospital, la connaissance de plusieurs théorèmes d'analyse fondamentaux est nécessaire. En effet, la démonstration de la règle de L'Hospital se base sur le théorème généralisé de la moyenne (théorème de Cauchy) qui, comme son nom l'indique, est une généralisation du théorème de la moyenne (théorème de Lagrange), et la démonstration de ce dernier repose sur le théorème de Rolle. La Figure 2 illustre les liens entre les différents théorèmes d'analyse et la règle de L'Hospital :

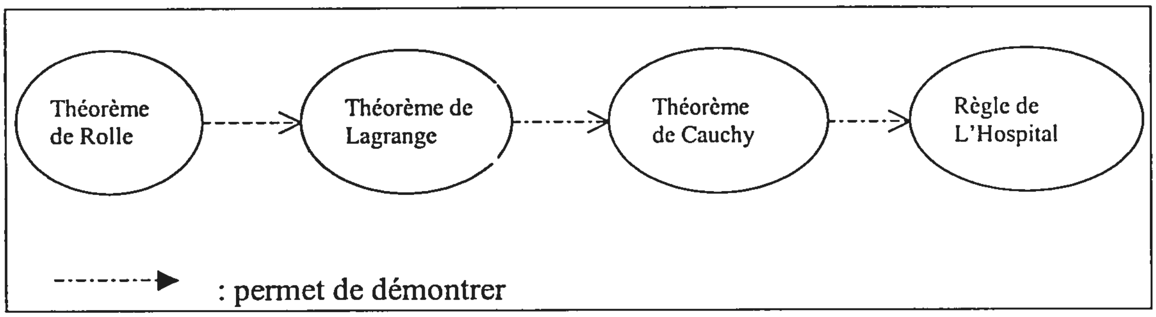


Figure 2- Relation entre les différents théorèmes d'analyse et la règle de L'Hospital

Un rappel de ces différents théorèmes apparaît donc pertinent. Tout d'abord, le théorème de Rolle a été énoncé par Michel Rolle (1652-1719) en 1691 et s'exprime ainsi :

> « *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$: il existe c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.* »[24]

En plus de ses applications en optimisation, ce théorème permet de démontrer le théorème de la moyenne :

> « *Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe alors un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ ou encore :*

[24]MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Rolle.html
(page consultée le 16 juillet 2003)

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. »[25]$$

Le théorème de Cauchy, quant à lui, est une généralisation de ce théorème :

« Si f et g sont continues sur [a, b] et dérivables sur (a, b), alors il existe alors un réel x de (a, b) tel que [f(b) - f(a)]g'(x) = [g(b) - g(a)]f'(x).

(Si $g(b) \neq g(a)$, et $g'(x) \neq 0$, cette équation peut s'écrire

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Remarquons que si g(x) = x pour tout x, alors g'(x) = 1, et on obtient le théorème de la moyenne. »[26]

Nous présentons à présent la preuve de la règle de L'Hospital afin de montrer où intervient le théorème de Cauchy :

« Nous supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Soit

$$L = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Nous devons montrer que $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. *Définissons*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ 0 & si\ x = a \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & si\ x \neq a \\ 0 & si\ x = a \end{cases}$$

Alors F est continue sur I puisque f est continue sur $\{x \in I \mid x \neq a\}$ *et*

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{s\to a} f(x) = 0 = F(a)$$

Pareillement, G est continue sur I. Soit $x \in I$ *et* $x > a$. *Alors F et G sont continues sur [a, x] et différentiables sur (a, x) et* $G' \neq 0$ *(puisque*

---

[25] MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques*
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Lagrange.html
(page consultée le 16 juillet 2003)

[26] SPIVACK, M. (1994) Calculus, Third Edition, Publish or Perish, Inc, p. 201

$F'=f'$ et $G'=g'$). Alors, par le théorème de Cauchy, il existe un nombre y tel que $a < y < x$ et

$$\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F(x)}{G(x)}$$

Par définition, $F(a)=0$ et $G(a)=0$. Si $x \to a^+$, alors $y \to a^+$ (puisque $a < y < x$), et

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim_{y\to a^+}\frac{F'(y)}{G'(y)}=\lim_{y\to a^+}\frac{f'(y)}{g'(y)}=L$$

Un argument similaire montre que la limite à gauche est égale à L. Alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

Ceci prouve la règle de L'Hospital pour le cas où a est fini.
Si a est infini, nous posons $t=1/x$. Alors $t \to 0^+$ lorsque $x \to \infty$, nous avons

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}$$
$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ »[27]

Conceptions des étudiants sur les formes indéterminées

L'analyse historique de l'émergence des formes indéterminées en montre la complexité, avec plusieurs concepts délicats qui entrent en jeu (1.3). Il est donc raisonnable de croire que les différentes conceptions des étudiants sur les concepts de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini vont à leur tour influencer leur conception des formes indéterminées. En effet, Maurice (2000) énumère les idées erronées chez les étudiants à propos du comportement des fonctions rationnelles et des formes indéterminées. Ces idées proviennent de l'analyse des productions d'étudiants à des examens et exercices lors du premier cours de calcul différentiel et intégral. Les idées numérotées 1 à 5 ressortent les « *liens que les élèves font entre le sens des formes (0/0 et b/0 où b est différent de zéro) et les différents types de*

---

[27] Traduction libre de STEWART, J. (1999) Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company, p. 492

graphiques qu'ils tracent », (Maurice, 2000, p.146). Les idées 6 à 18 reflètent les propos des étudiants sur les formes indéterminées. « *La première partie de l'énoncé de l'idée correspond à une affirmation de la nature suivante « La forme (la forme peut être ici nommée) est déterminée (ou indéterminée) ». La seconde partie de l'énoncé correspond aux justifications des élèves faisant appel à leurs conceptions des notions mathématiques fondamentales intervenant dans le calcul de limite.* » (Maurice, 2000, p.147).

- Idée 1 : Dans le contexte de l'étude de fonctions, la forme 0/0 est associée à un graphique continu au point pour lequel la fonction n'est pas définie.

- Idée 2 : Dans le contexte de l'étude de fonctions, la forme 0/0 (non réductible à une forme b/0) signifie que le graphique de la fonction a une asymptote et une discontinuité par trou, ou deux asymptotes, ou deux asymptotes et une discontinuité par trou.

- Idée 3 : Dans le contexte de l'étude de fonctions, la forme b/0 (où b est différent de 0) signifie que le graphique de la fonction a une discontinuité par trou.

- Idée 4 : Dans le contexte de l'étude de fonctions, la forme b/0 est associée à un graphique continu au point pour lequel la fonction n'est pas définie.

- Idée 5 : Dans une situation d'indétermination 0/0, l'ensemble des nombres réels (ou tous les points d'une asymptote verticale) fait (font) partie de l'image de la fonction, au point où la fonction n'est pas définie.

- Idée 6 : La forme 0/0 est une forme indéterminée, car 0/0 donne l'infini ou n'importe quel nombre.

- Idée 7 : Les formes ∞/∞, ∞-∞ et 0/∞ sont des formes indéterminées, car ces formes donnent l'infini ou contiennent l'infini.

- Idée 8 : Une forme indéterminée correspond à une situation où la limite est infinie dans le cas de b/0 où b est différent de zéro.

- Idée 9 : Une forme est indéterminée quand le résultat (de la limite) est proche d'une valeur, d'un point, ou donne une approximation ou une forme indéterminée correspond à une situation où la limite existe.

- Idée 10 : Une forme indéterminée correspond à une situation où la limite n'existe pas.

- Idée 11 : Une forme indéterminée correspond à une situation où la limite est sans résultat. L'idée suivante en résulte : ∞/∞, ∞-∞ et 0/0 sont des formes indéterminées car la limite donne un résultat.

- Idée 12 : La forme 0/∞ est une forme indéterminée car 0 est « rien ».

- Idée 13 : La forme 0/0 est une forme indéterminée car le numérateur et la dénominateur de l'expression sont égaux ou car 0/0 donne « rien ».

- Idée 14 : Les formes ∞/∞ et ∞-∞ sont des formes déterminées car ∞/∞ donne 1 ou car ∞-∞ donne 0.

- Idée 15 : La forme b/0 (où b est différent de 0) est une forme indéterminée, car la division par 0 est ou impossible ou sans réponse ou n'existe pas.

- Idée 16 : La forme 0/0 est indéterminée car 0/0 n'existe pas ou est impossible.

- Idée 17 : Une forme indéterminée correspond à un point de discontinuité.

- Idée 18 : La forme b/0 est indéterminée car la fonction, évaluée au point pour laquelle elle n'est pas définie, n'existe pas.

Il faut remarquer que les idées 6, 7 et 8 font référence aux conceptions des étudiants sur le concept de l'infini alors que les énoncés 12, 13, 15 et 16 aux concepts du zéro et de la division par zéro. Les idées 1 à 5 et 17, 18 sont caractérisées par les conceptions des étudiants sur les notions de fonction et de continuité et les expressions 9 à 11 par la notion de la limite (Maurice, 2000).

Afin de pouvoir examiner l'évolution des conceptions des étudiants sur l'infini, la division par zéro et la limite, une analyse des dispositifs d'enseignement s'avère nécessaire.

2.2 Les dispositifs d'enseignement

Pour étudier l'impact des dispositifs d'enseignement sur les conceptions des étudiants à l'endroit de concepts d'analyse, nous croyons utile de mettre à contribution le concept de la transposition didactique ainsi que les analyses traitant de l'intégration de l'informatique et de la preuve dans les cours de mathématiques.

2.2.1 La transposition didactique

La transposition didactique inclut l'ensemble des processus par lesquels un savoir « savant » est transformé en savoir enseigné. L'étude de la transposition didactique se fait à l'intérieur d'un système d'enseignement où un enseignant, des élèves et un savoir y figurent. Selon Chevallard (1991), le système d'enseignement représente *l'environnement* du système didactique. Le système d'enseignement est un *système ouvert*, où des relations avec l'environnement social (parents, chercheurs, institutions scolaires) ont lieu; son fonctionnement doit être compatible avec son environnement.

Chevallard (1991, p.25) utilise le terme *noosphère* pour identifier l'ensemble des instances où se passent les échanges entre le système d'enseignement et son environnement. « *Le problème premier qui doit être résolu pour que le système d'enseignement existe, c'est-à-dire pour que l'enseignement soit possible, est celui de la compatibilité du système avec son environnement.* »

Dans la poursuite de ce but, la noosphère possède différents moyens envisageables : les méthodes et les contenus. L'objectif de compatibilité est essentiellement assuré en contrôlant les contenus – le savoir. Le maniement du savoir qui en résulte se manifeste dans le choix des objets de savoir dans les programmes et les manuels. La noosphère s'assure donc du *travail externe* de la transposition, c'est-à-dire du passage des savoirs savants aux savoirs à enseigner par opposition au *travail interne*, essentiellement sous la responsabilité de l'enseignant, qui est le passage des savoirs à enseigner, tels qu'ils apparaissent dans les programmes et les manuels, aux savoirs enseignés en classe. Le travail externe et le travail interne peuvent aussi jouer un rôle sur le contenu des formes indéterminées et de l'analyse.

2.2.2 L'intégration des technologies

Comme nous l'avons mentionné en 1.2, l'utilisation de la technologie offre plusieurs avantages autant du côté de l'enseignant que de l'étudiant. En effet, la technologie ouvre la porte aux mathématiques expérimentales, développe chez l'étudiant une pensée réflexive, permet une plus grande visualisation… Néanmoins, pour que la technologie puisse être utilisée de façon efficace dans l'enseignement des mathématiques, il convient de respecter certaines conditions à l'endroit du système didactique. On propose à présent une analyse de ces conditions qui touchent les différents éléments constituant le système didactique :

- Le savoir mathématique et le savoir à enseigner : l'adéquation de l'outil technologique pour l'objet enseigné

- L'enseignant et son enseignement : l'accessibilité aux ressources et modification du rôle de l'enseignant

- L'élève et son apprentissage : les contraintes de communication, les nouvelles techniques rendues possibles, les phénomènes qui en découlent

Technologies et savoir mathématique

Premièrement, l'ordinateur introduit une nouvelle couche qui vient influencer la transposition des savoirs enseignés que Balacheff (1994, p.16) appelle *transposition informatique* :

> *«La transposition informatique désigne le travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique, qu'il s'agisse ensuite de « montrer » la connaissance ou de la « manipuler ». »*

L'utilisateur doit surmonter des contraintes. Les *contraintes internes* pèsent particulièrement pour la représentation des formes indéterminées. Elles proviennent des limitations du logiciel et de la mémoire. Elles ont lieu dans *l'univers interne* qui est constitué de composantes électroniques qui permettent le fonctionnement du dispositif informatique (Trouche (1997, 2000) et Balacheff (1994)). La transposition informatique amène donc des « limites » de représentations de certains concepts, tels que les limites, les formes indéterminées, l'infini, l'infiniment petit, l'infiniment grand : phénomènes de troncature, représentation par pixels....

Technologies et enseignement des mathématiques

Ces limites rendent le rôle de l'enseignant difficile à déterminer. L'enseignant doit-il favoriser l'exploration avec une utilisation de l'outil technologique ou maintenir l'approche plus classique du papier/crayon? S'il décide d'intégrer la technologie dans son enseignement, cette intégration ne peut se faire sans le respect de certaines conditions.

En plus d'avoir une connaissance adéquate du concept à enseigner, il doit posséder une formation suffisante sur les nouvelles technologies. Il doit également surmonter les contrainte d'accessibilité qui viennent du nombre restreint de postes de travail dans les laboratoires d'informatique. À partir de ce moment, il peut envisager une utilisation didactique de l'outil informatique pour l'apprentissage des mathématiques et le développement de nouvelles compétences. Néanmoins, ces nouveaux apprentissages vont devoir se refléter dans l'évaluation. En effet, Cornu (voir : Caron, 2001, p. 284) signale que « *les critères d'évaluation ne peuvent rester les mêmes qu'avec l'évaluation papier/crayon; il faut imaginer des modes d'évaluation qui testent les capacités et les aptitudes que l'on a voulu faire acquérir aux élèves.* » Le rôle de l'évaluation représente ainsi une condition pour la mise à profit de l'outil technologique. Sinon, ces activités vont se voir attribuer un statut extra-curriculaire, avec, bien sûr, un effet négatif sur l'engagement des étudiants.

Technologies et apprentissage des mathématiques

En dépit des possibilités que l'outil technologique apporte à l'étudiant et au professeur, certaines contraintes s'exercent. Trouche (1997, 2000) et Balacheff (1994) mentionnent que des *contraintes de commande* et *d'organisation* influencent l'utilisation de l'outil. Les contraintes de commande représentent les commandes préprogrammées ou non. Elles se situent dans *l'interface* qui est l'endroit où l'utilisateur et le dispositif peuvent communiquer. L'ajout d'un niveau de traduction peut amener une difficulté supplémentaire s'il y a un manque de familiarité. Les contraintes d'organisation, quant à elles, incluent l'organisation du clavier, de l'écran, par exemples le choix de commandes, la syntaxe imposée... Elles se localisent dans *l'univers externe* qui est le lieu d'interaction entre les dispositifs matériels et les professeurs et les étudiants.

Balacheff (1994) précise que ce sont les restrictions de l'univers interne et de l'interface qui pèsent surtout sur l'utilisateur. Mais il est raisonnable de croire que les contraintes de l'univers externe ont également une certaine influence sur l'apprentissage. Toutes ces caractéristiques des dispositifs informatiques limitent les actions de l'utilisateur.

Malgré ces contraintes, rappelons que l'outil technologique a ouvert les portes aux mathématiques expérimentales et a favorisé l'utilisation des différentes représentations sémiotiques lors de la résolution de problèmes. Lagrange (2000, p.7) soutient que :

> *« Un système de calcul symbolique va permettre de faire le lien expérimentalement entre des manifestations d'une même propriété dans différentes représentations sémiotiques, mais la préparation des élèves qui serait nécessaire pour une telle mise en relation est souvent sous-estimée. »*

Considérons l'exemple suivant qui montre bien la nécessité de certaines conditions pour que soient viables les expérimentations. Dans l'expérimentation de la calculatrice « complexe » TI-92 (Lagrange, 1999, 2000) dont le but était de faire interagir des différentes représentations sémiotiques, deux conditions sont apparues primordiales pour l'atteinte de cet objectif :

1) Une connaissance suffisante du concept en question et de l'outil informatique utilisé. Artigue (1997, voir Caron, 2001) mentionne que l'étudiant a du mal à faire le tri dans les rétroactions.

2) Une véritable question doit être mise à l'épreuve.

De plus, pour s'assurer de la réussite de l'apprentissage de certaines situations de l'expérience, le professeur a *mis en scène* les situations pour que les élèves anticipent la conception des structures générales ou des représentations. Les cas d'indétermination dans les calculs de limite représentent l'une de ces situations-là. Les activités faisaient référence à deux de ces cas : ∞-∞ et $0\cdot\infty$. En effet, à l'aide de la calculatrice TI-92, le professeur a d'abord montré aux étudiants que la limite de la somme de deux fonctions, dont l'une des fonctions tend vers plus l'infini et que l'autre fonction tend vers moins l'infini, n'est pas nécessairement nulle. Les étudiants étaient ensuite amenés à trouver d'autres exemples qui vérifiaient ce résultat. Ensuite, le deuxième cas d'indétermination a fait l'objet d'un long débat en classe. La majorité des étudiants étaient convaincus que le produit des limites est nul. Les étudiants étaient amenés à trouver des exemples où la limite est non nulle. À cette expérimentation, Lagrange (2000, p.9) conclut que :

> *« Nous apercevons, à travers les exemples, qu'il n'y a pas de miracle à attendre et que même si, grâce aux nouveaux gestes permis par la technologie, les élèves disposent d'observables plus nombreux et plus facilement obtenus, l'enseignement ne pourra faire l'économie d'une structuration du domaine à explorer, ainsi que d'une organisation en techniques de ces gestes d'exploration. »*

2.2.3 La place de la preuve

L'exemple précédent montre bien la nécessité d'un recours à l'analyse et au raisonnement déductif lors de l'apprentissage de concepts mathématiques tels que les formes indéterminées. Rappelons que les preuves dans l'enseignement ont cinq fonctions : statuer et systématiser, expliquer et éclairer, convaincre, produire des connaissances et communiquer (Mary, 1999). Longtemps enseignée comme une méthode à suivre, Mary (1999) soutient que c'est la *preuve-démonstration* qui a dominé dans l'enseignement en précisant toutefois que, dans cette forme, sa fonction demeure incertaine.

> *« On vérifie que l'énoncé est vrai mais pas pour convaincre car l'élève sait déjà que l'énoncé est vrai. Elle permet de donner un statut officiel à l'énoncé pour pouvoir l'utiliser, mais les élèves l'utilisent déjà. Elle arrive après la connaissance, elle n'y participe pas. On peut penser qu'il s'agit de systématiser un ensemble de connaissances, mais comment alors entreprendre cette systématisation en même temps qu'on initie à une problématique de preuve. Résultat : la preuve perd de son sens. Elle apparaît inutile. Elle finit*

> *par se traduire en exercices de pratique de la méthode, déconnectés d'une fonction de preuve.»* (p.38)

Dans ce contexte-là, la preuve devient déplaisante autant pour les professeurs que pour les étudiants (MacKernan, 1996, voir : Mary, 1999). Étant donné que la preuve apparaît inutile et que les étudiants ont de la difficulté à prouver de façon formelle, plusieurs recherches comme celle de MacKernan (id.) soutiennent que les preuves ne devraient pas faire partie des programmes de mathématiques au secondaire. D'autres études comme celle d'Arsac (1998, voir : Mary, 1999) essaient plutôt de trouver des moyens afin d'améliorer l'enseignement de la preuve-démonstration.

D'autre part, plusieurs didacticiens vont chercher à donner à la preuve une fonction pertinente et significative. Dans ces cas-ci, elle est surtout utilisée pour convaincre (Mary, 1999). Arsac (1993, voir : Mary, 1999) place les élèves devant un problème à résoudre, il ne suffit pas de vérifier un énoncé mais de convaincre les autres de la validité de leur conclusion. Les élèves s'engagent ainsi dans un processus de validation, c'est-à-dire ils sont amenés à argumenter leurs solutions, *à raffiner leurs critères de validation*, *à dépasser leur expérience* et ainsi acquérir une certaine autonomie (Mary, 1999, p.38).

Les problèmes d'enseignement de la preuve formelle à l'école ont rendu le système didactique difficilement compatible avec son environnement. Dans une logique d'adaptation à la situation, un remaniement des programmes a eu lieu. En effet, les démonstrations ont été progressivement mises de côté pour accorder une plus grande place aux mathématiques expérimentales (Mary, 1999).

Néanmoins, plusieurs chercheurs signalent « *le besoin de replacer la preuve dans l'activité mathématique à travers l'histoire pour la redéfinir à travers ses différents aspects et pour redéfinir ses fonctions ou son rôle dans le développement des connaissances* » (Arsac, 1987, Barbin, 1989, Rouche, 1989, Balacheff, 1988, voir : Mary, 1999, p.41). Arsac (1993) et Balacheff (1989) proposent des problèmes, respectivement en analyse et en géométrie, pour permettre aux étudiants de s'impliquer, de donner du sens à l'activité de la preuve et d'être éventuellement capables de progresser à travers les différents niveaux de preuve. Une conclusion générale ressort de ces recherches, il y a une rupture dans le passage à la démonstration : rupture entre rationalité quotidienne et scientifique (Legrand, 1988, voir : Mary, 1999), entre le fonctionnement d'une argumentation et celui d'une démonstration tant formellement que cognitivement (Duval, 1992-93, voir : Mary, 1999), entre une validation qui repose sur l'expérimental et une validation qui repose sur la démonstration (Joshua et Joshua, 1987, 1988, voir : Mary, 1999, p. 41). « *En bref, avec la démonstration, la validation ne se préoccupe plus de la même vérité qui est désormais régie par des règles qui ne sont plus celles du réel.* » (Rouche, 1989, Arsac, 1987, Joshua et Joshua, 1987, Duval, 1992-93 voir : Mary, 1999)

Actuellement, les programmes prônent une approche plus expérimentale dans le développement d'un rapport aux mathématiques. Cette réalité amène Mary (1999, p. 42) à préciser que « *ce qui guide les validations, c'est la référence à la démonstration : si les élèves sont trop jeunes, on se limitera à faire pratiquer des règles, à appliquer des algorithmes, puisqu'on n'envisage pas d'autres formes de validation que la démonstration.* » Étant donné que les étudiants ne sont pas prêts à faire des démonstrations, c'est l'expérimental qui les amène vers la théorie (situation réelle). Il faut remarquer que le sens inverse (théorie vers l'expérimental) ne peut être vrai car les démonstrations ne sont pas introduites aux étudiants (situation souhaitée). C'est actuellement le cas avec l'enseignement des formes indéterminées où une place importante est accordée aux calculs de limite laissant de côté la théorie sur cette notion (théorèmes de Rolle, de Lagrange, de Cauchy...)

Cette situation dans les écoles amène Mary (1999) à penser que l'organisation du curriculum et son application en classe devraient être questionnées pour pouvoir accorder une place aux démonstrations dans l'enseignement. Également, elle précise qu'avant même d'introduire la démonstration, l'enseignant devrait exiger une certaine rigueur de la part de leurs étudiants. En effet, Balacheff (1987, voir : Mary, 1999) soutient qu'il ne suffit pas seulement d'avoir des connaissances spécifiques pour arriver à formuler des preuves mais qu'une nouvelle *problématique de rigueur* est nécessaire. Il précise que cette problématique « *est celle, en fait, de la validation, appartient à l'activité mathématique pour la résolution d'un problème, pour comprendre les relations, pour se convaincre d'un énoncé, pour distinguer ce qui relève du particulier de ce qui relève du général, pour développer des connaissances.* » (Mary, 1999, p. 44)

Pour arriver à cette rigueur, Mary (1999) précise qu'elle doit se développer très tôt. Pour ce faire, l'école doit tout d'abord amener les étudiants à dépasser les essais, les calculs…en faisant évoluer les critères de validation. Ensuite, elle se doit de redonner une utilité à la preuve dans l'enseignement sans nécessairement passer par la preuve formelle.

Étant donné que la validation est présente implicitement ou explicitement dans les classes, une explication des différents types de validations qui peuvent exister dans les cours de mathématiques s'avère nécessaire (Mary, 1999, p. 45-54). Tout d'abord, l*a validation servant au contrôle de l'action* consiste à valider la véracité d'un résultat en s'assurant au fur et à mesure de la cohérence des démarches de la résolution de problèmes. Il ne s'agit pas de montrer pourquoi le résultat est vrai mais bien de vérifier que la réponse est correcte. Dans ce cas-ci, on fait plutôt référence à une vérification qu'à une preuve, c'est souvent le cas dans les calculs de limite de formes indéterminées. Margolinas (1989, voir : Mary, 1999, p. 45) distingue le projet de vérification du projet de preuve en affirmant que « *la vérification ne s'intéresse qu'à la vraisemblance d'un résultat.* » Le projet de vérification consiste ainsi à répéter une expérience plusieurs fois pour s'assurer d'un calcul ou d'une réponse. Son but ultime est d'arriver au résultat. Avec l'arrivée de la technologie dans les classes, il est de plus en plus facile de répéter les calculs et de vérifier les résultats. Le projet de preuve va plutôt chercher à généraliser la procédure qui amène au résultat. Soulignons que dans ce premier type de validation, l'analyse semble être mise de côté.

L'explication fournie par les enseignants représente le second type de validation. « *L'explication consiste à produire la suite de faits qui mis en relation expliquent le résultat. L'explication répond à un pourquoi en donnant des raisons qui vont faire comprendre.* » (Duval, 1992-93 et Balacheff, 1988 voir : Mary, 1999, p. 47) On distingue trois types d'explication (Mary, 1999, p. 47-48):

- « *Les explications descriptives qui donnent une pertinence à ce qu'on fait; soit par rapport aux conditions qui déterminent l'exécution de la procédure, soit par analogie. Ces explications n'ont pas pour objectif de déterminer si ce qu'on fait est juste.* »

- *Les argumentations explicatives qui se préoccupent de la pertinence.*

- *Les argumentations de preuve qui débordent sur la nécessité, elles peuvent avoir ou non une valeur explicative.*

Lors de l'enseignement des formes indéterminées, les professeurs utilisent surtout les explications descriptives pour essayer d'expliquer les « techniques » enseignées pour lever une indétermination dans un calcul de limite. Remarquons que ce sont les argumentations de preuve qui se rapprochent le plus de la démonstration. Il y a une plus grande place à l'analyse dans ce type d'explication comparativement aux explications descriptives où aucune analyse des arguments utilisés est faite. En effet, on cherche la vérité et on trouve les raisons de cette véracité dans les propriétés des objets mathématiques étudiés. Duval (voir : Mary, 1999, p. 48) soutient que ce type d'argumentation deviendra démonstration « *lorsque la justesse des arguments sera jugée en fonction de leur statut officiel de théorème, de définition, etc.* »

La troisième validation est *la validation dans la structure de la leçon*, qui est à la charge de l'enseignement. Mary (1999) inspirée par Joshua et Joshua (1987) identifie différents modèles de validation à travers la structure d'une leçon :

- *Validation par nature* : se fait à l'aide d'expériences sur des objets concrets. À l'aide de l'outil technologique, les étudiants sont amenés à manipuler du matériel, à constater les règles avec le professeur, à essayer des exemples et à faire des exercices de renforcement.

- *Validation opératoire implicite* : l'enseignant montre la démarche avec un exemple. Les étudiants acceptent les règles identifiées pour l'exemple. Ils sont ensuite amenés à répéter l'activité plusieurs fois et à exécuter des problèmes pour renforcer la technique.

- *Validation opératoire formelle* : l'enseignant dégage les propriétés en se servant d'exemples d'introduction. Ces propriétés sont ensuite démontrées. Les étudiants font ensuite des exercices de pratique pour bien saisir le sens de ces propriétés.

- *Démarche de preuve* : consiste à résoudre un problème. Les étudiants font une expérience, produisent des preuves, s'engagent dans des débats et affinent les critères de validation et de résolution du problème.

Lors de l'enseignement des formes indéterminées, on peut retrouver les trois premiers types de validation. En effet, la validation par nature permet aux étudiants d'effectuer des expérimentations avec un outil technologique pour trouver différents exemples où les formes indéterminées donnent des résultats distincts. De son côté, la validation opératoire implicite est utilisée lorsque l'enseignement des formes indéterminées se limite à la présentation de nombreuses « techniques » qui permettent de lever les différentes formes indéterminations. Finalement, le professeur peut amener un côté plus formel à l'enseignement des formes indéterminées en démontrant les propriétés utilisées lors des calculs de limite. Néanmoins, la validation opératoire formelle n'amène pas les étudiants à effectuer un raisonnement déductif sur les formes indéterminées. C'est dans la démarche de preuve que l'on retrouve ce raisonnement. En effet, un aspect important d'analyse s'y retrouve en évitant « *le mouvement aller-retour, de l'expérience vers le modèle et du modèle vers l'expérience.* » (Mary, 1999, p. 51) De plus, les étudiants sont amenés à identifier et à dépasser les niveaux de validation inadéquats. À priori, il semble que c'est ce type de validation qui permettrait de contrer les problèmes d'apprentissage des formes indéterminées.

Précisons que ces quatre types de validation dans la structure de la leçon ont tous un point de départ expérimental. Il existe également d'autres types de validation qui eux n'ont pas de point de départ expérimental :

- *Validation opératoire implicite* où l'enseignant présente la théorie, donne des exemples pour montrer que « ça marche » et les étudiants font ensuite des problèmes de renforcement.

- *Validation opératoire formelle* où l'enseignant donne la théorie, démontre les propriétés et fait des exemples pour montrer que « ça marche ». Les étudiants font ensuite des exercices de pratique.

- *Validation démonstrative* où le professeur enseigne la démonstration comme méthode et les étudiants sont amenés à pratiquer la méthode : valider l'énoncé.

Il est vrai qu'un certain côté formel se retrouve dans la validation opératoire formelle, mais c'est seulement dans la validation démonstrative qu'un recours à l'analyse est nécessaire pour valider correctement l'énoncé. Étant donné que les programmes imposent un point de départ expérimental, on ne s'attardera pas à faire une analyse profonde de ces types de validation.

Plusieurs études (Arsac, 1988, Brousseau, 1981, Legrand, 1988, Balacheff, 1988, voir : Mary, 1999, p. 52) « *placent la preuve dans un débat et reconnaissent à l'activité de la preuve une dimension sociale importante.* »

Nous avons pu apprécier les différentes facettes qui entrent en jeu lors de l'apprentissage des formes indéterminées. Il semble que les conceptions des étudiants par rapport à certains concepts d'analyse tels que l'infini, la limite… doivent être considérées lors de leur apprentissage. En étudiant leur prise en compte dans l'enseignement ainsi que les autres dispositifs d'enseignement mis à contribution, nous tâcherons d'établir l'impact de cet enseignement sur l'évolution de ces conceptions.

2.3 Objectifs de recherche

Cette étude vise donc à établir un lien entre les conceptions des étudiants et les dispositifs d'enseignement. Nous chercherons tout d'abord à identifier les liens qui apparaissent entre leurs conceptions des formes indéterminées et celles des concepts qui leur sont connexes. Pour ce faire, nous commencerons par établir les conceptions des étudiants avant l'enseignement des formes indéterminées sur les notions de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini. Par la suite, nous essaierons d'analyser la transposition didactique externe des formes indéterminées dans les programmes et dans deux manuels différents. Nous poursuivrons par l'analyse des dispositifs d'enseignement et d'évaluation dans deux classes utilisant ces manuels, en cherchant notamment à faire ressortir la prise en compte des conceptions des étudiants et à établir la place faite à l'informatique et à la preuve lors de l'enseignement des formes indéterminées et de l'évaluation qui suit cet enseignement. Après l'enseignement des formes indéterminées, nous essaierons de repérer l'évolution des conceptions des étudiants.

3 MÉTHODOLOGIE

Le chapitre précédent montre bien comment le savoir visé, les conceptions des étudiants et les dispositifs d'enseignement envisageables se conjuguent pour rendre l'apprentissage des formes indéterminées particulièrement délicat. Dans ce chapitre, nous décrivons la démarche méthodologique qui permettra de mieux cerner les relations entre les conceptions des étudiants et les dispositifs d'enseignement dans l'apprentissage de ce savoir.

3.1 Analyse des conceptions des étudiants

Pour cette première analyse, nous présentons tout d'abord le processus de sélection des sujets de l'étude. Ensuite, nous décrivons l'instrument de cueillette et de traitement des données.

3.1.1 Les sujets de l'étude

Notre choix de sujets s'est arrêté sur la population de sciences où généralement les étudiants ont plus de facilité en mathématiques et où les cours offrent une formation un peu plus formelle pour répondre aux exigences des programmes scientifiques universitaires. Les formes indéterminées sont introduites avec la notion de limite dans le premier cours de calcul (calcul différentiel), mais leur apprentissage figure dans les objectifs du deuxième cours de calcul[28]. Ce cours est offert selon deux perspectives différentes : celle de sciences humaines (203) et celle de sciences (NYB). C'est donc le cours de NYB qui a retenu notre attention.

Le choix de population étant fait, nous avons rencontré quelques professeurs de différentes institutions collégiales de la grande région de Montréal pour essayer d'identifier leur stratégie d'enseignement de ce cours. Cette démarche, un peu

---

[28] Ministère de l'Éducation du Québec, *Programme de Sciences de la nature* http://www.meq.gouv.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/program/200BO.pdf, p. 73 (page consultée le 15 juillet 2003)

informelle, a permis de choisir deux groupes d'observation où les stratégies d'enseignement étaient différentes. Soulignons qu'il ne s'agissait pas tant d'identifier les différences entre ces stratégies, mais plutôt de caractériser le contexte dans lequel s'inscrit généralement l'apprentissage des formes indéterminées.

Examinons à présent les deux groupes choisis. Ils proviennent de deux institutions différentes et relativement éloignées géographiquement. Le premier groupe est constitué de trente-cinq étudiants. Dans cette classe, le manuel utilisé est *Calcul intégral* de Thomas, Finney, Weir, Giordano (2001) adapté par Godbout (2002). Dans ce livre, les formes indéterminées sont introduites avec les intégrales impropres. Le second groupe que nous avons observé est constitué de trente-quatre étudiants. Le professeur a choisi de débuter la matière du cours par les formes indéterminées. Il utilise le manuel *Calcul intégral* de Bradley, Smith (1999) adapté par Franco et Marcheterre (2002). Dans ce manuel, les formes indéterminées figurent au premier chapitre. Une analyse approfondie de ces manuels sera présentée dans le prochain chapitre.

Les participants des deux groupes ont plusieurs caractéristiques communes. Étant donné que tous les étudiants sont inscrits à l'un des programmes pré-universitaires de Sciences[29], ils ont tous suivi le cours de calcul différentiel (NYA) et possèdent ainsi un bagage mathématique comparable. Puisque les notions de limite, de fonction, de continuité et d'infini sont des contenus obligatoires au cours de NYA[30], nous avons supposé que les étudiants avaient acquis certaines connaissances et habiletés de raisonnement sur ces concepts. Précisons que la réussite à ce cours est une condition obligatoire pour accéder au deuxième cours de calcul (NYB).

---

[29] Programmes de Sciences : programmes de sciences de la nature, sciences de la santé et sciences pures.
[30] Ministère de l'Éducation du Québec, *Programme de Sciences de la nature* http://www.meq.gouv.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/program/200BO.pdf, p. 71 (page consultée le 15 juillet 2003)

Afin de susciter l'intérêt des étudiants ainsi que leur participation au projet, nous avons effectué une brève présentation en classe du projet. Cette étape a eu lieu au tout début des périodes d'observation. Nous avons décrit les objectifs de la recherche en leur expliquant en détail la méthodologie utilisée. Tout d'abord, nous leur avons mentionné que leur participation à l'étude ne pouvait se faire sur une base anonyme puisque l'un des objectifs de la recherche était de voir si les conceptions des étudiants sont modifiées lors de l'enseignement des formes indéterminées. Il était donc primordial de faire un suivi des conceptions de chaque étudiant. Les réponses fournies dans les questionnaires resteraient confidentielles et aucune information sur leurs performances ne serait transmise au professeur. Nous leur avons également expliqué les mécanismes qui allaient permettre de préserver la confidentialité lors de la publication des résultats.

De plus, pour dissiper toute crainte, nous avons précisé qu'une participation à l'étude ou un refus de participer ne pourrait influencer leur évaluation à ce cours. Pour nous assurer que chaque participant collaborait de son propre gré, nous avons demandé à tous les volontaires de signer un formulaire de consentement (Annexe A)[31].

3.1.2 La collecte des données

Après avoir signé le formulaire, les participants étaient invités à compléter le premier questionnaire (Annexe B). Étant donné que le temps requis n'était que de quinze minutes, cette activité a pu être intégrée au cours sans perturbations majeures sur le déroulement du cours. Précisons que les étudiants pouvaient se référer à leur manuel et à leurs notes de cours pour répondre au questionnaire, mais chaque participant devait y répondre sur une base individuelle. Aucune consultation entre pairs n'était permise. Notons également que la calculatrice était permise. Examinons le contenu de ce questionnaire, en précisant les objectifs qui ont dirigé l'élaboration.

Questionnaire avant l'enseignement des formes indéterminées

[31] L'organisation des annexes reflète la chronologie des événements.

Tout d'abord, précisons que ce questionnaire visait à recueillir les conceptions des étudiants avant l'apprentissage des formes indéterminées. Une question théorique sur chacune des principales notions connexes y figurait : limite, indétermination, division par zéro et infini. Étant donné que nous cherchions à recueillir les conceptions des étudiants sur ces notions et non pas des faits objectifs, un questionnaire à questions ouvertes a paru être un outil approprié.

Dans la poursuite de ce but, nous avons construit le questionnaire en nous appuyant sur l'épreuve formulée par Maurice (2000) sur les conceptions erronées des formes indéterminées. Les questions numérotées 1, 2 et 4 ont été tirées de façon intégrale du questionnaire d'expérimentation de Maurice et elles concernaient respectivement les notions de limite, d'indétermination et d'infini. Étant donné qu'il n'y avait pas de question précise sur la division par zéro dans le questionnaire de Maurice, nous en avons formulé une en essayant de respecter l'esprit et le style d'écriture des trois autres questions: « *Qu'est-ce qu'une expression de la forme* $\frac{k}{0}$ *représente pour vous?* »

Pour pouvoir bien refléter les idées, les opinions personnelles et les conceptions des étudiants, des expressions telles que « *que signifie pour vous* » ou « *vous semble* » figuraient dans les questions. Soulignons que toutes les questions utilisaient un vocabulaire accessible où les termes mathématiques choisis ont été préalablement étudiés lors du premier cours de calcul. Il n'y avait donc pas d'ambiguïtés ou de nouveautés dans les questions. Également, une attention particulière a été accordée à la présentation en nous assurant entre autres que les étudiants ne manqueraient pas d'espace dans les encadrés pour répondre aux questions.

3.1.3 Le traitement des données

Afin de pouvoir bien traduire les conceptions des étudiants à partir des données recueillies, nous avons élaboré un instrument de traitement des données inspiré des travaux recensés.

Questionnaire avant l'enseignement des formes indéterminées

Pour ce questionnaire, nous avons opté pour une grille de codage des conceptions. Cette grille a été construite pour les notions de limite, de division par zéro et d'infini à partir d'idées clés identifiées dans l'analyse des conceptions du chapitre précédent. Pour la notion d'indétermination, nous avons défini les codes à partir des réponses des étudiants.

La version finale de cette grille de codage se trouve à l'Annexe E.

Pour expliquer la procédure de codage, nous procédons à partir des réponses d'un étudiant pour chacune des notions examinées. Précisons tout d'abord que pour chaque notion, différentes caractéristiques étaient identifiées.

Pour la question sur la limite, les caractéristiques associées à la limite et présentes sur la grille sont les suivantes :

1) L1- Une limite comme une borne
2) L2- Possibilité d'atteindre ou non une limite
   - L2.1- La limite peut être atteinte
   - L2.2- La limite est impossible à atteindre
3) L3- Le mouvement d'une limite
4) L4- La discontinuité d'une limite
   - L4.1- Où la fonction n'existe pas
   - L4.2- Une asymptote
     - L4.2.1- Une asymptote horizontale

L4.2.2- Une asymptote verticale

5) L5- La limite c'est un nombre infiniment grand
6) L6- La limite est déterminée par une dérivée

Les réponses des étudiants pouvaient être codées selon une ou plusieurs caractéristiques. Examinons les réponses qu'un étudiant du second groupe a fournies au questionnaire pour illustrer ce processus de codage.

À cette question, l'étudiant a répondu : « *Une limite c'est la valeur du « y » quand « x » tend vers une valeur donnée.* » Selon la grille, nous avons codé cette réponse L3 puisque sa réponse associe le mouvement de la variable y à la limite. Également, cette réponse inclut la possibilité d'atteindre ou non la limite puisque l'étudiant parle de la valeur du « y », laissant supposer qu'on l'atteigne : elle a donc aussi été codée L2.1.

Pour la notion d'indétermination, la grille de codage est la suivante :

1) I1- L'indétermination comme une limite
    - I1.1- Une forme indéterminée
    - I1.2- Impossibilité
    - I1.3- Ne se détermine pas
    - I1.4- Qui existe
2) I2- Vision de calcul: traitement
    - I2.1- traitement possible
    - I2.2- traitement impossible
3) I3- Impossibilité ou n'existe pas
4) I4- Ne se détermine pas
5) I5- Infinité de solutions
6) I6- Une valeur indéterminée
7) I7- Ce qui n'est pas « fini »

L'étudiant a répondu : « *Lorsque la limite ne donne pas de réponse avec des nombres, mais plutôt avec des 0/0, ∞/∞, ∞^0, etc., ces « signes » ne sont pas déterminés.* » Nous avons codé sa réponse I1 car pour lui l'indétermination est liée à l'idée de limite. Dans cette vision-là, il voit la forme indéterminée comme une limite qui ne se détermine pas : I1.1 et I1.3. Étant donné que la limite ne se détermine pas, le calcul de limite est impossible : I2.2.

Pour la question sur la division par zéro, les différentes caractéristiques sont les suivantes :

1) D1- Zéro
2) D2- Le dividende
3) D3- L'indétermination
4) D4- L'infini
5) D5- L'impossibilité
6) D6- Une limite
    - D6.1- Qui n'existe pas ou impossible
    - D6.2- Indéterminée
    - D6.3- Qui donne l'infini
    - D6.4- Qui existe
7) D7- Une constante divisée par zéro

À cette question, l'étudiant a répondu : « ∞ » qui a été codé D4.

Finalement, pour la question sur l'infini, nous avons élaboré la grille suivante :

1) INF1- infini comme un processus
2) INF2- infini comme un objet
    - INF2.1- ensemble d'objets

INF2.2- nombre

INF2.2.1- nombre indéterminé

INF2.2.2- n'importe quel nombre

INF2.3- non-nombre

3) INF3- Une inconnue
4) INF4- Une variable
5) INF5- Autre chose
6) INF6- L'infini n'existe pas

L'étudiant a choisi comme affirmation que « l'infini représente un nombre indéterminé » et a fourni l'explication suivante : « *On ne sait pas ce qu'est l'infini, c'est donc indéterminé.* » La caractéristique qui ressort de cette réponse est INF2, plus spécifiquement INF2.2.1.

Cette procédure a été appliquée à tous les étudiants; les résultats de ce codage sont analysés au chapitre suivant.

3.2 Analyse des dispositifs d'enseignement

Pour pouvoir établir un lien entre les conceptions qui entrent en jeu lors de l'apprentissage des formes indéterminées et les moyens d'enseignement actuels, une analyse des dispositifs d'enseignement était nécessaire. Nous présentons dans cette section, les différents instruments de la cueillette et du traitement des données.

3.2.1 La collecte des données

Rappelons qu'un système d'enseignement cherche à être compatible avec son environnement. Pour ce faire, un travail externe et interne de la transposition didactique doit avoir lieu. Nous avons donc commencé par analyser les différents dispositifs d'enseignement (le programme et les manuels) qui se trouvent dans la transposition didactique externe et qui influencent le travail interne. Ensuite, nous avons analysé les dispositifs d'enseignement liés à l'enseignant.

Le programme

Tout d'abord, nous avons choisi d'analyser le programme du cours NYB. Nous voulions situer la place des formes indéterminées et le contexte dans lequel elles se situent. Nous avons donc cherché à identifier la compétence, les éléments de compétence et les activités d'apprentissage du cours qui s'y rattachent.

Les manuels

Pour étudier la concordance entre les manuels et le programme du cours, nous avons effectué une analyse des manuels utilisés en classe. Nous cherchions tout d'abord à établir le contexte d'apprentissage où se situent les formes indéterminées. En effet, une étude sur l'organisation des savoirs mathématiques dans chacun des manuels permet d'identifier les notions connexes aux formes indéterminées. Rappelons que les manuels utilisés dans nos deux groupes d'observation sont *Calcul intégral* de Bradley, Smith (1999) adapté par Franco et Marcheterre (2002) et *Calcul intégral* de Thomas, Finney, Weir, Giordano (2001) adapté par Godbout (2002).

Questionnaire pour les enseignants

Avant d'observer l'enseignement du professeur, nous avons élaboré un questionnaire pour les enseignants. Cet outil visait à connaître leur vision sur l'apprentissage des formes indéterminées et leurs stratégies d'enseignement.

Dans l'élaboration de ce questionnaire, nous avons rédigé des questions pour connaître l'opinion des professeurs sur l'apprentissage des formes indéterminées. Tout d'abord, nous cherchions à identifier les objectifs visés lors de l'enseignement. Ensuite, plusieurs questions ont été formulées pour essayer de connaître leur vision du contexte d'apprentissage, par exemple « *Selon vous quelles sont les connaissances préalables à l'apprentissage du traitement des formes indéterminées?*

Au niveau secondaire, quelles connaissances pourraient servir à l'apprentissage des formes indéterminées? » Également, nous avons cherché à identifier les ressources mises à leur disposition ou celles qu'ils aimeraient avoir : « *Dans votre enseignement des formes indéterminées, est-ce que vous vous inspirez d'un document, d'un manuel ou d'un logiciel? Si oui, lequel?* »

Nous avions proposé aux professeurs de répondre au questionnaire lors d'un entretien, mais les deux professeurs ont préféré y répondre par écrit. Étant donné que les questions étaient ouvertes, le questionnaire a permis de recueillir de nombreuses informations sur les objectifs poursuivis par les professeurs, leur vision du contexte d'enseignement et les méthodes qu'ils privilégient pour l'enseignement des formes indéterminées.

Une version finale de ce questionnaire se trouve à l'Annexe C.

Les observations en classe

Le dépouillement de ce questionnaire a permis de nous préparer pour les observations en classe. En effet, il était primordial de faire des observations en classe pour vérifier si les stratégies d'enseignement mentionnées dans le questionnaire y étaient repérables.

Pour ne pas perturber le déroulement du cours, ces observations se sont effectuées de manière très discrète du fond de la classe. Toutes les leçons, incluant les questions des étudiants, ont été enregistrées à l'aide d'un magnétophone. Nous avons effectué une prise de notes des interventions faites au tableau.

L'examen

À la suite de ces observations, il a semblé intéressant d'analyser un instrument d'évaluation du professeur. Nous cherchions à identifier si les questions reflétaient l'enseignement des formes indéterminées et les objectifs visés, tel qu'il avait été dispensé.

Les examens des professeurs se trouvent à l'Annexe D.

3.2.2 Le traitement des données

Afin de pouvoir faire une analyse poussée de ces données, nous avons élaboré quelques instruments de traitement de données.

Le programme

L'analyse du programme visait à cerner le savoir à enseigner. Pour ce faire, une analyse du contenu du cours a été faite en déterminant la place accordée à la preuve et à la technologie. Également, une attention particulière a été accordée à la compétence visée et aux éléments de la compétence. Pour ce faire, nous avons effectué une analyse des verbes utilisés pour décrire ces différents aspects du programme.

Les manuels

Par l'analyse des manuels, nous cherchions à vérifier la concordance entre le contenu des manuels et les objectifs du programme. Nous nous sommes tout d'abord intéressé aux choix des contenus. Nous avons examiné l'ordonnancement et les présentations (discursives, graphiques) des définitions, des théorèmes, des applications, des exercices et des preuves ainsi que l'utilisation des technologies. Également, nous avons identifié les systèmes de connaissances minimales nécessaires à la réussite des exercices ou des problèmes proposés aux étudiants. Nous avons adopté la position de l'étudiant lors de l'analyse des activités, et la position de l'enseignant lors de l'analyse du savoir.

En plus de cette analyse des contenus, nous nous sommes attardé sur la place de la preuve et de la technologie dans le manuel.

La version finale de cette grille se trouve à l'Annexe F.

Ensuite, nous avons essayé d'établir la place de la technologie dans les manuels. Pour ce faire, nous avons tout d'abord situé les contextes où une utilisation de la technologie est faite et par la suite, nous avons effectué une analyse des problèmes où l'utilisation d'un outil technologique est recommandée.

Le questionnaire pour les enseignants

À travers les réponses données au questionnaire, nous avons cherché à connaître les stratégies d'enseignement que les professeurs mettent en pratique dans le but de satisfaire les exigences du cours. Également, nous avons établi leur vision du contexte d'apprentissage où s'inscrivent les formes indéterminées : les difficultés qui leur paraissent entrer en jeu lors de cet apprentissage, les notions qu'ils jugent connexes aux formes indéterminées, les ressources mises à leur disposition et la finalité qu'ils attribuent à l'enseignement des formes indéterminées. Par la suite, nous avons cherché à établir des liens entre les difficultés identifiées par le professeur et celles des travaux recensés dans le cadre théorique.

Les observations en classe

Une analyse de l'enseignement du professeur a permis de repérer dans l'action ses stratégies d'enseignement pour les formes indéterminées. Pour ce faire, nous avons tout d'abord examiné le choix des contenus présentés en classe. Nous avons analysé les méthodes d'introduction aux formes indéterminées, les exemples faits en classe. Ensuite, nous avons utilisé la grille que nous avons élaborée pour l'analyse des manuels pour classer les types de validations utilisés en classe par l'enseignant. Finalement, lorsqu'il y a eu une utilisation de la technologie en classe, nous avons situé le contexte d'utilisation de l'outil : les problèmes utilisés et les conditions liées à cette utilisation.

L'examen

Nous avons analysé l'examen distribué aux étudiants en examinant la formulation des questions concernant les formes indéterminées. Nous avons cherché à y retrouver la vision du professeur établie à partir des réponses fournies au questionnaire et des observations effectuées en classe. Par la suite, nous avons identifié les contenus évalués en portant une attention particulière aux fonctions choisies dans les calculs de limite et à la démarche nécessaire pour la résolution de problèmes : étude des fonctions, mise en évidence simple, calcul de la limite à droite et à gauche, « techniques » utilisées pour lever l'indétermination, application de la règle de L'Hospital… Nous avons cherché à établir un parallèle entre les problèmes présentés en classe et ceux de l'examen. Également, nous avons cherché à voir si les apprentissages réalisés à l'aide de l'outil technologique étaient évalués.

3.3 Analyse des productions des étudiants après enseignement

Nous décrivons à présent les instruments de cueillette et de traitement de données qui vont nous permettre d'établir l'impact de l'enseignement des formes indéterminées sur les conceptions des étudiants.

3.3.1 La collecte des données

De la même manière, le second questionnaire a été distribué et complété en classe à la fin de l'enseignement sur les formes indéterminées. Les professeurs ont accordé les vingt dernières minutes du cours aux étudiants pour qu'ils le complètent. Nous en profitons pour souligner ici la générosité des professeurs qui nous ont permis de recueillir les données. Tout comme le premier questionnaire, aucune consultation entre pairs n'était permise. L'usage de la calculatrice était permis et les étudiants pouvaient se référer à leurs notes de cours ou à leur manuel. Nous examinons à présent le contenu de ce questionnaire.

Questionnaire après l'enseignement des formes indéterminées

Pour essayer d'établir un suivi des conceptions des étudiants sur les formes indéterminées, nous avions d'abord pensé à redistribuer le premier questionnaire aux étudiants pour voir si leurs conceptions initiales avaient évolué suite à l'enseignement des formes indéterminées. Mais nous avons finalement opté pour un mode d'évaluation qui permette d'évaluer leur capacité à résoudre des problèmes où interviennent les formes indéterminées et les autres notions connexes. Pour ce second questionnaire, les étudiants étaient amenés à résoudre des problèmes mathématiques, relativement simples mais inédits pour eux, où un début d'analyse s'avérait nécessaire. Tout en permettant de repérer certaines des conceptions qui sont toujours présentes à la suite de l'enseignement, ce questionnaire permettait aussi de voir en quoi ces conceptions peuvent s'avérer des obstacles dans la résolution de problèmes mathématiques.

Lors de l'élaboration de ce questionnaire, nous avons voulu trouver des situations d'indétermination et de non-indétermination pour vérifier la compréhension des étudiants sur les formes indéterminées et sur certaines notions qui leur sont connexes. Pour les cas d'indétermination, les deux questions faisaient référence à un calcul de limite où la forme ∞-∞ ressortait. Comme nous le verrons dans l'analyse des dispositifs d'enseignement, la technique du dénominateur commun est souvent la seule technique apprise pour lever une indétermination de cette forme. Pour certains des calculs de limite, la technique du dénominateur commun ne pouvait être utilisée pour lever l'indétermination de ce type mais une analyse des fonctions choisies suffisait pour arriver à la réponse. Ces questions ont été élaborées afin d'examiner les démarches des étudiants lors de la résolution de problèmes non familiers et leur degré de contrôle à l'égard des techniques enseignées. Pour les cas de non-indétermination, nous cherchions à voir si les étudiants confondent les cas de non-indétermination avec les cas d'indétermination. Les limites choisies amenaient les étudiants à réfléchir sur les notions de limite, de continuité, de fonction, d'infini et division par zéro. Ensuite, les étudiants étaient amenés à résoudre une équation qui faisait potentiellement intervenir une division par zéro. Cette question a été formulée pour vérifier la compréhension et la vigilance des étudiants face à cette notion. Par la suite, pour évaluer la compréhension de la notion de limite, les étudiants étaient amenés à déterminer des limites en se basant sur un graphique (question tirée de Hitt et Paez, 2001). Dans ce problème, aucun calcul n'était requis. Finalement, nous avons terminé le questionnaire avec une question concernant les habiletés des étudiants avec la calculatrice graphique. Nous voulions avoir une image de la place de la technologie à usage mathématique dans ce groupe et déterminer si la maîtrise d'un outil de visualisation graphique répandu pouvait avoir une incidence sur la compréhension des notions associées à l'analyse. Notons que nous n'avons pas mesuré l'utilisation effective de la calculatrice pour répondre au questionnaire. Ce questionnaire servait à évaluer la compréhension de chaque participant sur les formes indéterminées et sur les notions qui leur sont connexes. Les questions ont été formulées à l'aide d'un vocabulaire et d'un symbolisme mathématique appropriés. Le Tableau I présente une brève description de chacune des questions et les éléments recherchés lors de l'analyse des résultats :

	Description de la question	Éléments recherchés
Question 1a	ln x / cos x quand x tend vers π/2	Reconnaissance d'une forme déterminée (k/0)
Question 1b	tan x / x^2 quand x tend vers +∞	Analyse de la fonction et compréhension de l'infini et de la limite
Question 1c	sin x / x quand x tend vers +∞	Analyse de la fonction et compréhension de l'infini et de la limite
Question 1d	0,0025 x^4 - 3600 x^3 quand x tend vers +∞	Analyse de la fonction ou choix d'une technique de calcul approprié et/ou contrôle sur la représentation graphique donnée par la calculatrice
Question 1e	ln x - racine (x) quand x tend vers +∞	Analyse de la fonction ou mise à contribution de la représentation graphique donnée par la calculatrice
Question 2	Résoudre (x + 2) (x - 3)^2 / (6 - 2x)	Vigilance à l'endroit d'une division par zéro
Question 3a	Limite à gauche finie différente de limite à droite finie	Compréhension de la notion de limite
Question 3b	Fonction continue au point mais non dérivable	Compréhension de la notion de limite
Question 3c	Limite à gauche = limite à droite mais différente de l'image	Distinction image-limite
Question 3d	Limite à gauche (+∞) différente de limite à droite (-∞)	Compréhension de la notion de limite

Tableau I- Caractérisation des différentes questions du second questionnaire

La version finale de ces deux questionnaires est donnée à l'Annexe B.

Productions à l'examen

Finalement, pour poursuivre l'évaluation de la compréhension des étudiants sur les formes indéterminées, nous avons choisi d'analyser les productions des étudiants à un examen régulier du cours. Étant donné que celui-ci s'inscrivait dans le processus d'évaluation en classe, nous pouvions supposer que les étudiants avaient procédé à une certaine préparation pour l'examen et que leurs réponses refléteraient les apprentissages réels effectués relativement aux formes indéterminées.

3.3.2 Le traitement des données

Afin d'évaluer la compréhension des formes indéterminées à partir des données recueillies, nous avons élaboré différents instruments de traitement des données.

Questionnaire après l'enseignement des formes indéterminées

Tout d'abord, pour les calculs de limites, nous avons vérifié que les étudiants distingueraient bien entre les situations d'indétermination et celles de non-indétermination. Ensuite, nous avons identifié la démarche utilisée lors de la résolution de problèmes : étude des fonctions, mise en évidence simple, calcul de la limite à droite et à gauche, « techniques » utilisées pour lever l'indétermination, application de la règle de L'Hospital… Pour la question 2, nous avons examiné les étapes de résolution du problème et surtout la conclusion qu'ils en tiraient. Avec l'absence de calcul pour la question 3, nous avons tenté par le graphique de refléter la compréhension des étudiants à l'endroit de la notion de limite. Finalement, nous avons essayé d'établir un lien entre l'utilisation de la technologie et les réponses fournies à ce questionnaire par les étudiants.

Productions à l'examen

Même si l'instrument d'évaluation en classe a été créé par le professeur de chacune des classes observées, nous en avons analysé les résultats d'une manière similaire au questionnaire après l'enseignement des formes indéterminées. En effet, pour les calculs de limite, nous avons tout d'abord vérifié que les étudiants identifiaient correctement la forme indéterminée. Les démarches utilisées lors de la résolution de problèmes étaient ensuite examinées : étude des fonctions, mise en évidence simple, calcul de la limite à droite et à gauche, « techniques » utilisées pour lever l'indétermination, application de la règle de L'Hospital… Pour les autres problèmes faisant intervenir les formes indéterminées, nous avons commencé par effectuer une analyse du contexte d'application (ex. intégrale impropre, suite) et par la suite, nous avons analysé les démarches de résolution et la conclusion qu'ils en tiraient. Rappelons que le choix du contenu des questions de l'examen sera examiné dans l'analyse des dispositifs d'enseignement.

3.4 Mise en relation

À partir des données recueillies, analysées et codées, nous avons finalement cherché à établir des relations entre l'évolution des conceptions des étudiants et les dispositifs utilisés pour l'enseignement des formes indéterminées. En particulier, nous avons tâché de repérer dans le choix des contenus et des approches la prise en compte des conceptions des étudiants les plus répandues. Également, nous avons cherché à voir si l'enseignement reçu avait un impact dans l'évolution des conceptions des étudiants et pouvait favoriser un passage à l'analyse.

4 ANALYSE DES RÉSULTATS

L'analyse des données de notre recherche vise à mettre en relation les conceptions des étudiants et les dispositifs d'enseignement lors de l'apprentissage des formes indéterminées. Pour ce faire, une analyse des conceptions des étudiants et des dispositifs d'enseignement est faite pour chacun des groupes observés. Tout d'abord, nous commençons par identifier les différentes conceptions des étudiants sur les notions connexes aux formes indéterminées. Nous enchaînons ensuite avec une analyse de la transposition didactique, de l'intégration de la technologie et de la place accordée à la preuve dans les différents dispositifs d'enseignement. Finalement, nous examinons l'évolution des conceptions des étudiants après l'enseignement des formes indéterminées.

4.1 Premier groupe

Lors de la première séance d'observations du groupe provenant du premier collège, trente-trois étudiants sur trente-cinq étaient présents. Trente-deux d'entre eux ont accepté de participer à l'étude. Au moment de compléter le premier questionnaire, les étudiants avaient vu les calculs d'aire et de volume, les techniques d'intégration et ils avaient été initiés aux intégrales impropres. Le questionnaire a donc été complété avant l'enseignement des formes indéterminées.

4.1.1 Analyse des conceptions des étudiants

Suite au codage des conceptions, nous avons identifié les principales conceptions des étudiants sur les notions d'infini, d'indétermination, de division par zéro et de limite. Rappelons que les réponses des étudiants ont été associées à une ou plusieurs caractéristiques.

Tout d'abord, pour la notion de limite, c'est la possibilité d'atteindre ou non la limite qui paraît dominer dans les réponses des étudiants :

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
L1- Une limite comme une borne	11
L2- Possibilité d'atteindre ou non la limite	25
L3- Le mouvement vers une limite	21
L4- Discontinuité de la limite	0
L5- Un nombre infiniment grand	1
L6- Une limite déterminée par une dérivée	1

Tableau II- Caractérisation de la notion de limite par les étudiants du premier groupe

À titre d'exemple, l'étudiant no.32 répond que « *la limite c'est ce qui ne peut pratiquement pas être atteint mais que l'on considère théoriquement comme une infinie.* » Remarquons que plusieurs réponses des étudiants font souvent ressortir au moins deux caractéristiques de la limite. Par exemple, l'étudiant no.24 écrit que la limite c'est : « *la valeur pouvant être atteinte lorsqu'une variable tend vers un chiffre ou vers l'infini.* » Sa réponse inclut la possibilité d'atteindre une limite et l'idée de mouvement vers une limite. La réponse de l'étudiant no.17 associe, quant à elle, les idées de mouvement, d'atteinte de la limite et de borne: « *Limite signifie qu'il existe une sorte de « bordure ». Donc, ça signifie qu'il faut s'arrêter quelque part. Ça signifie aussi que rendu à cette limite, on ne peut plus aller plus loin que l'on est.* »

Précisons que parmi les vingt-cinq étudiants qui évoquent la possibilité d'atteindre ou non la limite, dix-huit d'entre eux considèrent que la limite peut être atteinte. À titre d'exemple, l'étudiant no.7 écrit que la limite est la « *valeur maximale que peut atteindre une fonction.* »

Pour la notion d'indétermination, nous observons que les étudiants l'associent surtout à un calcul, possible ou non:

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
I1- L'indétermination comme une limite	0
I2- Vision de calcul: traitement	17
I3- Impossibilité ou n'existe pas	0
I4- Ne se détermine pas	12
I5- Infinité de solutions	3
I6- Une valeur indéterminée	9
I7- Ce qui n'est pas "fini"	1

Tableau III- Caractérisation de la notion d'indétermination par les étudiants du premier groupe

En effet, l'étudiant no.33 précise qu'une indétermination « *c'est quelque chose qui existe, mais qui ne peut être calculé avec précision.* » Fait intéressant, quinze de ces dix-sept étudiants considèrent que le traitement est impossible. À titre d'exemples, l'étudiant no.12 répond « *qu'il est mathématiquement (rationnellement) impossible de résoudre une expression mathématique ou d'effectuer un calcul quelconque* » et l'étudiant no.13 note qu'une indétermination c'est « *quelque chose pour lequel on ne peut calculer, par exemple une intégrale sans borne* ». Parmi ces dix-sept étudiants, l'étudiant no.3 écrit : « *impossible d'apporter une réponse significative ou possible* » témoignant ainsi d'une incertitude dans sa compréhension de l'indétermination.

Également, le Tableau III montre que le mot indétermination est souvent associé à l'impossibilité d'attribuer une valeur. Par exemple, l'étudiant no.1 parle « *d'incapacité de définir quelque chose* » et l'étudiant no.29 précise qu'une indétermination c'est ce « *qui ne peut être déterminé* ». La possibilité de lever une indétermination n'est pas une idée familière ou envisagée, ce qui paraît normal puisqu'ils n'ont pas encore vu les formes indéterminées.

Pour la notion de division par zéro, le Tableau IV montre que la majorité des étudiants savent qu'une division par zéro est impossible :

Réponses possibles	Nombre d'étudiants
D1- Zéro	4
D2- Le dividende	0
D3- L'indétermination (ou l'inconnu)	9
D4- L'infini	2
D5- L'impossibilité	23
D6- Une limite	3
D7- Une constante divisée par zéro	0

Tableau IV- Caractérisation de la notion de division par zéro par les étudiants du premier groupe

Par exemple, l'étudiant no.25 écrit que c'est « *impossible puisqu'on ne peut pas avoir 0 comme dénominateur.* » et l'étudiant no.22 précise qu'une forme k/0 c'est « *une erreur, car il est impossible d'avoir un dénominateur qui est égal à zéro.* » On sent ici des effets de la mémorisation d'une règle. Parmi les autres étudiants, certains montrent une meilleure compréhension de la division par zéro. En effet, l'étudiant no.30 fournit la réponse suivante à la question : « *une impossibilité, une erreur n'importe quelle valeur divisée par 0 n'a pas de réponse, on ne peut pas dire* $0\times$ *quelque chose donne k.* » Ces résultats nous amènent à penser que ces étudiants ont une bonne conception de la division par zéro lorsque $k \neq 0$. Un seul étudiant a pris la précaution de distinguer le cas où k = 0. En effet, l'étudiant no.29 écrit :

« $\frac{0}{0} =$ *indéterminé et* $\frac{k}{0}$ *où* $k \neq 0 \Rightarrow$ *impossible.* »

Parmi les étudiants qui ont répondu que la division par zéro est impossible, nous remarquons néanmoins une certaine confusion dans quelques-unes des réponses liant l'impossibilité tantôt au nombre 0 comme chez l'étudiant no.2 : « *lorsque le dénominateur est 0, la fraction est donc impossible. En d'autres mots, la réponse est 0.* », tantôt à l'infini comme chez l'étudiant no.9 : « *Ça ne se peut pas...! c'est égal à* $\pm\infty$. » De plus, nous constatons que certains étudiants ne distinguent pas les mots « *impossible* » et « *indétermination* ». En effet, l'étudiant no.27 écrit : « *impossible à* *faire cette opération. Indétermination.* » alors que l'étudiant no.31 répond qu'une division par zéro c'est : « *rien, l'impossible, l'indéterminé* » en ajoutant ensuite qu'une « *constante divisé par 0 est impossible.* »

Cette confusion est encore plus présente dans les réponses des étudiants à la question concernant l'infini. Tout d'abord, précisons que parmi les huit affirmations proposées, une seule proposition est vraie : « *l'infini ne représente aucun nombre* ». Seulement cinq étudiants ont réussi à l'identifier correctement. Mentionnons que dix-sept autres étudiants l'ont choisie parmi les affirmations, mais ils ont également sélectionné d'autres propositions. À titre d'exemple, l'étudiant no.8 considère que « *l'infini ne représente aucun nombre* » et « *l'infini est une variable* » sont les deux affirmations qui décrivent le mieux l'infini. L'étudiant no.9, quant à lui, choisit quatre affirmations pour décrire l'infini : « *l'infini est un nombre indéterminé* », « *l'infini ne représente aucun nombre* » et « *l'infini n'existe pas* ». Chez cet étudiant, il semble y avoir une grande ambiguïté autour de la notion d'infini ou un manque de rigueur dans l'utilisation des termes mathématiques. Le Tableau V montre la caractérisation de la notion d'infini par les étudiants:

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
INF1- Infini comme un processus	0
INF2- Infini comme un objet	30
INF3- Une inconnue	5
INF4- Une variable	1
INF5- Autre chose	4
INF6- N'existe pas	5

Tableau V- Caractérisation de la notion d'infini par les étudiants du premier groupe

Comparativement aux résultats des études de Monaghan (1986, 2001) où les étudiants voyaient principalement l'infini comme un processus sans fin, l'infini est surtout vu comme un objet dans ce groupe. En effet, nous constatons que la grande majorité des étudiants voient l'infini comme un objet ou plus précisément comme un ensemble d'objets (6 étudiants), un nombre (19 étudiants) ou un non-nombre (22 étudiants).

De plus, il est intéressant de noter les réponses des étudiants qui ont répondu que l'infini, c'est autre chose. Les étudiants no.7 et no.12 ont écrit que l'infini c'est un concept. L'étudiant no.20, quant à lui, considère l'infini comme un nombre déterminé et l'étudiant no.23 écrit que « *c'est la limite qui est inexistante des nombres* ».

Il semble que nos résultats corroborent toutefois certaines des conclusions des études de Monaghan (1986, 2001): les conceptions des étudiants sur le concept d'infini sont quelquefois contradictoires. En effet, deux étudiants affirment simultanément que l'infini représente l'ensemble des nombres et qu'il est un nombre indéterminé. Douze étudiants ont choisi les deux affirmations suivantes pour mieux décrire l'infini : « *l'infini est un nombre indéterminé* » et « *l'infini ne représente aucun nombre* ». Nous retrouvons également chez un étudiant les trois affirmations suivantes : « *l'infini représente l'ensemble des nombres* », « *l'infini est un nombre indéterminé* » et « *l'infini ne représente aucun nombre* ».

4.1.2 Analyse de la transposition didactique externe

Poursuivons l'analyse des résultats en examinant tout d'abord la transposition didactique externe, c'est-à-dire le programme et le manuel.

Le programme

L'analyse du programme associé au cours NYB permet tout d'abord d'identifier avec précision la « compétence » visée : « *Appliquer les méthodes du calcul intégral à l'étude de fonctions et à la résolution de problèmes* ».[32] On constate que cette compétence fait surtout référence à des applications du calcul intégral. En effet, en examinant la description rattachée à chacun des six concepts (l'intégrale indéfinie, les

[32] Ministère de l'Éducation du Québec, *Programme de Sciences de la nature* http://www.meq.gouv.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/program/200BO.pdf, p. 73 (page consultée le 15 juillet 2003)

limites, les intégrales définies et impropres, les équations différentielles simples, les volumes, les aires et les longueurs dans le plan et l'espace et les séries), on remarque que la place accordée à l'analyse ou à la preuve est très limitée dans le programme. Le programme demande principalement de « *calculer des volumes, des aires et des longueurs et construire des représentations graphiques dans le plan et dans l'espace* », « *calculer l'intégrale définie et l'intégrale impropre d'une fonction sur un intervalle* », « *traduire des problèmes concrets sous forme d'équations différentielles et résoudre des équations différentielles simples* »[33]... Néanmoins, on retrouve un élément d'analyse avec les séries où l'on demande d'« *analyser la convergence des séries* »[34] : les étudiants doivent être en mesure de tirer des conclusions appropriées sur la convergence des séries. Mais il se pourrait que « l'analyse » se limite à l'application de quelques tests.

Soulignons que pour le concept de limite, une précision est apportée pour l'apprentissage des formes indéterminées et de la règle de L'Hospital. La formulation utilisée pour énoncer l'élément de la compétence semble plutôt favoriser l'apprentissage de « techniques » servant à lever une indétermination : « *Calculer les limites des fonctions présentant des formes indéterminées.* »[35]

On constate qu'aucune place n'est accordée à l'apprentissage des théorèmes d'analyse tels que les théorèmes de Rolle, de Lagrange et de Cauchy qui, rappelons-le, permettent de démontrer la règle de L'Hospital. Ce qui est intrigant, c'est que parmi les buts généraux du programme de Sciences de la nature, on retrouve « *Raisonner avec rigueur* » où les étudiants doivent « *repérer un certain nombre d'idées en rapport avec le sujet, les comparer, les classifier, les évaluer, enchaîner les idées pertinentes dans un ordre logique et construire une argumentation*

[33] Ibid., p. 73
[34] Ibid., p. 73
[35] Ibid., p. 73

cohérente, un raisonnement, une preuve ».[36] Le programme du cours de calcul intégral ne paraît donc pas tenir compte de ce but.

Le manuel

Afin de pouvoir établir un lien entre le programme et le manuel, nous avons examiné le choix des contenus pour essayer de repérer les six concepts mentionnés dans le programme. Rappelons tout d'abord que le manuel utilisé dans ce groupe est *Calcul intégral* de Thomas, Finney, Weir, Giordano (2001) adapté par Godbout (2002). Ce manuel se divise en quatre chapitres. Il débute avec la théorie sur l'intégration. On y retrouve la somme de Riemann, les intégrales définies et indéfinies et les équations différentielles. Le deuxième chapitre présente quelques applications de l'intégrale telles que le calcul de longueurs, d'aires et de volume, les surfaces de révolution, le travail et la pression, les moments et les centres de masse. Au chapitre 3, on retrouve les principales techniques d'intégration : l'intégration par parties, les substitutions trigonométriques et la méthode des fractions partielles. La règle de L'Hospital et les intégrales impropres concluent le chapitre. Le manuel se termine avec les séries infinies où différentes séries sont présentées telles que les séries infinies, à termes positifs, alternées, entières, de Taylor et de Maclaurin et du binôme. Cette vue d'ensemble nous permet de constater que le manuel couvre toutes les notions du programme. Pour cette étude, seule la section sur la règle de L'Hospital sera analysée.

D'après les commentaires des auteurs dans l'avant-propos, « *chaque section commence par une liste de sous-titres numérotés en rouge qui mettent les concepts clefs en évidence* ».[37] Dans la section de la règle de L'Hospital, on retrouve dans l'ordre les trois « concepts clefs » suivants: « *Formes indéterminées 0/0* », « *Formes indéterminées* ∞/∞, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$ » et « *Formes indéterminées* 1^∞, 0^0, ∞^0 ».

---

[36] Ibid., p. 3

[37] THOMAS, G.B., FINNEY, R.L., WEIR, M.D et GIORDANO, F.R. (2001) Calcul intégral, Addison Wesley Longman, p. v

Notons d'emblée qu'il nous apparaît curieux que chacune de ces formes soit présentées comme un concept clef.

Tout d'abord, les auteurs présentent la forme indéterminée 0/0 comme « *une expression dénuée de sens* »[38] (!) et précisent que les limites présentant des formes indéterminées peuvent « *être faciles ou difficiles à établir algébriquement* » comme c'est le cas pour $\lim_{x \to 0} (\sin x)/x$. Les auteurs enchaînent avec l'énoncé d'une version réduite de la règle de L'Hospital[39] :

> *Règle de L'Hospital :*
> *Supposons que f(a) = g(a) = 0; de plus supposons que f'(a) et g'(a) existent, et que g'(a) ≠ 0.*
>
> *Alors,*
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Cette version est applicable seulement pour des limites où x tend vers un nombre a, pour la forme 0/0 et lorsque $f'(a)$ et $g'(a)$ existent. La règle de L'Hospital est ainsi introduite comme un moyen qui permet d'évaluer ce type de limite avec une plus grande facilité. On retrouve ensuite une preuve de cette règle qui ne fait pas appel aux théorèmes classiques (Rolle, Lagrange, Cauchy) mais qui fait davantage usage d'arguments graphiques[40] :

[38] Ibid., p. 217
[39] Ibid., p. 218
[40] Ibid., p. 218-219

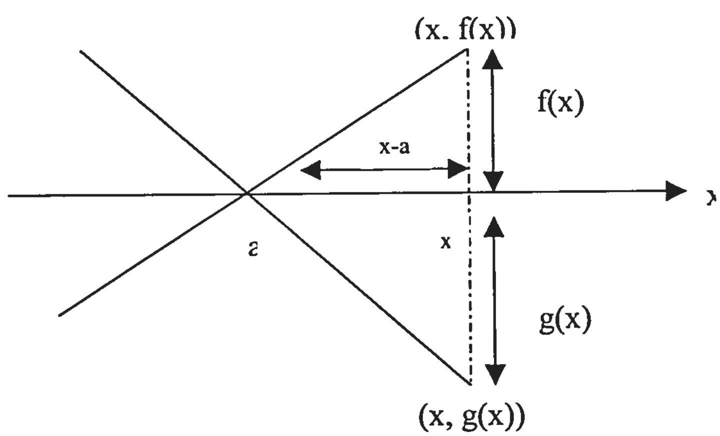
Argument graphique.
Par un agrandissement dans le voisinage du point $(a, f(a)) = (a, g(a)) = (a, 0)$ les graphes de f et g apparaissent pratiquement comme des droites, car des fonctions dérivables sont localement linéaires. Soit m_1 et m_2, les pentes des droites correspondantes respectivement à f et g. Pour x dans le voisinage de a, nous pouvons écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{f(x)}{x-a}}{\dfrac{g(x)}{x-a}} \approx \frac{m_1}{m_2}.$$

Lorsque $x \to a$, alors m_1 et m_2 tendent respectivement vers $f'(a)$ et $g'(a)$.

Par conséquent,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{m_1}{m_2} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$



Agrandissement des graphes des fonctions dérivables f et g au voisinage de $x = a$.

Confirmation analytique.
En travaillant à rebours à partir de $f'(a)$ et de $g'(a)$, qui sont elles-mêmes des limites, nous trouvons successivement :

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \overbrace{\frac{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}}^{\text{Définition de la dérivée}} = \lim_{x\to a}\overbrace{\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}}^{\text{Limite d'un quotient}}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\underbrace{\frac{f(x)-0}{g(x)-0}}_{f(a)=g(a)=0} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

On sent ici un certain effet de la calculatrice à affichage graphique où l'usage des « zooms » successifs permet d'arriver à des fonctions localement linéaires (Tall, 1996). À part de ne traiter qu'un seul cas de la règle de L'Hospital, cette preuve est cohérente et rigoureuse.

Quelques exemples d'application de cette règle suivent cet exposé de la théorie :
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$. Ces exemples permettent d'établir les étapes pour la vérification des hypothèses d'application de la règle de L'Hospital et la démarche pour bien l'appliquer. Les deux premiers exemples sont des limites où une application directe de la règle de L'Hospital suffit pour lever l'indétermination tandis que pour la troisième limite, la règle de L'Hospital telle que présentée ne permet pas de lever l'indétermination. Voici la solution présentée par les auteurs pour cette limite[41] :

[41] Ibid., p. 219

Solution
Puisque nous avons une indétermination de type 0/0, nous pouvons appliquer la règle de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} \Big| x = 0 \; = \; ?$$

Que faire avec cette limite? La première forme de la règle de L'Hospital n'en permet pas le calcul car la dérivée de $g(x) = x^3$ est nulle en $x = 0$.

Pour calculer cette limite, les auteurs introduisent la *règle forte de L'Hospital* [42] :

Règle forte de L'Hospital :
Supposons que $f(a) = g(a) = 0$; de plus, supposons que f et g sont dérivables sur un intervalle I contenant a, et que $g'(x) \neq 0$ sur I si $x \neq a$.
Alors,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

à condition que la limite du membre de droite existe.

Cette règle permet de répéter le processus et ainsi arriver au résultat désiré. Après avoir énoncé cette règle, les auteurs renvoient à l'annexe A.7. pour la preuve. Dans cette annexe, les auteurs commencent par reformuler la règle de L'Hospital « *dans une notation plus appropriée aux fins de la démonstration*[43] » qui est la forme dans laquelle elle est normalement présentée :

[42] Ibid., p. 220
[43] Ibid., p. 371

Règle forte de L'Hospital : Supposons que $f(x_0) = g(x_0) = 0$; de plus, supposons que f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert]a, b[contenant x_0 et que $g'(x) \neq 0$ partout sur l'intervalle]a, b[si $x \neq x_0$. Alors,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

à condition que la limite du membre de droite existe.

Il est ensuite mentionné que « *la démonstration de cette règle repose sur le théorème de la moyenne de Cauchy, qui est une généralisation du théorème de la moyenne de Lagrange faisant intervenir deux fonctions plutôt qu'une*[44]. » Le théorème de la moyenne de Cauchy est énoncé. Avant de présenter la preuve de ce théorème, les auteurs font référence à l'annexe A.4.2 où le théorème de la moyenne de Lagrange est présenté et énoncé. Rappelons que la preuve du théorème de Lagrange nécessite la connaissance du théorème de Rolle. Ce théorème est énoncé dans l'annexe A.4.1. Suite à la preuve du théorème de Cauchy, l'annexe A.7 se termine avec la preuve de la règle forte de L'Hospital.

On peut supposer un certain réalisme de la part des auteurs (ou des traducteurs) en confinant à l'annexe la démonstration de la règle de L'Hospital et les théorèmes d'analyse. En effet, n'étant pas mentionnés dans le programme du cours, ces théorèmes ne sont généralement pas étudiés en classe. Par ailleurs, il nous faut souligner le caractère original du manuel, car c'est la première fois que nous constatons une présentation successive de deux versions de la règle de L'Hospital. La première version de la règle de L'Hospital se prête mieux à une validation graphique de l'ordre de l'explication descriptive qui permet de donner un sens à la règle, mais la seconde forme (la règle « forte ») est celle qui est normalement entendue par règle de L'Hospital et qu'on enseigne.

---

[44] Ibid., p. 371

Cette sous-section se termine avec deux types d'applications de la règle dite « forte » de L'Hospital :

1. Application de la règle forte de L'Hospital pour une forme indéterminée 0/0
2. Application de la règle de L'Hospital aux limites unilatérales

Pour la première application, on retrouve deux exemples : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x+x^2}$. Pour cette seconde limite, les auteurs incluent dans la solution une mise en garde contre un emploi abusif de la règle de L'Hospital. Les auteurs montrent qu'en appliquant une deuxième fois la règle de L'Hospital sans avoir vérifié a priori les conditions d'application, la réponse diffère et amène à une valeur incorrecte.

Pour le second type d'application, les auteurs ont choisi de calculer une limite à droite et une à gauche : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x^2}$ où une application de la règle de L'Hospital permet de lever l'indétermination.

Les auteurs poursuivent avec les formes indéterminées ∞/∞, $\infty\cdot 0$ et ∞-∞. Tout d'abord, ils précisent qu'une variante de la règle de L'Hospital s'applique à la forme indéterminée ∞/∞. On retrouve ensuite un exemple d'application pour chacune de ces trois formes. Pour illustrer la forme ∞/∞, les auteurs ont choisi les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec x}{1+\tan x}$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}$. Pour la première limite, étant donné que le numérateur et dénominateur sont discontinus en $x = \pi/2$, la règle de L'Hospital ne peut être appliquée et les limites à droite et à gauche doivent être considérées. La deuxième limite, quant à elle, peut être évaluée par une application directe de la règle de L'Hospital. Pour les limites présentant les formes indéterminées $\infty\cdot 0$ et ∞-∞, le nécessaire travail de réécriture des expressions est présenté pour arriver à des formes respectant les conditions d'application de la règle de L'Hospital. En effet, pour la limite présentant une forme indéterminée de type $\infty \cdot 0$: $\lim_{x\to\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(x \sin\frac{1}{x}\right)$, on montre comment transformer les produits de fonctions en quotients pour avoir la forme 0/0 et ainsi pouvoir appliquer la règle de L'Hospital. Pour le cas de la limite présentant la forme ∞-∞, les auteurs ont choisi une différence de deux fonctions rationnelles : $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ où il faut réécrire ces fonctions avec un dénominateur commun pour arriver à la forme 0/0 et ainsi être en mesure d'appliquer la règle de L'Hospital et de calculer la valeur désirée.

La troisième sous-section concerne les formes indéterminées 1^∞, 0^0 et ∞^0. Étant donné que ces formes nécessitent des transformations pour retrouver les conditions d'application de la règle de L'Hospital, les auteurs fournissent, dans un encadré aux allures de recette, les différentes étapes qui permettent de trouver la limite de ces formes indéterminées[45] :

Méthode pour trouver la limite d'une forme indéterminée 1^∞, 0^0 et ∞^0	
Étape 1	*Prenez le logarithme naturel de la forme indéterminée f(x).*
Étape 2	*Appliquez la règle de L'Hospital pour trouver la limite de ln f(x).*
Étape 3	*Prenez l'exponentielle du résultat pour obtenir la limite de f(x).*
	Si $\lim_{x\to a}\ln f(x)=L$, *alors* $\lim_{x\to a} f(x)=e^{\ln f(x)}=e^{\lim_{x\to a}\ln f(x)}=e^{L}$, *où a peut représenter un nombre réel ou l'infini.*

[45] THOMAS, G.B., FINNEY, R.L., WEIR, M.D et GIORDANO, F.R. (2001) Calcul intégral, Addison Wesley Longman, p. 223

Suite à cet encadré, on retrouve un exemple d'application pour chacune de ces trois formes indéterminées. La forme 1^{∞} est introduite avec la limite suivante : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Pour la forme 0^0, il s'agit de déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ et il faut calculer $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$ pour la forme ∞^0. Pour bien illustrer cette méthode, nous présentons le calcul qui permet de trouver la limite présentant la forme indéterminée de type ∞^0 : [46]

Solution
Soit $f(x) = x^{1/x}$. *Alors,*

$$\ln f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

En appliquant la règle de L'Hospital à $\ln f(x)$, *nous obtenons :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \ln f(x)} = e^0 = 1.$$

Étant donné le nombre limité d'exemples présentés, les étudiants sont portés à reproduire les transformations utilisées dans ces exemples. Notons qu'il n'est fait mention nulle part des cas où la règle de L'Hospital, lorsqu'elle peut être appliquée, ne conduit pas à la réponse (voir 2.1.5).

La section se termine avec cinquante-six exercices. Précisons que quarante-trois d'entre eux font référence à des calculs de limite présentant des formes

[46] Ibid., p. 224

indéterminées. Les treize autres sont des problèmes d'analyse où six d'entre eux s'appuient sur l'utilisation d'une calculatrice à affichage graphique. Le problème 51 en est un exemple intéressant [47] :

> *51. Précision d'une calculatrice graphique. Soit*
>
> $$f(x)=\frac{1-\cos x^6}{x^{12}}.$$
>
> *Expliquez pourquoi certains graphes de f peuvent donner une information fausse au sujet de* $\lim_{x\to 0} f(x)$. *(Indication : Essayez la fenêtre [-1, 1] sur [-0,5; 1].)*

Pour ce problème, les auteurs semblent vouloir montrer les limites de la calculatrice à affichage graphique et développer chez l'étudiant un esprit critique face à son utilisation dans le contexte de limites et de manipulation « d'infiniment petit ». En effectuant le calcul de la limite, on calcule que la limite de la fonction est égale à ½ lorsque x prend des valeurs de plus en plus près de 0. Néanmoins, en utilisant la calculatrice, on s'aperçoit que lorsque la valeur absolue de x est plus petite que 0,1, la calculatrice évalue numériquement $\cos x^6$ à exactement 1 bien que x^6 et x^{12} soient encore différents de 0. Cela donne donc 0 pour l'évaluation de la limite. Pour les cinq autres problèmes faisant usage de la calculatrice, deux font référence à la forme indéterminée 0/0, un à la forme ∞-∞. L'autre problème permet d'établir « *la place de ln x parmi les puissances de x* » et le dernier est caractérisé par « *le prolongement continu de* $(\sin x)^x$ *sur* $[0,\pi]$ ».

Les sept autres problèmes d'analyse sont des mises en situation où il est demandé de donner des exemples, de justifier, de commenter ou d'expliquer. À titre d'exemple, nous présentons le problème 44 :

[47] Ibid., p. 226

44. Forme ∞/∞. Dans chacun des cas, donnez un exemple de deux fonctions dérivables f et g telles que $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$, *et qui satisfont à la condition donnée.*

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=3$ *b)* $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

Ce problème s'apparente à un calcul de limite, mais il s'agit de trouver des fonctions qui respectent les conditions mentionnées.

Suite à cette analyse, nous constatons que le manuel respecte les exigences du programme en ce sens où les nombreux exercices permettent aux étudiants de reconnaître les cas d'application des techniques, de maîtriser les techniques pour lever une indétermination et d'atteindre ainsi les objectifs du programme de NYB concernant les formes indéterminées.

4.1.3 Analyse de l'enseignement donné des formes indéterminées

Afin de s'assurer de l'atteinte de ces objectifs, le professeur doit établir son enseignement en essayant de respecter le programme. Voyons à présent la vision du professeur de ce premier groupe sur l'enseignement des formes indéterminées.

4.1.3.1 Vision du professeur

Pour le professeur, deux finalités sont essentiellement liées à l'enseignement des formes indéterminées : l'enseignement de ce contenu favoriserait le développement des capacités d'analyse et d'abstraction des étudiants et il leur permettrait de prendre conscience que leur intuition en matière d'infiniment petit et d'infiniment grand peut être trompeuse.

Les connaissances préalables mentionnées par le professeur pour l'apprentissage des formes indéterminées sont la « *manipulation des fractions symboliques* », c'est-à-dire comprendre « *l'influence qu'un dénominateur (ou qu'un numérateur) croissant (ou décroissant) exerce sur la valeur de la fraction* ». De plus, il indique que le calcul des limites, la définition de la dérivée, les intégrales impropres, les suites et les séries sont les principales notions en lien avec les formes indéterminées.

Le professeur précise deux difficultés lors de l'apprentissage des formes indéterminées. La première difficulté concerne « *l'ambiguïté de la notation des formes indéterminées* » et la seconde est « *le manque de réflexe des étudiants quand ils ont à juger s'ils sont en présence d'une forme indéterminée ou non* ». Il fournit à titre d'exemple la forme $\infty/0$ qui ne représente pas une forme indéterminée, car un infiniment grand divisé par un infiniment petit donne nécessairement un infiniment grand.

Afin de contrer ces difficultés et de bien faire saisir le caractère indéterminé des formes indéterminées, il utilise l'aire d'un rectangle dont la base devient infiniment grande alors que la hauteur devient infiniment petite. En effet, l'utilisation de l'aire d'un rectangle permet aux étudiants de travailler le sens des expressions liant le zéro et l'infini et de distinguer les formes déterminées des formes indéterminées. Maurice (2000, p.233) avait également mentionné que l'un des facteurs pouvant influencer le classement des formes indéterminées fait référence au « *syndrome du zéro et de l'infini* » :

> « *Si le sens d'une forme présentant les symboles 0, ∞ et l'opérateur, est mal interprété, alors l'élève peut mal classer cette forme et les formes contenant zéro et l'infini.* »

Mentionnons que le professeur n'utilise aucune ressource autre que le tableau et la craie pour cet enseignement. L'utilisation du manuel est limitée aux exercices choisis par le professeur.

4.1.3.2 Les observations en classe

Analysons à présent les observations faites en classe pour vérifier si les différents éléments de sa stratégie d'enseignement sont repérables. Le professeur introduit les formes indéterminées avec le calcul d'une intégrale impropre $\left(\int_1^{\infty} \frac{\ln\ x}{x^{3/2}}\ dx\right)$. Il convient de noter tout de suite qu'il n'y a pas de correspondance directe entre la présentation du manuel et celle du cours. En effet, dans le manuel, les intégrales impropres sont vues à la suite des formes indéterminées.

Le professeur considère ensuite cinq cas où la hauteur d'un rectangle est infiniment petite et sa base infiniment grande. Il s'agit de calculer la limite de l'aire de ce rectangle lorsque la variable x prend des valeurs infiniment grandes. Les trois premiers cas représentent des calculs de limite présentant des formes indéterminées où une simplification algébrique permet de lever l'indétermination (premier cas : hauteur = $1/x$ et la base = x, deuxième cas : hauteur = $1/x^2$ et la base = x, troisième cas : hauteur = $1/x$ et la base = x^2). L'indétermination du quatrième cas (hauteur = $1/x$ et base = e^x) peut être levée en comparant la croissance des deux fonctions. Ce cas représente une ouverture sur l'analyse des fonctions. C'est le dernier cas (hauteur = $1/\sqrt{x}$ et base = ln x) qui introduit la règle de L'Hospital.

Le professeur énonce ainsi la règle de L'Hospital sans la démontrer :

> « *Règle de L'Hospital: Soit* $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *qui donne* ∞/∞ *ou 0/0 (formes indéterminées). Alors on peut poser :*
> $$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$
> *à condition que la dernière limite existe.* »

Remarquons que cette règle correspond, à peu de choses près, à la *règle forte de l'Hospital* du manuel. Il poursuit avec cinq exemples de cette règle, dont deux exemples de la forme indéterminée de type 0/0, deux de la forme ∞/∞ et le dernier exemple est une forme déterminée où la règle de L'Hospital ne s'applique pas. Tout d'abord, les problèmes concernant la forme 0/0 sont les suivants : $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$ et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Pour ces deux calculs de limite, une application directe de la règle de L'Hospital suffit pour lever l'indétermination. Rappelons que le deuxième exemple a été utilisé pour introduire la règle de L'Hospital dans le manuel, mais il n'y avait aucun calcul rattaché à l'explication des auteurs. Pour la forme indéterminée ∞/∞, les limites choisies par le professeur sont : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ et $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$. Ces deux limites sont calculées directement avec la règle de L'Hospital.

Après ces problèmes, il présente un cas qu'il nomme *problématique* : $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. En effet, l'application de la règle de L'Hospital dans cette limite ne permet pas de lever l'indétermination puisqu'en appliquant à deux reprises la règle de L'Hospital, on revient à l'expression initiale (voir 2.1.5). Il expose deux solutions alternatives telles qu'une simplification algébrique et une substitution trigonométrique. Cet exemple est un ajout par rapport au manuel dans le développement d'un regard critique à l'endroit de la règle de L'Hospital.

Pour bien distinguer les formes indéterminées des formes déterminées, il dresse deux listes distinctes. Toutes les formes déterminées sont analysées et évaluées. Il clarifie également l'ambiguïté entre les termes « non-défini », « n'existe pas » et « indéterminé » en demandant aux étudiants de calculer la limite suivante : $\lim_{x\to\infty}(\sin x)$. Cette limite « n'existe pas » ou est « non-définie » car « *le sinus ne tend pas vers une valeur unique lorsque* $x\to\infty$. » Le professeur précise que dans le cadre du cours, le mot « 'indéterminé' *sous-entend qu'il est possible de déterminer* ». Les limites présentant des formes indéterminées sont donc déterminables.

Les formes indéterminées outre 0/0 et ∞/∞ sont ensuite expliquées à l'aide d'exemples. Tout d'abord, pour la forme $0\cdot\infty$, le professeur choisit la limite : $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. Remarquons qu'elle correspond à une des limites présentées dans le manuel. Le travail de réécriture des expressions est le même que celui du manuel. Pour la forme indéterminée $\infty-\infty$, le professeur prend deux limites où des démarches différentes sont utilisées pour lever l'indétermination. La première est : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$, il suffit de ramener cette différence de deux fonctions rationnelles à une fonction au dénominateur unique. Elle correspond également à la limite présentée par les auteurs du manuel. Pour la seconde limite : $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$, il utilise l'expression du conjugué de la fonction et la propriété de la limite d'un produit pour lever l'indétermination et calculer la limite.

Pour les formes 0^0 et 1^∞, le professeur présente en classe les deux exemples du manuel : $\lim_{x\to0^+}\left(x^x\right)$pour la forme 0^0 et $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ pour la forme 1^∞. Le travail de réécriture de ces expressions est le même que celui présenté dans le manuel. Mentionnons que le professeur ne présente aucun problème présentant une forme indéterminée de type ∞^0.

Nous remarquons dans cet enseignement que le professeur essaie de compléter l'intuition première des étudiants avec une analyse sur l'infiniment petit et l'infiniment grand. En effet, après chaque calcul de limite, une interprétation de la réponse est faite. À titre d'exemple, à partir de la limite suivante : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ dont l'évaluation donne 0, le professeur conclut que les « *deux fonctions grandissent à peu près à la même vitesse.* » En travaillant sur l'interprétation, l'enseignement en classe semble donc chercher à favoriser le développement des capacités d'analyse des étudiants.

Finalement, nous percevons que s'il y a validation dans la structure de la leçon (départ non-expérimental), elle est de nature opératoire implicite : les règles sont expliquées et les étudiants sont amenés à les mettre en pratique avec de nombreux exercices.

4.1.3.3 L'examen

Le professeur a inclus les formes indéterminées dans deux de ses questions d'examen. Dans la première question, il demande de calculer trois limites. La première limite $\left(\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4x^2}{x-\sin x}\right)\right)$ présente une forme 0/0 où deux applications successives de la règle de L'Hospital sont nécessaire pour lever l'indétermination. La deuxième limite présente une forme $0\cdot\infty$ $\left(\lim_{x\to\infty}\left(x \sin(a/x)\right)\right)$. Il s'agit de transformer en quotient le produit de ces fonctions pour obtenir la forme 0/0 et pouvoir appliquer la règle de L'Hospital. La dernière limite $\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{\ln(1-x)}\right)\right)$ présente une forme déterminée ($1/0^-$) où la limite se calcule directement.

Au numéro 3, les formes indéterminées sont intégrées dans les suites. Le professeur a formulé la question suivante : « *Dire si chacune des suites converge ou diverge. (Justifier.)* a) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ et b) $\left\{\frac{3\sqrt{n^3}}{\sqrt{5n+1}}\right\}$ » C'est pour la seconde suite qu'une application de la règle de L'Hospital est nécessaire pour lever l'indétermination et pouvoir ainsi apporter une conclusion adéquate sur la convergence de la suite.

Les calculs de limite reflètent les problèmes enseignés en classe. En effet, pour chacune de ces limites, les étudiants ont vu en classe la méthode qui leur permettait de bien les évaluer. Pour la troisième question, étant donné que les observations en classe se limitaient uniquement à l'enseignement des formes indéterminées, nous supposons que les suites ont ensuite été vues comme application possible des formes indéterminées comme c'est le cas dans le manuel.

4.1.4 Analyse des productions des étudiants après l'enseignement

Pour pouvoir établir l'impact de l'enseignement des formes indéterminées sur les conceptions des étudiants, nous avons essayé d'examiner à travers leurs productions l'évolution de leurs conceptions. Pour ce faire, nous avons analysé le second questionnaire et les productions à l'examen. Deux étudiants étaient absents lors de la distribution de ce questionnaire. L'analyse se base donc sur les copies de trente étudiants.

Le questionnaire

Mentionnons d'abord que pour chacune des questions de ce questionnaire, nous présentons la répartition des réponses des étudiants à l'aide d'un tableau. Par convention, la bonne réponse est en caractères gras. La liste des abréviations utilisées dans les tableaux est donnée dans l'Annexe G. Les cases ombragées permettent de situer des éléments retenus dans l'analyse.

Le premier calcul de limite est une limite de forme déterminée k/0. Étant donné que le dénominateur de la fonction s'annule en $x = \pi/2$, les étudiants devaient calculer les limites à droite et à gauche de cette valeur. La limite existe en $\pi/2$ si ces deux limites sont égales. Ce qui n'est pas le cas car la limite à gauche de $\pi/2$ est égale à $+\infty$ et celle à droite à $-\infty$. Par conséquent, la limite en $\pi/2$ n'existe pas ou est impossible. Le Tableau VI présente la répartition des réponses des étudiants en lien avec leurs conceptions sur les notions de limite et de division par zéro du premier questionnaire :

N	Réponses données	Conceptions: limite (L)						Conceptions: division par zéro (D)						
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7
5	**k/0, limite n'existe pas**	**1**	**4**	**4**						**2**		**4**	**1**	
5	k/0	1	5	4								4	1	
6	k/0 = ∞	2	4	3		1				3	1	4	1	
2	k/0 = 0	1	2					1				1		
2	k/0 = F.I.	1	1	1				1		1				
1	k/0 = F.I. + R. de H.	1	1									1		
2	R. de H.	1	2	2				1		1		1		
7	Aucune réponse	3	4	5			1	1		2		6		
30														

Tableau VI- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1a) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et de division par zéro

On constate tout d'abord que seulement cinq étudiants sont arrivés à la bonne conclusion et que parmi eux, quatre associaient, avant l'enseignement des formes indéterminées, l'impossibilité à la division par zéro. Néanmoins, on ne retrouve aucune démarche dans leur réponse, c'est-à-dire aucun étudiant n'a vérifié si la limite à droite du point était égale à la limite à gauche du point. On ne peut donc pas savoir si leur réponse provient du fait que la limite n'existe pas ou du fait qu'il n'est pas possible d'appliquer la règle de L'Hospital ou encore du fait qu'il n'est pas possible de diviser par zéro.

En examinant les réponses de ces étudiants à la question sur la division par zéro du premier questionnaire, on remarque tout d'abord qu'un de ces étudiants a apporté une bonne réponse au calcul de limite, même s'il n'avait pas réussi à fournir une réponse adéquate au premier questionnaire. En effet, l'étudiant no.8 avait répondu qu'une division par zéro c'est une « *indétermination* » au premier questionnaire et au second questionnaire, il écrit : « 2.29/0 = non-défini ». Rappelons que le professeur avait distingué en classe les termes « non-défini » et « indétermination »; l'étudiant a bien intégré cette distinction montrant ici un effet positif de l'enseignement. Son traitement montre par ailleurs un passage direct au numérique : l'étudiant ne considère plus la limite de la fonction mais uniquement l'évaluation du numérateur et du dénominateur que la calculatrice lui présente et qu'il arrondit rapidement. Les quatre autres étudiants semblent avoir associé l'impossibilité de cette limite avec l'impossibilité d'une division par zéro (D5). À titre d'exemple, l'étudiant no.5, qui répondait au premier questionnaire, que « *c'est une expression qui est impossible, car rien ne peut être divisé par 0* », écrit au second questionnaire que : « $\lim \frac{\left(\ln \frac{\pi}{2}\right)}{0}$ » et conclut que cette limite n'existe pas. De son côté, l'étudiant no.15 affirme au premier questionnaire que k/0 représente « *une asymptote dans une fonction ou une impossibilité de calculer k/0* » et au second questionnaire, il écrit que la limite est *non-définie (division par zéro)*. L'étudiant no.20, quant à lui, répond au premier questionnaire qu'une expression de la forme k/0 c'est « *une division impossible a réalisé* (sic) *puisqu'on ne peut diviser par 0* » et conclut que le calcul de la limite est impossible. Leur conception (adéquate) de la division par zéro pourrait avoir fait obstacle au passage à la limite.

Examinons à présent leur conception de la limite. La limite est surtout vue selon deux caractéristiques : la possibilité d'atteindre ou non la limite (L2) et le mouvement d'une limite (L3). Tout d'abord, le Tableau VII montre que la majorité des étudiants considèrent que la limite peut être atteinte (L2.1) :

N	Réponses données	L2	
		2.1	2.2
5	**k/0, limite n'existe pas**	**4**	
5	k/0	3	2
6	$k/0 = \infty$	2	2
2	$k/0 = 0$	1	1
2	k/0 = F.I.	1	
1	k/0 = F.I. + R. de H.	1	
2	R. de H.	2	
7	Aucune réponse	3	1
30			

Tableau VII- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1a) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractéristique d'atteindre ou non la limite

Dans ce calcul, la limite ne pouvait pas être atteinte à cause de la discontinuité en $x = \pi/2$. Parmi les cinq étudiants qui ont répondu que la limite n'existe pas, quatre d'entre eux disaient initialement qu'une limite peut être atteinte. On ne peut donc pas savoir si leur réponse a été influencée par leur conception initiale de la limite.

Il faut constater que l'étudiant no.14 avait écrit au premier questionnaire que « *la limite est une valeur qui ne sera jamais atteinte* » et il répond que la limite est égale à 0. À prime abord, on pourrait penser que sa conception sur la limite a évolué suite à l'enseignement des formes indéterminées. Néanmoins en examinant sa réponse fournie à la question concernant la division par zéro au premier questionnaire, on note que sa réponse semble plutôt avoir été influencée par sa conception sur la division par zéro. En effet, il écrit : « *une division par 0 donne 0 donc k/0 ne représente que le chiffre 0* ». Il est donc possible que les conceptions sur la division par zéro influencent davantage les réponses des étudiants que leurs conceptions sur la limite.

Parmi les six étudiants qui ont affirmé que k/0 = l'infini, il faut tout d'abord remarquer l'étudiant no.28 qui, au premier questionnaire, avait écrit que la limite représente « *un nombre infiniment grand* ». Sa réponse fournie au calcul de limite pourrait venir de cette conception erronée de la limite. Également, l'étudiant no.32 avait répondu qu'une division par zéro représente l'infini au premier questionnaire. Sa conception erronée sur la division par zéro ne semble pas avoir évolué suite à l'enseignement des formes indéterminées. Ceci est également vrai pour l'étudiant no.14 qui croit qu'une division par zéro donne 0 peut importe le contexte dans lequel elle se situe. Leur conception erronée de la division par zéro s'instituer en obstacle lors de l'apprentissage des formes indéterminées.

En plus de l'autre étudiant qui a conclu que k/0 = 0, trois étudiants ont identifié la forme k/0 comme une forme indéterminée, cinq se sont contentés d'identifier la forme k/0, un d'entre eux a dérivé le numérateur et le dénominateur, croyant pouvoir appliquer la règle de L'Hospital pour lever « cette indétermination », deux ont également fait dans une amorce de la règle de L'Hospital une dérivation du numérateur et du dénominateur et sept n'ont pas répondu à la question.

À l'issue de ces résultats, on constate que la forme k/0 suscite encore une certaine confusion chez la plupart des étudiants. De façon générale, les étudiants semblaient avoir une conception initiale adéquate de la division par zéro. Néanmoins, on constate qu'une rupture avec cette conception paraît nécessaire pour arriver à calculer correctement une limite présentant une forme de type k/0. Également, on note que les conceptions des étudiants sur la division par zéro semblent être davantage ancrées que leurs conceptions sur la limite.

Les deux calculs suivants concernaient des limites de fonctions rationnelles où des fonctions trigonométriques figuraient aux numérateurs et des fonctions polynomiales composaient les dénominateurs. Notons que ces calculs de limite étaient des situations de non-indétermination et pouvaient être résolus par une simple analyse des numérateurs c'est-à-dire des fonctions tangente et sinus. En effet, pour la fonction tangente, les étudiants devaient savoir que la fonction est discontinue et qu'elle se déploie périodiquement entre $-\infty$ et ∞. Pour la fonction sinus, les étudiants devaient se rappeler que la fonction est périodique et qu'elle est bornée entre -1 et 1.

Le Tableau VIII donne la répartition des étudiants pour le calcul de limite faisant intervenir la fonction tangente au numérateur en lien avec leurs conceptions sur les notions de limite et d'infini :

N	**Réponses données**	**Conceptions: limite (L)**						**Conceptions: infini (INF)**					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
7	**N'existe pas**	**4**	**3**	**5**					**5**			**2**	**3**
1	$\tan \infty = \infty$		1	1					1	1			
9	$\tan \infty = \infty +$ R. de H.	4	8	5					9	1			1
9	$k/\infty = 0$	1	7	5		1	1		9	2	1	1	
4	Aucune réponse	2	4	3					4			1	
30													

Tableau VIII- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1b) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Sept étudiants ont conclu correctement que la limite est impossible, toutefois il n'y avait pas d'explication rattachée à leur réponse. Étant donné qu'ils ne peuvent appliquer la règle de L'Hospital, certains étudiants ont peut être conclu à l'impossibilité de la limite. Fait intéressant, trois d'entre eux croient que l'infini n'existe pas (INF3). Il se pourrait qu'ils établissent un parallèle entre l'impossibilité de l'infini et l'impossibilité de la limite.

Le Tableau IX présente la caractérisation de l'infini comme un objet (INF2) :

N	**Réponses données**	**INF 2**		
		2.1	2.2	**2.3**
7	**N'existe pas**		**2**	**5**
1	tan ∞ = ∞	1		1
9	tan ∞ = ∞ + R. de H.	3	7	6
9	k/∞ = 0	2	5	5
4	Aucune réponse		3	3
30				

Tableau IX- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1b) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'infini comme un objet

Tout d'abord, il faut remarquer que des réponses telles que « tan ∞ = ∞ » et « k/∞ = 0 » laissent supposer que pour plusieurs étudiants l'infini se manipule comme un nombre, sans nécessité d'un passage à la limite. Parmi ces dix-neuf étudiants, six d'entre eux considèrent l'infini comme un nombre (INF2.2), sept étudiants voient l'infini comme un non-nombre (INF2.3) et six prennent simultanément l'infini comme un nombre et un non-nombre (INF2.2 et INF2.3) montrant ainsi une contradiction dans leurs conceptions sur l'infini.

En examinant de plus près les dix étudiants ont répondu que tan ∞ = ∞, on note que neuf d'entre eux ont appliqué la règle de L'Hospital pour calculer la limite. À titre d'exemple, l'étudiant no.5 écrit : « $\frac{\infty}{\infty} : F.I. \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(\tan x)'}{2x}\right)$ » Pour arriver à cette conclusion, les étudiants ont peut-être évalué la valeur de *tan x* lorsque *x* prend des valeurs infiniment grandes à l'aide de leur calculatrice sans tenir compte de la discontinuité périodique de la fonction considérant l'infini comme un grand nombre. En utilisant une calculatrice numérique de base, la lettre « E » apparaît pour signaler à l'utilisateur qu'il est impossible de calculer l'expression demandée. La calculatrice à affichage graphique fournit, quant à elle, deux messages d'erreur plus explicites : « ERR : DOMAIN et ERR : DIVIDE BY 0 ». En essayant d'évaluer la fonction tangente pour une très grande valeur de x, c'est le message concernant le domaine qui apparaît. En ne distinguant pas entre les messages ERR : DOMAIN (susceptible d'être rencontré en cherchant à évaluer *tan x* pour un x très grand) et ERR : DIVIDE BY 0 (retourné lors d'une division par zéro), un étudiant pourrait être amené à associer les deux messages à la présence implicite de l'infini. Son évaluation de la fonction tangente devient donc erronée.

Neuf autres étudiants ont répondu que la limite est égale à 0. Sur ces neuf étudiants, quatre ont écrit : $\frac{\pi/2}{\infty} = 0$ témoignant d'abord d'une certaine confusion entre une fonction et sa réciproque ou d'une association primaire entre $\frac{\pi}{2}$ et l'infini pour la fonction tangente. L'étudiant no.32, quant à lui, a répondu : « $0/\infty = 0$ ». Les trois autres étudiants se sont contentés d'écrire que la limite vaut 0 sans fournir d'explication incluant l'étudiant no.28. Contrairement à ce que nous laissait voir le premier calcul de limite, sa conception initiale sur la limite semble avoir évolué. Étant donné l'absence de détails, il se pourrait que l'exemple de l'aire fait en classe ait contribué à ancrer que $k/\infty = 0$. Quatre étudiants n'ont pas répondu à la question.

Les résultats montrent que les conceptions de plusieurs étudiants sur la notion d'infini demeurent contradictoires, malgré l'enseignement des formes indéterminées. Les conceptions initiales sur la limite ont, pour certains étudiants, évolué suite à cet enseignement.

Pour la question concernant la fonction sinus, le Tableau X présente la répartition des réponses des étudiants à cette question en lien avec les notions de limite et d'infini :

N	**Réponses données**	**Conceptions: limite (L)**						**Conceptions: infini (INF)**					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	**0**	**1**	**1**						**1**				
13	N'existe pas	4	9	9					11		1	2	3
1	1	1	1	1					1				
7	$\sin \infty = \infty +$ R. de H.	4	6	4					7	1			1
4	F.I.		2	2		1	1		4	2			
1	∞		1	1					1	1		1	
3	Aucune réponse	1	3	2					3			1	
30													

Tableau X- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1c) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Un seul étudiant a réussi à calculer la valeur de la limite. Étant donné que les valeurs de la fonction varient entre -1 et 1 et qu'elles sont divisées par un nombre infiniment grand, alors la limite de cette fonction est égale à 0. Parmi les autres réponses, treize étudiants ont conclu que la limite n'existe pas. Seulement trois d'entre eux ont écrit quelques démarches. À titre d'exemple, l'étudiant no.11 conclut que cette limite n'existe pas car $\lim_{x \to \infty} \sin x$ n'existe pas. Cet étudiant s'est probablement référé à ses notes de cours où le calcul de cette limite avait été fait par le professeur. À nouveau, on peut supposer que trois de ces treize étudiants ont établi un parallèle entre l'impossibilité de l'infini et celle de la limite. Précisons que ce sont les mêmes étudiants que pour le problème précédent.

On remarque également qu'un étudiant semble avoir confondu la question posée $\left(\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}\right)$ avec celle vue en classe $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right)$. En effet, l'étudiant no.2 a répondu que la limite égalait 1 sans justifier sa réponse. Les étudiants semblent chercher un « modèle de calcul » dans leurs notes de cours. En partant des exemples vus en classe, les étudiants croient satisfaire les attentes du professeur.

Parmi les autres étudiants, sept d'entre eux ont appliqué la règle de L'Hospital pour calculer cette limite. Le Tableau XI montre que les étudiants qui ont écrit que $\sin \infty = \infty$ (notation utilisée impliquant que l'infini représente un nombre) associent simultanément l'infini à un nombre (INF2.2) et à un non-nombre (INF2.3) :

N	**Réponses données**	**INF 2**		
		2.1	2.2	**2.3**
1	**0**			**1**
13	N'existe pas	1	6	7
1	1			1
7	$\sin \infty = \infty$ + R. de H.	2	5	6
4	F.I.	2	3	3
1	∞	1		
3	Aucune réponse		3	2
30				

Tableau XI- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1c) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'infini comme un objet

Finalement, quatre étudiants ont conclu que c'est une limite indéterminée, un étudiant a écrit comme réponse : « l'infini » et trois n'ont pas répondu à cette question.

À partir des résultats à ces deux questions, on remarque que dix-sept étudiants sur trente sont arrivés à la même conclusion dans les deux calculs de limite sans prendre en compte la nature très distincte de ces deux fonctions trigonométriques. Ceci semble indiquer une domination du travail technique sur l'analyse.

Les deux derniers calculs de limite faisaient référence à la forme indéterminée ∞-∞ où la technique du dénominateur commun vue en classe et dans le manuel ne pouvait être utilisée directement pour lever l'indétermination. Néanmoins, une analyse des fonctions, une utilisation de l'expression conjuguée ou une mise en évidence suffisaient pour y répondre adéquatement.

Le premier calcul de limite faisait intervenir des fonctions polynomiales de degrés 3 et 4. Étant donné que l'expression à évaluer comprenait un terme à coefficient positif de degré 4, la limite avait pour valeur l'infini. Le Tableau XII montre la répartition des réponses des étudiants en fonction des conceptions des étudiants sur les notions de limite et d'infini :

N	Réponses données	Conceptions: limite (L)						Conceptions: infini (INF)					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
4	**∞ (M.E.S.)**	**2**	**4**	**2**					**4**			**1**	
1	**∞ (A. de fcts)**					**1**			**1**	**1**			
7	**∞**	**2**	**5**	**4**					**7**	**1**		**2**	**1**
10	F.I.: ∞-∞	5	6	6			1		9	2			3
2	F.I.: ∞-∞ + R. de H.	1	2	1					2				
1	-∞ (A. de fcts)		1	1								1	
5	Aucune réponse	1	5	5					5		1		
30													

Tableau XII- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1d) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Douze étudiants ont réussi à calculer cette valeur avec différentes méthodes. Quatre étudiants ont fait une mise en évidence simple, un seul étudiant a fait une analyse des fonctions en analysant correctement le terme qui croît le plus rapidement et sept étudiants sont arrivés à la bonne conclusion sans inclure le détail de leur démarche. Parmi ceux qui n'ont pas réussi à répondre correctement à la question, l'étudiant no.23 a tenté une analyse des fonctions, mais a conclu incorrectement croyant que : « *3600 x^3 est plus grand comme croissance.* » Parmi les dix-sept autres étudiants, douze étudiants ont identifié la forme ∞-∞ dont deux ont dérivé les deux termes du numérateur croyant appliqué la règle de L'Hospital. Par exemple, l'étudiant, no.5, écrit : « $\infty-\infty(F.I.) \overset{R.H.}{=} \left(0{,}0100x^3-10800x^2\right)$ » Ils ont donc effectué un transfert inadéquat de la règle de L'Hospital. Cinq étudiants n'ont pas répondu à la question.

Bien que cette évaluation de limite fasse appel aux notions de limite et d'infini, il s'agit du problème d'évaluation de limite le mieux réussi. En effet, plus que les conceptions sur ces notions, c'est plutôt le choix des fonctions plus régulières qui semble jouer un rôle sur les résultats.

Pour le deuxième calcul de limite, une mise en évidence simple ne pouvait être appliquée pour lever l'indétermination, une analyse des fonctions logarithmique et racine carrée était nécessaire. Les étudiants pouvaient par l'analyse des fonctions ou de leurs dérivées déduire que la fonction racine carrée croît plus rapidement que la fonction logarithmique. Puisqu'il s'agissait d'une soustraction de la fonction racine carrée à la fonction du logarithmique naturel, la limite correspondait à moins l'infini. Le Tableau XIII montre la répartition des réponses des étudiants en lien avec les conceptions de limite et d'infini :

N	**Réponses données**	**Conceptions: limite (L)**						**Conceptions: infini (INF)**					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
2	**$-\infty$**		**1**	**1**		**1**			**2**	**1**			
2	∞	1	2	1					2			1	
11	F.I.: ∞-∞	5	8	7					10	1	1		2
2	F.I.: ∞-∞ + R. de H.	1	1				1		2				
5	∞-∞ = 0	1	3	3					4			1	1
8	Aucune réponse	3	8	7					8	2		2	1
30													

Tableau XIII- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 1e) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Seulement deux étudiants ont apporté une conclusion adéquate, mais il n'y avait aucune démarche rattachée à leur réponse. Deux étudiants ont conclu que la limite est égale à l'infini. En examinant leurs réponses fournies au premier questionnaire à la question sur l'infini, on constate que leurs conceptions ne permettent pas de les distinguer des autres étudiants. En effet, le premier étudiant considère simultanément l'infini comme un nombre et un nombre non-nombre, alors le second étudiant voit l'infini comme un non-nombre. Treize étudiants ont identifié la forme indéterminée ∞-∞ dont deux ont dérivé les termes du numérateur croyant pouvoir appliquer la règle de L'Hospital. Huit ont omis de répondre. Fait intéressant, cinq étudiants ont conclu que la forme ∞-∞ = 0 sans fournir la démarche de leur raisonnement et ils n'ont pas répondu ainsi pour la question précédente. Rappelons qu'à la suite de chaque calcul de limite, le professeur interprétait le résultat afin de développer l'intuition des étudiants sur l'infiniment petit et l'infiniment grand. Il semble que ces cinq étudiants ont essayé de répondre à la question en se basant uniquement sur leur intuition. Aucun de ces étudiants n'a effectué les calculs nécessaires pour vérifier cette intuition.

On note qu'autant d'étudiants se sont contentés d'identifier la forme indéterminée ∞-∞ (10 étudiants pour la question 1d) et 11 étudiants pour la question 1 e)), néanmoins les étudiants semblent avoir plus de difficulté à effectuer un traitement avec les fonctions logarithmique et racine carrée qu'avec les fonctions polynomiales.

Pour la deuxième question de ce questionnaire, il s'agissait de résoudre une équation. Tout d'abord, les valeurs candidates comme solutions de l'équation (-2 et 3) devaient être calculées. La difficulté du problème était d'identifier correctement le domaine de la fonction. La fonction est définie pour toutes les valeurs de x réelles sauf 3. Le Tableau XIV montre la répartition des réponses des étudiants en fonction de leurs conceptions sur la notion de division par zéro :

N	Réponses données	Conceptions: division par zéro (D)						
		1	2	3	4	5	6	7
6	**x = -2**			**1**	**1**	**5**	**2**	
19	x = -2 et x = 3	4		7		11	1	
1	x = 1					1		
1	Aucune conclusion					1		
3	Aucune réponse			1		3		
30								

Tableau XIV- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 2 en fonction de leurs conceptions initiales entourant la notion de division par zéro

On remarque que vingt-cinq étudiants ont fait des démarches appropriées pour résoudre l'équation et sont arrivés aux deux valeurs candidates comme solutions de l'équation, mais seulement six (24 %) d'entre eux ont réussi à apporter une conclusion adéquate en rejetant la valeur qui annulait le dénominateur. Parmi ces vingt-cinq étudiants, seize (64 %) d'entre eux ont répondu qu'une division par zéro est impossible dans le premier questionnaire, il y a donc un manque de vigilance dans l'utilisation de cette connaissance lors des calculs ou une banalisation de la division par zéro avec les formes indéterminées.

Chez les autres étudiants, trois étudiants ont omis de répondre à la question, un étudiant a écrit que la valeur qui vérifiait l'équation est 1 sans inclure sa démarche. Finalement, le dernier étudiant n'a pas utilisé une méthode appropriée pour résoudre l'équation. En examinant leur réponse fournie à la troisième question du premier questionnaire, ils avaient pourtant répondu que la division par zéro est impossible. Dans ces cas-ci, le problème pourrait être procédural et non conceptuel.

Pour la question sur la limite, les étudiants devaient identifier à l'aide du graphique les quatre valeurs des limites. La première et la quatrième limite n'existent pas parce que les limites à droite et à gauche ne sont pas égales. La deuxième limite vaut zéro et la troisième vaut deux. Le Tableau XV présente la caractérisation des réponses réussies des étudiants :

Réponses réussies	N	Pourcentage d'étudiants
a	1	3 %
b	25	83 %
c	13	43 %
d	4	13 %

Tableau XV- Caractérisation des réponses réussies des étudiants du premier groupe pour la question 3

Il faut d'abord préciser que trois étudiants n'ont pas répondu à la question. Un seul étudiant sur les trente a réussi à identifier la valeur appropriée des quatre évaluations de limite. On remarque que la première et la quatrième limites ont été réussies par très peu d'étudiants. Soulignons également que moins de la moitié des étudiants ont réussi à évaluer adéquatement la troisième limite. Les étudiants de ce groupe ne paraissent pas maîtriser la notion de limite dans sa représentation graphique.

Finalement, la dernière question concernait le degré d'habileté à la calculatrice à affichage graphique. Le Tableau XVI montre la répartition des étudiants selon les réponses possibles :

N	Réponses possibles
8	Oui
16	Non
2	Moyen
4	Aucune réponse

Tableau XVI- Répartition des réponses des étudiants du premier groupe à la question 4

Huit étudiants (27 %) se disent habiles lors de l'utilisation de ces calculatrices, deux étudiants déclarent un degré moyen d'habileté et seize étudiants (53 %) ne se perçoivent pas habiles. Notons que quatre étudiants n'ont pas répondu à la question. Pour examiner comment la technologie pouvait avoir influencé les réponses des étudiants à la première question du second questionnaire, nous supposerons que les étudiants qui ne se voient pas habiles et ceux qui se disent moyennement habiles à utiliser la calculatrice ne l'ont pas utilisée pour compléter le questionnaire.

Tout d'abord, pour la question 1 a), rappelons qu'il s'agit d'une limite de forme k/0. En considérant uniquement qu'il s'agit d'une constante divisée par un infiniment petit, ce calcul pouvait facilement être estimé à l'aide d'une calculatrice. En effet, en divisant une constante par un infiniment petit, le résultat donne un infiniment grand positif ou négatif. En examinant les réponses fournies à la question 1 a), six étudiants ont conclu que cette limite est égale à l'infini. Parmi ces six étudiants, quatre (67 %) se déclarent habiles avec les calculatrices à affichage graphique, un étudiant a une habileté moyenne et un seul n'est pas habile. À l'issue de ces résultats, on pourrait se demander si l'usage de la calculatrice n'avait pas influencé quelques-unes des réponses des étudiants.

Pour la question 1 b), il s'agissait d'évaluer la valeur de la fonction tangente lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes. Dix étudiants ont conclu que « $\tan \infty = \infty$ ». Cette conclusion pourrait découler d'une utilisation d'une calculatrice. Néanmoins, en examinant les degrés d'habileté à utiliser une calculatrice de ces dix étudiants, seulement deux d'entre eux (20 %) se disent habiles, sept ne sont pas habiles et un n'a pas répondu à la question. Leur conclusion sur la fonction provient donc plus probablement d'un manque d'analyse de la fonction tangente. Neuf autres étudiants ont répondu que « $\tan \infty = k$ » et ont conclu que « $k/\infty = 0$ ». Parmi ces neuf étudiants, quatre (44 %) se disent habiles avec la calculatrice, un étudiant est moyennement habile et quatre ne sont pas habiles. Il apparaît donc difficile d'inférer à partir de ces résultats une influence de l'utilisation de la calculatrice.

Pour la question 1 c), la calculatrice ne semble pas avoir influencé les résultats. En effet, parmi les onze étudiants qui ont conclu que « $\sin \infty = \infty$ », seulement trois d'entre eux (27 %) se disent habiles avec la calculatrice, même pourcentage que pour l'ensemble du groupe, les huit autres ne sont pas habiles. Leur conclusion fautive à cette question découle probablement d'un manque d'analyse de la fonction sinus.

Pour la question 1 d) concernant la forme indéterminée ∞-∞, sept étudiants ont conclu correctement que la limite est égale à l'infini sans documenter leur démarche. Parmi ces étudiants, trois d'entre eux (43 %) sont habiles avec la calculatrice, trois ne sont pas habiles et un étudiant a omis de répondre à la question. Si la calculatrice a pu les aider à obtenir la bonne réponse, il leur aura fallu explorer numériquement avec des valeurs de x relativement élevées (plus grande que 1 440 000) pour s'en convaincre.

Étant donné le taux de réussite très faible du dernier calcul de limite, on suppose que l'utilisation de la calculatrice n'a pas influencé les réponses des étudiants.

Productions à l'examen

Pour compléter ce suivi des conceptions, analysons à présent les productions à l'examen. Tout d'abord, précisons que quatorze étudiants sur trente (47 %) ont complété les trois calculs de limite sans erreur. À part de nombreuses erreurs de calcul et de dérivation, quelques erreurs reliées à la forme k/0 sont ressorties. À titre d'exemples : « la forme k/0 représente une forme indéterminée », « k/0 = 0 » et « k/0 : n'existe pas ». Soulignons également qu'il y a eu quelques erreurs reliées à la forme indéterminée $0 \cdot \infty$. Par exemple, $0 \cdot \infty = 0$ et l'application de la règle de L'Hospital à partir de cette forme.

Pour la question sur les suites, vingt-sept étudiants (90 %) ont appliqué la règle de L'Hospital et ont réussi à conclure adéquatement. Deux étudiants ont fait des erreurs de calcul et un étudiant a fait une erreur de dérivation. L'évaluation amène donc à conclure que les étudiants savent bien manipuler les formes indéterminées et peuvent les utiliser dans le calcul de la limite d'une suite.

4.1.5 Bilan des résultats du premier groupe

Résumons à présent les résultats recueillis dans ce premier groupe. Le premier questionnaire a permis d'identifier les conceptions des étudiants sur les notions de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini. Pour la notion de limite, deux caractéristiques ressortent de leur réponse : la possibilité d'atteindre ou non la limite et le mouvement vers une limite. Précisons que parmi ceux qui intègrent dans leur définition l'idée d'atteindre ou non la limite, plus du quart croient que la limite ne peut pas être atteinte. Pour la notion d'indétermination, 89 % étudiants considèrent que le traitement est impossible et qu'une indétermination ne se détermine pas. Ce qui paraît tout à fait normal puisque les étudiants n'ont pas encore vu les formes indéterminées. La grande majorité des étudiants ont répondu adéquatement qu'une division par zéro est impossible. Pour la notion d'infini, nous remarquons des contradictions dans les réponses de quelques étudiants. En effet, l'infini est vu, à quelques reprises, comme un nombre et un non-nombre simultanément.

Afin d'établir un lien entre ces conceptions qui entrent en jeu lors de l'apprentissage des formes indéterminées et les moyens d'enseignement actuels, une analyse des dispositifs d'enseignement était nécessaire. Tout d'abord, l'analyse du programme du cours de NYB a montré que la place accordée à l'analyse ou à la preuve est très limitée. En effet, ce programme met surtout l'emphase sur les applications du calcul intégral.

L'analyse du manuel a permis de constater qu'il est conforme aux objectifs du cours. En effet, les auteurs débutent avec la règle de L'Hospital (qu'ils décomposent en règle faible et règle forte) suivie de nombreux exemples d'applications. Les différentes formes indéterminées sont introduites avec des exemples. De plus, les nombreux exercices à la fin de chaque section visent la maîtrise par les étudiants des différentes techniques qui leur permettent de calculer des limites présentant des formes indéterminées, aussi que la reconnaissance de leurs conditions d'application.

Il faut également noter que certains de ces exercices montrent les limites de la calculatrice à affichage graphique.

Comme ajout par rapport au manuel, le professeur utilise l'aire d'un rectangle dont la base devient infiniment grande alors que la hauteur devient infiniment petite pour introduire les formes indéterminées et la règle de L'Hospital. Cette stratégie d'enseignement paraît viser le développement par l'intuition des capacités d'analyse des étudiants. Précisons qu'il ne distingue pas la règle de L'Hospital en deux cas ne tirant ainsi pas parti de l'argument graphique présenté dans le manuel. Le professeur présente ensuite les différentes formes indéterminées à l'aide d'exemples. Après chaque problème, une interprétation du résultat est faite. Ce travail pourrait favoriser le développement de l'intuition des étudiants sur l'infiniment petit et l'infiniment grand.

L'examen donné par le professeur ne cherche pas à mesurer cet aspect de l'apprentissage car il se limite aux objectifs prescrits par le programme. En effet, pour les calculs de limite demandés, les étudiants avaient vu la méthode appropriée qui leur permettraient de lever l'indétermination et de calculer la limite. Pour la question sur les suites, il s'agissait d'une application de la règle de L'Hospital.

Suite à cet enseignement des formes indéterminées, le second questionnaire montre l'évolution des conceptions des étudiants ressorties lors du premier questionnaire. Certaines réponses laissent supposer que les conceptions adéquates des étudiants sur la division par zéro peuvent parfois être un obstacle lors de l'évaluation de limites. Également, ces conceptions initiales sur la division par zéro semblent davantage ancrées que celles sur la notion de limite. Il faut noter que les conceptions de certains étudiants sur la notion de limite pourraient avoir évolué de manière positive suite à l'enseignement des formes indéterminées. Les conceptions sur l'infini sont demeurées contradictoires malgré cet enseignement.

Ce questionnaire a également permis d'inférer que la technologie pourrait influencer de façon tantôt positive, tantôt négative certains calculs de limite de la première question.

Finalement, l'analyse des productions à l'examen montre que la plupart des étudiants ont appris à manipuler les formes indéterminées et peuvent les utiliser dans le calcul simple de la limite d'une suite.

4.2 Second groupe

Dans ce groupe, les trente-quatre étudiants se sont portés volontaires à l'étude. Au moment de compléter le premier questionnaire, le professeur avait déjà amorcé l'enseignement sur les formes indéterminées. En effet, il avait débuté son enseignement avec une révision des notions des dérivées, des limites en s'attardant surtout sur les fonctions logarithmiques, racines carrées et rationnelles (k/0) et avait poursuivi avec les formes indéterminées de type 0/0 et ∞/∞. Même si le premier questionnaire devait idéalement être rempli avant l'enseignement des formes indéterminées, nous avons jugé utile de le faire compléter quand même par les étudiants parce qu'il pouvait expliquer certaines des productions au second questionnaire et qu'il pouvait peut-être faire ressortir certaines différences avec un groupe n'ayant pas débuté l'enseignement.

Pour ce groupe, une analyse des finalités du professeur s'avère donc nécessaire avant l'analyse des conceptions.

4.2.1 Vision du professeur

Le professeur considère que les formes indéterminées permettent d'atteindre un « *niveau d'abstraction accru* » et que leur apprentissage est essentiel pour la formation des étudiants se dirigeant dans des domaines universitaires scientifiques tels que le génie ou les sciences physiques.

Les connaissances préalables mentionnées par le professeur pour l'apprentissage des formes indéterminées sont les notions d'asymptotes verticales et horizontales et les notions d'image et de domaine. À ces notions se rajoutent, les concepts en lien avec les formes indéterminées : dérivation, limites « *spéciales* » (1/0, $\sqrt{0}$ et ln 0), la règle de L'Hospital et la distinction entre l'image et la limite.

Les phénomènes qu'il a repérés chez les étudiants lors de leur apprentissage des formes indéterminées et qui témoignent de difficultés sont les suivantes: « $\infty/\infty = 1$ » ou « $0/0 = 1$ », difficultés avec les concepts d'infini et de limite et confusion entre l'image et la limite. Rappelons que plusieurs travaux montrent que les concepts de limite (2.1.4) et d'infini (2.1.1) sont associés à des obstacles épistémologiques connus.

Pour essayer de contrer ces difficultés, ces obstacles et ces erreurs, la stratégie d'enseignement du professeur se définit de la manière suivante : « *faire la distinction entre image et limite, évaluer une limite avec le tableau des valeurs et graphiquement et utiliser une approche algébrique pour le concept de limite* ». Afin de bien établir sa stratégie, le professeur utilise quelques ressources telles que le logiciel Maple et ses notes de cours personnelles. L'utilisation du manuel est limitée aux exercices choisis par le professeur.

En examinant cette description, on remarque qu'elle n'inclut pas de stratégies spécifiques pour résoudre le problème de conception de l'infini, mais il semble vouloir donner un sens au concept de limite.

4.2.4 Analyse des conceptions des étudiants

Le codage des conceptions à l'aide de la grille permet d'identifier les principales conceptions des étudiants sur les notions d'infini, d'indétermination, de division par zéro et de limite. Rappelons que les réponses des étudiants ont été associées à une ou plusieurs dimensions.

Premièrement, pour la notion de limite, le Tableau XVII indique que deux aspects de la notion de limite ressortent des réponses des étudiants:

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
L1- Une limite comme une borne	3
L2- Possibilité d'atteindre ou non la limite	29
L3- Le mouvement vers une limite	30
L4- Discontinuité de la limite	1
L5- Un nombre infiniment grand	0
L6- Une limite déterminée par une dérivée	1

Tableau XVII- Caractérisation de la notion de limite par les étudiants du second groupe

En effet, vingt-six étudiants associent la possibilité d'atteindre ou non la limite (L2) avec le mouvement vers une limite (L3). À titre d'exemple, l'étudiant no.2 écrit que la limite c'est « *le chiffre que le graphique atteint ou atteint presque, lorsque celui-ci tend vers une position précise.* » Cette réponse est en accord avec la définition formelle de la limite, en ce sens où la distance diminue lorsqu'on se rapproche suffisamment du nombre. Parmi ces étudiants, deux d'entre eux lient également l'idée de borne (L1) à ces deux aspects. En effet, l'étudiant no.29 répond : « *Lorsqu'on tend vers un certain nombre en x, la limite correspond au nombre, supérieur ou inférieur selon le cas, en y.* » De son côté, l'étudiant no.8 en écrivant que la limite c'est « *le point maximum ou minimum qu'une variable occupe dans une fonction* » fait plutôt ressortir les aspects de borne et d'atteindre ou non la limite. On remarque également que la plupart des étudiants pensent que la limite peut être atteinte (L2.1). En effet, sur les vingt-neuf étudiants qui évoquent la possibilité d'atteindre ou non la limite (L2), vingt-six d'entre eux considèrent qu'elle peut être atteinte. On remarque ici l'effet du travail fait en classe par le professeur sur la distinction entre l'image et la limite.

Il est intéressant de constater que le symbolisme utilisé pour répondre à la question ne correspond pas toujours à l'explication qui suit. En effet, l'étudiant no.5 répond : « $\lim_{\Delta x \to a} \frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ *: Sur un intervalle très petit (infiniment), lorsqu'on s'approche d'un nombre a, plus f (x) s'approche d'un nombre l alors nous pouvons dire que l est limite de f (x), lorsque x tend vers a.* » Cette réponse laisse supposer que l'étudiant a été exposé à la définition formelle de la limite, mais étant donné la complexité de cette définition, il ne s'en souvient que partiellement. Cet exemple illustre la difficulté que certains étudiants ont à exprimer leur pensée mathématique et que cette difficulté paraît plus grande avec le langage symbolique.

Pour la notion d'indétermination, le Tableau XVIII montre la caractérisation des réponses des étudiants selon les différents aspects :

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
I1- L'indétermination comme une limite	19
I2- Vision de calcul: traitement	18
I3- Impossibilité ou n'existe pas	1
I4- Ne se détermine pas	6
I5- Infinité de solutions	2
I6- Une valeur indéterminée	6
I7- Ce qui n'est pas "fini"	0

Tableau XVIII- Caractérisation de la notion d'indétermination par les étudiants du second groupe

De ce tableau, on constate que c'est l'indétermination comme une limite (I1) qui revient le plus souvent. Rappelons qu'au moment où le premier questionnaire a été distribué, les étudiants étaient en train d'apprendre les limites présentant des formes indéterminées. L'enseignement reçu sur les formes indéterminées a possiblement favorisé une association entre les termes « indétermination » et « limite ». À titre d'exemple, l'étudiant no.5 précise qu'une indétermination c'est *« lorsqu'une limite ne donne pas un nombre mais une forme particulière (*$\sqrt{0}$, $\frac{k}{0}$, $\ln 0$*) ou une forme indéfinie* $\left(\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \infty - \infty\right)$. »

De plus, à la notion de limite, l'idée de calcul est souvent jumelée. Les étudiants pensent donc qu'il est possible de calculer une indétermination. En effet, sur les dix-neuf étudiants qui ont associé l'indétermination avec la notion de limite, onze ont inclus l'idée de calcul dans leur réponse. Comparativement au premier groupe où la majorité des étudiants (seize sur dix-huit étudiants) croient qu'il est impossible de lever une indétermination, dans ce groupe, dix étudiants sur dix-huit pensent qu'il est possible de lever une indétermination. De plus, parmi les onze étudiants qui ont associé les idées de calcul et de limite, huit d'entre eux croient que le calcul est possible. À titre d'exemple, l'étudiant no.12 répond qu'on a une indétermination *« lorsque la limite donne une valeur qui ne se peut pas, il faut utiliser certaine méthode pour relever* (sic) *l'indétermination. »* Également, l'étudiant no.16 parle de *techniques* qui permettent de découvrir la limite.

Les réponses au questionnaire montrent qu'un début d'enseignement des formes indéterminées a également favorisé une association entre la division par zéro et la limite. En effet, on constate au Tableau XIX que les étudiants lient la forme k/0 à une limite et pourtant il n'y avait aucune mention de la notion de limite dans la question :

Réponses possibles	Nombre d'étudiants
D1- Zéro	0
D2- Le dividende	0
D3- L'indétermination (ou l'inconnu)	4
D4- L'infini	1
D5- L'impossibilité	17
D6- Une limite	24
D7- Une constante divisée par zéro	1

Tableau XIX- Caractérisation de la notion de division par zéro par les étudiants du second groupe

Lorsqu'ils ne l'intègrent pas d'emblée au concept de limite, les étudiants ont une compréhension partielle de la division par zéro lorsque $k \neq 0$. Par exemple, l'étudiant no.10 répond : « *Cela représente une expression qui n'existe pas. On ne peut pas diviser par zéro!* » Parmi ces étudiants, quelques-uns d'entre eux ont également intégré dans leur réponse la signification de la forme k/0 dans un contexte de limite. C'est le cas de l'étudiant no.7 : « *Pour une image, ça n'existe pas. Pour une limite, elle est alors dite indéterminée, on doit alors avoir recours à une autre évaluation de la limite pour savoir si c'est un 0^+ ou un 0^-. Si $k/0^+ = \infty$ et si $k/0^- = -\infty$.* » L'approche algorithmique de la définition semble avoir été assimilée. Par ces résultats, tout permet de penser que l'enseignement du professeur a eu un certain impact sur les étudiants car ils distinguent très bien la division par zéro présente dans une expression mathématique ou dans une limite. Il faut préciser qu'aucun étudiant n'a pris la précaution de distinguer le cas où $k = 0$.

Jusqu'à présent, on a constaté que les étudiants avaient une idée relativement juste des notions de limite, d'indétermination et de division par zéro. En examinant les réponses des étudiants sur la question concernant la notion d'infini, on remarque une incertitude. Rappelons tout d'abord que parmi les affirmations proposées, la seule proposition vraie est : « *l'infini ne représente aucun nombre* ». Seulement quatre étudiants ont réussi à l'identifier correctement. Soulignons que douze autres étudiants l'ont choisie parmi les affirmations, mais ils ont également sélectionné d'autres propositions. À titre d'exemple, l'étudiant no.10 tient pour simultanément vraies les propositions selon lesquelles « *l'infini est un nombre indéterminé* », « *l'infini ne représente aucun nombre* », « *l'infini n'existe pas* » et « *l'infini est une inconnue* ».

Le Tableau XX présente la caractérisation de la notion d'infini par les étudiants:

Caractéristiques	Nombre d'étudiants
Infini comme un processus	0
Infini comme un objet	33
Une inconnue	4
Une variable	2
Autre chose	2
N'existe pas	4

Tableau XX- Caractérisation de la notion d'infini par les étudiants du second groupe

La majorité des étudiants voient l'infini comme un objet (INF2) ou plus précisément comme un ensemble d'objets (INF2.1 : 7 étudiants), un nombre (INF2.2 : 28 étudiants) ou un non-nombre (INF2.3 : 16 étudiants).

Il est intéressant de constater que deux étudiants ont choisi l'affirmation : « l'infini, c'est autre chose ». Néanmoins, en analysant leur réponse, on ne retrouve aucun commentaire qui expliquerait ce choix.

4.2.2 Analyse de la transposition didactique externe

Étant donné que le programme du cours est le même pour toutes les institutions de niveau collégial, nous passons directement à l'analyse du manuel utilisé en classe.

Le manuel

Pour établir la concordance entre le programme et le manuel, nous avons tout d'abord analysé le contenu du manuel. Rappelons qu'il s'agit du manuel *Calcul intégral* de

Bradley, Smith (1999) adapté par Franco et Marcheterre (2002). Ce manuel comprend cinq chapitres. Le premier chapitre est une introduction au calcul intégral, il effectue un retour plus formel sur des notions essentielles vues dans le cours précédent de calcul différentiel (limite, continuité, dérivée) et termine avec les formes indéterminées. Les chapitres 2, 3 et 4 font référence à la notion principale du cours : l'intégrale. Au chapitre 2, on retrouve les notions de base du calcul intégral, soit les primitives d'une fonction, les intégrales indéfinies, la somme de Riemann ainsi que des théorèmes fondamentaux de calcul et une introduction aux équations différentielles. Le chapitre 3 montre certaines applications de l'intégrale, notamment le calcul d'aires et de volumes. Au chapitre 4, on présente les techniques d'intégration, plus particulièrement la technique par parties, les techniques trigonométriques et celle des fractions partielles. Le manuel se termine avec la théorie sur les séries infinies que l'on retrouve au chapitre 5. On constate que le manuel respecte le contenu prescrit au programme. Dans l'analyse qui suit, nous nous intéressons uniquement au chapitre 1 où se situe l'enseignement des formes indéterminées.

Comme mentionné précédemment, le premier chapitre du manuel sert de rappel des notions acquises lors du cours de calcul différentiel. Cette révision prépare à l'étude de la règle de L'Hospital. Pour pouvoir parvenir à une démonstration algébrique de la règle de L'Hospital, des théorèmes fondamentaux sont présentés. Ainsi, le premier chapitre est séparé en deux parties : la première partie expose quelques théorèmes d'analyse sur les fonctions continues et la seconde est consacrée à la règle de L'Hospital et à sa démonstration.

Examinons tout d'abord la première section du chapitre, c'est-à-dire celle qui porte sur les théorèmes d'analyse fondamentaux sur les fonctions continues. Le premier théorème énoncé est celui de Rolle[48] :

---

[48] BRADLEY, G.L. et SMITH, K.L. (1999) Calcul intégral, Prentice-Hall, Inc. a Pearson Education Company, p. 2

Théorème 1.1 Théorème de Rolle :
Soit f, une fonction continue sur l'intervalle fermé [a, b] et dérivable sur]a, b[. Si $f(a)=f(b)$*, il existe au moins un* $c\in]a,b[$ *tel que* $f'(c)=0$.

Démonstration : Si f est constante sur l'intervalle fermé [a, b], alors $f'(x)=0$ *pour tout x compris entre a et b. Si f n'est pas constante sur l'intervalle [a, b], la plus grande et la plus petite valeur de f sur [a, b] ne peuvent pas être identiques. Comme f(a) = f(b), l'une au moins des valeurs extrêmes e f sur [a, b] ne correspond pas à une borne de l'intervalle. Selon le théorème des valeurs extrêmes et le théorème des valeurs critiques (voir leurs énoncés dans la marge), une telle valeur extrême doit correspondre à une valeur critique comprise entre a et b. Rappelons qu'une valeur critique c est telle que* $f'(c)=0$ *ou* $f'(c)$ *n'existe pas. Comme on suppose que* $f'(x)$ *existe sur tout intervalle]a, b[, il s'ensuit que* $f'(c)=0$ *pour un nombre c compris entre a et b, ce qu'il fallait démontrer.*

Pour la démonstration de ce théorème, les auteurs font référence à deux théorèmes, c'est-à-dire au théorème des valeurs extrêmes[49] et à celui des valeurs critiques.[50] On retrouve leurs énoncés respectifs dans la marge.

Deux représentations graphiques de fonctions (constante et non constante) sont associées à la démonstration algébrique citée ci-dessus. Elles illustrent les deux cas distingués dans la preuve[51] :

49

Théorème des valeurs extrêmes : Une fonction f continue sur l'intervalle fermé [a, b] admet un maximum absolu et un minimum absolu à l'intérieur de cet intervalle.

50

Théorème des valeurs critiques : Si une fonction continue f admet un extremum relatif en c, alors c doit être une valeur critique de f.

51 Ibid., p. 2

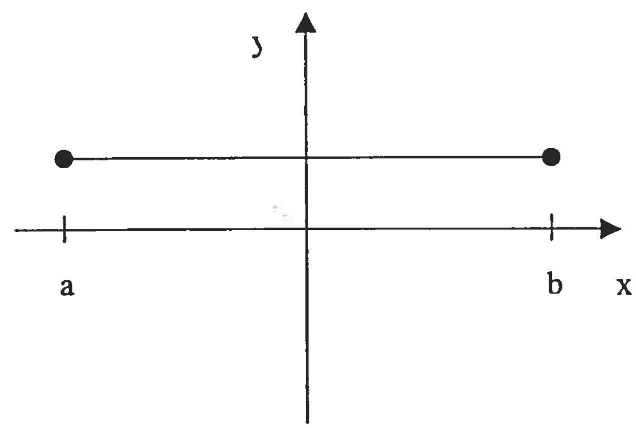


Figure 1.1a. Cas où f est une fonction constante sur [a, b]

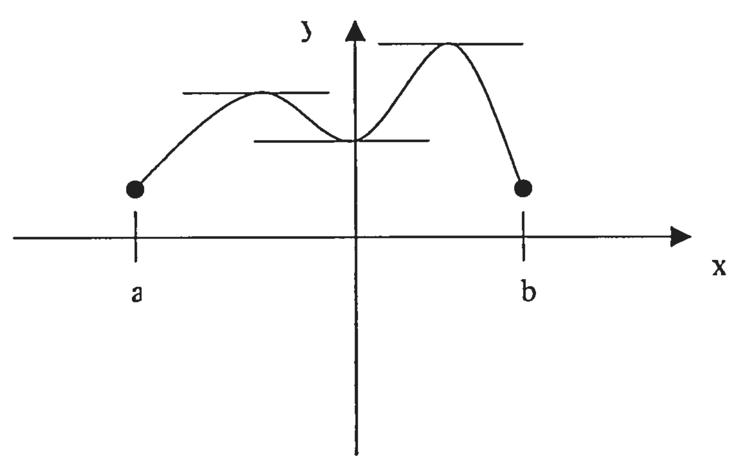


Figure 1.1b. Cas où f n'est une fonction constante sur [a, b]

La figure 1.1b n'est pas choisie au hasard. Les auteurs auraient pu choisir une fonction ne présentant qu'un seul point d'inflexion ou extremum. Leur choix montre bien qu'ils envisagent le travail qui suivra sur le théorème de la moyenne.

Un exemple d'application du théorème de Rolle suit cette démonstration[52] :

> *Application du théorème de Rolle :*
> *Vérifier si le théorème de Rolle s'applique pour les fonctions suivantes sur l'intervalle donné :*
>
> $$a.\ f(x) = |x - 2|;\ sur\ [0,\ 4]$$
> $$b.\ f(x) = \sin x;\ sur\ [0,\ 2\pi]$$
> $$c.\ f(x) = \frac{1}{x-2};\ sur\ [1,\ 2]$$

Cet exercice permet aux étudiants de constater l'importance de vérifier les hypothèses d'application avant d'appliquer le théorème.

Les auteurs enchaînent ensuite avec le théorème de Lagrange (aussi appelé théorème de la moyenne) et sa démonstration (voir 2.1.5). Rappelons que cette démonstration se base sur le théorème de Rolle.

Comme pour le théorème de Rolle, les auteurs insèrent une interprétation géométrique du théorème de la moyenne[53] :

[52] Ibid., p. 3
[53] Ibid., p. 4

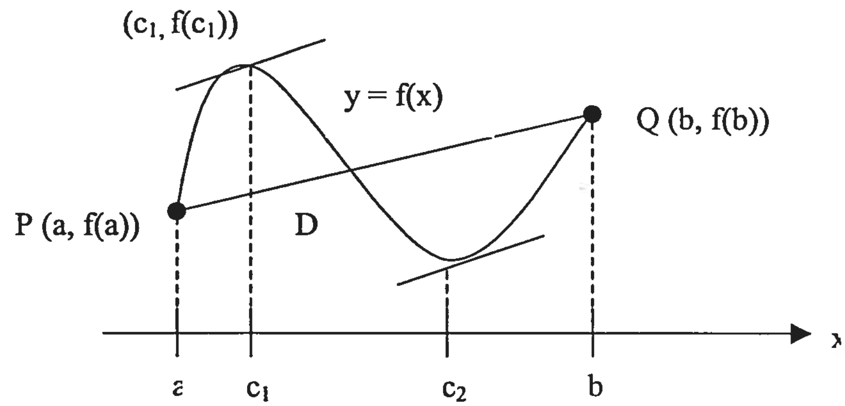


Figure 1.2 Interprétation géométrique du théorème de la moyenne

Au point $(c_1, f(c_1))$, la pente de la tangente est égale à la pente de la sécante passant par les bornes de l'intervalle, c'est-à-dire par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. La figure 1.2 montre qu'il est tout à fait possible que le graphe ait plusieurs points de ce type, même si le théorème énonce seulement qu'il en existe au moins un.

Cette figure ainsi commentée montre bien le souci des auteurs de donner sens au théorème. C'est également pour eux une façon d'invoquer des relations entre des objets algébriques et graphiques (dérivée et pentes respectives de la tangente et de la sécante).

Un exemple d'application suit cette preuve[54] :

Recherche du nombre c défini dans le théorème de la moyenne :
Montrer que la fonction $f(x)=x^3+x^2$ satisfait aux conditions du théorème de la moyenne sur l'intervalle fermé [1, 2] et trouver un nombre c compris entre 1 et 2 et

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}$$

[54] Ibid., p. 4

Cet exemple permet d'établir la démarche à suivre pour vérifier les hypothèses d'application du théorème et ainsi être en mesure de l'appliquer adéquatement.

Les auteurs terminent cette section en énonçant le théorème de Cauchy (aussi connu sous le nom du théorème de la moyenne généralisée). La démonstration de ce théorème est ensuite présentée. En amorçant cette démonstration, les auteurs prennent bien soin de faire le lien avec le théorème de la moyenne et le théorème de Rolle. Notons qu'aucun exemple d'application du théorème de Cauchy n'est fait.

Cette section se termine avec une série de 32 problèmes. Les auteurs subdivisent ces problèmes en trois catégories. Selon leurs propres commentaires dans l'avant-propos, la catégorie A représente les *problèmes de routine*, la catégorie B inclut les *problèmes plus complexes demandant davantage de réflexion* et la catégorie C réunit les *problèmes théoriques et les démonstrations*.[55] Les problèmes de la première catégorie se caractérisent par l'application directe des théorèmes de Rolle et de Lagrange et de la vérification de leurs hypothèses. Avec les problèmes de la catégorie B, on remarque qu'une certaine gradation de la complexité a lieu, qui enchaîne avec des problèmes de modélisation. Finalement, la dernière catégorie rassemble des problèmes où les étudiants sont amenés à produire des preuves et affiner leurs compétences de validation.

Passons maintenant à la seconde partie de ce chapitre. Cette section se consacre à la règle de L'Hospital. Avec une brève introduction où l'on expose l'importance de savoir évaluer des limites de la forme 0/0 ou ∞/∞ dans le tracé des courbes, l'optimisation ou d'autres applications de la dérivée, les auteurs enchaînent

---

[55] Ibid., p. viii

immédiatement avec la règle de L'Hospital[56] et sa démonstration. Rappelons que cette démonstration se base sur le théorème de Cauchy.

Dans les exemples qui suivent, on remarque un saut de complexité en regard de ceux donnés dans le cours de la section précédente : certains impliquent des transformations d'expressions en des formes respectant les conditions d'application de la règle de L'Hospital. Notons que ce travail de transformations d'écriture formelle est assez rare dans le programme d'enseignement collégial. Les auteurs font ressortir quatre types d'application de la règle de L'Hospital :

1. Application de la règle de L'Hospital pour une forme indéterminée 0/0
2. Application de la règle de L'Hospital plusieurs fois de suite
3. Application de la règle de L'Hospital pour une forme ∞/∞
4. Application de la règle de L'Hospital avec d'autres propriétés des limites

Pour la première application, deux exemples s'y retrouvent : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^7 - 128}{x^3 - 8}$. Rappelons tout d'abord que la première limite est utilisée par les

---

56

Règle de L'Hospital : Soit f et g, deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle ouvert contenant c (mais peut-être pas en c). On suppose que $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *est une forme indéterminée 0/0 ou ∞/∞ et que*

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

où L est soit un nombre fini, soit +∞, soit -∞. On a alors

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Le théorème s'applique également aux limites unilatérales et aux limites à l'infini (lorsque $x \to +\infty$ *et* $x \to -\infty$*).*

auteurs du premier manuel pour introduire la règle de L'Hospital et que le professeur du premier groupe la calcule dans le cours. Pour ce calcul, une seule application de la règle de L'Hospital suffit pour lever l'indétermination. Pour la seconde limite, une application de la règle de L'Hospital et une simplification algébrique sont nécessaires pour calculer la valeur désirée.

Pour la deuxième application, les auteurs ont choisi la limite suivante :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$. Pour lever l'indétermination de cette limite, trois applications successives de la règle de L'Hospital sont nécessaires. Cette limite est également présente dans le premier manuel, elle sert à introduire la *règle forte de L'Hospital*.

Pour le troisième type d'application, les auteurs ont choisi de calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$. Pour cette limite, il s'agit d'appliquer la règle de L'Hospital deux fois de suite pour arriver à la réponse.

Finalement, pour le dernier type d'application, il s'agit d'évaluer :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)\sin(4x)}{x^3 \cos x}$. Étant donné qu'une application de la règle de L'Hospital rend le calcul compliqué, il faut d'abord utiliser la règle du produit pour les limites et ensuite deux applications de la règle de L'Hospital permettent de calculer la limite.

Pour les limites présentant des formes indéterminées de type 0/0 et ∞/∞, les auteurs font également ressortir deux cas qui montrent l'importance de vérifier les conditions d'application de la règle de L'Hospital : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sec x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{x - \cos x}$. La première limite ne représente pas une forme indéterminée, elle peut donc être calculée directement. À cet exemple est associé un commentaire de mise en garde : les auteurs montrent qu'une application directe de la règle de L'Hospital, sans la vérification a priori des conditions d'application mène à une réponse erronée. Avec ce commentaire, on retrouve chez les auteurs le souci de l'étude des conditions d'application d'un théorème, sur lequel l'accent a été mis tout au long de la section précédente. Ce type de commentaire est également présent dans le premier manuel. Pour la seconde limite, la fonction choisie est une forme indéterminée de type ∞/∞ pour laquelle la règle de L'Hospital peut s'appliquer. Néanmoins en l'appliquant, on se retrouve avec une limite qui n'existe pas, donc le domaine de validité n'est pas vérifié.

Les auteurs enchaînent avec l'étude des autres formes indéterminées telles que 1^{∞}, 0^0, ∞^0, $\infty-\infty$ et $0\cdot\infty$. Pour bien illustrer ces différentes formes, un exemple d'application est associé à chacune d'entre elles. Avec ces exemples, les étudiants entrent dans un autre type de travail mathématique, c'est-à-dire dans une tâche de réécriture des expressions pour retrouver les conditions d'application de la règle de L'Hospital. Examinons brièvement le travail présenté par les auteurs pour chacune de ces formes. Premièrement, les auteurs débutent avec la forme 1^{∞} : $\lim_{x\to 0^+} \left(e^x + 2x\right)^{3/x}$.

Comparativement au premier manuel, les auteurs prennent le logarithme de la limite et non le logarithme de la fonction pour transformer cette forme en 0/0 où la règle de L'Hospital peut être appliquée. Ensuite, il s'agit de transformer cette valeur pour trouver la réponse désirée. Pour les formes de type 0^0 et ∞^0, le travail à effectuer est le même que celui pour la forme 1^{∞}. Les auteurs ont choisi de présenter ces formes indéterminées avec les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ pour la forme 0^0 et $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$ pour la forme ∞^0. Pour illustrer la différence de style entre les deux manuels, nous présentons le calcul de limite : $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$, aussi présenté dans la section 4.1.2 pour le premier manuel.[57]

---

[57] BRADLEY, G.L. et SMITH, K.L. (1999) Calcul intégral, Prentice-Hall, Inc. a Pearson Education Company, p. 15

Solution :

Si $L = \lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$, *alors*

$$\begin{aligned} \ln L &= \ln\left[\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left(x^{1/x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc $\ln L = 0$. *Par conséquent,* $L = e^0 = 1$.

Pour le cas d'une limite de type $0\cdot\infty$ $\left(\lim_{x\to+\infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, une transformation d'un produit de fonctions en quotient permet d'obtenir la forme 0/0. La règle de L'Hospital est ensuite appliquée pour lever l'indétermination. Finalement, pour lever une indétermination de type ∞-∞, les auteurs ont choisi la limite suivante : $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ où il s'agit d'obtenir un dénominateur commun pour avoir la forme ∞/∞ qui permet d'appliquer la règle de L'Hospital. Remarquons que les auteurs ne présentent qu'un seul exemple pour chaque forme indéterminée. Le poids de ces exemples devient donc très important.

En examinant les deux manuels, on constate que les auteurs ont choisi les mêmes limites pour présenter les formes indéterminées ∞^0 et ∞-∞. On remarque également une certaine similitude pour la limite présentant la forme indéterminée de type $0\cdot\infty$.

Comme pour la section précédente, cette partie se termine avec une série de quarante-huit problèmes. Elle ne contient aucun *problème théorique ou de démonstration*, ce qui n'est pas étonnant compte tenu des exigences du programme. Sur les quarante-huit problèmes, quarante et un ont pour objet de calculer une limite présentant des formes indéterminées. Les sept autres problèmes sont des calculs de limite qui demandent un peu plus de réflexion. À titre d'exemple, le problème 48 : [58]

> 48. *A et B étant des constantes positives, on définit*
>
> $$f(x)=\left(e^{x}+Ax\right)^{B/x}$$
>
> *a. Calculer*
>
> $$L_1=\lim_{x\to 0}f(x) \quad et \quad L_2=\lim_{x\to +\infty}f(x)$$
>
> *b. Quelle est la plus grande valeur de A pour laquelle l'équation* $L_1=BL_2$ *a une solution? Que valent* L_1 *et* L_2 *dans ce cas?*

Dans cet exercice, on remarque des niveaux d'imbrication qui font travailler les concepts d'équation et de paramètre à travers l'étude d'une fonction. Les étudiants ont donc à leur portée une série de problèmes qui peuvent aider à atteindre l'objectif d'apprentissage concernant les formes indéterminées, en ce sens où de nombreux calculs de limite sont demandés. Les quelques problèmes de réflexion offerts leur permettent d'aller au-delà des calculs de limites et ainsi d'approfondir leurs connaissances mathématiques.

4.2.4 Analyse de l'enseignement donné des formes indéterminées

Poursuivons en examinant à présent la transposition didactique interne des formes indéterminées. Nous commençons par les observations faites en classe pour voir comment s'actualise la stratégie d'enseignement décrite dans le questionnaire.

---

[58] Ibid., p. 17

4.2.4.1 Les observations en classe

Tout d'abord, il faut mentionner que contrairement au manuel qui introduit la règle de L'Hospital avec les théorèmes d'analyse, le professeur fait un passage direct aux formes indéterminées. On se rapproche donc ici du premier manuel où ce sont les différents cas qui structurent l'exposé théorique. Le professeur débute en séparant les formes indéterminées selon quatre cas :

Cas I : $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$

Cas II : 0^0, 1^∞ et ∞^0

Cas III : $0 \cdot \infty$

Cas IV : $\infty - \infty$

Rappelons que nos observations n'ont pas débuté au commencement de l'enseignement des formes indéterminées. En effet, le premier cas, c'est-à-dire les formes indéterminées de type 0/0 ou ∞/∞, la règle de L'Hospital ainsi que la distinction entre le concept de limite à celui d'image avaient déjà été enseignées.

Avant d'aborder le second cas, le professeur enseigne le troisième et le quatrième cas. Le troisième cas concerne les limites présentant la forme $0 \cdot \infty$. Pour ces limites, une transformation est nécessaire pour obtenir la forme 0/0 ou ∞/∞ et ainsi pouvoir appliquer la règle de L'Hospital. Deux exemples servent de support à la théorie : $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$ et $\lim\limits_{x \to \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right)$. Tout d'abord, avant d'évaluer la première limite, le professeur fait une analyse de la fonction logarithmique. En effet, il distingue la valeur de ln 0 selon qu'elle est évaluée dans une expression mathématique ou qu'elle est évaluée en tant que limite :

> « *Image ln 0 : n'existe pas*
> *Limite ln 0 : ln $0^+ \rightarrow -\infty$*

ln 0⁻ n'existe pas »

Ensuite, pour calculer cette limite, il transforme le produit de fonctions en quotient de fonctions pour avoir la forme ∞/∞ et applique la règle de L'Hospital pour trouver la valeur désirée. La deuxième limite présentée dans le cours correspond à celle du manuel. Même si les étudiants ont la solution détaillée dans leur manuel, le professeur fait le calcul au tableau. Pour cette limite, il faut également transformer le produit des fonctions en quotient pour arriver à la forme 0/0 qui permet d'appliquer la règle de L'Hospital et ainsi lever l'indétermination.

Le professeur enchaîne avec le quatrième cas. La théorie suivante est notée au tableau : « *Transformer la limite indéterminée ∞-∞ en faisant un dénominateur commun pour obtenir une limite indéterminée 0/0 pour ensuite appliquer la règle de L'Hospital.* » Il illustre cette explication avec l'exemple suivant : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.

Cette limite correspond également à la limite présentée dans le manuel, à la différence près que x tend vers 0^- au lieu de 0^+. Il résout ensuite la limite : $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$ de deux manières. La première méthode consiste à effectuer tout d'abord une mise en évidence à l'intérieur de la racine pour transformer cette limite en forme $0 \cdot \infty$:

$$
\text{« } \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2(1 - 1/x)} - x
$$

$$
= \lim_{x\to\infty} x\sqrt{(1 - 1/x)} - x
$$

$$
= \lim_{x\to\infty} x\left[\sqrt{1 - 1/x} - 1\right] = \infty \cdot 0 \text{ »}
$$

La fin de la résolution est laissée à l'étudiant. La deuxième méthode consiste à utiliser l'expression du conjugué :

$$« \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-x}+x}{\sqrt{x^2-x}+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} »$$

En évaluant cette limite, on s'aperçoit qu'à l'intérieur de la racine carrée la forme ∞-∞ apparaît, l'indétermination n'est donc pas levée. Pour lever l'indétermination, une mise en évidence dans la racine carrée est nécessaire :

$$\begin{aligned} « &= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2(1-1/x)}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\sqrt{1-1/x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-1/x}+1}=\frac{-1}{2}. » \end{aligned}$$

Cet exemple permet de montrer aux étudiants qu'il existe différentes approches possibles pour évaluer une limite présentant une forme indéterminée de type ∞-∞.

Finalement, il présente les formes indéterminées de type 0^0, 1^∞ et ∞^0. Pour la forme 1^∞, le professeur utilise l'exemple du manuel : $\lim_{x\to 0^+}\left(e^x+2x\right)^{3/x}$. La « technique » du professeur est la même que celle du manuel, c'est-à-dire elle consiste à prendre le logarithme de la limite, d'appliquer la règle de L'Hospital et de prendre l'exponentielle de la valeur trouvée. Un exemple de la forme ∞^0 est ensuite présenté : $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$. Cette limite a également été présentée dans le manuel. Aucun problème n'a été fait en classe sur la forme 0^0. Pour les formes indéterminées 0^0 et ∞^0, le professeur précise que les mêmes démarches s'appliquent que pour la forme 1^∞. Après chaque forme indéterminée, les étudiants sont invités à mettre en pratique les méthodes enseignées en résolvant les problèmes du manuel de la section A qui sont en fait des exercices d'application et de coordination des techniques enseignées.

Pour conclure la section sur les formes indéterminées, le professeur fait une démonstration avec le logiciel Maple afin de bien ancrer la distinction entre le concept de limite et celui d'image. Étant donné le manque d'accessibilité à l'outil technologique et le manque de temps, le professeur utilise une approche ordinateur *tableau noir* pour présenter le savoir (Cornu, 1992 mentionné dans Caron, 2001). La démonstration débute avec l'étude de la fonction suivante : $f(x) = 1/x \ en \ x = 0$. Il écrit au tableau :

« $f(x) = \frac{1}{x}$ *en* $x=0$

1- Image de f(0) = 1/0 : n'existe pas

2- $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \frac{1}{0}$: *n'existe pas car* $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$. »

Après avoir entré cette fonction dans le logiciel, il calcule la valeur de *f(0)*. Cet exercice sert à montrer le type de message qui est renvoyé à l'utilisateur lorsque l'image n'existe pas. Ensuite, il effectue la deuxième étape, c'est-à-dire l'évaluation de la limite à droite et à gauche de zéro pour montrer que ces limites sont différentes. Pour illustrer la situation, il trace le graphique de la fonction et crée un tableau de valeurs. Les étapes effectuées sont simples tout en permettant une analyse complète de la fonction. Il enchaîne avec un cas un peu plus complexe :

$f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *lorsque x tend vers* $+\infty$. Pour cette fonction, il évalue la limite à l'aide du logiciel et trace le graphique de la fonction. Les étudiants peuvent ainsi visualiser la limite.

Finalement, on perçoit que s'il y a validation dans la structure de la leçon (départ non-expérimental), elle est de nature opératoire implicite. En effet, il explique les règles pour lever les indéterminations et les étudiants sont amenés à les mettre en pratique avec de nombreux exercices. Son enseignement en classe reflète bien sa stratégie d'enseignement qui consistait à distinguer l'image de la limite, évaluer une limite avec le tableau de valeurs et graphiquement et utiliser une approche algébrique pour le concept de limite.

4.2.4.2 L'examen

Dans le respect de l'élément de compétence concernant les formes indéterminées, le professeur a formulé la question suivante à l'examen : « *Évaluer les limites suivantes. Avant d'appliquer la règle de L'Hospital, vous devez indiquer le type d'indétermination :* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. » L'étudiant est triplement guidé dans la question : on lui rappelle tout d'abord l'importance d'identifier correctement les différentes formes indéterminées, on lui précise ces formes et on lui confirme qu'une application de la règle de L'Hospital est nécessaire pour calculer la limite demandée.

Examinons à présent les quatre limites à calculer. La première limite ($\lim_{x\to\pi^-} \sin(x)^{(x-\pi)}$) correspond à la forme indéterminée 0^0. Pour calculer cette limite, plusieurs étapes étaient nécessaires, les étudiants devaient commencer par prendre le logarithme naturel de la limite pour transformer la forme 0^0 en une forme de type $0\cdot\infty$. Ensuite, une transformation du produit de fonctions en quotient de fonctions et deux applications successives de la règle de L'Hospital étaient nécessaire pour lever l'indétermination. Pour conclure adéquatement, les étudiants devaient transformer la valeur trouvée pour arriver à la réponse cherchée.

Pour la deuxième et la troisième limite ($\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{2x+5}}{3xe^{x}-2}$ incluant l'indice : $e^{2x} = \left(e^{x}\right)^{2}$), des applications directes de la règle de L'Hospital suffisaient pour arriver à la valeur cherchée. En effet, pour la limite faisant intervenir les fonctions trigonométriques, deux applications successives de la règle de L'Hospital suffisaient pour lever l'indétermination. Mais pour la troisième limite, les étudiants devaient appliquer pour une première fois la règle de L'Hospital, effectuer une mise en évidence simple et des simplifications algébriques et appliquer de nouveau la règle de L'Hospital pour calculer la valeur désirée. L'inclusion de l'indice : « $e^{2x} = \left(e^{x}\right)^{2}$ » représente une négociation à la baisse du travail algébrique demandé. Le professeur semble conscient des lacunes des étudiants et il choisit d'y suppléer pour permettre aux étudiants de dépasser ces obstacles et s'engager dans le calcul visé.

Finalement, la dernière limite ($\lim\limits_{x \to 1^+}\left(\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{\ln x}\right)$ incluant l'indice : $\ln(1^+) \to 0^+$) présente une forme ∞-∞ où la « technique » du dénominateur commun peut être utilisée pour transformer cette forme en $\frac{0}{0}$ et où deux applications successives de la règle de L'Hospital permettent de lever l'indétermination et d'arriver à une réponse. On retrouve également dans cette limite un indice permettant de contrer les lacunes éventuelles des étudiants.

Tous ces calculs de limite requièrent une utilisation importante de manipulations algébriques et de plusieurs applications de la règle de L'Hospital. En cela, ils reflètent bien les problèmes enseignés en classe. En effet, pour chacun des problèmes, les étudiants ont vu en classe la méthode qui leur permettrait de lever l'indétermination, mais un certain travail est requis dans l'identification et la coordination des méthodes nécessaires. En n'incluant pas de problèmes théoriques et en n'insérant aucun problème qui vérifie les aptitudes des étudiants développées à l'aide de l'outil technologique, l'évaluation se limite à vérifier les compétences de calcul. Mais elle respecte les exigences du programme.

4.2.5 Analyse des productions des étudiants après l'enseignement

Pour pouvoir établir l'impact de l'enseignement des formes indéterminées sur les conceptions des étudiants, nous avons analysé le second questionnaire et les productions à l'examen.

Le questionnaire

Tout comme pour le premier groupe, la répartition des réponses des étudiants au questionnaire sera représentée à l'aide de tableaux. Dans le respect de la convention établie pour le premier groupe, la bonne réponse est en caractères gras et les cases ombragées permettent de mieux situer les éléments retenus dans l'analyse.

Pour le premier calcul de limite, rappelons tout d'abord que la limite en $x = \pi/2$ n'existe pas car la limite à droite n'est pas égale pas à la limite à gauche en ce point. Le Tableau XXI présente la répartition des réponses des étudiants à cette question en lien avec leurs conceptions sur les notions de limite et de division par zéro du premier questionnaire :

N	Réponses données	Conceptions: limite (L)						Conceptions: division par zéro (D)						
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7
21	**k/0, limite n'existe pas (lim d. ≠lim g.)**	**3**	**20**	**20**						**3**		**11**	**16**	**1**
1	**k/0, limite n'existe pas** (R. de H.)		1	1						**1**				
5	**k/0, limite n'existe pas**		**3**	**3**			**1**					**3**	**3**	
2	Aucune conclusion (lim d. ≠lim g.)		2	2								2	1	
1	Mauvaise forme + R. de H.				1							1	1	
1	$k/0^+ = \infty$			1									1	
3	Aucune réponse		3	3							1		2	
34														

Tableau XXI- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1a) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et de division par zéro

La majorité des étudiants (vingt-sept sur trente-quatre) sont arrivés à la conclusion que la limite n'existe pas en $x = \pi/2$. Parmi ces étudiants, cinq ont conclu à l'impossibilité de la limite sans mettre de détail; pourtant, trois d'entre eux avaient écrit au premier questionnaire qu'il fallait évaluer la limite à droite et à gauche de 0. Pour ces étudiants, l'enseignement reçu sur les formes indéterminées leur a permis de répondre adéquatement au premier questionnaire. Néanmoins, les étudiants ne semblent pas maîtriser suffisamment ces notions pour pouvoir les appliquer lors d'un calcul de limite.

Remarquons que l'approche algorithmique de la définition de la limite enseignée par le professeur semble avoir eu un effet positif : vingt et un étudiants ont calculé les limites à droite et à gauche de $x = \pi/2$ puisque le dénominateur de la fonction s'annule en ce point. Précisons que seize de ces étudiants ont associé la notion de division par zéro avec la notion de limite au premier questionnaire. À titre d'exemple, l'étudiant no.15 répond au premier questionnaire : « *Cette expression me* *dit qu'on assiste à une constante qui se divise par 0, ce qui n'existe pas. Dans ce cas, il faut faire la limite à gauche et à droite du nombre en question.* » Au second questionnaire, il fait les calculs suivants :

$$« \lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln x}{\cos x} = \frac{\ln(\pi/2)}{0}$$

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\ln x}{\cos x} = \frac{\ln(\pi/2)}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to\pi/2^+} \frac{\ln x}{\cos x} = \frac{\ln(\pi/2)}{0^-} = -\infty »$$

À la suite des calculs, il conclut que la limite n'existe pas à π/2. On voit qu'à l'analyse visée se substitue une procédure d'application pour laquelle on vérifie au préalable les conditions. Finalement, un étudiant a conclu que la limite n'existe pas, mais il a poursuivi en dérivant le numérateur et le dénominateur :

$$« \frac{\ln\frac{\pi}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)}{0} \; n'existe\ pas = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-x\sin(x)} = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = \frac{-2}{\pi} »$$

Notons au passage un usage abusif et erroné de l'égalité.

Étant donné que cet étudiant considérait la division par zéro comme une indétermination au premier questionnaire, il se pourrait que la règle de L'Hospital représente à ses yeux une méthode pour lever les indéterminations. Les conditions d'applications enseignées de cette règle ne semblent pas avoir été acquises.

Examinons à présent leur conception de la limite. Tout comme pour le premier groupe, deux caractéristiques ressortent des réponses des étudiants : la possibilité d'atteindre ou non la limite (L2) et le mouvement d'une limite (L3). Le tableau suivant montre que les étudiants pensent majoritairement que la limite peut être atteinte :

N	Réponses données	L2	
		2.1	2.2
21	**Forme k/0, limite n'existe pas (lim. à d. ≠lim. à g.)**	**18**	**2**
1	**Forme k/0, limite n'existe pas (R. de H.)**	**1**	
5	**Forme k/0, limite n'existe pas**	**2**	**1**
2	Aucune conclusion (lim. à d. ≠lim. à g.)	2	
1	Mauvaise forme + R. de H.		
1	$k/0^+ = \infty$		
3	Aucune réponse	3	
34			

Tableau XXII- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1 a) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractéristique d'atteindre ou non la limite

On remarque que sur les vingt-sept étudiants qui ont répondu que la limite n'existe pas, vingt et un d'entre eux disaient initialement qu'une limite peut être atteinte et trois étudiants pensent qu'une limite ne peut pas être atteinte. Étant donné l'impossibilité de cette limite en $x=\frac{\pi}{2}$, la conception L2.2 ne constitue pas un obstacle dans ce problème, on ne peut donc pas savoir si la conception initiale des étudiants sur la limite a influencé leur réponse.

Parmi les sept autres étudiants, trois n'ont pas répondu à la question, deux ont calculé la limite à droite et à gauche, mais ils n'ont pas apporté de conclusion. Un étudiant a appliqué la règle de L'Hospital croyant que la limite représentait une forme 0/0. En examinant sa réponse fournie au premier questionnaire sur la division par zéro, on s'aperçoit que cet étudiant a une conception adéquate de la division par zéro que ce soit dans le contexte de limite ou non. Son erreur au second questionnaire semble être une erreur de calcul et non de compréhension. Un étudiant a répondu que « $\frac{\ln \pi/2}{0^+} = \infty$ », pourtant cet étudiant a écrit au premier questionnaire pour la question concernant la division par zéro qu'il «*faut décomposer la limite pour avoir* $\lim\limits_{x \to a^+}$ *et* $\lim\limits_{x \to a_-}$ *et ainsi trouver si la limite existe* ». L'apprentissage des formes indéterminées pourrait l'empêcher de mobiliser une connaissance qu'il avait.

Les étudiants de ce groupe témoignent de moins de confusion avec la forme k/0 que ceux du premier groupe, ceci est probablement dû au fait que cette forme a été clairement exclue des formes indéterminées. L'enseignement du professeur semble avoir un plus grand effet que le manuel. On constate que, tout comme le premier groupe, les conceptions des étudiants sur la division par zéro semblent être davantage ancrées que leurs conceptions sur la limite.

Pour le calcul de la limite faisant intervenir la fonction tangente au numérateur, le Tableau XXIII montre la répartition des réponses des étudiants en lien avec leurs conceptions de limite et d'infini :

N	**Réponses données**	**Conceptions: limite (L)**						**Conceptions: infini (INF)**					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
11	**N'existe pas**	**1**	**8**	**9**			**1**		**11**	**2**	**2**	**1**	
8	$\tan \infty = \infty$ + R. de H.		7	6	1				8			1	1
6	$k/\infty = 0$	1	6	6					6	1			1
9	Aucune réponse	1	8	9					8	1			2
34													

Tableau XXIII- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1b) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Onze étudiants ont conclu que la limite n'existe pas, néanmoins il y avait peu d'explication rattachée à la réponse. Par exemple, l'étudiant no.7 répond : «$\frac{\tan \infty}{\infty^2}$»

et conclut que cette limite n'existe pas. On peut supposer que ces étudiants considèrent la discontinuité de la fonction tangente pour arriver à cette conclusion.

Étant donné que la grande majorité des étudiants voit l'infini comme un objet, il semble intéressant de préciser davantage leurs conceptions. Le Tableau XXIV montre la caractérisation de l'infini comme un objet (INF2) :

N	Réponses données	Conceptions: infini (INF)		
		2.1	2.2	2.3
11	**N'existe pas**	**3**	**9**	**6**
8	tan $\infty = \infty$ + R. de H.	3	7	3
6	$k/\infty = 0$	1	5	4
9	Aucune réponse		7	3
34				

Tableau XXIV- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1 b) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'infini comme un objet

On remarque des réponses telles que « tan $\infty = \infty$ » et « $k/\infty = 0$ » sont également présentes dans ce groupe laissant ainsi supposer que les étudiants manipulent l'infini comme un nombre. Parmi ces étudiants, six d'entre eux voient l'infini comme un nombre (INF2.2), un étudiant considère l'infini comme un non-nombre (INF2.3) et six prennent simultanément l'infini comme un nombre et un non-nombre (INF2.2 et INF2.3) montrant ainsi une contradiction dans leurs conceptions sur l'infini.

Parmi les autres étudiants, neuf étudiants n'ont pas répondu à la question, huit ont appliqué la règle de L'Hospital étant convaincus que « tan $\infty = \infty$ » et six ont conclu que cette limite est égale à 0. Sur ces six étudiants, deux ont affirmé que la fonction tangente est bornée entre -1 et 1 et quatre ont répondu que $k/\infty = 0$.

Suite à l'analyse de ce calcul de limite, on s'aperçoit d'une difficulté persistante à manipuler le concept d'infini, malgré l'enseignement complet des formes indéterminées.

Nous en avons une nouvelle illustration avec la fonction sinus, le Tableau XXV montre la répartition des réponses des étudiants à cette question en lien avec leurs conceptions de limite et d'infini :

N	Réponses données	Conceptions: limite (L)						Conceptions: infini (INF)					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
6	**0**	**1**	**6**	**6**					**6**	**1**			**1**
12	N'existe pas	1	9	10			1		12	2	2	1	
8	sin ∞ = ∞ + R. de H.		8	7					8	1		1	1
1	F. I.				1				1				
7	Aucune réponse	1	6	7					6				2
34													

Tableau XXV- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1c) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite et d'infini

Six étudiants ont conclu que la limite est zéro, dont trois qui ont déclaré que la fonction est bornée entre -1 et 1. À titre d'exemple, l'étudiant no.5 écrit : « $\frac{[-1,1]}{\infty}=0$ » Cette réponse bien que péchant par un certain manque de rigueur dans l'écriture démontre que l'étudiant a une bonne connaissance de la fonction sinus et qu'il la met à contribution dans l'analyse de la situation.

Parmi les autres étudiants, douze ont répondu que la limite n'existe pas en ne laissant aucune trace de la démarche, neuf ont affirmé que « sin ∞ = ∞ » et huit d'entre eux ont appliqué la règle de L'Hospital pour lever l'indétermination. Sept étudiants n'ont pas répondu à la question.

Comme pour le calcul de limite précédent, on retrouve des réponses telle que « sin ∞ = ∞ » qui laissent présumer que l'infini est considéré et manipulé comme un nombre. Le Tableau XXVI montre que parmi les huit étudiants qui ont écrit cette réponse, quatre d'entre eux voient l'infini comme un nombre (INF2.2) et quatre associent simultanément l'infini à un nombre et à un non-nombre.

N	Réponses données	Conceptions: infini (INF)		
		2.1	2.2	2.3
6	**0**	**1**	**5**	**4**
12	N'existe pas	3	9	7
8	sin ∞ = ∞ + R. de H.	2	8	4
1	F. I.	1		
7	Aucune réponse		6	1
34				

Tableau XXVI- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1 c) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'infini comme un objet

Les réponses à ces questions faisant intervenir une fonction trigonométrique au numérateur d'une expression rationnelle ont fait ressortir un fait très intéressant : la majorité des étudiants (trente et un sur trente-quatre) sont arrivés à la même conclusion dans les deux calculs de limite sans réellement mettre à contribution une analyse du comportement distinct des deux fonctions trigonométriques. À titre d'exemple, l'étudiant no.31 conclut que la limite est impossible pour les deux limites sans justifier sa réponse. L'étudiant no.4 paraît convaincu que « tan ∞ = ∞ » et « sin ∞ = ∞ » ce qui donne des limites de type ∞/∞. Une application de la règle de L'Hospital permet ensuite de lever l'indétermination et arriver à une réponse. Également, il faut préciser que les six étudiants qui ont répondu que la deuxième limite est égale à 0, ont apporté la même conclusion pour la troisième limite.

Rappelons que les deux derniers calculs de limite faisaient référence à la forme indéterminée ∞-∞. Étant donné que les étudiants de ce groupe avaient été initiés aux formes indéterminées, en plus d'analyser l'évolution de leurs conceptions sur les notions de limite, d'infini, il apparaît pertinent d'examiner leurs conceptions sur la notion d'indétermination. Le Tableau XXVII montre la répartition des réponses des étudiants pour le calcul de limite faisant intervenir des fonctions polynomiales :

N	**Réponses données**	**Conceptions: limite (L)**						**Conceptions: indétermination (I)**							**Conceptions: infini (INF)**					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
26	**∞ (M.E.S.)**	**1**	**23**	**25**	**1**			**17**	**14**	**1**	**3**	**2**	**5**			**25**	**2**	**1**	**2**	**4**
3	**∞** (soustr. en quot.)	**1**	**2**	**1**					**2**		**1**					**3**	**1**			
1	0 (soustr. en quot.)		1	1				1								1				
1	Aucune concl. : F.I. + soustr. en quot.						1				1					1	1			
1	Aucune concl. : F.I. + conjugué		1	1				1	1							1		1		
2	F.I.: ∞-∞	1	2	2					1		1		1			2				
34																				

Tableau XXVII- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1d) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite, d'indétermination et d'infini

Vingt-neuf étudiants sont arrivés à la conclusion que la limite est égale à l'infini. Vingt-six d'entre eux ont effectué une mise en évidence simple et les trois autres étudiants ont transformé la soustraction de fonctions en quotient de fonctions. À titre d'exemple, l'étudiant no.21 a tout d'abord mentionné que la forme indéterminée est ∞-∞ et a ensuite inversé le deuxième terme en le mettant au dénominateur :

$$« \infty-\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{0{,}0025\,x^4}{-1/3600\,x^3} »$$

Étant convaincu de la légitimité de cette transformation d'une différence en quotient qui lui permet de respecter à présent les conditions d'application de la règle de L'Hospital, il applique cette règle pour calculer la valeur de la limite.

En examinant les réponses fournies de ces vingt-six étudiants au premier questionnaire à la question sur l'infini, on constate que leurs conceptions ne permettent pas de les distinguer des autres étudiants. Analysons à présent les conceptions de ces étudiants sur la notion d'indétermination. La notion d'indétermination est surtout vue selon deux caractéristiques : l'indétermination comme une limite (I1) et la vision de calcul (I2). Le Tableau XXVIII montre que plusieurs étudiants prennent l'indétermination comme une limite présentant une forme indéterminée :

N	**Réponses données**	**I1**				**I2**	
		I1.1	I1.2	I1.3	I.4	I2.1	I2.2
26	**∞ (M.E.S.)**	**14**		**2**	**1**	**8**	**6**
3	∞ (Soustr. en quot.)					1	1
1	0 (soustr. en quot.)	1					
1	Aucune concl.: F.I. + soustr. en quot.						
1	Aucune concl.: F.I. + conjugué	1				1	
2	F.I.: ∞-∞						
34							

Tableau XXVIII- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1 d) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'indétermination comme une limite et la vision du calcul

Parmi ces quatorze étudiants, il faut préciser qu'un étudiant considère qu'une limite présentant des formes indéterminées ne se détermine pas (I1 et I3). Au second questionnaire, il écrit : « $\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}x^3\left(0.025x-3600\right)=\infty$ ». Au-delà d'un manque de rigueur dans l'écriture, sa conception sur la notion d'indétermination semble donc avoir évolué suite à l'enseignement complet des formes indéterminées. Les conceptions des étudiants no.6 et no.25 ont également évolué, en ce sens où ces étudiants considéraient initiales une indétermination comme une limite présentant une forme indéterminée (I1.1) où le traitement est impossible (I2.2).

Dans les cinq autres réponses fournies, deux ont transformé la soustraction de fonctions en quotient de fonctions; l'un d'entre eux est arrivé à la conclusion que la limite égale à zéro et l'autre n'a apporté aucune conclusion. Un étudiant a utilisé l'expression du conjugué, mais ses calculs sont incomplets et deux étudiants se sont contentés d'identifier la forme indéterminée ∞-∞.

On observe donc ici un transfert inadéquat de la « technique » qui transforme un produit de fonctions en quotient de fonctions. Celle-ci ne semble donc pas contrôlée par une compréhension des opérations sur les fractions.

Pour le deuxième calcul de limite faisant intervenir les fonctions logarithmique et racine carrée, une mise en évidence simple ne pouvait être appliquée pour lever l'indétermination. Le Tableau XXIX présente la répartition des réponses des étudiants à cette question en lien avec leurs conceptions de limite, d'indétermination et d'infini du premier questionnaire :

N	Réponses données	Conceptions: limite (L)						Conceptions: indétermination (I)							Conceptions: infini (INF)					
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6
1	-∞		**1**	**1**									**1**			**1**		**1**		
2	∞		1	2					1			1				2	1			
4	0	1	4	3				2	3				1			4			1	
11	F.I.: ∞-∞		9	10	1			10	8	1	1		1			10	1	1	1	3
2	Aucune concl.: F.I. + soustr. en quot.		1	1			1		1		1					2	1			
1	Aucune concl.: F.I. + M.E. de x^1/2		1	1				1								1				
2	Aucune concl.: F.I. + x^1/2 au dénom. + dénom. comm.		2	2				1	1				1			2				
1	Aucune concl.: F.I. + ln x au dénom. + dénom. comm.		1	1								1				1	1			
6	Aucune concl.: F.I. + conjugué	0	5	6	0	0	0	3	3	0	2	0	2	0	0	6	0	0	0	1
1	Aucune concl.: F.I.+ "tech.dénom.comm."	1	1	1					1		1					1				
1	Aucune concl.: F.I. + "tech. du log."		1	1				1								1				
2	Aucune réponse	1	2	1				1			1					2				
34																				

Tableau XXIX- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1e) en fonction de leurs conceptions initiales entourant les notions de limite, d'indétermination et d'infini

Un seul étudiant a évalué correctement la limite à -∞ :

« $\ln \infty - \sqrt{\infty} = \infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/2}\left(\frac{\ln x}{x^{1/2}} - 1\right) = \infty^{1/2}\left(\frac{\ln \infty}{\infty^{1/2}} - 1\right) = \infty\left(\frac{\infty}{\infty} - 1\right) = \infty(0-1) = -\infty$$

$$où\ \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{[\ln x]'}{[x^{1/2}]'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^{1/2}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$ »

On s'aperçoit d'un certain manque de rigueur dans l'écriture, tout de même contrôlé par une compréhension adéquate de l'indétermination.

On remarque que sa conception initiale sur la notion d'infini (INF2) ne permet pas de le distinguer des autres étudiants. Il faut également constater qu'au premier questionnaire, il avait écrit qu'une indétermination c'est ce « *qui n'est pas déterminé* » et pourtant au second questionnaire, il fait montre de dextérité et d'innovation pour lever cette indétermination.

En dehors des réponses des deux étudiants qui ont omis de répondre à la question et les réponses des onze étudiants qui se sont contentés d'identifier la forme indéterminée ∞-∞ on retrouve plusieurs « techniques » dans les solutions des étudiants. En effet, quatre étudiants ont à nouveau transformé la soustraction de fonction en quotient. Parmi ces étudiants, un étudiant a calculé que la limite égale à 0 alors que l'étudiant no.30 prétend que la limite est égale à l'infini. Les deux autres étudiants ne sont arrivés à aucune conclusion. Deux autres étudiants ont dérivé uniquement le numérateur afin de lever l'indétermination et ont calculé que la limite est égale à 0. Parmi les sept étudiants qui ont utilisé l'expression du conjugué, seul l'étudiant no.33 a complété ses calculs et est arrivé à la conclusion que la limite est égale à 0, les six autres étudiants ont seulement amorcé leur calcul. Un étudiant a pris le logarithme de la limite, deux étudiants ont amené le $\sqrt{x}$ au dénominateur en changeant l'exposant $\left(x^{-1/2}\right)$ et ont appliqué la technique du dénominateur commun, un étudiant a fait cette même démarche en transformant la fonction pour que ln x apparaisse au dénominateur, un étudiant a mis en évidence le $\sqrt{x}$, deux étudiants ont utilisé la technique du dénominateur commun. Avec cette « technique », l'étudiant no.22 a calculé que la limite est égale à 0, alors que l'étudiant no.27 n'a apporté aucune conclusion en écrivant : « $\infty - \infty +$ *faire un dénominateur commun. Comment ?* » Mis à part les sept étudiants qui ont calculé une valeur à cette limite, les réponses des autres étudiants sont incomplètes. On observe donc ici un transfert inadéquat de plusieurs « techniques » enseignées en classe.

Il est intéressant de constater qu'un bon nombre de ces étudiants considéraient initialement qu'il est possible de lever une indétermination (I2.1) et donc s'emploient à calculer la limite, indépendamment de l'adéquation et de la technique utilisée :

N	Réponses données	I1				I2	
		I1.1	I1.2	1.3	I.4	I2.1	I2.2
1	-∞						
2	∞					1	
4	0	2				2	1
11	F.I.: ∞-∞	9		1	1	5	3
2	Aucune concl.: F.I. + soustr. en quot.						1
1	Aucune concl.: F.I. + M.E. de x^1/2	1					
2	Aucune concl.: F.I. + x^1/2 au dénom. + dénom. comm.	1				1	
1	Aucune concl.: F.I. + ln x au dénom. + dénom. comm.						
6	Aucune concl.: F.I. + conjugué	2		1		1	2
1	Aucune concl.: F.I.+ "tech.dénom.comm."						1
1	Aucune concl.: F.I. + "tech. du log."	1					
2	Aucune réponse	1					
34							

Tableau XXX- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 1 e) en fonction de leurs conceptions initiales concernant la caractérisation de l'indétermination comme une limite et la vision du calcul

Remarquons que cinq étudiants qui pensaient qu'il est impossible de calculer une indétermination ont essayé par différentes techniques, de calculer la limite demandée.

L'enseignement des formes indéterminées les a conduits à vouloir traiter l'indétermination.

Soulignons que le travail d'analyse fait en classe à l'aide du logiciel Maple sur la fonction $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ *lorsque x tend vers* $+\infty$ aurait pourtant pu être mis à contribution pour répondre à cette question. En effet, sachant que la fonction *f(x)* tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, ceci signifie que la fonction racine carrée croît plus rapidement que la fonction logarithmique et que la valeur recherchée est donc moins l'infini. Il semble donc qu'on cherche davantage à transférer les procédures de calcul que les propriétés qu'elles ont pu permettre d'analyser.

En comparant les résultats de ces deux dernières limites, on remarque que ce ne sont probablement pas les conceptions des étudiants sur les notions de limite, d'indétermination et d'infini qui ont influencé les résultats mais c'est plutôt le choix des fonctions. En effet, les résultats montrent que les étudiants ont plus d'aisance à travailler avec les fonctions polynomiales où la facilité d'une mise en évidence permet l'application de la règle de L'Hospital.

Pour la deuxième question de ce questionnaire, le Tableau XXXI donne la répartition des réponses des étudiants en lien avec leur conception entourant la division par zéro :

N	**Réponses données**	**Conceptions: division par zéro (D)**						
		1	2	3	4	5	6	7
4	**x = -2**					**3**	**3**	
28	x = -2 et x = 3			4	1	13	20	1
2	Aucune réponse					1	1	
34								

Tableau XXXI- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 2 en fonction de leurs conceptions initiales entourant la notion de division par zéro

On constate que trente-deux étudiants ont fait les calculs appropriés pour résoudre l'équation et sont arrivés aux deux valeurs candidates comme solutions de l'équation. Néanmoins, seulement quatre (12,5 %) d'entre eux ont conclu correctement, en rejetant la valeur qui annulait le dénominateur. Rappelons que parmi ces trente-deux étudiants, seize étudiants (50 %) avaient mentionné que la division par zéro est impossible dans le premier questionnaire. Ces résultats montrent que les étudiants savent que la division par zéro est impossible, mais ils semblent avoir perdu leur vigilance face à cette notion suite à l'apprentissage des formes indéterminées.

Pour la question sur la notion de limite, le Tableau XXXII présente la répartition des réponses réussies des étudiants :

Réponses réussies	**N**	**Pourcentage des étudiants**
a	28	82 %
b	33	97 %
c	24	71 %
d	29	85 %

Tableau XXXII- Caractérisation des réponses réussies des étudiants du second groupe pour la question 3

Il faut souligner que dix-neuf étudiants (56 %) ont répondu correctement aux quatre évaluations de limite. Rappelons qu'un seul étudiant (3 %) du premier groupe avait réussi à évaluer adéquatement les quatre limites. À part l'étudiant qui n'a pas répondu à la question, tous les étudiants ont identifié correctement la deuxième limite comparativement à 83 % des étudiants du premier groupe. Contrairement aux étudiants du premier groupe, où seulement 3 % des étudiants ont réussi à évaluer la première limite et 13 % la quatrième limite, les étudiants du second groupe ont majoritairement très bien évalué les autres limites. Les étudiants de ce groupe semblent avoir une bien meilleure compréhension de la notion de limite dans sa représentation graphique que ceux du premier groupe. Le travail fait en classe par le professeur sur l'image et la limite semble avoir influencé le taux de succès à la question. Ce travail s'avère donc important pour que les étudiants acquièrent une connaissance adéquate de la limite.

Finalement, la dernière question concernait le degré d'habileté des étudiants aux calculatrices à affichage graphique. Dix-neuf étudiants (56 %) se disent habiles lors de l'utilisation de ces calculatrices, huit étudiants déclarent un degré moyen d'habileté et cinq étudiants (15 %) ne se voient pas habiles. Deux étudiants n'ont pas répondu à la question.

N	Réponses possibles
19	Oui
5	Non
8	Moyen
2	Aucune réponse

Tableau XXXIII- Répartition des réponses des étudiants du second groupe à la question 4

Tout comme pour le premier groupe, on examine à présent l'influence de la technologie dans les réponses des étudiants à la première question du second questionnaire. Rappelons qu'on suppose que les étudiants qui ne sont pas habiles et qui sont moyennement habiles à utiliser la calculatrice ne l'ont pas utilisée pour compléter le questionnaire.

Pour la limite de forme déterminée k/0, c'est-à-dire d'une constante divisée par un infiniment petit, les étudiants pouvaient facilement estimer cette limite à l'aide d'une calculatrice. Étant donné que la majorité des étudiants (vingt-trois sur trente-quatre) ont évalué la limite à droite et à gauche, un recours à la calculatrice ne semble pas avoir été nécessaire dans ce groupe.

Pour les questions 1 b) et c) concernant les fonctions tangente et sinus au numérateur, huit étudiants ont conclu que « $\tan \infty = \infty$ » et « $\sin \infty = \infty$ ». Cette réponse pourrait avoir découlé d'une utilisation d'une calculatrice. En examinant les degrés d'habileté à utiliser une calculatrice de ces huit étudiants, 88 % d'entre eux se disent habiles et un a omis de répondre à la question. Leur conclusion sur les fonctions tangente et sinus pourrait donc provenir d'une utilisation de la calculatrice et d'une incapacité à trier les rétroactions de la calculatrice (voir 2.2.2). Pour la question 1b), précisons également que six autres étudiants ont répondu que « $\tan \infty = k$ » et ont conclu que $k/\infty = 0$. Parmi ces étudiants, 50 % d'entre eux se disent habiles avec la calculatrice, un étudiant est moyennement habile et deux ne sont pas habiles. L'utilisation de la technologie pourrait avoir eu un impact sur quelques-unes de ces réponses.

En examinant les réponses aux questions 1 d) et e) concernant la forme indéterminée $\infty-\infty$, la calculatrice ne semble pas avoir été utilisée comme ressource. En effet, plusieurs méthodes de calcul enseignées ont été essayées pour lever l'indétermination. Malgré ces différentes « techniques » utilisées, peu d'étudiants sont arrivés à une évaluation correcte de la limite à la question 1 e). Ils ne semblent pas avoir utilisé les capacités graphiques de l'outil pour guider leur analyse.

Productions à l'examen

Pour compléter ce suivi des conceptions, nous résumons à présent les résultats à l'examen. Étant donné qu'il manquait les productions complètes de deux étudiants, nous avons retenu les copies de trente-deux étudiants. L'examen comprenait quatre calculs de limite faisant intervenir une forme indéterminée. Précisons tout d'abord que quatorze étudiants (44%) ont répondu correctement aux quatre questions. Parmi les autres étudiants, deux ont affirmé que la forme $0\cdot\infty$ n'existe pas. Les autres étudiants avaient la bonne démarche de résolution de problème, mais des erreurs de calcul ou de dérivation étaient présentes dans leur solution.

4.2.6 Bilan des résultats du second groupe

Tout comme pour le premier groupe, un résumé des résultats recueillis dans ce groupe sera fait à présent. Tout d'abord, contrairement au premier groupe, les participants avaient vu en classe les formes indéterminées 0/0 et ∞/∞ et la règle de L'Hospital au moment de compléter le premier questionnaire. Malgré ce début d'enseignement, on remarque que les étudiants de ce groupe ont les mêmes conceptions initiales sur la notion de limite que les étudiants du premier groupe : la possibilité d'atteindre ou non la limite et le mouvement vers une limite. Précisons que 10 % des étudiants considèrent que la limite ne peut être atteinte comparativement à 28 % des étudiants du premier groupe. Pour la notion d'indétermination, 56 % des étudiants voient l'indétermination comme une limite et considèrent qu'il est possible de lever une indétermination. Il semble que l'enseignement reçu sur les formes indéterminées a influencé les réponses des étudiants à cette question. À nouveau pour la notion de division par zéro, on remarque l'influence de cet enseignement puisque 71 % des étudiants ont associé la division par zéro avec la limite. Précisons que seulement 50 % l'associent à l'impossibilité contrairement à 72 % pour le premier groupe. Finalement, comme les étudiants du premier groupe, les étudiants considèrent surtout l'infini comme un objet.

Afin d'établir un lien entre les conceptions et les dispositifs d'enseignement, une analyse du manuel utilisé s'est avérée essentielle. En plus de respecter les exigences du programme, on retrouve dans le manuel tout un travail d'analyse mathématique qui n'était pas présent dans le premier manuel. En effet, les auteurs introduisent les formes indéterminées en énonçant les différents théorèmes d'analyse qui permettent de démontrer la règle de L'Hospital.

Contrairement au manuel, le professeur n'introduit pas les formes indéterminées avec les théorèmes d'analyse. Ce choix s'explique par les difficultés qu'il a observées chez les étudiants avec cette approche. Chaque forme indéterminée est plutôt expliquée à l'aide d'exemples. Il faut noter qu'il accorde une grande importance à la compréhension de la notion de limite. En effet, le travail fait en classe, incluant l'utilisation du logiciel Maple, permet de distinguer le concept de limite et celui d'image. Cette démonstration a pour buts de montrer les limites de l'outil technologique et d'initier les étudiants à l'utilisation du logiciel en faisant ressortir sa compatibilité avec la théorie enseignée.

L'examen donné par le professeur se restreint, conformément au programme, aux calculs de limites présentant les différents cas d'indétermination étudiés. En effet, le professeur a choisi quatre calculs de limites où les étudiants ont vu en classe la méthode qui leur permettrait de lever l'indétermination mais un certain travail est requis dans l'identification et la coordination des méthodes nécessaires.

Le second questionnaire a permis de constater que pour certains étudiants leur conception initiale de l'indétermination semble avoir bougé une fois l'enseignement complété des formes indéterminées. Également, comme pour les conceptions des étudiants du premier groupe, les conceptions sur la division par zéro semblent davantage ancrées que celles sur la limite.

Dans ce groupe, on remarque que 56 % des étudiants se disent habiles à utiliser la calculatrice à affichage graphique. Les résultats laissent toutefois supposer qu'on met davantage à contribution les capacités numériques que graphiques dans l'étude des limites, car une association entre limite et calcul semble instaurée dans l'esprit des étudiants.

Pour compléter ce suivi des conceptions, l'analyse des productions à l'examen montre que, dans l'ensemble, les étudiants ont appris à bien manipuler les formes indéterminées.

4.3 Synthèse des résultats

Pour terminer ce chapitre d'analyse des résultats, nous comparons à présent les taux de réussite des étudiants au second questionnaire. Rappelons que ce questionnaire a été élaboré pour vérifier la compréhension des étudiants sur les formes indéterminées et sur certaines notions qui leur sont connexes. La Figure 3 présente les taux de réussite à chacune des questions de ce questionnaire :

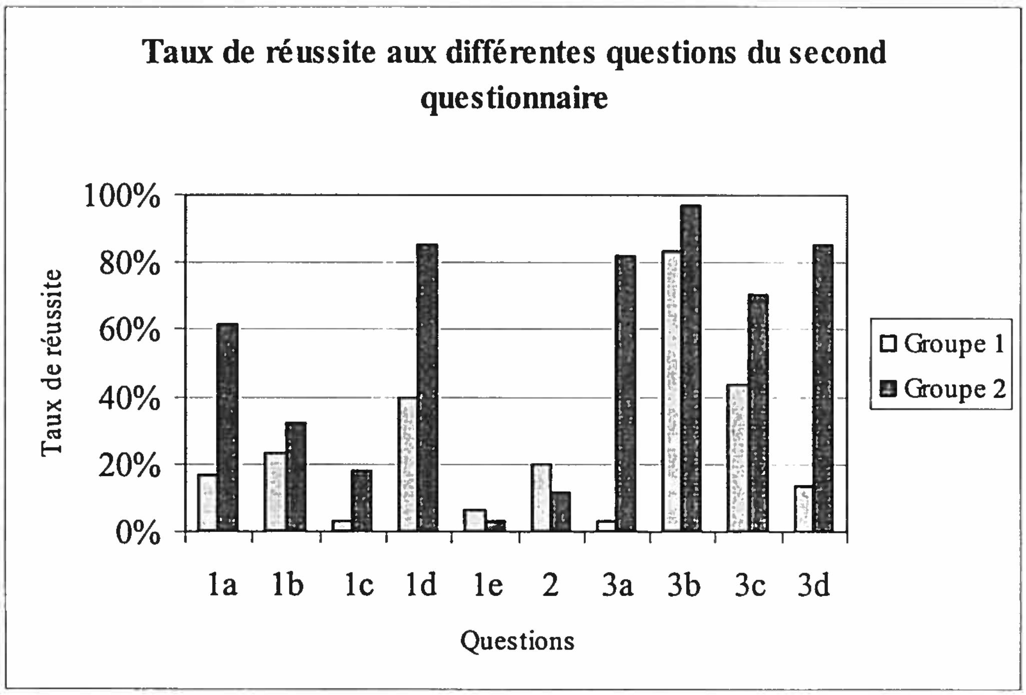


Figure 3- Répartition des taux de réussite des deux groupes selon les différentes questions du second questionnaire

Pour réussir ce questionnaire, les étudiants devaient donc avoir une bonne compréhension des notions de limite, d'indétermination, de division par zéro et d'infini (voir Tableau I). Pour la question 1a), on note une différence considérable entre les taux de réussite du premier groupe (17 %) et du second (62 %). Afin d'expliquer ces taux, examinons les conceptions initiales des étudiants sur la notion de limite. La Figure 4 présente la caractérisation de la notion de limite par les étudiants des deux groupes :

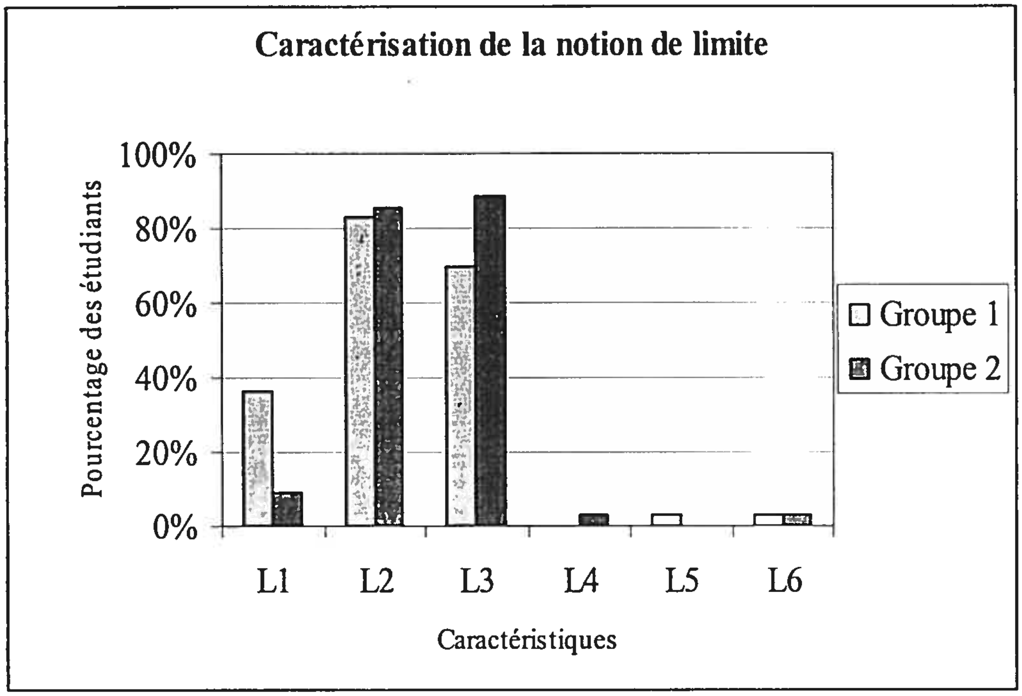


Figure 4- Caractérisation de la notion de limite par les étudiants des deux groupes

À priori, on note que les étudiants des deux groupes font ressortir les deux même caractéristiques de la notion de limite : la possibilité d'atteindre ou non la limite (L2) et le mouvement vers une limite (L3). En examinant les réponses qui ont été codées L2, on s'aperçoit que les étudiants considèrent majoritairement, dans les deux groupes, que la limite peut être atteinte :

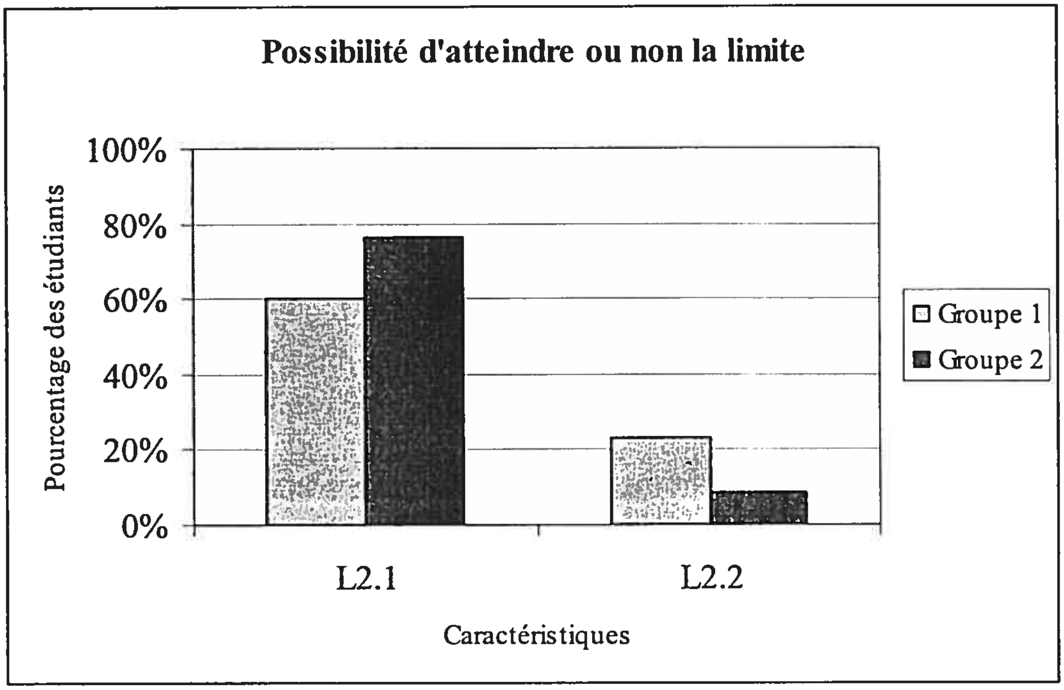


Figure 5- Répartition des réponses des étudiants des deux groupes sur la possibilité ou non d'atteindre la limite

Notons toutefois que les étudiants du second groupe sont moins nombreux à croire que la limite est impossible à atteindre (L2.2) et à voir la limite comme une borne (L1) démontrant ainsi une meilleure compréhension de la notion de limite. Leurs conceptions illustrent bien le travail qui a été fait par le professeur dans son début d'enseignement des formes indéterminées.

Pour les questions 1b) et 1c), on remarque que la performance des étudiants du second groupe était supérieure à ceux du premier groupe. Examinons les conceptions qui peuvent avoir influencé les réponses des étudiants. Étant donné que nous avons examiné précédemment les conceptions initiales sur la notion de limite, nous passons directement à l'analyse des conceptions initiales des étudiants sur la notion d'infini :

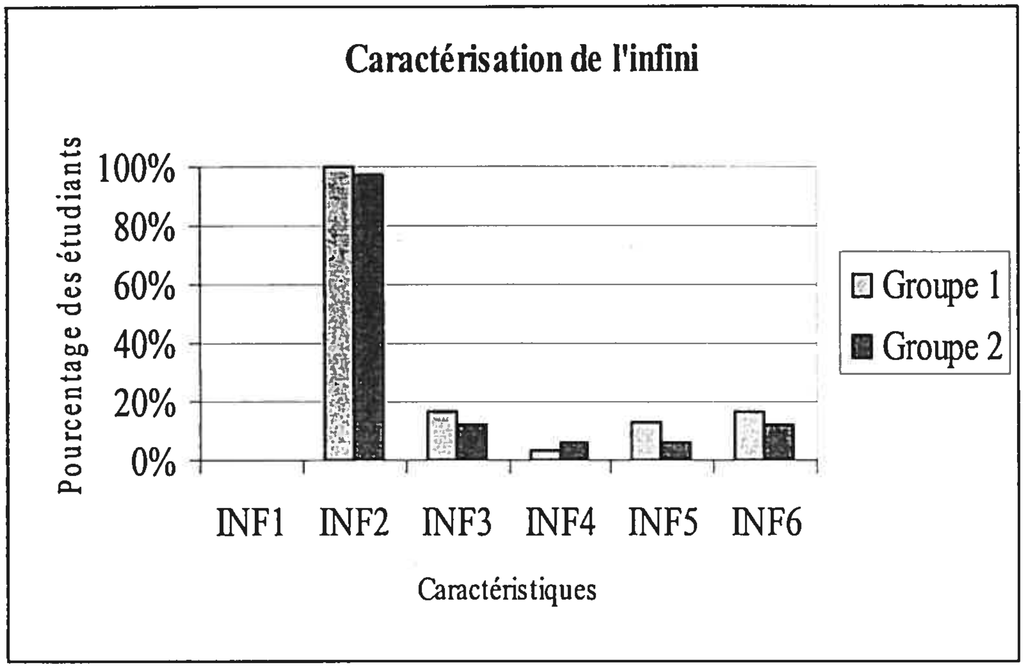


Figure 6- Caractérisation de la notion d'infini par les étudiants des deux groupes

Les étudiants des deux groupes semblent avoir des conceptions semblables sur la notion d'infini. En effet, tous les étudiants, à l'exception d'un étudiant du second groupe, voient l'infini comme un objet. En analysant plus spécifiquement la caractéristique de l'infini comme un objet, on s'aperçoit que les étudiants du second groupe sont plus nombreux à considérer et à manipuler l'infini comme un nombre, ceci semble être un effet négatif d'un début d'apprentissage des formes indéterminées :

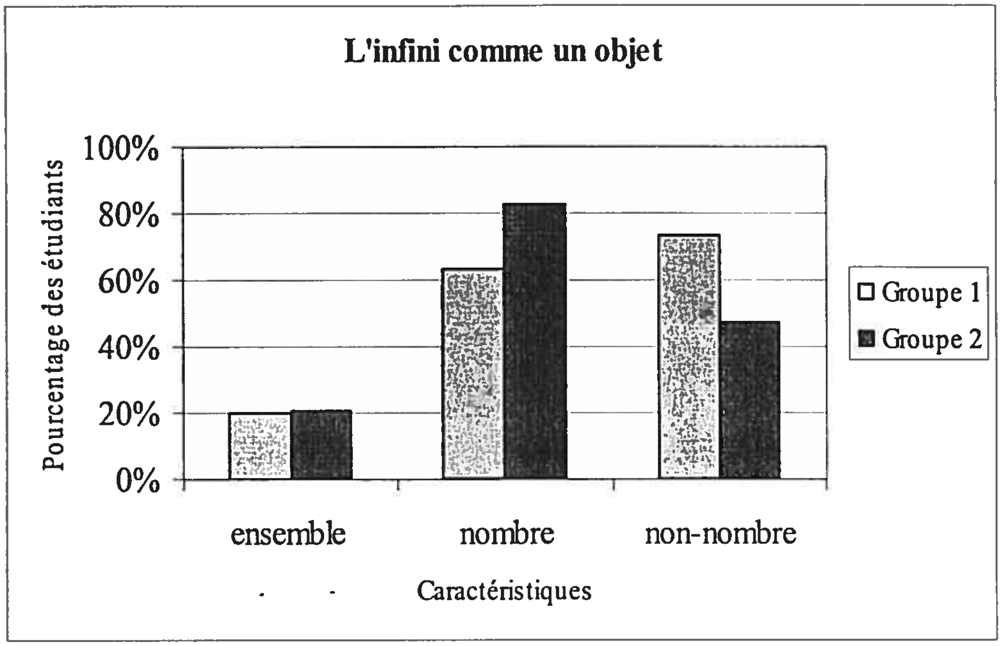


Figure 7- Caractérisation de l'infini comme un objet par les étudiants des deux groupes

Étant donné que les conceptions des étudiants sur la notion d'infini ne sont pas très différentes d'un groupe à l'autre, c'est probablement les conceptions sur la notion de limite et l'enseignement reçu des formes indéterminées qui a permis au second groupe de mieux réussir ces questions.

Pour la question 1d), on remarque un écart considérable entre le taux de réussite du premier groupe (40 %) et celui de second groupe (85 %). Afin d'expliquer cette différence, examinons les conceptions initiales des étudiants sur les notions de limite, d'indétermination et d'infini. Pour la notion d'indétermination, la Figure 8 montre que seuls les étudiants du second groupe voient l'indétermination comme une limite au lieu de considérer l'indétermination comme une valeur indéterminée ou qui ne se détermine pas :

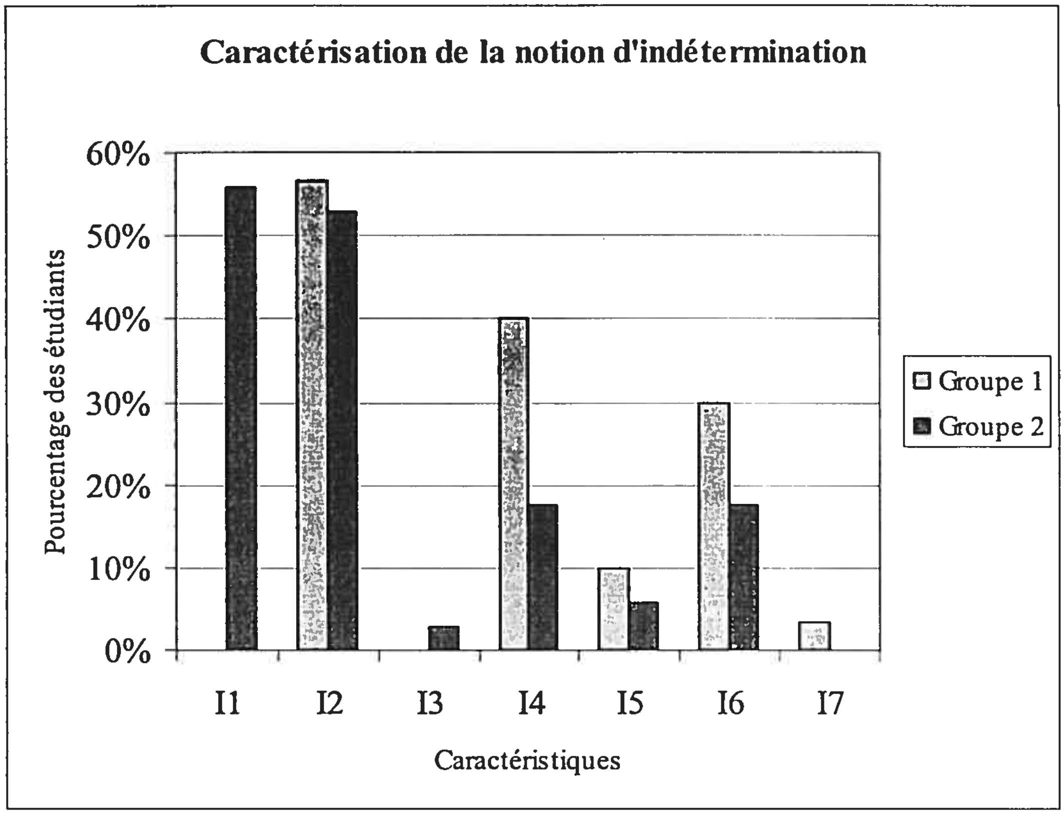


Figure 8- Caractérisation de la notion d'indétermination par les étudiants des deux groupes

Cette association entre les termes « indétermination » et « limite » est due au début d'apprentissage des formes indéterminées. Les résultats recueillis du premier groupe sont tout à fait normaux puisque les étudiants n'avaient pas encore vu les formes indéterminées au moment de compléter le premier questionnaire.

Notons également que les étudiants des deux groupes ont majoritairement une vision de calcul. Plus spécifiquement, la Figure 9 montre que les étudiants ont des visions opposées d'un groupe à l'autre :

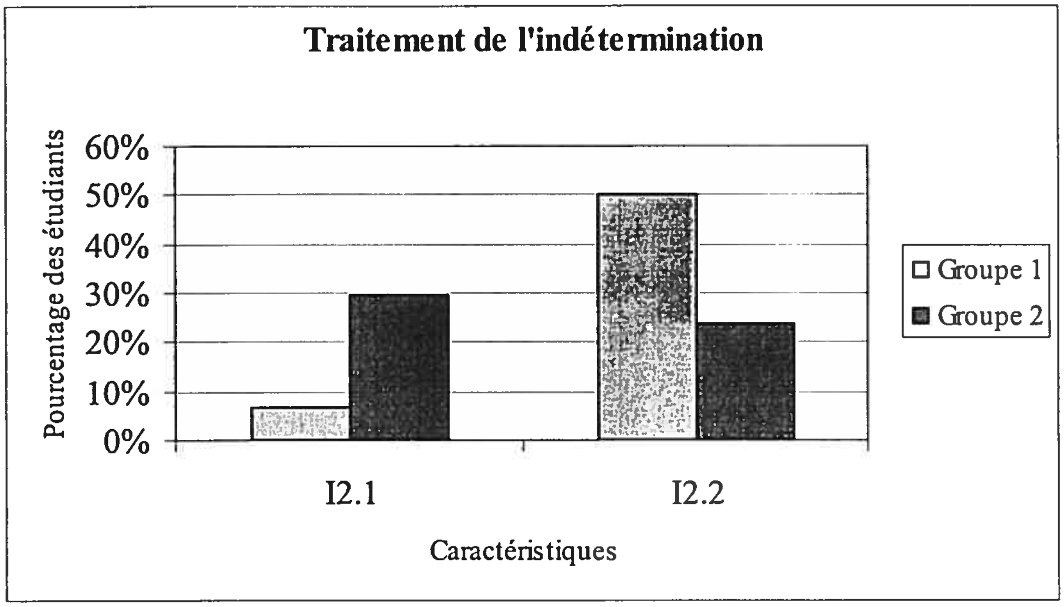


Figure 9- Répartition des réponses des étudiants des deux groupes sur le traitement d'une indétermination

En effet, les étudiants du second groupe sont plus nombreux à considérer qu'il est possible de lever une indétermination (INF 2.1), ce qui paraît tout à fait normal puisqu'ils avaient été initiés aux méthodes permettant de lever des indéterminations de type 0/0 et ∞/∞.

Au moment de passer le second questionnaire, les deux groupes en avaient terminé avec l'apprentissage des formes indéterminées. Le début d'enseignement qui avait teinté les conceptions n'est plus ici un argument recevable pour expliquer les différences entre les taux de réussite. À nouveau, c'est sans doute une compréhension plus juste de la notion de limite par les étudiants du second groupe qui peut servir d'explication. Au-delà de la distinction du concept de limite à celui d'image, l'enseignement en classe du professeur du second groupe consistait à utiliser une approche algébrique pour la notion de limite. Rappelons que 76 % des étudiants du groupe ont effectué une mise en évidence simple pour lever l'indétermination.

Soulignons que pour le calcul de limite 1d), l'utilisation de la calculatrice n'avantageait pas nécessairement l'étudiant. En effet, pour cette fonction, un tableau de valeurs ou une représentation graphique peuvent être également trompeurs.

Contrairement au calcul en 1 d), un étudiant habile à la calculatrice aurait pu être avantagé pour calculer la dernière limite (1 e). La Figure 10 donne la répartition des étudiants selon leur degré d'habileté à la calculatrice à affichage graphique. On note que les étudiants du second groupe sont plus habitués à cet outil. Le faible taux de réussite de ce groupe (3 %) laisse supposer que les étudiants ne mettent pas à contribution les capacités graphiques dans l'étude des limites.

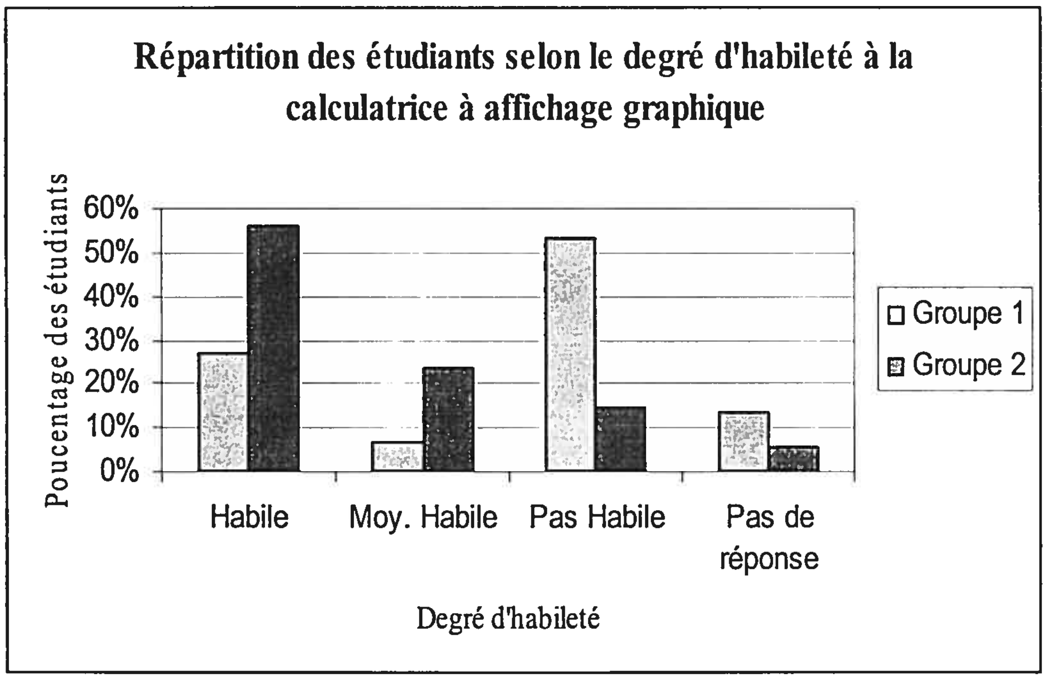


Figure 10- Répartition des étudiants selon leur degré d'habileté à la calculatrice à affichage graphique

Pour la question 2, examinons les conceptions initiales des étudiants sur la notion de division par zéro :

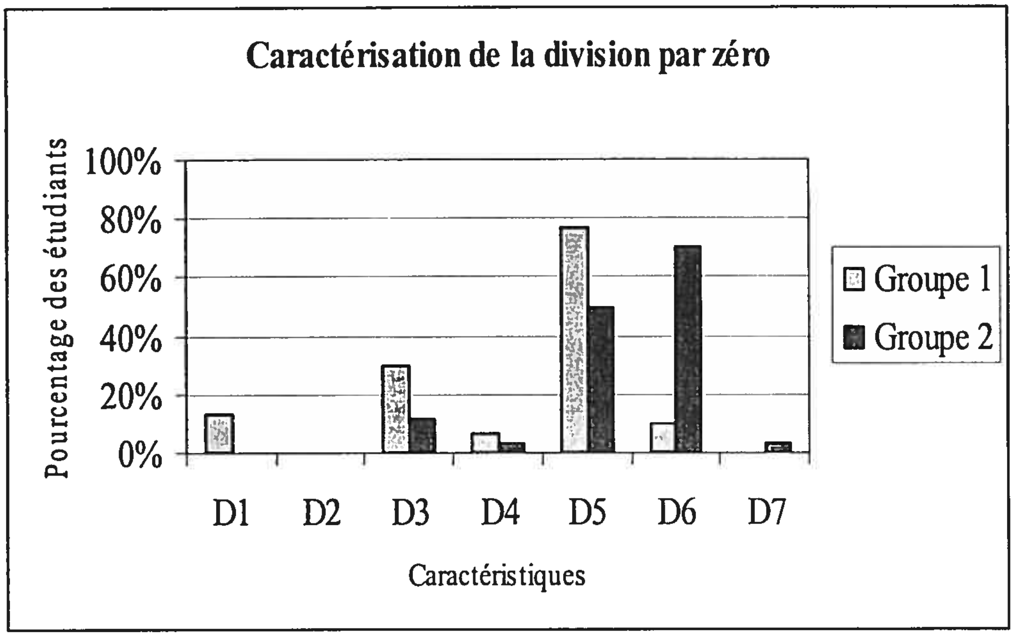


Figure 11- Caractérisation de la notion de division par zéro par les étudiants des deux groupes

À nouveau, on remarque qu'un début d'apprentissage des formes indéterminées a influencé les réponses des étudiants. En effet, les étudiants du second groupe associent la division par zéro à une limite. La performance légèrement supérieure des étudiants du premier groupe à la question 2 pourrait être expliquée par une conception adéquate de la division par zéro plus répandue dans le premier groupe, bien qu'ils soient plusieurs dans les deux groupes à perdre leur vigilance dans le traitement d'une expression rationnelle où le dénominateur peut prendre une valeur nulle.

Pour la troisième question, on remarque des différences spectaculaires entre les taux de réussite du premier et du second groupe. Rappelons que le professeur a donné une définition algorithmique de la limite et avait fait un travail considérable pour que les étudiants distinguent adéquatement le concept de limite et celui d'image. Ce travail a permis aux étudiants d'ajuster leurs conceptions, tout au moins sur cet aspect de la notion de limite. Nous le constations dès le premier questionnaire et nous en voyons ici les effets.

5 CONCLUSIONS

Avant de conclure, il apparaît pertinent de rappeler la problématique et la méthodologie qui nous a permis de recueillir nos données. Ensuite, un résumé sur l'ensemble des résultats sera présenté. Pour terminer, on examinera les limites et les apports de cette recherche.

5.1 Rappel de la problématique et de la méthodologie

L'enseignement et l'apprentissage des formes indéterminées sont reconnus problématiques par un bon nombre de professeurs de niveau collégial. Dans son étude, Maurice (2000) a fait ressortir les conceptions erronées des étudiants sur les formes indéterminées. Notre étude a d'abord voulu cerner la problématique associée aux formes indéterminées. Prenant comme référence principale la recherche de Maurice, nous avons cherché à établir des liens entre les dispositifs actuels d'enseignement et les conceptions des étudiants sur les notions de limite et d'infini.

Pour ce faire, nous avons d'abord ciblé deux groupes d'observation où les stratégies d'enseignement étaient différentes. Deux questionnaires avant et après l'enseignement des formes indéterminées ont été distribués aux étudiants afin d'examiner l'évolution des conceptions. Nous avons aussi analysé les dispositifs d'enseignement et d'évaluation dans leur prise en compte des différentes conceptions.

5.2 Conclusion sur l'ensemble des résultats

Pour atteindre les objectifs de l'étude, l'analyse des résultats cherchait à établir des liens entre trois pôles dans l'apprentissage des formes indéterminées : les conceptions initiales, l'enseignement reçu et la capacité à résoudre des problèmes après enseignement. Nous avons tout d'abord remarqué que l'analyse de l'évolution des conceptions faite à travers des productions d'étudiants n'a pas mené vers les résultats escomptés. En effet, pour un même enseignement, les nombreux tableaux n'ont pas permis de faire ressortir l'effet des différences individuelles au niveau des conceptions initiales sur la performance aux différentes questions faisant intervenir les notions en jeu.

Les taux de réussite aux problèmes mathématiques du second questionnaire nous ont permis de constater que les étudiants du second groupe semblent réussir davantage à manipuler les objets liés aux formes indéterminées que ceux du premier groupe. En effet, le second groupe a eu des taux de réussite majoritairement supérieurs à ceux du premier groupe. Afin d'expliquer cet écart entre les deux groupes, nous avons essayé d'établir des liens entre leurs conceptions des formes indéterminées et celles des concepts qui leur sont connexes tels que la limite, l'indétermination, la division par zéro et l'infini. Les étudiants du second groupe avaient des conceptions initiales plus justes sur la notion de limite. En effet, ils étaient moins nombreux à croire que la limite est impossible à atteindre et à voir la limite comme une borne. Étant donné que le second groupe avait été initié aux formes indéterminées, la différence des conceptions sur la notion d'indétermination était compréhensible. On note une conception initiale plus adéquate de la division par zéro dans le premier groupe bien qu'ils soient plusieurs dans les deux groupes à perdre leur vigilance dans le traitement d'une expression rationnelle où le dénominateur peut prendre une valeur nulle. Pour la notion d'infini, les conceptions d'un groupe à l'autre ne sont pas très différentes. Néanmoins, les étudiants du second groupe sont plus nombreux à considérer et à manipuler l'infini comme un nombre.

Plus que les conceptions initiales, c'est l'enseignement reçu par le professeur qui semble déterminer l'apprentissage des étudiants dans le passage à l'analyse mathématique. Le questionnaire distribué aux professeurs a permis d'identifier les difficultés qu'ils rencontrent lors de l'apprentissage des formes indéterminées. Le professeur du premier groupe a surtout pris en compte les conceptions des étudiants sur la notion de l'infini. En effet, sa stratégie d'enseignement favorise le développement par l'intuition des capacités d'analyse en leur permettant de développer leur intuition sur l'infiniment petit et l'infiniment grand. Chez le second professeur, ce sont surtout les obstacles épistémologiques face à la notion de limite qui sont pris en compte. Tout un travail est fait pour distinguer le concept de limite et celui d'image. Cette stratégie, un peu plus procédurale que celle du premier professeur, a permis aux étudiants de ce groupe de mieux réussir le second questionnaire. Néanmoins, les résultats ne nous permettent pas d'affirmer qu'ils ont une compréhension juste de la notion de limite. Pour eux, la notion de limite se restreint peut-être à la distinction entre le concept de limite et celui d'image. La notion de limite va bien au-delà de cette distinction. Mais il convient de noter que le travail fait sur la notion d'infini par le professeur du premier groupe semble avoir été moins déterminant sur la capacité à résoudre notre choix de problèmes, où un début d'analyse était nécessaire, que le travail fait au niveau de la limite par le professeur du second groupe.

Peu importe la stratégie choisie, les professeurs ont tenu compte de certaines difficultés liées aux formes indéterminées. En dépit des efforts d'intégration d'éléments d'analyse dans l'apprentissage des formes indéterminées, une centration sur le calcul était présente. Les preuves, pourtant présentes dans les manuels, n'ont pas fait l'objet d'un enseignement. Puisque les preuves et l'analyse s'instituent souvent en obstacles et font augmenter les taux d'échec, aucun des deux professeurs n'a jugé opportun de confronter les étudiants à ces difficultés lors des examens.

Malgré cette adhésion parfaite au programme lors de l'évaluation des apprentissages, l'enseignement des deux professeurs est allé au-delà des exigences du programme. Ayant pris des manuels contrastés, ils ont effectué, à leur propre manière, un travail d'analyse afin de compléter l'apprentissage proposé du programme. L'enseignement du professeur est plus déterminant que ce qui est présenté dans le manuel.

Tout comme les preuves et l'analyse, l'informatique occupe une place restreinte en classe et inexistante dans l'évaluation. En effet, seul le professeur du second groupe a utilisé un outil informatique lors de son enseignement des formes indéterminées, mais cette utilisation de la technologie est limitée à une démonstration sur le logiciel Maple et l'apprentissage fait à l'aide de cet outil n'est pas vérifié lors de l'évaluation. Également, on remarque que les étudiants se limitent aux capacités numériques de l'outil.

En combinant l'analyse des dispositifs d'enseignement et les conceptions ressorties au premier questionnaire, nous avons essayé de repérer l'évolution des conceptions des étudiants à la suite de l'enseignement des formes indéterminées. Bien que les conceptions initiales des étudiants sur la division par zéro semblent davantage ancrées que leur conception sur la notion de limite, on remarque que les étudiants ont perdu leur vigilance face à cette notion lors des calculs de limite présentant des formes indéterminées. La notion de division par zéro semble banalisée à travers les calculs de limite. Pour la notion de limite, les conceptions de certains étudiants pourraient avoir évolué de manière positive suite à l'enseignement des formes indéterminées. Néanmoins, le travail fait dans le premier groupe ne permet pas aux étudiants de concevoir que la limite peut être atteinte. Les conceptions initiales de l'indétermination semblent avoir évolué, surtout pour les étudiants du premier groupe. L'analyse du second questionnaire montre que les étudiants considèrent et manipulent toujours l'infini comme un nombre. De plus, leurs conceptions sur l'infini sont demeurées contradictoires malgré cet enseignement.

5.3 Limites et apport de la recherche

5.3.1 Limites de la recherche

Tout d'abord, il faut rappeler que le choix des groupes d'observations s'est fait de manière informelle. En effet, nous avons rencontré quelques professeurs de différentes institutions collégiales de la région de Montréal et sa banlieue pour essayer d'identifier leur stratégie d'enseignement des formes indéterminées. Les critères de sélection se sont donc limités à l'emplacement de l'institution et à la stratégie d'enseignement du professeur. Nous avons ainsi choisi deux groupes où les stratégies d'enseignement étaient différentes.

De plus, il faut souligner que le premier questionnaire n'a pas été déterminant. En effet, le vocabulaire mathématique utilisé par les étudiants a empêché une analyse fine des conceptions. Il aurait fallu amener les étudiants à expliquer davantage leurs réponses à l'aide d'entrevues. Il aurait été intéressant de redistribuer aux étudiants le même questionnaire après l'enseignement des formes indéterminées en leur demandant de compléter ou de corriger leurs premières réponses. Cela aurait permis de mieux voir l'évolution des conceptions des étudiants.

Pour le second questionnaire, on aurait peut-être dû demander aux étudiants d'indiquer les questions pour lesquelles ils se sont servis d'une calculatrice numérique ou graphique. Cela nous aurait donné une plus grande précision dans notre analyse.

De tout ceci, il résulte une difficulté à établir des liens entre les conceptions ressorties au premier questionnaire et les réponses fournies au second questionnaire.

5.3.2 Apport de la recherche

Cette recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des formes indéterminées a fait ressortir un aspect fort intéressant : les lacunes conceptuelles ne semblent pas être un obstacle dans la production aux examens. À la fin du cours de NYB, les étudiants savent manipuler les formes indéterminées qu'on leur soumet, mais, comme le montre notre second questionnaire, on observe encore un certain manque de compréhension face à cette notion. De plus, l'évolution de certaines conceptions que nous avons pu observer n'est pas tant l'effet du travail de manipulation des formes indéterminées que de l'enseignement du professeur qui y était périphérique.

Il serait pertinent de poursuivre des études didactiques sur les formes indéterminées car elles demeurent à la fois un contenu mathématique réputé difficile et un sujet peu documenté sur le plan didactique. Par exemple, on pourrait analyser d'autres stratégies d'enseignement des formes indéterminées et leur impact sur les conceptions des étudiants ou chercher à établir le rôle de la technologie dans leur apprentissage. Il serait également intéressant de refaire cette étude présente en redistribuant le premier questionnaire aux étudiants après l'enseignement des formes indéterminées. Les conceptions des étudiants auraient-elles évolué suite à cet enseignement? Il reste plusieurs voies à explorer sur ce sujet, les perspectives de recherche sont nombreuses.

BIBLIOGRAPHIE

BALACHEFF, N. (1988) Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de Collège, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, p.13-74.

BALACHEFF, N. (1994) Didactique et intelligence artificielle, dans *Didactique et intelligence artificielle* (dir. N.Balacheff et M.Vinet), Grenoble, La Pensée sauvage éditions, 1994, France, p.11-42.

BRADLEY, G.L. et SMITH, K.L. (1999) adapté par Franco et Marcheterre (2002) Calcul intégral, Prentice-Hall, Inc. a Pearson Education company.

CARON, F. (2001) Effets de la formation fondamentale sur les compétences d'étudiants universitaires dans la résolution de problèmes de mathématiques appliquées, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

CHEVALLARD, Y. (1991) La transposition didactique, Grenoble, La Pensée Sauvage, Éditions.

CORNU, B. (1981) Apprentissage de la notion de limite : Modèles spontanés et modèles propres, *Proceedings PME-V (Psychology of Mathematics Education),* vol. I, p. 322-326.

CORNU, B. (1983) Apprentissage de la notion de limite, conceptions et obstacles, Thèse de doctorat de troisième cycle de mathématiques pures, Université scientifique et médicale de Grenoble.

CORNU, B. (1992) Évolution des mathématiques et de leur enseignement, dans *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (dir. B. Cornu), Paris, Presses Universitaires de France, France, p.13-69.

DREYFUS, T. (1999) Why Johnny can't prove, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, p. 85-109.

ERVYNCK, G. (1981) Difficultés conceptuelles des étudiants de première année d'université lors de l'acquisition de la notion de limite d'une fonction, dans *Proceedings PME (Psychology of Mathematics Education)*, Grenoble, France, p.330-333.

FISCHBEIN, E. (2001) Tacit Models and Infinity, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, p. 309-329.

FORSTER, P.A. et TAYLOR, P.C. (2000) A Multiple-Perspective Analysis of Learning in the Presence of Technology, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 42, p. 35-59.

GOODSON-ESPY, T. (1998) The Roles of Reification and Reflective Abstraction in the Development of Abstract Thought: Transitions from Arithmetic to Algebra, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 36, p. 219-245.

GRAY, E., PINTO, M., PITTA, D. et TALL, D. (1999) Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, p. 111-133.

HANNA, G. (2000) Proof, Explanation and Exploration: An Overview, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 44, p. 5-23.

HAUCHART, C. et ROUCHE, N. (1987) Apprivoiser l'infini : un enseignement des débuts de l'analyse, Ciaco éditeur, p. 27-50 et p. 346-358.

HITT F. (2000) Construction of Mathematical Concepts and Use of Symbolic Calculators, *The 4th International DERIVE-TI 89/92 Conference: Computer Algebra in Mathematics Education*, Liverpool, United Kingdom.

HITT, F. (1997) El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual, Editorial Fondo Educativo Interamericano. México.

HITT, F. et LARA-CHAVEZ, H. (1999) Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from Two Points of View: that of the teacher and that of the student, dans *Proceedings of British Society of Research into Learning Mathematics*, Lancaster, U.K, p. 49-54

HITT, F. et PAEZ, R. (2001) « The notion of limit and learning problems », dans *Proceedings of the Twenty-Third Annual Meeting of PMENA*, Utah, USA, vol.1, p. 168-176.

HITT, F. et PLANCHARD, O. (1998) Graphing of discrete functions versus continuous functions: A case study, *Proceedings of North American Chapter of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, Raleigh, USA, p. 271-276.

HITT, F. et SANTOS, M. (2002) Searching for Advantages of technological Dimension in Mathematical Problem Solving, *Proceedings of the 5th International DERIVE-TI89/92 Conference.* J. Böhm (Editor), Vienna, Austria, p. 1-10.

JAHNKE, H.N. (2001) Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, n°2 et n°3, p. 175-197.

KLEINER, I. (2001) History of the Infinitely Small and Infinitely Large in Calculus, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, p. 137-174.

LAGRANGE, J.-B. (2000) L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 43, p. 1-30.

LAJOIE, C. et MURA, R. (1995) La division par zéro ou le danger d'un trop grand attachement au concret, dans *Instantanés mathématiques*, vol. 31, n° 4, p. 7-15.

MAMONA-DOWNS, J. (2001) Letting the Intuitive Bear of the Formal; A Didactical Approach for the Understanding of the Limit of a Sequence, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, n° 2 et n° 3, p. 259-288.

MARY, C. (1999) Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

MAURICE, L. (2000) Les idées d'élèves du collégial à propos des limites de fonctions rationnelles faisant intervenir le zéro et l'infini, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.

MEHL, S. *Une chronologie des mathématiques* http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/accueil.htm (page consultée le 16 juillet 2003)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1997) *Programme d'études – Enseignement secondaire – Mathématique 536*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (1999) *Regard sur l'enseignement collégial*, Gouvernement du Québec, Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC *Programme de Sciences de la nature* http://www.meq.gouv.qc.ca/ens-sup/ens-coll/Cahiers/program/200B0.pdf (page consultée le 15 juillet 2003)

MONAGHAN, J. (2001) Young Peoples' Ideas of Infinity, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, p. 239-257.

O'CONNOR, J.J. et ROBERTSON, E.F. *The MacTutor History of Mathematics archive.* http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/index.html (page consultée le 16 juillet 2003)

RECIO, A.M. et GODINO, J.D. (2001) Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, p. 83-99.

SFARD, A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 2, p. 1-36.

SIERPINSKA, A. (1987b) Sur la relativité des erreurs, *Actes de la 39e Rencontre CIEAEM*, Sherbrooke, Canada, p. 371-397.

SKEMP, R. R. (1971) The Psychology of Learning Mathematics, Penguin Books, Harmondsworth, England.

SPIVACK, M. (1994) Calculus, Third Edition, Publish or Perish, Inc.

STEWART, S. (1999) Calculus, Fourth Edition, Brooks/Cole Publishing Company.

SZYDLIK, J.E. (2000) Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function, dans *Journal for Research in Mathematics Education*, Washington, p. 258-272.

TALL, D. (1992) The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof, (chapitre 20) dans *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows (ed.), Mac Millan Publishing Company, New York, p. 495-511

TALL, D. (1996) Functions and Calculus, A.J. Bishop et al. (eds.), International Handbook of Mathematics Education, p. 289-325.

TALL, D. (2002) Natural and Formal Infinities, dans *Mathematics Education Research Centre*, Institute of Education, University of Warwick.

TALL, D. et TIROSH, D. (2001) Infinity – the never–ending struggle, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, n° 2 et n° 3, p.129-136.

THOMAS, G.B., FINNEY, R.L., WEIR, M.D et GIORDANO, F.R. (2001) adapté par Godbout (2002), Calcul intégral, Addison Wesley Longman.

TROUCHE, L. (2000) La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : Étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 41, p. 239-264.

TSAMIR, P. (2001) When 'The Same' is not perceived as such: The Case of Infinite Sets, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, n° 2 et n° 3, p.289-307.

TSAMIR, P. et TIROSH, D. (1999) Consistency and Representation: A case of Actual Infinity, dans *Journal for Research in Mathematics Education*, Washington, p. 213-217.

VINNER, S. (1989) The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students, dans *Focus: On Learning Problems in Mathematics*, vol.11.

WEBER, K. (2001) Student Difficulty in Construction Proofs: The Need for Strategic Knowledge, dans *Educational Studies in Mathematics*, vol. 48, p. 101-119.

WEINSSTEIN, E. *Eric Weisstein's world of Mathematic, a wolfram web resource.* http://mathworld.com (page consultée le 16 juillet 2003)

WILLIAMS, S.R. (2001) Predictions of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids, dans *Journal for Research in Mathematics Education*, Washington, p. 341-359.

ANNEXE A : FORMULAIRE DE CONSENTEMENT

Je, soussigné, ______________________________________, consens par la présente à participer au projet de recherche suivant dans les conditions décrites ci-dessous.

Titre du projet: *Étude de l'enseignement et de l'apprentissage des formes indéterminées.*

Responsable du projet: Mélanie Odierna, étudiante en maîtrise
Adresse: Département de didactique, Université de Montréal, C.P. 6128, succursale Centre-ville
[redacted]

Nature de ma participation: contribution d'éléments d'information sur mon histoire éducative par la voie d'un questionnaire et possiblement d'une entrevue; octroi d'un droit d'accès à un examen du cours ____ pour la responsable nommée ci-haut.
Durée de ma participation: de fin janvier au début février 2003

Avantages personnels pouvant découler de ma participation: communication des résultats du projet.

Inconvénients personnels pouvant découler de ma participation: aucun

Risques: Il est entendu que ma participation à ce projet de recherche ne me fait courir, sur le plan médical ou psychologique, aucun risque que ce soit. Il est également entendu que ma participation n'aura aucun effet (ou interférence) sur l'évaluation au cours.

Information concernant le projet: On devra répondre, à ma satisfaction, à toute question que je poserais à propos du projet de recherche auquel j'accepte de participer.

Retrait du projet: Il est entendu que ma participation au projet de recherche décrit ci-dessus est tout à fait libre; il est également entendu que je pourrai à tout moment mettre un terme à ma participation, sans aucun effet sur l'évaluation au cours.

Confidentialité: Il est entendu que les observations ou enregistrements effectués en ce qui me concerne dans le cadre du projet de recherche décrit ci-dessus demeureront strictement confidentiels, et que l'anonymat des participants sera protégé dans toute publication ou conférence rapportant les résultats de ce projet.

Je déclare avoir lu et compris les termes du présent formulaire

____

signature de l'intéressé

Fait à Montréal, le ______________ 2003.

Je, soussigné, ____________________________, certifie (a) avoir expliqué au signataire intéressé les termes de la présente formule, (b) avoir répondu aux questions qu'il m'a posées à cet égard et (c) lui avoir clairement indiqué qu'il reste à tout moment libre de mettre un terme à sa participation au projet de recherche décrit ci-dessus:

____

signature de la responsable du projet

Fait à Montréal, le ______________ 2003.

ANNEXE B : QUESTIONNAIRES POUR LES ÉTUDIANTS

Questionnaire avant enseignement

1. Que signifie pour vous le mot « limite » ?

2. Que signifie pour vous le mot « indétermination » ?

3. Qu'est-ce qu'une expression de la forme $\frac{k}{0}$ représente pour vous?

4. Lesquelles des affirmations suivantes vous semblent le mieux décrire l'infini?

- ❑ L'infini représente l'ensemble de tous les nombres.
- ❑ L'infini est un nombre indéterminé.
- ❑ L'infini représente n'importe quel nombre.
- ❑ L'infini ne représente aucun nombre.
- ❑ L'infini n'existe pas.
- ❑ L'infini est une inconnue.
- ❑ L'infini est une variable.
- ❑ L'infini, c'est autre chose.

Expliquez vos choix :

Nom : ______________________________

Adresse permanente : ______________________________

____

____

Courriel : ______________________________

Merci de votre collaboration!
Mélanie Odierna

Questionnaire après enseignement

Nom :____

1. Calculer, si possible, les limites suivantes :

   a. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln x}{\cos x}$

   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\tan x}{x^2}$

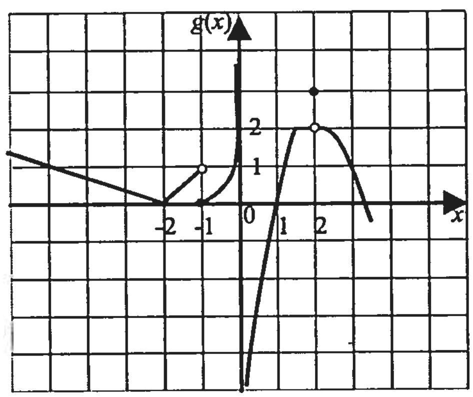
   c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$

   d. $\lim\limits_{x \to \infty} (0{,}0025x^4 - 3600x^3)$

   e. $\lim\limits_{x \to \infty} (\ln x - \sqrt{x})$

2. Résoudre $\frac{(x+2)(x-3)^2}{(6-2x)}=0$

3. Soit la représentation graphique de la fonction g(x). Évaluer, si possible, les limites demandées.



a. $\lim_{x \to -1} g(x) =$

b. $\lim_{x \to -2} g(x) =$

c. $\lim_{x \to 2} g(x) =$

d. $\lim_{x \to 0} g(x) =$

4. Êtes-vous habile avec les calculatrices (à affichage) graphiques (exemples : TI 83/92)?

ANNEXE C : QUESTIONNAIRE POUR LES PROFESSEURS

1. Selon vous quelles sont les connaissances préalables à l'apprentissage du traitement des formes indéterminées? Au niveau secondaire, quelles connaissances pourraient servir à l'apprentissage des formes indéterminées?

2. Quelles difficultés avez-vous rencontrées chez vos élèves lors de l'apprentissage des formes indéterminées? Pouvez-vous en donner des exemples précis ?

3. Quelles sont les principales notions mathématiques que vous voyez en lien avec les formes indéterminées?

4. Quelle est votre stratégie d'enseignement au sujet des formes indéterminées?

5. Dans votre enseignement des formes indéterminées, est-ce que vous vous inspirez d'un document, d'un manuel ou d'un logiciel? Si oui, lequel?

6. En plus des ressources que vous utilisez pour votre enseignement des formes indéterminées, aimeriez-vous en avoir d'autres? Si oui, lesquelles ? »

7. À la compréhension des formes indéterminées, quelle utilité voyez-vous?

ANNEXE D : EXAMENS DES PROFESSEURS

Groupe 1

1. (40 points) Effectuer les intégrales suivantes.

a) $\int \frac{1}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ b) $\int e^{2t}\sin t\ dt$ c) $\int \frac{\sqrt{1-3e^{-x}}}{e^x}\,dx$ d) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$

2. (20 points) Calculer :

a) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4x^2}{x-\sin x}\right)$ b) $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin(a/x)\right)$ c) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{\ln(1-x)}\right)$

3. (15 points) Dire si chacune des suites converge ou diverge. (Justifier.)

a) $\left\{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$ b) $\left\{\frac{3\sqrt{n^3}}{\sqrt{5n+1}}\right\}$

4. (10 points) Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1-t^2)\frac{dy}{dt}=\sqrt{y}$$

5. (15 points) Calculer l'aire de la région délimitée par la courbe d'équation

$y=\frac{9}{9+4x^2}$ et l'axe des x.

Groupe 2

1. Évaluer les limites suivantes. Avant d'appliquer la règle de L'Hospital, vous devez indiquer le type d'indétermination : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}.

a) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \sin(x)^{(x-\pi)}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{xe^{2x}+5}{3xe^{x}-2}$ $\left[e^{2x}=\left(e^{x}\right)^{2}\right]$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$ $\left[\ln(1^{+})\to 0^{+}\right]$

2. Intégrer

a) $\int \frac{(x+1)(x+3)}{x^2}\,dx$

b) $\int \frac{4x^2+2}{x^2+1}\,dx$

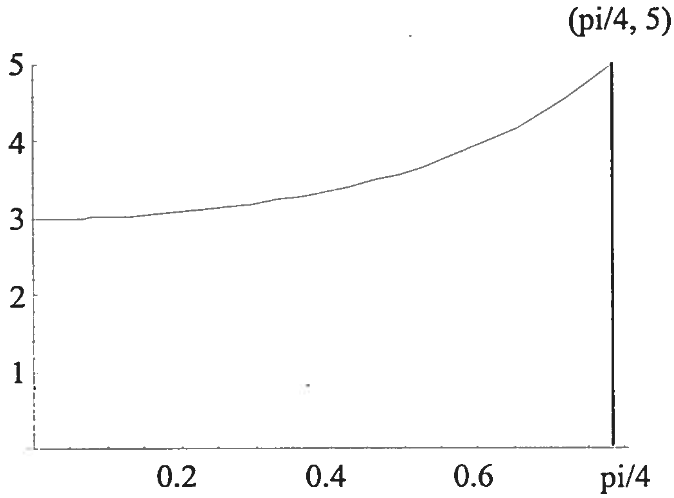
c) $\int \left(5^{x}+\frac{5}{x}+x^{5}+\frac{x}{5}\right) dx$

d) $\int \left(2\cos(t)+\frac{\csc^{2}(t)}{4}\right) dt$

3. Un enfant, qui est sur le bord d'une falaise de 10 mètres de hauteur, lance une roche vers le bas en lui inculquant une vitesse de 5 m/s. Utiliser $g=10\,m/s^2$.

a) Faire un modèle de la roche.
b) Par intégration, trouver la vitesse de la roche en fonction du temps.
c) Par intégration, trouver la position de la roche en fonction du temps.
d) Calculer la vitesse de la roche lorsqu'elle atteint le fond du précipice.

4. Calculer l'aire de la région délimitée par la courbe d'équation $f(x) = 2(\sec(x))^2 + 1$ et l'axe des x.



5. Intégrer : $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

ANNEXE E : GRILLE DE CODAGE DES CONCEPTIONS

Division par zéro:
Division par zéro donne:
D1- Zéro D2- Le dividende D3- L'indétermination (ou l'inconnu) D4- L'infini D5- L'impossibilité D6- Une limite D6.1- Qui n'existe pas ou impossible D6.2- Indéterminée D6.3- Qui donne l'infini D6.4- Qui existe D7- Une constante divisée par zéro

Indétermination
Différentes caractéristiques:
I1- L'indétermination comme une limite I1.1- Une forme indéterminée I1.2- Impossibilité ou n'existe pas I1.3- Ne se détermine pas I1.4- Qui existe I2- Vision de calcul: traitement I2.1- traitement possible I2.2- traitement impossible I3- Impossibilité ou n'existe pas I4- Ne se détermine pas I5- Infinité de solutions I6- Une valeur indéterminée I7- Ce qui n'est pas "fini"

Infini
Différentes caractéristiques:

INF1- infini comme un processus
 	
INF2- infini comme un objet
    INF2.1- ensemble d'objets
    INF2.2- nombre
        INF2.2.1- nombre indéterminé
        INF2.2.2- n'importe quel nombre
    INF2.3- non-nombre
 	
INF3- Une inconnue
 	
INF4- Une variable
 	
INF5- Autre chose
 	
INF6- L'infini n'existe pas

Limite

Différentes caractéristiques:
 	
L1- Une limite comme une borne
 	
L2- Possibilité d'atteindre ou non une limite
    L2.1- La limite peut être atteinte
    L2.2- La limite est impossible à atteindre
 	
L3- Le mouvement vers une limite
 	
L4- Discontinuité de la limite
    L4.1- Où la fonction n'existe pas
    L4.2- Une asymptote
        L4.2.1- Une asymptote horizontale
        L4.2.2- Une asymptote verticale
 	
L5- La limite c'est un nombre infiniment grand
 	
L6- La limite est déterminée par une dérivée

ANNEXE F : GRILLE DES TYPES DE VALIDATION

V1 - La validation servant au contrôle de l'action

V2 - L'explication
- V2.1 - Les explications descriptives
- V2.2 - Les argumentations explicatives
- V2.3 - Les argumentations de preuve

V3 - La validation dans la structure de la leçon (départ expérimental)
- V3.1 - La validation par nature
- V3.2 - La validation opératoire implicite
- V3.3 - La validation opératoire formelle
- V3.4 - La démarche de preuve

V4 - La validation dans la structure de la leçon (départ non-expérimental)
- V4.1 - La validation opératoire implicite
- V4.2 - La validation opératoire formelle
- V4.3 - La validation démonstrative

ANNEXE G : LISTE D'ABRÉVIATIONS

N : Nombre d'étudiants

F.I. : Forme indéterminée

R. de H. : Règle de L'Hospital

M.E.S. : Mise en évidence simple

A. de fcts : Analyse de fonctions

Lim d. $\neq$Lim g. : limite à droite n'égale pas la limite à gauche

Soust. en quot. : transformation d'une soustraction de fonctions en quotient

Conjugué : utilisation de l'expression du conjugué

M.E. de x^1/2 : Mise en évidence de x^1/2

x^1/2 au dénom. : x^1/2 mis au dénominateur

dénom. comm. : dénominateur commun

ln x au dénom. : ln x mis au dénominateur

« tech. dénom.comm. » : « technique du dénominateur commun »

« tech. du log. » : « technique du logarithme »

Aucune concl. : Aucune conclusion apportée