Université de Montréal

Les Objets logiques et l'invariance : le statut du Programme d'Erlangen dans les approches contemporaines

par
Mathieu Bélanger

Département de Philosophie
Faculté des arts et sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de M.A.
en Philosophie
option Recherche

avril 2004

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé :

Les Objets logiques et l'invariance :
le statut du Programme d'Erlangen dans les approches contemporaines

présenté par :

Mathieu Bélanger

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

François Lepage
Président-rapporteur

Jean-Pierre Marquis
Directeur de recherche

Yvon Gauthier
Membre du jury

Résumé

Formulé en 1872 par Felix Klein, le Programme d'Erlangen avait pour objectif principal la classification des diverses théories géométriques. L'innovation de Klein fut de mettre en évidence l'étroite correspondance entre la géométrie et la théorie des groupes. En effet, les notions propres à une théorie se caractérisent par leur invariance sous les permutations du groupe associé. Historiquement, deux approches peuvent être distinguées en vue d'une caractérisation des objets logiques dans la perspective du Programme d'Erlangen.

La première approche se veut mathématique et est l'œuvre du mathématicien Friedrich Ignaz Mautner. Le Programme d'Erlangen motiva une fine analogie entre la géométrie et la logique. En transposant de nombreuses notions géométriques à un contexte booléen, Mautner parvint à caractériser la logique mathématique classique des fonctions propositionnelles en tant que théorie des invariants du groupe symétrique.

La seconde approche s'inscrit dans le cadre sémantique développé par Alfred Tarski. La démarcation entre les objets logiques et non logiques y sous-tend le concept de conséquence logique. En s'inspirant du Programme d'Erlangen, Tarski proposa de définir les notions logiques par leur invariance sous les permutations.

L'approche sémantique de Tarski constitue un point tournant de l'évolution de la problématique des objets logiques dans la mesure où elle inaugura une avenue de recherche toujours d'actualité. Toutefois, d'un point de vue philosophique, ni les approches originales de Mautner et Tarski, ni celles avancées par Gila Sher, Vann McGee et Solomon Feferman ne s'avèrent satisfaisantes.

Mots-clés : logique, géométrie, Klein, Mautner, Tarski, caractérisation des objets logiques, sémantique, conséquence logique, permutation, morphisme.

Abstract

Written in 1872 by Felix Klein, the Erlanger Program's main objective was the classification of the various geometrical theories. Klein's innovation was to underline the close correspondance between geometry and group theory. Indeed, the distinctive notions of a given theory can be characterized by their invariance under the permutations of the associated group. Historically, two approaches can be distinguished in order to characterize logical objects in the perspective of the Erlanger Program.

The first approach is essentially mathematical and is the work of the mathematician Friedrich Ignaz Mautner. The Erlanger Program motivated a fine analogy between geometry and logic. Transposing numerous geometrical notions to a Boolean context, Mautner was able to characterize classical mathematical logical of propositions and propositional functions as invariant-theory of the symmetric group.

The second approach comes within the semantical framework developped by Alfred Tarski. The demarcation between logical and non-logical objects underlies the concept of logical consequence. Inspired by the Erlanger Program, Tarski suggested to define the logical notions by their invariance under permutations.

Tarski's semantical approach can be seen as a turning point in the evolution of the question of logical objects since it inaugurated a research avenue still current nowadays. However, from a philosophical point of view, neither Mautner and Tarski's original approaches, nor Gila Sher, Vann McGee and Solomon Feferman's turn out to be satisfactory.

Keywords : logic, geometry, Klein, Mautner, Tarski, caracterisation of logical objets, semantics, logical consequence, permutation, morphism.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Introduction

Depuis les débuts de la syllogistique chez Aristote, la logique eut pour objet la validité des arguments. L'étude de la validité mena à une compréhension de la logique par le biais de laquelle elle se caractérise par son universalité absolue, sa parfaite généralité et sa neutralité ontologique[1]. Plus précisément, cette compréhension véhicule l'idée que la logique est indépendante d'un quelconque référent concret. Historiquement, cette autonomie fut enchâssée dans le caractère formel de façon à en faire son trait distinctif. La logique se démarquerait donc des autres disciplines en ce qu'elle est essentiellement formelle, c'est-à-dire qu'elle opérerait dans une parfaite abstraction en faisant fi de toute référence à des considérations propres aux cas particuliers.

Cette compréhension de la logique pose naturellement la question d'une définition du caractère formel. La tradition philosophique contient plusieurs tentatives de réponse en ce sens. En dépit de leur nombre et de leur diversité, MacFarlane recense trois grandes catégories d'explication fréquemment utilisées et qui ne semblent pas soulever d'objection[2]. Premièrement, la logique est parfois considérée d'un point de vue purement syntaxique. Dans cette perspective, toute référence à la signification des symboles et au sens des propositions est éliminée. Seuls importent l'ordre et le type des symboles dans le processus de concaténation qui mène à la construction des formules. Par exemple, *Logische Syntax der Sprache* de Carnap développe une telle approche. Deuxièmement, le caractère logique est parfois expliqué en termes de schémas. Les lois logiques relèvent de schémas abstraits formellement valides. La validité d'un argument particulier dépend exclusivement de sa forme dans la mesure où toute instance d'un schéma valide sera elle-même valide. L'origine de cette technique se trouve chez Aristote et est la toile de fond de la sémantique

---

[1] Traduction libre et certainement discutable de l'expression *topic-neutrality* utilisée en anglais.

[2] John MacFarlane, « What Does it Mean to Say that Logic is Formal », PhD Philosophy, University of Pittsburgh, 2000, f. 31.

développée par Tarski. Troisièmement, à l'instar de Quine, les propriétés logiques sont parfois considérées comme relevant de la structure grammaticale des propositions. Bref, la conception traditionnelle du caractère formel de la logique repose sur la notion de similarité structurelle : deux propositions ne peuvent pas être logiquement différentes si elles ne diffèrent pas formellement ou structurellement.

Or, quoique MacFarlane ne considère pas que cette conception traditionnelle consiste en une base suffisante sur laquelle instaurer une caractérisation de la logique, il n'abandonne pas pour autant l'idée que la logique se distingue par son caractère formel. C'est la conception traditionnelle qui doit être remise en question. Dans cette optique, il met de l'avant une nouvelle base en fonction de laquelle la logique se caractérisera effectivement en tant que formelle : « logic is said to be formal (or "topic-neutral") (1) in the sense that it provides constitutive norms for thought as such, (2) in the sense that it is indifferent to the particular identities of objects, and (3) in the sense that it abstracts entirely from the semantic content of thought[3]. »

Toutefois, une compréhension de la logique par l'entremise du caractère formel permet au mieux de spécifier le territoire sur lequel elle porte. Elle représente certes une caractérisation de son substratum, voire de sa nature, qui la distingue des autres disciplines, mais elle n'indique nullement ce qui caractérise la logique en elle-même. En d'autres termes, la question d'une caractérisation interne de la logique par le biais des objets qui la constituent demeure ouverte.

Historiquement, la cristallisation du caractère formel comme propriété intrinsèque de la logique trouve son origine dans la tradition kantienne[4]. Or, une autre problématique peut être inscrite dans l'héritage des travaux d'Immanuel Kant : la caractérisation des objets logiques. En effet, la question d'un critère objectif en vue d'une telle caractérisation ne fut guère soulevée avant les importants travaux de Frege. En mettant de l'avant une

---

[3] Ibid., f. ii.

[4] Ibid., f. 20-22.

approche essentiellement formelle et abstraite, le mathématicien allemand se trouva à modifier de fond en comble la syntaxe de la logique et la rendit par le fait même incompatible avec l'approche syntaxique traditionnelle. Sous l'impulsion de l'importante phase de transition marquée par l'arithmétisation de l'analyse que complétait les mathématiques vers la fin du XIX^{e} siècle, Frege se questionna sur la nature de l'arithmétique et conséquemment en développa une nouvelle conception.

Avec *Bregriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprachen des reinen Denkens*, Frege s'opposa à Kant à propos du rôle de l'intuition et de l'expérience en arithmétique. En effet, s'il s'avère en accord avec l'auteur de *Critique de la raison pure* en ce qui a trait à la géométrie, il rejette catégoriquement les thèses kantiennes en ce qui a trait à l'arithmétique. Frege ne peut admettre que l'intuition et l'expérience servent de fondements rationnels à la vérité des propositions arithmétiques. Avec la publication de *Grundgesetze der Arithmetik* quelques années plus tard, Frege proposera concrètement une alternative à Kant en avançant que les vérités arithmétiques sont analytiques.

Selon Frege, les raisonnements valides forment le sujet premier de la logique. Celle-ci ne décrit pas les mécanismes de la pensée, mais plutôt encadre les lois de la pensée; elle fixe le cadre à l'intérieur duquel la pensée se caractérise par sa rationalité. Le mathématicien allemand tirera profit de cette conception de la logique en adoptant une présentation sous forme de système formel et abstrait. Ainsi, en utilisant les principes logiques, les théorèmes arithmétiques peuvent être réduits à un petit nombre de principes fondamentaux qui ne requièrent quant à eux aucune justification. Dans l'optique de Frege, cette collection de principes de base constitue les fondements de l'arithmétique dans la mesure où, en utilisant exclusivement des moyens logiques, tous les théorèmes arithmétiques peuvent en être déduits. Donc, en réduisant l'arithmétique à la logique, le logicisme tel que conçu par Frege établit l'analycité des vérités arithmétiques. En effet, la réduction se trouve à être une réduction logique; les principes de base munis d'une règle d'inférence s'avèrent suffisants pour déduire toutes les vérités arithmétiques. Ces dernières sont donc analytiques puisque leur analyse ne reposent que sur des règles logiques et des définitions.

> Les distinctions de l'*a priori* et de l'*a posteriori*, de l'analytique et du synthétique, ne concernent pas à mon avis le contenu du jugement, mais la légitimité de l'acte de juger. Là où elle fait défaut, la possibilité de ces distinctions s'évanouit également. Quand on qualifie une proposition d'*a posteriori* ou d'analytique au sens où je l'entends, il ne s'agit pas des conditions psychiques, physiologiques et physiques qui ont permis de constituer le contenu de la proposition dans la conscience, ni de savoir pas quel chemin on en vint, peut-être à tort, à la tenir pour vraie, mais des dernières qui justifient notre assentiment.
>
> La question est ainsi arrachée à la psychologie pour être reversée aux mathématiques — quand il s'agit d'une vérité mathématique. Son objet est de trouver la preuve, et de la poursuivre régressivement, jusqu'aus vérités premières. Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois générales et des définitions, on a une vérité analytique (...) En revanche, s'il n'est pas possible de produire une preuve sans utiliser des propositions qui ne sont pas de logique générale, mais concernent un domaine particulier, la proposition est synthétique. Pour qu'une vérité soit *a posteriori* il faut que la preuve ne puisse aboutir sans faire appel à des propositions de fait, c'est-à-dire des vérités indémontrables et sans généralité, à des énoncés portant sur des objets déterminés. Si au contraire l'on tire la preuve de lois générales qui elles-mêmes ne se prêtent pas à une preuve ni n'en requièrent, la vérité est *a priori*.[5]

Or, la conception frégéenne de l'arithmétique sera fortement ébranlée par le découverte de l'inconsistance des principes fondamentaux. Quelques temps après la parution du premier tome de *Grundgesetze der Arithmetik*, un jeune mathématicien et philosophe anglais du nom de Bertrand Russell écrit à Frege afin de porter à son attention qu'une contradiction peut être déduite de la cinquième loi de base. Ce sera le désormais célèbre Paradoxe de Russell.

Dans le cadre de ses recherches, Russell se rendit compte de la nécessité d'un critère pour le caractère logique. D'une part, le mathématicien et philosophe anglais fut le premier à parler explicitement de constantes logiques. Selon Russell, les propositions vraies ne contenant que des constantes logiques sont a priori. En effet, la vérité d'une telle proposition ne dépend pas de connaissances empiriques, mais uniquement de connaissances logiques. D'autre part, dans l'optique de Frege et de Russell, une vérité mathématique est

[5] Gottlob Frege, *Les Fondements de l'arithmétique : recherches logico-mathématiques sur le concept de nombre*, introduction et traduction de l'allemand par Claude Imbert, Paris, Éditions du Seuil, coll. « L'ordre philosophique », 1969, p. 127.

essentiellement une vérité logique. Le logicisme pose alors directement la question de la démarcation de la logique et des mathématiques ainsi que de sa justification. Russell considère que la solution de ce problème réside dans l'analyse des notions de constante logique et de constante mathématique ainsi que dans l'instauration d'un critère visant à séparer les expressions auxquelles a recours le langage mathématiques en logiques et non logiques. En ce sens, la réduction de l'arithmétique à la logique au cœur du logicisme explicite les concepts logico-mathématiques utilisés dans les propositions, mais aussi les relations de dépendance logiques en vigueur entre les vérités mathématiques.

Ainsi, l'approche préconisée par Russell ne va pas sans rappeler la conception de l'analycité du mathématicien tchèque Bernard Bolzano. Selon ce dernier, une proposition est analytique si et seulement si elle contient au moins un concept tel que toute proposition obtenue par la substitution de ce concept pour un autre ait la même valeur de vérité. Selon que toutes ces propositions soient vraies ou fausses, il s'agira d'une vérité analytique ou d'une fausseté analytique. Pour leur part, les principes logiques — le tiers-exclu par exemple — forment une sous-classe des propositions analytiques. Bolzano qualifie cette classe de propositions de logiquement analytique.

> The difference between the last mentionned analytic propositions and [those mentionned above] lies in the following : In order to appraise the analytic nature of the [latter] propositions [...], no other than logical knowledge is necessary, since the concepts which form the invariable part of these propositions all belong to logic. On the other hand, for the appraisal of the truth and falsity of propositions like those give [first] [...] a wholly different kind of knowledge is required, since concepts alien to logic intrude. This distinction, I admit, is rather unstable, as the whole domain of concepts belonging to logic is not circumscribed to the extent that controversies could not arise at times.[6]

Ainsi, une proposition vraie l'est tout simplement en vertu de sa forme. Autrement dit, étant donnée une proposition vraie, la substitution des concepts non logiques n'altère pas sa valeur de vérité. Il en résulte que la valeur de vérité d'une proposition dépend exclusivement des constantes logiques qui constituent sa structure.

---

[6] Bernard Bolzano, *Wissenschaftslehre* cité dans Peter Simons, *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski: Selected Essays*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. « Nijhoff International Philosophy Series », 1992, p. 16.

Figure de proue du positivisme logique s'il en est une, Rudolf Carnap s'intéressa également à la question de l'analycité des mathématiques et accepta dans ses grandes lignes la thèse de Russell selon laquelle les mathématiques peuvent être réduites à la logique. En contrepartie, Carnap en vint à étudier l'analycité par le biais des travaux de Ludwig Wittgenstein sur les tautologies. Selon l'auteur du *Tractacus logico-philosophicus*, l'apriorité des vérités logiques découle de ce qu'elles sont des tautologies.

Pour sa part, Carnap définit l'analycité au moyen de la notion de tautologie de Wittgenstein. En effet, une proposition contenant des constantes non logiques sera analytique si la substitution de celles-ci n'altère pas sa valeur de vérité. Une proposition ne contenant que des constantes logiques s'avère analytique si elle est vraie. Une telle proposition, n'admettant aucune instance de remplacement de ses constantes non logiques pour la simple et bonne raison qu'elle n'en a aucune, est donc toujours vraie. À l'instar de Bolzano et Russell, Carnap considère que les vérités logiques sont essentiellement formelles. Toutefois, cette définition de l'analycité est évidemment tributaire d'une distinction entre les objets logiques et non logiques. De plus, son point de vue est à l'origine syntaxique. Carnap propose tout d'abord de distinguer les termes logiques et les termes non logiques, c'est-à-dire les termes descriptifs. Dans ce contexte, les objets logiques furent simplement définis par énumération : constantes numériques, variables numériques, variables individuelles, connecteurs propositionnels, parenthèses et quelques symboles d'opérations[7].

À la lumière de ces considérations, la problématique des objets logiques prit historiquement forme dans le cadre de l'étude de l'analycité menée par les tenants du logicisme. En effet, l'idée selon laquelle les vérités logiques se caractérisent par leurs formes fait directement appel à une caractérisation des objets logiques. De plus, cette caractérisation fut dès le début intimement reliée à la notion d'invariance. Par exemple, si

[7] Luis Villegas-Forero et Janusz Maciazek, « Tarski on Logical Entities », *Logica Trianguli*, Volume 1, 1997, p. 134.

Carnap abandonna la syntaxe au profit de la sémantique au cours des années 1940 et ainsi le critère présenté précédemment, il n'abandonnera pas pour autant l'idée d'invariance qui se trouvait au cœur de son approche initiale[8].

Est-ce donc dire que la problématique est irrémédiablement enchâssée dans le cadre plus général du logicisme et de la réduction des mathématiques à la logique? Dans les années 1930, le logicien autrichien Kurt Gödel publia ses célèbres théorèmes d'incomplétude qui mirent en évidence les sérieuses difficultés minant le logicisme, notamment au point de vue épistémologique. De plus, le philosophe américain Willard Van Orman Quine critiqua sévèrement la distinction entre les propositions analytiques et synthétiques.

Conséquemment, il semble plus que nécessaire de considérer la problématique des objets logiques indépendamment du cadre logiciste au sein duquel elle prit forme originellement, c'est-à-dire de la considérer pour elle-même. À cet égard, le XX[e] siècle vit apparaître une multitude de nouveaux systèmes logiques de nos jours réunis sous la bannières des logiques non classiques. Que ce soit la logique intuitionniste, les logiques modales ou encore la logique floue, ces théories remirent en question le statut privilégié de la logique classique. D'ailleurs, leur statut étant lui-même sujet à discussion, les logiques non classiques se trouvent à poser avec encore plus d'insistance la question d'une caractérisation des objets logiques[9].

Au cours des dernières décennies, quelques mathématiciens et philosophes se sont penchés sur la question des objets logiques, ce qui a suscité en quelque sorte un renouveau de ladite question. Une des principales caractéristiques de ces travaux fut d'abandonner le prisme des problématiques philosophico-mathématiques à travers lesquelles les objets logiques avaient été traditionnellement considérés au profit d'une appréhension directe où

---

[8] Mario Gómez-Torrente, « The Problem of Logical Constants », *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 8, n[o] 1, 2002, p. 10.

[9] Susan Haack, *Deviant Logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 1974, p. 1-46, *passim.*; Peter Simons, *op. cit.*, p. 14.

l'intérêt premier de la question réside en elle-même. Cette attitude n'exclut évidemment pas que la conception privilégiée puisse induire des éléments de réponse originaux à d'autres questionnements. Or, au-delà de ce point commun, les approches n'en demeurent pas moins très diversifiées.

À cet égard, les approches basées sur l'invariance sémantique, mais plus précisément celles s'inspirant du Programme d'Erlangen de Klein, semblent présenter un intérêt particulier. D'une part, le recours au Programme d'Erlangen fournit une motivation au choix de l'invariance comme critère de caractérisation des objets logiques. D'autre part, l'articulation de ce recours aux travaux géométriques de Klein introduit indirectement un point de vue inédit sur la relation entre la logique et la géométrie, et donc plus généralement sur la relation entre la logique et les mathématiques.

À la lumière de ces considérations, le présent travail portera sur ces applications du Programme d'Erlangen de Klein à la logique afin d'en caractériser les objets. Par le fait même, la place réservée et le mode d'utilisation des travaux de Klein seront mis en évidence. Il importe cependant de préciser que l'attention portera principalement sur les caractérisations elles-mêmes et les réactions qu'elles suscitèrent plutôt que sur les ramifications philosophiques indirectes à d'autres problématiques.

Dans un premier temps, le Programme d'Erlangen sera exposé de façon à mettre en évidence les idées fondamentales que Klein enchâssa au cœur de ces recherches géométriques. À cet égard, ce ne sont pas tant les considérations techniques que les enjeux mathématiques et philosophiques qui se révéleront primordiaux pour la suite. Le regard posé sur le Programme d'Erlangen s'inscrira donc dans cet ordre d'idées de façon à permettre une compréhension beaucoup plus critique de l'utilisation qui en fut faite en logique.

Dans un second ordre d'idées, il sera question d'une approche mathématique du problème. Le mathématicien autrichien Friedrich Ignaz Mautner s'inspira du Programme d'Erlangen, mais aussi des travaux de Hermann Weyl sur la théorie des groupes afin de développer la logique mathématique des fonctions propositionnelles comme théorie des invariants du groupe symétrique.

Dans un troisième temps, l'approche sémantique développée par le logicien d'origine polonaise Alfred Tarski sera abordée. Cette piste de solution fut inaugurée par la publication posthume de l'article « What are Logical Notions? ». L'approche préconisée par Tarski est la plus susceptible d'être replacée dans un contexte historique. En effet, il fut tout d'abord amené à la problématique des notions logiques dans le cadre de ses travaux sur le concept de conséquence logique qui peuvent eux-mêmes être indirectement reliés à la question de l'analycité. Si ce deuxième aspect présente un intérêt secondaire dans le présent travail, il sera brièvement question du concept de conséquence logique avant d'aborder en détail la proposition de Tarski.

Finalement, au cours des dernières années, quelques propositions furent formulées dans le but d'améliorer la suggestion originale de Tarski. Les propositions de Gila Sher, Vann McGee et Solomon Feferman s'inscrivent dans cette lignée et en sont conséquemment les héritiers directs. Si Tarski fut le seul à faire explicitement référence au Programme d'Erlangen, il n'en demeure pas moins que les propositions subséquentes furent à divers degrés motivées par ses travaux et qu'elles s'inscrivent directement dans leur continuité en ayant recours à l'invariance comme critère de démarcation entre les objets logiques et non logiques.

Il est maintenant temps d'entrer dans le vif du sujet et de se pencher sur le Programme d'Erlangen...

Chapitre I : Le Programme d'Erlangen de Klein

En 1872, le mathématicien allemand Felix Klein publia l'article « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen » dans les *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Cet article, mieux connu de nos jours sous l'appellation de Programme d'Erlangen, fut originalement écrit dans le cadre de son accession au poste de professeur de mathématiques à la Friedrich-Alexander-Universität d'Erlangen. À l'époque, les candidats devaient satisfaire deux exigences. Ils devaient prononcer une allocution devant les membres du département et soumettre un texte présentant une recherche originale. Contrairement à une croyance répandue, le Programme d'Erlangen visait à remplir cette deuxième exigence[10].

Si l'influence réelle des travaux géométriques de Klein se doit d'être nuancée[11], le Programme d'Erlangen représente une plaque tournante dans l'évolution de la géométrie dans la mesure où les idées qui y furent avancées pour la première fois modifièrent irrémédiablement le développement et la compréhension de la discipline. Il synthétisa les approches en vigueur de façon à transcender les limites intrinsèques de chacune et réorienter l'étude de la géométrie dans une direction inédite et florissante.

À cet égard, les concepts formulés dans le Programme d'Erlangen et la nouvelle compréhension de la géométrie qui en découla eurent un impact considérable sur de nombreux domaines des mathématiques en général. Par exemple, certains logiciens, Tarski étant le plus célèbre d'entre eux, s'en inspirèrent de façon à caractériser les objets logiques. Dans cette optique, la présente section consiste en une présentation du Programme

---

[10] Donna I. M. Stewart, « The Influence of Klein's Erlangen Program », M. Sc. Mathematics, McMaster University, 1998, f. 2.

[11] Thomas Hawkins, « The *Erlanger Programm* of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics », *Historia Mathematica*, Volume 11, 1984, p. 442-470, *passim*.

d'Erlangen afin de mettre en évidence les idées fondamentales de Klein et de mieux cerner leurs conséquences philosophiques.

Au XVII^{e} siècle, les célèbres travaux de René Descartes et Pierre de Fermat inaugurèrent la géométrie analytique et par le fait même contribuèrent à dégager une nouvelle compréhension de la géométrie qui se distinguait de celle privilégiée par Euclide. En effet, bien peu de développements marquèrent les siècles séparant la Grèce classique de l'Époque moderne[12]. Comme le souligne Hermann Weyl[13], la géométrie analytique se caractérise par la réduction de tout problème géométrique à un problème algébrique. L'introduction des notions de systèmes d'axes et de coordonnées se trouve à la base de cette réduction. À la suite des travaux de Descartes, les mathématiciens réalisèrent que les nombres réels pouvaient être définis et identifiés avec les axes. Cette identification induit alors une correspondance entre une grandeur et une quantité, c'est-à-dire un nombre. En effet, en représentant un nombre par des coordonnées, celui-ci est associé à un segment de droite orienté ou, pour utiliser le langage de l'algèbre vectoriel, à un vecteur. Or, ce vecteur n'est rien d'autre qu'une grandeur orientée. Réciproquement, un vecteur peut être associé à un nombre en prenant sa norme.

La méthode analytique présentait l'avantage d'être fort intuitive et en étroite relation avec l'expérience. Les riches et nombreuses recherches géométriques effectuées par les Lagrange, Euler, Cauchy et autres à l'aide de la méthode analytique menèrent notamment à la théorie générale des invariants. En fait, la théorie générale des invariants redonnera ses lettres de noblesse à la méthode analytique. En effet, en réaction à la lourdeur et à l'inélégance qui caractérisaient cette méthode au cours du XVIII^{e} siècle et au début du siècle suivant, le XIX^{e} siècle vit la méthode synthétique prendre de plus en plus de place en géométrie et en mathématiques. La géométrie synthétique s'opposait à l'approche

---

[12] Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, 2^{e} ed., Hermann, Paris, coll. « Histoire de la pensée », n^{o} IV, 1974, p. 162.

[13] Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, Princeton University Press, 1949, p. 68.

inaugurée par Descartes et Fermat par son recours à l'axiomatique. Elle s'en distinguait également, et il s'agit d'une des raisons de son succès, par sa simplicité et son élégance. La méthode synthétique atteindra son apogée dans la seconde moitié du siècle. Parallèlement, la théorie générale des invariants prendra forme et contribuera grandement à polariser le débat. Par exemple, les tenants de la méthode synthétique allèrent jusqu'à considérer l'utilisation des coordonnées comme une souillure[14].

Au XIX^{e} siècle, le développement de la méthode axiomatique consacra l'avènement des mathématiques pures, c'est-à-dire des mathématiques comme système abstrait et formel. Cette nouvelle compréhension des mathématiques eut pour conséquence de reléguer l'intuition et l'expérience matérielle au second plan. La géométrie n'échappa pas à cette tendance :

> The formalization of geometry so that it can be construed as hypothetico-deductive system is only one example of the persistent attempt to axiomatize the different branches of mathematics, and to view them, at least for purposes of further analysis, as so many "symbolic" systems with no specific reference or application. This is one of the culminating point of pure geometry.[15]

Dans un autre ordre d'idées, la même époque vit également de nouveaux systèmes géométriques se développer : les géométries non euclidiennes. Originellement introduits par le biais de la méthode axiomatique et synthétique, ces systèmes reposaient sur une modification de l'axiome des parallèles. En ce sens, les géométries ne posaient aucun problème du point de vue formel et axiomatique. Elles apparaissaient en contrepartie comme des constructions *ad hoc*, sans relation avec l'expérience, comme le souligne Nagel : « While the autonomy of pure geometry became firmly established by the triumph of the axiomatic method, the relation of the formal, abstract systems (which thus came to

---

[14] Nicolas Bourbaki, *op. cit.*, p. 166.

[15] Ernest Nagel, « The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry » In *Teleology Revisited and Other Essays in the Philosophy and History of Science*, New York, Columbia University Press, coll. « The John Dewey Essays in Philosophy », n° 3, 1979, p. 242.

be taken as constituting pure mathematics) to the concrete materials of experience was not thereby clarified[16]. »

C'est dans ce contexte que fut publié le Programme d'Erlangen en 1872. Klein y proposa un point de vue unificateur sur les théories géométriques dont il déplorait la trop grande diversité. Il proposa également d'abandonner la controverse autour des méthodes synthétique et analytique. En comparant les géométries euclidienne et projective, Klein est amené à rechercher un principe sur la base duquel il pourra classifier les diverses théories et, par le fait même, unifier l'étude de la géométrie en un unique corpus. Ce principe sera fourni par la théorie des groupes et plus précisément par l'application d'un groupe de transformations à une variété. À cet égard, au lieu de se limiter sciemment à des espaces et donc aux géométries tridimensionnelles, le mathématicien allemand considère des variétés n-dimensionnelles. Il importe toutefois de préciser que si le concept de variété est bel et bien au centre du Programme d'Erlangen, ce terme est employé dans un sens différent de celui en vigueur en mathématiques contemporaines. Dans l'optique de Klein, une variété est tout simplement un objet auquel des coordonnées peuvent être assignées : « Here "manifold" is used in the 19$^{\text{th}}$-century sense of *Mannigfaltigkeit*, meaning a mathematical object which could be assigned coordinates $(x_1,\dots,x_n)$. The viewpoint was (unconsciously) strictly local with no concern for coordinate patches and how they fit together[17]. » Le passage de l'espace tridimensionnel traditionnel vers des variétés n-dimensionnelles quelconques induit une appréhension beaucoup plus englobante de la géométrie. Klein se trouve à considérer non seulement la géométrie euclidienne, mais également les théories plus récentes.

L'approche de Klein repose sur une connexion entre un groupe de transformations et les propriétés qu'il laisse invariantes. Plus précisément, étant donnée une géométrie sur une variété, les transformations qui ne perturbent pas les propriétés caractéristiques de cette

---

[16] Ibid., p. 242.

[17] Thomas Hawkins, *op. cit.*, p. 463, note 4.

géométrie forment un groupe : le groupe principal. Réciproquement, les propriétés propres à cette géométrie se distinguent pas leur invariance sous les transformations du groupe principal. Il en résulte donc une détermination réciproque et mutuelle entre le groupe de transformations de la géométrie et les propriétés de celle-ci.

Klein mentionne deux techniques pour déterminer les propriétés invariantes sous l'application de transformations du groupe principal. La première consiste à ajouter une configuration à la variété et à étudier les propriétés géométriques. Similairement, la classe de transformations peut être limitée à celles qui laissent invariantes les propriétés géométriques. La seconde consiste à enrichir le groupe principal de transformations de telle sorte que seules certaines propriétés géométriques demeurent invariantes sous ce nouveau groupe[18].

Soient A une variété d'éléments et B son groupe de transformations associé. Certaines propriétés des éléments de A sont évidemment invariantes sous les transformations du groupe B. Soient également une variété A' telle qu'une correspondance biunivoque puisse être établie avec les éléments de A. Alors, il existe une relation entre le groupe de transformations B et un groupe de transformations B' de telle sorte que les propriétés invariantes de A correspondent aux propriétés invariants de A' sous les transformations de B'. La réciproque est évidemment vraie, c'est-à-dire que deux groupes isomorphes induiront deux variétés identiques.

Ainsi, le point de vue de Klein subsuma toutes les géométries sous une appréhension unique. À la base de cette nouvelle façon de voir se trouve la constatation que les transformations projectives préservaient les propriétés géométriques. L'originalité de Klein fut de recourir à la théorie des invariants et à l'algèbre pour démontrer que les différences entre les géométries découlaient de définitions différentes du concept de mesure. Soit le groupe des transformations linéaires d'un plan qui laissent invariante une

[18] Donna I. M. Stewart, *op. cit.*, f. 10.

conique arbitraire. Soient également deux points *a*,*b*. La droite déterminée par les deux points coupera la conique en deux points. Klein démontre qu'une distance peut être définie en prenant le produit d'une constante *k* avec le logarithme du ratio non harmonique des quatre points. Alors, selon que la conique soit réelle, imaginaire ou dégénérée, les propriétés invariantes seront celles de la géométrie hyperbolique, sphérique ou euclidienne. La nouvelle définition de distance correspondra également avec la définition habituelle. « Klein's general conclusion, therefore, is that the difference between the three types of geometries is entirely *metrical*, and can be viewed as arising from the differences between the definition of such magnitudes as the distance between two points[19]. »

En démontrant que les géométries d'Euclide, de Riemann et de Lobatchevski ne se distinguent qu'au niveau de l'utilisation d'une définition différente du concept fondamental de distance, Klein se trouve également à démontrer que toutes trois sont structurellement identiques. En effet, les groupes de transformations associés à chacune laissent invariante la fonction de distance.

> Furthermore, since the groups of transformations which leave the distance-functions invariant are abstractly identical, the three types of geometry are also abstractly identical : for every theorem about an invariant property in one geometry, there is a "dual" theorem about a corresponding invariant property in one geometry in each of the others. Consequently, the three different metrical geometries considered as abstract calculi do not make contradictory assertions about "space" or "extension", but exhibit in different notations an identical pattern of relations. [20]

Dans cette optique, l'importance du Programme d'Erlangen aura été d'établir une relation entre, d'une part, la géométrie euclidienne et, d'autre part, les géométries non euclidiennes, c'est-à-dire les géométries hyperboliques et elliptiques. Intuitivement, ces systèmes semblaient non seulement fort différents, mais carrément incompatibles et contradictoires en vertu de l'axiome des parallèles. De plus, le statut des géométries non euclidiennes s'avérait problématiques à la lumière de l'expérience concrète et de l'intuition. En ayant recours à l'algèbre et à la théorie des invariants, Klein met en lumière une

---

[19] Ernest Nagel, *op. cit.*, p. 246.

[20] Ibid.

nouvelle appréhension de ces systèmes; ils ne constituent que trois langages différents pour étudier un seul et même objet : les relations métriques.

Par le fait même, Klein isole le critère d'identité au cœur du Programme d'Erlangen. Le mathématicien allemand instaure une correspondance entre un groupe de transformations et une théorie géométrique. La détermination mutuelle et réciproque des transformations et des propriétés invariantes fait en sorte que ledit groupe encode toutes les propriétés caractéristiques de la géométrie. Ainsi, étant données deux géométries, si leurs groupes de transformations associés respectifs sont formellement identiques — c'est-à-dire s'ils sont isomorphes — alors le contenu formel des géométries est identique. « In other words, two geometries (...) are *structurally identical* if their respective groups of transformations are abstractly the same[21]. » Cette idée est essentiellement celle sous-jacente au principe de transfert de Hesse[22].

Ce critère d'identité permet de mettre en évidence la classification des géométries au cœur du Programme d'Erlangen. À l'aide du critère d'identité, la relation de sous-groupe propre à la théorie des groupes se reflète au niveau des systèmes géométriques. Klein constata qu'en enrichissant le groupe principal de nouvelles transformations, le nombre de propriétés invariantes se trouvait à diminuer. Il en résulte donc une relation de proportionnalité inverse entre la taille du groupe de transformations et la richesse de la structure de la géométrie. Par exemple, le groupe projectif est le plus grand et ses transformations laisseront invariantes bien peu de propriétés. Conséquemment, la géométrie projective est la théorie avec la plus faible structure. Réciproquement, la géométrie métrique ou euclidienne dispose du plus grand nombre d'invariants et sa structure est donc la plus riche. Ainsi, il s'avère que le groupe euclidien est un sous-groupe du groupe projectif et, par le fait même, que la géométrie euclidienne est une sous-

[21] Ibid., p. 245.

[22] Felix Klein, « A Comparative Review of Recent Researches in Geometry », traduit de l'allemand par Dr. M. W. Haskell, *Bulletin of the New York Mathematical Society*, Volume 2, July 1893, p. 225.

géométrie de la géométrie projective. L'originalité de Klein fut donc d'adopter le concept de sous-groupe comme critère général pour classifier les théories géométriques. Soient une variété S et deux géométries T_1, T_2 définies sur S. T_1 est une sous-géométrie de T_2 si G_1, le groupe de transformations associé à T_1, est un sous-groupe de G_2, le groupe de transformations associé à la seconde théorie. Plus précisément, la classification émerge du fait que les propriétés invariantes sous les transformations de G_1 le sont également sous celles de G_2[23]. Par exemple, les transformations métriques préservent les transformations affines qui préservent elles-mêmes les transformations continues. La géométrie métrique est alors une sous-géométrie de la géométrie affine qui est pour sa part une sous-géométrie de la topologie.

Finalement, quoique cet aspect soit de moindre importance pour la suite du présent travail, le Programme d'Erlangen mit fin à la controverse entourant les méthodes analytique et synthétique. L'utilisation de transformations légitime l'usage des coordonnées en montrant que le choix d'un système d'axes n'est pas totalement arbitraire. Les deux méthodes sont parfaitement légitimes et complémentaires dans l'optique de Klein.

Or, à prime abord, le lien entre le Programme d'Erlangen et la logique est loin d'être évident, principalement parce que la présentation habituelle de la logique n'a rien d'une théorie géométrique. Afin de les relier, certains éléments doivent être déjà en place. Parmi ceux-ci, une distinction entre la syntaxe et la sémantique, une façon de représenter les concepts et un processus de formalisation. Du point de vue de la logique, c'est le rapport entre les théories géométriques et la théorie des groupes qui se révèle d'une importance fondamentale. En effet, afin de caractériser les objets logiques, cette connexion fut exploitée par Tarski, mais aussi d'une toute autre manière par Mautner dont il sera question dans la section suivante.

[23] Il y a ici une question de convention. Certains auteurs inversent cette relation.

Chapitre II : L'approche mathématique de Mautner

Historiquement, Friedrich Ignaz Mautner fait figure de pionnier dans l'utilisation de l'invariance afin de caractériser les objets logiques[24]. En effet, l'idée de recourir à l'invariance avaient certes été avancées par d'autres philosophes auparavant, mais ceux-ci ne les avaient jamais développées. L'originalité avec laquelle Mautner traite la question des objets logiques provient principalement de ce que son approche s'alimente des idées sous-jacentes au Programme d'Erlangen. Plus précisément, Mautner transpose la conception de la géométrie au cœur du Programme d'Erlangen à l'étude de la logique mathématique classique des fonctions propositionnelles. Or, si cette approche est fidèle aux principes de base énoncés par Klein, il n'en demeure pas moins qu'elle est fortement tributaire de la présentation de ces derniers mise de l'avant par le mathématicien Hermann Weyl dans le cadre de ses recherches sur la théorie des invariants. En ce sens, l'influence du Programme d'Erlangen se manifeste à deux niveaux.

Premièrement, l'importance de la contribution de Klein à la géométrie repose principalement sur la mise en lumière du rôle prépondérant de la théorie des groupes dans l'étude de l'espace. En effet, toute théorie géométrique peut être associée à un groupe de transformations. Dans la mesure où ce groupe encode toute l'information caractéristique de cette théorie, l'étude de cette dernière se résume à l'étude des propriétés invariantes du groupe. Mautner propose donc de caractériser la logique comme théorie des invariants du groupe symétrique. Deuxièmement, Klein et Weyl développèrent un cadre aux confluents de la géométrie, de la théorie des groupes et de la théorie des invariants à l'intérieur duquel la géométrie peut être développée et étudiée. Procédant par analogie, Mautner instaure un

---

[24] En 1945, Silva publia une généralisation de la théorie de Galois qui anticipait certains concepts logiques et le rôle de l'invariance. Le point de vue de Silva s'avère toutefois fort différent. Voir Sebastião Silva, « On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems », traduit de l'italien par A. J. Franco de Oliveira, *History of Philosophy and Logic*, Volume 6, n° 1, 1985, p. 91-116.

cadre logico-géométrique similaire dans lequel il propose d'inscrire la logique des fonctions propositionnelles. Au-delà des conséquences de nature philosophique sur la relation entre logique et géométrie de ce traitement de la question, cette approche détermine fondamentalement la solution de Mautner. La logique devient une « theory of notions of invariant significance and their invariant properties and relations[25]. »

La méthodologie de Mautner a pour fondement une conception présupposée de la logique. Celle-ci repose principalement sur la notion de fonction propositionnelle mise de l'avant par Whitehead et Russell dans *Principia Mathematica.* Elle accorde également une grande place aux mathématiques et plus spécifiquement à l'algèbre. Le concept autour duquel s'articule l'approche de Mautner est l'algèbre de Boole. Son objectif consiste à démontrer que, en fonction de la conception privilégiée, la logique est une théorie des invariants. En effet, Mautner ne propose aucun critère de démarcation de la logique ou des notions logiques, mais plutôt une caractérisation qui présuppose une telle démarcation. Ainsi, il ne spécifie pas explicitement quelles notions se démarquent par leur caractère logique. Elles sont présupposées de facto comme conséquence de la conception adoptée. Les approches subséquentes, celle de Tarski principalement, privilégieront une appréhension de la logique par l'entremise du critère de démarcation.

Il est maintenant temps d'exposer la proposition de Mautner en détail. L'exposition respectera la structure de « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant Theory » et se déroulera ainsi en deux grandes étapes. Mautner démontre premièrement que la logique mathématique booléenne des propositions et des fonctions propositionnelles peut être considérée comme une théorie des invariants du groupe symétrique. C'est dans cette première section que l'analogie avec les travaux de Klein et de Weyl est pleinement mise à contribution. Dans un deuxième temps, Mautner développe les outils logico-mathématiques

---

[25] F. I. Mautner, « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory », *American Journal of Mathematics*, Volume 68, 1946, p. 345.

nécessaires en vue d'une caractérisation et d'une étude de la logique mathématique comme théorie des invariants d'un groupe de symétrie.

2.1 La logique comme théorie des invariants du groupe symétrique

Avec le Programme d'Erlangen, Klein fut le premier à formuler une interprétation universelle de la géométrie élémentaire en termes de groupes. Or, le texte original de Klein présente les idées fondamentales du programme de façon assez informelle, particulièrement à la lumière des mathématiques contemporaines. Dans la mesure où « Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen » date de 1872, l'explication de ce décalage s'avère notamment historique. Au cours des années 1930, le mathématicien allemand Hermann Weyl se pencha sur le Programme d'Erlangen dans le cadre de ses recherches sur la théories des invariants, la théorie des groupes et la géométrie. Ceci l'amena à reformuler les principales idées de Klein en termes de l'algèbre abstraite moderne. Dans le présent travail, l'importance des travaux de Weyl provient de qu'ils inspirèrent directement Mautner. En effet, ce dernier adapte et transpose la présentation de Weyl à un contexte booléen.

2.1.1 La logique et le groupe symétrique

Mautner se donne comme point de départ un ensemble C d'individus. Cet ensemble, donné a priori et fixe, sert de domaine. Mautner suppose aussi que toute fonction propositionnelle $f(x)$ est définie pour tout $x \in C$. Ainsi, en utilisant les opérations de la théorie des ensembles, les sous-ensembles de C forment une algèbre de Boole. Pour leur part, les fonctions propositionnelles forment également une algèbre de Boole avec les opérations logiques habituelles. Or, étant donné un sous-ensemble $C_1 \subseteq C$, C_1 détermine une fonction propositionnelle $f(x)$ telle que $f(x)$ est vraie si et seulement si $x \in C_1$. Réciproquement, une fonction propositionnelle détermine un sous-ensemble de C.

Par exemple, soit $C = \{a,b,c\}$. La correspondance entre les sous-ensembles de C et les fonctions propositionnelles définies sur C s'exprime comme suit :

$\wp(C)$	$\{\mathsf{T},\bot\}^C$
$C_1 = \varnothing$	$f_1(a) = f_1(b) = f_1(c) = \bot$
$C_2 = \{a\}$	$f_2(a) = \mathsf{T}$, $f_2(b) = \bot$, $f_2(c) = \bot$
$C_3 = \{b\}$	$f_3(a) = \bot$, $f_3(b) = \mathsf{T}$, $f_3(c) = \bot$
$C_4 = \{c\}$	$f_4(a) = \bot$, $f_4(b) = \bot$, $f_4(c) = \mathsf{T}$
$C_5 = \{a,b\}$	$f_5(a) = f_5(b) = \mathsf{T}$, $f_5(c) = \bot$
$C_6 = \{a,c\}$	$f_6(a) = \mathsf{T}$, $f_6(b) = \bot$, $f_6(c) = \mathsf{T}$
$C_7 = \{b,c\}$	$f_7(a) = \bot$, $f_7(b) = f_7(c) = \mathsf{T}$
$C_8 = \{a,b,c\}$	$f_8(a) = f_8(b) = f_8(c) = \mathsf{T}$

Tableau I : Les sous-ensembles de C et les fonctions propositionnelles sur C

De plus, une algèbre de Boole $\langle \wp(C), ', \cap, \cup, C, \varnothing \rangle$ peut être définie sur les sous-ensembles de C au moyen des opérations ensemblistes de complémentation, d'intersection et d'union. Similairement, une algèbre de Boole $\langle \{\mathsf{T},\bot\}^C, \neg, \wedge, \vee, \mathsf{T}, \bot \rangle$ se définit sur les fonctions propositionnelles en utilisant les opérations logiques de négation, de conjonction et de disjonction. Alors, pour tout $i, j \in \{1,\ldots,8\}$, il y a une correspondance entre les opérations de la théorie des ensemblistes et les opérations du calcul des fonctions propositionnelles :

- $(C_i)' = X \Leftrightarrow [\forall x \in X \ \neg f_i(x) = \mathsf{T}]$
- $C_i \cap C_j = X \Leftrightarrow [\forall x \in X \ f_i(x) \wedge f_j(x) = \mathsf{T}]$
- $C_i \cup C_j = X \Leftrightarrow [\forall x \in X \ f_i(x) \vee f_j(x) = \mathsf{T}]$

Pour prendre un cas concret, $f_5(x) \wedge f_6(x) = \mathsf{T} \Leftrightarrow f_5(x) = f_6(x) = \mathsf{T} \Leftrightarrow x = a$ et $C_5 \cap C_6 = \{a,b\} \cap \{a,c\} = \{a\}$. Il en résulte que l'algèbre de Boole des sous-ensembles de

C est isomorphe à l'algèbre de Boole des fonctions propositionnelles définies sur ce même ensemble. Cette équivalence est à la base du théorème suivant :

Théorème[26] : Soit C un ensemble. Le groupe d'automorphismes de l'algèbre de Boole B_n des sous-ensembles de C est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de toutes les permutations de C.

Ce théorème met en évidence l'importance de fixer a priori un domaine C. Un seul groupe d'automorphismes correspond à cet ensemble donné; il est lui-même fixé. Dans l'optique du Programme d'Erlangen, ceci signifie que la logique des fonctions propositionnelles à une variable se caractérise, non pas par un groupe d'automorphismes, mais précisément par le groupe de symétrie $\mathfrak{S}_n$ défini sur l'ensemble C.

La relation d'identité ainsi définie se généralise aisément aux fonctions de r variables. En effet, en supposant que le produit cartésien $C \times \ldots \times C$ est le domaine de toute fonction propositionnelle, une telle fonction $f(x_1,\ldots,x_r)$ correspond au sous-ensemble des r-tuplets ordonnés $(x_1,\ldots,x_r) \in C \times \ldots \times C$ tel que $f(x_1,\ldots,x_r)$ est vraie. Cette supposition induit une équivalence similaire à celle obtenue précédemment pour les fonctions à une variable : les fonctions propositionnelles à r arguments forment une algèbre de Boole $[B_n]_r$ isomorphe à l'algèbre de Boole des sous-ensembles de $[C]_r$, l'ensemble de tous les r-tuplets ordonnés de C. Ainsi, les permutations de C induisent un sous-groupe du groupe symétrique de toutes les permutations de $[C]_r$. Or, le théorème stipulait que toutes ces permutations sont des automorphismes de $[B_n]_r$. Donc, $\mathfrak{S}_n$ induit dans $[C]_r$ un sous-groupe du groupe d'automorphismes de $[B_n]_r$.

Mautner est alors en mesure de démontrer ce théorème :

Théorème : En supposant un domaine C fixé a priori, le groupe d'automorphismes du calcul des fonctions propositionnelles est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de toutes les

[26] Bien que les mathématiques et la logique constituent une partie importante de l'objet du présent travail, le propos se veut d'abord et avant tout philosophique. Pour cette raison, les démonstrations des différents théorèmes auxquels il sera fait référence seront omises. Le lecteur est évidemment invité à les consulter.

permutations de C en autant que toute fonction $f(x_1,...,x_r)$ soit définie de façon unique pour tout $x_k \in C$ et aucun autre[27].

2.1.2 Système de coordonnées et principe de relativité pour la logique

Dans la section précédente, la correspondance entre le groupe d'automorphismes des fonctions propositionnelles définies sur l'ensemble C et le groupe de permutations de cet ensemble reposait sur la détermination réciproque des fonctions propositionnelles et des sous-ensembles de C. En effet, une fonction propositionnelle f est déterminée par le sous-ensemble des éléments $x \in C$ où $f(x)$ est vraie et réciproquement. Bref, cette caractérisation de la logique propositionnelle repose sur l'assignation de valeurs de vérité.

Or, Mautner souhaite évidemment que la correspondance entre le groupe d'automorphismes de la logique propositionnelle et le groupe symétrique ne dépende pas d'une assignation particulière de valeurs de vérité. En s'inspirant du Programme d'Erlangen de Klein et de la conception de Weyl, Mautner développe une analogie avec la géométrie de façon à surmonter cette difficulté. Cette influence géométrique se manifeste principalement par l'instauration d'un cadre conceptuel logico-géométrique. Plus précisément, la transposition des travaux de Weyl à un contexte booléen en constitue la pierre de touche puisqu'ils rendent possible une caractérisation de la logique au moyen du groupe de symétrie. Ils inspirèrent l'introduction de coordonnées logiques afin de concrétiser la nécessaire indépendance d'assignations particulières de valeurs de vérité. « In order to be able to give an exact meaning to "independance of the particular assignment of truth-values" we shall now define logical coordinates in strict analogy to the coordinates of geometry[28]. »

---

[27] Cette dernière condition semble avoir pour unique objectif d'exclure l'automorphisme dual.

[28] F. I. Mautner, *op. cit.*, p. 351.

En géométrie, un système de coordonnées représente une manière conceptuelle d'identifier et donc de distinguer les points d'un espace. Comme le souligne Weyl,

> The coordinates are objectively individualized reproducible systems, while the points are all alike. There is no distinguishing objective property by which one could tell apart one point from all the others; fixation of a point is possible only by a demonstrative act as indicated by terms like "this", "here".[29]

Les coordonnées permettent donc de dépasser le stade de la simple désignation en mettant de l'avant une méthode abstraite et générale au moyen de la notion de repère. Or, ces repères eux-mêmes ne sont pas déterminés objectivement. Pour prendre l'exemple de la géométrie euclidienne, plusieurs systèmes d'axes cartésiens sont admissibles. Seule une classe de repères équivalents peut être déterminée objectivement. En effet, étant donnés deux repères f, f' également admissibles, une correspondance biunivoque S sur les symboles x induit une transition $f \to f'$. Il en résulte quatre sortes d'objets selon Weyl : un ensemble de symboles x, un groupe G de transformations S sur cet ensemble, des points P et des repères f. Ainsi, un point p est décrit relativement à un repère f par une coordonnée $x = (p, f)$. Deux repères f, f' déterminent une transition S du groupe G telle que la coordonnée $x' = (p', f')$ est associée à $x = (p, f)$ par $x' = Sx$.

Ces relations sur l'ensemble des coordonnées se répercutent sur l'espace des points. En effet, la correspondance entre deux points par rapport à deux repères différents — $(p, f) = (p', f')$ — induit un automorphisme $p \leftrightarrow p'$ de l'espace. L'interaction s'avère en fait beaucoup plus fine :

> Let σ be an automorphisms $p \to p'$ of the field-point and f be a fixed frame of class Σ. The coordinates x of p and x' of p' in this frame are connected by a transformation $S, x' = xS$, which represents the automorphism σ in terms of f. To the identity $\sigma = \iota$ there corresponds the identity $S = I$; σ^{-1} and $\sigma\tau$ are represented by S^{-1} and ST if S and T represent σ and τ. In this sense the transformations S corresponding to the several σ of Γ form a group G that is isomorphic with Γ. G is nothing but the representation of Γ in terms of f.[30]

---

[29] Hermann Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton, Princeton University Press, coll. « Princeton Mathematical Series », 1946, p. 14.

[30] Idem, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, p. 76.

Weyl formule alors le problème de relativité : seule une classe d'équivalence de coordinatisation[31] munie d'un groupe de transformations pour passer de l'une à l'autre peut être posée objectivement.

À la lumière de ces considérations, Mautner se penche sur l'idée d'une coordinatisation logique. Soit, d'une part, Φ le système de toutes les fonctions propositionnelles à r arguments dans C données abstraitement, c'est-à-dire de telle sorte qu'il n'y ait aucune assignation de valeurs de vérité. Soit, d'autre part, Ξ le système de toutes les coordonnées logiques ou encore le système de toutes les fonctions de vérité possibles, c'est-à-dire tous les n^r-tuplets ξ de valeurs booléennes 0 et 1. n désigne ici la cardinalité de C.

Définition : Tout isomorphisme entre le système Φ des fonctions propositionnelles f à r arguments et le système Ξ de tous les n^r-tuplets ξ booléens est un *système de coordonnées logiques admissible*.

Par exemple, soient $C=\{a,b,c\}$ et $r=1$. Soit Φ le système des fonctions propositionnelles à un argument données abstraitement. L'algèbre de Boole des fonctions sur cet ensemble se représente de la façon suivante:

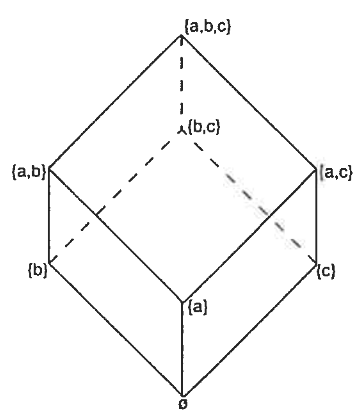

Figure 1 : Représentation de l'algèbre de Boole sur un ensemble C

[31] Traduction plutôt libre de l'anglais *coordinatization*

Soit d'autre part Ξ, le système de tous les n^r-tuplets booléens. Dans ce cas particulier, $n = |C| = 3$ et donc $n^r = 3^1 = 3$. Le système Ξ se décrit donc comme suit : $\Xi = \left\{(x_1, \ldots, x_{n^r}) \middle| x_i \in \{0,1\}\right\} = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$.

Un isomorphisme $\varphi : \Phi \to \Xi$ peut être défini au moyen de la relation suivante : $\{\langle\varnothing,(0,0,0)\rangle,\ \langle\{a\},(1,0,0)\rangle,\ \langle\{b\},(0,1,0)\rangle,\ \langle\{c\},(0,0,1)\rangle,\ \langle\{a,b\},(1,1,0)\rangle,\ \langle\{a,c\},(1,0,1)\rangle,\ \langle\{b,c\},(0,1,1)\rangle,\ \langle\{a,b,c\},(1,1,1)\rangle\}$.

L'algèbre de Boole se représente donc géométriquement de la façon suivante :

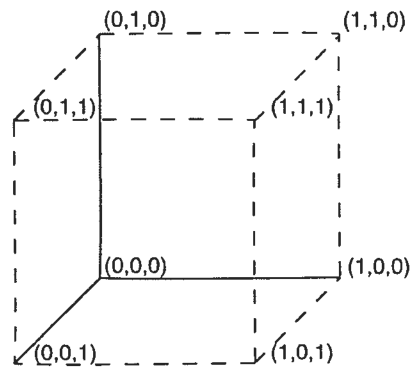

Figure 2 : Représentation géométrique de l'algèbre de Boole

L'isomorphisme représente consiste donc bel et bien en un système de coordonnées admissible. Or, n'importe quel autre isomorphisme $\Phi \to \Xi$ aurait également décrit un système de coordonnées. Il s'avère que plusieurs systèmes différents sont admissibles.

En effet, un système admissible étant tout simplement un isomorphisme $\Phi \to \Xi$, tout automorphisme de Φ ou Ξ induira un nouvel isomorphisme. Il est alors possible de définir une relation d'équivalence sur les systèmes de coordonnées logiques admissibles. Étant donné une correspondance $f \leftrightarrow \xi$, tous les autres systèmes admissibles équivalents s'obtiennent par le biais d'automorphismes. Ainsi, étant donné des systèmes de coordonnées logiques admissibles équivalents, un groupe de transitions sur ces derniers est induit par le groupe d'automorphismes de Φ. Le groupe d'automorphismes des fonctions propositionnelles étant le groupe de symétrie $\mathfrak{S}_n$, ce groupe de transition est tout simplement la réalisation de $\mathfrak{S}_n$ en tant que groupe de permutations régulières de la classe de tous les systèmes également admissibles de coordonnées logiques[32].

Il importe cependant de préciser ce qu'est une réalisation de groupe. Selon Weyl, un groupe Γ est un ensemble de correspondances contenant l'identité E, l'inverse S^{-1} de tout $S \in \Gamma$ et la composition TS de tout $T, S \in \Gamma$. Considéré en tant que groupe abstrait γ, Γ est un ensemble muni d'une opération de composition satisfaisant les trois axiomes correspondant. Une *réalisation* de γ est un homomorphisme $s \to S$ entre les éléments de γ et ceux de Γ tel que $1 \to E$, $s^{-1} \to S$ et $ts \to TS$. Une réalisation est *fidèle* si elle repose sur un isomorphisme. Or, toujours selon Weyl, « *[e]very group γ in the abstract sense is capable of a faithful realization the point field of which is the group manifold γ itself*; this is accomplished by associating with the element a the "translation" in γ : $s' = as$ (with the inversion $s = a^{-1}s'$) (*regular realization*)[33]. »

Mautner pousse l'analogie avec la géométrie jusqu'à formuler un principe de relativité pour la logique. En effet, plusieurs systèmes de coordonnées logiques sont disponibles. De plus, étant donnés deux systèmes, s'il est possible de passer de l'un à l'autre, alors tous deux sont également admissibles. Les automorphismes induisent donc une classe d'équivalence. Il en résulte que le choix d'un système de coordonnées logiques au détriment d'un autre équivalent est totalement arbitraire. Seule une classe d'équivalence de systèmes également admissibles peut être déterminée objectivement.

Théorème (principe de relativité logique) : Le groupe de transitions entre des systèmes équivalents admissibles de coordonnées logiques est induit par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de toutes les permutations du domaine C d'individus. Il est la réalisation régulière de $\mathfrak{S}_n$.

L'introduction de systèmes de coordonnées logiques fait en sorte que la correspondance entre le groupe d'automorphismes de la logique et le groupe de symétrie

---

[32] F. I. Mautner, *op. cit.*, p. 351.

[33] Hermann Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and their Representations*, p. 14.

est indépendante d'assignations particulières de valeurs de vérité. La réalisation régulière de $\mathfrak{S}_n$ au moyen du groupe de transitions et d'un repère spécifié est indépendante de ce repère. Encore une fois, l'analogie avec la géométrie est frappante : « The group G that represents Γ in terms of f must be independent of f. Indeed, representation of Γ by two different groups G, G^* in terms of two similar frames f and f^* would constitute an objective difference between f and f^*, which is impossible[34]. »

2.1.3 Théorie des invariants du groupe symétrique

Dans l'optique du Programme d'Erlangen, une théorie géométrique consiste essentiellement en une théorie des invariants d'un groupe. Son approche se développant toujours à la façon d'une analogie, Mautner tente de faire de la logique mathématique booléenne des propositions et des fonctions propositionnelles une théorie des invariants du groupe symétrique. Les travaux de Weyl s'érigent encore en point de référence dans la mesure où Mautner s'en inspire directement.

Une des grandes contributions de Weyl au rayonnement des idées inhérentes au Programme d'Erlangen fut la formulation d'une série d'axiomes en vertu de laquelle une théorie géométrique peut être considérée comme une théorie des invariants. Une des particularités de cette axiomatique est qu'elle se déploie en deux volets complémentaires et indépendants à la fois. Or, c'est précisément par le biais de cette caractéristique qu'elle s'inscrit dans la continuité du Programme d'Erlangen tout en en repoussant les limites. Weyl proposa de considérer un cadre de référence plus général, c'est-à-dire un repère qui ne se limiterait pas aux points, mais qui pourrait considérer toute sorte d'entités. Les lois de transformations de ces symboles s'ajusteront en conséquence et dépendront des entités

[34] Idem, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, p. 77.

décrites par les symboles relativement au repère. De cette façon, Weyl préserve la dualité entre un groupe d'automorphismes abstrait et un groupe de transformations :

> The abstract group characterizes the "*geometry*" in Klein's sense while the *type* of a variable quantity in that geometry is characterized by its transformation law. Each element s of the abstract group describes the transition from one frame to another. The transformation law states how the symbol of coordinate representing any arbitrary value of the quantity under consideration with respect to a frame f changes under transition to another frame f' by means of s; it is therefore a realization of the abstract group through transformations in the field of coordinates.[35]

Les axiomes de Weyl se subdivisent donc en deux catégories reflétant cette dualité. La partie symbolique porte sur les éléments du groupe et les coordonnées alors que la partie géométrique porte sur les repères et les quantités[36].

A. La partie symbolique

(1) Il existe un ensemble γ d'éléments appelés éléments du groupe. Toute paire s,t d'éléments du groupe doit engendrer un élément ts. Il doit exister une unité I telle que $Is = sI = s$ et un inverse s^{-1} tel que, pour tout élément s, $s^{-1}s = ss^{-1} = I$.

(2) Il existe un ensemble d'éléments appelés coordonnées x et une réalisation $R{:}s \rightarrow S$ du groupe γ au moyen de correspondances biunivoques $x \rightarrow x' = Sx$ au sein de cet ensemble.

B. La partie géométrique

(1) (i) Toute paire de repères f, f' détermine un élément de groupe s, la transition $f \rightarrow f'$.

(ii) Réciproquement, un élément de groupe s envoie un repère f sur un et un seul autre repère $f' = sf$ telle que la transition $f \rightarrow f' = s$.

(iii) La transition $f \rightarrow f$ est l'identité, la transition $f' \rightarrow f$ l'élément inverse et, étant données deux transitions s,t de $f \rightarrow f'$ et $f' \rightarrow f''$ respectivement, ts est une transition $f \rightarrow f''$.

---

[35] Idem, *The Classical Groups, Their Invariants and their Representations*, p. 16.

[36] Ibid., p. 17.

(2) (i) Une quantité q de type R peut prendre différentes valeurs. Relativement à un repère arbitraire f, chaque valeur q détermine une coordonnée x telle que $q \to x$ est une bijection de l'ensemble des valeurs possibles de q dans l'ensemble des coordonnées.

(ii) La coordonnée x' correspondant à la valeur de q dans un repère f' est reliée à x par la transformation $x' = Sx$ associée à la transition $(f \to f') = s$ par la réalisation R.

L'approche de Mautner consiste donc à réutiliser les axiomes de Weyl pour le Programme d'Erlangen et à démontrer que la logique les satisfait. La définition suivante, implicitement formulée dans « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant Theory », sous-tend cette approche :

Définition : Une théorie mathématique est une *théorie des invariants d'un groupe* g si elle satisfait les axiomes de Weyl pour le Programme d'Erlangen avec g comme groupe d'automorphismes.

Cette définition jette un éclairage nouveau sur la voie privilégiée par Mautner. La première partie de l'article est construite en fonction des axiomes de Weyl, c'est-à-dire de telle sorte que les éléments nécessaires pour démontrer que la logique respecte ces axiomes soient progressivement mis en place. En effet, les deux premières sections ont établi l'existence d'un groupe d'automorphismes associé à la logique et de coordonnées logiques. Il n'y a alors qu'un pas à franchir pour transposer les idées de Klein et de Weyl à la logique :

> The existence of a group of automorphisms and of coordinates, hence of a "principle of relativity" are the very conditions on the ground of which one can call a geometry an "invariant-theory". Since these conditions are fulfilled here just as in geometry, it results that two-valued mathematical logic is also an invariant-theory in the sense of Klein's Erlanger program.[37]

[37] F. I. Mautner, *op. cit.*, p. 352.

Intuitivement, ceci sous-entend une conception de la logique propositionnelle comme prenant la forme d'une théorie géométrique, mais ne disposant que des deux valeurs booléennes. En ce sens, l'expression « géométrisation de la logique » dispose d'un deuxième volet. Non seulement la logique s'apparente-t-elle à la géométrie, mais elle peut être caractérisée sur des bases analogues à cette dernière.

Ces considérations se concrétisent dans le théorème suivant qui constitue la pierre de touche de l'approche développée par Mautner :

Théorème : La logique mathématique propositionnelle booléenne sur un domaine C de variables individuelles est une théorie des invariants du groupe symétrique G_n de toutes les permutations de ce domaine en autant que toute fonction propositionnelle $f(x_1,...,x_r)$ soit définie pour tout $x_k \in C$ et aucun autre.

En démontrant ce théorème, Mautner réalise pleinement son premier objectif. La logique mathématique booléenne des propositions et des fonctions propositionnelles peut effectivement être conçue comme une théorie des invariants d'un groupe.

Ceci étant dit, l'approche privilégiée par Mautner et son articulation même introduisent des limitations indissociables de celle-ci. En effet, tout le développement de Mautner repose, ultimement, sur la supposition d'un domaine C fixé a priori. C'est d'ailleurs le choix de ce domaine qui permet de parler d'un groupe d'automorphismes spécifique. À cet égard, la conception de la logique comme théorie des invariants mise de l'avant par Mautner s'accommode plutôt mal de systèmes logiques basés sur plusieurs domaines de variables individuelles. Elle se généralise à des domaines variables seulement si les domaines $C_2,...,C_p$ sont complètement dépendants de C_1 ou si les domaines $C_1,...,C_p$ sont indépendants et disjoints[38]. Dans la mesure où il s'agit de deux situations très particulières, il est difficile de tirer des conclusions générales relatives aux domaines variables.

[38] Ibid., p. 354.

Or, au-delà de cette limitation, le système de Mautner ne semble pas exclure d'office toute possibilité d'extension. Si dans sa forme actuelle, le système semble fortement dépendant de la structure algébrique propre à la logique classique, l'idée d'une correspondance entre des fonctions propositionnelles données abstraitement et des n^r-tuplets booléens devrait pouvoir se généraliser. En effet, l'articulation de son approche ne va pas sans rappeler la construction d'une géométrie sur Z_2. Du point de vue de la géométrie, des constructions similaires sur Z_p, voire peut-être Z_n, pourraient s'avérer parfaitement légitimes. Or, dans la perspective de Mautner, cette restriction à la logique booléenne n'est pas réellement un problème. L'objectif du mathématicien autrichien se résume à caractériser la logique comme théorie des invariants. Il ne prétend pas formuler un critère de démarcation entre le logique et le non logique pour ensuite en déduire une conception de la logique. En contrepartie, le choix de la conception adoptée ne peut être totalement fortuit. La prépondérance accordée à la logique mathématique classique traduit une position philosophique. Par contre, compte tenu que Mautner était d'abord et avant tout un mathématicien, ce choix s'explique probablement par les positions philosophiques implicites aux habitudes et aux pratiques de la communauté mathématique de l'époque.

Donc, à la lumière de la première partie de l'article, la logique mathématique des fonctions propositionnelles s'avère être la théorie des invariants du groupe symétrique d'un ensemble donné. Or, est-il possible d'exploiter cette facette inédite dans l'étude de la logique? La deuxième partie de « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant Theory » apporte une réponse à cette question.

2.2 La logique comme théorie booléenne des invariants

La deuxième étape de l'article met en place des outils logico-mathématiques permettant d'étudier et de caractériser la logique en fonction de sa nouvelle appréhension comme théorie des invariants du groupe symétrique. Mautner introduira donc un cadre analogue à celui de la théorie des invariants pour la géométrie de façon à traiter la logique similairement.

Conformément à l'esprit de la première partie qui inscrivait la logique dans un cadre géométrique, Mautner continue d'exploiter l'analogie avec la géométrie tout au long de la seconde en transposant les concepts-clés de la théorie des invariants au contexte de la logique. Le mathématicien autrichien s'inspire plus particulièrement des méthodes de la géométrie linéaire.

> The result obtained that logic is invariant-theory of the symmetric group reaffirms that there is an analogy of fundamental importance with geometry, especially with the linear geometries, and raises the question whether one cannot create a theory of invariants as an appropriate tool for the study of logical notions and their properties, similar to the powerful tools for the study of linear geometries, namely linear algebras (especially tensor algebra), theory of group-representations and invariants.[39]

La démarche de Mautner se subdivise en deux grandes étapes. La première consiste à introduire une algèbre de tenseurs appropriée à la logique mathématique booléenne. La seconde se consacre à une théorie des lois de transformations possibles et à une théorie des propriétés invariantes des objets transformés par ces lois. La « géométrisation de la logique » précédemment effectuée prend tout son sens dans cette deuxième section de « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory ».

2.2.1 L'algèbre de tenseurs booléens

Dans un premier ordre d'idées, Mautner développe le concept de tenseur booléen en s'inspirant de la similarité entre une fonction propositionnelle à r arguments et un tenseur de rang r. L'importance de cette similitude relève également de la motivation derrière le concept de tenseurs booléens. En effet, Mautner veut construire un calcul de tenseurs qui serait isomorphe au calcul des fonctions propositionnelles. Cet objectif est en quelque sorte

---

[39] Ibid., p. 355.

caché puisqu'il n'est formulé explicitement qu'à la toute fin. Pourtant, il oriente tous les développements de cette section.

Mautner définit tout d'abord la notion de tenseur booléen et une loi de transformation pour ces entités.

Définition : i) Un *tenseur booléen* n-dimensionnel de rang r $a_{j_1 \dots j_r}$ est une fonction à r arguments ayant pour domaine un ensemble C donné de cardinalité n qui prend comme valeurs, relativement à un système de coordonnées fixé arbitrairement, 0 ou 1.

ii) Sous une transformation $S: f \to f'$ de coordonnées logiques, le tenseur booléen $a_{j_1, \dots, j_r}$ se transforme en $a'_{k_1 \dots k_r} = a_{Sj_1 \dots Sj_r}$ en appliquant la permutation S à tous les indices j.

0 et 1 désignent ce que Mautner appelle les composantes du tenseur booléen.

La loi de transformation des tenseurs booléens est le r-produit de Kronecker. Comme en géométrie, cette opération transforme un tenseur de rang r en appliquant la transformation d'un vecteur booléen au moyen d'une permutation S à chacun des r vecteurs qui composent le tenseur. Par exemple, si la permutation S est donnée par la matrice $[s_{jk}]$, le r-produit de Kronecker sera $[S]_r = [s_{j_1 k_1} \dots s_{j_r k_r}]$.

En fait, Mautner construit son « calcul booléen » par analogie avec l'algèbre vectorielle. Son objectif est de remplacer les fonctions propositionnelles par des entités géométriques, mais adaptées à la logique.

> The propositional functions of one argument constitute the full Boolean algebra B_n of dimension n. Since a full Boolean algebra is uniquely determined (up to isomorphism) by its dimension (= the cardinal of C), one can (just as in the case of vector algebra) take the set of all n-tuples of Boolean 0 and 1 as a model for B_n and define the operations of Boolean algebra to be performed by performing them on the "components of these Boolean vectors". This can be done for propositional functions by associating with every individual x in C in a one-one manner a "*dimension*" of a finite- or transfinite-dimensional Boolean vector space. Then the full Boolean algebra of all propositional functions $f(x_1,\dots,x_r)$ can be

> isomorphically replaced by the Boolean algebra of all " *n-dimensional Boolean tensors of rank r*" (...).[40]

Dans un second temps, Mautner introduit des opérations sur les tenseurs booléens à l'aide desquelles il définira une algèbre. Les opérations sur les fonctions propositionnelles considérées par Mautner sont la conjonction, la disjonction, l'implication, la négation et la quantification. La suite de la démarche consiste donc à définir des opérations correspondantes sur les tenseurs booléens.

Définition : i) Soient deux tenseurs booléens $a_{i_1 \dots i_r}$ et $b_{i_1 \dots i_r}$ de rang r.

- l'addition $a_{i_1 \dots i_r} + b_{i_1 \dots i_r}$ donne un tenseur booléen de rang r $c_{i_1 \dots i_r}$.
- la multiplication $a_{i_1 \dots i_r} \cdot b_{i_1 \dots i_r}$ donne un tenseur booléen de rang r $d_{i_1 \dots i_r}$.

ii) Soient $a_{i_1 \dots i_r}$ et $b_{k_1 \dots k_t}$ des tenseurs booléens de rang r et t respectivement.

- La somme extérieure $a_{i_1 \dots i_r} \dot{+} b_{k_1 \dots k_t}$ donne un tenseur booléen $f_{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_t}$ de rang $r+t$.
- Le produit extérieur $a_{i_1 \dots i_r} \bullet b_{k_1 \dots k_t}$ donne un tenseur booléen $g_{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_t}$ de rang $r+t$.

iii) Soit un tenseur booléen f_{klmi}. La permutation d'indice donne un tenseur booléen f_{iklm}.

iv) Soit un tenseur booléen $a_{i_1 \dots i_r}$ de rang r. $\sum_{j \in C} a_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r}$ et $\prod_{j \in C} a_{i_1 \dots i_{k-1} j i_{k+1} \dots i_r}$, la somme et le produit sur un indice, donnent un tenseur booléen de rang $r-1$.

Ces opérations sur les tenseurs booléens sont toutes fermées. De plus, les tenseurs booléens munis de celles-ci forment une algèbre, qui plus est, une algèbre de Boole. Mautner en conclut que cette algèbre de tenseurs booléens est isomorphe à l'algèbre de Boole associée à la logique classique.

> It is clear from the definitions of the various Boolean tensor-operations that *Boolean tensor algebra is isomorphic to the calculus of propositional functions over one—a priori* fixed—*domain of individual* such that to addition, multiplication, complementation, subsumption and contraction of Boolean tensors there correspond conjunction, disjunction, negation, implication and quantification respectively of propositional functions. *Thus the*

---

[40] Ibid., p. 356.

> *calculus of propositional functions over one domain of individuals* is seen to be *isomorphic to an invariantive calculus of greatest analogy to ordinary tensor algebra.*[41]

Cet isomorphisme entre l'algèbre de Boole des fonctions propositionnelles et l'algèbre des tenseurs booléens a pour principale conséquence l'expression des identités sur les fonctions propositionnelles par des équations invariantes sur les tenseurs. Autrement dit, le calcul des tenseurs booléens a une richesse d'expression comparable à celle des fonctions propositionnelles.

La transposition des notions géométriques au contexte de la logique s'accompagne de quelques modifications qui traduisent l'adaptation des tenseurs géométriques au contexte booléen. En effet, l'algèbre de tenseurs booléens diffère d'une algèbre de tenseurs traditionnelle à quelques égards de façon à rendre compte des particularités de la logique. Premièrement, le groupe sous-jacent est le groupe de symétrie. Deuxièmement, les composantes de tenseurs booléens ont pour valeurs 0 et 1. D'ailleurs, ces composantes peuvent être en quantité transfinie. Finalement, il y a deux opérations de contractions dans l'algèbre de tenseurs booléens : la somme et le produit, chacun reflétant un des quantificateurs.

Après avoir défini une algèbre de tenseurs booléens, Mautner démontre que cette structure logico-géométrique est une alternative appropriée pour l'étude de la logique mathématique classique des propositions et des fonctions propositionnelles.

2.2.2 Les réalisations de groupe et les quantités booléennes

Dans un deuxième ordre d'idées, Mautner adopte une perspective pragmatique dans la mesure où il analyse l'algèbre de tenseurs booléens à la lumière de la complétude fonctionnelle. En effet, après avoir mit de l'avant une structure algébrique isomorphe à l'algèbre de Boole, Mautner entreprend d'analyser cette nouvelle structure algébrique afin

[41] Ibid., p. 359.

d'établir qu'elle sied à la logique, c'est-à-dire que les mêmes théorèmes peuvent y être démontrés. Cette analyse s'avère donc d'une importance fondamentale; elle permet de conclure que l'approche de Mautner fonctionne bel et bien. Par contre, elle porte sur des considérations qui s'éloignent du propos principal du présent travail, à savoir le statut du Programme d'Erlangen dans les caractérisations des objets logiques. Pour cette raison, il n'en sera question que dans ses grandes lignes[42].

En géométrie, les représentations de groupes au moyen de matrices jouent un rôle capital dans le développement d'un système géométrique comme théorie des invariants puisqu'elles permettent de connaître toutes les lois de transformations possibles de la géométrie en question. L'analogie privilégiée avec la géométrie par Mautner l'amène conséquemment à étudier les réalisations de groupes. À la lumière de la première étape qui associait la logique propositionnelle au groupe de symétrie, les réalisations de ce groupe au moyen de groupes de permutations s'avèrent importantes car elles permettent de développer une théorie des lois de transformations possibles.

Pour démontrer que la logique peut être considérée comme une théorie des invariants, Mautner adaptait les travaux de Weyl à un contexte booléen. Une stratégie similaire est employée pour étudier les réalisations puisque les travaux du mathématicien B. L. van der Waerden sont complémentaires[43]. Conséquemment, la ligne directrice pour l'étude des réalisations dans un contexte logique provient directement de l'étude des représentations en géométrie. Mautner exploite la particularité de la géométrie selon laquelle « [s]ome properties of matrix-representations can be deduced from properties of groups with endomorphisms (via the introduction of a "representation module") in virtue of the fact that every matrix is an endomorphism of a vector-space[44]. » Pour ce, il utilise le fait qu'une permutation est un automorphisme d'algèbre de Boole de façon à déduire les

---

[42] Pour tous les détails, voir F. I. Mautner, *op. cit.*, p. 361-382.

[43] Cf. B. L. van der Waerden, *Gruppen von Linearen Transformationen*, New York, Chelsea Publishing Company, coll. « Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete », 1948, p. 42 et suiv.

[44] F. I. Mautner, *op. cit.*, p. 347.

propriétés des réalisations à partir des propriétés d'un anneau muni d'endomorphismes. À l'instar de van der Waerden, Mautner n'entreprend pas d'étudier directement les réalisations, mais plutôt de les transplanter dans un autre contexte en utilisant la notion de module de réalisations.

Définition : Soit $R{:}s \rightarrow S$ une réalisation d'un groupe γ au moyen de permutations S d'un ensemble C. Soit B l'algèbre de Boole de tous les sous-ensembles de C. Pour tout $s \in G$ et pour tout $b \in B$, le produit sb se définit par l'équation $sb = Sb$. L'algèbre B enrichie de cette multiplication est le *module de réalisations* correspondant à la réalisation R.

Concrètement, le module de réalisations est l'algèbre de Boole B des sous-ensembles de C à laquelle est ajoutée une multiplication entre les permutations du groupe de symétrie et les éléments de B. Ainsi, à toute réalisation correspond un bi-module et, réciproquement, ce module de réalisations induit lui-même une réalisation. Fidèle aux méthodes géométriques, Mautner interprète l'algèbre de Boole à la manière d'un module de réalisations de façon à montrer que les réalisations transitives d'un groupe s'obtiennent de sa réalisation régulière.

En considérant le cas particulier où le groupe de permutations est le groupe de symétrie de l'ensemble C, Mautner déduit que toutes les réalisations transitives du groupe symétrique sont contenues dans l'espace de tenseurs booléens. Il en tire la conclusion que toutes les lois de transformations possibles sont données par les réalisations possibles du groupe d'automorphismes.

Ainsi, les lois de transformations ne sont rien d'autre que les réalisations possibles du groupe d'automorphismes du domaine C. Le mathématicien autrichien définit donc par la suite des quantités auxquelles s'appliqueront les lois de transformations afin d'étudier concrètement l'invariance de propriétés et de relations logiques : « we have to define for every possible transformation law its corresponding substratum[45]. »

---

[45] Ibid., p. 369.

Définition : Une *quantité booléenne q de type* R est un élément d'une algèbre de Boole B_m de dimension m qui est caractérisé par une réalisation R du groupe d'automorphismes $g{:}s \to S$ de degré m. Toute valeur de q détermine relativement à un système de coordonnées logiques un vecteur booléen m-dimensionnel (q_i) qui se transforme sous la transition s vers un autre système de coordonnées logiques en appliquant la permutation S aux composantes de q_i.

Comme en géométrie, le choix d'un système de coordonnées est arbitraire et les quantités booléennes sont dépendantes du choix d'un tel système.

> Any such quantity q is reproducibly determined relative to a fixed logical coordinate-system by an m-tuple of Boolean 0's and 1's (an m-dimensional Boolean vector), the logical coordinates q_i (say) of q. In another logical coordinate-system q will have coordinates q'_i obtained from q_i by applying the permutation S to the components q_i which corresponds to the transition s from the first logical coordinate-system to the second. The transition s is an element of the given (abstract) group of automorphisms g, and S corresponds to s under the realisation $R{:}s \to S$; this is the transformation-law which characterises [*sic*] the "*kind of quantity q*," whereas g characterises [*sic*] the theory as a whole.[46]

Dans le cas de la logique, un système de quantités booléennes de type R est donc le module de réalisations correspondant à la réalisation R du groupe symétrique, c'est-à-dire une algèbre de Boole décrivant les transitions d'un système de coordonnées logiques à l'autre. Il y a donc correspondance entre les systèmes de quantités booléennes simples et les réalisations transitives du groupe de symétrie.

Avec cette caractérisation des quantités booléennes sous la main, Mautner se tourne vers une notion générale d'invariance qui lui permettra de montrer que les fonctions propositionnelles invariantes $f(x_1,\ldots,x_k)$ constituent une sous-algèbre de l'algèbre de Boole des fonctions propositionnelles à k variables. Plus précisément, ces fonctions forment la sous-algèbre contenant les fonctions $f(x_1,\ldots,x_k)$ qui prennent la même valeur de vérité pour tout $(x_1,\ldots,x_k)$ et tout autre k-tuplet obtenu d'une permutation par g. Mautner

[46] Ibid.

en conclut que la décomposition d'une réalisation en composantes transitives permet d'obtenir toutes les fonctions propositionnelles invariantes.

Toutes ces considérations ont d'importantes conséquences pour le calcul des tenseurs booléens développé précédemment. La principale est que tous les invariants booléens homogènes de tenseurs booléens de dimension finie $a_{ikl}...,b_{ikl}...,...$ sous $\mathfrak{S}_n$ s'obtiennent en formant des produits extérieurs, en imposant des conditions d'égalité et d'inégalité sur les indices et en sommant sur tous les indices. Mautner en déduit l'importante correspondance que voici : « *Thus all Boolean Invariants under* $\mathfrak{S}_n$ *of Boolean Tensors of Finite Dimension (Propositional Functions over one finite Domain of Individuals) can be obtained by the processes of Boolean Tensor Algebra (Calculus of Propositional Functions)* [47]. »

Avec cette dernière correspondance, Mautner complète la deuxième étape de son article. En effet, tous les outils pour étudier la logique mathématique propositionnelle classique en tant que théorie des invariants du groupe de symétrie d'un domaine donné sont en place. C'est une conception bien spécifique de la logique qui en ressort...

2.3 Des conséquences philosophiques de l'approche mathématique

Comme l'illustrent les sections précédentes, Mautner utilise la théorie de l'invariance dans le cadre de la logique mathématique booléenne des fonctions propositionnelles de façon analogue à l'utilisation qui en est faite en géométrie. Il s'inspire à cet égard du Programme d'Erlangen de Klein dans la mesure où la logique n'est ni plus ni moins que la théorie des invariants du groupe de symétrie. En effet, le Programme d'Erlangen établit une identification des méthodes analytique et synthétique par le biais d'une correspondance entre une géométrie et son groupe de transformations.

[47] Ibid., p. 380.

L'identification de la logique mathématique classique des fonctions propositionnelles au groupe de symétrie s'inscrit dans cette perspective. Implicitement, cette correspondance renvoie à une compréhension de la logique se distinguant par sa parfaite généralité, son universalité et sa neutralité ontologique, c'est-à-dire en tant que théorie abstraite par excellence. La relation conceptuelle qui unit la logique aux autres théories mathématiques se réflète alors au niveau de la hiérarchie des groupes. En effet, le groupe de symétrie est le plus grand groupe de transformations. Tout groupe de transformations qui peut être associé à une théorie est un sous-groupe du groupe symétrique et, similairement, la logique sous-tend cette théorie.

> The result that logic is invariant-theory of the symmetric group places logic in a similar position to all mathematical theories (which are based on two-valued logic) to that of projective geometry for the linear geometries: The projective group is the largest linear group and therefore every other linear group a subgroup of it; hence any linear geometry can be "derived" from projective geometry by diminishing the group or, what amounts to the same, by demanding the additional invariance of one or several tensors. Similarly the symmetric group is the largest transformation group, the group of automorphisms of any mathematical theory its subgroup.[48]

En ce sens, l'approche préconisée par Mautner semble avoir pour effet de « géométriser la logique ». D'une part, la logique prend place dans la structure globale des théories mathématiques. D'autre part, elle peut s'étudier à la manière d'un système géométrique, c'est-à-dire comme théorie des invariants du groupe symétrique. Mautner construit tous les outils nécessaires à cette fin.

Or, quelle est la relation entre logique et mathématique dans ce contexte? Le groupe de symétrie $\mathfrak{S}_n$ étant le plus grand groupe de transformations, tout autre groupe de transformations en est un sous-groupe. Dans l'optique du programme de Klein, toute théorie caractérisée par un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ serait une sous-théorie de la logique. Est-ce donc dire que la logique est le plus grand système mathématique, c'est-à-dire celui qui sous-tend toutes les théories mathématiques? En fait, Mautner ne tire pas cette conclusion puisqu'il ne prétend présenter qu'une condition nécessaire.

---

[48] Ibid., p. 382.

> However, to be invariant-theory of a given group cannot lead to the definition of any mathematical theory unless an algebra of coordinates is given as well. (...) [T]o demand invariance means merely to consider *all* propositional functions with the same truth-values for arguments permuted into each other, hence mere invariance cannot give rise to any process of decision whether a propositional function is true or false for given individuals. Indeed if f is an invariant propositional functions, then so is $\bar{f}$. Invariance is only an upper limit.[49]

D'ailleurs du simple point de vue de la méthode, il ne faudrait pas oublier que Mautner procède essentiellement par analogie. Il crée un système fondamentalement logique — les seules valeurs sont 0 et 1 — quoique calqué sur la géométrie. Le passage de la logique à une théorie mathématique arbitraire est des plus délicats.

À cet égard, la relation hiérarchisée entre la logique et les théories mathématiques prend tout d'abord la forme d'une analogie des plus riches avec le statut de la géométrie projective. Mautner tente par la suite de transposer cette relation conceptuelle en une structure d'inclusion des théories mathématiques chapeauté par la logique mathématique classique. Dans la perspective de Klein, cette transposition s'avère des plus surprenantes. En effet, la portée du Programme d'Erlangen se limitait à la géométrie élémentaire : son objet d'étude était les théories géométriques et son objectif leur classification. Une extension fidèle à l'esprit du programme reposerait plutôt sur un prolongement du domaine d'application de la géométrie de façon à englober la logique. Le cadre logico-géométrique mis en place par Mautner tout au long de son article suggère d'ailleurs une appréhension de la logique par le biais d'un point de vue et de méthodes propres à la géométrie. Il en résulte une compréhension de la logique en tant que système géométrique universel et abstrait. Pour passer à une théorie mathématique universelle, il y a un saut conceptuel que Mautner n'explicite nullement.

En fait, Mautner relie logique et géométrie à l'intérieur du cadre mathématique de la théorie de l'invariance. La logique est géométrisée dans la mesure où elle est reconstruite

---

[49] Ibid.

en fonction du point de vue de la théorie des invariants. Or, ce cadre n'est ni plus ni moins que celui inauguré par Klein et Weyl pour l'étude de la géométrie.

En contrepartie, l'explication de Mautner ouvre immédiatement la porte à une autre question qui n'est pas sans rappeler la première : étant donnée une théorie mathématique, peut-on l'identifier à une théorie des invariants d'un sous-groupe du groupe symétrique dont l'algèbre de coordonnées serait l'algèbre de Boole à deux valeurs? Selon Mautner, la réponse serait négative. Premièrement, un sous-groupe du groupe symétrique est un groupe d'automorphismes de plusieurs fonctions propositionnelles. Avec B_1 comme algèbre de coordonnées, l'invariance par rapport à un sous-groupe du groupe symétrique est trop ambiguë. Deuxièmement, le groupe d'automorphismes de plusieurs théories mathématiques est très petit. Dans la plupart des cas, il s'avère insuffisant pour caractériser la théorie en question[50]. Par exemple, de nombreuses théories ont pour unique automorphisme l'identité.

Mautner opte plutôt pour une solution où chaque théorie est intimement liée à son domaine d'individus et, ce faisant, s'éloigne du Programme d'Erlangen. En effet, toute théorie mathématique se trouve à être la théorie des invariants d'un même groupe, mais définie sur un domaine différent.

> Instead of considering subgroups of $\mathfrak{S}_n$, we keep $\mathfrak{S}_n$ as the underlying group. Indeed a mathematical theory in its completely abstract shape is the theory of individuals from whose nature one has entirely abstracted. I.e. (if we assume only one domain of individuals) any two individuals are a priori equivalent, indistinguishible, i.e. any permutation of the individuals must be admissible. Hence any mathematical theory when completely formalised [*sic*] must be invariant under the symmetric group $\mathfrak{S}_n$ of all permutations of its domain of individuals, although its group of automorphisms need not be $\mathfrak{S}_n$.[51]

Or, qu'est-ce qu'une théorie formalisée? En 1946, date de publication de l'article, il s'agit évidemment d'une théorie axiomatisée.

> *In general the axioms of any completely formal axiomatic theory will—by the very nature of such a theory—have to be invariant under any permutation of the individuals*, if there is only one domain of individual variables. (...) *Thus a knowledge of all simultaneous Boolean invariants under $\mathfrak{S}_n$ of propositional functions $f, g, \ldots$ would yield a systematic*

---

[50] Ibid., p. 383.

[51] Ibid.

> *knowledge of all possible completely formalised* [*sic*] *axiomatic mathematical theories in whose axioms* $f,g,\ldots$ *occur as primitive ideas or variable propositional functions.* E.g. the determination of all Boolean invariants under $\mathfrak{S}_n$ of one propositional function of three variables would yield a knowledge of all those theories of which the theory of groups, the theory of quasi-groups etc. are special cases. The knowledge of all simultaneous Boolean invariants of two propositional functions, each of three variables, would give an enumeration of all those theories of which the theory of rings, the theory of integral functions or of fields etc. are special cases.[52]

Ainsi, Mautner suggère que les axiomes d'une théorie sont les invariants qui la caractérisent. Toutefois, l'invariance des axiomes ne s'exprime qu'au niveau des tenseurs booléens. Étant donné une théorie mathématique axiomatisée, ses axiomes doivent d'abord être traduits en termes de tenseurs booléens. Les tenseurs deviennent des axiomes abstraits puisqu'ils ne font pas référence à des invididus ou à des opérations spécifiques. Par le fait même, cette axiomatisation devient une présentation particulière de la théorie en question et les axiomes des cas particuliers des tenseurs abstraits.

Par le fait même, Mautner formule une réponse à sa question de départ de la relation entre la logique et les mathématiques. Celle-ci prend la forme d'une classification des théories mathématiques en termes de théories des invariants booléens. Chaque théorie sera associée à ses axiomes abstraits, ces derniers étant les invariants du groupe de symétrie de son domaine d'invidividus. C'est en ce sens que la logique sous-tend les mathématiques : toute théorie mathématique devient une théorie des invariants du groupe symétrique lorsqu'elle est traduite en termes de tenseurs booléens.

Du point de vue de l'étude de la logique et du Programme d'Erlangen, la principale limitation de la proposition de Mautner est directement reliée à son articulation. En effet, Mautner limite son champ d'investigation à la logique mathématique booléenne des propositions et des fonctions propositionnelles : « It will be shown in this paper that two-valued (Boolean) mathematical logic of propositions and propositional functions (in extension) can be considered as "*invariant-theory of the symmetric group*" in the sense of

[52] Ibid., p. 384.

Klein's Erlanger program[53]. » Or, cette restriction à la logique des propositions et des fonctions propositionnelles se trouve, en quelque sorte, à la base des résultats obtenus en raison de la structure algébrique très particulière associée à cette logique. Ainsi, en raison du rôle fondamental joué par la structure d'algèbre de Boole, la suggestion de Mautner, dans sa forme actuelle, peut difficilement être étendue aux logiques non classiques sans subir d'importantes modifications.

En conclusion, Mautner traite la problématique des objets logiques à travers le prisme des mathématiques. D'une part, l'approche du mathématicien autrichien trouve son origine dans une conception prédéterminée de la logique mathématique qui s'articule autour des concepts de fonctions propositionnelles et d'algèbre de Boole. En effet, Mautner présuppose la logique mathématique booléenne des propositions et des fonctions propositionnelles et tente de la caractériser en tant que théorie des invariants du groupe symétrique. D'autre part, le Programme d'Erlangen fournit le cadre à l'intérieur duquel Mautner est en mesure de développer son approche. Celle-ci se base sur une transposition des notions géométriques propres à la théorie des invariants à un contexte booléen et se déploie en deux temps. Premièrement, Mautner démontre que la logique mathématique propositionnelle classique peut être considérée comme une théorie des invariants du groupe symétrique. Dans un deuxième temps, les outils logico-mathématiques nécessaires à une caractérisation et à une étude de la logique en tant que théorie des invariants du groupe symétrique sont développés.

Historiquement, l'approche mathématique de Mautner semble avoir eu un impact pour le moins limité. Il faudra attendre plusieurs années avant que l'idée d'une caractérisation des objets logiques inspirée du Programme d'Erlangen ne ressurgisse. L'approche proposée par Tarski se révéla totalement différente…

---

[53] Ibid., p. 345.

Chapitre III : L'approche sémantique de Tarski

Historiquement, le Programme d'Erlangen est à l'origine d'une deuxième voie d'investigation de la problématique des objets logiques. Dès 1936, le logicien d'origine polonaise Alfred Tarski dut reconnaître l'importance d'une distinction entre les objets logiques et non logiques dans le cadre de ses recherches fondationnelles en sémantique. S'inspirant des travaux de Klein en géométrie, Tarski développa une caractérisation des notions logiques comme invariantes sous les permutations. Là s'arrête toutefois les similitudes avec l'approche de Mautner dans la mesure où l'articulation des deux propositions se révèlent fort différentes. En effet, Tarski prolonge le programme d'Erlangen de telle sorte que la logique prenne la forme d'une extension de la géométrie alors que Mautner instaurait un cadre s'inspirant d'une conception kleinienne de la géométrie de façon à traiter une conception prédéfinie de la logique à la manière d'une théorie géométrique.

Là où l'approche de Mautner était restée pratiquement lettre morte, la publication posthume de « What are Logical Notions? » en 1986 engendra un intérêt nouveau pour ladite problématique. Quelques philosophes tentèrent à leur tour de distinguer les objets logiques et non logiques. Certaines propositions à cet égard s'inscrivent dans la lignée de la proposition originale de Tarski alors que d'autres ne s'y rattachent qu'indirectement. Néanmoins, toutes partagent l'idéal d'une caractérisation sémantique au moyen de l'invariance.

Ce chapitre portera sur la caractérisation sémantique des objets logiques dans l'optique du Programme d'Erlangen proposée par Tarski. Dans un premier temps, il sera question du concept de conséquence logique. Cette analyse permettra de faire ressortir l'importance générale de la problématique des objets logiques et sa genèse dans le corpus philosophique de Tarski. Dans un deuxième temps, l'invariance sous les permutations comme critère d'une caractérisation sémantique sera abordée.

3.1 Le concept de conséquence logique ou les notions logiques selon Tarski

La caractérisation des notions logiques formulée dans « What are Logical Notions? » s'inscrit dans le contexte plus vaste de ses recherches sémantiques. Tarski prit conscience de l'importance fondamentale d'une telle caractérisation en tentant de définir le concept de conséquence logique. À cet égard, la problématique est formulée pour la première fois à la fin de l'article « On the Concept of Logical Consequence ». Il importe donc se pencher sur le concept de conséquence logique avant d'étudier la conception des notions logiques de Tarski.

3.1.1 La syntaxe et le concept de conséquence logique

Dans l'optique de Tarski, le concept de conséquence logique s'avère prépondérant; il est au cœur même de l'entreprise logique. D'une part, il permet de définir les concepts logiques essentiels tels ceux de vérité d'un énoncé, de système d'axiomes, de complétude, etc. D'autre part, il est sous-jacent à la définition de système déductif et, par le fait même, à la base de la tâche de la logique. En effet, celle-ci consiste à développer et à étudier les systèmes déductifs.

> The deductive disciplines constitute the subject-matter of the *methodology of the deductive sciences*, which today, following Hilbert, is usually called *metamathematics*, in much the same sense in which spatial entities constitute the subject-matter of geometry and animals that of zoology. Naturally not all deductive disciplines are presented in a form suitable for

> objects of scientific investigation. (...) Metamathematical investigations are confined in consequence to the discussion of formalized deductive disciplines.[54]

Cette étude se fait par l'entremise des conséquences logiques. Étant donné un système formel L muni d'un langage $\mathcal{L}$ et d'une définition de formule bien formée pour $\mathcal{L}$, un système déductif dans L est l'ensemble de toutes les conséquences logiques d'un ensemble $\mathcal{X}$ de formules bien formées de $\mathcal{L}$.

En ce sens, la tâche de la logique pose directement la question de ce qu'est une conséquence logique. Selon Tarksi, le concept approprié de conséquence logique devrait être coextensif avec le concept commun, c'est-à-dire celui du langage courant où des prémisses vraies entraînent nécessairement une conclusion vraie. Telle est la motivation sous-jacente à l'article « On the Concept of Logical Consequence ». L'originalité de Tarski aura été de constater l'incapacité du cadre syntaxique traditionnel à rendre compte du concept approprié et d'instaurer comme alternative un cadre sémantico-mathématique.

À l'époque, les logiciens définissaient une conséquence logique syntaxiquement, c'est-à-dire en termes d'axiomes et de règles d'inférence. Soient un ensemble d'axiomes $\mathcal{A}$, un ensemble de règles d'inférence $\mathcal{R}$ et un ensemble de formules bien formées $\mathcal{X}$. L'ensemble des conséquences logiques de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{L}$ est le plus petit ensemble de formules bien formées de L qui contient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{A}$ et qui est fermé sous les règles de $\mathcal{R}$. La logique prenait donc la forme d'un système formel : à partir d'axiomes, la preuve de tout théorème se résumait à un nombre fini d'applications de règles d'inférence.

> Logicians thought that these few rules of inference exhausted the content of the concept of consequence. Whenever a sentence follows from others, it can be obtained from them—so it was thought—in more or less complicated ways by means of the transformations prescribed by the rules.[55]

---

[54] Alfred Tarski, « Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences » In Alfred Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, traduit par J. H. Woodger, Oxford, Oxford University Press, 1956, p. 60.

[55] Idem, « On the Concept of Logical Consequence » In Alfred Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, traduit par J. H. Woodger, Oxford, Oxford University Press, 1956, p. 410.

Tarski utilise l'exemple d'une théorie ω-incomplète pour rejeter ce type de définition. Au sein d'une telle théorie, pour tout $n \in IN$, tout énoncé de la forme « A_n : n possède la propriété P » est un théorème . Pourtant, l'énoncé universel « A : Tout nombre naturel possède la propriété P » ne peut être démontré. Il en conclut que ce concept syntaxique de conséquence logique est trop faible pour recouvrir le concept intuitif. Intuitivement, la proposition A découle de la collection des propositions $A_0,...,A_n,...$.

> Formerly it could be assumed that the formalized concept of consequence coincides in extension with that concept in everyday language, or at least that all purely structural operations, which unconditionally lead from true statements to true statements, could be reduced without exceptions to rules of inference employed in the deductive discipline. (...) Since, however, there are systems which are (...) ω-incomplete (...), the basis of [this assumption] is removed.[56]

Ceci dit, Tarski est parfaitement conscient que l'ajout d'une règle d'induction infinie à cette théorie permettrait de démontrer l'énoncé universel. Par définition, tout système déductif muni d'une règle d'inférence infinie est ω-complet. En contrepartie, Tarski argumente qu'un tel ajout ne constitue pas une réelle solution. Premièrement, une règle d'inférence infinie présente des différences fondamentales avec les règles d'inférence utilisées habituelles de telle sorte qu'elle ne peut être harmonisée avec la méthode déductive. Deuxièmement, l'application de cette règle dans la construction d'un système déductif s'avère problématique dans la mesure où elle présuppose la démonstration d'une infinité d'énoncés. Finalement, toute tentative de modifications de la règle d'inférence infinie de façon à corriger ses lacunes se heurte irrémédiablement à l'incomplétude de tout système formel contenant l'arithmétique de Peano. La conclusion finale est alors qu'un concept formel de conséquence logique basé sur la récursivité ne recouvre pas complètement le concept intuitif[57].

---

[56] Idem, « Some Observations on the Concepts of ω-consistency and ω-completeness » In Alfred Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, traduit par J. H. Woodger, Oxford, Oxford University Press, 1956, p. 294.

[57] Ibid., p. 295; Idem, « On the Concept of Logical Consequence », p. 411-412.

Dans un deuxième ordre d'idées, Tarski analyse le concept intuitif de conséquence logique afin de mettre en évidence les caractéristiques essentielles dont devrait disposer le concept formel recherché. Cette analyse l'amène à identifier deux considérations primordiales. Premièrement, le concept approprié de conséquence logique devra recouvrer la signification de l'implication matérielle. Soient une classe d'énoncés K et un énoncé X qui en découle. Il n'est pas possible que les énoncés de K soient tous vrais et que X soit faux. Deuxièmement, ce concept approprié devra être essentiellement formel, c'est-à-dire qu'il ne devra nullement dépendre du référent empirique des termes non logiques. Bref, seule importe la structure des énoncés.

> [S]ince we are concerned here with the concept of logical, i.e. *formal*, consequence, and thus with a relation which is to be uniquely determined by the form of the sentences between which it holds, this relation cannot be influenced in any way by empirical knowledge, and in particular by knowledge of the objects to which the sentence X or the sentences of the class K refer.[58]

À la lumière de ces considérations, Tarski formule tout d'abord une définition syntaxique de conséquence logique. Celle-ci se distingue toutefois de la précédente en ce qu'elle se base sur la fermeture des énoncés sous l'opération de substitution. Cette seconde définition s'exprime sous la forme d'un critère. Une conséquence est logique si elle respecte la condition (F) :

> *(F) If, in the sentences of the class K and in the sentence X, the constants—apart from purely logical constants—are replaced by any other constants (like signs being everywhere replaced by like signs), and if we denote the class of sentences thus obtained from K by 'K'', and the sentence obtained from X by 'X'', then the sentence X' must be true provided only that all sentences of the class K' are true.*[59]

Quoiqu'elle soit intrinsèquement reliée au concept intuitif, la condition (F) ne représente pas une caractérisation formelle de conséquence logique qui lui soit coextensive. En effet, la condition (F) constitue une condition nécessaire, mais non suffisante pour qu'un énoncé X soit une conséquence logique d'une classe d'énoncés K. Autrement dit, un énoncé X peut découler d'une classe K sans que la condition (F) ne soit respectée.

[58] Idem, « On the Concept of Logical Consequence », p. 414.
[59] Ibid., p. 415.

« The condition (F) could be regarded as sufficient for the sentence X to follow from the class K only if the designations of all possible objects occured in the language in question. This assumption, however, is fictitious and can never be realized[60] »

3.1.2 La sémantique et le concept de conséquence logique

À la lumière de ces deux définitions syntaxiques, Tarski se tourne vers la sémantique dans la mesure où il y voit un moyen de récupérer les considérations sous-jacentes à la condition (F) tout en faisant fi de ses limitations. Il exploitera donc l'appareillage conceptuel mis en place au cours de ses recherches sémantiques pour obtenir une caractérisation satisfaisante du concept de conséquence logique. Deux notions jouent ici un rôle de premier plan : celle de satisfaction et celle de modèle.

Soit un langage pour lequel toutes les constantes non logiques peuvent être associées à des variables du langage de telle sorte que tout énoncé devienne une fonction propositionnelle si les constantes sont remplacées par les variables correspondantes. Soit également L une classe d'énoncés. En remplaçant toutes les constantes non logiques apparaissant dans les propositions de L par les variables correspondantes, il en résulte une classe L' de fonctions propositionnelles. Un *modèle* est alors toute suite arbitraire d'objets qui satisfont toutes les fonctions propositionnelles de la classe L'. Si la classe L ne contient qu'une seule proposition X, alors le modèle de la classe L est un modèle de la proposition X.

La notion de modèle permet de formuler une définition sémantique de conséquence logique :

Définition : L'énoncé X est une *conséquence logique* des énoncés de la classe K si et seulement si tout modèle de la classe K est également un modèle de l'énoncé X.

---

[60] Ibid., p. 416.

Selon Tarski, cette définition induit une conception de conséquence logique qui soit coextensive avec le concept intuitif[61]. D'une part, elle recouvre la condition (*F*) et par le fait même les deux conditions qui étaient implicites à cette dernière. D'autre part, elle est indépendante du référent des énoncés : seule la structure des propositions induite par les relations entre les variables importe.

> It seems to me that everyone who understands the content of the above definition must admit that it agrees quite well with the common usage. (…) In particular, it can be proved, on the basis of this definition, that every consequence of true sentences must be true, and also that the consequence relation which holds between given sentences is completely independent of the sense of the extra-logical constants which occur in these sentences.[62]

Ainsi, la définition sémantique avancée par Tarski semble caractériser de façon appropriée le concept de conséquence logique. En contrepartie, elle ouvre la porte à la question des objets logiques puisqu'elle repose sur une interaction entre la syntaxe et la sémantique où les constantes non logiques sont associées à des variables. C'est précisément cette association qui permet de passer de la classe L des énoncés à la classe L' des fonctions propositionnelles. La définition de conséquence logique se base donc de façon essentielle sur une distinction entre objets logiques et non logiques.

> Underlying our whole discussion is the division of all terms of the language discussed into logical and extra-logical. This division is certainly not quite arbitrary. If, for example, we were to include among the extra-logical signs the implication sign, or the universal quantifier, then our definition of the concept of consequence would lead to results which obviously contradict ordinary usage. On the other hand, no objective grounds are known to me which permit us to draw a sharp boundary between the two groups of terms. It seems to be possible to include among logical terms some which are usually regarded by logicians as extra-logical without running into consequences which stand in sharp contrast to ordinary usage. (…)
>
> Perhaps it will be possible to find important objective arguments which will enable us to justify the traditional boundary between logical and extra-logical expressions. But I consider it to be quite possible that investigations will bring no positive results in this direction, so that we shall be compelled to regard such concept as 'logical consequence', 'analytical statement', and 'tautology' as relative concepts which must, on each occasion,

---

[61] La question quant à savoir si cette définition est une explication appropriée du concept intuitif et si elle est identique à la définition contemporaine est sujette à d'âpres débats depuis quelques années. Voir à ce sujet les textes de John Etchemendy, Greg Ray et William H. Hanson et Mario Gómez-Torrente.

[62] Alfred Tarski, « On the Concept of Logical Consequence », p. 417.

> be related to a definite, although in greater or less degree arbitrary, division of terms in logical and extra-logical.[63]

La démarcation entre les objets logiques et non logiques pose problème puisque Tarski recherche une définition indépendante du langage utilisé, c'est-à-dire une définition applicable à n'importe quel langage. Étant donné un langage particulier, il est relativement aisé d'établir la distinction; il suffit d'énumérer les termes logiques. Cette méthode est toutefois inefficace pour des langages arbitraires.

Dans un autre ordre d'idées, si cette définition de conséquence logique s'avère importante dans le contexte de la problématique de l'entreprise logique, elle possède également des ramifications philosophiques beaucoup plus profondes et fondamentales. Quoiqu'il ne développe peu cet aspect, Tarski relie sa définition aux travaux de Carnap sur l'analycité. En effet, ce dernier proposa dans *Logische Syntax der Sprache* une définition de conséquence logique intimement liée à la notion d'analycité.

Définition[64] : L'énoncé X est une conséquence logique des énoncés de la classe K si et seulement si la classe $K \cup \{\neg X\}$ est contradictoire.

Cette définition est à la base de la notion d'analycité de Carnap : « 'Analytic' would then be defined as 'consequence of the sentential null class' and 'contradictory' as 'sentence of which every sentence is a consequence'[65]. » Tarski est pleinement conscient que sa propre définition englobe celle de Carnap. En effet, il redéfinit les concepts de contradiction et d'analycité en termes de modèle. Soit une classe K d'énoncés. K est *contradictoire* si elle ne possède aucun modèle. De plus, K est *analytique* si toute suite d'objets en est un modèle. Supposons également que dans le langage utilisé, pour tout énoncé X, il existe un énoncé Y qui soit sa négation. Alors, les modèles de Y sont les suites d'objets qui ne sont pas des modèles de X et vice-versa. Selon Tarski, en utilisant

---

[63] Ibid.,p. 418-420.

[64] Cette formulation est celle de Tarski. Cf. Rudolf Carnap, *The Logical Syntax of Language*, traduit de l'allemand par Amethe Smeaton, London, Routhledge & Kegan Paul ltd, coll. « International Library of Psychology, Philosophy and Scientific Method », 6e impression avec corrections, 1964, p. 117.

[65] Rudolf Carnap, *op. cit.*, p. 118.

cette correspondance, il est possible de démontrer que les deux définitions de conséquence logique sont équivalentes. Il en résulte alors une caractérisation de l'analycité car « those and only those sentences are analytical which follow from every class of sentences (in particular from the empty class) and those and only those are contradictory from which every sentence follows[66]. »

Dans la perspective de Tarski, l'analycité dépend alors essentiellement du concept de conséquence logique. Dans la mesure où la définition proposée dans l'article de 1936 repose sur une distinction entre les objets logiques et non logiques, l'analycité se trouve à dépendre elle-même de cette distinction. Conséquemment, la distinction entre les énoncés analytiques et synthétiques ne peut être fondée sans un tel critère de démarcation. L'auteur de « On the Concept of Logical Consequence » en était parfaitement conscient : « In order to see the importance of this problem for certain general philosophical views it suffices to note that the division of terms into logical and extra-logical also plays an essential part in clarifying the concept 'analytical'[67]. » Comme le souligne Wolenski[68], la remarque de Tarski annonce la célèbre critique de Quine.

À la lumière de ces considérations, la problématique d'une distinction entre les objets logiques et non logiques joue un rôle de premier plan dans le corpus sémantique instauré par Tarski, mais aussi par rapport à d'importantes questions philosophiques. Par l'entremise du Programme d'Erlangen, les travaux géométriques du mathématicien Felix Klein inspireront à Tarski le cadre à l'intérieur duquel il développera sa solution.

---

[66] Alfred Tarski, « On the Concept of Logical Consequence », p. 418.

[67] Ibid., p. 419.

[68] Jan Wolenski, *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. « Synthese Library: Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science », Volume 198, 1989, p. 264.

3.2 Tarski et le Programme d'Erlangen

Tel qu'exposé précédemment, Tarski développe une définition sémantique de conséquence logique de façon à réconcilier les concepts formel et intuitif. Quoique cette définition soit satisfaisante par rapport aux exigences inhérentes au concept approprié de conséquence logique, il n'en demeure pas moins qu'elle dépend directement de la caractérisation des objets logiques. Dans cette perspective, Tarski recherche une caractérisation sémantique qui soit indépendante du langage utilisé, c'est-à-dire qui soit applicable à un langage arbitraire. C'est à une telle problématique que s'attaque le célèbre logicien dans « What are Logical Notions? ».

Dans le corpus sémantique de Tarski, « What are Logical Notions? » s'inscrit conceptuellement dans la continuité de « On the Concept of Logical Consequence » dans la mesure où il apporte une réponse à une question laissée en suspens. La filiation entre les deux articles se manifeste également à un second niveau. En effet, la caractérisation proposée par Tarski se veut motivée par la pratique courante de la logique. En ce sens, il n'est nullement intéressé par une caractérisation universelle, intemporelle et immuable des notions logiques qui engloberait leur véritable signification, voire une quelconque idée absolue ou encore platonicienne. Tarski est plutôt à la recherche d'une caractérisation induite par les pratiques usuelles des logiciens contemporains.

> (...) people speak of catching proper, true meaning of a notion, something independant of actual usage, and independant of any normative proposals, something like the platonic idea behind the notion. This last approach is so foreign and strange to me that I shall simply ignore it, for I cannot say anything intelligent on such matters.
>
> Let me tell you in advance that in answering the question 'What are Logical Notions?' what I shall do is make a suggestion or proposal about a possible use of the term 'logical notion'. This suggestion seems to be in agreement, if not with all prevailing usage of the term 'logical notion', at least with one which actually is encoutered in practice.[69]

---

[69] Alfred Tarski, « What are Logical Notions? », *History of Philosophy and Logic*, Volume 7, n° 2, 1986, p. 145.

À l'instar du concept approprié de conséquence logique qui se devait d'être coextensif avec le concept intuitif, Tarski opte pour une caractérisation coextensive des objets logiques. Elle devra refléter les notions dites logiques dans la pratique courante.

Avant d'aller plus loin, une précision importante quant à l'utilisation du terme « notion » doit être apportée. Selon Tarski, une notion désigne simplement tout objet d'un type quelconque dans une hiérarchie des types. L'exemple privilégié est évidemment la hiérarchie des types développée par Whitehead et Russell dans *Principia Mathematica*. Tarski privilégie donc une compréhension très large du terme et, par ricochet, des notions qui pourraient potentiellement se distinguer par leur caractère logique. L'investigation n'est pas limitée à un genre prédéterminé d'entités comme les opérations — telle opération est-elle vraiment logique? — mais porte plutôt sur tous les objets d'une hiérarchie des types qu'elle envisage de distinguer en fonction du critère. Cette particularité de l'appréhension de Tarski des notions logiques est en accord avec sa démarche qui ne repose pas sur une conception définie de la logique.

À cet égard, Tarski n'identifie pas les notions aux objets d'une théorie des types, mais bien à une hiérarchie des types au sein de la théorie des ensembles. En effet, la compréhension de la logique de Tarski reposait fondamentalement sur la théorie des ensembles. « [H]e was first and foremost a mathematician, and—even more so—a set-theoretical one[70]. »

Dans « What are Logical Notions? », la distinction entre les notions logiques et non logiques est construite en appliquant les idées inhérentes au Programme d'Erlangen de Klein à la logique. Toutefois, Tarski insiste plus particulièrement sur deux de ces idées : l'invariance sous les permutations et la correspondance entre une théorie géométrique et un groupe d'automorphismes.

---

[70] Solomon Feferman, « Tarski's Conception of Logic » [en ligne], http://math.stanford.edu/~feferman/papers/conceptlogic.pdf, (consulté le 24 juin 2003), p. 2.

Il s'agit d'ailleurs d'une des principales originalités de Tarski en vertu de laquelle son approche se distingue des précédentes. Mautner prenait comme point de départ une conception prédéterminée de la logique et montrait à l'aide des travaux de Klein et de Weyl que, en fonction de cette conception, la logique prenait la forme d'une théorie des invariants. Tarski procède différemment dans la mesure où son point de départ est le point de vue de Klein. La tâche consiste alors à montrer que la logique se conforme à ce point de vue, c'est-à-dire qu'il permet de formuler un critère de démarcation pour la logique. Cette approche sera une réussite en autant que la conception de la logique qui en découle est coextensive avec la conception en vigueur. En ce sens, la méthodologie sous-jacente à « What are Logical Notions? » se distingue également de celle adoptée par Lindenbaum-Tarski[71]. Dans cet article, ils proposait un critère qui encodait une démarcation préétablie de la logique comme théorie des types. Il est cependant intéressant de constater que, au-delà des différences méthodologiques, les résultats mis de l'avant par « On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories » et « What are Logical Notions? » sont identiques.

Une des principales innovations au cœur des travaux de Klein fut de relier la théorie des groupes à l'étude de la géométrie. En effet, toute l'information intrinsèque à une théorie géométrique peut être enchâssée dans un groupe d'automorphismes de telle sorte que ce dernier décrive exhaustivement la théorie en question. Réciproquement, les travaux de Weyl complétèrent ceux de Klein en montrant comment déterminer les types de quantités respectant une loi de transformations linéaires donnée. Conséquemment, toute théorie géométrique peut être associée à un tel groupe et vice-versa. Chez Klein, cette correspondance induit une structure d'inclusion entre les diverses géométries. Étant données deux théories T_1 et T_2 ainsi que G_1 et G_2 les groupes de transformations de

---

[71] Adolf Lindenbaum et Alfred Tarski, « On the Limitations of the Means of Expression of Deductive Theories » In Alfred Tarski, *Logic, Semantics, and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, traduit par J. H. Woodger, Oxford, Oxford University Press, 1956, p. 384-392.

l'espace associés, si les notions T_1-invariantes se révèlent être également T_2-invariantes, alors T_1 sera dite une *sous-théorie* de T_2. Or, une notion sera T_1-invariante si elle est invariante sous les automorphismes du groupe G_1. Ainsi, cette structure d'inclusion des théories reflète celle en vigueur au niveau des groupes : G_1 sera un sous-groupe G_2. Dans le Programme d'Erlangen, la géométrie projective chapeaute toutes les géométries.

La proposition de Tarski s'articule par le biais d'une généralisation de cette idée. Il étend le cadre d'application des travaux de Klein à la logique. En effet, la correspondance entre système géométrique et groupe induit une relation entre les classes de transformations et les classes de notions invariantes.

> (...) by narrowing down the class of permissible transformations we can make more distinctions, i.e. we widen the class of notions invariant under permissible transformations. (...) On the other hand, one can go the opposite direction; instead of narrowing down the class of permissible transformations, and in this way widening the class of invariant notions, we can do the opposite, and widen the class of transformations.[72]

La généralisation de Tarski consiste en un passage à la limite : « Now suppose we continue this idea, and consider still wider classes of transformations. In the extreme case, we would consider the class of all one-one transformations of the space, or universe of discourse, or world, onto itself[73]. » D'où la suggestion suivante : une notion est logique si elle est invariante sous toute permutation du monde dans lui-même.

Plus formellement[74], la suggestion de Tarski se formule comme suit. Soient des symboles de type relationnel fini τ générés à partir du symbole de type 0 par la formation successive de $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n)$. Tout d'abord, une classe arbitraire d'individus M_0 est associée au type 0. Par la suite, à tout $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n)$ est associé un domaine M_τ qui consiste en toutes les sous-relations $R \subset M_{\tau_1} \times ... \times M_{\tau_n}$. La structure $M = \langle M_\tau \rangle$ se compose alors de tous les domaines M_τ muni d'une relation d'appartenance $\in_\tau$ du type approprié. Ainsi, chaque domaine M_τ étant formé par itération à partir de M_0, toute permutation π de M_0

---

[72] Alfred Tarski, « What are Logical Notions? », p. 148.
[73] Ibid., p. 149.
[74] Solomon Feferman, « Logic, Logics, and Logicism », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Volume 40, n° 1, Special issue in honor and memory of George S. Boolos (Notre Dame, IN, 1998), 1999, p. 33.

induit naturellement une permutation π_τ sur tous ces domaines M_τ de telle sorte que la relation d'appartenance $\in_\tau$ soit préservée. Donc, une notion logique associée à la structure M est un élément d'un des M_τ qui est invariant sous toutes ces permutations induites π_τ.

Tel que mentionné précédemment, l'objectif de Tarski consistait à donner une définition qui était coextensive avec les notions logiques telles qu'appréhendées par l'usage courant. À la lumière de cet objectif, l'étape subséquente consiste à déterminer explicitement les notions invariantes pour chaque type τ de la hiérarchie :

i) Dans la mesure où le domaine de départ est de cardinalité supérieure à 2, aucun individu n'est une notion logique.

ii) la classe vide et la classe universelle sont les seules classes d'individus logiques.

iii) Les relations binaires logiques sont au nombre de quatre : la relation vide, la relation universelle de même que la relation d'identité et son complément.

iv) Au niveau des classes de classes d'individus, les notions logiques sont données par les propriétés de cardinalité des classes, c'est-à-dire le fait qu'une classe compte trois, quatre, cinq, etc. éléments.

v) Les relations entre classes sont les opérations ensemblistes habituelles : « I mean such things as inclusion between classes, disjointness of two classes, overlapping of two classes, and many others; all these are logical relations in the normal sense, and they are also logical in the sense of my suggestion[75]. »

Quoique les notions de types plus élévés ne soient pas examinées dans « What are Logical Notions? », cette liste ne s'arrête pas pour autant avec les relations de classes. Selon Tarski, il ressort néanmoins des cinq types présentés que les notions logiques au sens de la définition recoupent les notions logiques au sens usuel. Par le fait même, l'objectif est atteint.

[75] Alfred Tarski, « What are Logical Notions? », p. 151.

Pourtant, du point de vue de la pratique et de la compréhension contemporaines de la logique en tant que discipline, les notions logiques déterminées par ce critère s'avèrent surprenantes. D'une part, des notions qui ne relèvent intuitivement pas de la logique respectent le critère. Par exemple, la cardinalité est une propriété généralement associée aux mathématiques et non à la logique. D'autre part, des notions jouant un rôle aussi fondamental que les valeurs de vérité, les fonctions de vérité ou encore les quantificateurs ne semblent pas respecter le critère. Le cadre d'analyse que se donne Tarski — la hiérarchie des types de la théorie des ensembles — explique l'exclusion des valeurs de vérité et des fonctions de vérité ainsi que des quantificateurs. Ces objets ne prennent pas place dans une telle hiérarchie et sont conséquemment exclus d'office. Les premières sont trop élémentaires alors que les seconds sont trop généraux.

Dans « What are Logical Notions? », Tarski suggère que les valeurs de vérité, les fonctions de vérité et les quantificateurs sont bel et bien des notions logiques dans la mesure où ils peuvent être construits à partir d'autres notions logiques au sens du critère. Par exemple, il suffit d'identifier les valeurs de vérité respectivement à la classe universelle et à la classe vide. D'un point de vue strictement mathématique, cette solution est satisfaisante à un détail près :

> There is a minor technical problem: the particular identification suggested only works if the domain is non-empty (otherwise True and Flase coincide), so if one is prepared to admit the empty domain another identification is required. This can be solved by moving to a higher type which always constains at least two logical constants.[76]

En contrepartie, elle l'est beaucoup moins d'un point de vue philosophique, car, selon Simons, elle met en évidence la capacité du cadre conceptuel de Tarski à fournir une caractérisation des notions logiques, mais aussi son incapacité à expliquer ce qui les distingue intrinsèquement. La solution est artificielle puisque l'identification des valeurs de vérité à des notions logiques est principalement conventionnelle :

> (...) any other two objects would have done for the truth-values, as far as their structural role is concerned. So why were logical objects chosen? Presumably because we want to say

[76] Peter Simons, *op. cit.*, p. 24.

> that the True and the False are in some sense independent of matters of fact, themselves logical. But then we have no explication within Tarski's framework for why we are so convinced of this: either this framework then builds on intuitions which it cannot stand for, or it must presuppose a more basic account of these constants, and hence not be the full story.[77]

De plus, les valeurs de vérité n'ont tout simplement pas leur place dans la hiérarchie des types de Tarski : « Since the semantic categories of the types in which Tarski's logic are to be found all presuppose the role of denoting, any attempt to find a place for the truth-values in the hierarchy of Tarskian logic objects is in my view mistaken[78]. »

Nonobstant l'importance de ces considérations sur l'extensionalité du critère, elles sont sous-tendues par un autre problème beaucoup plus fondamental qui relève du rôle même de la logique. Traditionnellement, et Tarski adhère à ce point de vue, l'étude des arguments valides fut le propre de la logique en tant que discipline. Or, tant le concept intuitif de conséquence logique que le concept formel reposent sur les concepts de vérité et de fausseté. En effet, le premier stipule qu'un argument est valide si la vérité des prémisses entraîne nécessairement la vérité de la conclusion. Pour sa part, le concept formel se base sur les valeurs de vérité par le biais de son recours aux modèles. Il est alors nécessaire que les valeurs de vérité soient logiques puisque c'est le concept même de validité qui en dépend.

> Since logic is traditionally the science of valid argumentation, and no argument is valid which fails to preserve truth, we cannot except truth from the logical constants, otherwise we should have no fixed notion of validity. Since we also know there are sentences which are false, and invalid arguments which go from truths to falsehoods, we are led to accept falsehood as a logical constant too.[79]

Dans un autre ordre d'idées, la solution de Tarski au problème des notions logiques et son articulation induisent une conception inédite de la logique. En effet, elle se présente comme une extension du système géométrique le plus général. En poussant la classe des

---

[77] Ibid.

[78] Ibid., p. 25.

[79] Ibid. À la lumière de ces critiques, Simons développe par la suite une caractérisation en termes de permutations des notions logiques pour une théorie des types volontairement modeste qui n'y serait pas sujette. Cette caractérisation prend toutefois une toute autre direction, d'où son omission. Voir Peter Simons, *op. cit.*, p. 26-38.

transformations à la limite, Tarski se trouve à insérer la logique au sein de la structure d'inclusion des théories géométriques. Or, le groupe associé à la logique se trouve à être le plus grand groupe d'automorphismes : le groupe symétrique. Conséquemment, toute théorie géométrique sera une sous-théorie de la logique. Ceci est tout à fait cohérent avec le Programme d'Erlangen. Comme le souligne Tarski, plus la classe de transformations est grande, moins les notions invariantes sont nombreuses. Les notions logiques se trouvent alors à être en nombre minimal, ce qui est conforme avec la conception intuitive de la logique comme discipline fondamentale : « In this way Tarski stresses both the continuity between logic and mathematics and the greater generality of logic[80]. » À cet égard, cette conception s'avère également fidèle à la compréhension de la logique privilégiée par Tarski. D'une part, il considérait la logique comme une base conceptuelle unificatrice pour l'ensemble de la connaissance humaine[81]. D'autre part, contrairement à la plupart des mathématiciens, il ne considérait pas la logique et les mathématiques comme deux disciplines isolées, mais percevait dans l'évolution des mathématiques et de la logique des ramifications de plus en plus importantes, tant au niveau de l'objet des disciplines que des méthodes employées[82].

En contrepartie, l'utilisation que fait Tarski du Programme d'Erlangen se révèle problématique dans la mesure où elle est peu fidèle à l'esprit de Klein. Ce dernier voulait classifier les différents systèmes géométriques par le biais de notions inhérentes à chacun, c'est-à-dire les notions invariantes sous les transformations du groupe associé. En ce sens, la démarche de Tarski n'est compatible avec la vision de Klein que si la logique est appréhendée en tant que système géométrique. En plaçant la logique au sommet de l'édifice kleinien et dans la continuité de la structure d'inclusion, il ouvre la porte à une telle conception. Néanmoins, la tâche de la logique telle qu'envisagée par Tarski s'avère

---

[80] Peter Simons, *op. cit.*, p. 18.

[81] Solomon Feferman, « Tarski's Conception of Logic », p. 1.

[82] Ibid., p. 10.

incompatible avec les buts de l'étude de la géométrie. De plus, l'application du Programme d'Erlangen à la logique pose problème puisque la portée de la suggestion de Tarski s'avère limitée. En effet, elle ne considère que la logique classique et se limite explicitement au premier ordre quoique rien n'indique que l'approche soit incompatible avec les ordres supérieurs. Une application fidèle de la pensée de Klein eût plutôt cherché à classifier les différentes théories logiques.

La finalité première du Programme d'Erlangen se résumait à classifier les systèmes géométriques dont Klein déplorait la trop grande quantité et diversité. La proposition de Tarski semble reposer sur une motivation d'une toute autre nature. En effet, elle pourrait être interprétée comme une tentative d'imposer la logique classique du premier ordre comme la véritable logique, c'est-à-dire en tant que système fondamental, voire absolu. Ce point de vue serait d'ailleurs parfaitement compatible avec l'approche privilégiée dans « What are Logical Notions? ». Tarski propose une caractérisation de la logique coextensive avec la pratique courante. Or, malgré l'existence de nombreux systèmes alternatifs, force est d'admettre que, à l'instar de la géométrie euclidienne, la logique classique occupe toujours une position centrale. De plus, les concepts auxquels fait référence le critère de Tarski appuient une telle interprétation. L'invariance sous les permutations du monde confère un caractère immuable, absolu et objectif. Dans cette optique, le recours au Programme d'Erlangen prend la forme d'un argument essentiellement rhétorique. Son rôle se restreint à appuyer une position donnée.

Dans la perspective plus globale de l'œuvre de Tarski, cette emphase sur la logique classique du premier ordre s'explique difficilement. Tarski avait sans aucun doute une connaissance approfondie des logiques non classiques, et plus particulièrement des logiques intuitionniste et multivalentes. Par exemple, Tarski formula une interprétation topologique de la logique intuitionniste. Ses liens avec l'école de Lvov-Warsaw, mais principalement ses travaux sous la tutelle et en collaboration avec Lukasiewicz abondent également en ce sens. De plus, si le statut des logiques non classiques s'avérait nébuleux au moment de leurs premiers balbutiements, il était beaucoup mieux établi au moment où Tarski présenta sa caractérisation pour la première fois en 1966. Elles ne pouvaient plus être balayées du revers de la main.

Tarski était toutefois réticent à exprimer explicitement ses positions philosophiques et à laisser ces dernières influencer ses travaux mathématiques et logiques. « Tarski was very reticent about expressing his philosophical opinions in print, though this does not mean he had none[83]. » Sa position pourrait dans une certaine mesure être qualifiée de pragmatique comme le suggère indirectement Wolenski : « (...) it was not a problem for Tarski that his 'private' philosophical opinions did not fully agree with his own research practice in logic and mathematics (...)[84]. » « Tarski did not confine the repertoire of methods used in metamathematics to finistic ones, but admitted any way of proving theorems if it yielded interesting results[85]. »

Finalement, l'approche de Tarski s'avère incompatible avec des domaines variables. Elle repose intrinsèquement sur un unique domaine fixé et s'avère en ce sens limité. Toutefois, il n'est pas impossible que cette limitation n'en soit pas réellement une dans l'optique de Tarski, mais qu'elle soit plutôt une conséquence de ses positions philosophiques sur la nature de la logique. « Tarski was in fact rather reticent about relativizing concepts such as truth to a domain or a structure (...) It is quite possible that when Tarski spoke of the 'world' he indeed meant the term as a constant, standing for all actually existing individuals[86]. » Ceci étant dit, la question d'une généralisation de la proposition de Tarski à des domaines variables n'en demeure pas moins parfaitement envisageable. Il s'avère cependant que de telles généralisations sont sujetttes à d'autres problèmes et ne relèvent pas de l'esprit original de l'idée de Tarski[87].

---

[83] Peter Simons, *op. cit.*, p. 17.
[84] Jan Wolenski, *op. cit.*, p. 192.
[85] Ibid., p. 191.
[86] Peter Simons, *op. cit.*, p. 22.
[87] Ibid., p. 23.

En se limitant à un unique domaine, Tarski évite des problèmes reliés à la cohérence interne de sa proposition. Avec plusieurs domaines, une notion donnée pourrait se caractériser comme logique sur l'un de ces domaines et non logique sur l'autre. Simons souligne deux exemples simples. Premièrement, la classe universelle varie en fonction du domaine. Étant donnés deux domaines D, D' tels que $D \subset D'$, la classe universelle sur D ne sera pas logique sur D'. Deuxièmement, certaines notions, tout en demeurant logique sur divers domaines, verront leur signification varier en fonction du domaine. Par exemple, la propriété d'être une classe de cinq éléments est évidemment une propriété logique selon le critère de Tarski. Par contre, elle prendra la forme de la classe universelle sur un domaine dont la cardinalité est précisément cinq, de la classe nulle sur un domaine dont la cardinalité est inférieure à cinq et de plus d'une classe sur un domaine de cardinalité supérieure à cinq.

En conclusion, Tarski s'inspire du Programme d'Erlangen afin de distinguer sémantiquement les notions logiques des notions non logiques. Alors que Klein proposait de classifier les théories géométriques selon leurs groupes d'automorphismes, Tarski avance que la logique pourrait également être associée à un groupe, à savoir le groupe de symétrie du domaine fixé a priori. Les notions logiques se caractériseraient donc par leur invariance sous les permutations de ce domaine. Le concept de conséquence logique peut se baser sur cette caractérisation dans la mesure où elle vaut pour des langages arbitraires. En ce sens, la problématique des objets logiques est motivée par la recherche d'un concept de conséquence logique approprié chez Tarski.

Contrairement à l'approche de Mautner, l'approche sémantique développée par Tarski eut un impact indéniable sur l'évolution de la problématique des objets logiques. En effet, d'autres philosophes mirent à leur de l'avant des caractérisations des objets logiques en termes d'invariance sémantique qui s'inscrivent directement dans la continuité du corpus logique de Tarski.

Chapitre IV : Les héritiers de Tarski

La publication posthume de l'article « What are Logical Notions? » en 1986 suscita un renouveau de la problématique des objets logiques. Depuis, un critère en termes d'invariance sémantique s'est définitivement imposé comme une voie à considérer en vue d'une caractérisation appropriée. À cet égard, quelques philosophes adoptèrent le cadre conceptuel sémantique privilégié par Tarski afin de développer leurs propres caractérisations. Malgré cette filiation directe, les approches de Gila Sher, Vann McGee et Solomon Feferman se distinguent de celle de Tarski principalement à trois niveaux.

La première différence relève du Programme d'Erlangen. Alors qu'il jouait un rôle de premier plan dans les approches de Mautner et de Tarski, le Programme d'Erlangen n'est nullement invoqué par les héritiers de Tarski, que ce soit pour motiver le critère ou pour suggérer une analogie avec la géométrie. Deuxièmement, Sher, McGee et Feferman adoptent la compréhension de la logique et inscrivent donc leurs analyses dans un contexte conséquent. La hiérarchie des types de la théorie des ensembles est remplacée par la théorie des modèles ou encore une théorie des types moderne. La troisième différence est fonction d'une appréhension des objets logiques beaucoup plus restreinte.

Le présent chapitre se penchera donc tout d'abord sur la caractérisation des objets logiques dans la perspective des quantificateurs généralisés et du concept de conséquence logique développée par Sher. Il sera par la suite question de la proposition de McGee. Ce dernier voulut appuyer la position originale de Tarski. Il développa à cette fin un langage dont tous les connecteurs sont logiques et montra que toute opération invariante sous les permutations peut être définie au moyen de ce langage. Ceci l'amène notamment à formuler la thèse de Tarski-Sher. Finalement, la position de Feferman sera examinée. Afin de trancender certains problèmes philosophiques, il formule un critère de démarcation entre les objets logiques et non logiques qui met en évidence la possibilité d'un point de vue structurel.

4.1 Les quantificateurs généralisés et l'invariance

La problématique des quantificateurs généralisés se trouve au cœur de *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint* de Gila Sher. Ils y sont utilisés de façon à développer une conception plus large et inédite de la logique. Cette conception a pour motivation la pleine réalisation des idées philosophiques sous-jacentes aux travaux sémantiques de Tarski. Si cet objectif est certes secondaire pour la présente étude, il en est tout autrement des moyens mis en œuvre par Sher pour l'atteindre. En effet, l'origine de la proposition de Sher est double en ce qu'elle est tributaire des travaux de Tarski, mais aussi de ceux de Mostowski. Bien que Sher développa sa proposition indépendamment de celle de Tarski, elle s'inscrit indirectement dans sa lignée dans la mesure où elle fut motivée par le concept de conséquence logique. De plus, les travaux fondateurs de Mostowski sur les quantificateurs généralisés motivèrent le développement d'une caractérisation sémantique des objets logiques.

Dans cette optique, il sera dans un premier temps question desdits travaux de Mostowski et principalement de sa caractérisation des quantificateurs logiques. Dans un deuxième temps, la proposition de Sher sera examinée.

4.1.1 Mostowski et les quantificateurs logiques

La notion de quantificateur généralisé fut originellement introduite par Andrzej Mostowski dans l'article « On a Generalization of Quantifiers ». Mostowski construisit des opérateurs qui généralisaient les quantificateurs logiques traditionnels, c'est-à-dire les quantificateurs universel et existentiel. Or, ces nouveaux opérateurs mirent de l'avant une nouvelle conception de la notion de quantificateur qui amena Mostowski à formuler un critère afin de distinguer les quantificateurs logiques et non logiques.

Mostowski développa sa conception des quantificateurs en généralisant la conception traditionnelle inaugurée par Frege. En effet, chez Frege, les quantificateurs universel et existentiel représentent des propriétés quantitatives de second niveau, c'est-à-dire des propriétés quantitatives de propriétés de premier niveau. Autrement dit, un quantificateur est un prédicat de second niveau prenant comme unique argument un prédicat de premier niveau. Cette conception relie alors directement la vérité d'une formule quantifiée à la cardinalité de son extension. Les quantificateurs universel et existentiel peuvent donc s'interpréter comme des fonctions sur les ensembles qui dépendent de la cardinalité des ensembles qu'elles prennent comme arguments. Ainsi, une proposition quantifiée universellement est vraie si son extension est l'univers en entier alors que une proposition quantifiée existentiellement est vraie si son extension est plus grande que 0[88].

Définition : i) Le *quantificateur universel* est une fonction $\forall$ telle que, étant donné un ensemble A, $\forall(A)$ est elle-même une fonction $f:\wp(A)\to\{1,0\}$ où pour tout $B\subset A$, $f(B)=\begin{cases}1 \text{ si } |A-B|=0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

ii) Le *quantificateur existentiel* est une fonction $\exists$ telle que, étant donné un ensemble A, $\exists(A)$ est une fonction $g:\wp(A)\to\{1,0\}$ où pour tout $B\subset A$, $g(B)=\begin{cases}1 \text{ si } |B|>0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

Cette assimilation due à Frege des quantificateurs traditionnels à la cardinalité d'ensembles est la pierre de touche de la généralisation de Mostowski. En effet, étant donné un quantificateur Q, une fonction $t^Q:\wp(A)\to\{0,1\}$ peut lui être associée. Cette fonction détermine les sous-ensembles $B\subset A$ sur lesquels le quantificateur Q est vrai, à savoir les

[88] Gila Sher, *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint*, Cambridge, MIT Press, Bradford Book, 1991, p. 11.

sous-ensembles qui respectent la condition de cardinalité implicite à Q. La fonction t^Q peut alors se définir par une fonction $\alpha \rightarrow t_\alpha^Q$ où α est un nombre cardinal et où t_α^Q est elle-même une fonction spécifiant la cardinalité requise par un ensemble B dans un univers de cardinalité α pour que $Q(B)$ soit vrai. Étant donné un sous-ensemble $B \subset A$ tel que $|B| = \beta$, les fonctions associées aux quantificateurs traditionnels sont les suivantes[89] :

i) $t_\alpha^\forall(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } |A - B| = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

ii) $t_\alpha^\exists(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

En mettant en commun la définition précédente de quantificateurs et leurs fonctions associées, une définition alternative est obtenue.

Définition : Soient des ensembles A et B tels que $B \subset A$.

i) $\forall_A(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } t_{|A|}^\forall(|B|) = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

ii) $\exists_A(B) = \begin{cases} 1 \text{ si } t_{|A|}^\exists(|B|) = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Cette définition présente l'avantage de traiter uniformément les deux quantificateurs traditionnels. L'intuition de Mostowski fut de remarquer que d'autres fonctions de cette forme étaient possibles et que celles-ci pourraient fort bien décrire à leur tour des quantificateurs. Ceux-ci seraient en tout point conformes à la conception de Frege, mais ils n'en seraient pas moins différents des quantificateurs traditionnels de la logique du premier ordre. La notion de quantificateur généralisé telle qu'introduite par Mostowski repose donc sur une pleine exploitation de la correspondance entre les quantificateurs et les fonctions de cardinalité.

À la lumière de ces considérations, les quantificateurs de Mostowski se définissent naturellement en généralisant la définition frégéenne. Soient I un ensemble et $I^* = I \times I \times \ldots$ son produit cartésien infini.

---

[89] Ibid.

Définition : Une fonction $F{:}I^{*} \rightarrow \{0,1\}$ est une *fonction propositionnelle sur* I s'il existe un ensemble fini K d'entiers tel que, pour tout $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in I^{*}$, si pour tout $j \in K$, $x_j = y_j$, alors $F(x) = F(y)$.

Définition : Soient I' un ensemble qui n'est pas nécessairement différent de I et une fonction $\varphi{:}I \rightarrow I'$. Si $x = (x_1, x_2, \ldots) \in I^{*}$, alors $\varphi(x)$ désigne la suite $(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots)$. Si F est une fonction propositionnelle, alors F_{φ} désigne la fonction propositionnelle sur I' telle que $F_{\varphi}(\varphi(x)) = F(x)$.

Définition : Un *quantificateur limité à* I est une fonction $Q{:}\{0,1\}^{I} \rightarrow \{0,1\}$ — c'est-à-dire des fonctions propositionnelles F à une variable sur I vers $\{0,1\}$ — telle que, pour tout F et pour toute permutation φ de I, $Q(F) = Q(F_{\varphi})$.

Ainsi, Mostowski développe une logique du premier ordre au sens de Frege, mais qui se distingue de la logique traditionnelle en ce qu'elle dispose d'un nombre arbitraire de prédicats de second niveau et non pas des deux seuls quantificateurs universel et existentiel. En effet, toute fonction est susceptible de décrire un quantificateur logique en autant qu'elle respecte les deux conditions implicites aux définitions. La première condition caractérise syntaxiquement l'action d'un quantificateur logique. Chez Frege, un quantificateur permet de construire une formule du premier ordre à partir d'une formule propositionnelle en liant toutes ses variables libres. Mostowski exige donc que ses quantificateurs généralisés permettent de construire des propositions à partir de fonctions propositionnelles. La deuxième condition, a quant à elle, une portée sémantique. Un quantificateur logique ne doit pas établir de distinction entre les éléments de l'ensemble I. Mostowski interprète cette condition en exigeant l'invariance des quantificateurs sous les permutations de I dans un modèle donné.

Dans le même ordre d'idées, Mostowski donne une caractérisation beaucoup plus concrète des quantificateurs logiques. Il les identifie effectivement aux quantificateurs de cardinalité.

Théorème : Soient S l'ensemble des paires (m,n) de nombres cardinaux tels que $m+n=|I|$, T une fonction $S \to \{0,1\}$ et $Q_T(F)=T(F^{-1}(1),F^{-1}(0))$. Alors, Q_T est un quantificateur limité à I et pour tout quantificateur limité à I, il existe une fonction T tel que $Q_T = Q$.

Selon Sher, la conception des quantificateurs de Mostowski est donc la suivante :

> [S]yntactically, a quantifier is an operator binding a formula by means of an individual variable. Semantically, it is a function that assigns to every universe A an A-*quantifier* (or a *quantifier on* A), Q_A. Q_A is itself a function from subsets of A into $\{T,F\}$. (...) More precisely, a Mostowskian quantifier is a quantifier Q satisfying [the syntactical condition] and such that for every set A, Q_A satisfies [the semantic condition], and if A_1, A_2 are sets of the same cardinality, then Q_{A_1} and Q_{A_2} have the same cardinality couterpart.[90]

Sous l'impulsion de cette nouvelle conception des quantificateurs, la logique du premier ordre se trouve à être elle-même conçue différemment. De nouvelles formules peuvent être formées grâce aux nouveaux opérateurs introduits par Mostowski. Les définitions de satisfaction et de modèle de Tarski peuvent être facilement adaptées de façon à rendre compte de ces nouvelles formules. De plus, quoique Mostowski ne mena son analyse que pour les prédicats unaires, la logique étendue qui en résulta peut être adaptée de façon à s'accommoder de prédicats à n arguments, les conditions syntaxique et sémantique de Mostowski n'excluant absolument pas a priori les prédicats à deux, trois, quatre, etc. arguments.[91]

La logique étendue telle qu'elle prend forme dans les travaux de Mostowski ne peut toutefois pas être généralisée naturellement de façon à rendre compte de tout type de quantificateurs. En effet, les quantificateurs relationnels s'avèrent problématiques selon

---

[90] Ibid., p. 15.

[91] Sher présente notamment une description détaillé d'une logique du premier ordre incorporant des quantificateurs généralisés à un et deux arguments. Gila Sher, *op. cit.*, p. 28.

Sher. Syntaxiquement, la caractérisation de Mostowski est tout à fait convenable. Un quantificateur relationnel à un argument est un opérateur qui construit une formule bien formée à partir d'une formule propositionnelle à n variables libres $\langle x_1,\ldots,x_n \rangle$. Par exemple, si $\Phi(x_1,x_2)$ est une formule où x_1,x_2 sont des variables libres, alors $(Q^2 x_1,x_2)\Phi(x_1,x_2)$ est une formule où x_1,x_2 sont liées au quantificateur Q^2. En contrepartie, la caractérisation sémantique par le biais de la condition d'invariance est beaucoup plus délicate. En effet, l'interprétation de la seconde condition selon laquelle un quantificateur ne doit pas introduire de distinction entre les éléments du domaine étudié se révèle ambiguë. Mostowski associait cette condition à l'invariance sous toutes les permutations du domaine. Or, si les quantificateurs à n arguments sont des fonctions sur les sous-ensembles d'un ensemble A, les quantificateurs relationnels sont des fonctions sur les sous-ensembles du produit cartésien $A \times A$. Quelles permutations entreront en ligne de compte? Les permutations de A, celles de $A \times A$ ou encore celles de $A \times A$ induites par les permutations de A?

Cette ambiguïté incite Sher à remettre en question la condition sémantique privilégiée par Mostowski dans sa caractérisation des quantificateurs généralisés logiques.

> But the question we have to confront first concerns (Mostowski's semantic condition) itself. Why should (it) be the semantic condition on logical quantifiers? (...) Mostowski (...) have [not] justified [his] "choice" of invariance under permutations as the characteristic trait of logical quantifiers. So far I too have uncritically accepted [his] criterion. But in view of the general inquiry we have undertaken in this work, it is now time to rethink the issue of logicality.[92]

L'étude des quantificateurs généralisés amène ainsi Sher à développer à son tour une caractérisation des objets logiques de façon à outrepasser les lacunes résultant des ambiguïtés inhérentes aux travaux de Mostowski. Celle-ci sera inspirée par les travaux de Tarski sur le concept de conséquence logique et non pas par ceux sur les notions logiques, contrairement à ce que l'on serait porté à croire.

---

[92] Gila Sher, *op. cit.*, p. 34.

4.1.2 Sher et la recherche d'un critère pour les objets logiques

Contrairement à la logique du premier ordre traditionnelle, la logique étendue de Mostowski réalise pleinement la sémantique de Tarski. En contrepartie, la caractérisation des quantificateurs logiques sous-jacente rend difficilement compte des quantificateurs relationnels. Sher remet donc en question la condition d'invariance sous les permutations et se propose de développer une caractérisation alternative des objets logiques.

À l'instar de Tarski, Sher ne tente pas de découvrir la signification véritable des objets logiques, voire leur idée platonicienne. Son point de vue n'en demeure pas moins foncièrement différent. En effet, elle aborde la problématique par l'entremise du rôle de la logique : « If we identify a central role of logic, and relative to that role, ask what expressions can function as logical terms, we will have found a perspective that makes our question answerable, and significantly answerable at that[93]. » Sher adopte à cet égard la conception de la logique qui découle des recherches sémantiques de Tarski car elle considère qu'elles reposent sur une compréhension approfondie des objectifs qui sous-tendent l'entreprise logique. « Tarski's papers reveal the forces at work during the inception of modern logic; at the same time, the principles developped by Tarski in the 1930s are still the principles underlying logic in the early 1990s[94]. » La théorie des modèles se développa comme une évolution naturelle de la compréhension originale de la sémantique en utilisant du concept de vérité mis de l'avant par « Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen » comme paradigme et principalement sous l'impulsion d'un Tarski transplanté à Berkeley. En ce sens, Sher peut donc travailler dans la perspective propre aux travaux sémantiques de Tarski tout en étant profondément enracinée dans le contexte contemporain de la théorie des modèles.

---

[93] Ibid., p. 36.

[94] Ibid.

La proposition de Sher s'articule en trois temps. Premièrement, la conception de la logique mise en place par Tarski est analysée à la lumière du concept de conséquence logique. Dans un deuxième temps, une distinction entre termes logiques et non logiques est élaborée à la lumière des exigences du concept de conséquence logique. Finalement, cette distinction est enchâssée dans un critère logico-mathématique fidèle au cadre prescrit par la théorie des modèles.

4.1.2.1 L'entreprise logique selon Tarski

Dans un premier ordre d'idées, Sher se penche sur le rôle de la logique tel qu'envisagé dans le cadre des recherches sémantiques de Tarski de façon à identifier une base sur laquelle caractériser les termes logiques. Ceci l'amènera à étudier plus spécifiquement le concept de conséquence logique et, par le fait même, à développer ladite caractérisation en fonction de celui-ci.

Dans cette perspective, la motivation du critère de Sher repose sur des bases totalement différentes de celles de Tarski. Alors que celui-ci faisait appel au Programme d'Erlangen pour justifier le choix de l'invariance comme propriété caractéristique des notions logiques, il n'en est nullement question dans *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint*. La motivation y est plutôt interne. Le critère s'obtient par l'entremise d'une analyse de la logique en fonction des exigences induites par la pratique usuelle, c'est-à-dire les techniques et les objectifs lui étant propres.

Tarski conçoit la tâche de la logique à travers le prisme de la sémantique. Au cours des années 1930, il publia une série d'articles par l'entremise desquels il développa un cadre inédit et novateur pour l'étude des questions logiques. Le projet sémantique se déploie en deux volets. Le premier consiste à définir un concept général de vérité pour des langages formels afin de garantir l'aptitude du système privilégié à mener le projet logique à terme. Encore plus important est le second volet dont l'objectif est de définir les concepts logiques de vérité, de consistante, de complétude, etc. Le concept de conséquence logique est alors la pierre de touche de cette approche dans la mesure où il sous-tend ces notions fondamentales :

> Once the definition of "logical consequence" is given, we can easily obtain not only the notion of deductive system but also those of a logically true sentence; logically equivalent sets of sentences; an axiom system of a set of sentences; and axiomatizability, completeness, and consistency of a set of sentences.[95]

Ainsi, le rôle de la logique se résume à développer et à étudier des systèmes déductifs. Autrement dit, étant donné un système formel L, quelles conséquences logiques peuvent en être déduites? Avec l'article « On the Concept of Logical Consequence », Tarski proposa une définition sémantique dudit concept. À cet égard, le moteur de l'analyse de Sher sera le concept de conséquence logique tel que défini par Tarski.

Tel que mentionné auparavant, afin de définir un concept de conséquence logique approprié, c'est-à-dire coextensif avec le concept intuitif, Tarski identifia les caractéristiques intrinsèques de ce dernier et les posa comme conditions d'une définition acceptable. Sher reprend ces deux conditions comme point de départ de sa caractérisation des termes logiques.

> (C1) Si X est une conséquence logique de K, alors X est une conséquence nécessaire de K, c'est-à-dire qu'il est impossible que tous les énoncés de K soient vrais et que X soit faux.
>
> (C2) Toutes les conséquences nécessaires ne sont pas des conséquences logiques. La relation de conséquence entre un ensemble d'énoncés K et un énoncé X doit être basée sur la relation formelle entre les énoncés de K et X.

---

[95] Ibid., p. 38.

Aux yeux de Sher, ces deux conditions s'avèrent d'une importance capitale puisqu'elles instaurent des limites sur les accomplissements potentiels du rôle de la logique.

> I think conditions (C1) and (C2) on the key concept of logical consequence delineate the scope as well as the limit of Tarski's enterprise : the development of a conceptual system in which the concept of logical consequence ranges over *all* formally necessary consequences and nothing else.[96]

Sher considère que cette définition de conséquence logique formulée par Tarski respecte les conditions (C1) et (C2) dans le cas de la logique du premier ordre. En contrepartie, l'objectif implicite de la logique ne sera pleinement atteint que si toutes les conséquences logiques d'un système donné peuvent être identifiées. Sher pose ainsi la question de l'existence de conséquences respectant les deux conditions, mais indétectables dans le système logique du premier ordre. Le lien avec le projet de Mostowski est immédiat. L'introduction des quantificateurs généralisés constituant une extension de la logique du premier ordre, le concept de conséquence logique s'applique évidemment à ces nouvelles entités. Le questionnement de Sher se résume donc à une étude des conséquences associées aux quantificateurs généralisés de façon à déterminer si elles sont inédites. En adoptant cet angle d'attaque, Sher est amenée à élaborer une caractérisation des objets logiques. « The question, "What is the full scope of logic?" I will ask in the form: What is the widest notion of a logical term for which the Tarskian definition of "logical consequence" gives results compatible with (C1) and (C2)[97]? »

Dans cette optique, la caractérisation des objets logiques développée dans *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint* s'inscrit dans la continuité de « On the Concept of Logical Consequence » et ce, au même titre que « What are Logical Notions? » Toutefois, les perspectives de Sher et Tarski sont fort différentes. Tarski recherchait une caractérisation des objets logiques afin de définir le concept de conséquence logique pour

---

[96] Ibid., p. 44.

[97] Ibid.

la logique du premier ordre. Pour sa part, Sher s'intéresse à ce problème afin d'étendre la notion de conséquence logique en fonction des quantificateurs généralisés.

4.1.2.2 Termes logiques et termes non logiques

Dans un deuxième ordre d'idées, Sher tente de développer une caractérisation des termes logiques. La distinction entre les termes logiques et non logiques trouve son origine dans le concept de conséquence logique tel que conçu par Tarski. En effet, leurs propriétés fondamentales sont mises en évidence par le biais d'une analyse de leurs rôles respectifs dans l'identification des conséquences logiques et, plus généralement, dans le cadre sémantique de Tarski. En se basant sur cette caractérisation, Sher sera en mesure de formuler un critère qui systématisera la distinction.

Quoique Sher ne précise pas explicitement ce qu'elle entend par un terme, l'utilisation qui en est faite suggère clairement qu'il s'agit de tout élément du langage. Cette définition induit une appréhension de ce qui pourrait être logique beaucoup plus restreinte par rapport aux notions de Tarski. Les candidats potentiels se limitent aux expressions qui apparaissent dans les formules utilisées en logique.

Selon Sher, les termes non logiques se caractérisent par leur variabilité sémantique. La signification de ces termes ne leur est pas intrinsèque, mais dépend plutôt de leur interprétation dans un modèle spécifique. En ce sens, elle n'est pas constante puisqu'elle est déterminée par le modèle privilégié. La signification d'un terme non logique provient d'une fonction lui associant une dénotation dans un modèle donné; elle est fonction de ce modèle. Les termes non logiques se définissent donc de la façon suivante :

Définition : Soit $\mathcal{L}$ une logique fidèle à la conception de Tarski. $\{e_1, e_2, \ldots\}$ est un *ensemble de termes non logiques primitifs de* $\mathcal{L}$ si et seulement si pour tout ensemble A et toute fonction $D:\{e_1,e_2,...\} \rightarrow A$ qui assigne à $e_1,e_2,...$ des dénotations dans A, il existe un modèle $\mathfrak{A}$ pour $\mathcal{L}$ tel que $\mathfrak{A} = \langle A,D \rangle$.

Les termes logiques se différencient des termes non logiques précisément en ce qui a trait à leur variabilité sémantique. Toutefois, contrairement à ce que la définition précédente laisse présager, Sher ne croit pas que les termes logiques se caractérisent par une interprétation constante sur les modèles, mais plutôt par une interprétation indépendante du système de modèles. En effet, la signification d'un terme logique ne découle pas d'une fonction qui lui associe un élément d'un modèle.

> The meaning of a logical constant is not given by the definitions of particular models but is part of the same metatheoretical machinery used to define the entire network of models. The meaning of logical constants is given by *rules external to the system*, and it is due to the existence of such rules that Tarski could give his recursive definition of logic. Syntactically, the logical constants are "fixed parameters" in the inductive definition of the set of well-formed formulas; semantically, the rules for logical constants are the functions on which the definition of satisfaction by recursion (...) is based.[98]

Tel que mentionné auparavant, la distinction entre les termes logiques et non logiques trouve donc sa source dans la définition du concept de conséquence logique formulée par Tarski. Les deux conditions intuitives de nécessité et du caractère formel sont les balises de la conception des termes logiques de Sher. Or, elle se base également sur ces deux conditions de façon à formuler un critère traduisant la distinction.

Afin de satisfaire aux exigences implicites aux conditions (C1) et (C2), Sher instaure un système syntaxe-sémantique à deux volets. Toutefois, la dualité principale n'est pas l'interaction entre la syntaxe et la sémantique, mais bien celle entre les deux volets dans la mesure où chacun consiste en un système syntaxe-sémantique. La dualité entre les deux volets reflète plutôt la complémentarité des termes logiques et non logiques. Syntaxiquement, le premier volet est constitué du vocabulaire non logique et, sémantiquement, de l'appareillage des modèles. Sher l'appelle la base de la logique. Le second volet contient pour sa part la structure formelle du système, c'est-à-dire les termes

---

[98] Ibid., p. 49.

logiques et leurs équivalents sémantiques. Du point de vue syntaxique, les termes logiques permettent la construction de formules à partir d'autres termes. Sémantiquement, ce sont des fonctions prédéfinies sur les modèles de telle sorte que les propriétés formelles des éléments reflètent celles entre les termes et vice-versa. Sher considère ce second volet comme une superstructure pour la logique.

Le système global est donc le résultat de l'application de la superstructure sur la base. Syntaxiquement, les règles de construction de formules bien formées au moyen de connecteurs logiques traduisent cette application. En effet, les connecteurs sont appliqués à des termes non logiques selon certaines modalités de façon à former de nouvelles formules. Sémantiquement, il s'agit des règles pour déterminer la vérité dans un modèle.

Ce système à deux volets représente un pas de plus vers une caractérisation satisfaisante des objets logiques selon Sher.

> Now, to satisfy the conditions (C1) and (C2), it is essential that no logical term represent a property or a relation that is intuitively variable from one state of affairs to another. Furthermore, it is important that logical terms be formal entities. Finally, the denotations of logical terms need to be defined over models, so that every possible state of affairs is taken into account in determining logical truths and consequences.
>
> It appears that if we can specify a series of conditions that are exclusively and exhaustively satisfied by terms fulfiling the requirements above, we will have succeeded in defining "logical term" in accordance with Tarski's basic principles. In particular, the Tarskian definition of "logical consequence" (and the other metalogical concepts) will give correct results, all the correct results, in agreement with (C1) and (C2).[99]

Sher s'inspire des idées au cœur des travaux de Mostowski sur les quantificateurs généralisés pour formuler son critère. Comme nous l'avons vu précédemment, l'auteur de « On a Generalization of Quantifiers » exigeait qu'un quantificateur soit formel afin d'être considéré comme logique. Cette condition était interprétée par l'invariance sous les permutations. Sher propose de généraliser cette interprétation. Alors que les quantificateurs de Mostowski ne distinguaient pas les objets de l'univers s'ils sont invariants sous les permutations, les termes logiques de Sher se caractérisent pas leur invariance sous les structures isomorphes. « Generalizing Mostowski, we arrive at the notion of a logical term

---

[99] Ibid., p. 52.

as formal in the following sense: being formal is, semantically, being invariant under all nonstructural variations of models. That is to say, being formal is being invariant under isomorphic structures[100]. »

En ce qui a trait à la condition d'être nécessaire, elle sera respectée en vertu de la condition précédente. En effet, Sher associe la propriété d'être formel à la propriété d'être mathématique : « logical terms are *formal* in the sense of being essentially *mathematical*[101]. » Les termes mathématiques étant intuitivement nécessaires, toute logique admettant leur utilisation à titre de termes logiques respecterait la condition selon laquelle les conséquences logiques doivent être nécessaires. D'où la proposition de Sher : « My thesis, therefore, is this: all and only formal terms, terms invariant under isomorphic structures, can serve as logical terms in a logic based on Tarski's ideas.[102] »

À la lumière de ces considérations, Sher dispose d'une caractérisation des termes logiques. Elle enchâsse celle-ci dans un critère qui prend la forme des cinq conditions suivantes[103] :

A- Syntaxiquement, une constante logique C consiste en un prédicat à n arguments ou en une expression fonctionnelle de niveau 1 ou 2.

B- Une constante logique C est définie par une seule fonction extensionnelle et est identifiée à cette extension.

C- Une constante logique C est définie sur des modèles par une fonction f_C telle que, étant donné un modèle $\mathfrak{A}$ (avec un univers A) inclus dans son domaine :

a) si C est un prédicat à n arguments de premier niveau, alors $f_C(\mathfrak{A})$ est un sous-ensemble de A^n.

b) si C est une expression fonctionnelle à n arguments de premier niveau, alors $f_C(\mathfrak{A})$ est une fonction $A^n \to A$.

[100] Ibid., p. 53.
[101] Ibid.
[102] Ibid.
[103] Ibid., p. 54.

c) si C est un prédicat à n arguments de deuxième niveau, alors $f_C(\mathfrak{U})$ est un sous-ensemble de $B_1 \times \ldots \times B_n$ où $B_i = \begin{cases} A & \text{si } i(C) \text{ est un individu} \\ P(A^m) & \text{si } i(C) \text{ est un } m\text{-prédicat} \end{cases}$.

d) si C est une expression fonctionnelle à n arguments de deuxième niveau, $f_C(\mathfrak{U})$ est une fonction $B_1 \times \ldots \times B_n \to B_{n+1}$ où $B_i = \begin{cases} A & \text{si } i(C) \text{ est un individu} \\ P(A^m) & \text{si } i(C) \text{ est un } m\text{-prédicat} \end{cases}$

D- Une constante logique C est définie sur tous les modèles d'une théorie logique.

E- Une constante logique C est définie par une fonction $f_C(\mathfrak{U})$ invariante sous les structures isomorphes, c'est-à-dire une structure respectant les conditions suivantes :

a) soient C un prédicat à n arguments de premier niveau, $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ des modèles avec des univers A, A' respectivement ainsi que $\langle b_1,\ldots,b_n \rangle \in A^n$, $\langle b'_1,\ldots,b'_n \rangle \in A'^n$. Si $\langle A, \langle b_1,\ldots,b_n \rangle \rangle$ et $\langle A', \langle b'_1,\ldots,b'_n \rangle \rangle$ sont isomorphes, alors $\langle b_1,\ldots,b_n \rangle \in f_C(\mathfrak{U})$ si et seulement si $\langle b'_1,\ldots,b'_n \rangle \in f_C(\mathfrak{U}')$.

b) soient C un prédicat à n arguments de deuxième niveau, $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}'$ des modèles avec des univers A, A' respectivement ainsi que $\langle D_1,\ldots,D_n \rangle \in B_1 \times \ldots \times B_n$, $\langle D'_1,\ldots,D'_n \rangle \in B'_1 \times \ldots \times B'_n$. Si $\langle A, \langle D_1,\ldots,D_n \rangle \rangle$ et $\langle A', \langle D'_1,\ldots,D'_n \rangle \rangle$ sont isomorphes, alors $\langle D_1,\ldots,D_n \rangle \in f_C(\mathfrak{U})$ si et seulement si $\langle D'_1,\ldots,D'_n \rangle \in f_C(\mathfrak{U}')$.

c) similairement pour les expressions fonctionnelles.

La condition (A) reflète le caractère fondamentalement structurel des termes logiques au sein d'un langage. Par le fait même, cette condition stipule que les individus ne sont pas des termes logiques. La condition (B) garantit la rigidité des termes logiques. La signification d'un terme logique, c'est-à-dire la valeur de la fonction extensionnelle, est fixée a priori dans le métalangage. Par le fait même, il n'y a qu'un monde possible; la signification de tous les termes logiques est fixée par leurs définitions. La condition (C), quant à elle, sert de lien entre les termes logiques et les modèles. En étant définis par des fonctions fixées a priori des modèles vers des structures dans ces modèles, les termes logiques s'avèrent constants nonobstant le système logique privilégié ou sa présentation particulière. À cet égard, la condition (D) fait en sorte que tous les modèles possibles soient considérés dans l'identification des vérités et conséquences logiques de façon à garantir leur nécessité. Finalement, la condition (E) traduit l'exigence selon laquelle les termes logiques doivent être formels ainsi que l'interprétation de cette exigence sous la forme d'un critère : est formel tout terme invariant sous les structures isomorphes. Le critère de Sher induit donc la définition suivante :

Définition : C est un *terme logique* si et seulement si C est un connecteur vérifonctionnel ou si C satisfait les conditions (A)-(E).

À la lumière de cette définition, Sher dispose d'un critère tangible et adapté à sa conception de la logique afin de déterminer quels termes sont logiques. D'une part, les objets propres à la logique du premier ordre traditionnelle respectent le critère. Les notions non standards qui suscitèrent l'investigation le respectent également. Plus précisément, les quantificateurs généralisés de Mostowski et les quantificateurs relationnels sont logiques au sens de Sher. D'autre part, les conditions (B), (C) et (D) traduisent une des idées sous-jacentes au système à double volet, c'est-à-dire l'application des modèles sur les termes logiques. De plus, ce critère s'avère fidèle à la compréhension contemporaine de la logique. Les termes logiques qu'il détermine sont reliés à l'étude des arguments valides.

Le critère de Sher a pour première conséquence d'étendre la conception des objets logiques pour la logique du premier ordre. Or, indirectement, c'est l'appréhension même de la logique qui change.

4.1.2.3 Une nouvelle conception de la logique

À la lumière du critère de Sher pour caractériser les objets logiques, de nouvelles notions viennent se greffer au corpus standard de la logique du premier ordre. De nouvelles conséquences logiques faisant appel à celles-ci peuvent alors être identifiées. Selon Sher, la principale conséquence de cette compréhension plus vaste des objets logiques est une conception inédite de la logique elle-même.

> "First-order logic" is now a schematic title for any system of logic with a complete collection of truth-functional connectives and a nonempty set of logical constants. It is open to us, the user, to choose which particular set of constants satisfying (LT) we want to include in our first-order system. The logic itself is an open framework: any term may be plugged in as a logical constant, provided this is done in accordance with conditions (A) to (E). (...) The general framework of logic based on this conception I will call *Unrestricted Logic* (UL). (...) A particular system of [unrestricted] logic is simply *a logic*.[104]

Définition : *L* est une *logique particulière* de UL si et seulement si *L* est un système du premier ordre de UL muni (i) d'un ensemble de connecteurs vérifonctionnels et (ii) d'un ensemble non vide de termes logiques différents de ceux dans (i) qui respectent le critère de Sher.

La conception implicite à la logique non restreinte apporte une réponse à la problématique de départ. D'une part, un système logique *L* du premier ordre de UL respecte les conditions (C1) et (C2) dans la mesure où ses conséquences logiques sont formelles et nécessaires. Conséquemment, les conséquences logiques sont indépendantes d'un quelconque contenu empirique. D'autre part, cette notion de conséquence logique étendue joue un rôle crucial puisqu'elle fait en sorte que la logique non restreinte réalise le plein potentiel inhérent aux principes sémantiques de Tarski. Selon Sher, la logique du premier ordre traditionnelle ne permet pas d'obtenir toutes les conséquences formelles et nécessaires. Par le fait même, l'entreprise logique telle qu'envisagée par Tarski ne peut être menée à terme dans le cadre standard. Le système de Sher fut conçu de façon à combler cette carence. En effet, « [t]he broadest notion of logical term compatible with the intuitive concept of "logical consequence" is that of (LT). (LT) redefines the bound of logic, leading to the unrestricted system of UL[105]. »

---

[104] Ibid., p. 59.

[105] Ibid., p. 61.

À l'instar de la proposition au cœur de « What are Logical Notions? », la caractérisation des termes logiques développée par Sher s'inscrit dans la continuité des recherches sémantiques de Tarski sur le concept de conséquence logique. Elle adopte les conditions de nécessité et du caractère formel de façon à fixer les balises de son analyse. Toutefois, l'approche de Sher se distingue fondamentalement de celle de Tarski au niveau de son articulation. L'approche de ce dernier était motivée par la question du concept de conséquence logique et prenait la forme d'une extension du Programme d'Erlangen de Klein. De son côté, celle de Sher trouve sa source dans les problèmes liés à l'introduction originale des quantificateurs généralisés par Mostowski. Elle se déploie par la suite sous la forme d'une étude du cadre conceptuel sémantique instaurée par Tarski.

Si les approches de Tarski et Sher reposent sur des bases fort différentes, cette dernière ne résout pas pour autant toutes les lacunes de la première. Son principal avantage est certainement d'être compatible avec des domaines variables. En contrepartie, elle ne tient pas compte, et ce de par sa nature même, des logiques non classiques. En effet, le cadre sémantique de Tarski fut développé en fonction de la logique classique et n'est pas adapté aux systèmes alternatifs. À cet égard, le rôle de la logique, c'est-à-dire l'étude des systèmes déductifs, sous-tend le critère de Sher. Selon elle[106], le rôle des logiques modales, multivalentes et autres n'est pas nécessairement identique et se doit de faire l'objet d'une étude indépendante. Quoique rien n'indique que l'approche de Sher soit incompatible avec les logiques d'ordres supérieurs, force est d'admettre que sa proposition est fondamentalement ancrée dans logique du premier ordre et la structure de cette dernière.

Finalement, si la proposition de Sher ne s'inscrit pas dans la continuité du Programme d'Erlangen de Klein, elle semble présenter des liens de complémentarité avec l'approche de Tarski. À cet égard, Vann McGee mit en commun les deux approches de façon à formuler la thèse de Tarski-Sher qu'il entreprit de défendre.

---

[106] Ibid., p. 54.

4.2 McGee ou la thèse de Tarski-Sher

Avec son article « Logical Operations », Vann McGee a pour principal objectif de soutenir la thèse de Tarski. En effet, le philosophe américain ne cherche pas à présenter une caractérisation inédite des objets logiques comme le firent auparavant Mautner et Tarski en utilisant le Programme d'Erlangen de Klein ou encore Sher par le biais du concept de conséquence logique. L'originalité de McGee réside plutôt dans son point de vue sur la définissabilité et l'extensionalité des opérations logiques. Ce point de vue découle de l'interaction entre les dimensions syntaxique et sémantique de la logique qui se révèle être la pierre de touche de l'argument de McGee. Il en résulte une analyse beaucoup plus fine de la relation entre les opérations logiques et les opérations invariantes sous les permutations qui permet de concilier les propositions de Tarski et de Sher, principalement en raison de leur complémentarité quant aux domaines variables. Ce sera la thèse de Tarski-Sher. La présente section prendra ainsi la forme d'une exposition et d'une analyse de l'argument de McGee.

4.2.1 Une nouvelle compréhension de l'approche de Tarski

À la base des travaux de McGee se trouve une nouvelle interprétation de la proposition originale de Tarski. Avec « What are Logical Notions? », Tarski proposa une définition des objets logiques d'un domaine donné en tant que notions invariantes sous toutes les permutations de ce domaine. McGee choisit d'interpréter cette définition comme un théorème, c'est-à-dire comme une biconditionnelle. Étant donné un domaine D, une notion est logique si et seulement si elle est invariante sous les permutations de D.

> One direction of Tarski's thesis seems clear enough: the logical operations are invariant under permutations. Any operations which is disturbed by a permutation must somehow discriminate among individuals in the domain, and any consideration which discriminates

> among individuals lies beyond the reach of logic, whose concerns are entirely general. The other direction is harder.
>
> Tarski motivated the other direction of his thesis—we cannot hope to prove the thesis with mathematical rigor because we have no previous characterization of what notions count as logical—by situating it within Klein's *Erlanger* program. Once we have identified the transformation group of logic as the full permutation group (an identification first made by Mautner (1946)), it is natural to identify the logical notions as those invariant under permutations in the same way that we identify the topological notions as those invariant under homeomorphisms.[107]

McGee entend démontrer la contraposée de façon à soutenir la proposition de Tarski. À cet égard, cet objectif repose sur une analyse beaucoup trop fine des travaux de Tarski. Le logicien d'origine polonaise mettait précisément de l'avant une caractérisation des notions logiques avec son article « What are Logical Notions? ». L'objectif consistait à combler l'absence de caractérisation à laquelle fait référence McGee. D'ailleurs, l'angle d'attaque privilégié par Tarski — à savoir une caractérisation en accord avec la pratique contemporaine — explique le rôle de premier plan joué par l'extensionalité dans sa proposition. L'extension de la définition devra tout simplement recouvrer les notions logiques au sens de la pratique courante. En ce sens, la formulation d'une telle définition s'accommode parfaitement de l'absence de caractérisation déplorée par McGee. De plus, cette interprétation de l'objectif de Tarski est trop stricte. Tel que mentionné précédemment, les notions logiques potentielles de Tarski sont tous les objets composant une hiérarchie des types donnée de la théorie des ensembles. De son côté, McGee tente plutôt d'identifier les opérations logiques par l'entremise d'un critère d'invariance. Il s'agit d'un projet beaucoup plus restreint puisqu'il se limite à un seul des aspects de l'objectif poursuivi par Tarski. En conséquence, il s'avère peu fidèle au propos principal de « What are Logical Notions? ».

L'approche de McGee se subdivise en deux étapes principales. Tout d'abord, un langage ne contenant que des connecteurs logiques est défini. Par la suite, il est démontré que toute opération invariante sous les permutations peut être définie en fonction des

---

[107] Vann McGee, « Logical Operations », *Journal of Philosophical Logic*, Volume 25, 1996, p. 567.

connecteurs de ce langage, d'où la conclusion selon laquelle toute opération invariante sous les permutations est elle-même logique. Dans un premier ordre d'idées, McGee se limite volontairement à un unique domaine de variables individuelles.

Définition : Soient V un ensemble non vide de variables individuelles et S un ensemble non vide.

i) Une V*-assignation* pour S est une fonction $V \to S$.

ii) Une ι*-opération* sur les V-assignations pour S est une fonction associant à une suite $\langle A_i : i < \iota \rangle$ d'ensembles de V-assignation pour S un ensemble de V-assignations pour S.

iii) Un ι*-connecteur* est un ι-foncteur[108] permettant de générer des formules à partir d'autre formules.

Cette définition établit clairement une distinction, fondamentale pour l'approche de McGee comme nous le verrons, entre un connecteur et une opération de façon à refléter la relation unissant la syntaxe et la sémantique. Les connecteurs sont des objets syntaxiques et sont, par le fait même, sans signification intrinsèque. Celle-ci provient de l'opération sémantique à laquelle il est associé.

À cet égard, McGee envisage un ι-connecteur comme décrivant une ι-opération, ce qui l'amènera à considérer non pas seulement une sémantique, mais bien une théorie des modèles.

> To determine what operation a given connective describes, it is not enough to observe how the connective behaves within a fixed interpreted language, for this will only tell us how the operator acts on those sets of variable assignments that happen to be represented by formulas of the language. We also need to know how the operator acts on sets of variable assignments not represented in the given interpreted language, so we need to look at how the connective behaves when we change the interpretation; that is to say we need a model theory, not just a semantics.[109]

[108] McGee ne définit pas la notion de ι-foncteur. L'utilisation de l'expression suggère qu'il s'agit d'un opérateur sur les symboles du langage.

[109] Vann McGee, *op. cit.*, p. 569.

Dans ce cas, le caractère logique d'un connecteur dépend strictement de l'opération qu'il décrit, c'est-à-dire si cette opération est elle-même logique ou non. La problématique se résume alors à déterminer si le caractère logique des opérations est maintenu par le passage de la sémantique à la syntaxe. Toute opération logique est nécessairement décrite par au moins un connecteur logique. Or, deux connecteurs peuvent décrire une même opération logique et, comme l'illustre l'exemple de la négation de la licorne ci-bas, tous deux ne sont pas nécessairement logiques.

Soit $\mathcal{U}\phi = (\neg\phi \wedge \text{il n'y a pas de licorne})$. Selon McGee, ce connecteur ne peut être considéré comme logique, tant intuitivement que par rapport au critère de Tarski. Si tel était le cas, $(\neg 0 = 0 \vee \mathcal{U}\neg 0 = 0)$ serait une vérité logique. Or, cet énoncé entraîne qu'il n'existe pas de licorne. De plus, le connecteur $\mathcal{U}$ décrit l'opération de négation. Par ailleurs, la négation est également décrite par le connecteur traditionnel $\neg$. La négation est donc une opération indéniablement logique, mais qui peut être décrite tant par un connecteur logique que par un connecteur non logique.

Inversement, une opération décrite par un connecteur logique est nécessairement logique. Les conséquences pour la démarche de McGee sont importantes dans la mesure où ceci permet de cerner avec précision ce qui doit être démontré. En effet, McGee voit dans le critère de Tarski une condition nécessaire pour caractériser les notions logiques et tente d'en démontrer la suffisance. En vertu de cette condition nécessaire, les opérations logiques sont invariantes sous les permutations. La relation syntaxico-sémantique établie précédemment entre les connecteurs et les opérations induit à son tour une condition nécessaire pour les connecteurs logiques. Une opération n'est logique que si elle est décrite par un connecteur logique. Donc, étant donné un domaine, si un connecteur est logique sur ce domaine, l'opération associée est invariante sous les permutations de ce même domaine. La tâche de McGee se résume alors à démontrer la contraposée de cette dernière implication : si une opération sur un domaine est invariante sous les permutations de ce domaine, alors il existe un connecteur logique qui la décrit. Ainsi, une opération sur un domaine donné sera invariante sous les permutations si et seulement s'il existe un connecteur logique qui la décrit.

À la lumière de ces considérations, la distinction entre un connecteur et une opération logiques joue un rôle d'une importance capitale. Si le rôle exact de cette distinction s'avère légèrement obscur tel qu'exprimé par McGee, elle prend tout son sens dans l'optique de Tarski :

> (..) for an operation to count as logical, it is enough that there be some logical connective that describes the operation (...) Tarski's criterion gives us a characterization of the operations that are describable by a logical connectives without attempting to say what a logical connective is. (...) Our main concern will be to inquire when an operation is a logical operation.[110]

4.2.2 Le langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ et l'invariance sous les permutations

La stratégie de McGee consiste d'abord à introduire un langage formel — $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ — axiomatisable en fonction des connecteurs identité, disjonction, négation et quantification existentielle. Ce langage se décrit comme suit :

- Les prédicats du langage sont $\{P_i : i < \iota\}$.
- W est un ensemble de variables tel que $V \subset W$ et $|W \setminus V| = |S| + 1$
- Une W-assignation est une fonction $W \to S$
- Une substitution est une fonction $V \to W$
- Les formules atomiques sont (i) des expressions de la forme $P_i s$ où P_i est un prédicat et s une substitution ou (ii) des expressions de la forme $v = w$ où v et w sont des variables.
- Une variable apparaît dans $P_i s$ si et seulement si elle fait partie de la portée de s
- Toute formule atomique est une formule
- Si ϕ est une formule, alors sa négation $\neg\phi$ est une formule

[110] Ibid., p. 570.

- Si Φ est un ensemble de formules, alors sa disjonction $\bigcup\Phi$ est une formule
- Si ϕ est une formule et $U \subset W$, alors la quantification existentielle $(\exists U)\phi$ est une formule
- Rien d'autre n'est une formule

Sémantiquement, une interprétation de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ est une fonction associant un ensemble de V-assignations à tout prédicat. La satisfaction d'une formule par une W-assignation σ sous une interprétation $\mathcal{M}$ se définit par induction :

- σ satisfait $P_i s$ sous $\mathcal{M}$ si et seulement si $\sigma \circ s \in \mathcal{M}(P_i)$
- σ satisfait $v = w$ sous $\mathcal{M}$ si et seulement si $\sigma(v) = \sigma(w)$
- σ satisfait $\bigcup\Phi$ sous $\mathcal{M}$ si et seulement si σ satisfait un membre de Φ sous $\mathcal{M}$
- σ satisfait $(\exists U)\phi$ sous $\mathcal{M}$ si et seulement s'il y a une W-assignation ρ qui respecte σ sauf pour les membres de U tels que ρ satisfait ϕ sous $\mathcal{M}$.

Dans ce langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$, la syntaxe et la sémantique entretiennent une relation similaire à celle entretenue dans les langages traditionnels. Par contre, $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ diffère de ces derniers par le fait que les formules atomiques peuvent contenir une infinité de variables. Un sens précis peut donc être donné à la description d'une opération par un connecteur. Soient $\langle A_i : i < \iota \rangle$ une suite d'ensembles de V-assignations, $\mathcal{M}_{\langle A_i : i < \iota \rangle}$ l'interprétation qui assigne A_i à P_i et ϕ une formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$. L'opération décrite par ϕ est la ι-opération qui envoie $\langle A_i : i < \iota \rangle$ sur $\left\{\sigma : \sigma \text{ satisfait } \phi \text{ sous } \mathcal{M}_{\langle A_i : i < \iota \rangle}\right\}$.

La question de la définissabilité se trouve à entrer en ligne de compte de par la définition même du langage. Selon McGee, les connecteurs de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ sont tous intuitivement logiques. Toute formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ pouvant être générée récursivement par ceux-ci sera donc elle-même logique.

L'étape suivante consiste donc à démontrer qu'une opération est invariante sous les permutations si et seulement si elle est décrite par une formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$. Une telle opération sera donc décrite par un connecteur logique et pourra elle-même être considérée comme logique. Plus formellement,

> The predicates of the formal language will be $\{P_i : i < \iota\}$. Our plan is to find, for each ι-ary operation $*$ on S that is invariant under permutations, a formula ϕ, built up from the predicates by means of connectives that are unmistakably logical, such that ϕ describes $*$, in the following sense: if we assign A_i as the extension of P_i, for each i, the extension of ϕ will be $*(\langle A_i : i < \iota \rangle)$.[111]

À cet égard, quoique McGee ne prétende pas définir ce qu'est un connecteur logique, force est d'admettre que « (...) the primitive connectives of $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ are all intuitively clearly logical connectives[112]» est fort peu satisfaisant. En fonction de la stratégie de McGee qui consiste à identifier les opérations logiques au moyen d'une réduction à des connecteurs, le caractère logique des premières dépend directement des seconds. L'exigence de justification de la caractérisation des opérations logiques se transporte vers les connecteurs logiques. Or, McGee accepte de facto les connecteurs du langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ comme logique. Il ne s'agit pourtant que d'une intuition qui trouve son origine dans les us et coutumes de la logique. Aucun argument n'est présenté afin de transcender le stade intuitif.

Au-delà de cette tension de nature surtout philosophique, cette étape requiert évidemment de définir clairement ce qu'est l'invariance d'une opération sous les permutations.

Définition : Soient A un ensemble de V-assignations sur S et π une permutation de S. Posons $\pi^*(A) = \{\pi \circ \sigma : \sigma \in A\}$. Une ι-opération $*$ est *invariante* sous π si et seulement si, pour toute suite $\langle A_i : i < \iota \rangle$, $\pi^*(\langle A_i : i < \iota \rangle) = *(\langle \pi^*(A_i) : i < \iota \rangle)$.

Tous les éléments sont alors en place pour démontrer le théorème suivant :

Théorème : Une ι-opération est invariante sous toutes les permutations si et seulement si elle est décrite par une formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$.

Avec ce théorème, McGee a atteint son objectif, mais seulement pour les variables individuelles d'un domaine donné. La deuxième étape consiste donc à intégrer à l'ensemble

[111] Ibid., p. 571.
[112] Ibid.

V une variable X du deuxième ordre sur les sous-ensembles de S et une variable du troisième ordre Z sur les ensembles de sous-ensembles de S. Ces nouveaux types de variables n'entraînent aucune modification du langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ lui-même. La description de ce dernier repose sur l'ensemble V, mais nullement sur le contenu précis de ce dernier. Par contre, afin de conserver la définition d'invariance inchangée, quelques ajustements sont de mise.

En fonction de ces quelques changements, le théorème est encore valide. Soient σ une V-assignation, π une permutation et $\pi'(\sigma)$ une V-assignation telle que :

- $\pi'(\sigma)(v) = \pi(\sigma(v))$ où v est une variable individuelle
- $\pi'(\sigma)(X) = \{\pi(a) : a \in \sigma(X)\}$
- $\pi'(\sigma)(Z) = \{\{\pi(a) : a \in K\} : K \in \sigma(Z)\}$

Pour A un ensemble d'assignations de variables, $\pi^{*}(A) = \{\pi'(\sigma) : \sigma \in A\}$.

Alors, si $*$ est une ι-opération invariante sous une permutation π, une formule décrivant $*$ se construit comme auparavant, mais avec quelques petites modifications reflétant l'introduction de nouveaux types de variables. Bref, le théorème est également valide pour les variables d'ordres supérieurs.

> This construction is perfectly general, showing that, whenever we have an operation on variable assignments of whatever type that is invariant under permutations, we can describe it by a formula of the language we get from $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ by allowing variables of higher types. Conversely, Lindenbaum and Tarski (1935) have shown that the standard connectives of (simple) type theory are invariant under permutations. So our theorem continues to hold when we move to higher types.[113]

4.2.3 Les opérations sur des domaines variables : la thèse de Tarski-Sher

Dans un troisième temps, McGee continue d'élargir son cadre d'investigation et ajoute les domaines variables. Ce nouveau cadre exige quant à lui une modification de la définition de ι-opération.

---

[113] Ibid., p. 575.

Définition : Une ι-*opération* sur des domaines variables est une fonction qui, étant donnés un ensemble S et une suite $\langle A_i : i < \iota \rangle$ d'assignations de variable pour S, a pour résultat un ensemble d'assignations de variable pour S. Une telle opération est une classe propre.

La problématique consiste alors à identifier les opérations logiques sur des domaines variables. McGee suppose premièrement qu'une telle opération sera logique si sa restriction à chacun des domaines l'est. Cette hypothèse se veut une généralisation naturelle des résultats obtenus jusqu'ici. Elle n'est toutefois pas satisfaisante comme le démontre l'exemple ci-dessous.

Soit la disjonction des wombats[114] $\mathcal{W}$. σ satisfait $\phi \mathcal{W} \psi$ si et seulement si la condition i) ou ii) est respectée :

i) il y a un wombat dans l'univers du discours et σ satisfait ϕ ou ψ

ii) il n'y a pas de wombat dans l'univers du discours et σ satisfait ϕ et ψ.

Ainsi, $\mathcal{W}$ n'est pas un connecteur logique, mais la restriction de l'opération qu'il décrit à chaque domaine est logique. En effet, elle se comporte comme $\wedge$ ou $\vee$ selon qu'il y ait ou non des wombats dans l'univers du discours.

McGee trouve plutôt la réponse à cette question dans les travaux de Tarski et de Sher. La caractérisation des termes logiques développée par Sher est fidèle aux exigences philosophiques sous-jacentes à la caractérisation de Tarski. La première se présente comme une généralisation naturelle de la dernière aux dires de McGee.

> The reasons Tarski gave initially for supposing that the logical operations on a particular domain ought to be invariant under arbitrary permutations equally well support a further convention: a logical operation accross domains ought to be left fixed by an arbitrary bijection. A property which, while invariant under all permutations of a domain, is disrupted when we move, via a bijection, to a different domain must depend on some special feature shared by the members of the first domain and lacked by the members of the second domain. It is not the sort of purely structural property that pure logic studies.[115]

[114] Traduction libre de l'expression *wombat-disjunction* utilitée en anglais.

[115] Vann McGee, *op. cit.*, p. 576.

La caractérisation proposée dans *The Bounds of Logic: A Generalized Point of View* est effectivement une généralisation conceptuelle de celle de Tarski à certains égards. Tout d'abord, le logicien d'origine polonaise avança que les notions logiques se distinguaient par leur invariance sous les permutations d'un domaine M_0 donné. Or, une permutation n'est rien d'autre qu'un automorphisme de ce domaine, c'est-à-dire un isomorphisme $M_0 \to M_0$. Pour sa part, Sher suggère l'invariance sous les isomorphismes de domaines. Cette suggestion englobe évidemment celle de Tarski; il suffit de considérer les isomorphismes d'un domaine dans lui-même. Ce premier volet de la généralisation mène naturellement au deuxième. En effet, la proposition au cœur de « What are Logical Notions? » est inexorablement restreinte à un seul domaine alors que la conception des termes logiques de Sher incorpore de facto les domaines variables.

Toutefois, tel que souligné précédemment, Tarski et Sher abordent la problématique des objets logiques par le biais de compréhensions distinctes. La motivation sous-jacente, la justification du critère, mais surtout l'appréhension des candidats potentiels sont profondément différentes. L'unification de leurs positions respectives par McGee repose dans cette optique sur une complémentarité superficielle.

Le cadre syntaxico-sémantique mis en place par McGee afin de traiter les opérations logiques définies sur un domaine s'avère assez souple et général pour rendre compte des opérations logiques sur plusieurs domaines. En effet, il est possible de démontrer qu'une opération invariante sous les permutations est décrite par une formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$. Une opération $*$ sur des domaines variables est invariante sous les bijections si et seulement si, pour tout cardinal $\kappa \neq 0$ et pour tout domaine de cardinalité κ, il existe une formule de ϕ_κ de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ qui décrit l'action de $*$ sur ce domaine. L'existence de cette formule est garantie par le théorème de McGee. En effet, si l'opération $*$ définie sur un domaine S est invariante sous les bijections, elle l'est en particulier sous l'identité $S \to S$. Or, cette bijection est une permutation du domaine S. Donc, la formule ϕ_κ décrivant l'opération $*|_S$ s'obtient comme auparavant. Cette formule ne dépend pas du domaine lui-même, mais bien de sa cardinalité κ. Pour construire la formule qui décrira l'opération $*$, il suffit de remarquer que, pour tout domaine de cardinalité $\kappa' \neq \kappa$, toute V-assignation satisfera ϕ_{κ}. Ladite formule sera donc la conjonction des $\phi_{\kappa}s$ et sera par le fait même un connecteur logique[116].

À la lumière de ces considérations, McGee formule la thèse de Tarski-Sher. Cette thèse stipule qu'une opération sur des domaines variables est logique si elle est invariante sous toutes les bijections entre ces domaines. Selon l'auteur de « Logical Operations », elle représenterait une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les opérations logiques puisque de telles opérations peuvent être décrites par un connecteur logique.

En contrepartie, McGee est parfaitement conscient de deux problèmes inhérents à la thèse de Tarski-Sher. Premièrement, la thèse de Tarski-Sher n'instaure aucune connexion entre les connecteurs décrivant une même opération sur des domaines de cardinalité différente. Comme le souligne McGee et comme le soulignera Feferman, « it would permit a logical connective which acts like disjunction when the size of the domain is an even successor cardinal, like conjunction when the size of the domain is an odd successor cardinal, and like a biconditional at limits[117]. »

Deuxièmement, les domaines de cardinalité κ considérés doivent être des ensembles. La thèse de Tarski-Sher s'accommode fort difficilement d'un domaine dont la cardinalité s'avère trop grande pour qu'il forme un ensemble. L'exemple type serait ici celui d'une opération définie sur les ordinaux. Cette problématique amena McGee à considérer une généralisation du deuxième ordre de la thèse de Tarski-Sher. Soit Δ la classe des V-assignations sur S. Il traite une ι-opération sur une classe S comme une fonction dont les arguments sont des sous-classes de $\iota \times \Delta$. Les valeurs de cette fonction sont les sous-classes de Δ. Autrement dit, $*$ est une opération logique sur des domaines

---

[116] Ibid.

[117] Ibid., p. 577.

variables arbitraires si et seulement si $(\forall S)(\forall R)(\forall \Pi)[(\Pi{:}S \xrightarrow{\sim} R) \Rightarrow (\forall K)[(K \in \iota \times \Delta) \Rightarrow (\forall S)[(\sigma \in \Delta) \Rightarrow [(\sigma \in {*K}) \leftrightarrow (\Pi \circ \sigma \in {*(\Pi \bullet K)})]]]]$

L'acceptation de cette généralisation est évidemment largement tributaire du statut accordé à la logique du second ordre. Nonobstant la problématique que représentent les logiques d'ordres supérieurs, ce principe est-il susceptible de rendre compte de ce qu'est une opération logique sur un domaine qui n'est pas un ensemble? Selon McGee,

> The considerations Tarski and Sher brought forward do not depend on the domain being a set, so they give us reason to believe that the identification of the logical operations as those invariant under arbitrary bijections will continue to be upheld even when the domain is larger than any set. There is also an argument by analogy: as a general rule, we expect that structural principles that hold for all sets will hold for arbitrary domains. Vague as it is, this rule-of-thumb has proven extremely valuable in the development of set-theory, and it gives us rather persuasive evidence for the generalization of Sher's thesis.[118]

Toutefois, la thèse de Tarski-Sher fait appel au théorème de McGee pour les opérations logiques définies sur un seul domaine. En effet, ce théorème permet de construire la formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ décrivant l'action de l'opération sur chaque domaine de cardinalité κ. Or, il ne peut être généralisé à un domaine de cardinalité arbitraire. Étant donné un domaine de grande cardinalité et une opération définie sur ce domaine, une formule du langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ la décrivant ne peut être construite. Dans le cas d'un ensemble S et d'une opération définie sur S, la construction de la formule de $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ nécessite un nombre de sous-formules supérieur à la cardinalité de S. Dans le cas d'un domaine qui est une classe propre, la construction de la formule par les mêmes moyens exigerait également un nombre de sous-formules supérieur à la cardinalité du domaine. Par exemple, si le domaine est la classe des ordinaux, alors le nombre de sous-formules devrait être supérieur à tous les ordinaux. Comme le souligne McGee, « even the most generous theories of classes will not permit such extravagant construction[119]. »

À la lumière de ces considérations, McGee en conclut que la thèse de Tarski-Sher ne peut représenter une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les opérations

---

[118] Ibid., p. 578.
[119] Ibid.

logiques, et ce en raison des problèmes liés aux opérations sur des domaines variables. McGee n'est pas en mesure de démontrer la suffisance de cette condition. En contrepartie, la thèse de Tarski-Sher n'en demeure pas moins une condition nécessaire pour caractériser les opérations logiques. Selon McGee, l'importance d'une telle condition découle de ce que la distinction entre les objets logiques et non logiques ne peut être considérée comme totalement arbitraire.

En conclusion, McGee accepte totalement la proposition originale de Tarski selon laquelle les notions logiques sont invariantes sous les permutations. Il n'y voit cependant qu'une condition nécessaire et, dans cette optique, tente de la soutenir en démontrant qu'elle est également suffisante. Cette démonstration s'articule par le biais de la relation entre les connecteurs et les opérations logiques ainsi que par l'introduction d'un langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$. Si cette approche semble satisfaisante pour les opérations définies sur un seul domaine, McGee réalise qu'il en est tout autrement pour les opérations sur des domaines variables. L'étude de ce deuxième type d'opérations l'amena à mettre en commun les travaux de Tarski et de Sher afin de formuler la thèse de Tarski-Sher. Cette thèse est finalement acceptée comme condition nécessaire, mais non suffisante. À cet égard, la thèse de Tarski-Sher, mais surtout la critique qu'il en fit, motivèrent Solomon Feferman à développer une approche alternative. En effet, si McGee accepte la thèse généralisée de Tarski-Sher malgré ses défauts inhérents, Feferman ne peut s'y résoudre.

4.3 Feferman : l'émergence d'un point de vue structurel?

L'article « Logic, Logics, and Logicism » de Solomon Feferman fut directement motivé par « Logical Operations » de McGee. L'objectif sous-jacent consistait à souligner les inexorables difficultés liées à la proposition de McGee et plus particulièrement à la thèse de Tarski-Sher. Toutefois, le point de vue et l'argumentation de Feferman ne reposent pas sur des considérations d'ordre logique ou mathématique, mais se situent plutôt à un niveau essentiellement philosophique. La proposition au cœur de « Logical Operations » est rejetée non à cause de son articulation technique, mais plutôt en raison des implications philosophiques qui la sous-tendent : « I do not plan to go into details of McGee's work, which is faultless in its execution. It is not *that* that is at issue; rather it is *how* to formulate the conceptual problem raised by Tarski which should be the center of our attention[120]. »

Le point de vue de Feferman sur la problématique se développe tout au long des cinq premières parties qui composent « Logic, Logics, and Logicism ». Les deux premières sections sont consacrées à la présentation des approches de Tarski et McGee. Les critiques à l'endroit de la thèse de Tarski-Sher sont le sujet de la troisième section. Par la suite, l'invariance sous les épimorphismes comme critère de même que des arguments en faveur de ce critère sont présentés.

La présente section se subdivisera en deux étapes. Il sera premièrement question des critiques adressées à la thèse de Tarski-Sher. Dans un second temps, la proposition de Feferman selon laquelle l'invariance sous les épimorphismes caractériserait les objets logiques sera examinée.

4.3.1 Une critique en trois temps

Tel que mentionné précédemment, Feferman n'accepte pas la caractérisation des opérations logiques proposée par McGee. Selon ce dernier, les opérations logiques et non logiques diffèrent en ce que les premières peuvent être décrites par des formules construites dans le langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$. Cette caractérisation met en évidence une conception des opérations logiques à propos de laquelle Feferman émet de sérieuses réserves. Sa critique se déroule en trois volets.

---

[120] Solomon Feferman, « Logic, Logics, and Logicism », p. 32.

Premièrement, la thèse de Tarski-Sher assimile la logique aux mathématiques et, plus précisément, à la théorie des ensembles. À l'instar des propositions originales de Tarski et Sher, la thèse de Tarski-Sher fait appel à l'existence d'entités spécifiques de la théorie des ensembles ou à l'existence de propriétés de ces entités. Par exemple, la hiérarchie des types se trouve au cœur de l'approche de Tarski. En ce sens, les opérations logiques qui relèvent de cette conception s'insèrent en faux avec la compréhension traditionnelle de la logique comme constituée de concepts universels dépourvus de contenu selon Feferman. La relation entre les mathématiques et la logique étant sujette à de nombreux débats, Feferman est parfaitement conscient de la portée limitée d'une telle critique. « (...) it will evidently depend on one's gut feelings about the nature of logic as to whether this is considered reasonable or not[121]. »

La seconde critique de Feferman est une conséquence de l'assimilation de la logique à la théorie des ensembles. En effet, les notions propres à la théorie des ensembles disposent de la propriété de robustesse. Feferman considère que les formules absolues de Gödel représentent une condition nécessaire pour déterminer la robustesse des notions ensemblistes. Dans la mesure où la thèse de Tarski-Sher associe intimement les objets logiques à la théorie des ensembles, elles doivent satisfaire à leur tour l'exigence de robustesse telle que formulée par le critère de Gödel. Or, certaines des opérations décrites dans le langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ se révèlent ne pas être absolues et ne peuvent donc pas être logiques. Ceci étant dit, Feferman est également conscient que l'impact de cette critique est amoindri de par sa nature. Le concept de robustesse demeure vague et le concept d'absolu est relatif à la théorie des ensembles adoptée.

Troisièmement, Feferman reprend une des raisons invoquées par McGee pour ne pas adopter la thèse de Tarski-Sher en tant que condition nécessaire et suffisante. En voulant caractériser les opérations définies sur plusieurs domaines, l'auteur de « Logical

[121] Ibid., p. 37.

Operations » constata la relation variable entre les significations prises par une même opération sur chacun de ses domaines. Une opération invariante sous les permutations ne dispose pas de signification indépendante du domaine de définition.

> The Tarski-Sher thesis does not require that there be any connections among the ways a logical operations acts on domains of different sizes. Thus, it would permit a logical connective which acts like disjunction when the size of the domain is an even successor cardinal, like conjunction when the size of the domain is an odd successor, and like a biconditionnal at limits.[122]

Selon Feferman, les opérations de la logique du premier ordre ont la même signification peu importe le domaine particulier sur lequel elles agissent. La thèse de Tarski-Sher est évidemment incompatible avec cette intuition.

Principalement à cause de cette dernière critique, Feferman considère, à l'instar de McGee, que la thèse de Tarski-Sher peut représenter une condition nécessaire en vue d'une caractérisation des opérations logiques. Par contre, il est d'avis que, pour être parfaitement satisfaisante, une caractérisation sémantique des objets logiques doit expliciter la relation entre l'action d'une opération sur un domaine M_0 et l'action de cette même opération sur un domaine M_0'. Feferman croit que le concept d'épimorphisme peut pallier à cette carence inhérente à l'approche de McGee. Ainsi, dans un second ordre d'idées, il développe une caractérisation sémantique des objets logiques basée sur l'invariance sous les épimorphismes[123].

4.3.2 L'invariance sous les épimorphismes

La quatrième partie de « Logic, Logics, and Logicism » ébauche une caractérisation sémantique des objets logiques qui repose sur le concept d'invariance sous les épimorphismes. L'objectif principal poursuivi par Feferman est de combler la lacune

[122] Vann McGee, *op. cit.*, p. 577.

[123] Feferman prend la liberté de plutôt utiliser le terme « homomorphisme » puisqu'il n'est question que d'homorphismes surjectifs tout au long du texte.

inhérente à la thèse de Tarski-Sher mise en lumière par le troisième volet de sa critique. L'utilisation des épimorphismes au détriment du langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ aurait l'avantage de relier l'action d'une opération sur chacun de ses différents domaines d'application. En ce sens, l'approche de Feferman peut se voir comme une modification des travaux de McGee bien que son articulation en soit fort différente. Il tente également de développer sa solution fidèlement à l'esprit initial de Tarski.

Dans cette perspective, Feferman adopte comme cadre de travail une théorie des types au sens contemporain du terme. Il est ainsi fidèle au cadre conceptuel de Tarski tout en étant ancré dans un contexte plus proche des exigences actuelles de la logique. Il rompt également avec l'approche de McGee dans la mesure où ce dernier adoptait la théorie des modèles comme cadre. Toutefois, en tentant de corriger les lacunes inhérentes à la proposition de McGee, Feferman s'inscrit également dans la continuité de celle-ci. Il adopte alors l'appréhension très restrictive des objets logiques qui caractérisait « Logical Operations ». En effet, contrairement à la conception très générale et abstraite de Tarski, McGee se limitait à caractériser les opérations logiques. Toutefois, à la lumière des positions philosophiques de Feferman, cette appréhension des objets logiques potentiels ne serait pas nécessairement une limitation ou encore un problème. Il considère effectivement que la logique classique du premier ordre joue un rôle prépondérant dans le fonctionnement de la pensée humaine et va même jusqu'à identifier la logique à ce système particulier[124].

Tout d'abord, Feferman généralise le cadre sémantico-mathématique originellement mis en place par Tarski. Là où ce dernier se limitait à des types finis relationnels, Feferman introduit des fonctionnelles de types finis auxquels il ajoute un symbole de type élémentaire b pour les valeurs de vérité. D'une part, les symboles de fonctionnelles de types finis sont générés à partir de 0 et b par la construction de $\tau = (\tau_1,...,\tau_n \rightarrow \sigma)$ où $\tau_1,...,\tau_n$ et σ sont des symboles de types finis relationnels. D'autre part, étant donné un

[124] Solomon Feferman, « Logic, Logics, and Logicism », p. 51.

domaine M_0, une structure de type fonctionnel $M = \langle M_\tau \rangle$ sur M_0 désigne une structure où $M_b = \{1,0\}$ et où, pour tout τ, M_τ consiste en des fonctions $M_{\tau_1} \times \ldots \times M_{\tau_n} \to M_\sigma$. Afin de simplifier l'exposition, Feferman suppose que M est maximal, c'est-à-dire que pour tout τ, M_τ est l'ensemble de toutes ces fonctions.

Définition : Soient $M = \langle M_\tau \rangle$ et $M' = \langle M'_\tau \rangle$ deux structures de type fonctionnel sur des domaines M_0 et M'_0 respectivement. Une *relation de similitude* $\sim$ entre M et M' est une collection de relations $\sim_\tau$ pour chaque symbole de fonctionnelle de type fini τ telle que

i) $\forall x \in M_0 \, \exists x' \in M'_0 (x \sim x') \wedge \forall x' \in M'_0 \, \exists x \in M_0 (x \sim x')$

ii) $\forall x \in M_b \, \forall x' \in M'_b [x \sim x' \Leftrightarrow x = x']$

iii) pour tout $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n \to \sigma)$ et $p \in M_\tau$ et $p' \in M'_\tau$, $p \sim p' \Leftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in M'_{(\tau_1, \ldots, \tau_n)} [(x_1, \ldots, x_n) \sim (x'_1, \ldots, x'_n) \Rightarrow p(x_1, \ldots, x_n) \sim p(x'_1, \ldots, x')]$

En particulier, certaines relations de similitude sont déterminées par des morphismes. Soit $h : M_0 \to M'_0$ une fonction surjective définie sur les ensembles. Cette fonction h induit un morphisme sur les structures correspondant à chacun de ces ensembles, c'est-à-dire $h : M \to M'$ est un épimorphisme. Ainsi, la relation définie par $x \sim_0 x' \Leftrightarrow h(x) = x'$ détermine une relation de similitude entre M et M'. L'intérêt de ce lien entre les épimorphismes et les relations est qu'il permet de considérer explicitement les opérations.

Définition : i) Une opération O est *de type* τ sur des domaines variables si, pour toute structure M de type fonctionnel, il existe une opération associée $O^M \in M_\tau$.

ii) O est alors dite *invariante* sous les relations de similitude si, pour tous domaines M, M' et toute relation de similitude $\sim : M \to M'$, $O^M \sim O^{M'}$.

iii) O est *invariante sous les épimorphismes* si elle est invariante uniquement sous les relations de similitude déterminées par des épimorphismes $M \to M'$.

Cette définition est la pierre de touche de l'approche de Feferman dans la mesure où elle met en évidence comment les épimorphismes apportent une réponse à la principale critique formulée à l'égard de McGee. D'une part, la relation de similitude établit un lien structurel entre deux domaines d'application d'une opération. D'autre part, l'invariance sous les épimorphismes stipule que la signification d'une opération est préservée par le passage d'un de ses domaines d'action à l'autre. Comme le dit Feferman :

> It seems to me that there is a natural sense in which operations O invariant under [epi]morphisms are logical form preserving, if one ignores equality, at least for propositional operations O of type level 2 with proposition function arguments. This means that whenever h is a homomorphism from M onto M' and arguments p_i are shrunk to p'_i along h, then $O^M(p_1,...,p_n) = O^{M'}(p'_1,...,p'_n)$.[125]

Le concept d'invariance sous les épimorphismes, et plus généralement, d'invariance sous les relations de similitude, a également l'avantage de rendre compte de la logique du premier ordre. Ce système peut s'axiomatiser en fonction des opérations de négation, conjonction et quantification existentielle sur les individus. Or, ces trois opérations s'avèrent invariantes sous les relations de similitude. Feferman exploite cette propriété à la manière de McGee en ce qu'il la relie à la notion de définissabilité pour le calcul des prédicats. Il montre effectivement qu'une opération définissable dans le calcul des prédicats l'est également en fonction des opérations invariantes sous les épimorphismes.

Définition : Une opération O est *définissable* à partir d'opérations $O_1,...,O_k$ s'il existe un terme $t(z_1,...,z_k)$ du λ-calcul typé avec constantes 0 et 1 où z_i est du même type que O_i et où t est du même type que O, tel que $O^M = t(O_1^M,...,O_k^M)$ dans chaque structure M de type fonctionnel.

Les deux théorèmes suivants clarifient le lien entre les opérations invariantes sous les relations de similitude et les opérations de la logique du premier ordre :

---

[125] Ibid., p. 40.

Théorème : Soit O une opération définissable à partir de la négation, de la conjonction et de la quantification existentielle. O est invariante sous les relation de similitude.

Théorème : Soit O une opération déterminée par une formule du calcul des prédicats sans égalité. Alors, O est définissable en fonction de la négation, de la conjonction et de la quantification existentielle. Elle est par le fait même invariante sous les relations de similitude.

En contrepartie, la correspondance que recherche Feferman ne se construit pas aussi facilement dans la mesure où la contraposée de ce dernier théorème est fausse. L'exemple utilisé est celui d'un quantificateur de type $\left(\left(0^2 \to b\right) \to b\right)$ et qui ne peut être défini par une formule du calcul des prédicats, mais qui n'en est pas moins invariant sous les relations de similitude. Feferman en vient à poser une condition supplémentaire sur les opérations considérées, c'est-à-dire qu'elles doivent être de type monadique.

Définition : Posons $\pi = (0 \to b)$ le type des fonctions propositionnelles unaires qui correspond aux prédicats monadiques. Alors,

i) un type $\tau = \left(\left(\tau_1,\ldots,\tau_n\right) \to \sigma\right)$ est *monadique* si $\sigma = b$, c'est-à-dire si le type est celui d'une fonction propositionnelle, et si chaque argument de type τ_i est soit π, b ou 0.

ii) τ est *purement monadique* s'il est de la forme $\left(\pi^n \to b\right)$.

Les théorèmes suivants peuvent alors être démontrés :

Théorème : Soit O une opération de type monadique et invariante sous les épimorphismes. O est définissable en termes de négation, conjonction et quantification existentielle.

Théorème : Les opérations définissables en utilisant les opérations du calcul des prédicats sans égalité correspondent à celles définissables en utilisant les opérations invariantes sous les épimorphismes de type monadique.

Comme l'exprime le résultat ci-dessus, la proposition de Feferman fait de l'invariance sous les permutations un critère pour distinguer les objets logiques et non logiques.

Dans un deuxième ordre d'idées, Feferman présente une suite d'arguments qui tendent à souligner l'adéquation de la conception de la logique découlant de son critère à la conception qui est la sienne.

Tout d'abord, la caractérisation sémantique des opérations logiques en termes d'invariance sous les épimorphismes exclut la relation d'identité. Feferman se réfère à Quine sur cette question. Dans *Philosophy of Logic*, le célèbre philosophe argumente tout d'abord que la relation d'identité ne doit pas être incluse dans le corpus logique. En effet, il adopte un concept de vérité logique reposant sur l'idée de substitution. « A *logical truth*, then, is definable as *a sentence from which we get only truths when we substitute sentences for its simple sentences*[126]. » Or, en remplaçant « = » par un autre prédicat, une vérité aussi élémentaire que $x = x$ n'en est plus nécessairement une. La relation d'identité s'avère alors incompatible avec cette conception de la vérité logique.

Pourtant, Quine est favorable à l'inclusion de la relation d'identité dans le corpus logique comme en témoigne les quatre arguments qu'il présente par la suite. Le plus important de ceux-ci met en évidence la capacité naturelle de tout langage standard à induire un prédicat d'identité. En effet, dans tout langage respectant les exigences grammaticales de Quine, l'identité peut être définie au moyen des autres prédicats du langage en question.

> The upshot is, I feel, that identity theory has stronger affinities with its neighbors in logic than with its neighbors in mathematics. It belongs in logic. Yet we saw it as a threat to our structurally conceived definitions of logical truth. Where does this leave us?
>
> A reconciliation is afforded, curiously enough, by the very consideration that counted most strongly for reckoning identity theory to logic; namely the definability of identity [in terms of other predicates]. If, instead of reckoning '=' to the lexicon of our object language as a simple predicate, we understand all equations as mere abbreviations of complex

[126] Willard van Orman Quine, *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., coll. « Foundations of Philosophy Series », 1970, p. 50.

> sentences [in terms of other predicates], then all laws of identity become mere abbreviations of logical truths of the purely quantificational sort (...) The structural view of logic is sustained.[127]

Or, selon Feferman, cet argument ne remet pas en cause l'invariance sous les épimorphismes en tant que critère potentiel. « However, this is not an argument in favor of identity as a logical notion in its own right, but rather as a notion that can be reduced in certain contexts to logical notions[128]. » Il en conclut que les deux conceptions sont compatibles quant à la question de la relation d'identité.

Deuxièmement, les quantificateurs de cardinalité et la quantification du deuxième ordre sont abordés. En ce qui a trait aux premiers, Feferman est d'avis que ces quantificateurs relèvent plus des mathématiques que de la logique, opinion confirmée par son critère d'invariance. Il en est également ainsi des quantificateurs du deuxième ordre puisqu'ils ne sont pas invariants sous les épimorphismes. De plus, Feferman adopte le point de vue de Quine sur les logiques d'ordres supérieurs en raison de leur forte dépendance ontologique :

> I also agree with Quine (...) that second-order and higher-order quantification go beyond the bounds of logic. He takes these (famously) to be "set theory in sheep's clothing", and it is certainly true that the understood *meaning* of such quantifiers depends on what sets exist or alternatively—if such quantifiers are regarded as binding predicate variables—of what predicates exist. (...) In any case, I count it as an argument in favor of the homorphism invariance condition for logicality that it excludes second-order, and thence higher-order, quantification (...)[129]

Cet aspect jette également un éclairage nouveau sur la première critique à l'endroit de McGee à l'aide de laquelle Feferman déplorait l'assimilation de la logique aux mathématiques. La thèse généralisée de Tarski-Sher telle que formulée dans « Logical Operations » se veut une proposition du deuxième ordre et relève donc clairement des mathématiques dans cette optique.

---

[127] Ibid., p. 64.
[128] Solomon Feferman, « Logic, Logics, and Logicism », p. 44.
[129] Ibid., p. 45.

Il est par la suite question des quantificateurs généralisés. Tel que mentionné précédemment, la principale critique de Feferman à l'endroit des travaux de McGee concernait l'action variable d'une même opération sur plusieurs domaines. Le développement de la présente approche sémantique avait d'ailleurs pour objectif principal de combler cette lacune. Selon Feferman, l'invariance sous les épimorphismes relie les significations prises par une opération sur différents domaines. De plus, les critères de démarcation entre opérations logiques et non logiques provenant des recherches sur les quantificateurs généralisés, tant du point de vue logique de Mostowski ou encore linguistique de Barwise-Cooper[130], ne rencontreraient pas cette exigence.

Finalement, Feferman aborde la quantification polyadique. Dans sa caractérisation des opérations logiques, il ne considère que des types monadiques. Cette exigence soulève évidemment le problème des quantificateurs polyadiques. Feferman n'y voit cependant pas d'objection majeure puisque ceux-ci sont réductibles à des quantificateurs monadiques. « The entire second half of [K-W][131] is devoted to monadic quantifiers via suitable lifting by abstraction, and they come to the following generalization : Polyadic quantification in natural languages in general results from lifting monadic quantifiers[132]. »

À la lumière de ces considérations, la conception des opérations logiques induite par le critère de Feferman s'avère compatible avec ses exigences philosophiques. Il y voit par le fait même un argument supplémentaire en faveur de sa conception de la logique et de ses positions sur d'autres problèmes philosophiques plus généraux :

> Combined with my argument for [epi]morphisms invariance as a criterion for sameness of operations across domains, this makes it plausible that the class of operations definable from [epi]morphisms invariant *monadic* operations is a natural one to consider from the point of view of what one might call "natural logic". If that is granted, then [the theorem]

[130] Les quantificateurs généralisés de Mostowski furent repris d'un point de vue linguistique par, notamment, Barwise et Cooper ainsi que par Lindström. Voir Gila Sher, *op. cit.*, p. 17 et suiv.
[131] Plus précisément, Feferman fait référence à E. L. Keenan et D. Westerstahl, « Generalized Quantifiers in Linguistics and Logic » In J. van Bentham and A. ter Meulen, dir., *Handbook of Logic and Language*, Amsterdam, Elsevier, 1997, p. 837-893.
[132] Solomon Feferman, « Logic, Logics, and Logicism » , p. 47.

> supports my view that the first-order predicate calculus PC enjoys a privileged role in human thought.[133]

Ainsi, Feferman s'inspire beaucoup de certaines des idées-clés de McGee et les réintègre à une version actualisée du cadre conceptuel originel de Tarski pour développer sa propre caractérisation des opérations logiques. Celle-ci repose sur l'invariance sous les épimorphismes et a pour grand avantage de combler la principale lacune de la thèse de Tarski-Sher en ce qu'elle relie les significations prises par une opération sur ses différents domaines de définitions. De plus, l'approche de Feferman est extensionnellement acceptable. Les opérations du calcul des prédicats respectent le nouveau critère et la conception qui en découle est fidèle à la conception standard de la logique. Pour ces raisons, Feferman considère qu'une caractérisation sémantique des objets logiques en fonction d'un critère d'invariance représente une avenue des plus intéressantes. Une telle approche semble effectivement représenter un premier pas vers une compréhension plus générale et uniforme des objets logiques en ce qu'elle est la première à reposer directement sur le concept de morphisme.

---

[133] Ibid.

Conclusion

En conclusion, la problématique des objets logiques s'avère relativement récente dans l'histoire de la philosophie et des mathématiques. Néanmoins, de nombreuses pistes de solutions furent avancées depuis les premières interrogations dans le contexte du logicisme. Parmi celles-ci, l'idée d'une caractérisation des objets logiques en termes d'invariance inspirée du Programme d'Erlangen de Klein fut examinée. Quoiqu'elle remonte au milieu des années quarante, cette appréhension du problème ne fut pourtant l'objet d'une attention plus soutenue que depuis quelques années, c'est-à-dire depuis la publication posthume de l'article « What are Logical Notions? » d'Alfred Tarski en 1986.

Publié en 1872, le Programme d'Erlangen consiste aujourd'hui en une des plus célèbres et importantes contributions de Felix Klein aux mathématiques. Si cette importance s'exprime à plus d'un niveau, elle émane principalement du point de vue inédit mis de l'avant par Klein. En effet, le point de vue du mathématicien allemand se veut fondamentalement structurel. De par le rôle de la théorie des groupes, le Programme d'Erlangen marque l'entrée des structures algébriques et des méthodes de l'algèbre abstraite en géométrie. Une correspondance s'établit entre les diverses théories géométriques et des groupes de transformations de telle sorte que ces derniers encodent toute l'information propre aux premières.

Ainsi, la théorie des groupes induit un critère d'identité sur les géométries. Deux théories seront structurellement identiques si leurs groupes de transformations associés sont isomorphes. L'apparence des géométries est reléguée au second plan : toutes différentes semblent-elles à première vue, si leur structure est identique, alors qu'il ne s'agit en fait que de deux présentations différentes d'une seule et unique géométrie. Ce critère induit par le fait même une classification des théories géométriques.

De plus, la notion de sous-groupe induit la notion de sous-géométrie. Klein formula une relation de proportionalité inverse entre la taille de la classe des transformations admises et le nombre d'invariants d'une géométrie. Plus la classe de transformations est grande, moins les propriétés invariantes sont nombreuses et donc moins la structure de la géométrie est riche. Étant données deux théories géométriques T_1 et T_2, si le groupe de transformations associé à T_1 est un sous-groupe du groupe de transformations associé à T_2, alors T_1 est une sous-géométrie de T_2. Si ce critère de comparaison n'est qu'un cas particulier du critère d'identité, il n'en demeure pas moins qu'il est à l'origine de la hiérarchie des géométries mise en lumière par le Programme d'Erlangen.

Historiquement, le Programme d'Erlangen semble avoir motivé deux approches visant à caractériser les objets logiques. La première peut être considérée comme mathématique et émane exclusivement de l'article « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory » de Friedrich Ignaz Mautner. La seconde s'inscrit dans la tradition sémantique et fut inaugurée par le logicien et mathématicien Alfred Tarski. L'article « What are Logical Notions? » suscita plus ou moins directement d'autres recherches récentes dans cette voie de la part de Gila Sher, Vann McGee et Solomon Feferman.

Il fut dans un premier ordre d'idées question de l'approche de Mautner. Ce dernier aborda la problématique des objets logiques indirectement et dans un contexte essentiellement mathématique. En effet, la préoccupation principale de Mautner ne consiste pas à formuler explicitement un critère permettant d'identifier et d'isoler les objets logiques, mais plutôt à démontrer qu'une conception donnée de la logique peut être considérée comme une théorie des invariants d'un groupe. En ce sens, la caractérisation est implicite à cet objectif dans la mesure où, en tant que théorie des invariants du groupe symétrique, la logique se trouve à porter nécessairement sur ces invariants. Mautner récupère donc les travaux de Klein, mais surtout ceux de Weyl qu'il adapte à la logique afin de réaliser son projet. Dans un premier temps, il démontre que la logique mathématique propositionnelle classique peut être considérée comme une théorie des invariants du groupe symétrique. Dans un deuxième temps, les outils logico-mathématiques nécessaires à une caractérisation et à une étude de la logique comme théorie des invariants du groupe symétrique sont développés.

Cette démarche est directement inspirée et adaptée des travaux de Weyl sur la géométrie et les groupes classiques. Elle est également pleinement ancrée dans les mathématiques, tant au niveau des préoccupations sous-jacentes, du point de vue privilégié que des méthodes employées.

Dans un deuxième ordre d'idées, il fut question de l'approche sémantique de Tarski. Malgré les nombreuses années qui les séparent, l'article « What are Logical Notions? » s'inscrit dans la continuité de « On the Concept of Logical Consequence ». En effet, la définition de conséquence logique formulée dans l'article de 1936 pose directement la problématique d'une démarcation des objets logiques et non logiques. C'est en s'inspirant du Programme d'Erlangen de Klein que Tarski trouvera l'idée qui sous-tend toute sa proposition. En contrepartie, Tarski s'avère peu fidèle à l'esprit global du Programme d'Erlangen en se limitant à récupérer une seule des idées fondamentales de Klein.

« What are Logical Notions? » insiste sur l'association des géométries à des groupes de transformations ainsi que sur la hiérarchie qui en résulte. En élargissant la classe des transformations admises, Tarski marque le passage successif de la géométrie métrique à la géométrie affine puis à la topologie. Il propose de pousser cette idée à la limite afin de considérer les transformations de l'univers du discours. Les notions invariantes sous ces transformations seraient précisément coextensionnelles avec les notions logiques usuelles. Par le fait même, la logique se trouve à prendre place au sommet de la hiérarchie kleinienne.

Finalement, il fut question de l'héritage de Tarski à la problématique des objets logiques. En effet, quelques philosophes adoptèrent le cadre conceptuel sémantique privilégié par Tarski afin de développer leurs propres caractérisations. Malgré certaines différences fondamentales, Gila Sher, Vann McGee et Solomon Feferman s'inscrivent directement dans la continuité de Tarski.

Quoique son intérêt pour la problématique des objets logiques s'inscrive dans une investigation beaucoup plus générale, Gila Sher se pencha également sur celle-ci afin d'en donner une caractérisation. La motivation principale de l'auteur de *The Bounds of Logic: A Generelized Viewpoint* est également toute autre en ce qu'elle émane des travaux de Mostowski sur les quantificateurs généralisés. En contrepartie, Sher adopta explicitement le point de vue sémantique de Tarski sur la logique de telle sorte que sa suggestion s'inscrit dans la continuité de « On the Concept of Logical Consequence » et aussi, dans une moindre mesure cependant, de « What Are Logical Notions? ».

Le point de départ de Sher est le rôle de la logique tel que conçu par Tarski. Ceci l'amène à se pencher sur la définition du concept de conséquence logique proposée par le logicien d'origine polonaise. Sher analysera donc les termes logiques et non logiques à la lumière de leurs rôles dans l'entreprise logique de façon à mettre en évidence les caractéristiques propres à chacun. Ainsi, les termes logiques se distinguent des termes non logiques au niveau de la variabilité sémantique. En effet, la signification de ces derniers dépend de leur interprétation dans un modèle particulier. Pour leur part, les termes logiques sont interprétés indépendamment du modèle spécifié. En respectant le cadre fixé par le concept de conséquence logique prescrit par Tarski, Sher parviendra à enchâsser cette distinction dans un critère. Ce critère sera donné par cinq conditions et servira de base à une conception généralisée de la logique, c'est-à-dire la logique non restreinte.

Le principal avantage de la proposition de Sher consiste à rendre compte naturellement des opérations logiques portant sur des domaines variables. En ce sens, les suggestions de Tarski et de Sher peuvent être vues comme complémentaires.

Cette idée d'une complémentarité entre les thèses de Tarski et de Sher se retrouve dans une certaine mesure dans l'article « Logical Operations » de Vann McGee. L'objectif principal de cet article est de soutenir la proposition originale de Tarski selon laquelle les notions logiques se caractérisent par leur invariance sous les permutations. Toutefois, McGee appréhende cette proposition à la manière d'une biconditionnelle et non pas en tant que définition conformément à ce que faisait Tarski. Ainsi, McGee veut démontrer qu'une opération est logique si et seulement si elle est invariante sous les permutations. Il accepte que toute opération logique soit invariante sous les permutations et entreprend donc de démontrer la contraposée, c'est-à-dire que toute opération invariante sous les permutations est elle-même logique.

Pour ce, McGee introduit explicitement une dualité syntaxe-sémantique par le biais d'une distinction entre les connecteurs et les opérations. Il construit par la suite un langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ ne contenant que des connecteurs logiques et montre que toute opération invariante sous les permutations peut être définie au moyen de ce langage. Il en résulte que de telles opérations seront logiques puisque décrites uniquement par des connecteurs logiques.

Afin de rendre compte des opérations portant sur des domaines variables, McGee formule la thèse de Tarski-Sher. Son objectif consiste à faire de cette thèse une condition nécessaire et suffisante pour caractériser les opérations logiques. Or, il est pleinement conscient que deux problèmes minent irrémédiablement son approche. Conséquemment, McGee doit se contenter d'accepter la thèse de Tarski-Sher comme condition nécessaire.

L'article « Logic, Logics, and Logicism » de Solomon Feferman se veut une réaction directe à « Logical Operations » de McGee. En effet, Feferman ne se résout pas à accepter la thèse de Tarski-Sher et ce, ne serait-ce qu'à titre de condition nécessaire. À cet égard, trois critiques d'ordre philosophique sont formulées à l'endroit de la proposition de McGee et, par le fait même, de façon plus générale aux positions de Tarski et Sher. Premièrement, la thèse de Tarski-Sher assimile la logique aux mathématiques et, plus particulièrement, à la théorie des ensembles. Deuxièmement, les opérations décrites dans le langage $\mathcal{L}_{\infty\infty}$ ne sont pas nécessairement robustes. Or, l'assimilation à la théorie des ensembles exige qu'elles le soient. Finalement, selon Feferman, les opérations de la logique du premier ordre ont une signification constante peu importe leur domaine d'application.

Or, la thèse de Tarski-Sher n'exclut nullement que l'interprétation d'une opération varie en fonction du domaine d'application. Par exemple, une même opération pourrait agir comme une conjonction sur un domaine de cardinalité paire, comme une disjonction sur un domaine de cardinalité impaire et comme une biconditionnelle à la limite. Feferman est parfaitement conscient que la portée des deux premières crtiques peut s'avérer limitée. Par contre, la troisième critique souligne une lacune majeure et fondamentale.

Dans cette optique, « Logic, Logics, and Logicism » met également de l'avant une caractérisation des opérations logiques. À l'instar des précédentes, celle-ci se base sur l'invariance sémantique, mais elle utilise toutefois un autre type de fonction. Feferman définit une notion de relation de similitude sur les structures et constate que certaines de ces relations sont déterminées par des épimorphismes. Il suggère donc que les opérations logiques soient les opérations invariantes sous les épimorphismes. Aux yeux de Feferman, cette approche dispose de deux grands avantages. Premièrement, elle comble la lacune mise en évidence par la troisième critique. Deuxièmement, elle est totalement compatible avec sa vision de la logique en raison de l'adéquation entre les conséquences de cette caractérisation et de ses positions sur des questions telles la relation d'identité, la logique du second ordre, la quantification polyadique, etc.

Or, d'un point de vue plus général, l'utilisation de la notion d'épimorphisme entre deux structures ainsi que le rôle fondamental qu'elle joue dans la caractérisation de Feferman représente un premier pas vers un changement majeur de perspective. En effet, malgré leur diversité indéniable, les approches précédentes avaient en commun l'importance accordée aux questions d'ordre structurel. Les objets logiques forment le squelette autour duquel s'articule l'étude de la logique. Par exemple, les concepts de vérité et de conséquence logique dépendent de la forme logique des propositions, c'est-à-dire de la structure des formules en question. Pourtant, les suggestions de Mautner, Tarski, Sher, McGee et Feferman s'inscrivent clairement dans des cadres prescrits par la théorie des ensembles. Elles tentent alors de caractériser les objets logiques au moyen d'entités sémantico-mathématiques, mais à la lumière d'une perspective où les objets occupent le premier rang.

À cet égard, une approche essentiellement structurelle pourrait se révéler être des plus riches et mériterait d'être examinée. Les développements mathématiques survenus en théorie des catégories et en théorie des topos au cours des dernières décennies indiquent clairement que la logique peut y être développée. Or, la théorie des catégories prend essentiellement la forme d'une théorie des structures en raison de l'accent mis sur les relations entre les objets par le biais de la notion de morphisme au détriment des objets eux-mêmes.

De plus, la théorie des catégories se situe directement dans la continuité du Programme d'Erlangen à plusieurs égards. Lorsqu'appréhendée à travers le prisme de la théorie créée par Eilenberg et Mac Lane, la logique classique ainsi que de nombreuses logiques non classiques s'inscrivent dans un cadre conceptuel unique, uniforme et parfaitement général. En ce sens, une éventuelle caractérisation des objets logiques par l'entremise de la théorie des catégories permettrait peut-être de classifier les théories logiques conformément à l'esprit original de Klein…

Bibliographie

BOURBAKI, Nicolas. *Éléments d'histoire des mathématiques*, 2e ed., Paris, Hermann, coll. « Histoire de la pensée », nº IV, 1974, 376 p.

CARNAP, Rudolf. *The Logical Syntax of Language*, traduit de l'allemand par Amethe Smeaton, London, Routhledge & Kegan Paul ltd, coll. « International Library of Psychology, Philosophy and Scientific Method », 6e impression avec corrections, 1964, 352 p.

CHERN, Shiing Shen. « What is geometry? », *The American Mathematical Monthly*, Volume 97, nº 8, 1990, p. 679–686.

ETCHEMENDY, John. « The Doctrine of Logic as Form », *Linguistics and Philosophy*, Volume 6, 1983, p. 319-334.

-----------. « Tarski on Truth and Logical Consequence », *Journal of Symbolic Logic*, Volume 53, nº 1, 1988, p. 51-79.

-----------.*The Concept of Logical Consequence*, Cambridge, Harvard University Press, 1990, 174 p.

FEFERMAN, Solomon. « Logic, Logics, and Logicism », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Volume 40, nº 1, Special issue in honor and memory of George S. Boolos (Notre Dame, IN, 1998), 1999, p. 31-54.

-----------. « Tarski's Conception of Logic » [en ligne], http://math.stanford.edu/~feferman/papers/conceptlogic.pdf (consulté le 24 juin 2003).

FERNANDEZ MORENO, Luis. « Tarski and the concept of logical constant », *Logique et Analyse*, Volume 33, nº 131-132, 1990, p. 203–214.

FREGE, Gottlob. *Les Fondements de l'arithmétique : recherches logico-mathématiques sur le concept de nombre*, introduction et traduction de l'allemand par Claude Imbert, Paris, Éditions du Seuil, coll. « L'ordre philosophique », 1969, 232 p.

FRIEDMAN, Michael. « Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences », *Synthese*, Volume 84, nº 2, 1990, p. 213-257.

GEORGE, Alexander et Daniel J. VELLEMAN. *Philosophies of Mathematics*, Malden, Blackwell Publishers, 2002, 230 p.

GÓMEZ-TORRENTE, Mario. « Tarski on Logical Consequence », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Volume 37, n° 1, 1996, p. 125-151.

-----------. « The Problem of Logical Constants », *The Bulletin of Symbolic Logic*, Volume 8, n° 1, 2002, p. 1-37.

HAACK, Susan. *Deviant Logic: Some philosophical issues*, London, Cambridge University Press, 1974, 191 p.

-----------. *Philosophy of Logics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1978, 276 p.

HACKING, Ian. « What is Logic? », *Journal of Philosophy*, Volume 76, n° 6, 1979, p. 225-258.

HANSON, William H.. « Ray on Tarski on Logical Consequence », *Journal of Philosophical Logic*, Volume 28, n° 6, 1999, p. 607-618.

HAWKINS, Thomas. « The Erlanger Programm of Felix Klein: Reflections on Its Place in the History of Mathematics », *Historia Mathematica*, Volume 11, n° 4, 1984, p. 442–470.

KANT, Immanuel. *Critique de la raison pure*, traduit de l'allemand par Alain Renault, 2e ed., Paris, GF-Flammarion, 2001, 749 p.

KLEIN, Felix. « A Comparative Review of Recent Researches in Geometry », traduit de l'allemand par Dr. M. W. Haskell, *Bulletin of the New York Mathematical Society*, Volume 2, July 1893, p. 215-249.

MacFARLANE, John. « What Does it Mean to Say that Logic is Formal? », PhD Philosopy, University of Pittsburgh, 2000, 341 ff.

-----------. « Frege, Kant, and the Logic in Logicism », *The Philosophical Review*, Volume 111, n° 1, 2002, p. 25-65

MAKKAI, Michael. « On Structuralism in Mathematics », *Language, Logic, and Concepts*, Cambridge, MIT Press, Braford Book, 1999, p. 43–66.

MARSHALL, M. Victoria et Rolando CHUAQUI. « Sentences of Type Theory: The Only Sentences Preserved under Isomorphisms », *Journal of Symbolic Logic*, Volume 56, n° 3, 1991, p. 932-948.

MAUTNER, F. I. « An Extension of Klein's Erlanger Program: Logic as Invariant-Theory », *American Journal of Mathematics*, Volume 68, 1946, p. 345-384.

McCARTY, Timothy. « The Idea of a Logical Constant », *Journal of Philosophy*, Volume 78, n° 9, 1981, p. 499-523.

McGEE, Vann. « Logical Operations », *Journal of Philosophical Logic*, Volume 25, 1996, p. 567-580.

MOSTOWSKI, Andrzej. « On a Generalization of Quantifiers », *Fundamenta Mathematica*, Volume 44, 1957, p. 12-36.

NAGEL, Ernest. « The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry » In *Teleology Revisited and Other Essays in the Philosophy and History of Science*, Columbia University Press, New York, coll. « The John Dewey Essays in Philosophy », n° 3, 1979, p. 195-259.

QUINE, Willard van Orman. *From a Logical Point of View: 9 Logico-philosophical Essays*, 2e ed., Cambridge, Harvard University Press, 1961, 184 p.

-----------. *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, Inc., coll. « Foundations of Philosophy Series », 1970, 109 p.

RAY, Greg. « Logical Consequence: A Defense of Tarski », *Journal of Philosophical Logic*, Volume 26, n° 6, 1996, p. 617-677

SHAPIRO, Stewart. *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 2000, 308 p.

SHER, Gila. *The Bounds of Logic: A Generalized Viewpoint*, Cambridge, MIT Press, Bradford Book, 1991, 178 p.

SILVA, Sebastião. « On Automorphisms of Arbitrary Mathematical Systems », traduit de l'italien par A. J. Franco de Oliveira, *History of Philosophy and Logic*, Volume 6, n° 1, 1985, p. 91-116.

SIMONS, Peter. *Philosophy and Logic in Central Europe from Bolzano to Tarski: Selected Essays*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. « Nijhoff International Philosophy Series », Volume 45, 1992, 440 p.

STEWART, Donna I. M.. « The Influence of Klein's Erlangen Program », M. Sc. Mathematics, McMaster University, 1998, 105 ff.

TARSKI, Alfred. *Logic, Semantics, and Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, traduit par J. H. Woodger, Oxford, Oxford University Press, 1983, 471 p.

-----------. « What are Logical Notions? », *History of Philosophy and Logic*, Volume 7, n° 2, 1986, p. 143-154.

TARSKI, Alfred et Steve GIVANT. *A Formalization of Set Theory Without Variables*, Providence, American Mathematical Society, coll. « Colloquium Publications », Volume 41, 1987, 318 p.

van der HEIJENOORT, Jean, dir., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, 3e ed., Cambridge, Harvard University Press, 1976, 604 p.

van der WAERDEN, B. L.. *Gruppen von Linearen Transformationen*, New York, Chelsea Publishing Company, coll. « Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete », 1948, 91 p.

-----------. *Algebra, Volume 2*, traduit de l'allemand par John R. Schulenberger, New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1970, 284 p.

VARZI, Achille C., dir., *The Nature of Logic*, European Review of Philosophy, Volume 4, Stanford, CLSI Publications, 1999, 238 p.

VILLEGAS-Forero, Luis & Janusz MACASZEK. « Tarski on Logical Entities », *Logica Trianguli*, Volume 1, 1997, p. 115-141.

WEYL, Hermann. « Invariants ». *Duke Mathematical Journal*, Volume 5, 1939, p. 489-502.

-----------. *The Classical Groups, Their Invariants and Representations*, Princeton, coll. « Princeton Mathematical Series », 1946, 320 p.

-----------. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, Princeton University Press, 1949, 311 p.

WHITEHEAD, Alfred North et Bertrand RUSSELL. *Principia Mathematica*, 2e ed., Cambridge, Cambridge University Press, 1927, Volume 1, 674 p.

WHITELEY, Walter. « Logic and Invariant Theory I: Invariant Theory of Projective Properties », *Transactions of the American Mathematical Society*, Volume 177, 1973, p. 121-139.

-----------. « Logic and Invariant Theory II: Homogeneous Coordinates, the Introduction of Higher Quantities, and Strucutral Geometry », *Journal of Algebra*, Volume 50, 1978, p. 380-394.

-----------. « Logic and Invariant Theory III: Axiom Systems and Basic Syzygies », *Journal of the London Mathematical Society*, Volume 15, no 2, 1977, p. 1-15.

-----------. « Logic and Invariant Theory IV: Invariants and Syzygies in Combinatorial Geometry », *Journal of Combinatorial Theory*, Series B, Volume 26, 1979, p. 251-267.

WOLENSKI, Jan. *Logic and Philosophy in the Lvov-Warsaw School*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. « Synthese Library: Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science », Volume 198, 1989, 364 p.

WOLENSKI, Jan et Eckehart KÖHLER, dir., *Alfred Tarski and the Vienna Circle: Austro-Polish Connections in Logical Empiricism*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, coll. « Vienna Circle Institute Yearbook », Volume 6, 1999, p. 77-94.