Université de Montréal

# Symétrie: réflexions sur les formes naturelles

par

Alexandre Guay

Département de philosophie

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en philosophie

Octobre, 2003

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

Symétrie: réflexions sur les formes naturelles

présentée par:

Alexandre Guay

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

| | |
|---|---|
| Yvon Gauthier, | président-rapporteur ( |
| Jean-Pierre Marquis, | directeur de recherche |
| Richard MacKenzie, | codirecteur (physique) |
| Jean Letourneux, | membre du jury (physique) |
| Andrew Wayne, | examinateur externe ((Concordia Univ.) |
| Yvon Gauthier, | représentant du doyen de la FES |

Thèse acceptée le: 20 fév. 2004

## RÉSUMÉ

Cette thèse consiste en une analyse philosophique, et en particulier ontologique, du concept de symétrie utilisé en physique contemporaine. La thèse éclaircit d'abord les questions de fondement entourant le concept de symétrie, puis s'attarde à des problèmes philosophiques touchant des symétries particulières. On retrouve dans la thèse, dans l'ordre, la défense d'une définition de la symétrie comme étant une invariance (ou une équivalence) sous un changement possible. Puis suit une analyse de la formalisation de cette définition à l'aide des groupes et des groupoïdes qui met en évidence les limites et les avantages de ceux-ci. Par la suite, elle contient une discussion sur les différents critères de classification des symétries en physique, ce qui me permet de cartographier les différents genres de symétrie présents dans la discipline et d'en faire une analyse ontologique. Finalement, elle se termine par une analyse détaillée du statut de la symétrie locale de jauge en physiques classique et quantique qui argumente en faveur de la position qui soutient que la symétrie de jauge est le résultat d'un surplus de structure de la théorie. Ce résultat est surprenant car la symétrie de jauge est généralement considérée comme la symétrie la plus fondamentale et est, en fait, un des fondements de toutes les tentatives théoriques visant à décrire les interactions fondamentales.



Mots clefs: philosophie, philosophie des sciences, philosophie de la physique, physique quantique, symétrie, ontologie, réalisme, théorie des groupes, théorie des groupoïdes, symétrie locale, symétrie de jauge.

## ABSTRACT

This thesis is a philosophical analysis, and in particular an ontological one, of symmetries in modern physics. In the first two chapters, the thesis analyzes the foundation of the concept of symmetry, which is defined as an invariance (or equivalence) under a possible change to the system being studied. In the rest of the thesis, various philosophical problems concerning particular symmetries are discussed. This begins in the third chapter with an analysis of the formalization of the definition of symmetry given above in terms of groups and groupoids, highlighting their advantages and limitations. The fourth chapter gives a geography of the uses of symmetry in physics. To achieve this, different criteria for the classification of symmetries in physics are discussed. The thesis concludes with a detailed examination of the ontological status of local gauge symmetry in classical and quantum physics. In this chapter, it is argued that gauge symmetry is the result of a surplus of structure. This result is surprising because gauge symmetry is generally considered the most fundamental symmetry, and is in fact one of the cornerstones of virtually all theoretical attempts to describe the fundamental interactions.



Key words: philosophy, philosophy of science, philosophy of physics, quantum physics, symmetry, ontology, realism, group theory, groupoid theory, local symmetry, gauge symmetry.

# TABLE DES MATIÈRES

# LISTE DES FIGURES

Pour Pascale sans qui rien n'est possible.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier les nombreuses personnes avec lesquelles j'ai discuté depuis que je suis passé de la physique à la philosophie. Toutes ont contribué à leur façon au développement de cette thèse. De peur de trop en oublier, je ne mentionnerai pas de nom, si ce n'est celui de mes deux directeurs Jean-Pierre Marquis et Richard MacKenzie dont le support fut indéfectible tout au long du travail. Je remercie aussi tous mes collègues du Laboratoire René J.A. Lévesque pour les enrichissantes discussions que j'ai eues avec eux.

Je tiens aussi à souligner l'apport financier que m'ont fourni le département de philosophie et la faculté des études supérieures de l'Université de Montréal, la fondation J.A. de Sève et le Conseil de Recherches en Sciences Humaines du Canada.

# INTRODUCTION

Tous s'accordent en physique pour affirmer combien le concept de symétrie a pris de l'importance dans la discipline ces dernières décennies. Pour ne donner qu'un exemple, je mentionnerai le modèle standard, une des plus grandes réussites de la physique contemporaine. Ce modèle, qui est une théorie qui inclut trois des quatre forces fondamentales, soit l'électromagnétisme, l'interaction forte et l'interaction faible, a la symétrie locale de jauge comme fondement. Ceci n'est pas un cas isolé en physique. Le concept de symétrie, c'est-à-dire d'invariance sous un changement possible, est présent dans toutes les ramifications du domaine et est un guide pour formuler de nouvelles théories. Aujourd'hui, les théoriciens posent les symétries d'une théorie en développement avant de définir son ontologie. Il s'agit donc d'un concept d'importance.

Il y a cependant un curieux paradoxe dans la documentation concernant ce sujet. Si tous mettent l'accent sur les symétries, peu d'analyses philosophiques s'y attardent. Il existe une multitude d'ouvrages qui traitent de l'application de la théorie des groupes en physique. Cette théorie mathématique est en effet un outil privilégié de la formalisation des symétries. D'un autre côté, les éclaircissements du concept même de symétrie sont rares. Il en existe tout de même de remarquables. Par exemple, *Symmetry* d'Hermann Weyl publié en 1952 [Wey52] s'attache à clairement définir le concept de symétrie et à montrer comment ce dernier se formalise à l'aide des groupes. Eugene P. Wigner dans *Symmetries and Reflections* (1967) [Wig67] tente de répertorier tous les principes d'invariance en physique, mais avec un succès mitigé, je dois le dire. Plus récemment, Joe Rosen, dans *Symmetry Discovered* publié en 1975 [Ros75], s'est donné le projet ambitieux de définir une théorie générale de l'usage du concept de symétrie en science. Son travail est intéressant, mais il néglige des pans entiers du sujet. Ces oeuvres, malgré leur mérite, me laissent sur ma faim. Toutes se concentrent sur les symétries traditionnellement étudiées en physique, en gros celles impliquées par la relativité restreinte. On y traite peu des symétries internes, des symétries locales ou encore des difficultés particulières qu'implique l'usage des symétries en physique quantique. Les applications récentes des symétries en physique ne sont donc pas discutées. Nous avons, aujourd'hui, davantage de recul sur le sujet des symétries pour nous permettre d'aller plus loin que ces illustres prédécesseurs. Je ne reprendrai donc pas systématiquement leurs travaux, mais vais m'en inspirer pour développer ma propre approche du concept de symétrie.

Les trois ouvrages que j'ai mentionnés plus haut sont l'oeuvre de scientifiques. Cela ne veut bien sûr pas dire que les philosophes n'ont rien écrit sur les symétries, mais en général ils n'ont pas abordé le sujet sous le même angle que leurs collègues scientifiques. La tradition philosophique s'est surtout penchée sur le concept de symétrie en tant que principe de raisonnement ou impératif esthétique. Les aspects épistémologiques semblent avoir été privilégiés par rapport aux aspects ontologiques. *Laws and Symmetry* de van Fraassen [vF89] et *Symmetry arguments in physics* de Peter Kosso [Kos99] sont de bons exemples récents de cette tradition. Ayant décidé de me concentrer sur les questions ontologiques, j'ai mis de côté cette documentation.

Je me suis par contre attardé sur les écrits récents en philosophie des sciences qui s'intéressent à la symétrie de jauge. Si la plupart des ces articles sont élémentaires, ils m'ont servi de base de travail. Je mentionnerai ici ceux qui m'ont le plus influencé: l'article de Martin sur l'argument de jauge [Mar02], celui de Kosso sur le statut empirique des symétries [Kos00a], celui de Belot sur le point particulier de l'indéterminisme des théories de jauge [Bel98], celui de Redhead pour sa notion de surplus de structure [Red02] et celui de Healey sur l'existence du champ de jauge [Hea01]. Malgré ces quelques articles remarquables, on se doit de dire que le débat philosophique sur les aspects ontologiques des symétries en est à ses balbutiements. Je ne dit pas que rien n'a été fait, mais le sujet est encore trop récent pour que de grands courants puissent être identifiés. Au cours du siècle dernier, les philosophes de la physique se sont surtout concentrés à élucider la nature de l'espace-temps et à analyser les implications des différentes interprétations de la mécanique quantique non relativiste. Un sujet en apparence périphérique comme celui des symétries a peu suscité l'intérêt, malgré l'insistance des physiciens sur ce concept. Il n'est donc pas surprenant que le sujet soit peu développé. Étant parvenu à ce constat, j'ai décidé de ne pas inclure dans ma thèse l'habituelle recension de la documentation. Je n'ai donc pas écrit un chapitre qui reviendrait de façon systématique sur les affirmations de mes collègues et en ferait un commentaire critique. J'ai plutôt choisi d'entrer directement dans le vif du sujet et de clairement faire référence à mes sources lorsque nécessaire en les commentant au fil du texte.

Dans cette thèse, je me proposais donc d'éclaircir le rôle du concept de symétrie en physique, en portant une attention particulière aux questions ontologiques soulevées par celui-ci. En effet, je remets à un travail ultérieur l'analyse des aspects épistémologiques de l'usage des symétries. Ainsi, l'usage de la symétrie comme principe ou impératif, esthétique ou autre, ne sera pas discuté dans cette thèse. Malgré cette restriction aux seules difficultés ontologiques, mon programme était trop vaste. Cette thèse ne résoudra donc pas toutes les questions. Elle constituera, par contre, une base de travail et elle s'attaquera de front à certains problèmes pressants comme le statut de la symétrie de jauge.

Voyons maintenant de quelle façon s'articulera la thèse. Elle sera divisée en trois parties qui aborderont des difficultés distinctes. Tout d'abord, le chapitre 1 sera consacré à une courte présentation de la thèse réaliste que je soutiens. Ce chapitre ne sera pas une argumentation en règle en faveur du réalisme, une telle défense aurait été une thèse en elle-même. Le rôle de cette discussion consistera à proposer une façon d'arrimer les théories scientifiques à la réalité. Il ne sera pas essentiel d'être réaliste pour apprécier le contenu du reste de la thèse, mais il me semble intéressant d'ajouter ce chapitre. Dans les chapitres qui suivront, je vais discuter du statut ontologique de telle ou telle symétrie dans un modèle. Mon adhésion au réalisme me permettra de transférer ce discours en une analyse ontologique du statut de la symétrie étudiée dans la réalité.

La deuxième partie, qui sera composée des chapitres 2 et 3, visera à cerner les fondements du concept de symétrie en physique. D'abord, elle se donnera comme but d'identifier la définition opératoire qui correspond le mieux à l'usage des symétries dans le contexte de la physique. Une fois cette définition circonscrite, j'aborderai la question de sa formalisation. Deux formalismes seront discutés par la suite: le formalisme des groupes et celui des groupoïdes. Cette analyse, quelque peu technique, aura une pertinence philosophique, car le choix d'un formalisme oriente toutes les applications ultérieures du concept de symétrie et façonne la compréhension même de ce qu'il est. Dans cette seconde partie, je me pencherai tout particulièrement sur la notion de groupe de symétrie et ferai ressortir clairement les profondes relations qui unissent le trio de concepts: symétrie, relation d'équivalence et groupe de symétrie.

La troisième partie, composée des chapitres 4 et 5, sera moins générale et portera plus directement sur certaines questions philosophiques concernant les symétries en physique. Dans le chapitre 4, mon attention se portera sur les différents critères de classification des symétries. Cette discussion me permettra de mettre de l'avant une géographie des symétries en physique. Ce découpage sera l'outil privilégié de mon analyse du statut ontologique des symétries. Le chapitre 5, quant à lui, consistera en une discussion ontologique détaillée de la symétrie locale de jauge. Le statut de cette symétrie est en effet le sujet de nombreuses interrogations. Est-ce une symétrie fondamentale de la nature ou un artefact de la façon dont nous avons conçu nos théories? Cette question est d'autant plus pressante que toutes les théories modélisant les interactions fondamentales la possèdent. Dans ce chapitre, je soutiendrai que cette symétrie est le résultat d'un surplus de structure de la théorie, qu'elle n'est donc pas une symétrie fondamentale de la nature, ce qui rend d'autant plus surprenant son usage systématique.

# CHAPITRE 1

# La question du réalisme scientifique

## 1.1 Introduction

Même si elle est aujourd'hui moins présente dans le débat philosophique, je ne crois pas pouvoir éviter d'aborder la question du réalisme scientifique. Il est important de comprendre que cette question est au coeur d'une interrogation fondamentale, celle du rapport au monde que nous entretenons à travers la démarche scientifique. Qu'est-ce qu'une théorie scientifique sinon une certaine façon d'articuler ce rapport? Je ne crois pas que l'on puisse contester que les sciences naturelles entretiennent une relation particulière avec la réalité matérielle, cependant, la nature de ce lien est sujet à débat. La question du réalisme est le coeur de ce débat. Si cette question est moins présente qu'elle ne le fut, ce n'est pas parce que nous l'avons résolue. Elle resurgit encore régulièrement dans les écrits de philosophie des sciences. Dans ce chapitre, je vais exposer ma position réaliste, en tentant de ne pas perdre de vue les enjeux plus généraux qui découlent d'une telle position. Cet exposé doit être considéré comme les prolégomènes qui me semblaient nécessaires à la compréhension du reste de la thèse. Je ne voyais pas comment on pouvait saisir mes discussions ontologiques sans connaître le cadre réaliste dans lequel elles s'inscrivent. Malgré cela, seule une petite partie de la thèse dépend directement de la validité du réalisme.

## 1.2 Réalisme et relativisme

L'une des difficultés que l'on rencontre lorsque l'on aborde le débat du réalisme scientifique est le nombre non négligeable de définitions que ce concept possède dans les écrits philosophiques. À ce sujet, j'invite le lecteur à consulter le livre *Scientific Realism* de Stathis Psillos [Psi99] et le chapitre 1 du livre d'Ilkka Niiniluoto, *Critical Scientific Realism* [Nii99]. Plutôt que d'immédiatement poser ma définition du réalisme et de la mettre en constraste avec les autres définitions possibles je vais, dans cette section, poser le cadre général du débat selon mon point de vue.

Essentiellement, le réalisme est la thèse qui s'opppose aux différentes formes de relativisme, que ce soit au relativisme social de Barnes, Bloor et Henry [BBH96], au relativisme pragmatique de Richard Rorty [Ror91] ou même, dans une moindre mesure, au relativisme inhérent au réalisme interne d'Hilary Putnam [Put90]. Pour s'opposer au relativisme, les options défendables sont plutôt limitées. Comme le fait justement remarquer Richard Rorty[1], pour éviter le relativisme, le réaliste doit arrimer sa position dans quelque chose d'extérieur à l'humain, quelque chose d'objectif. Il se doit de défendre que les théories scientifiques valables correspondent, d'une façon ou d'une autre, à une réalité au moins en partie indépendante de l'esprit humain. Cela a pour conséquence que le réaliste ne peut se passer du discours métaphysique, un discours que beaucoup de philosophes ont tenté d'éliminer au cours du dernier siècle.

Si la position réaliste ne peut éviter la métaphysique, nous sommes en droit de lui demander de préciser à quelle réalité elle fait référence. À la lumière de travaux comme ceux de Thomas Kuhn [Kuh83], il ne me semble plus possible de défendre une forme de réalisme qui verrait le rapport entre théorie et réalité comme correspondant au regard divin, c'est-à-dire où les théories scientifiques valables seraient des descriptions littérales du monde telles que pourrait les formuler un être omnipo-

[1] Page 22, [Ror91].

tent. Aujourd'hui, notre conception de la réalité doit passer par une réflexion sur le rapport que nous avons avec elle, d'où l'énorme difficulté qu'il y a à ne pas tomber dans une forme de relativisme. Comment tenir compte des limitations humaines sans pour autant affirmer que les liens que nous percevons entre nos théories et la réalité sont arbitraires? Pour clarifier les choix qui s'offrent à nous, je m'inspire d'un passage de Mario Bunge provenant de *Philosophy of Physics*[2]. Selon Bunge les théories physiques, mais nous pourrions tout aussi bien dire toutes les théories scientifiques, soit ont des référents, soit n'en possèdent pas. Si elles n'ont pas de référents, elles ne décrivent pas le monde indépendant de nos esprits. Nous avons affaire à une forme totale d'antiréalisme. Par exemple, toutes les formes de conventionalisme (social ou autre) ou d'instrumentalisme sont dans cette catégorie. D'un autre côté, si l'on considère que les théories réfèrent à quelque chose, cette chose peut être de différentes natures.

1. **La thèse réaliste** Les théories réfèrent à des systèmes physiques. Elles portent sur des entités et des événements qui ont, au moins en partie, une existence autonome.

2. **La thèse subjectiviste** Les théories réfèrent aux sensations ou aux idées d'un sujet engagé dans des actes cognitifs. Ultimo, elles réfèrent à des états mentaux.

3. **La thèse stricte de Copenhague** Les théories portent sur des blocs sujet-objet qui ne peuvent être analysés, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de façon rationnelle de faire la coupure entre le sujet et l'objet.[3]

4. **La thèse dualiste** Les théories portent à la fois sur les objets physiques et les acteurs humains. Elles sont concernées par les interactions que les humains entretiennent avec leur environnement (pragmatisme) ou par la façon dont les humains manipulent les systèmes qu'ils désirent connaître (opérationnalisme).

[2] Page 55-56, [Bun73].

[3] Cette thèse s'applique à la mécanique quantique, mais on peut imaginer l'utiliser dans d'autres domaines.

La première thèse est ce que j'entends par réalisme. Cette thèse implique d'une façon ou d'une autre la défense d'une conception correspondantiste ou fonctionnelle de la vérité. Les théories ont un rapport au minimum fonctionnel avec quelque chose hors de nos esprits. Bien sûr, tous les défenseurs du réalisme ne soutiennent pas la même conception de la vérité, ni même la même position quant à notre capacité à identifier comme étant vraies certaines de nos constructions théoriques. Nous reviendrons sur ce spectre un peu plus loin. La thèse subjectiviste est une forme d'antiréalisme, bien qu'elle ne soit pas une forme de relativisme comme celles déjà mentionnées plus haut. Dans cette thèse les théories ne font pas référence à quelque chose d'extérieur à l'esprit, à moins bien sûr que l'on possède une théorie faisant correspondre les états mentaux à des états physiques, comme par exemple aux états neurologiques. Dans ce cas, cependant, la deuxième thèse se ramènerait à la première. La thèse stricte de Copenhague implique que les énoncés d'une théorie réfèrent à quelque chose de physico-mental. Cette thèse implique donc naturellement l'antiréalisme, l'apport du sujet ne pouvant être vraiment isolé. La thèse dualiste affirme que le référent d'une théorie est, d'une certaine façon, l'action humaine. Dans le cas du pragmatisme, on se concentre sur les actions efficaces. Dans celui de l'opérationalisme, on réfère aux interactions sujet-objet, c'est-à-dire aux manipulations expérimentales et tout particulièrement à l'action de mesurer. Dans les deux cas, je ne vois pas comment on pourrait défendre une forme d'objectivité. Cette thèse implique donc aussi l'antiréalisme.

De cette courte discussion, on constate qu'il n'y a pas qu'un seul antiréalisme et que ses différentes formes n'ont pas grand chose à voir entre elles. On remarque tout de même que toutes les thèses antiréalistes contiennent un certain relativisme. On ne peut pas clairement y distinguer ce qui, dans une théorie, peut correspondre à une réalité indépendante du sujet. Ceci étant dit, après avoir discuté de ce à quoi s'oppose le réalisme, je vais définir ce dernier.

## 1.3 Définition du réalisme

Toutes les positions réalistes posent qu'il existe une réalité qui est au moins en partie indépendante de nos esprits. À partir de cette assertion, ce que l'on peut connaître de ce monde diffère selon les philosophes. Voyons quelques conceptions particulières:

> R2. Things in themselves are knowable, though only partially and by successive approximations rather than exhaustively and at one stroke.
> R3. Any knowledge of a thing in itself is attained jointly by experience (in particular experiment) and by reason (in particular theorizing). However, none of these can pronounce final verdicts on anything. (Mario Bunge, Page 28, [Mah01].)

> Scientific realism says that the entities, states and processes described by correct theories really do exist. (Ian Hacking, Page 21, [Hac83].)

> Science aims to give us, in its theories, a literally true story of what the world is like; and acceptance of a scientific theory involves the belief that it is true. (Bas C. van Fraassen, Page 8, [vF80].)

> [...] scientific realism as the view that when a scientific theory is accepted, most elements of the theory are taken as representing (in some respects and to some degree) aspects of the world. (Ronald N. Giere, Page 7, [Gie88].)

Hacking défend un réalisme des entités et Giere un réalisme représentatif. Van Fraassen insiste sur la vérité des théories et Bunge permet une variabilité de positions. Toujours dans le souci d'opposer réalisme et relativisme, je définis le réalisme de façon à inclure implicitement tout ce spectre de positions.

**Définition 1 (Le réalisme scientifique)** *La position qui soutient que 1) les sciences naturelles ont pour objectif de produire des descriptions vraies du monde et que 2) cet objectif est accessible et a déjà été, en partie, atteint.*

Pour comprendre comment cette définition peut engendrer tout le spectre du réalisme, il me faut discuter de ce que j'entends par description et en particulier par description vraie. Tout d'abord j'emploie le terme description parce que je ne veux pas limiter mon propos aux seules théories. Je veux inclure des démarches de représentations scientifiques qui ne produisent pas des théories au sens traditionnel. Je veux permettre, par exemple, que la recherche de mécanismes soit aussi intégrable dans la démarche réaliste[4]. Une description est une construction qui peut être en tout ou en partie linguistique, qui est conçue dans le but d'avoir un rapport d'adéquation avec ce que l'on désire décrire, dans notre cas la réalité. Une description est toujours faite selon une certaine utilité, selon un certain point de vue. Cela signifie qu'il y a toujours une certaine part d'arbitraire dans les paramètres que l'on choisit d'inclure dans une description particulière. Il est donc possible que deux descriptions se référant au même domaine de réalité diffèrent profondément. Il y a une certaine localité conceptuelle dans le concept de description. Sachant cela, on comprend qu'une description vraie ne peut pas l'être au sens d'une correspondance stricte avec le réel. On doit plutôt faire appel à une notion de vérité corrélative ou fonctionnelle. La relation entre une description et la réalité n'en est pas une d'image de l'autre, elle est fonctionnelle au sens mathématique du terme. Il est à noter que pour une description particulière, cette fonction n'est pas toujours explicite. Une même construction descriptive peut correspondre avec le réel de façon différente selon la façon dont on conçoit cette fonction. Voyons un exemple. L'équation de Dirac nous permet de prédire le comportement de certaines entités en mécanique quantique relativiste. Cette équation possède des solutions d'énergie négative. On aurait pu les interpréter comme des solutions non physiques, qui ne correspondent à

[4]Au sujet de la distinction entre théorie et mécanisme voir l'article de Peter Machamer et cie [MDC00].

rien. C'est d'ailleurs ce que nous aurions probablement fait face à de telles solutions dans le contexte de la mécanique classique. Dirac a plutôt proposé de les interpréter comme les solutions d'énergie positive associées aux antiparticules. Une même structure formelle peut donc soutenir deux fonctions de correspondance avec le monde extérieur. Cet exemple met en évidence un point important. Le rapport de vérité qu'entretient une description avec la réalité[5] dépend de l'interprétation que l'on fait de celle-ci. En pratique, associer une ontologie à un certain formalisme revient à poser la fonction de vérité. L'approche réaliste ne peut donc en aucun cas se passer de la métaphysique qui est présente dans les débats qui entourent l'interprétation des descriptions scientifiques. Autre point, cette fonction qui relie la description à la réalité peut ne pas se limiter à la relation d'une entité linguistique vers une entité non linguistique. Certaines parties d'un modèle pourraient ne pas être linguistiques et tout de même avoir une correspondance avec le monde. Cette fonction pourrait donc dans certains cas être un isomorphisme[6].

Comme le lecteur l'aura peut-être remarqué, ma position s'apparente au perspectivisme de Ronald N. Giere[7]. Comme lui, je soutiens que la science est une entreprise de représentation du monde. Cependant, je suis circonspect quant aux métaphores visuelles qui semblent former la base de la pensée de Giere. Si les descriptions théoriques cartographient bien le réel, ce n'est pas, selon moi, dans le sens où les descriptions et le monde partagent des propriétés et structures. Ceci me paraît pousser l'analogie visuelle trop loin. Je comprends tout de même que Giere ne peut vraiment défendre autre chose compte tenu de son entreprise de naturalisation de l'épistémologie à l'aide des résultats des sciences cognitives, domaine de recherche qui s'est surtout intéressé à la vision. Je crois qu'une description peut entretenir

[5]En physique, une description est, dans la plupart des cas, soit une théorie, soit un modèle ou encore une loi.

[6]Dans certaines conceptions de l'approche sémantique des théories, on considère que l'isomorphisme est la relation que doit entretenir un modèle avec un phénomène pour que le modèle soit empiriquement adéquat. Voir à ce sujet van Fraassen, chapitre 9, [vF89].

[7]Voir la deuxième partie de [Gie99].

des rapports d'une autre sorte avec le monde. On pourrait, par exemple, envisager qu'une description représente des mécanismes supposément à l'oeuvre dans la réalité. Dans ce cas, l'analogie visuelle est insuffisante car ce que l'on décrit ce sont des activités et pas seulement des entités et leurs propriétés[8].

Ma définition du réalisme comporte deux thèses[9]. La première donne l'objectif de la science et peut suggérer une certaine méthodologie. La seconde est factuelle. Elle affirme que l'objectif de la première thèse peut être atteint. Il est aisé de constater que l'on pourrait adhérer à la première thèse, sans pour autant défendre la seconde, car cette dernière demande un argument sur la méthodologie de la science qui nous prouve que l'entreprise scientifique a les moyens de ses ambitions. Être réaliste demande que l'on adopte les deux thèses. Si l'on se contentait de la première, on ne pourrait distinguer cette position de certains antiréalismes, comme le constructivisme social. Par exemple, un constructiviste comme Bruno Latour [LW86] ne nie pas que l'objectif avoué des chercheurs en sciences naturelles est de décrire la réalité, mais il croit que les pratiques scientifiques ne leur permettent pas d'atteindre ce but, puisque, selon lui, les faits et les méthodes scientifiques sont des constructions purement sociales livrées au relativisme.

Il ne faudrait pas voir le choix entre réalisme et antiréalisme un dilemme entre deux possibilités discrètes. Ces thèses, si on analyse leur définition, rendent possible un spectre de positions. Ronald Giere [Gie88] considère que les modèles scientifiques sont des systèmes formels qui ressemblent, par certains aspects, au monde. On peut donc lui attribuer une conception forte du pouvoir descriptif des théories scientifiques. Celles-ci correspondent à une partie de la réalité. On lui attribuera une position réaliste forte. À côté de cela, Nancy Cartwright, dans *How the Laws of Physics Lie* [Car83], défend que seules les entités causalement efficaces

[8]Voir l'article déjà cité de Machamer et cie, [MDC00].

[9]Il y a bien sûr en plus la thèse implicite affirmant que la réalité existe et qu'au moins une part de cette réalité est indépendante de nos esprits.

présentent dans les théories peuvent correspondre à quelque chose dans le monde. Tout ce qui dans les théories n'est pas une entité de ce type est une fiction utile. Sa position réaliste est donc beaucoup moins engagée que celle de Giere. Du côté de l'antiréalisme, on peut placer l'empirisme constructif de Bas van Fraassen [vF80]. Selon lui, on ne peut rationnellement se convaincre que les théories scientifiques sont vraies. Au mieux, elles sont empiriquement adéquates. La position de van Fraassen est un antiréalisme faible, puisqu'il considère que les théories scientifiques doivent être interprétées de façon littérale. Par exemple, les théories physiques sont bien des descriptions de champs, de forces, etc. qui existeraient dans le monde. On ne peut cependant pas démontrer que ces entités théoriques correspondent à des entités réelles. Van Fraassen rejetterait donc la deuxième thèse de ma définition du réalisme scientifique. Encore plus loin vers l'antiréalisme, je place les positions constructivistes sociales, comme celle défendue par David Bloor, Barry Barnes et John Henry [BBH96]. Dans ce cas, le pouvoir descriptif des théories scientifiques est nul. Les théories se comparent à des jeux dont les règles sont totalement arbitraires. La réalité n'est qu'une contrainte, comme l'est la gravitation au baseball. Cette courte liste nous permet de constater que du réalisme à l'antiréalisme, il y a tout un spectre de positions possibles. Ce spectre est une échelle qualifiant le rapport qui unit les théories au monde. Dans toutes les formes de réalisme, ce lien est serré. Les théories décrivent des aspects du monde. Les thèses antiréalistes considèrent ce rapport comme indirecte. Les théories peuvent peut-être décrire certaines apparences, mais rien au-delà.

## 1.4 Réalisme global et réalisme local

Je vais maintenant introduire une distinction qui occupera une grande place dans ce qui suit. Le réalisme tel que nous l'avons décrit jusqu'à maintenant est une forme globale ou générale de réalisme. Par contraste, on peut parfois rencontrer des questions concernant un réalisme local ou partiel, c'est-à-dire des questions qui portent sur la capacité descriptive d'une partie seulement de la théorie. Par exemple, on peut s'interroger sur l'existence d'entités particulières proposées par une description. Une certaine position quant au réalisme global peut ne pas s'étendre à toutes les questions de réalisme local. En effet, il n'est pas contradictoire de soutenir un réalisme global en physique classique, tout en étant sceptique en ce qui concerne certaines entités, comme les champs de jauge. Cette position affirme seulement que l'on croit dans la capacité descriptive des théories physiques en général, mais que ce n'est pas tout ce que contiennent ces théories qui est descriptif[10]. L'inverse est aussi possible. On peut être en général antiréaliste en physique, tout en défendant que les prévisions empiriques déduites des théories sont des descriptions. On défendrait alors un réalisme local envers la partie empirique des théories physiques. Une telle position aurait cependant peu de raison d'être qualifiée de réaliste. La distinction entre réalismes global et local est importante car ces deux branches semblent se rapporter à une épistémologie différente. De quel ordre sont les questions de réalisme local? Et de réalisme global?

À la fin du premier chapitre de *Representing and Intervening* [Hac83], Ian Hacking distingue aussi le réalisme global ou général du réalisme local ou partiel. Il affirme que le réalisme global est une question philosophique qui fait écho aux débats métaphysiques des siècles passés et à la philosophie du langage développée dans le siècle dernier. Les questions de réalisme particulier ou local sont, selon lui, de l'ordre de la science. Elles sont résolues par des recherches dans le cadre d'une science particulière qui se base sur des faits contingents. Cette distinction quant aux méthodes appropriées pour aborder la question du réalisme est très importante, car elle nous ramène au point de départ du travail philosophique. Sur quelles assises doit s'articuler la question du réalisme? Admettons que l'on privilégie la pratique scientifique comme point de départ, c'est-à-dire que l'on considère que, globalement,

[10] Rappelons qu'une telle position peut être soutenue car je considère que le rapport entre théorie et réalité est fonctionnel et non congruent.

les résutats et les pratiques scientifiques matures ne sont pas contestables en bloc. Cette position est typique du projet de naturalisation de l'épistémologie qui est si présent dans le débat philosophique des dernières années. Comme Hacking et Giere, on considérera comme base du travail ce que les scientifiques font. Cette position paraît toute naturelle pour des défenseurs du réalisme. Alors, que font les scientifiques? Ils semblent fabriquer des appareils théoriques et expérimentaux qui leur permettent de manipuler le réel pour en faire ressortir les structures, des structures qui sont souvent non perceptibles directement à l'aide des sens. Si l'on part de cette pratique, nous n'aurons aucun mal à nous convaincre que les questions de réalisme local sont du ressort de la science. Vérifier si une entité existe revient à démontrer que l'on peut manipuler cette entité et en faire une description adéquate bien que partielle. Cela nous rappelle le fameux: "if you can spray them, they are real" de Hacking. En fait, lorsque ce dernier affirme que les questions de réalisme local sont du seul ressort de la science, il simplifie quelque peu. La méthodologie empiriste a les outils pour tester si une description est empiriquement adéquate. Par contre, vérifier l'existence d'une entité particulière demande souvent plus qu'une mesure. Il nous faut interpréter la théorie conjointement avec les résultats expérimentaux. Cette analyse, que les scientifiques qualifient parfois de "philosophique", fait traditionnellement partie du travail de théorisation scientifique. Lorsque Hacking affirme que les questions de réalisme local sont du ressort de la science, c'est à cette pratique qu'il fait référence, pratique qui mêle intimement théorie et manipulations expérimentales. Qu'en est-il de la question du réalisme global (ou philosophique)? Là le discours scientifique atteint sa limite. La question du réalisme global n'est pas une question scientifique. On voit mal comment fabriquer un appareillage scientifique pour y répondre. Par contre, on pourrait tenter quelque chose en posant la question du réalisme global comme une généralisation des questions spécifiques de réalisme local. Dans cette perspective, le succès de la mise en évidence de certaines entités, comme l'électron, et la fiabilité des modèles qui les décrivent, nous incitent à croire que la science recherche bel et bien à produire des descriptions du monde et que certaines de ces descriptions sont vraies au moins en partie. On passe donc du particulier au général, du local au global. Les cas de réalisme local étant fondés dans la science, on se permet d'induire la validité du réalisme global, thèse qui n'est pas scientifique mais philosophique.

Mais ne doit-on pas déjà implicitement avoir posé la validité du réalisme global pour juger des réussites du réalisme partiel? À strictement parler, oui. Il le faut bien pour se convaincre que nous décrivons avec succès l'entité électron. Pour juger de la réussite locale d'une description, il faut déjà croire dans le pouvoir descriptif des théories scientifiques. Cela nécessite l'adhésion au réalisme global. Nous voici donc face à un raisonnement circulaire. Pour poser la pratique scientifique comme fondement de la question du réalisme local, on se doit d'adopter le réalisme global, qui justifie la description que l'on fait de la pratique scientifique. Sans cette garantie, les débats scientifiques qui concernent l'existence de telle ou telle structure pourraient être de même nature que les débats politiques. Et je serais alors forcé d'adopter une position antiréaliste. On pourrait argumenter que les pratiques scientifiques ne sont pas comme les débats idéologiques, car elles possèdent un taux de succès beaucoup plus grand que ces derniers, ce qui laisserait penser que les sciences matures décrivent bel et bien la réalité. Mais comment peut-on évaluer ce succès sans présumer de la capacité descriptive des sciences, c'est-à-dire en posant au préalable le réalisme? Que conclure de cette circularité? Que la thèse du réalisme ne peut directement s'appuyer sur les pratiques scientifiques?

La stratégie la plus simple pour ne pas rencontrer le problème soulevé plus haut serait de défendre directement le réalisme global. Cela me permettrait de passer aux questions de réalisme local en sachant qu'elles sont légitimées par mon adhésion au réalisme global. Cette tactique est à l'oeuvre dans les arguments qui justifient le réalisme global par le fait que cette thèse philosophique est la meilleure explication de l'efficacité ou du succès de l'entreprise scientifique. Pour être acceptables, plusieurs aspects de ce raisonnement doivent être soigneusement analysés. Comment est défini le succès de la science en général? L'inférence à la meilleure explication, une inférence typiquement scientifique, est-elle valable dans ce contexte? Cet argument n'est-il pas circulaire? Stathis Psillos, dans *Scientific Realism* [Psi99], consacre beaucoup de pages à clarifier ces points et en tire la conclusion qu'un tel argument ne peut être valide que dans le contexte d'une épistémologie externaliste. Une autre façon d'aborder la dichotomie réalisme global/local est celle de Ronald N. Giere. Ce philosophe, qui représente bien une certaine mouvance philosophique qui tente de naturaliser l'épistémologie, refuse de s'avancer sur le terrain de la justification a priori du réalisme global. Il part plutôt de la pratique scientifique. Selon lui, un bon modèle de la pratique scientifique est de la considérer comme une entreprise visant à produire des représentations sophistiquées de la réalité. Nous avons par ailleurs des raisons de croire que nos capacités cognitives ne nous trompent pas complètement sur la nature du monde. Ces raisons nous proviennent des recherches en psychologie et en théorie de l'évolution. Les méthodes de la science n'étant, selon Giere, que des extensions de nos capacités de représentation ordinaires, il se sent justifié d'être réaliste[11]. Cette façon d'aborder le problème assume une certaine circularité, puisqu'elle ramène la question du réalisme dans le giron de la science. Pour les adeptes du naturalisme, cette circularité est une limite intrinsèque de toute démarche épistémologique. On ne peut donc pas l'éviter. Avec ces deux exemples de justification, on voit en gros deux des principaux angles d'attaque du problème du réalisme. Ma thèse de doctorat ne portant pas sur le réalisme, je ne poursuivrai pas cette présentation d'arguments à sa défense. Je vais par contre comparer ma conception du réalisme à une autre position et ce, dans le but de clarifier davantage ma position.

[11] Pour plus de détails, consulter [Gie99].

## 1.5 Comparaison avec le réalisme interne

Toutes les formes de réalisme scientifique affirment qu'il est possible d'atteindre une certaine objectivité en science. S'opposant à cela, les arguments sceptiques soutiennent que notre connaissance des mécanismes du langage, de l'histoire des sciences, des facteurs sociaux et de l'esprit humain devrait nous inciter à croire que la subjectivité est si importante dans nos rapports au monde, qu'il n'est pas possible de distinguer ce qui est objectif de ce qui ne l'est pas. Ne pouvant nier en bloc ces arguments, le réaliste doit déterminer ce qui peut être objectif malgré la subjectivité qui est bel et bien présente à toutes les étapes de l'acte cognitif. Lorsque l'on s'intéresse à la recherche de l'objectivité dans la subjectivité, on pense immédiatement à la démarche d'Emmanuel Kant dans sa *Critique de la raison pure.* Dans cette section, je vais m'intéresser à la position d'Hilary Putnam, qui se réclame justement de Kant tout en défendant des positions fort différentes. Je vais comparer son réalisme interne ou pragmatique à ma propre position. Comme le lecteur pourra le constater, il n'est pas évident que la position de Putnam mérite le nom de réalisme. Malgré cela, cet exercice de comparaison devrait permettre de clarifier davantage mon réalisme. Je vais résumer le réalisme de Putnam par trois thèses[12]:

1. Le monde ne nous est pas donné. Sa structure est relative au cadre conceptuel[13].

2. La vérité est une espèce d'acceptabilité rationnelle idéale.

3. Il y a plus d'une description vraie du monde[14].

---

[12] Il est à noter que cette lecture de Putnam m'a été inspirée par la lecture de Niiniluoto (chapitre 7, [Nii99]).

[13] Cette thèse fut défendue par Putnam dans l'article "Why there isn't a ready-made world" se trouvant à la page 205 de *Realism et Reason* [Put83].

[14] Les thèses 2 et 3 sont discutées dans *Raison, vérité et histoire* [Put84]. Le réalisme interne a, à nouveau, été défendu par Putnam dans l'ouvrage *Realism with a Human Face* [Put90].

Je suis d'accord avec Putnam pour dire que le monde ne nous est pas donné. Nous projetons davantage nos théories que nous ne les dégageons du monde. Il y a trop de filtres cognitifs entre nous et le monde pour qu'il en soit autrement. Par contre, j'ai plus de difficultés avec la deuxième partie de la première thèse de Putnam. S'il est vrai que toute discussion ontologique en science est relative à un cadre conceptuel, je ne vois pas comment ce genre de constatation pourrait impliquer quelque chose quant à la structure de la réalité. Cette structure est indépendante de nos limitations cognitives. S'il est vrai qu'une discussion sur l'existence du neutrino ne peut se faire en pratique hors du cadre d'une théorie, puisque cette entité n'est connue qu'à travers ses interactions avec d'autres particules, cela n'implique pas automatiquement que le neutrino de la théorie ne peut représenter adéquatement une structure réelle. Pour que cette contrainte méthodologique entraîne une contrainte ontologique, il faut que la réalité soit sans structures préalablement présentes. C'est d'ailleurs ce que défend Putnam. Cette affirmation ne me paraît pas justifiée, car elle ne peut être démontrée a priori et je ne vois pas de base empirique en sa faveur; au contraire, la capacité que nous avons d'identifier des structures scientifiques efficaces nous incite à croire que le monde possède une structure[15]. Nous aurions la même difficulté méthodologique si la réalité possédait une structure si complexe qu'elle ne pourrait être décrite globalement, mais seulement localement et jusqu'à un certain degré. Dans ce cas aussi, nous serions forcés de discuter d'ontologie relativement à un cadre théorique, puisque la véritable structure du monde se verrait par sa complexité au-delà de nos capacités descriptives. Face à ces deux hypothèses, un monde sans structures ou un monde structurellement complexe, je penche pour la seconde car elle me paraît plus cohérente avec la pratique scientifique. Je demeure cependant ouvert aux arguments soutenant que j'ai tort.

La seconde thèse affirme que Putnam soutient une conception épistémique de la vérité. Il oppose d'ailleurs sa conception à ce que devrait défendre un réaliste

[15] L'incommensurabilité sémantique kuhnienne pourrait soutenir la thèse de Putnam, mais cette affirmation est elle-même difficile à défendre.

métaphysique, c'est-à-dire une conception de la vérité radicalement non épistémique. Comme je l'ai déjà mentionné, je propose une conception intermédiaire de la vérité. Le fait que la relation entre description vraie et le réel soit fonctionnelle amène une certaine objectivité. D'un autre côté, la façon de construire cette fonction n'étant pas unique, on doit se rabattre sur des critères pragmatiques pour le faire. Je vois fort bien ces critères pragmatiques se fonder sur la rationalité que défend Putnam ou encore sur les valeurs épistémiques. Une chose est sûre, ce pragmatisme n'est pas suffisant pour nous projeter vers l'antiréalisme. Quant à la troisième thèse, elle est, dans ma perspective, une conséquence de ma conception de la vérité. S'il y a plus d'une façon valable de construire le rapport fonctionnel qui relie description et réalité, il est possible d'envisager que deux descriptions incompatibles de la même région du monde soient vraies.

## 1.6 Conclusion

Le reste de cette thèse a été écrit en ayant à l'esprit le réalisme tel que décrit dans ce chapitre. Cette thèse réaliste doit beaucoup au réalisme constructif de Giere, bien que je trouve que ce dernier néglige la notion de vérité. Par ailleurs, je puise dans le réalisme interne de Putnam pour définir comment s'insère la subjectivité dans la pratique de l'attitude réaliste en science. En fait, j'admire la métaphysique naturalisée de Giere et le soucis épistémologique de Putnam. Malheureusement, les thèses de ces deux philosophes ne sont pas compatibles. Néanmoins, je crois que l'on peut élaborer un réalisme puisant dans la conception métaphysique de Giere, mais qui renonce à son projet de naturalisation de tous les autres aspects de l'épistémologie.

CHAPITRE 2

# Le concept de symétrie

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre sera discuté ce que j'entends par symétrie. Je tiens à distinguer le concept de symétrie des différents formalismes qui l'incarnent dans des applications particulières. Ce chapitre sera consacré au concept, le suivant aux formalismes. Par hasard, j'ai entendu une conversation des plus pertinentes provenant d'un bureau non loin du mien dans le Laboratoire René-J.A.-Lévesque. Cet échange mettait en scène les physiciens Rémi et Paule. C'est cette conversation que je reproduis ici.

## 2.2 Dialogue entre Paule et Rémi

Paule - Viens voir Rémi ce que j'ai trouvé en magasinant cet avant-midi. C'est la reproduction d'une tablette en schiste se trouvant au musée du Louvre. L'original aurait plus de 5000 ans.[1]

Rémi - Plutôt étrange comme truc, surtout les molosses qui constituent le cadre. Au centre, ce sont des girafes?

Paule - Je pense que oui. Comment la trouves-tu? Pour ma part, je trouve que l'ensemble exhibe une intéressante symétrie, un équilibre. Il me semble aussi que la disposition des animaux est probablement symbolique. On ne sent pas que l'artiste

[1] Voir Figure 2-1.

Figure 2-1: Palette encadrée de quadrupèdes, hyènes ou lycaons, (3300-3100 avant J.-C.).

ait voulu donner une représentation réaliste d'animaux.

Rémi - Que veux-tu dire exactement? Que ce qui est réaliste, et donc plus près de la nature, est incompatible avec la symétrie? Pour que la figuration soit réaliste, elle doit exhiber une asymétrie?

Paule - N'essaie pas de me faire dire ce que je ne dis pas. Tout ce que je voulais dire, c'est que j'associe le concept de symétrie à celui d'ordre. La symétrie s'oppose à ce qui est chaotique. La nature me paraît plus chaotique qu'autre chose, et ce, malgré le fait que notre travail en physique est de projeter un certain ordre sur tout ça. La palette étant très symétrique, j'en déduis qu'elle ne représente pas la nature.

Rémi - Si je suis d'accord avec toi sur l'opposition entre désordre et symétrie, je ne crois pas que cela ait quelque chose à voir avec la présence de symétrie dans la nature. Si on observe bien, on constate que les symétries abondent dans la nature. Pour ne prendre qu'un exemple: le flocon de neige, qui rappelle de façon quasi-parfaite la forme symétrique de l'hexagone.[2]

Paule - Hum... Malgré les apparences, est-ce que nous ne serions pas d'accord sur le fond? Essayons de clarifier les termes que nous employons. Il semble y avoir confusion entre nous quant à l'usage du mot “symétrie”. Et n'essaie pas de me sortir ton jargon de théorie des groupes, cela ne m'éclairera pas. Soyons plus systématiques.

[2] Voir Figure 2-2.

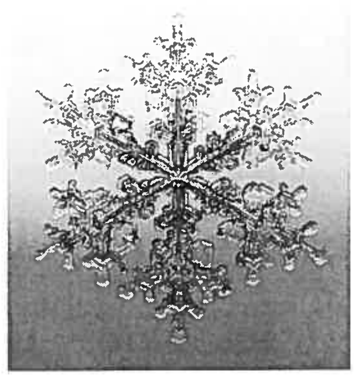

Figure 2-2: Photographie d'un flocon de neige par Walter Wick, 1997

Au mot symétrie, le dictionnaire donne comme définition: "régularité et harmonie, dans les parties d'un objet ou dans la disposition d'objets semblables".

Rémi - Cette définition m'est familière, mais je ne la trouve pas particulièrement opérationnelle. D'ailleurs, je me souviens d'avoir voulu en connaître l'origine et d'avoir lu le livre de Lev Tarasov où il affirme que le mot symétrie vient du grec $\sigma\nu\mu\mu\varepsilon\tau\rho\nu\alpha$ qui signifie proportionnalité, similarité dans l'arrangement des parties[3].

Paule - Malgré tes réserves je vois que nous nous entendons sur une définition. Voyons si nous comprenons ce qu'elle implique de la même manière. Régularité, proportionnalité, harmonie, tous des mots apparentés, mais qui ne veulent par dire la même chose. Comment crois-tu que le concept de symétrie s'articule autour de ces termes?

Rémi - Bof! Tous ces mots font référence à un certain ordre. La symétrie serait donc caractérisée par une certaine forme d'ordre. Par cela, je rejoins ton intuition de tout à l'heure.

Paule - Cela me semble assez vague. Avec ta remarque, au mieux je peux affirmer que l'asymétrie dénote une absence d'ordre, ou au minimum une faille de l'ordre. Les concepts de symétrie et d'asymétrie s'opposent donc. Une conclusion plutôt mince, tu en conviendras.

Rémi - En effet, je vais tenter d'être plus précis. Si la symétrie caractérise une cer-

[3] *This Amazingly Symmetrical World* [Tar86]

taine forme d'ordre, on devrait être capable de la mesurer. Comment fait-on cela?
Paule - Comme pour toutes les mesures en le comparant à quelque chose, à un cadre de référence.
Rémi - Exactement. On comparera l'ordre qu'est la symétrie à ce qui n'est pas ordonné, à l'asymétrie. Le couple symétrie/asymetrie est plus qu'une simple opposition. La symétrie nécessite l'asymétrie car, sans elle, il n'est pas possible de savoir si quelque chose est symétrique.
Paule - Ce constat est pour le moins surprenant. En pratique, pour mesurer une symétrie, pour constater sa présence, il faudrait se référer à une asymétrie. Une symétrie totale serait donc impossible à mesurer?
Rémi - Exactement.
Paule - Je me dois de constater que tu as été un peu plus précis mais je nous sens encore loin d'un concept de symétrie qui soit suffisament clair et distinct pour que nous puissions en faire quelque chose de concret. Peut-être devrions-nous changer d'angle d'attaque. Le concept de symétrie est souvent associé à celui de beauté, de proportion. Il y a une longue tradition en esthétique. Nous pourrions explorer cette voie et constater si cela clarifie notre compréhension du concept de symétrie.
Rémi - Crois-tu vraiment qu'en discutant du beau nous serions mieux armés pour définir ce qu'est la symétrie? Dévier notre conversation vers les considérations esthétiques est certes une perspective séduisante, mais je crains que fort peu de choses n'en ressortent.
Paule - Je dois avouer que tu as probablement raison. Le lien entre la beauté en général et la symétrie n'étant pas très clair, je ne crois pas que cela éclairerait notre problème. Par contre, si c'est une erreur de travailler avec le concept de beauté dans toute sa généralité, peut-être aurions-nous plus de résultats avec un concept restreint de beauté. N'as-tu pas remarqué que dans notre discipline, la beauté, la simplicité, l'élégance et la symétrie sont des concepts qui vont ensemble et qui parfois semblent être interchangeables?
Rémi - C'est vrai. C'est surtout dans la bouche des théoriciens que ces mots sont

interchangeables. Mais je te mets en garde tout de suite. J'ai lu dans un article récent de Peter Kosso[4] qu'il fallait être prudent quand on associe beauté et symétrie en science et particulièrement en physique. Première différence, contrairement à la beauté de quelque chose qui selon certains philosophes est une propriété qui peut se placer sur une échelle, il n'y a pas de sens univoque à l'expression: "la symétrie de quelque chose". En fait, selon Kosso, il n'y a pas de mesure de la symétrie d'un objet.

Paule - Je vois. Même si les physiciens associent symétrie et beauté, les deux concepts semblent fonctionner de façon différente. Transposer ce que l'on sait de la beauté vers le concept de symétrie pourrait être hasardeux.

Rémi - Mais tout n'est pas perdu. Si le concept d'une mesure de la symétrie en général est difficile à définir, la plupart du temps les physiciens ne s'intéressent pas à la symétrie en général, mais bien aux cas particuliers de symétries. Dans cette partie de son analyse, je crois que Kosso cite sans justification la définition de la symétrie qu'a proposée Hermann Weyl[5].

Paule - Si nous reprenions telle quelle cette définition, nous ne serions pas plus avancés que tantôt, lorsque j'en appelais à la définition du dictionnaire. Nous devons faire plus que citer une définition, nous devons nous convaincre que c'est la bonne.

Rémi - Devrions-nous en rester là et reporter la clarification du concept de symétrie à plus tard?

Paule - Non, je ne m'avoue pas encore vaincue. Peut-être que ce fut une erreur de débuter par une définition si générale. Kosso a probablement raison d'insister sur les cas particuliers. Revenons à un exemple concret de symétrie. Es-tu d'accord avec moi pour dire que la palette égyptienne est un objet symétrique?

Rémi - Absolument. Et sache que je te vois venir chère amie. L'air de rien, tu détournes la question de la symétrie vers ce qui est symétrique. Je reconnais dans ta tactique l'influence de la tradition philosophique; plutôt que de parler de vérité,

---

[4]Symmetry arguments in physics, [Kos99].

[5]Invariance sous transformation. [Wey52].

discutons des propositions vraies, plutôt que de parler du Bien, discutons des actes bénéfiques. Peut-être que de passer par le particulier avant d'aller au général sera la clef qui nous manquait. Tentons la chose. Oui, je suis d'accord pour dire que la palette est symétrique car le côté gauche de la palette correspond d'une certaine façon avec le côté droit et inversement.

Paule - Exactement, mais cette correspondance n'est pas une relation d'identité. Le côté gauche n'est pas identique au côté droit. D'un côté, on voit le profil droit de la girafe, de l'autre le gauche. Les deux côtés ne sont pas superposables.

Rémi - Oui, mais la similarité est évidente. Les deux côtés sont égaux mais de façon relative[6]. Ils ne sont pas identiques, mais ils sont loin de n'avoir rien en commun. Au premier regard, on constate leur similarité. Les deux côtés sont comme ma main droite et ma main gauche. Comme elles, ils sont identiques quant au rapport qu'entretiennent entre elles leurs différentes parties, comme elles, ils ne sont pas superposables et comme elles, si l'on regarde l'un des côtés dans un miroir la réflexion est identique à l'autre côté. En effet, si je place un miroir perpendiculairement à la palette le long de l'axe vertical qui la sépare en deux parties égales et que je regarde l'un des côtés dans ce miroir, la réflexion ainsi obtenue sera identique à l'autre côté.

Paule - C'est vrai. Cela me rappelle quelque chose. N'est-ce pas ce qui caractérise les objets possédant la symétrie bilatérale. Il me semble avoir lu cela dans un livre du mathématicien Hermann Weyl [Wey52]...

Rémi - Maintenant que tu le dis, je crois aussi m'en souvenir. La symétrie bilatérale est selon Weyl la plus ancienne symétrie identifiée par l'humain. Il tire cette conclusion du fait que c'est la symétrie la plus présente dans l'art ancien. Cependant, il me semble que sous ce nom de symétrie bilatérale, Weyl dénombrait plus de cas de

[6] Il est à noter que les physiciens Shubnikov et Koptsik fondent la notion restreinte de symétrie géométrique sur la notion de régularité géométrique, qui elle se fonde sur le concept d'égalité relative [SK74]. Ma justification du concept de symétrie s'apparente vaguement à la leur, mais pour ma part je désire être plus général qu'eux et définir le concept de symétrie s'appliquant à tous les cas. Un concept qui, je le pense, va au-delà de la symétrie géométrique. Par cet aspect, mon approche se rapproche de celle du physicien Joe Rosen dans [Ros75].

figure que la simple symétrie-miroir.
Paule - Tu as raison. Je crois que Weyl considérait que des cas du type de ce bas-relief[7] étaient aussi des exemples de symétrie bilatérale. Les dieux de la lune Aglibole et du soleil Malakbêl qui encadre le dieu central Beelshamên sont identiques à une translation près. Ici nul besoin d'un miroir pour mettre en évidence l'invariance.
Rémi - Pour en revenir à la palette égyptienne, l'égalité des côtés sous la trans-

Figure 2-3: Triade des dieux palmyréniens. Région de Palmyre, Syrie, 1ère moitié du 1er siècle après J.-C.

formation du miroir n'est pas exacte car les deux girafes sont de tailles différentes. Cependant, il me paraît raisonnable de faire l'hypothèse que le sculpteur désirait créer cet effet d'égalité relative.
Paule - Revenons maintenant à la question de la symétrie. Nous avons mis en évidence l'égalité entre le côté droit et le côté gauche à une transformation près. Comment relier cette égalité au concept de symétrie?
Rémi - Je crois que cette égalité est la symétrie elle-même. Souviens-toi des définitions générales de la symétrie. La symétrie est une régularité, une harmonie entre les parties, etc. Quoi de plus harmonieux et régulier qu'une égalité, quitte à ce qu'elle soit relative à un changement? L'invariance est régulière et harmonieuse. La symétrie serait donc l'absence de changement après le changement, l'invariance relative d'un objet sous un changement donné. Ainsi, je pourrais dire qu'un flocon de neige normal est symétrique sous toute rotation d'un multiple de $\pi/3$ radians, parce qu'il

[7] Voir Figure 2-3.

demeure inchangé sous de telles rotations.

Paule - Nous tenons enfin quelque chose. Si on permet sous le terme de changement tous les genres de changements que l'on peut imaginer, penses-tu que nous aurions enfin saisi le concept de symétrie dans toute sa généralité?

Rémi - Pas tout à fait. En repensant à mon exemple de flocon de neige, je constate que je n'ai pas besoin d'effectivement faire tourner le flocon pour me convaincre qu'il est symétrique. Définir la symétrie comme une invariance sous changement semble impliquer que le changement doit être effectué. Je crois plutôt que nous devrions définir la symétrie comme une invariance sous un changement *possible*.

Paule - D'accord, mais est-ce que cette définition modifiée couvre tous les cas de symétrie que nous pouvons imaginer?

Rémi - Je n'en suis pas absolument certain. Je préfère rester prudent en ce qui concerne les cas où le concept de symétrie est intimement lié à celui de beauté. Par contre, cette définition me semble assez forte pour couvrir tous les exemples courants de symétrie et sûrement tous les cas que l'on retrouve en science.

Paule - Admettons cette définition pour le moment. Une question me vient spontanément à l'esprit: "Peut-on parler de symétrie partielle?"

Rémi - Que veux-tu dire par "symétrie partielle"? Est-ce que tu fais référence à une symétrie qui ne serait qu'approximative, c'est-à-dire que l'objet ne demeurerait pas complètement invariant sous une transformation? Par exemple, la différence de taille entre les girafes de la palette égyptienne ferait que la symétrie entre le côté gauche et le côté droit ne serait qu'approximative.

Paule - Non, ce n'était pas à ce genre de situation que je pensais. Jusqu'ici nous n'avons parlé que d'objets symétriques, mais ne pourrait-on pas parler d'aspects symétriques? Je pense ici à des cas où un objet est modifié par le changement, mais dont certains aspects ne le sont pas. Par exemple, imaginons que la modification que l'on fait subir à un objet est un changement de sa couleur. Clairement, après cette transformation l'objet n'est plus le même, par contre sa forme demeure la même. Cette invariance limitée n'est-elle pas elle aussi une forme de symétrie?

Rémi - Tout à fait. Je crois que nous couvrons déjà les cas de ce genre de façon implicite. Notre définition nous donne les conditions sous lesquelles on peut dire qu'il y a symétrie, qu'une entité est symétrique. Bien que depuis le début, le mot "entité" faisait toujours référence à un objet, on peut imaginer que notre définition ne se limite pas à ces cas. On peut imaginer qu'il réfère parfois à certaines propriétés d'un objet, comme sa forme, certaines de ses propriétés, etc.

Paule - Je n'avais pas pensé que notre définition était aussi large. J'ai dû être obnubilée par les exemples.

Rémi - Ne te juge pas trop sévèrement. Je crois que nous avons construit notre conception commune de la symétrie à partir d'exemples géométriques. Dans ces exemples, on exerce un changement sur un objet et on constate, par la suite, qu'il est toujours le même. On dira que l'objet est symétrique sous ce changement car ce dernier se ramène à un automorphisme, pour prendre un terme mathématique. L'exemple de l'objet qui change de couleur n'est pas un cas de ce type, pourtant je prétends que même dans ce cas on peut encore parler de symétrie.

Paule - Cela demande plus d'explications. Ne devrions-nous pas davantage nous pencher sur ce genre d'exemples?

Rémi - D'accord. Imaginons que nous jouons aux cartes, à un jeu où seule la valeur des cartes est importante, c'est-à-dire que la couleur (trèfle, carreau, coeur et pique) n'a pas d'importance. Imaginons maintenant que tu as comme main le 2,3,4,5,6 et 7 de carreau. Si tes cartes se transformaient en trèfle, tu n'aurais bien sûr plus les mêmes cartes dans ton jeu, mais aurais-tu la même main?

Paule - Hum, dans un certain sens oui. Dans le jeu que tu décris les deux mains sont équivalentes.

Rémi - Voilà. En science, on élargit le concept de symétrie de la même façon. Pour qu'il y ait symétrie, l'objet doit être le même après le changement <u>ou bien</u> qu'il soit équivalent selon un certain critère.

Paule - Je vois. Et ce critère dépend du contexte, comme dans le cas de notre jeu de cartes. De même, si on s'intéresse seulement à la forme d'un objet, on considérera qu'un changement de couleur laisse l'objet dans un état équivalent. Il est donc symétrique sous changement de couleur. Cette généralisation pourrait nous mener loin. Par exemple, je peux affirmer que la loi de la gravitation de Newton est symétrique sous le changement de couleur, car ce type de changements n'influence pas la force gravitationnelle qu'excercent les corps les uns sur les autres.

Rémi - Cette façon de généraliser est importante car en physique les symétries intéressantes sont presque toutes de ce type, par exemple l'invariance de jauge en électromagnétisme ou l'invariance de Galilée, etc.

Paule - La généralité de notre définition me donne un peu le vertige. Si je comprends bien, n'importe quelle propriété d'un objet ou d'un système pourrait potentiellement être symétrique si on change tout le reste. N'est-ce pas trop général?

Rémi - Je comprends tes réticences, mais je ne vois pas de quelle autre façon pourrait se présenter la définition. Juste en physique, il est impossible de prévoir quelles invariances pourront être pertinentes dans de futures recherches. Jusqu'ici les principes de conservation ont été si divers, on n'a qu'à penser à la conservation de l'énergie, du moment cinétique, du nombre baryonique, de la charge électrique, etc., qu'il me semble prudent de viser une définition la plus générale possible. Pour éviter l'explosion des symétries, je distinguerais les symétries logiquement possibles de celles qui sont physiquement possibles.

Paule - Une seconde question au sujet de la définition me turlupine. Qu'entendons-nous exactement par changement? Changement par rapport à quoi? Même si jusqu'ici les exemples m'ont paru limpides, je ne suis pas certaine que nous possédions une si claire idée de ce qu'impliquent les mots que nous utilisons pour définir la symétrie. Surtout si comme tu l'affirmes, les exemples importants de symétries en physique ne sont pas tous géométriques.

Rémi - Tâchons donc de clarifier le concept de changement. Imaginons un système très simple dont l'état final après transformation est identique à son état initial. Prenons deux particules ponctuelles identiques, que nous étiquetterons comme la particule 1 et 2, se trouvant à deux positions distinctes.[8] Pour mesurer un change-

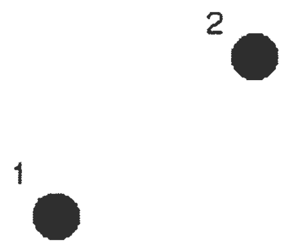


Figure 2-4: Deux particules identiques occupant des positions distinctes.

ment dans ce système, il nous faut un cadre de référence. Si je fixe un système d'axes, je pourrai mesurer un changement de position des particules. Admettons que selon ce système d'axes, les particules se trouvent initialement aux positions $P_1$ et $P_2$ respectivement. Le système est donc caractérisé par le couple de coordonnées $(P_1, P_2)$. Si les particules sont identiques quant à leurs propriétés intrinsèques, le système est invariant sous la permutation des positions des particules, soit sous $(P_1, P_2) \longrightarrow (P_2, P_1)$. En effet, si l'une des particules prend la position de l'autre et inversement, le système demeure inchangé. Jusqu'ici tout est clair. Une difficulté pourtant m'apparaît. Si les particules sont réellement identiques, les états $(P_1, P_2)$ et $(P_2, P_1)$ sont indifférenciables. Ces deux notations réfèrent à la même configuration physique. On pourrait même aller plus loin et considérer cette différence comme un artefact de notre formalisme, un surplus de structure. Sachant cela, on constate que la transformation $(P_1, P_2) \longrightarrow (P_2, P_1)$ aurait pu s'écrire $(P_1, P_2) \longrightarrow (P_1, P_2)$. La permutation serait donc équivalente à l'identité, à l'absence de transformation. En fait, toute transformation qui laisse le système inchangé dans son ensemble se ramène à l'identité. Une symétrie, comme celle sous permutation, serait donc triviale? Il y a quelque chose qui ne fonctionne pas quelque part.

Paule - Attention Rémi, si je suis d'accord avec toi pour définir le changement par rapport à un cadre de référence, je suis loin d'être certaine que ta façon de formaliser le changement soit la bonne. Dans l'exemple que tu proposes, il est évident que la

[8] Voir la Figure 2-4.

permutation des particules ne se confond pas avec l'identité. Lorsque l'on pense à une permutation, c'est un changement comme celui de ce schéma[9] que l'on imagine. Les particules suivent des trajectoires continues qui les amènent à la position

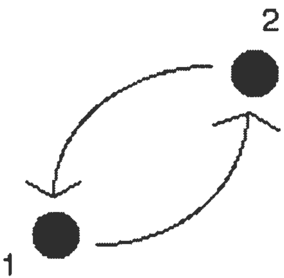


Figure 2-5: Échange de deux particules identiques.

de l'autre particule. Si les particules ne peuvent s'interpénétrer, les transformations $(P_1, P_2) \longrightarrow (P_2, P_1)$ et $(P_1, P_2) \longrightarrow (P_1, P_2)$ sont clairement distinctes. Bien sûr, ce système est symétrique sous permutation justement parce que l'état décrit par $(P_1, P_2)$ est physiquement équivalent à celui décrit par $(P_2, P_1)$, mais cela n'entraîne pas la trivialité de la transformation. Si c'était le cas, toute transformation qui laisse un système inchangé se ramènerait à ne rien faire du tout. Je ne crois pas que vider la notion de changement de cette façon soit très productif.

Rémi - Tu as raison. En définissant implicitement la permutation à l'aide de trajectoires, tu t'engages davantage que je ne le fais. En imaginant la permutation à l'aide de trajectoires, tu mets de l'avant une méthode non ambiguë pour étiqueter les particules. Dans ce cadre $(P_2, P_1) \neq (P_1, P_2)$. Si je te suis bien, ce que tu proposes, c'est d'élargir le cadre de référence qui nous sert à mesurer un changement, de telle sorte que la permutation et l'identité soient distinctes?

Paule - C'est cela. Je me rends compte que la notion de cadre de référence est essentielle pour bien définir le concept de changement. Un changement est donc une modification de l'état d'un système mesuré par rapport à un cadre de référence suffisament riche pour exprimer tout ce que l'on désire mesurer. Dans un tel cadre, un état est décrit par les données essentielles à la caractérisation du système (ou de

[9] Voir Figure 2-5.

l'entité) étudié.

Rémi - Cette proposition est astucieuse, mais je ne suis pas sûr qu'elle soit assez solide pour traiter tous les cas. Imaginons un système composé de deux particules identiques qui ne peuvent occuper que deux états possibles. Ces deux états sont distinguables puisque d'énergies différentes.[10] Imaginons maintenant que ce système

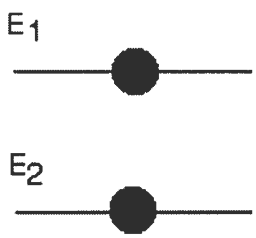


Figure 2-6: Système de deux particules identiques à deux niveaux d'énergie.

est dans la configuration suivante: une particule dans l'état d'énergie $E_1$ et une particule dans l'état d'énergie $E_2$. À première vue, cette configuration est symétrique sous l'échange des particules, car l'état après permutation est identique à l'état initial. Par contre, on ne peut définir cette transformation à l'aide de trajectoires. Si ce système est quantique, l'échange de particules est un phénomène discret. Comment, dans ce cas, ne pas définir la permutation de façon triviale?

Paule - Je ne crois pas qu'ici la difficulté se trouve dans la notion de changement. Je m'explique. Dans l'exemple classique, nous supposions implicitement que nos particules possédaient une individualité. Ce qui, dans notre cas, implique que nous pouvions étiqueter ces particules et ce, même si elles partagent toutes leurs autres propriétés. Ainsi, en présumant de cette individualité, la permutation est distincte de l'identité car $(P_1, P_2)$ n'est pas la même chose que $(P_2, P_1)$. C'est à cause de cette thèse métaphysique que nous affirmons qu'une même particule persiste dans le temps et le long d'une trajectoire. La difficulté que nous rencontrons dans l'exemple quantique n'est pas que la notion de changement est mal définie, mais bien que celle d'état l'est.

Rémi - Que veux-tu dire par là?

[10] Voir la Figure 2-6.

Paule - La façon dont nous avons défini les états du système dans le cas classique présumait que nous considérions les particules individuellement. Cette conception ne peut se transmettre aisément dans le cas quantique. Comme tu l'as justement affirmé, ici pas d'identification possible par les trajectoires. Pour tout de même étiqueter les particules, il nous faudrait postuler une individualité beaucoup plus forte, pour ne pas dire transcendantale.[11] Malheureusement, il y a dans la théorie des systèmes de particules identiques en mécanique quantique un postulat de symétrisation qui exclut qu'il puisse y avoir une telle individualité des particules. Je t'épargne les détails qui ne nous concernent pas ici.[12] Il te suffit de savoir que l'état classique $(P_1, P_2)$ n'a pas d'équivalent quantique.

Rémi - Donc si je t'ai bien suivi, un changement est le passage d'un état à un autre, mais il nous faut savoir que ce qu'est un état distinct dépend d'un engagement métaphysique préalable. La description que je donnais de l'état du système, dans mon second exemple, était incompatible avec certaines contraintes métaphysiques que nous impose le formalisme de la mécanique quantique[13].

Paule - C'est exactement cela.

Rémi - Dans ce cas, je n'ai plus d'objection. Je suis satisfait de notre notion de changement.

Paule - Terminons donc cette discussion et allons nous alléger l'esprit.

## 2.3 Conclusion

Pour les besoins de cette thèse, j'ai tiré trois définitions de ce dialogue. Tout d'abord, comme mes deux collègues, je crois qu'il est utile d'avoir une définition de la symétrie qui soit générale, quitte à la restreindre selon le contexte étudié.

[11] Nous empruntons ce terme à Redhead et Teller [RT91], qui eux l'attribuent à Post [Pos63].

[12] Pour une discussion complète, voir Cohen-Tannoudji et cie, tome 2, chapitre 14, [CTDL86a].

[13] L'incompatibilité entre individualité des particules et la théorie de la mécanique quantique est mise en évidence par Redhead et Teller dans [RT91] et [RT92].

**Définition 2 (Symétrie)** *Invariance (ou équivalence) sous un changement possible.*

Il est à noter que dans le contexte des sciences naturelles un changement est souvent qualifié de "transformation".

De même, je crois que nous possédons une définition "intuitive" du changement qui est solide. Si tout de même nous nous lancions dans une définition, voilà de quoi elle aurait l'air.

**Définition 3 (Changement)** *Passage d'une entité (ou d'un système) d'un état à un autre.*

**Définition 4 (État)** *Ensemble des données caractéristiques d'une entité (ou d'un système). C'est en quelque sorte la manière d'être, la situation, de l'entité (ou du système).*

Ces définitions peuvent paraître trop générales aux praticiens qui utilisent le concept de symétrie dans des contextes particuliers. Ce travail de généralisation est malgré tout nécessaire. Le concept de symétrie dans son cadre le plus large est une forme particulière d'invariance. Cette définition va au-delà des applications dans tel ou tel domaine. Si notre notion commune de symétrie provient probablement d'exemples géométriques, le concept que nous en avons fait est plus vaste et a des exemplifications de plus en plus subtiles, ne serait-ce qu'en physique. Ceci ne doit pas être perdu de vue.

## CHAPITRE 3

# Formalisme, symétries globale et locale

## 3.1 Introduction

Le choix d'un formalisme n'est jamais innocent. Un formalisme n'est jamais vraiment neutre. Presque à notre insu, il influence la compréhension du concept même que l'on voulait formaliser. Cette influence mutuelle se fait en deux temps. Tout d'abord, on élabore un formalisme apte à représenter un concept, puis ce formalisme qui, progressivement, acquiert une certaine autonomie face au concept, oriente la réflexion portant sur la nature du concept. En physique, les formalismes sont fort développés et ont de multiples ramifications dans diverses branches de la discipline. Il arrive parfois que ces trouvailles formelles masquent la nature du modèle physique. Un chapitre sur la relation entre le concept de symétrie et ses formalismes n'est donc pas un sujet que je pouvais omettre. Pour les fins de la discussion, je diviserai les symétries en deux grandes catégories: les symétries globales et les symétries locales. Ce qui distingue ces deux catégories, c'est la classe de changements à laquelle elles réfèrent. Les symétries globales sont des invariances sous des changements globaux. Les symétries locales réfèrent à des changements ayant une dépendance locale. La pertinence d'une telle division est avant tout historique. Les symétries globales sont apparues en physique bien avant les symétries locales.

De plus, je présenterai deux formalismes, celui des groupes et celui des groupoïdes. Il est à noter qu'en physique, la théorie des groupoïdes est encore peu utilisée. Il n'y a qu'à entrer le mot "groupoid" dans une banque numérisée d'articles comme

*Spires* pour le constater. Même dans des cas de symétrie locale, où ce formalisme me semble particulièrement approprié, on lui préfère une théorie hybride. On utilise la théorie des groupes en y ajoutant une dépendance locale. En fait, on juxtapose des groupes. Une théorie plus limitée, comme celle des groupes locaux, risque d'avoir de sérieuses difficultés à représenter les symétries locales qui n'ont pas pour support des espaces homogènes. Étant donné la popularité croissante de la géométrie non commutative en physique théorique, la théorie des groupoïdes devrait devenir un outil attrayant dans les années à venir. Il est à noter que le formalisme des pseudogroupes est lui aussi à peu près absent du discours de la physique. Je ne sais pas pourquoi cet outil qui est utilisé pour analyser la structure des fibrés principaux[1] est si peu présent en physique. Je ne toucherai pas à ce formalisme dans cette thèse. Pour plus d'information, je réfère le lecteur à Albert et Molino [AM84].

## 3.2 De la symétrie aux groupes

La documentation qui porte sur les applications de la théorie des groupes en physique est énorme. Pour de bons exemples de ces ouvrages, je réfère le lecteur à [Cor97], [ED79], [CH98] et à la revue de documentation [Ros81]. Ce que je me propose de faire n'est pas de reprendre cette littérature, mais de montrer comment le formalisme des groupes ne capture pas complètement la définition de symétrie. Constater ce fait demande que l'on explicite comment on passe de la définition de la symétrie au formalisme des groupes. Ce passage est en général absent dans les ouvrages d'application des groupes, exception faite du livre élémentaire de Joe Rosen [Ros95] dont je m'inspire abondement pour cette section.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que nous nommons "état" la condition dans laquelle se trouve un système, sa manière d'être en quelque sorte. En

[1] Nous verrons dans les chapitres qui suivent l'intérêt d'une telle structure dans la physique des champs de jauge.

pratique, un état est donc représenté par l'ensemble des données qui caractérisent la condition dans laquelle le système étudié se trouve. Dans le cas de l'état tel que défini en physique, la cardinalité de cet ensemble de données est en général finie[2] $\{p_1, \cdots, p_n\}$. Il est à noter qu'en physique on s'intéresse à des systèmes dynamiques. Dans ces cas, le temps est alors considéré comme un paramètre externe. On peut considérer cet ensemble de données caractérisant un état comme un point de l'espace des états possibles $E$. Cet espace sera constitué de tous les états du même genre, c'est-à-dire de tous les états que l'on peut définir en faisant varier les différents $p_i$ caractérisant les états. Formalisons maintenant la notion intuitive de changement. Je rappelle que le changement est défini comme le passage pour une entité d'un état à un autre. En général, les changements ne sont pas spécifiques. Ils sont comme des types exemplifiés différemment selon le cas particulier. Le même changement ne sera pas exemplifié de la même façon selon l'état initial dans lequel se trouve l'objet. Prenons un exemple simple pour clarifier cela: une translation de 7cm dans une certaine direction. Ce changement peut être compris dans un sens général, comme dans un sens particulier. En l'appliquant à un objet particulier, dans une configuration particulière, on exemplifiera le passage d'un état spécifique à un autre état spécifique. Pour un même objet dans une configuration différente, cette association d'états sera différente. Si l'on tient compte de cette généralité des changements, on peut, si l'espace $E$ est exhaustif, associer à chaque changement un morphisme $T$ de l'espace d'états vers lui-même $T : E \to E$, que nous écrirons $v = T(u)$ où $v, u \in E$. Il est à noter que dans le contexte de ce chapitre, nous utiliserons indifféremment le terme morphisme ou transformation. Il est important de mentionner qu'une transformation est un endomorphisme de l'espace des états, pas un automorphisme. Cette appellation est l'usage en physique. On nommera l'ensemble de toutes les transformations possibles de l'espace d'états vers lui-même $\mathcal{G}'$. Nous allons maintenant voir

[2] Pour les fins de l'argumentation, je me restreindrai aux cas finis dans cette section. Les cas non finis, comme ceux caractérisant les états dans un système quantique ou comme la caractérisation d'un champ, peuvent aussi être traités. En particulier, les systèmes quantiques seront discutés un peu plus loin dans ce chapitre.

que $\mathcal{G}'$ possède une structure particulière.

### 3.2.1 Le groupe de transformations

Pour structurer davantage l'ensemble des transformations, nous allons doter cet ensemble d'une opération que nous nommerons multiplication. Plusieurs choix s'offrent à nous. La façon naturelle de postuler une telle opération, qui tient compte du fait que les éléments de $\mathcal{G}'$ sont des transformations, est de la définir comme une composition de transformations, en d'autres mots comme le résultat d'une application successive de changements. Si $w = T_2(v)$, $v = T_1(u)$, $u, v, w \in E$ et $T_1, T_2 \in \mathcal{G}'$ alors

$$\begin{aligned} w &= T_2(v) &(3.1)\\ &= T_2(T_1((u)) &(3.2)\\ &\stackrel{def}{=} (T_2T_1)(u), &(3.3)\end{aligned}$$

où $(T_2T_1) \in \mathcal{G}'$ car c'est un endomorphisme de $E$ tel que $w = (T_2T_1)(u)$. Cette opération est fermée dans $\mathcal{G}'$ car la composition de morphismes est un morphisme.

Voyons quelles propriétés exhibe cet ensemble muni de cette opération. En premier lieu, on constate que cette opération est associative. La preuve triviale de cette proposition se trouve en Appendice A. Tous les morphismes se trouvant dans $\mathcal{G}'$, ce dernier contient la transformation identité $I$, c'est-à-dire que $\forall u \in E, \quad u = I(u)$. On peut aussi démontrer la propriété suivante: $\forall T \in \mathcal{G}', TI = IT = T$. Preuve: Voir Appendice A

Jusqu'ici je suis resté le plus général possible. Je vais maintenant restreindre l'ensemble $\mathcal{G}'$ pour obtenir un ensemble ayant une structure de groupe. Parmi les transformations de $\mathcal{G}'$, je ne vais conserver que les bijections[3] de $E$ vers $E$, c'est-à-dire les automorphismes. Ce sous-ensemble de $\mathcal{G}'$ sera nommé $\mathcal{G}$. Cet ensemble

[3]Rappel: Une bijection est un morphisme qui est à la fois injectif et surjectif, c'est-à-dire que l'on peut définir un $f^{-1}$ et que $f(E) = E$.

est fermé sous la multiplication car la composition de deux bijections est aussi une bijection. Évidemment cet ensemble contient l'élément identité car ce dernier est une bijection. De plus, pour toute transformation $T \in \mathcal{G}$, $v = T(u)$, il existe dans $\mathcal{G}$ une transformation $T^{-1}$, $u = T^{-1}(v)$ tel que $T^{-1}T = TT^{-1} = I$. Preuve: Voir Appendice A.

$\mathcal{G}$ tel qu'il est structuré est ce qu'on appelle en mathématique *un groupe.* Si l'on ne porte attention qu'à la structure qu'exhibe l'ensemble des transformations, en faisant abstraction du caractère particulier des transformations elles-mêmes, on peut considérer le groupe comme un objet abstrait. Objet essentiellement structurel qui est exemplifié par l'ensemble des transformations particulières que nous avons définies. Pour bien fixer les idées, voici la définition formelle d'un groupe.

**Définition 5 (Un groupe $\mathcal{H}$)** *Un ensemble $\mathcal{H}$, muni d'une opération de multiplication, est appelé <u>un groupe</u> s'il respecte les axiomes suivants:*

1. *L'opération associe à chaque paire $T$ et $T'$ d'éléments appartenant à $\mathcal{H}$ un autre élément $T''$ appartenant lui aussi à $\mathcal{H}$. Cette opération est appelée <u>multiplication</u> et se note $T'' = TT'$.*

2. *Pour trois éléments $T$, $T'$ et $T''$ quelconques de $\mathcal{H}$, on a que $(TT')T'' = T(T'T'')$.*

3. *Il existe un élément identité $I$ dans $\mathcal{H}$ tel que $TI = IT = T$ pour tout élément $T$ de $\mathcal{H}$.*

4. *Pour tout élément $T$ de $\mathcal{H}$, il existe un inverse, noté $T^{-1}$, aussi élément de $\mathcal{H}$ tel que $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.*

Le groupe $\mathcal{G}$, que nous avons défini plus haut, se nomme *le groupe de transformations.* Ceci étant dit, le lecteur pourra s'étonner des idéalisations qu'il nous a fallu endosser pour arriver finalement à une structure de groupe. N'avons-nous pas à cause de cela perdu le lien avec les discussions du chapitre précédent? Nous reviendrons sur ce point important plus loin. Pour le moment, voyons comment est définie la symétrie dans ce formalisme.

### 3.2.2 Le groupe de symétrie

Dans cette sous-section, nous allons montrer comment la notion de symétrie s'arrime à celle de groupe. Une symétrie est l'invariance ou l'équivalence d'un système sous un changement possible. Prenons un exemple simple. Si le système étudié est un flocon de neige alors nous savons que la forme générale d'un tel objet reste inchangée sous des rotations d'un multiple de 60°. Cela veut dire que si initialement le flocon se trouvait dans l'état $u$ alors tous les états accessibles à partir de $u$, à l'aide de transformations qui correspondent à de telles rotations sont équivalents à $u$. Tous ces états équivalents, qui forment un sous-espace de l'espace des états, peuvent être reliés par une relation, une relation d'équivalence justement. En mathématique, il existe une définition des critères que doit remplir toute relation d'équivalence.

**Définition 6 (Une relation $\mathcal{R}$)** *Une relation entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. $x$ et $y$ sont dits reliés par $\mathcal{R}$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$, aussi noté $x \equiv y$.*

**Définition 7 (Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$)** *Une relation $\mathcal{R} \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est une relation d'équivalence dans $\mathcal{X}$ si elle est*

| | | |
|---|---|---|
| *réflexive:* | $(x, x) \in \mathcal{R}$ | $\forall x \in \mathcal{X}$ |
| *symétrique:* | $(x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ | $\forall x, y \in \mathcal{X}$ |
| *transitive:* | $(x, y) \in \mathcal{R}$ *et* $(y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ | $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ |

Cette définition formelle est tout à fait en accord avec la conception commune de ce qu'est l'équivalence, je la prendrai donc pour acquise. Imaginons maintenant que notre flocon de neige se soit initialement trouvé dans l'état $z$, un état qui n'appartient pas au sous-espace équivalent de $u$. Par exemple, l'état $z$ pourrait être l'état $u$ auquel on fait subir une rotation de 14°. À partir de cet état, on peut aussi engendrer un sous-espace d'états équivalents, qui seront tous reliés par la même relation d'équivalence que tantôt. Bien sûr, aucun élément n'appartient à la fois au sous-espace équivalent à $u$ et à celui équivalent à $z$. De cet exemple, on peut tirer une leçon. *Les symétries qu'un objet possède correspondent à une relation d'équivalence entre ses états.* Cette relation détermine un découpage de l'espace des états en sous-espaces distincts équivalents, en classes d'équivalence.[4] Maintenant, si l'on se restreint aux symétries qui peuvent être représentées par des transformations inversibles, des bijections, on peut définir l'ensemble des transformations de $E$ vers $E$ qui laissent les sous-espaces équivalents inchangés, c'est-à-dire les transformations telles que $\forall u \in E,\ T(u) = v \equiv u$. Cet ensemble de transformations $\mathcal{S}$ est un sous-groupe du groupe de transformations, c'est-à-dire que $\mathcal{S} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{S}$ est lui-même un groupe ayant la même opération de multiplication que $\mathcal{G}$. Essayons de nous convaincre de cela.

1. Tout d'abord $\mathcal{S}$ est fermé sous la multiplication. $\forall u, v \in E$ et $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{S}$ alors on a que $u \equiv v = T_1(u)$ et $v \equiv w = T_2(v) = T_2(T_1(u)) \stackrel{def}{=} (T_2T_1)(u)$. Par la transitivité de la relation d'équivalence, on tire de cela que $u \equiv w = (T_2T_1)(u)$.

2. $\mathcal{S}$ est associatif. La preuve a déjà été faite plus haut pour l'opération de multiplication de $\mathcal{G}$. $\mathcal{S}$ a la même opération.

3. La transformation identité appartient à $\mathcal{S}$. On déduit cela du fait que toute relation d'équivalence est réflexive: $\forall u \in E,\ I(u) = u \equiv u$.

4. L'inverse de toute transformation appartenant à $\mathcal{S}$ appartient aussi à $\mathcal{S}$. $\forall u \in E$ et $\forall T \in \mathcal{S}$ alors $T(u) = v \equiv u$. Par la symétrie de la relation d'équivalence, on a donc que $\forall v \in E, T^{-1}(v) = u \equiv v$.

En conclusion, les symétries d'un système, qui peuvent être représentées par des transformations inversibles, déterminent une relation d'équivalence entre ses

[4] Il est à noter que ces classes sont équivalentes aux orbites du groupe de transformations.

états, qui à son tour détermine un sous-groupe $\mathcal{S}$ du groupe de transformations. Je nommerai le groupe $\mathcal{S}$ *groupe de symétrie*. Voici donc comment on passe du concept de symétrie à celui de groupe. Nous aurions pu faire l'inverse et partir d'un sous-groupe de $\mathcal{G}$ pour aller vers une symétrie. En effet, tout sous-groupe du groupe de transformations détermine une relation d'équivalence qui, à son tour, représente une symétrie. Si l'on a un sous-groupe $\mathcal{A}$ du groupe de transformations d'un système, la relation d'équivalence est définie comme suit. L'état $u$ est équivalent à l'état $v$ si et seulement si $\exists T \in \mathcal{A}$ tel que $v = T(u)$. Cette relation est effectivement une relation d'équivalence.

1. Elle est réflexive car la transformation identité appartient à $\mathcal{A}$.
2. Elle est symétrique car $\forall T \in \mathcal{A}$; $\exists T^{-1} \in \mathcal{A}$.
3. Elle est transitive car $\mathcal{A}$ est fermé sous la multiplication.

Le formalisme que je viens de présenter est très puissant. Par des relations d'équivalence sur l'espace des états, je peux à la fois représenter les symétries d'un objet, comme celles du flocon de neige, et les symétries dynamiques, celles qui conservent la "physique". En effet, je peux associer les états qui évolueront d'une certaine manière compte tenu des interactions en jeu. Prenons un exemple. Admettons qu'une particule est confinée à un plan et subit les effets d'un potentiel constant centré en $(0, 0)$ qui possède une symétrie polaire. L'espace des états de ce système est composé des couples $(\vec{r}, \vec{p})$, où $\vec{r}$ et $\vec{p}$ sont respectivement le vecteur position et le vecteur impulsion de la particule. La symétrie du potentiel est associée à une symétrie dynamique, c'est-à-dire à une symétrie de l'évolution du système. Cette symétrie me fait associer les états $i$ et $j$, si $|\vec{r}_i| = |\vec{r}_j|$ et $\vec{r}_i \cdot \vec{p}_i = \vec{r}_j \cdot \vec{p}_j$. En effet, les trajectoires débutant en ces états seront identiques à une rotation et/ou une réflexion près. Cette formulation de la symétrie est équivalente à poser l'invariance de l'Hamiltonien sous rotation. Identifier le concept de symétrie à des classes d'équivalence d'états me donne donc toute liberté pour définir les symétries d'états et les symétries dynamiques. Ce formalisme n'est peut-être pas le plus facile à utiliser, mais il est le plus général.

### 3.2.3 Les groupes, une restriction du concept de symétrie

Contrairement à ce qui est fait dans les monographies portant sur les applications de la théorie des groupes en physique j'ai, dans la sous-section précédente, explicité comment, à partir de la définition des symétries, on arrive au groupe de symétrie. Le lecteur attentif à cette construction pourrait se demander si le concept de symétrie est plus riche que sa formalisation à l'aide des groupes. En deux endroits de la discussion précédente me suis-je peut-être éloigné de la définition de la symétrie: lors de la définition de l'opération de multiplication des transformations et lorsque j'ai réduit l'ensemble des transformations aux seules transformations bijectives. Comme je le montrerai dans la discussion qui suit, seule la restriction aux transformations inversibles est réellement significative. Attardons-nous un peu sur chacun de ces points.

Débutons par la définition de l'opération de multiplication. Je prétends que malgré les apparences, il n'y a pas de restriction impliquée par la façon dont j'ai défini cette opération. Voyons le genre d'arguments auxquels je m'oppose. Un groupe est un ensemble structuré par une opération de multiplication fermée dans le groupe. Une telle opération n'a pas son pendant dans la définition de la symétrie. Cette dernière est neutre quant à une hypothétique façon de combiner les changements. N'ayant aucun élément de ce côté, nous avons postulé le mode de combinaison des changements le plus simple et le plus général possible. L'opération de multiplication du groupe correspond, dans la réalité, à l'application successive des changements. Le résultat de cette "opération" est le changement résultant de cette combinaison. Ceci est représenté dans le formalisme par la composition des transformations. Une telle conception de l'opération est particulièrement appropriée dans le contexte de la physique. Dans ce domaine, la majorité des changements étudiés se combinent de façon linéaire et sont implicitement ou explicitement associés avec la temporalité. Une combinaison pensée comme une succession y est donc très naturelle. Malgré son utilité, cette façon de faire est une restriction du concept de changement, qui pourrait entraîner une restriction conséquente du concept de symétrie.

L'argument précédent est faux, car il implique qu'il y a une part d'arbitraire dans le choix de l'opération de multiplication. Ceci ne tient pas. Tant que l'on discutait de considérations générales, la combinaison de changements semblait arbitraire, mais une fois la symétrie définie nous perdons toute marge de manoeuvre. J'ai défendu qu'une symétrie détermine une relation d'équivalence. La transitivité de cette relation est une contrainte forte. Rappelons que la transitivité de la relation d'équivalence implique que si $u \equiv v$ et $v \equiv w$ alors $u \equiv w$. Associons des transformations à ces équivalences: $v = T_1(u)$, $w = T_2(v)$ et $w = T_3(u)$. J'en déduis que $z = T_2(T_1(u)) = T_3(u)$. On constate que la transition de la relation d'équivalence nous force à définir $T_3$ comme l'application successive de $T_1$ suivi de $T_2$.

Analysons maintenant une objection que l'on pourrait lancer fondée sur un exemple. Comme la précédente, cette objection ne tient pas, mais elle est instructive. Imaginons que Bob peut avoir trois opinions sur la peine de mort. Il peut être pour, il peut être contre ou encore être sans opinion sur le sujet. L'espace des états des opinions de Bob sur ce sujet contient apparemment trois éléments $E = \{p, c, so\}$. Bien sûr tous les changements d'opinion sont permis. Bob peut passer de n'importe quel état vers n'importe quel état. Pour les fins de la discussion, je vais me concentrer sur trois changements d'opinion particuliers. Ceux qui sont illustrés par la Figure 3-1. Selon cette figure $T_2T_1(so) = c$ de même que $T_3(so) = c$. Dans l'esprit d'une

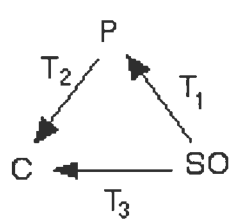


Figure 3-1: Trois changements d'opinion de Bob.

conception des changements comme ayant une structure de groupe, je devrais définir que $T_2T_1 \overset{def}{=} T_3$. Est-ce raisonnable? La succession de $T_1$ et de $T_2$ représente dans ce cas le passage pour Bob d'un état où il n'avait pas d'opinion sur la peine de mort à un état où il la considère comme justifiée, puis par la suite à une opinion contre la peine de mort. $T_3$ est un parcours plus direct. Au début Bob était sans opinion sur ce sujet, puis il est devenu contre. Ces deux parcours ne paraissent pas équivalents, même s'ils ont le même point de départ et le même point d'arrivée. Contrairement aux exemples physiques que j'ai présentés jusqu'ici, dans le changement d'opinion les étapes intermédiaires sont importantes. Un changement d'opinion n'est pas une chose indépendante de son histoire. Pour qualifier le changement d'opinion de Bob, il faut savoir s'il est oui ou non passé par $p$. De façon plus générale, si le détail du parcours dans l'espace des états est significatif, la règle de composition des transformations risque de ne pas représenter adéquatement toute la complexité de la notion intuitive de changement d'opinion.

Cet exemple ne fonctionne pas non plus parce que la multiplication n'est pas à blâmer dans l'exemple précédent. Ce sont plutôt les états qui sont mal définis. Si le parcours n'a pas d'importance alors l'espace des états est bien $E = \{p, c, so\}$, par contre si le parcours est significatif alors l'espace des états est plus riche. Il y a un $c_1$ que l'on atteint directement à partir de $so$ et un $c_2$ qui nécessite un passage par $p$. Dans les deux cas, Bob est contre la peine de mort mais les deux états sont distincts, car les données essentielles qui décrivent l'état sont différentes. Elles contiennent l'information historique pertinente. Cet exemple ne met donc pas en péril la définition de la multiplication. Passons maintenant au second lieu où une restriction du concept de symétrie est à l'oeuvre.

Une véritable limitation que nous avons dû faire est de ne conserver que les transformations bijectives. Celle-ci est vraiment significative. Compte tenu du fait que pour chaque élément d'un groupe son inverse multiplicatif est aussi membre de ce dernier, j'ai été forcé d'imposer cette restriction. Voyons-en les conséquences à l'aide d'un exemple. Imaginons un objet qui ne peut être que dans deux états seulement. Par exemple, un château de cartes qui ne pourrait être que debout, complet $d$ ou écrasé $e$, $E = \{d, e\}$. Sur cet objet, on ne permet que deux changements. Soit on ne fait rien, alors $I\binom{d}{e} = \binom{d}{e}$. Soit on peut lui donner une poussée, dans ce cas $P\binom{d}{e} = \binom{e}{e}$. S'il est debout, il s'écrase. S'il est déjà au sol, il y reste. Ces deux transformations se combinent aisément: $IP = PI = P$, $PP = P$ et $II = I$. Il est tout à fait raisonnable de dire qu'un château de cartes effondré est symétrique sous toute combinaison des changements définis plus haut. En effet, l'état $e$ est invariant sous toutes les combinaisons de changements. Cela me paraît donc un exemple clair de symétrie, car il y a bien invariance sous un changement possible. Pourtant, étant donné le fait que la transformation $P$ n'est pas une bijection, elle n'est pas inversible. Il est donc impossible de l'intégrer à un groupe. Autre exemple,

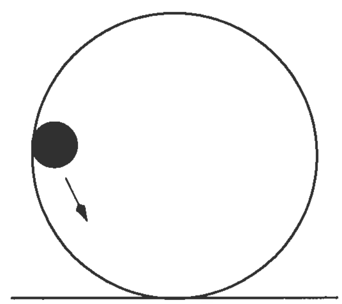

Figure 3-2: Exemple de système irréversible.

un peu plus physique celui-là, admettons qu'une petite sphère puisse se déplacer à l'intérieur d'une sphère creuse. Voir Figure 3-2. Si la grande sphère est à la surface de la terre et qu'il y dissipation d'énergie par frottement, je sais que pour n'importe quelle condition initiale de vitesse et de position, la petite sphère va fatalement terminer sa course immobile au bas de la grande sphère. Cette situation exprime bien une symétrie d'évolution, qu'importe l'état initial de la petite sphère toutes les trajectoires aboutissent au même point de l'espace des états.[5] La transformation impliquée par cette symétrie est que $\forall x \in E$, $T(x) = b$, où $b$ est l'état final, c'est-à-dire que pour tout état initial $x$ l'état final est toujours $b$. Cette transformation ne

[5] En fait, je vais un peu vite, je néglige la variabilité des orientations de la petite sphère dans son état stationnaire.

peut être intégrée à un groupe car elle est non bijective. De ces exemples, on tire la leçon que toute symétrie n'est pas représentable dans le formalisme de la théorie des groupes. Heureusement en physique, de très nombreux changements sont inversibles et de nombreuses symétries peuvent être représentées par la théorie des groupes. Ce succès ne doit cependant pas occulter le fait que le concept de symétrie est plus riche que sa formalisation dans la théorie des groupes.

### 3.2.4 Le succès de la théorie des groupes

Ouvrons une parenthèse pour discuter du succès de la théorie des groupes en physique. À ma connaissance, tous les cas significatifs de symétrie en physique peuvent être formalisés par la théorie des groupes. D'où provient un tel succès? Selon moi, il y a trois réponses plausibles à cette question. En paraphrasant Lamarck, soit le besoin crée l'organe, c'est-à-dire qu'il y a quelque chose dans la réalité qui correspond à la structure des groupes. Soit l'organe crée le besoin; la possession d'un outil performant entraîne une sélection des phénomènes étudiés. Soit l'organe et le besoin se créent mutuellement.

Si le besoin crée l'organe, il y a donc quelque chose dans la structure de la réalité qui a favorisé l'utilisation des groupes en physique. Comme je l'ai déjà montré, la caractéristique clef de la formalisation des symétries par les groupes est que l'on doit se limiter aux transformations de l'espace des états inversibles (bijections). Ce qui est particulier à ces transformations est qu'elles représentent des changements qui sont en principe réversibles. En effet, pour toute transformation $T$ de $E$ vers $E$ appartenant à un groupe, il existe une transformation $T^{-1}$ qui sera interprétée comme représentant le changement inverse à celui associé à $T$. Sachant cela, il est tentant d'expliquer la réussite de la théorie des groupes en physique par le fait que la majorité des changements dans la nature sont réversibles. Avons-nous des raisons de croire cette hypothèse? Après tout, nous sommes quotidiennement confrontés à des phénomènes apparemment irréversibles, comme le passage du temps, le vieillissement, la mort, l'usure des choses et des sentiments. Le physicien a tout de même une défense possible. Celle-ci se fait en deux temps. Premièrement, il peut affirmer qu'en ce qui concerne les phénomènes fondamentaux, ceux qui font l'objet de ses recherches, la réversibilité règne. En effet, les lois qui caractérisent les interactions fondamentales n'impliquent pas une irréversibilité des changements. Dans un deuxième temps, le physicien peut argumenter que l'irréversibilité est un effet d'échelle. Ce n'est que dans les systèmes complexes qu'elle apparaît. Ce serait un effet statistique de l'agglomération de nombreux systèmes réversibles. Pour soutenir cette thèse, il peut faire appel aux explications des phénomènes thermodynamiques à l'aide de la théorie de la mécanique statistique.[6] Dans ce contexte, le succès de la théorie des groupes est inévitable car les changements fondamentaux exhibent effectivement une structure de groupe.

Si l'organe crée le besoin, la cause du succès de la théorie des groupes ne se trouve pas dans la nature, mais plutôt dans l'utilisation de la théorie elle-même. Dans ce cas, le succès des groupes ne peut être attribué à la structure de la réalité, mais bien au fait que l'on étudie de façon privilégiée les phénomènes qui ont une structure de groupe. Pour éclairer cette sélection, voyons un passage du physicien Eugene P. Wigner:

> The world is very complicated and it is clearly impossible for the human mind to understand it completely. Man has therefore devised an artifice which permits the complicated nature of the world to be blamed on something which is called accidental and thus permits him to abstract a domain in which simple laws can be found. (page 3, [Wig67])

Ce passage nous donne une explication possible de la réussite des groupes. Wigner soutient que la réalité est trop complexe pour être comprise en entier. La stratégie

[6] Pour plus de détails voir [Tol79].

épistémologique de la physique est donc de séparer ce qui ne peut être compris (l'accident), de ce qui peut l'être (les régularités). J'imagine que parfois certains accidents finissent par être intégrés dans les régularités, mais on ne peut présumer que ce sera toujours le cas. Se pourrait-il que les symétries qui ne sont pas représentables par des groupes soient presque systématiquement mises de côté, placées dans les accidents, faute d'outils appropriés pour les étudier? Sans un formalisme comme celui des groupes, il n'est pas aisé de constater une structure régulière, une invariance, dans une série de changements. La théorie des groupes est si générale et riche qu'il est tentant de vouloir étendre son application à tous les phénomènes physiques. Il n'est pas surprenant, dans ce contexte, de constater combien des groupes comme $U(1)$ ou $SO(3)$ se retrouvent dans toutes les branches de la discipline. Dans cette perspective, le succès de la théorie des groupes s'explique par une sélection préalable des phénomènes qui serait justement due à la richesse de cet outil.

Les deux explications que je viens de présenter ne sont pas nécessairement exclusives. Nous pourrions avoir affaire à un phénomène de renforcement réciproque. Il y a beaucoup de structures de changements réversibles dans la nature. Ces structures se modélisent bien par des groupes. Ces réussites, couplées à l'absence d'outils alternatifs, nous incitent à nous concentrer sur les phénomènes qui exhibent de telles structures de changements. On trouve donc davantage d'applications de la théorie des groupes. Que l'organe et le besoin se créent mutuellement me paraît l'explication la plus plausible de la réussite de la théorie des groupes en physique.

### 3.2.5 Et la mécanique quantique?

Je vais maintenant étendre mon analyse de la formalisation du concept de symétrie à des systèmes qui ne peuvent être représentés par un espace d'états tel que défini précédemment. En particulier, je vais me concentrer sur les systèmes quantiques. L'objectif de cette sous-section n'est pas de revenir sur les applications de la théorie des groupes en mécanique quantique. Ce sujet est déjà fort bien documenté. Le lecteur intéressé n'a qu'à consulter les références déjà mentionnées au début de la section. Je vais plutôt discuter de comment on peut définir ce qu'est et ce qu'implique philosophiquement un groupe de symétrie dans le contexte de la mécanique quantique.

Le lecteur notera que la discussion qui suit diffère passablement de ce que l'on peut retrouver dans la documentation. Traditionnellement, les physiciens se sont surtout intéressés aux symétries dynamiques des systèmes quantiques, c'est-à-dire aux symétries concernant les lois de la mécanique quantique et l'évolution de ces systèmes. Cet intérêt explique bien pourquoi on a surtout travaillé dans la communauté des physiciens sur les symétries de l'Hamiltonien. Pour ma part, je désire être plus général que cela. Je veux aussi pouvoir formuler les symétries d'un système quantique qui n'ont rien à voir avec son évolution. Le développement de ce formalisme sera l'objectif de cette sous-section.

### a. La mécanique quantique en deux ou trois mots

Avant de débuter, je vais faire un court rappel de la théorie de la mécanique quantique non relativiste. Il faut tout d'abord noter que l'espace des états n'est pas un espace tel que défini plus tôt. En mécanique quantique, les états font partie d'un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$. Un tel espace est vectoriel, c'est-à-dire qu'en général[7] une somme linéaire de vecteurs d'état est un vecteur d'état. Nous sommes donc dans un contexte différent de la mécanique classique. Je vais présenter les postulats de cette théorie.

**Postulat 1** *À un instant $t_0$ fixé, l'état d'un système physique est défini par la donnée d'un ket, un vecteur, $|\psi(t_0)\rangle \in \mathcal{H}$, tel que $|\psi(t_0)\rangle$ est n'importe quel représentant de $\hat{\psi}(t_0)$, un rayon, c'est-à-dire une classe de kets qui ne diffèrent que d'une*

[7] Je reviendrai brièvement plus loin sur les exceptions.

*phase.*

Ce premier postulat mérite d'être expliqué. Les états physiques possibles d'un système sont représentés par les rayons d'un espace d'Hilbert. Un espace d'Hilbert est un espace vectoriel complexe muni d'une norme.[8] Un élément quelconque, ou vecteur, d'un espace d'Hilbert $\mathcal{H}$ est appelé un *ket* et est noté $|\psi\rangle$. Veuillez prendre note que cette notation définit le ket indépendamment de tout système d'axes. Je signale aussi que la nature vectorielle de l'espace d'Hilbert la superposition de deux kets est aussi un ket[9]. Par cet aspect un espace d'Hilbert diffère clairement d'un espace d'états classique. L'espace d'Hilbert est aussi muni d'un produit intérieur (produit scalaire) de telle sorte qu'à tout ket $|\psi\rangle$ correspond un *bra*[10], noté $\langle\psi|$. Un bra est une 1-forme telle que

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0, \quad \forall|\psi\rangle \in \mathcal{H} \tag{3.4}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = 0 \text{ si et seulement si } |\psi\rangle = 0. \tag{3.5}$$

Ceci nous permet de définir un produit scalaire ayant les propriétés suivantes. Pour toute paire de vecteurs[11] et $\forall\eta, \xi \in \mathbb{C}$, il existe un nombre complexe, noté $\langle\varphi|\psi\rangle$, tel

[8] En fait, cette définition est celle d'un espace pré-Hilbertien. Les conditions techniques supplémentaires pour définir un véritable espace d'Hilbert ne nous concernent pas ici. Il suffit de dire qu'elles impliquent la possibilité de bien définir des limites dans cet espace.

[9] Il est à noter que compte tenu du fait qu'un espace d'Hilbert est plus riche que ce que nous présumons possible comme états physiques, seule une classe de rayons est considérée comme représentative de la réalité. Il y a en effet des kets qui ne peuvent être exemplifiés par un système physique. Les règles qui nous permettent de décomposer l'espace d'Hilbert pour isoler ces cas se nomment *règles de super-sélection*. La mesure d'un nombre quantique conservé par ces règles commute avec tous les autres observables.

[10] Il est à noter que, de façon générale, l'inverse n'est pas vrai.

[11] Ces vecteurs sont généralement appelés vecteurs d'état.

que

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^* \tag{3.6}$$

$$\langle\varphi|\xi_1\psi_1 + \xi_2\psi_2\rangle = \xi_1\langle\varphi|\psi_1\rangle + \xi_2\langle\varphi|\psi_2\rangle \tag{3.7}$$

$$\langle\eta_1\varphi_1 + \eta_2\varphi_2|\psi\rangle = \eta_1^*\langle\varphi_1|\psi\rangle + \eta_2^*\langle\varphi_2|\psi\rangle \tag{3.8}$$

Ce produit scalaire induit une norme sur l'espace $\mathcal{H}$: $||\psi|| = |\langle\psi|\psi\rangle|^{1/2}$. La correspondance entre les états physiques et les vecteurs de l'espace d'Hilbert n'est pas aussi simple que dans le cas classique. Chaque état physique, chaque configuration physique dans laquelle peut se trouver le système étudié, est associé à un rayon. Un *rayon* est un ensemble de vecteurs d'état normalisés, c'est-à-dire que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, tel que pour toute paire de vecteurs appartenant au même rayon, ils ne diffèrent entre eux que d'au plus une phase. Formellement:

**Définition 8 (Un rayon)**

$$\hat{\psi} = \left\{e^{i\alpha}|\psi\rangle \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.9}$$

**Postulat 2** *Toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$ est décrite par un opérateur hermitien $A$ agissant dans $\mathcal{H}$; cet opérateur est une observable.*

**Postulat 3** *La mesure d'une grandeur physique $\mathcal{A}$ ne peut donner comme résultat qu'une valeur propre de l'observable $A$ correspondante.*

**Postulat 4 (Cas d'un spectre discret non-dégénéré.)** *Lorsque l'on mesure la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur un système dans l'état $|\psi\rangle$ normé, la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme résultat la valeur propre non-dégénérée $a_n$ de l'observable $A$ correspondante est*

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 \tag{3.10}$$

*où $|u_n\rangle$ est le vecteur propre normé de $A$ associé à la valeur propre $a_n$.*[12]

[12] Il existe des formulations de ce postulat adaptées aux autres cas.

Revenons sur ces postulats. Dans la théorie de la mécanique quantique, les quantités mesurables sont représentées par des opérateurs hermitiens (les observables). Ces opérateurs sont des automorphismes de l'espace d'Hilbert. Ils sont linéaires, c'est-à-dire que pour l'opérateur $A$ et pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{C}$:

$$A\left(\xi|\varphi\rangle + \eta|\psi\rangle\right) = \xi A|\varphi\rangle + \eta A|\psi\rangle \tag{3.11}$$

Rappelons que l'hermicité de $A$ veut dire que $A = A^\dagger$, ce qui revient à dire que

$$\langle\varphi|A\psi\rangle = \langle A^\dagger\varphi|\psi\rangle = \langle A\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|A\varphi\rangle^* \tag{3.12}$$

On dit que $|\varphi\rangle$ est un vecteur propre de l'opérateur linéaire $A$ si

$$A|\varphi\rangle = \alpha|\varphi\rangle, \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \tag{3.13}$$

**Postulat 5** *Si la mesure de la grandeur physique $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état $|\psi\rangle$ donne le résultat $a_n$, l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normée $P_n|\psi\rangle/\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}$, où $P_n = |u_n\rangle\langle u_n|$ et $|u_n\rangle$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $a_n$.*

**Postulat 6** *L'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger*

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{3.14}$$

*où $H(t)$ est l'observable associée à l'énergie totale du système, aussi appelée l'Hamiltonien.*

Notez que l'une des propriétés les plus remarquables de cette théorie est qu'elle est formellement déterministe, mais empiriquement indéterministe. En effet, l'évolution d'un ket est complètement déterminée par l'équation de Schrödinger, cependant les quantités mesurables ne le sont pas. Le résultat des mesures est probabiliste, comme le montre le postulat 4.

Dans cette courte présentation du formalisme standard de la théorie de la mécanique quantique j'ai négligé de mentionner de nombreuses contraintes techniques concernant les états et les opérateurs. Ces éléments ne me semblaient pas essentiels à la bonne compréhension de la suite. Le lecteur est invité à consulter [CTDL86b] pour plus de détails.

### b. Le concept de groupe de symétrie en mécanique quantique

Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment définir un groupe de symétrie en mécanique quantique. Rappelons d'abord qu'une symétrie est une invariance sous un changement possible. La théorie de la mécanique quantique implique un indéterminisme des mesures et est en général interprétée comme impliquant un indéterminisme fondamental de la nature. Le maximum de connaissance que l'on peut espérer avoir d'un système est la distribution de probabilités de mesurer tel ou tel paramètre, comme la vitesse, la position, etc. Un groupe de symétrie est donc un ensemble de transformations qui laisse inchangées les distributions de probabilités d'un système. Par exemple, admettons que nous connaissions la distribution de probabilités en fonction de l'angle pour la diffusion d'une certaine particule par un certain potentiel. Dire que ce potentiel possède la symétrie sphérique revient à dire que cette distribution est indépendante de la direction du faisceau incident. Ceci dit, dès que l'on tente de formaliser cette définition, on se trouve confronté à des difficultés d'interprétation. Selon que l'on interprète le changement comme étant actif (impliquant une modification physique) ou passif (impliquant une modification de perspective), la définition de la symétrie n'implique pas les mêmes conséquences philosophiques. Ces obstacles étaient déjà présents dans les cas de symétries en physique classique, mais ils semblaient assez faciles à contourner.

Voyons cette distinction à l'aide d'un exemple. Lorsque j'affirme qu'un flocon de neige est invariant sous une rotation de $\pi/3$ rad, je peux interpréter cette affirmation de deux façons:

- Active: Si je fais effectivement tourner le flocon de $\pi/3$ rad par rapport à un cadre de référence, par exemple les étoiles fixes lointaines, son apparence reste la même.
- Passive: Si je change mon point de vue, c'est-à-dire en faisant tourner mon système de coordonnées de $-\pi/3$ rad, l'apparence du flocon reste la même.

Même si les deux cas correspondent formellement, ils suscitent des interprétations différentes. Commençons par l'interprétation active. Si dans le système de coordonnées, l'état final et l'état initial correspondent au même état[13], comment savoir qu'il y a eu changement? J'ai déjà discuté de ce point dans le dialogue du chapitre précédent. Pour différencier l'avant de l'après changement, il nous faut sortir du système étudié. Par exemple, pour produire le changement matériel qu'est la rotation d'un flocon de neige, il a bien fallu que certains changements se produisent dans l'environnement du flocon. Un certain travail (au sens physique) a dû être fait. On peut aussi conceptuellement étiqueter les particules et suivre le changement à l'aide de celles-ci. Ceci est possible en mécanique classique car chaque particule peut être associée à une trajectoire. Donc, en élargissant le cadre de référence, on devrait capturer les changements environnementaux qui nous permettent de distinguer l'avant de l'après rotation.

Dans l'interprétation passive, le problème du changement se pose autrement. Même si l'état final est identique à l'état initial par rapport au système de coordonnées je sais qu'ils ne sont pas les mêmes, car je peux explicitement vérifier que le changement de coordonnées effectué n'est pas l'identité. Cette ambiguïté évitée, une question demeure: qu'est-ce qui a changé? Ce ne peut être le flocon de neige,

[13]Si le système est symétrique sous ce changement, ces deux états pourraient être physiquement indifférenciables.

puisque ce dernier n'a subi aucune modification. Une façon simple de répondre à cette question est d'affirmer que c'est l'observateur qui a changé.[14] Dans notre exemple, la rotation passive du système de coordonnées peut se comprendre comme une rotation de l'observateur de $-\pi/3$ rad. Si l'observateur est un objet physique, comme un appareil de mesure, un tel changement peut être quantifié dans un cadre de référence assez large pour le contenir. Dans l'exemple du flocon, le changement passif est réinterprété comme un changement actif de l'objet observateur. Bien sûr une telle correspondance n'est pas toujours possible. Bien des changements de coordonnées ne sont que des changements de représentation. En fait, si aucune transformation active ne correspond à un changement de coordonnées, cela aura des conséquences philosophiques immédiates sur le statut empirique de la symétrie associée à ce changement. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

Examinons, en premier lieu, l'interprétation active du changement en mécanique quantique[15]. L'une des difficultés nouvelles inhérentes à la théorie de la mécanique quantique est qu'un état physique ne correspond pas de façon univoque à un vecteur de l'espace d'Hilbert. On doit donc être circonspect en définissant les transformations mathématiques qui représentent les changements. À cette étape du travail, j'ai à effectuer un choix. Si je désire conserver l'association entre symétrie et relation d'équivalence, sur quelles entités dois-je appliquer ces relations? Dans le cas classique, j'ai de façon naturelle montré qu'à toute symétrie correspond une relation d'équivalence entre états. Doit-on en mécanique quantique poser qu'à une symétrie correspond une équivalence entre vecteurs d'état? Je ne crois pas que cette voie soit souhaitable. Contrairement au cas classique, je ne définis pas le groupe de symétrie comme étant une simple équivalence entre états, mais bien comme une équivalence

[14]Cette façon de voir est en concordance avec ce qui est fait dans la théorie de la relativité restreinte. Dans ce cadre théorique, une classe de changements de coordonnées est interprétée comme des changements de référentiel inertiel, changements qui sont des modifications du point de vue de l'observateur. Bien sûr, ce ne sont pas tous les changements de coordonnées qui correspondent à un changement de référentiel inertiel.

[15]Cette approche est celle privilégiée par M. Chaichian et R. Hagedorn [CH98].

entre mesures possibles. Mettre les mesures à l'avant-scène minimise l'engagement ontologique qu'implique cette définition. J'aurais pu directement définir la symétrie comme les quantités invariantes associées aux transformations de la fonction d'onde. Cette démarche aurait pu être interprétée comme un engagement ontologique en faveur de la réalité de la fonction d'onde en mécanique quantique. C'est pourquoi je préfère me concentrer sur les mesures.

Quelques remarques sur cette conception s'imposent. Admettons que j'étudie deux systèmes $S$ et $S'$ qui sont symétriques. Sachant que j'explore l'approche active, je me pose la question suivante: si les systèmes $S$ et $S'$ ne peuvent être différenciés par des mesures physiques, comment savoir s'il y a eu changement pour passer de $S$ à $S'$? Comment peut-on affirmer que $S'$ n'est pas $S$? Comme pour l'exemple du flocon de neige, on cherchera dans l'environnement extérieur au système la brisure de symétrie qui nous permettra de différencier $S'$ de $S$. Cette recherche demande tout de même quelques précautions. Par exemple, on pourrait inclure l'observateur (exemple: l'appareil de mesure) au système étudié. Si la transformation qui permet de faire passer de $S$ à $S'$ ne laisse pas inchangé l'observateur $O$, cet élargissement semble une bonne stratégie. Il faut cependant veiller à ce que $O$, en dehors des actes de mesure, influence de façon négligeable le système $S$. C'est en effet les symétries de $S$ que nous désirons définir, pas les symétries du système $S + O$. Malgré cette précaution, le problème peut s'avérer encore plus profond. On pourrait se demander si on est en droit de réunir dans une même description un objet de nature quantique ($S$) et un objet de nature classique comme ($O$). Le régime intermédiaire entre la physique classique et quantique n'étant pas très bien compris, cette inclusion semble engendrer plus de questions qu'elle n'amène de réponses. À ce légitime questionnement, je ne peux répondre que par la pratique. Si j'ai de bonnes raisons de croire que l'appareil de mesure et le système quantique sont relativement bien isolés l'un de l'autre, je considérerai l'inclusion des deux systèmes sous une même description comme une simple juxtaposition. Je me trouverai donc justifié d'utiliser un cadre de référence assez large pour différencier $S$ de $S'$. Par contre, même dans une telle perspective, je demeure vulnérable au fait que le système étudié puisse être vraiment complètement isolé, de telle sorte que la transformation $S \to S'$ n'amène aucune modification même dans un cadre de référence plus large. Dans ce cas, il paraît raisonnable de considérer $S$ et $S'$ comme étant le même système, mais possiblement se trouvant dans une configuration différente.[16] Les remarques précédentes ont deux conséquences importantes. Si on ne peut différencier $S$ de $S'$ par des mesures sur ces derniers, cela implique que la transformation $g$ qui permet de passer des états de $S$ à ceux de $S'$ est un automorphisme des états de $S$, c'est-à-dire que $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. En effet, si ce morphisme n'était pas un automorphisme, on pourrait en principe imaginer une mesure qui ferait la différence entre $S$ et $S'$. On constate donc que l'approche active des symétries implique un automorphisme de l'espace d'Hilbert. On aurait pu défendre un argument similaire dans l'approche passive. Dans ce cas, ce serait non pas les kets qui seraient transformés, mais bien les observables, $A \to A' = F_g(A)$.

Jusqu'ici, j'ai discuté d'invariances d'états par rapport à des mesures. Si je m'intéresse aux symétries qui conservent aussi la dynamique, c'est-à-dire à celles qui impliquent la conservation des équations du mouvement, je dois ajouter une contrainte. Voyons ce qu'implique une telle question. Admettons que la transformation $T : |\psi\rangle \to |\psi'\rangle$ fasse partie d'un groupe de symétrie dynamique du système $S$. Admettons aussi, pour les fins de l'argumentation que cette transformation modifie aussi les observables et en particulier l'Hamiltonien $H \to H'$. L'évolution temporelle des états de $S'$, en d'autres mots la dynamique de ce système, peut se calculer à l'aide de l'opérateur Hamiltonien. Ceci n'est que la réécriture du contenu de l'équation de Schrödinger (Postulat 6). Je vais déterminer quelle condition est nécessaire et suffisante pour que deux systèmes aient la même dynamique. Pour les système conservatifs: $|\psi'(t)\rangle = e^{-\frac{iH't}{\hbar}}|\psi'(0)\rangle$. Mais attention, dans le paragraphe précédent j'ai montré que $|\psi'\rangle \in \mathcal{H}$ est aussi un état de $S$, sinon les deux systèmes sont différenciables. Son évolution dans $S$ sera $|\psi''(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi'(0)\rangle$. De cela, je peux tirer une importante

[16] Une telle conclusion présume d'une position empiriste minimale. Ce qui ne peut être mesuré directement ou indirectement n'a pas sa place comme objet de la théorie physique.

conclusion. Pour qu'il ne soit pas possible de différencier $|\psi'(t)\rangle$ et $|\psi''(t)\rangle$, en d'autres mots que $S$ et $S'$ aient la même dynamique, il faut que $|\psi'(t)\rangle$ et $|\psi''(t)\rangle$ ne diffèrent que d'au plus une phase. Si ce n'était pas le cas $|\langle\varphi|\psi'(t)\rangle|^2 \neq |\langle\varphi|\psi''(t)\rangle|^2$, pour un $|\varphi\rangle$ quelconque. Pour garantir cette indifférenciabilité, il faut que $H' = H + \lambda \cdot \mathbf{1}$, où $\lambda \in \mathbb{C}$. Cette quantité $\lambda$ n'a aucune incidence quant à la dynamique du système. L'ajout de cette contrainte nous permet de choisir parmi l'ensemble des transformations unitaires celles qui représentent effectivement des symétries dynamiques. Donc, informellement une transformation faisant partie d'un groupe de symétrie dynamique conserve les distributions de probabilité et laisse inchangé l'Hamiltonien ou tout autre opérateur représentant la dynamique.[17]

Jusqu'ici, je n'ai pas tenu compte du fait que ce ne sont pas les états de l'espace d'Hilbert qui représentent les états physiques mais bien les rayons. Il me faut donc raffiner ma définition de symétrie pour tenir compte de ce fait. Par définition, pour représenter un état physique, on peut choisir n'importe quel représentant du rayon correspondant. Connaissant $\mathcal{G}$, un groupe de transformations quelconque des états, on peut définir le groupe $\hat{\mathcal{G}}$ isomorphe à $\mathcal{G}$ qui transforme les rayons de la même façon que $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est un groupe de symétrie du système étudié alors $\hat{\mathcal{G}}$, qui est la représentation de $\mathcal{G}$ en fonction des rayons, jouera le même rôle pour ces derniers. Si l'action de $\mathcal{G}$ laisse les éléments de matrice inchangés, de même $\hat{\mathcal{G}}$ laisse les éléments de matrice invariants. On définit le produit scalaire de rayons comme $\hat{\varphi} \cdot \cdot \hat{\psi} = |\langle\varphi|\psi\rangle|$, où $|\psi\rangle \in \hat{\psi}$ et $|\varphi\rangle \in \hat{\varphi}$ sont n'importe quels représentants des rayons donnés. Le produit tel que défini est indépendant sous un changement de représentant car $|\langle\varphi|\psi\rangle| = |\langle\varphi|e^{i\alpha}|\psi\rangle|$. Nous avons maintenant les éléments pour définir le groupe de symétrie:

**Définition 9 (Groupe de symétrie (approche active))** *$\mathcal{G}$ est un groupe de symétrie du système quantique $S$ si la représentation-rayon $\hat{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ laisse les produits*

[17]Dans un autre contexte, les équations représentant la dynamique pourraient être formulées en fonction de la matrice S, etc.

*de rayons pour $S$ invariants.*

$$\mathcal{G} : g \in \mathcal{G} \ \textit{transforme} \ g : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$
$$\hat{\mathcal{G}} : \hat{g} \in \hat{\mathcal{G}} \ \textit{transforme} \ \hat{\psi} \to \hat{\psi}' = \hat{g}\hat{\psi} \ \textit{tel que}$$
$$\hat{\varphi} \cdot A \cdot \hat{\psi} = \hat{\varphi}' \cdot A \cdot \hat{\psi}'$$

*où $A$ est la ou les observables pertinentes à l'invariance impliquée par la symétrie. De plus, si on veut que la symétrie persiste dans le temps, c'est-à-dire si l'on désire que la symétrie conserve la dynamique, il faut que l'Hamiltonien soit conservé.*

Voyons brièvement l'approche passive[18]. Dans ce cas, on ne considère pas que nous avons affaire à deux systèmes différents $S$ et $S'$, mais bien à deux observateurs $O$ et $O'$ qui regardent le même système $S$. Les deux observateurs ayant des perspectives différentes ne verront pas le système de façon identique, c'est-à-dire que par rapport à leur système de coordonnées respectif le système $S$ aura une apparence différente. Cependant, par analogie avec le cas classique, on peut affirmer qu'un changement de cadre de référence de l'observateur ne modifie pas $S$. $\mathcal{H}$ reste l'espace approprié pour décrire ses états et le même rayon $\hat{\psi}$ représente bien l'état avant et après le changement. Néanmoins, il est clair que les observables seront modifiées, car celles-ci dépendent du cadre de référence. Plus précisément, cette transformation de point de vue entraînera un automorphisme de l'ensemble des observables. Ce morphisme implique donc possiblement des mesures différentes avant et après le changement. Formalisons la définition de la symétrie qui résulte de cette conception.

**Définition 10 (Groupe de symétrie (approche passive))** *$\mathcal{G}$ est un groupe de symétrie du système quantique $S$ si la représentation-rayon $\hat{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}$ laisse les produits*

[18]Cette conception de la symétrie est celle apparemment privilégiée par Steven Weinberg [Wei95], mais la discussion qu'il lui associe semble davantage compatible avec l'approche active, ce que défend Weinberg reste donc une question ouverte.

*de rayons pour $S$ invariants.*

$$\mathcal{G} : g \in \mathcal{G} \ transforme \ O \rightarrow O' = gO,$$

$$\mathcal{G} : g \in \mathcal{G} \ transforme \ les \ observables \ A' = F_g(A) \ tel \ que$$

$$\hat{\varphi} \cdot A \cdot \hat{\psi} = \hat{\varphi} \cdot A' \cdot \hat{\psi}$$

*De plus, si les transformations de $\mathcal{G}$ laissent inchangées les équations du mouvement, alors elles doivent laisser l'Hamiltonien invariant.*

Cette définition est semblable à la précédente, mais son interprétation est différente. L'approche active définit la symétrie comme une équivalence entre états distincts. L'approche passive quant à elle considère la symétrie comme une équivalence de points de vue sur le même système. Si le système étudié semble changer, ce n'est qu'une apparence.

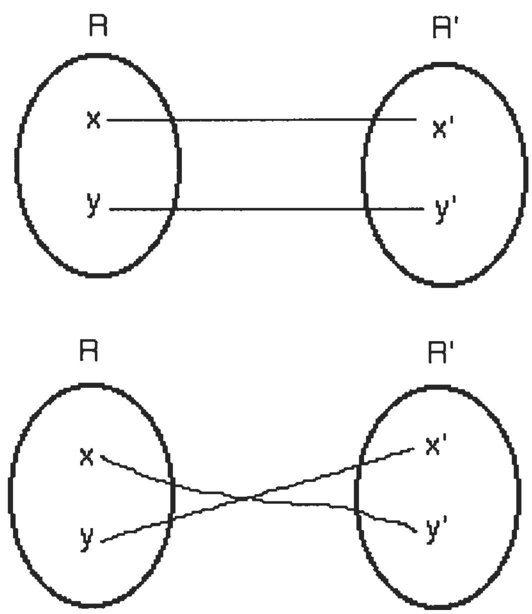


Figure 3-3: Deux transformations des états des rayons R et R'.

Avant de terminer cette section, je me dois de faire une dernière remarque.

Même si une symétrie se définit avant tout à partir des transformations de rayons, en pratique c'est avec les vecteurs d'états que l'on travaille. Comme l'illustre la figure 3-3, à une même transformation des rayons peut correspondre plus d'une transformation des états. Pour choisir efficacement, nous avons à notre disposition un théorème d'Eugene P. Wigner[19]. Ce théorème affirme que pour toute transformation des rayons $\hat{\psi} \to \hat{\psi}'$, on peut définir un opérateur équivalent agissant sur les vecteurs de l'espace d'Hilbert tel que si $|\psi\rangle \in \hat{\psi}$ alors $U|\psi\rangle \in \hat{\psi}'$ et l'opérateur $U$ est soit unitaire et linéaire

$$\langle U\varphi|U\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle \tag{3.15}$$

$$U|\xi\varphi + \eta\psi\rangle = \xi U|\varphi\rangle + \eta U|\psi\rangle \quad \forall\xi, \eta \in \mathbb{C} \tag{3.16}$$

soit anti-unitaire et anti-linéaire

$$\langle U\varphi|U\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^* \tag{3.17}$$

$$U|\xi\varphi + \eta\psi\rangle = \xi^* U|\varphi\rangle + \eta^* U|\psi\rangle \quad \forall\xi, \eta \in \mathbb{C}. \tag{3.18}$$

Les opérateurs représentant les transformations des rayons forment aussi un groupe isomorphe à $\hat{\mathcal{G}}$.

## 3.3 Symétries locale et globale

Je vais maintenant m'intéresser à une distinction qui occupe une place importante en physique: la différence entre symétries globale et locale. Cette distinction est associée au type de transformations impliquées par la symétrie. Les symétries globales sont des invariances sous changements globaux, les symétries locales sous des changements locaux. Voyons d'abord quelques exemples qui nous serviront d'archétypes.

Comme exemple de transformation globale, je propose une translation d'une certaine longueur et dans une certaine direction, représentée par le vecteur $\vec{T}$. Cette

[19]Une preuve complète de ce théorème se trouve dans l'appendice A du chapitre 2 de [Wei95].

transformation affecte tout système de la même manière. Toutes les parties d'un objet sont ainsi translatées de la même façon. Comme second exemple, je propose une rotation locale de la phase de la fonction d'onde: $\psi(\vec{x},t) \rightarrow e^{i\alpha(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t)$, où $\alpha$ est une fonction du temps et de la position $\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Une telle transformation a une dépendance locale manifeste. En effet, elle dépend explicitement des coordonnées spatio-temporelles. En chaque point, la fonction d'onde peut potentiellement subir une rotation de phase de magnitude différente. Cette dépendance locale est ce qui fait de cette transformation une transformation locale. Dans ce cas, comme dans celui de la translation, le passage d'une transformation locale à une transformation globale et inversement est continue. Dans le cas de la rotation, il suffit de poser que $\alpha(\vec{x},t) = constante$ pour que cette transformation devienne globale. Dans celui de la translation, ajouter une dépendance spatiale à la translation $\vec{T}(\vec{x})$ rend cette transformation locale.

Certaines transformations sont plus difficiles à classer. La Figure 3-4 illustre

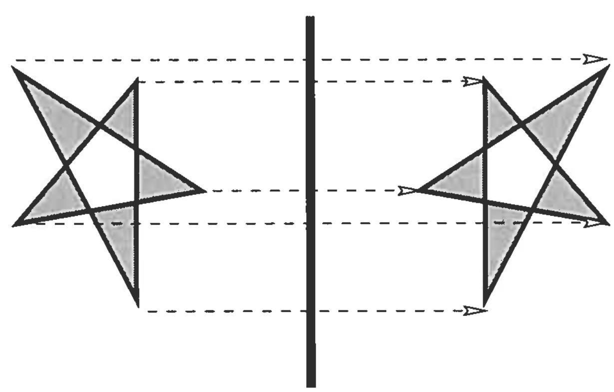

Figure 3-4: Réflexion d'une figure par rapport à une droite.

un de ces cas: la réflexion d'une figure par rapport à une droite. Cette transformation est-elle locale ou globale? Elle a une dépendance locale dans la mesure où la réflexion s'applique de manière différente selon les points. D'un autre côté, cette transformation est globale, dans la mesure où je peux formuler une règle de réflexion sans dépendance locale, sans référence spatio-temporelle; une règle qui pourrait se formuler ainsi, projeter chaque point de l'autre côté de la droite de réflexion de façon perpendiculaire et à une distance égale à celle qui sépare le point de la droite de réflexion. C'est à cause de la non dépendance locale de cette règle que l'on considère cette transformation comme une transformation globale. Un autre cas éclairant est celui de la rotation d'une figure autour d'un certain point. Là encore, il y a une certaine localité car les points de la figure ne se déplacent pas de façon uniforme, cependant on peut définir cette rotation sans faire appel à une dépendance locale. Je peux par contre rendre une rotation locale en imposant explicitement une dépendance spatio-temporelle. Par exemple, en donnant deux angles de rotation, l'un pour tout ce qui est à gauche dans le plan $x < 0$ et un autre pour tout ce qui est à droite dans le plan $x \geq 0$. Dans ce cas, la rotation peut être qualifiée de locale.

Je vais maintenant me pencher plus avant sur les symétries locales. De façon générale, ce genre de symétries apparaît sous deux formes qui sont reliées. Soit ce qui est étudié reste invariant sous un changement qui dépend des coordonnées (dans ce cas, la notion de changement global se fragmente en une multitude de changements locaux), soit différentes parties d'un objet sont équivalentes entre elles. Nous allons illustrer chaque cas par un exemple.

La liberté de jauge en électromagnétisme classique est un bon exemple du premier cas de figure. Compte tenu de l'importance de cet exemple dans les chapitres qui suivent, nous allons prendre le temps de bien l'expliquer. Dans cette thèse, nous utiliserons souvent la formulation covariante de l'électromagnétisme classique, c'est-à-dire la formulation qui est manifestement invariante sous un changement de référentiel inertiel[20]. L'espace-temps est représenté par un espace de Minkowski à 4 dimensions[21] ($\mathbb{M}^4$). On adopte aussi les définitions suivantes:

[20]J'entends par changement de référentiel inertiel tous les changements associés au groupe de Lorentz.

[21]Dans cet espace, on étiquette les positions à l'aide de quadrivecteurs $x^\mu = (t, x, y, z)$, où $\mu = 0, 1, 2, 3$ et où $\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\vec{\nabla})$. La métrique est diagonale: $g_{00} = 1$ et $g_{ii} = -1$, où $i = 1, 2, 3$..

**Définition 11 (Le quadrivecteur courant)** *On définit le quadrivecteur courant comme étant* $J^\mu = (c\rho(x), \vec{\jmath}(x))$, *où* $\vec{\jmath}$ *est la densité de courant électrique,* $\rho$ *la densité de charge et c est la vitesse de la lumière.*

**Définition 12 (Le tenseur de l'électromagnétisme)**

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

*où* $\vec{E}$ *et* $\vec{B}$ *sont respectivement les champs électrique et magnétique.*

**Définition 13 (Le tenseur totalement antisymétrique de rang 4)**

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } \alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 3, \\ & \text{et pour toute permutation paire} \\ -1 & \text{pour toute permutation impaire} \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \end{cases}$$

À l'aide de ces définitions, on peut écrire les équations qui décrivent la dynamique de l'électromagnétisme classique[22]:

$$\text{Les équations de Maxwell:} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \tag{3.19}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\beta\delta}\partial_\mu F_{\beta\delta} = 0 \tag{3.20}$$

$$\text{L'équation de force:} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \tag{3.21}$$

$$\text{La conservation de la charge:} \quad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{3.22}$$

[22]Dans cette thèse, nous utilisons la convention d'Einstein qui dit que si un indice apparaît deux fois du même côté d'une équation, il y a une sommation implicite sur cet indice de 0 à 3.

où $\vec{p}$ est l'impulsion de la particule sous l'influence du champ électromagnétique, $q$ sa charge et $\vec{v}$ son vecteur vitesse.

Ceci étant dit, le champ électromagnétique peut être élégamment décrit en termes d'un champ appelé champ de jauge.

**Définition 14 (Le tenseur électromagnétique)**

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Cette possibilité est aisément déduite de l'équation (3.20) et de l'antisymétrie du tenseur $F^{\mu\nu}$ [voir la définition 12]. Les composantes de $A^\mu$ sont souvent écrites comme $A^\mu = (\phi(x), \vec{A}(x))$ et sont appelées respectivement potentiel scalaire et potentiel vecteur. Pour que les deux définitions du tenseur de l'électromagnétisme correspondent, il faut que

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi \tag{3.23}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \tag{3.24}$$

Nous avons donc le choix entre deux formulations de l'électromagnétisme: en fonction de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ou de $A^\mu$. Nous reviendrons sur ce choix dans l'un des chapitres qui suivent. Concentrons-nous sur la formulation utilisant le champ de jauge. Cette dernière exhibe une propriété fort intéressante: le tenseur électromagnétique reste inchangé sous une transformation de jauge.

**Définition 15 (Transformation de jauge de l'électromagnétisme)**

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu = A^\mu(x) - \partial^\mu \chi(x)$$

*où $\chi$ est une fonction au moins $C^2$.*

En d'autres mots, pour décrire la même situation physique, nous avons le choix entre une infinité de champs de jauge équivalents. Notez bien que les transformations qui laissent $F^{\mu\nu}$ inchangé *ne sont pas* des transformations globales et ce, même si ces transformations sont définies sur la totalité de l'espace. En effet, $\chi(x)$ est une fonction qui dépend explicitement des coordonnées spatio-temporelles. Nous avons donc affaire à une symétrie locale. La dynamique décrite par la théorie de l'électromagnétisme, qui est déterminée par le tenseur $F^{\mu\nu}$, demeure inchangée sous une transformation locale de $A^{\mu}$. C'est donc ce que l'on nomme communément la "physique" qui est symétrique. Savoir si cette invariance est la conséquence d'un simple changement de représentation ou d'une réelle équivalence entre des états physiques distincts est une question sur laquelle je me pencherai dans le chapitre 5.

Un autre exemple éloquent de symétrie locale est celui d'un carrelage[23]. Imaginons que le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est divisé en rectangles de taille $2 \times 1$. Ces rectangles sont délimités par l'ensemble $X$, que l'on considérera comme étant unidimensionnel. Cet ensemble $X$ représente en quelque sorte le mortier entre les tuiles. Donc $X = H \cup V$, où $H = \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et $V = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, où $H$ représente les lignes horizontales et $V$ les lignes verticales du mortier. On définit comme étant *une tuile* tout ensemble connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus X$. Ce sont donc les ensembles connexes à l'intérieur du mortier $X$. Tel que défini, ce carrelage, cet ensemble de tuiles et de mortier, est de taille infinie. Limitons-nous à un certain domaine $B = [0, 2m] \times [0, n]$. Le nouveau carrelage délimité par $X \cap B$ possède des symétries globales, sur lesquelles nous reviendrons dans la sous-section suivante, mais plus intéressant encore il exhibe des symétries locales. Dans la figure 3-5, nous avons illustré des paires de points qui sont équivalents quant à leur voisinage, c'est-à-dire qu'ils ont des voisinages immédiats de même nature. Nous avons choisi six paires de points, un pour chacune des catégories de points équivalents quant à la nature de leur voisinage. En effet, les deux points 1 n'ont comme voisins immédiats que des points appartenant à la même tuile. Les deux

[23] J'emprunte cet exemple à Alan Weinstein [Wei96b]. Dans la sous-section qui suit j'utilise aussi le formalisme des groupoïdes présenté dans ce même article.

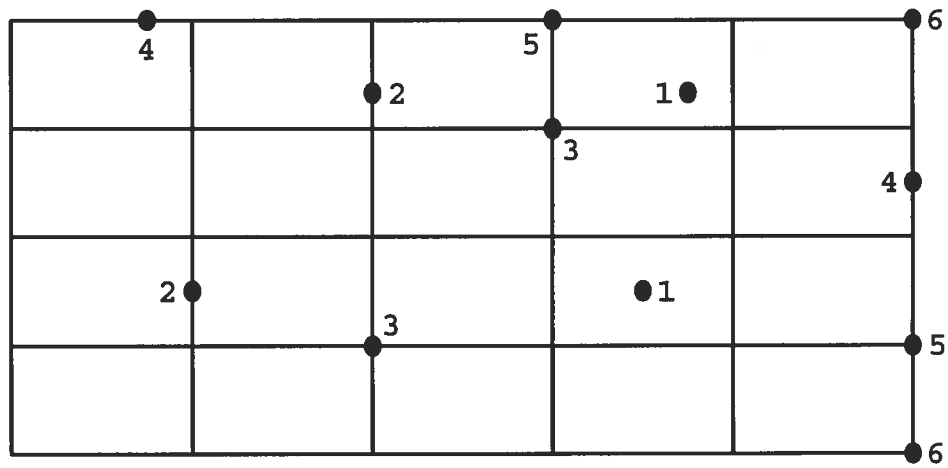


Figure 3-5: Carrelage pour lequel m=5 et n=4.

points 2 ont des voisins appartenant à deux tuiles différentes et ne sont pas sur la frontière du carrelage. Et ainsi de suite pour les autres paires. À partir de ces paires, on peut définir des relations d'équivalence entre points du carrelage. Par exemple, on peut relier tous les points de type 1, tous les points de type 2, etc. Ces relations dénotent des symétries locales. En effet, on pourrait dire qu'une transformation qui fait passer un point vers un autre dans sa catégorie conserve la nature de son voisinage. C'est une invariance. Prenons un cas particulier, la translation caractérisée par le vecteur $(2, 11/6)$, qui amène le point 2 le plus à gauche de la figure 3-5 sur son homologue, si elle était appliquée à l'ensemble du carrelage ne correspondrait pas à un automorphisme. Ceci était attendu, puisque les relations d'équivalence ne relient pas des états mais bien des points faisant partie de l'objet d'étude.

À ces symétries qui ne dépendent que du voisinage, on peut ajouter toutes les symétries locales qui associent les points qui sont disposés de façon similaire dans une tuile ou par rapport au mortier. Par exemple, les symétries qui associent tous les coins de tuiles ou les centres de tuile, etc. Ces symétries sont celles qui nous indiquent que nous avons affaire à un carrelage régulier. Je prétends que la représentation adéquate de la structure des transformations qui conservent ces invariances n'est pas celle d'un groupe mais celle d'un groupoïde.

### 3.3.1 Des groupes aux groupoïdes

Le formalisme des groupoïdes est jusqu'à maintenant très peu utilisé en physique. À ma connaissance, il n'est pas encore apparu dans le discours de la philosophie des sciences. Il n'est donc pas superflu de le présenter et de montrer en quoi il est un formalisme adéquat pour représenter certaines symétries. Nous ferons cette présentation à travers l'analyse de deux exemples. Le lecteur qui s'intéresse à une approche plus historique de la théorie des groupoïdes est invité à consulter l'article de Ronald Brown [Bro87] qui réfère à plus de 160 ouvrages et articles portant sur cette théorie. Il ne sera pas utile ici de montrer de façon absolument exhaustive les limites du formalisme des groupoïdes. S'il était intéressant pour les groupes de montrer comment ce formalisme ne réussit pas à rendre dans toute sa généralité le concept de symétrie, cette restriction est ici déjà prise pour acquis.

Reprenons l'exemple du carrelage infini vu précédemment. Concentrons-nous sur la catégorie de changements qui laisse le carrelage inchangé. Les transformations qui laissent le carrelage inchangé sont représentées par un sous-groupe du groupe des transformations rigides de $\mathbb{R}^2$. Ce sous-groupe $\Gamma$ consiste en toutes les transformations qui laissent $X$ invariant. Construisons ce groupe. Tout d'abord, $\Gamma$ contient toutes les translations qui ne modifient pas $X$. Il est facile de constater que ce sous-groupe de $\Gamma$ est composé de toutes les translations qui amènent un coin de tuile vers un autre coin de tuile. On peut représenter cet ensemble de translations par $\Lambda = H \cap V = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ajoutons à cet ensemble de translations les réflexions par rapport aux points suivants: les coins de tuiles et les points à mi-chemin entre deux coins. ($\frac{\Lambda}{2} = \mathbb{R} \times \frac{\mathbb{R}}{2}$). Ajoutons finalement les réflexions par rapport aux droites verticales et horizontales qui passent par ces points. Grâce aux discussions précédentes, nous savons que $\Gamma$ est un groupe de symétries globales et un sous-groupe du groupe de transformations du carrelage.

Le groupe de symétrie $\Gamma$ est suffisamment riche pour représenter le fait que l'objet étudié est un carrelage régulier. En effet, l'invariance sous les translations discrètes et sous réflexion nous permet de déduire que nous sommes face à la juxtaposition d'éléments identiques, cependant ce groupe ne nous permet pas d'affirmer quelque chose quant aux régularités locales, c'est-à-dire qu'il n'est pas approprié pour représenter des transformations de points comme celles impliquées par les symétries de voisinage. Si on passe à un carrelage fini $X \cap B$, où $B = [0, 2m] \times [0, n]$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$, le groupe se réduit radicalement. En effet, dans ce cas, $\Gamma$ ne comporte que 4 éléments: l'identité, la réflexion par rapport au point $(m, n/2)$ et les réflexions par rapport aux droites horizontale et verticale qui passent par ce point. Force nous est de constater que le groupe de symétrie ne nous permet même pas d'affirmer que nous avons affaire à un carrelage. Toute information sur la structure locale semble perdue. C'est à cause de cette incapacité à représenter les régularités locales qu'il nous faut renoncer au formalisme que nous avons vu dans la section précédente et développer un nouvel angle d'attaque. Cet autre formalisme, qui nous semble le plus approprié, est celui des groupoïdes.

En gros, un groupoïde est un groupe à plusieurs objets. Un groupoïde à un seul objet est essentiellement un groupe. Le concept de groupoïde n'est donc pas totalement indépendant de celui de groupe. Le groupoïde est plutôt une extension de ce dernier. Revenons à notre exemple de carrelage. Nous allons maintenant définir le groupoïde de transformations[24] de l'action de $\Gamma$ sur $\mathbb{R}^2$. Le lecteur peut se demander pourquoi nous continuons à travailler avec $\Gamma$ si nous savons que ce groupe est impuissant à représenter la structure locale du carrelage? En fait, les transformations qui composent ce groupe sont en mesure d'associer des points qui ont des positions

[24] Dans ce qui suit, je définis les groupoïdes d'une façon qui me paraît appropriée au propos de cette thèse. Bien sûr, il existe d'autres définitions équivalentes, comme par exemple de dire qu'un groupoïde est une catégorie pour laquelle tous les morphismes ont un inverse.

équivalentes relativement à une tuile. C'est le caractère global de ces transformations qui est à rejeter. Ce que l'on désire, c'est que certaines transformations de $\Gamma$ soient exclues, car elles sortent les points du carrelage fini. On veut aussi que certains produits de transformations soient interdits pour la même raison. Enfin, on souhaite que les transformations de $\Gamma$ aient explicitement une dépendance locale. Pour ce faire, il nous faut renoncer à ce qu'elles soient des automorphismes du carrelage. Revenons donc à l'action de ce groupe sur le plan. Ce groupoïde de transformations est l'ensemble[25]

$$G(\Gamma, \mathbb{R}^2) = \{(x, \gamma, y) \mid x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^2, \gamma \in \Gamma \text{ et } x = \gamma y\} \tag{3.25}$$

avec l'opération binaire partiellement définie

$$(x, \gamma, y)(y, \nu, z) = (x, \gamma\nu, z) \tag{3.26}$$

Cette opération sur $G = G(\Gamma, \mathbb{R}^2)$ possède les propriétés suivantes:

1. Elle est définie seulement pour certaines paires d'éléments. Si $g, h \in G$ alors le produit $gh$ est défini seulement quand $s(g) = t(h)$ pour certains morphismes $t$ et $s$ de $G$ vers $\mathbb{R}^2$. Dans notre cas, $t : (x, \gamma, y) \mapsto x$ et $s : (x, \gamma, y) \mapsto y$.

2. Elle est associative. Si $g, h, k \in G$ et que l'un des deux produits $(gh)k$ ou $g(hk)$ est défini, alors l'autre l'est aussi et ils sont égaux.

3. Pour chaque élément $g$ dans $G$, il existe un élément identité gauche et droit, $\lambda_g$ et $\rho_g$, tel que $\lambda_g g = g = g\rho_g$.

4. Pour chaque élément $g$ de $G$, il existe un inverse $g^{-1}$ tel que $gg^{-1} = \lambda_g$ et $g^{-1}g = \rho_g$.

On constate donc que $G$ contient tous les morphismes qui amènent un point du carrelage infini vers un autre point occupant une position relative identique au premier. Il est donc la bonne structure de transformations pour représenter les relations

[25] En définissant l'action du groupe de cette façon, je suis encore [Wei96b].

d'équivalence qui associent les points qui ont une position relative semblable par rapport à leur tuile. Nous allons revenir là-dessus dans un instant. Si l'on considère cette structure de morphismes comme étant elle-même un objet abstrait, on peut définir les groupoïdes de cette façon:

**Définition 16 (Un groupoïde)** *Un groupoïde de base $B$ est un ensemble $G$ muni des morphismes $t$ (appelé but) et $s$ (appelé source) de $G$ vers $B$ et d'une opération binaire partiellement définie $(g, h) \mapsto gh$ satisfaisant les conditions 1-4. Chaque élément $g$ de $G$ peut être considéré comme une flèche allant de $s(g)$ vers $t(g)$ dans $B$. Les flèches sont multipliées en les mettant à la queue leu leu. Voir figure 3-6.*

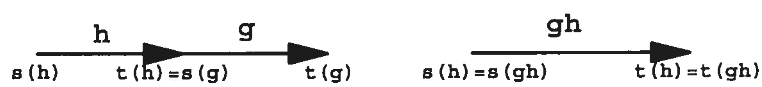


Figure 3-6: Multiplication dans le groupoïde.

À partir de cette définition deux cas limites sont intéressants:

- Si un groupoïde ne contient que des identités (pas de flèche) alors ce n'est qu'un espace sans structure. Il peut donc être identifié à sa base $B$.
- Si un groupoïde ne contient qu'un objet (la cardinalité de $B$ est 1), c'est-à-dire que les flèches peuvent toujours être multipliées, alors le groupoïde se réduit à un groupe.

Revenons au carrelage. Définissons la restriction de $G$ à un carrelage fini $B = [0, 2m] \times [0, n]$ de la façon suivante

$$G(\Gamma, \mathbb{R}^2)|_B = \{g \in G(\Gamma, \mathbb{R}^2) \mid s(g), t(g) \in B\} \tag{3.27}$$

Cette restriction permet de représenter les symétries locales. En effet, une orbite de $G$ sur $B$ est une classe d'équivalence pour la relation $x \sim_G y$ si et seulement si il y a un élément $g$ de $G$ tel que $t(g) = x$ et $s(g) = y$. Dans notre cas, cela signifie que deux points sont dans la même orbite s'ils sont placés de façon similaire dans une tuile ou dans le mortier. Nous avons donc récupéré l'information qui manquait au groupe de symétrie globale du carrelage fini.

Si l'on veut capturer la notion de symétrie locale que nous avons présentée à la figure 3-5, c'est-à-dire associer les points qui ont un voisinage similaire, même s'ils ne sont pas placés de façon similaire dans une tuile, il nous faut définir un autre groupoïde. Posons que le plan $\mathbb{R}^2$ est l'union disjointe de $P_1 = B \cap X$ (le mortier), $P_2 = B \setminus P_1$ (les tuiles) et $P_3 = \mathbb{R}^2 \setminus B$ (l'extérieur du carrelage). Appelons $E$ le groupe de toutes les transformations euclidiennes du plan et définissons le groupoïde de symétrie locale $G_{loc}$ comme l'ensemble des triplets $(x, \gamma, y) \in B \times E \times B$ pour lesquels $x = \gamma y$ et où il y a un voisinage $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(\mathcal{U} \cap P_i) \subseteq P_i$ pour $i = 1, 2, 3$. L'opération de groupe est définie de la même façon que pour $G(\Gamma, \mathbb{R}^2)$. Ce groupoïde n'a que six orbites, celles que nous avons définies à l'aide de paires de points dans notre exemple de carrelage fini. Le formalisme des groupoïdes est le plus approprié pour représenter les symétries locales. Tout en conservant la notion de structure des transformations qui fait la force des groupes, il permet explicitement d'arrimer cette notion à un espace de base $B$. C'est cela qui lui donne sa capacité à décrire les symétries locales qui associent comme équivalentes les parties d'un objet.

Revenons à notre premier exemple, soit l'invariance de jauge en électromagnétisme classique. J'ai déjà montré que si je décris l'interaction électromagnétique à l'aide d'un champ de jauge, une telle description n'est pas unique. En effet, tous les champs qui ne diffèrent que d'une transformation de jauge impliquent apparamment la même physique, les mêmes mesures. De façon formelle, je rappelle que la description d'un phénomène électromagnétique reste inchangée sous la transformation suivante: $A^{\mu}(x) \longrightarrow A'^{\mu} = A^{\mu}(x) - \partial^{\mu}\chi(x)$ où $\chi$ est une fonction lisse[26] de l'espace-temps. Même si la transformation engendrée par $\chi(x)$ agit globalement sur tous les points de l'espace-temps, elle paramétrise une symétrie locale car la façon dont le champ de jauge est transformé en un point particulier de l'espace-temps dépend des valeurs des dérivées partielles de $\chi(x)$ en ce même point. Je vais montrer que cette symétrie s'exprime de façon naturelle dans le formalisme des groupoïdes. Avant de passer aux groupoïdes de transformations de jauge, je vais définir un groupe abélien[27] $\mathcal{F}$. Le groupe des fonctions dont l'action sur le champ de jauge préserve la symétrie.

**Définition 17 (Le groupe $\mathcal{F}$)** *Soit $\mathcal{F}$, l'ensemble des fonctions lisses de $\mathbb{M}^4 \to \mathbb{R}$ tel que:*

1. *$\mathcal{F}$ est muni d'une opération binaire fermée qui associe à toute paire d'éléments $g, f \in \mathcal{F}$ un troisième élément $k = gh \stackrel{def}{=} g(x) + h(x)$. La somme de fonctions lisses étant lisse.*

2. *$\forall g, h, k \in \mathcal{F}$, on a que $(gh)k = g(hk)$. Ceci étant dû à l'associativité de l'addition.*

3. *L'élément identité $e$ est la fonction nulle.*

4. *$\forall g \in \mathcal{F}$, il existe un inverse $-g \in \mathcal{F}$.*

Les éléments de $\mathcal{F}$ n'agissent pas sur l'espace-temps lui-même. Leur rôle est de modifier en tout point de l'espace-temps le champ de jauge. Sachant cela, il me

[26]Dans ce cas, lisse veut dire que $\chi(x)$ est $C^2$ partout sauf possiblement en un nombre dénombrable de points.

[27]Un groupe abélien est un groupe dont l'opération de multiplication est commutative.

paraît raisonnable de choisir comme espace de base $B$: l'espace-temps $\times$ l'espace des champs de jauge[28], $(\mathbb{M}^4 \times \mathbb{G})$. Chaque point de $B$ sera donc identifié par un couple $(x, A^\mu(x))$.

**Définition 18 (Groupoïde de jauge classique)**

$$G = G(\mathcal{F}, \mathbb{G}) = \{(A^\mu(x), g) \mid A^\mu(x) \in \mathbb{G} \text{ et } g \in \mathcal{F}\} \tag{3.28}$$

*muni de l'opération binaire partiellement définie*

$$(A^\mu(x) - \partial^\mu g(x), h)(A^\mu(x), g) = (A^\mu(x), hg) \tag{3.29}$$

*Cette opération sur $G$ a les propriétés suivantes:*

1. *Elle n'est définie que pour certains éléments de $G$. Si $a, b \in G$ alors $ab$ est défini si $t(b) = s(a)$, où $s$ et $t$ sont des morphismes de $G \to B$ tel que $s : (A^\mu(x), g) \mapsto (x, A^\mu(x))$ et $t : (A^\mu(x), g) \mapsto (x, A^\mu(x) - \partial^\mu g(x))$*

2. *Elle est associative car la multiplication de $\mathcal{F}$ l'est.*

3. *Pour tout $a \in G$, il existe un élément identité droit et un élément gauche, $\lambda_a$ et $\rho_a$, tel que $\lambda_a g = g = g\rho_a$. Dans notre cas, si $a = (A^\mu(x), g)$ alors $\lambda_a = (A^\mu(x) - \partial^\mu g(x), e)$ et $\rho_a = (A^\mu(x), e)$.*

4. *$\forall a \in G$, $\exists a^{-1}$ tel que $aa^{-1} = \lambda_a$ et $a^{-1}a = \rho_a$. Dans notre cas, si $a = (A^\mu(x), g)$ alors $a^{-1} = (A^\mu(x) - \partial^\mu g(x), -g)$.*

Cette définition est bien celle d'un groupoïde. Il est à noter que la définition d'un groupoïde de jauge en mécanique quantique est beaucoup plus élégante que ce que je viens de présenter. Ceci est dû au fait que la symétrie de jauge quantique couple

[28] Le lecteur aura reconnu que $B$ a la structure d'un fibré tangent trivial. Il n'est cependant pas nécessaire d'introduire ce formalisme à cette étape. Nous verrons toutefois que dans le cas quantique, nous ne pourrons nous en passer.

le champ de jauge avec la fonction d'onde (ou le champ de matière). Elle est donc beaucoup plus forte.

Dans cet exemple, on voit que l'approche des groupoïdes est complémentaire à celle des groupes. Le groupe $\mathcal{F}$ est le coeur de la symétrie de jauge, l'expression d'une classe d'équivalence de configurations de champ. Le groupoïde de jauge classique ne fait que détailler l'action du groupe de symétrie. Je n'irai pas plus loin avec cet exemple, car c'est le groupoïde de jauge quantique qui est véritablement intéressant. Je présente celui-ci dans le chapitre 5.

Après ce nouvel exemple, une certaine méthode de formalisation des symétries locales peut être formulée. On définit l'espace de base $B$ de manière à ce qu'il puisse exprimer toutes les configurations symétriques du système que l'on désire étudier. Dans un deuxième temps, on définit comme étant les éléments de $G$ toutes les transformations locales qui laissent inchangé $B$ ou qui le transforme de telle sorte que les propriétés qui nous intéressent soient conservées. Finalement, on définit une opération linéaire partiellement définie qui caractérise comment se combinent certaines transformations de $G$. Ceci se fait comme dans le cas des groupes en prenant comme résultante le produit de l'application successive de deux transformations.

## 3.4 Conclusion

Comme je l'ai déjà mentionné, les groupoïdes ne sont pas si différents des groupes. Il est donc peu surprenant que la stratégie de formalisation des symétries à l'aide des groupoïdes ressemble à celle que nous avons mise de l'avant dans les exemples faits à l'aide des groupes. En permettant des variations locales, les groupoïdes nous permettent donc de représenter, à ma connaissance, toutes les formes de symétries[29]. Je fais l'hypothèse que l'omniprésence des groupes et la quasi-absence des groupoïdes

[29] Ceci en assumant les restrictions soulevées dans la section sur les symétries globales.

en physique est due au type de symétrie qui a intéressé la communauté des physiciens jusqu'ici. Cette contingence historique pourrait changer dans les années à venir.

Dans mon esprit, l'usage des groupes et des groupoïdes ne s'oppose pas. Le coeur de la notion de symétrie, l'association d'états équivalents, est représenté à l'aide des groupes. Cependant, lorsque l'on s'intéresse aux détails, à quelles transformations locales sont impliquées par les relations d'équivalence, les groupoïdes semblent être le bon outil.

## CHAPITRE 4

# Questions de classification

## 4.1 Introduction

Jusqu'ici, je suis resté, dans la mesure du possible, très général. Mon ton va changer à partir du présent chapitre. Je vais maintenant me restreindre au seul domaine de la physique. Dans cette discipline, la symétrie prend parfois un caractère épistémologique (dans ce cas elle est un principe) ou un caractère plus ontologique (dans ce contexte elle est une propriété). Lorsqu'elle prend la forme d'un principe, elle peut être une règle d'induction, ou un postulat de construction de modèles, ou encore un impératif esthétique. Ces aspects sont bien sûr reliés à la définition de la symétrie comme une propriété, c'est-à-dire comme une invariance sous un changement possible. Je ne ferai cependant pas l'analyse qui mettrait en évidence l'unicité du concept de symétrie à travers ces différents usages en physique. Ma démarche dans ce chapitre sera plus modeste. Je vais me concentrer sur la symétrie en tant que propriété. L'essentiel de ce chapitre sera consacré à discuter des différentes implications philosophiques reliées à la classification de telles symétries. Classer c'est catégoriser. C'est choisir certains aspects des symétries et leur accorder une importance par rapport à d'autres, tout en ayant un certain objectif en tête. Il n'y a donc rien d'anodin à cet acte. Ce survol des classifications mettra en évidence la richesse philosophique de ces dernières. La taxinomie dans ce domaine est loin d'être une simple entreprise de tenue de livres. Elle engendre une véritable géographie organisant les symétries en régions distinctes.

## 4.2 Classements dichotomiques

En physique, les règles de décomposition de l'ensemble des symétries fonctionnent par bifurcation. Les symétries sont analytiques ou physiques, géométriques ou dynamiques, internes ou externes, globales ou locales, essentielles ou accidentelles. Les transformations impliquées par ces mêmes symétries sont passives ou actives. De plus, les symétries sont observables ou inobservables. Si une symétrie est observable, elle le sera directement ou indirectement. Dans cette première section, je vais discuter des divisions qui qualifient le type de symétrie. Dans la section suivante, je discuterai du statut empirique des symétries.

### 4.2.1 Analytique ou physique

La terminologie analytique/physique me vient de l'historien des sciences John J. Roche. Il qualifiait la symétrie analytique ainsi:

> Analytic symmetry is the invariance of functions, either in magnitude or in form, under algebraic transformations of various sorts. [[Roc87], page 5]

Les symétries physiques, quant à elles, sont celles qui ont un caractère empirique. Si la terminologie est récente, la notion décrite est ancienne. En distinguant les symétries physiques des symétries analytiques, c'est-à-dire celles des structures mathématiques constitutives des modèles, on tente de différencier l'outil de représentation de ce qui est représenté. Armé de cette distinction, on affirmera volontiers qu'à toute symétrie physique identifiée doit correspondre une symétrie analytique dans la théorie. Si ce n'était pas le cas, le modèle serait considéré comme empiriquement inadéquat. Cependant, l'implication inverse n'est pas soutenable. Si nous possédons un modèle empiriquement adéquat et que ce dernier exhibe une symétrie formelle donnée, il n'est pas automatique qu'il lui corresponde une symétrie physique. La présence d'une symétrie analytique dans un modèle peut être le point de départ de recherches fructueuses d'une symétrie physique, mais rien ne le garantit. Ceci est confirmé par les nombreuses théories physiques que l'on considère comme ayant un surplus de structure. Souvent ces structures supplémentaires exhibent une symétrie formelle, celle-ci étant de trop, cette symétrie a peu de chance de correspondre à une symétrie physique.

Bien sûr, ce genre de conséquences s'articule d'autant mieux que l'on adhère au réalisme scientifique. Advenant que ça ne soit pas le cas, on pourrait tout de même soutenir une distinction entre symétrie analytique et symétrie physique. Il faudrait cependant que ces dernières se limitent aux symétries observables. En effet, dans la perspective réaliste une symétrie physique est une invariance qui se trouve dans le monde extérieur, qu'elle soit observable ou non. La plupart des positions antiréalistes affichant un scepticisme envers d'éventuelles structures préexistantes du monde extérieur, un concept de symétrie physique indépendant de l'observation n'a pas de sens. Par contre, on peut contraster les symétries analytiques avec les symétries observées, car à ces dernières correspond un critère empirique sur lequel peuvent s'entendre les réalistes et les antiréalistes[1]. Il y a des symétries analytiques qui ont un rapport de conformité avec des symétries observées et d'autres non. Ce qui sera accepté comme une observation varie selon les positions épistémologiques. Dans mon cas, toujours dans un souci de naturaliser dans la mesure du possible l'épistémologie, je préfère coller à la pratique. Une observation est une détection relativement directe faite à l'aide d'instruments et ce, même si cette détection repose fortement sur l'acceptation de théories déjà confirmées. En ce sens, je suis en accord avec Dudley Shapere [Sha82] pour considérer comme une observation le témoignage

[1] Je vais discuter de ce critère dans la section consacrée au statut empirique des symétries.

des données (en anglais "evidences")[2], données qui ont été obtenues, non pas de façon passive, comme dans la conception traditionnelle de la perception, mais bien de façon active par l'expérimentation.

Jusqu'ici mon interprétation de la distinction analytique/physique reste, malgré l'ouverture du paragraphe précédent, fortement teintée de réalisme. Même si cette interprétation me semble la plus proche de la position de Roche lui-même, je vais tenter de trouver un terrain neutre où cette distinction prendrait une forme plus générale et plus utile pour le reste de la thèse. Dans la conception sémantique des théories, les modèles sont des structures formalisées composées d'entités et de leurs relations. Ce que j'appelle un modèle physique est donc une structure composée d'entités comme des particules, des champs, etc. Le pendule simple est l'archétype de ce que j'entends par un modèle physique. On représente certains modèles physiques à l'aide de riches structures mathématiques, qui sont, en quelque sorte, des modèles mathématiques. En physique, les modèles mathématiques et physiques sont parfois si intimement imbriqués qu'il est difficile de les différencier. Voyons un exemple. Un modèle physique est associé aux relations spatio-temporelles, c'est le modèle de l'espace-temps. On le représente à l'aide d'un espace géométrique de Riemann à 4 dimensions ayant localement une métrique de Minkowski. Cet espace géométrique n'est pas l'espace-temps, l'entité du modèle physique, mais il nous permet de le représenter. Une symétrie de cet espace géométrique est une symétrie analytique. Sachant que cet espace est isomorphe au modèle physique, on peut dire qu'une symétrie identifiée dans cet espace correspond à une symétrie du modèle physique (symétrie physique). Sur tout cela le réaliste et l'antiréaliste peuvent s'accorder, c'est sur la correspondance entre le modèle physique et la réalité qu'ils diffèrent.

Lorsqu'une symétrie analytique a une symétrie physique comme pendant, la relation de correspondance entre les deux est souvent assez simple. Le modèle physique

---

[2] J'emprunte cette traduction à Anouk Barberousse et cie, [BKL00], page 135. On emploie aussi indifféremment "données" ou "données empiriques".

$P$ représente des entités et les interactions en jeu. Quelque chose dans les structures mathématiques de ce modèle reste la même sous une modification de paramètres (symétrie analytique). À cette modification de paramètres correspond une transformation dans le modèle $P$, c'est-à-dire une transformation affectant les entités du modèle physique. La symétrie analytique correspond à une symétrie physique qui est l'invariance du modèle physique sous la transformation associée. Parfois la relation entre symétries analytique et physique est indirecte. Je vais brièvement présenter un exemple historiquement important de ce type.

En physique, il est souvent utile de travailler avec des représentations qui ne sont pas supposées entretenir une relation de congruence avec la réalité. Par exemple, au lieu de travailler avec un modèle de corps subissant des forces, il est souvent préférable de passer au formalisme Lagrangien ou Hamiltonien. Un Lagrangien est une fonction secondaire des paramètres essentiels pour décrire le système. En utilisant un principe de moindre action on peut, à l'aide de cette fonction, calculer les équations du mouvement d'un système physique. On considère souvent en physique qu'une compréhension profonde de la théorie nécessite la compréhension du principe de moindre action approprié. Cependant, il ne me paraît pas justifié d'affirmer que le Lagrangien d'un système représente directement une quantité physique. En effet, il est avant tout défini comme la fonction qui permet de calculer les équations du mouvement, rien de plus. L'unicité d'une telle fonction est en effet loin d'être une évidence. Plusieurs Lagrangiens peuvent engendrer des équations du mouvement identiques. Il s'en suit que les symétries du Lagrangien sont avant tout des symétries analytiques. La mathématicienne Emmy Noether a prouvé un théorème grandement utilisé en physique. Celui-ci affirme que pour certains Lagrangiens et certaines transformations, une symétrie du Lagrangien correspond à une quantité conservée[3]. Cette quantité est une fonction des paramètres physiques. Elle a donc probablement un caractère empirique et ainsi est une symétrie physique. Ainsi, par

[3]Je réfère le lecteur au livre de Goldstein [Gol80], page 488 et suivantes, pour une discussion des containtes de ce théorème, ainsi que de sa généralisation.

exemple, pour les Lagangiens représentant des systèmes conservatifs, l'invariance sous une transformation globale du paramètre temporel implique la conservation de l'énergie. De même, si le Lagrangien reste inchangé sous une translation d'un paramètre spatial, cela implique la conservation de l'impulsion selon la direction du déplacement. Le théorème de Noether peut donc être interprété comme étant une méthode pour faire correspondre de façon indirecte des symétries analytiques avec des symétries physiques. Le réseau des symétries analytiques et physiques est donc plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord.

### 4.2.2 Géométrique ou dynamique

Le physicien Eugene P. Wigner, l'un de ceux qui introduisirent l'usage de la théorie des groupes en mécanique quantique, a proposé une division des symétries physiques. Il désirait distinguer les nouveaux principes d'invariance des anciens. Son critère va plus loin que la simple classification historique. Il tente de clarifier une différence de nature entre les anciennes symétries et les nouvelles.

> The geometrical principles of invariance, though they give a structure to the laws of nature, are formulated in terms of events themselves. [...] On the other hand, the new, dynamical principles of invariance are formulated in terms of the laws of nature. They apply to specific types of interaction, rather than to any correlation between events. [[Wig67], page 17.]

Wigner divise les symétries physiques en deux types de natures distinctes. Tout d'abord, il y a les géométriques, les plus générales, celle qui sont indépendantes de toute interaction particulière. Puis il y a les dynamiques, celles qui ne peuvent se décrire a partir des seuls événements. Chez les premières, on retrouvera par exemple l'invariance sous translation spatiale ou temporelle. Chez les secondes, on aura la liberté de jauge, c'est-à-dire l'invariance de l'électromagnétisme classique sous certaines transformations du champ de jauge. En qualifiant la première catégorie de géométrique, je fais l'hypothèse que Wigner considérait ces symétries (principes d'invariance) comme les plus fondamentales.[4] Elles sont le cadre, les contraintes, de toute théorie possible. Étant donné que ces symétries correspondent au groupe de Poincaré, elles correspondent en fait aux symétries de la relativité restreinte. En conséquence, cette théorie occupe une place à part dans l'ensemble des théories physiques. Il est à noter que les symétries spécifiques à la relativité générale font appel au principe d'équivalence, principe qui dépasse la simple corrélation d'événements. Ces symétries font donc partie des dynamiques. Ce point est important. Contrairement à ce que l'on voit habituellement, Wigner ne différencie pas les symétries selon qu'elles concernent ou non l'espace-temps. Sa conception s'attache plutôt à distinguer ce qui est de l'ordre de la dynamique de ce qui ne l'est pas. Ceci me paraît davantage en accord avec les développements récents en physique théorique qui tendent à géométriser les forces forte, faible et électromagnétique, les rapprochant d'autant plus de la théorie de la relativité générale.

La distinction de Wigner a une grande portée philosophique. Si tout le monde s'accorde pour affirmer que la relativité restreinte est une théorie fondamentale, peu d'auteurs affirmeraient que cela est ainsi à cause de la généralité de ses symétries. Pour Wigner, la relativité restreinte est fondamentale car elle impose ses symétries à toutes les autres théories, en d'autres mots parce que ses symétries sont géométriques. Elles ne font appel qu'à des relations entre événements.

Dans le reste de la sous-section, je vais m'attarder à présenter un exemple de symétrie qui semble exhiber à la fois des caractéristiques géométriques et dynamiques. Ceci me permettra de clarifier davantage le critère de Wigner. Cet exemple, la symétrie de croisement, était d'ailleurs connu de Wigner. Admettons

[4]Cette interprétation est confirmée par la façon dont Wigner aborde les symétries dynamiques dans [HDW65].

que l'on ait calculé à l'aide de la théorie de l'électrodynamique quantique la section efficace[5] du processus $e(p)\bar{e}(p') \to \mu(k)\bar{\mu}(k')$, c'est-à-dire une collision entre un électron $e$ de quadrivecteur-impulsion[6] $p$ et un positron $\bar{e}$ (l'antiparticule de l'électron) qui s'annihilent pour engendrer un muon $\mu$ et son antiparticule. On peut, à l'aide de la même théorie, calculer la section efficace pour le processus $\mu\bar{\mu} \to e\bar{e}$.[7] On constate que la partie qui dépend de la dynamique dans la section efficace, l'élément de matrice invariant $\mathcal{M}$, serait identique à celui du processus précédent si on lui applique une transformation d'inversion du temps, c'est-à-dire si l'on inverse le signe de toutes les vitesses[8]. Rien de surprenant à cela, car l'inversion du temps fait partie des symétries géométriques acceptées. Toute théorie physique doit donc être compatible avec celle-ci. Maintenant, admettons que l'on calcule $\mathcal{M}\left(e(p_1)\mu(p_2) \to e(p_1')\mu(p_2')\right)$. On constate que cet élément de matrice invariant est identique à $\mathcal{M}\left(e(p)\bar{e}(p') \to \mu(k)\bar{\mu}(k')\right)$, si l'on transforme les quadrivecteurs-impulsion ainsi $p_1 \to p, p_1' \to -p', p_2' \to k$ et $p_2 \to -k'$. En fait, on peut prouver pour l'électrodynamique quantique que tout processus impliquant une particule d'impulsion $p$ dans l'état initial est équivalent à un processus par ailleurs identique mais où une antiparticule d'impulsion $k = -p$ se trouve dans l'état final.

$$\mathcal{M}\left(\phi(p) + \ldots \to \ldots\right) = \mathcal{M}\left(\ldots \to \ldots + \bar{\phi}(-p)\right) \tag{4.1}$$

Cette symétrie, qui relie des événements clairement distincts, ne correspond pas aux symétries géométriques standard. À partir de la présentation que j'ai faite, il est

[5]La probabilité d'obtenir un certain état final connaissant l'état initial s'exprime en fonction de la section efficace, une quantité intrinsèque aux particules initiales et qui permet de comparer des expériences ayant des densités et tailles de faisceaux différentes.

[6]$p^\mu = (E, \vec{p})$ où $E$ est l'énergie de la particule et $\vec{p}$ son impulsion. Les états sont définis par l'impulsion car cette dernière est très bien connue pour les faisceaux incidents, ce qui entraîne que la position de chaque particule n'est pas connue avec précision.

[7]Notez que la réaction par collision est la plus fondamentale au niveau microscopique. Toute interaction est en quelque sorte une interaction de type collision où il y a échange de bosons. Ce formalisme réussit même à décrire les désintégrations. Cet exemple est donc beaucoup plus général qu'il n'en a l'air.

[8]Pour plus de détails, voir Peskin et Schroeder [PS95], chapitre 5.

raisonnable de classer cette symétrie parmi les dynamiques. Elle semble dépendre des propriétés de l'électrodynamique quantique. On peut cependant présenter un argument plus général visant à la rendre indépendante de l'électrodynamique.

Avant de formuler cet argument, je dois d'abord dire une chose ou deux sur les antiparticules en mécanique quantique relativiste. Dans la théorie de Dirac de l'électron relativiste, les antiparticules (les positrons) sont associées aux solutions d'énergie négative de l'équation de Dirac. Par la suite, Feynman et Stückelberg ont proposé une interprétation générale des solutions d'énergie négative en mécanique quantique relativiste. Cette interprétation est donc une façon standard de concevoir une antiparticule en physique quantique[9]. Le point clef de cette interprétation est d'affirmer qu'une solution d'énergie négative décrit une particule qui se propage à l'envers dans le temps ou, de façon équivalente, une antiparticule d'énergie positive se propageant vers l'avant dans le temps. Les deux interprétations sont interchangeables. Si on accepte cette interprétation, on se doit d'interpréter l'état $\phi(p)+\bar{\phi}(-p)$ comme une fluctuation du vide. Voyons cela d'un peu plus près. Changer le signe du quadrivecteur-impulsion revient à changer le signe de l'énergie de la particule, ainsi qu'à changer la direction de son vecteur vitesse. Cette dernière transformation revient à appliquer une inversion temporelle. Sachant cela, on constate que $\phi(p)$ et $\bar{\phi}(-p)$ correspondent aux deux interprétations de la même solution. L'état, quant à lui, $\phi(p)+\bar{\phi}(-p)$ correspond à une particule et son antiparticule ayant des impulsions opposées. Cet état a une énergie et une charge totale nulle[10]. Il représente donc des particules virtuelles, une fluctuation du vide. En effet, l'énergie totale nulle implique que si ces particules existent, ce n'est que pour un très court laps de temps. Suffisamment court pour que la version énergétique du principe d'incertitude d'Heisenberg soit respectée.

[9] Pour plus de détails, voir Halzen et Martin [HM84], chapitre 3.

[10] Je rappelle que ce terme comprend l'énergie de masse.

Maintenant passons à la symétrie d'échange comme telle. Les trois éléments de matrice invariants suivants sont égaux et contribuent donc à la section efficace de manière équivalente.

$$\mathcal{M}\left(\phi(p) + \ldots \to \ldots\right) \tag{4.2}$$

$$\mathcal{M}\left(\phi(p) + \ldots \to \ldots + \phi(p) + \bar{\phi}(-p)\right) \tag{4.3}$$

$$\mathcal{M}\left(\ldots \to \ldots + \bar{\phi}(-p)\right) \tag{4.4}$$

Voyons d'abord l'équivalence entre 4.2 et 4.3. La différence entre 4.2 et 4.3 réside dans l'ajout d'une fluctuation du vide dans l'état final. Cette dernière n'a bien sûr aucune incidence sur la dynamique que représente $\mathcal{M}$. Il y a sans cesse des perturbations du vide un peu partout qui sont déjà intégrées au calcul de $\mathcal{M}$. Dans 4.3, on constate que le terme $\phi(p)$ apparaît des deux cotés du processus. Il y a donc une particule de type $\phi$ et d'impulsion $p$ dans l'état initial et dans l'état final. Cela signifie que si la particule $\phi$ a participé à l'interaction, celle-ci a eu pour résultat aucun échange d'énergie ou d'impulsion[11]. On peut donc considérer qu'enlever le terme $\phi(p)$ à droite et à gauche ne changera pas la valeur de $\mathcal{M}$ qui mesure la dynamique. 4.4 est donc égale à 4.3. Par la transitivité de l'égalité, on peut se convaincre que 4.2 est égale à 4.4. Nous avons donc démontré la symétrie d'échange[12].

À la lumière du critère de classification de Wigner, la symétrie d'échange est curieuse. Elle ne dépend pas d'une interaction particulière. Wigner aurait dit qu'elle ne dépend pas d'une loi de la nature. D'un autre côté, elle n'est pas à strictement parler une symétrie géométrique, car elle n'est pas formulée seulement en termes d'événement. Tout au long de l'argument visant à établir cette symétrie, j'ai dû présumer qu'il y avait interaction entre les particules. C'est après tout ce que représente l'élément de matrice invariant $\mathcal{M}$. La symétrie d'échange possède donc la principale caractéristique des symétries dynamiques. Elle semble à cheval

[11] Malgré les apparences, je n'affirme absolument pas que les termes $\phi(p)$ de l'état initial et de l'état final représentent la même particule. Ce sont des particules identiques rien de plus.

[12] Cet argument me fut inspiré par la lecture du chapitre 5 de Omnès et Froissart [OF63].

entre les deux catégories de symétries de Wigner. Elle se fonde sur notre conception des antiparticules et sur des considérations très générales de ce qu'implique le concept d'interaction. Si elle n'est pas une symétrie géométrique selon la définition de Wigner, elle en a la généralité. C'est une symétrie cadre que les théories particulières doivent respecter. Seule une remise en question de ce que sont les antiparticules pourrait la mettre en péril.

Quelle leçon philosophique doit-on tirer de la symétrie d'échange? Si je reste persuadé que le critère de démarcation de Wigner a une valeur philosophique, car il permet de dégager les symétries générales des symétries particulières, je ne suis pas certain qu'il ait tiré toutes les conclusions impliquées par son propre classement. Les symétries dynamiques sont les symétries qui dépendent d'interactions particulières. Les symétries géométriques sont les catégories, au sens kantien, de la physique. Elles décrivent la structure fondamentale de l'espace-temps sans gravitation. Ce classement ne semble pas couvrir tous les cas possibles. Il laisse la place à des symétries ayant la généralité de catégories, c'est-à-dire qui sont indépendantes des interactions particulières, et qui ne sont pas des symétries reliées à l'espace-temps. La symétrie d'échange est l'une d'elles. Où devrais-je placer cette symétrie? Dans une troisième classe? Je propose de la placer dans les symétries géométriques. Le concept de symétrie géométrique ne réfère pas strictement aux structures de l'espace-temps. Si c'était le cas, les symétries de la relativité générale ne se trouveraient pas parmi les symétries dynamiques. Ce qui définit le concept de symétrie géométrique, c'est l'indépendance de cette symétrie par rapport à une théorie particulière. Les symétries géométriques sont les catégories de la construction de futures théories. La surprise que nous réserve la symétrie d'échange, c'est que ces catégories, contrairement à ce qui est généralement admis, dépassent la description de la structure de l'espace-temps sans gravitation. Elle met en évidence certaines présuppositions ontologiques, comme ce que nous entendons par une interaction et ce qui distingue les particules des antiparticules.

### 4.2.3 Interne ou externe

La distinction entre symétries externe et interne est l'une des plus connues. Elle est présente autant dans la documentation de la physique que dans celle de la philosophie des sciences. Rappelons-en les définitions.

**Définition 19 (Une symétrie externe)** *Une symétrie externe est une symétrie où les transformations associées sont des changements spatiaux ou temporels ou encore spatio-temporels.*

**Définition 20 (Une symétrie interne)** *Une symétrie interne est une symétrie où les transformations associées ne sont pas des changements spatiaux ou temporels ou encore spatio-temporels.*

Dans la première catégorie, on retrouve par exemple toutes les symétries sous translation, rotation, inversion du temps ou changement de référentiel inertiel. Dans la seconde, on a la permutation de particules, l'échange des particules en antiparticules, ou encore l'invariance de la fonction d'onde sous un changement global de phase. Il est à noter que selon ce critère, les symétries impliquées par la relativité restreinte <u>et</u> celles spécifiques à la relativité générale se retrouvent dans la même catégorie: les symétries externes.

Cette classification semble appropriée pour deux raisons. Premièrement, ce critère sépare clairement ce qui a trait à l'espace-temps du reste. Cette division est "naturelle" pour la plupart des praticiens de la physique. La physique n'ayant toujours pas produit une théorie quantique de la gravitation et ce, après de multiples tentatives, la théorie de la dynamique de l'espace-temps reste dans l'esprit de plusieurs un domaine distinct du monde quantique. Le fait que la force gravitationnelle ait si peu d'impact au niveau microscopique est venu renforcer cette croyance. Dans ce contexte, il est normal que les symétries rattachées à l'espace-temps aient leur propre catégorie. Sous cet angle, la légitimité du critère est pour le moins contingente. Il n'y a pas d'argument soutenant que les théories de l'espace-temps vont demeurer à part. Par dessus le marché, le mouvement de rapprochement des théories quantique et gravitationnelle est déjà enclenché. Si la recherche d'une théorie quantique de la gravitation avance lentement, les théories quantiques, quant à elles, ressemblent de plus en plus à la relativité générale. Les théories quantiques sont maintenant souvent formulées dans le langage de la géométrie, ce qui les rapproche de la relativité générale dans la mesure où l'interaction est conçue comme un effet topologique. Ce mouvement de géométrisation des théories physiques a d'ailleurs des racines profondes dans l'histoire de la discipline. Selon Georges Lochak, auteur de *La géométrisation de la physique* [Loc94], ce courant n'a fait que s'accentuer durant le vingtième siècle et devrait selon toute vraisemblance continuer encore un bout de temps. Si cette première raison justificative du critère interne/externe est un peu faible, la seconde l'est nettement moins. La classification interne/externe ne divise pas les symétries selon la nature des objets symétriques, mais bien selon la nature du changement. Ce choix n'est pas accessoire. En mettant l'accent sur les changements, ce critère met de l'avant le caractère empirique des symétries. En effet, les transformations impliquées par les symétries externes nécessitent des manipulations fort différentes de celles à l'oeuvre dans les symétries internes. Les premières réfèrent à des mouvements. On change de position, modifie les vitesses, etc. Les transformations des secondes sont de toute autre nature. Cette différence de nature qui, je le répète, est très concrètement exprimée par la pratique expérimentale, justifie que les symétries associées soient classées dans des catégories distinctes. On constate donc que cette distinction ontologique tire sa justification d'une distinction épistémologique.

Pour terminer cette section, j'aimerais discuter d'un raisonnement émis par le philosophe Michael Redhead au sujet des symétries internes et externes, raisonnement qui devrait nous amener à une meilleure compréhension de ces dernières.

> It can be argued that internal symmetry transformations can only be given a meaningful *active* interpretation, and if we regard as a sufficient and perhaps necessary condition for ontological unification the possibility of a *passive* interpretation, then (on the assumption of necessity) we can argue that internal symmetries do not signal ontological unification. (...)[13]. [[Red88], page 16.]

Il est possible que Redhead utilise le terme interne dans un sens plus restreint que le nôtre et que cela entraîne une restriction de la portée de son raisonnement. L'objectif de cette discussion n'étant pas de faire l'exégèse du texte de Redhead, je ne ferai pas une explication de ce qu'il aurait voulu dire, mais je veux discuter d'une interprétation de ce qu'il a dit. De la lecture du texte de Redhead, je tire le raisonnement suivant:

**Prémisse 1** La possibilité d'une interprétation passive est une condition suffisante et peut-être nécessaire à l'unification ontologique.

**Prémisse 2** Les transformations associées aux symétries internes n'ont pas d'interprétation passive.

**Conclusion** Les symétries internes ne dénotent pas une unification ontologique.

Ce raisonnement, s'il était valable, aurait d'importantes conséquences philosophiques. La mise en évidence d'une symétrie interne ne pourrait nous permettre d'affirmer que les objets que cette symétrie relie sont différentes manifestations d'une seule et même chose. Comme applications de ce raisonnement, on pense aux théories physiques qui regroupent les particules dans des multiplets qui se transforment sous l'action de groupes. Voyons cela d'un peu plus près.

[13] Les mots en italique sont dans le texte original.

Concentrons-nous d'abord sur la première prémisse. Ma discussion va porter sur un exemple un peu artificiel. Cet exemple étant beaucoup plus simple que ceux rencontrés en physique, mais ayant de nombreuses affinités avec ces derniers, il me permettra de bien mettre en évidence les présupposés philosophiques à l'oeuvre dans les cas plus réalistes. Imaginons qu'il existe une transformation $T$ qui transforme les stylos en crayon, $T(s) = c$. De même, imaginons sa transformation inverse $T^{-1}$ qui fait passer les crayons à l'état de stylos, $T^{-1}(c) = s$. Si $I$ est la transformation identité, $\{T, T^{-1}, I\}$ forme un groupe de symétrie qui préserve la propriété: “être un instrument pour écrire”[14]. Cette symétrie est une symétrie interne, car les transformations $T$ et $T^{-1}$ ne sont pas des transformations spatio-temporelles. À la question: est-ce que l'existence de cette symétrie est suffisante pour considérer $c$ et $s$ comme deux manifestations du même objet? La réponse est bien évidemment non. De multiples aspects distinguent un crayon d'un stylo. Si ces deux objets sont deux états d'une même chose, il faudrait expliquer cette différence d'apparence. Voyons ce que peuvent clarifier les interprétations active et passive. Si on interprète cette symétrie de façon active alors la transformation $T$ est une transformation physique de l'objet stylo dont le résultat final est de lui substituer un crayon. Interprétée ainsi, cette symétrie n'implique pas une unification ontologique. Quelque chose est conservée par la transformation, rien de plus. Dans une collision, on peut très bien transformer une paire électron/positron en une paire muon/antimuon. Cette transformation conserve la charge, l'énergie et l'impulsion, mais n'implique en rien qu'un électron et un muon sont tous deux des manifestations d'une seule et même particule fondamentale. La présence d'une symétrie active peut, au mieux, être un indice qu'une telle unification est possible. Par contre, si on arrivait à formuler une interprétation passive crédible de cette symétrie, on pourrait aller beaucoup plus loin. Comme je l'ai exposé dans le chapitre précédent, interpréter une symétrie de façon passive

[14]Une représentation de ce groupe pourrait être les matrices $T = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agissant sur $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ou $s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

consiste à considérer les transformations comme des modifications de point de vue, une transformation de cadre de référence. Dans ce contexte, il y a automatiquement unification ontologique. On n'observe pas un autre système, mais bien le même, qui a une apparence différente. Pour ma part, je ne vois pas de façon raisonnable d'interpréter $T$ et $T^{-1}$ comme des transformations passives. Bien sûr, je peux toujours imaginer un monde possible, une fable, où c'est le cas. Faisons cet exercice. Soit un monde à $N+1$ dimensions[15], où $N > 3$. Dans ce monde, il existe un objet appelé *craylo*. Imaginons que le craylo a toutes les apparences d'un stylo si on le regarde dans nos 3+1 dimensions familières. Imaginons maintenant une transformation $T'$ qui consiste à faire une rotation du craylo en $N+1$ dimensions. La transformation $T'$ peut évidemment être interprétée de façon active comme de façon passive. Elle est analogue à la "rotation" qu'est une transformation de Lorentz en 3+1 dimensions. Imaginons aussi que la transformation $T'$ projetée en 3+1 dimensions correspond à la transformation $T$. Dans ce monde imaginaire, il est donc possible d'interpréter $T$ de façon passive, car il est possible de le faire pour $T'$. Cependant, ce qui nous intéresse n'est pas que cela soit concevable dans un monde possible, mais bien que cela soit le cas dans notre monde. Si je n'ai pas de raison de croire la fable présentée ci-dessus ou une autre avec aussi peu de support empirique, je ne peux affirmer qu'il est possible d'interpréter $T$ passivement, interprétation qui est un signe nécessaire à une unification ontologique.

Ce détour par les mondes possibles peut paraître superflu au lecteur, mais il était nécessaire. Il me permet de mettre en doute un curieux principe du philosophe Robert Weingard:

> [T]wo particles for which there are conceivable circumstances in which one can be "rotated" or reoriented into the other are the same (species of) particles. [[Wei84], page 154.]

[15] N dimensions spatiales et 1 dimension temporelle.

Si cette règle de Weingard était valable, la fable que j'ai exposée plus tôt me forcerait à considérer, dans le cas où j'aurais affaire à des particules élémentaires, que les $c$ et les $s$ sont de la même espèce. La validité de ce principe est philosophiquement douteuse[16]. Sauf peut-être pour un antiréalisme radical, toutes les représentations ne s'équivalent pas. À moins d'avoir un support empirique et une certaine cohérence avec le reste des théories admises, une fable reste fable et ne devient pas une hypothèse scientifique plausible par le seul fait qu'elle ait été conçue. Si on adoptait le principe de Weingard, l'unification ontologique deviendrait une question d'ingéniosité. Suis-je assez habile pour concevoir une "rotation" abstraite qui transforme $s$ en $c$ et inversement?

En définitive, la première prémisse semble tenir, avec une légère restriction. Pour qu'une symétrie dénote une unification ontologique, il faut qu'elle ait une interprétation passive <u>défendable</u>. Passons maintenant à la seconde prémisse. Dans celle-ci, Redhead affirme que les symétries internes n'ont pas d'interprétation passive, du moins pas d'interprétation défendable. S'il est aisé de se convaincre que certaines symétries internes n'ont pas d'interprétation passive (voir l'exemple des crayons et stylos), il est loin d'être évident que ce soit toujours le cas. Pour clarifier ce point, revenons sur l'interprétation active/passive dans le contexte des symétries externes. Comme je l'ai déjà présenté, la rotation d'un flocon de neige peut être interprétée soit activement (le flocon de neige tourne effectivement par rapport aux autres objets), soit passivement (le système de coordonnées tourne mais dans le sens inverse). Lorsque l'on dit que le système de coordonnées tourne, c'est bien sûr une façon de parler. Il n'y a pas de mouvement associé au système de coordonnées. En fait, est une transformation passive externe tout changement du système de coordonnées de l'espace-temps. Par exemple, une transformation qui ferait passer un système de coordonnées cartésien à un système de coordonnées sphériques serait une transformation passive; cependant dans un cas comme celui-ci où la transformation ne préserve pas la structure de représentation, on voit mal comment cette

[16]Notez que Redhead met en doute ce principe de Weingard dans [RS86].

transformation pourrait avoir un pendant actif. D'un autre côté, une transformation qui ferait passer un système cartésien à un autre système cartésien aurait plus de chance d'avoir une correspondance active.

Dans les cas de symétries externes, les transformations passives sont des changements de coordination[17] de l'espace-temps. Par analogie, si l'on veut étendre le concept de transformation passive aux symétries internes, on devrait les définir comme des changements de coordination, avec certaines contraintes, des structures géométriques associées au système physique. Voyons cela dans un exemple de symétrie interne. En mécanique quantique non relativiste, on peut représenter un système à l'aide d'une fonction d'onde $\psi : M^4 \to \mathbb{C}$, où $\forall x^\mu \in M^4$, où $x^\mu$ est un quadrivecteur-position d'un espace de Minkowski. La physique représentée par cette fonction est invariante sous la transformation globale $T : \psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'interprétation active est évidente. La transformation $T$ associe des fonctions d'onde différentes, mais qui engendrent la même physique. Peut-on produire une interprétation passive plausible de cette transformation? Oui. La fonction d'onde peut être définie comme un objet évoluant dans l'espace $M^4 \times U(1)$, où $U(1)$ est le groupe des matrices unitaires de rang 1. Dans un chapitre ultérieur, nous verrons que cet espace est un fibré principal. Dans ce contexte géométrique, on peut interpréter la transformation $T$ comme une recalibration de jauge, c'est-à-dire qu'en chaque point de l'espace-temps $M^4$, on translate l'échelle de mesure (la jauge) de la phase qu'est la fonction d'onde de $-\alpha$. Cette interprétation est bien passive car elle est conçue comme une modification de perspective, de point de vue, qui laisse intact l'objet intrinsèque qu'est la fonction d'onde définie dans $M^4 \times U(1)$ indépendamment de toute coordination particulière. Il semblerait donc que la seconde prémisse ne tienne pas. Le raisonnement de Redhead aurait une portée plus retreinte, c'est-à-dire qu'il ne s'appliquerait qu'aux symétries internes ne possédant pas d'interprétation passive défendable.

[17] Ce néologisme veut dire une façon de poser un système de coordonnées.

Est-ce la fin de l'histoire? Peut-être pas. La possibilité d'une interprétation passive des symétries internes repose sur le fait que l'on peut interpréter ces symétries dans un cadre géométrique. Contrairement aux symétries externes, la justification d'une géométrie particulière ne va pas de soi. Pour toutes les symétries externes, la cadre géométrique est la structure mathématique de l'espace-temps, c'est-à-dire un espace riemannien à 4 dimensions qui localement possède une métrique de Minkowski[18]. Cet espace géométrique est bien empiriquement justifié. Sa structure est juste ce qu'il faut pour représenter l'espace-temps tel que nous le concevons en ce moment. On dira que cette structure mathématique est isomorphe au modèle physique. Dans le contexte des symétries internes les choses se compliquent. Il y a une multitude de structures géométriques. Chacune adaptée à représenter en plus des caractéristiques de l'espace-temps, les propriétés qui nous intéressent. Le cas de $M^4 \times U(1)$ en est un bon exemple. Le groupe $U(1)$ n'a pas le même statut ontologique que $M^4$. $U(1)$ est l'espace qui me permet de représenter une propriété associée aux points de $M^4$ qui est la valeur de la phase de la fonction d'onde en ce point. Si l'usage de $M^4 \times U(1)$ semble approprié dans ce contexte, cet espace reste fortement hypothétique. Il est suffisament peu justifié, pour qu'une interprétation passive/active de ses automorphismes soit à prendre avec prudence. L'approche passive des symétries internes repose donc sur l'usage de géométries qui doivent être prises avec un grain de sel. Après tout, peut-être que l'approche géométrique des théories quantiques n'est pas la bonne.

### 4.2.4 Global ou local

J'ai déjà présenté cette distinction dans le chapitre précédent. Je rappelle que les symétries globales sont celles qui impliquent des changements globaux. À l'inverse,

[18] Il y tout de même une exception: la théorie des cordes. Dans ce cas, on travaille avec un espace de Riemann à 10 ou plus dimensions, dont certaines sont compactes. Voir le livre de Polchinski [Pol98] pour une introduction récente à la théorie des cordes.

les symétries locales impliquent des transformations qui ont une dépendance locale. Comme un changement global est équivalent à un changement local qui est partout le même, on considère que les symétries globales sont un cas particulier des symétries locales. Malgré cela, on distingue traditionnellement les symétries globales des symétries locales pour deux principales raisons: 1) On n'utilise généralement pas le même formalisme pour les traiter (voir le chapitre 3). 2) Et c'est la raison la plus importante, en physique les symétries locales engendrent une dynamique. Ce n'est pas le cas des symétries globales.

Voyons ce dernier point à travers un exemple. Cet exemple, qui est pour le moins irréaliste, me permettra de mettre de côté les difficultés techniques présentes dans les exemples plus physiques. Dans le prochain chapitre, je consacrerai du temps à discuter d'exemples réalistes de symétries locales. Imaginons que lors d'une balade en vélo, je mesure la température en degrés Celsius à tous les 10 mètres. De retour chez moi, je place ces données sur un graphe en fonction de la position lors de mon parcours. Le contenu physique exprimé par ce graphe reste bien sûr inchangé sous une transformation passive globale. Par exemple, si je passe des Celsius aux Fahrenheit, la différence d'apparence du graphe n'est pas significative. Maintenant, les fluctuations de température le long du parcours peuvent s'expliquer de deux façons. D'un point de vue purement actif, on peut dire que lorsqu'il y a changement de température mesurée c'est la conséquence directe d'un changement d'état de l'environnement où se trouve le thermomètre. L'environnement interagissant avec le thermomètre, ce dernier est sensible à certains changements de paramètres de ce même environnement. D'un point de vue purement passif, les fluctuations de mesures pourraient être dues à des modifications de l'observateur, c'est-à-dire qu'elles pourraient être interprétées comme des translations continues de l'échelle du thermomètre durant ma balade. Selon les deux points de vue, le changement est local car il dépend explicitement de la position durant le trajet en vélo. Dans le premier cas, il y a interaction. Dans le second, l'interaction n'est que fictive. On note qu'à un changement passif local correspond, du point de vue actif, une interaction.

Ajoutons maintenant une symétrie. Le sujet qui m'intéresse n'est pas la mesure comme telle. Je désire utiliser ces mesures de température pour calculer l'énergie cinétique moyenne des particules d'air le long du parcours. Imaginons que je sais avec certitude par d'autres moyens que l'énergie moyenne est, sur le parcours, une certaine fonction $F$. Une fonction qui ne correspond pas nécessairement à celle déduite à l'aide des mesures. Le principe de symétrie se formulerait donc ainsi: qu'importe la mesure de température effectuée l'énergie moyenne des particules le long du parcours suit la fonction $F$. Comme le lecteur s'en doute, il y a deux façons d'ajuster notre mesure à cette symétrie. Soit on fait une recalibration de jauge, c'est-à-dire que l'on translate l'échelle de notre thermomètre continument de façon à ce que la température mesurée concorde avec la fonction $F$. Cette façon de faire nécessite une transformation passive locale. Soit on affirme que la mesure effectuée par le thermomètre est incomplète. Je n'ai pas toute l'information pour calculer l'énergie moyenne. Par exemple, je pourrais avoir négligé l'effet d'une interaction supplémentaire. Une interaction définie de telle sorte que si j'en prends compte, elle s'ajuste précisément avec ma mesure pour que l'énergie concorde avec $F$. La présence d'une symétrie ne qualifie pas en détails la nature de cet effet physique supplémentaire, cependant elle lui impose une contrainte forte. Ce dernier additionné de la mesure effectuée avec le thermomètre doit exactement donner $F$. À première vue, il peut paraître arbitraire de poser de façon *ad hoc* une nouvelle interaction pour sauver la symétrie. C'est pourtant exactement ce qui se passe dans l'argument de jauge que je présenterai plus loin.

Cet exemple farfelu met bien en évidence le côté surprenant des symétries locales en physique. Si quelqu'un m'affirmait interpréter un écart de mesures de température comme la preuve de la présence d'un nouvel effet physique, j'aurais des raisons d'être sceptique. Cependant, ce serait tout aussi improbable que son thermomètre change d'échelle en fonction de sa position le long d'un trajet de vélo. Dans tous les cas, il serait plus écomique de remettre en cause le fait que, sans égard à la mesure faite, l'énergie suit la fonction $F$. Si contre toute attente on impose la symétrie locale, alors on ouvre la porte à la possibilité qu'une interaction nouvelle soit nécessaire pour expliquer les phénomènes. Dans le chapitre suivant, je reviendrai sur ce type de symétries dans le contexte de la physique quantique.

### 4.2.5 Essentiel ou accidentel

La distinction entre symétries essentielle et accidentelle, telle que définie en physique fondamentale, est d'une grande richesse philosophique. Malheureusement sa pleine compréhension nécessite la maîtrise de nombreux aspects techniques, particulièrement ceux reliés à la notion de brisure spontanée de symétrie. Les symétries essentielles sont celles associées aux symétries locales fondamentales, c'est-à-dire aux symétries de jauge. Les symétries accidentelles, comme celle de l'isospin, sont des régularités qui ne sont pas directement liées aux groupes de jauge. On peut tout de même expliquer leur présence par l'analyse des brisures spontanées de symétrie des symétries fondamentales. Pour plus de détails, je réfère le lecteur à l'article de Robert Mills [Mil89], page 502, au chapitre 5 du livre de Sydney Coleman [Col85] et au chapitre 19 du livre de Steven Weinberg [Wei96a]. L'un des premiers articles à mettre de l'avant cette distinction est [Wei72] de Steven Weinberg justement. Dans un avenir proche, je compte revenir sur cette distinction.

## 4.3 Le statut empirique des symétries

Un article récent de Peter Kosso [Kos00a] recoupe de nombreuses idées que j'avais développées sur le statut empirique des symétries. Kosso ayant la priorité de publication, je vais donc ajuster mon vocabulaire au sien. Cependant, les positions défendues dans cette sous-section n'engagent que moi.

Tout d'abord, on divise les symétries physiques en deux grandes catégories:

celles qui ont été observées et celles qui ne l'ont pas été. Les symétries observées seront bien sûr celles que l'on considère comme ayant un statut physique. Pour que ce statut soit absolument clair, je rejette les observations indirectes. Il ne suffit donc pas d'observer les conséquences d'une symétrie pour que cette dernière passe dans la catégorie des symétries observées. Par exemple, il ne suffit pas d'observer la quantité conservée associée à une symétrie par le théorème de Noether. Seules les observations directes d'une symétrie seront considérées. Cette restriction peut paraître radicale, mais elle a une fonction précise dans ma démarche. Je veux clairement distinguer les usages de la symétrie comme principe ou outil analytique des symétries physiques. En effet, lorsque seules les conséquences d'une symétrie sont observées, les régularités mesurées pourraient être dues à bien des choses en somme. Dans ce contexte, la symétrie semble plus un outil de construction des théories nous permettant de déduire des conséquences physiques. Si on veut clairement différencier les symétries attribuées à la réalité des autres usages, je ne peux faire autrement que de rejeter les observations indirectes de ce genre.

Qu'est-ce que l'observation directe d'une symétrie? Je ne tiens pas à ce que cet acte se limite à l'observation visuelle. On peut raisonnablement étendre la notion d'observation à la détection relativement directe à l'aide d'un instrument[19]. Que doit-on observer exactement? Tous les aspects de la définition d'une symétrie.

1. On doit pouvoir observer les changements associés à la symétrie.

2. On doit observer l'invariance, c'est-à-dire constater que certains aspects n'ont pas changé suite au changement.

Observer un changement consiste à comparer deux systèmes ou bien deux états d'un même système. Pour ce faire, il nous faut un cadre de référence qui nous permette de différencier l'avant de l'après changement. Advenant le fait qu'il ne soit pas

[19]Voir l'article de Shapere [Sha82].

possible de définir un tel cadre, le changement serait inobservable. Comme je l'ai déjà mentionné dans les chapitres précédents, il y a des difficultés inhérentes à la mécanique quantique qui font que dans ce contexte, il est parfois difficile de bien définir ce cadre de référence. Cependant, je ne pense pas que cela soit impossible. Une fois le cadre établi, il reste une ambiguïté. Quelle version d'une transformation doit être observée? La passive? L'active? Les deux? Sur ce point, Peter Kosso défend cette position:

> Observing either the active or the passive version of the transformation will amount to observing the transformation. [[Kos00a], page 87.]

Cette position est pour le moins étonnante. Si une transformation passive est bien une modification du point de vue, je vois mal comment "observer" une telle transformation pourrait m'amener à conclure que j'ai des raisons de soutenir le caractère empirique de cette transformation. Ce que Kosso a probablement en tête, c'est le fait que dans le cas des symétries externes, on peut faire correspondre à toute transformation active, une transformation passive, comprise comme une transformation active de l'observateur. Souvenons-nous de la rotation du flocon de neige, soit il tourne réellement, soit le système de coordonnées tourne, ce qui peut aussi correspondre à une rotation physique de l'observateur. Ce point ne peut cependant pas tirer complètement d'affaire Kosso, car si pour toute transformation active externe il existe une transformation passive externe, il n'existe probablement pas pour toute transformation passive externe un pendant actif. Prenons le cas de la transformation d'un système de coordonnées cartésien en un système de coordonnées sphériques. Quelle pourrait être le pendant actif d'une telle transformation? Autre point, cette correspondance entre transformation active et transformation de l'observateur n'est bien établie que pour les transformations externes. L'observation de la seule transformation passive semble encore moins justifiée dans le contexte des symétries internes[20]. Par exemple, en électromagnétisme classique, la physique est invariante

[20] À sa décharge, je soupçonne Kosso de croire, comme Redhead, qu'il n'existe pas de version

sous une transformation de la valeur absolue du potentiel scalaire, aussi appelé potentiel électrostatique, $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$. Du point de vue empirique, il ne me semble pas qu'il y ait équivalence d'observation entre changer l'échelle de mesure du potentiel dans les équations et effectivement comparer deux systèmes ayant une différence de potentiel. Compte tenu de ces points, il me paraît plus raisonnable de défendre qu'observer une transformation consiste à observer la version active de cette transformation.

Le deuxième élément de l'observation d'une symétrie est de constater l'invariance sous la transformation. Dans la plupart des cas, cet acte consiste à observer que certaines caractéristiques du système étudié demeurent les mêmes après le changement. Ceci s'avère particulièrement difficile dans le cas des symétries locales qui entraînent une dynamique. Revenons sur notre exemple de la mesure de la température durant un parcours de vélo. Ce qui est invariant c'est la fonction $F$, mais cette dernière n'est en fait jamais mesurée directement. Elle est la composition d'une mesure directe de la température et d'une interaction supplémentaire, interaction qui s'ajuste exactement pour conserver la symétrie. Bien sûr, si cette interaction n'est pas identifiée dans les expériences, nous aurons une raison de mettre en doute la validité de cette symétrie. Cependant, si cette interaction semble effectivement présente, son observation couplée à la mesure de la température ne nous permet d'accéder à la symétrie qu'indirectement. Ce type d'exemple n'est pas loufoque, dans le chapitre qui suit je présenterai l'exemple de la symétrie de jauge de l'électrodynamique qui a exactement les mêmes caractéristiques. De cette courte discussion, je me dois de conclure que les symétries internes locales qui impliquent une dynamique ne sont jamais directement observables. Compte tenu de l'importance de ces symétries dans le contexte de la physique actuelle il est pour le moins curieux que ces symétries n'aient pas un statut empirique fort.

passive des transformations internes.

## 4.4 Conclusion

Ce chapitre, je l'espère, devrait avoir convaincu le lecteur que le classement des symétries n'est pas qu'un simple outil comptable mais implique des positions métaphysiques qui ne sont pas toujours clairement exprimées. Les symétries sont le coeur de la physique. Elles formalisent le concept fondamental de régularité, d'invariance. En découpant l'ensemble des symétries physiques en catégories, on découpe du même souffle la réalité telle que nous la concevons. Analytique/physique renvoie à la distinction entre réalité et représentation. Géométrique/dynamique nous ramène à la distinction entre catégories et faits contingents. Interne/externe nous renvoie aux problèmes qu'il y a à différencier l'espace, le temps et les choses. Global/local nous renvoie à la distinction entre les propriétés d'entités et les interactions. Symétries observées/inobservées nous sort un peu de la métaphysique pour nous confronter aux relations que nous entretenons avec les invariances et les régularités. Cette suite de critères de classification lorsque appliquée aux symétries particulières engendre une géographie d'une grande richesse. Les symétries sont nombreuses, on le savait, mais de plus elles sont de natures fort diverses. Si jusqu'ici le lecteur était peut-être sceptique quant à l'importance philosophique des symétries, j'espère qu'il ne l'est plus.

# CHAPITRE 5

# La symétrie de jauge

## 5.1 Introduction

> The gauge principle is generally regarded as the most fundamental cornerstone of modern theoretical physics. In my view its elucidation is the most pressing problem in current philosophy of physics. [Michael Redhead, [Red02], page 299.]

Je ne peux qu'approuver ce passage de Redhead. Le concept de symétrie est au coeur de la physique théorique actuelle. Parmi les symétries, les symétries de jauge occupent une place particulière. Toutes les interactions fondamentales sont modélisées par des théories exhibant une symétrie de jauge. Même la relativité générale, qui a été développée avant que les théories de jauge prennent l'avant-scène, peut être formulée de telle façon que la théorie ait cette symétrie.[1] La compréhension de cette symétrie, de sa nature et de ses implications, est une question importante. Ce chapitre sera ma contribution au débat. En philosophie, on s'intéresse au sujet depuis peu. Malgré ce début tardif, les écrits déjà publiés ne sont pas négligeables; cependant, certaines questions n'ont pas encore été abordées. Mentionnons seulement la relation entre symétrie de jauge et renormalisation ou encore les problèmes ontologiques entourant le concept de brisure spontanée de symétrie.[2] Il est probable que ces interrogations ne sont pas apparues dans le débat philosophique car la

[1] Sur ce point précis, voir la section 4 de l'article de Ryoyu Utiyama [Uti56].

[2] Je me dois de mentionner comme une exception l'article de Peter Kosso portant sur la brisure spontanée de symétrie [Kos00b].

question de la nature de la symétrie de jauge n'a pas été réglée. Aucune explication ne semble satisfaisante. Son élucidation demeure une question des plus pressantes comme l'affirme Redhead. Dans ce chapitre, je vais me concentrer sur cette question et vais l'aborder sous divers angles pour en faire ressortir les aspérités. Mon approche sera conceptuelle et non historique. Le lecteur intéressé par l'origine et le développement de la symétrie de jauge en physique est invité à consulter le livre de O'Raifeartaigh [O'R97]. Par ailleurs, je vais me concentrer sur la symétrie de jauge dans le contexte des théories quantiques. Je suis confiant que cette démarche ne limitera pas les fruits de mon analyse et qu'ils pourront s'appliquer avec un faible effort à la relativité générale. Sans plus tarder, commençons.

## 5.2 Présentation de la symétrie de jauge

Avant de présenter le cas quantique rappelons brièvement ce qu'est la symétrie de jauge en électromagnétisme classique. J'ai montré dans le chapitre 3 que l'on pouvait définir le tenseur de force à l'aide d'un champ de jauge[3] $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Ce tenseur est invariant sous les transformations locales de jauge

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \tag{5.1}$$

où $\chi$ est une fonction lisse définie en tous points de l'espace-temps. Une telle transformation, qui ne concerne que le champ de jauge, sera appelée transformation de jauge du second type. J'emprunte cette terminologie à Pauli [Pau41] page 207. Étant donné que l'on présume que tous les phénomènes électromagnétiques classiques ne dépendent que de la valeur de $F^{\mu\nu}$, on dira que la théorie est invariante de jauge.

Passons maintenant au cas quantique. Dans la mesure du possible, je vais coller à la présentation qu'en font les ouvrages de physique comme celui de Aitchison et Hey [AH89] ou celui de Peskin et Schroeder [PS95]. Pour illustrer la symétrie de

[3] Aussi appelé potentiel de jauge.

jauge prenons un exemple connu: la théorie de l'électrodynamique quantique des électrons[4]. On résume cette théorie par la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L}_{EDQ} = \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \tag{5.2}$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu} \tag{5.3}$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 \tag{5.4}$$

où $\psi$ est un champ de Dirac représentant les électrons, $e$ est la charge des électrons, $m$ leur masse et $D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ieA_{\mu}$. $D_{\mu}$ est appelée dérivée covariante de jauge. Nous verrons pourquoi plus loin. Dans cette densité lagrangienne, $\mathcal{L}_{Dirac}$ représente des électrons libres, $\mathcal{L}_{Maxwell}$ des photons libres et $\mathcal{L}_{int}$ l'interaction entre les deux.

On constate que cette densité lagrangienne est invariante sous la transformation locale suivante:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_{\mu} \to A'_{\mu} = A_{\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{5.5}$$

où $\alpha(x)$ est une fonction lisse de l'espace-temps. Notez que la seconde partie de la transformation correspond à une transformation de jauge du second type du champ de jauge de l'électromagnétisme classique. La transformation locale précédente, qui affecte à la fois le champ de matière et le champ de jauge, est appelé transformation de jauge du premier type [Pau41]. Les transformations du même type de cette théorie forment un groupe avec l'opération de multiplication $T(\alpha)T(\beta) = T(\alpha + \beta)$. Ce groupe de transformations est isomorphe au groupe de Lie $U(1)$. C'est pourquoi on dit de l'électrodynamique quantique qu'elle est une théorie de jauge $U(1)$. Il est à noter que les transformations du champ de matière sont une représentation[5] de $U(1)$.

---

[4]Pour les fins de cette discussion, j'utiliserai les unités $\hbar = c = 1$.

[5]

**Définition 21 (Représentation du groupe $\mathcal{G}$)** *S'il existe un homomorphisme d'un groupe $\mathcal{G}$ vers un groupe de matrices $d \times d$ non singulières $\Gamma(T)$, la multiplication de matrices comme opération de groupe, alors le groupe de matrice $\Gamma(T)$ forme une représentation $\Gamma$ de dimension $d$ de $\mathcal{G}$.*

On constate immédiatement combien la symétrie de jauge du premier type est une contrainte plus forte que la symétrie du second type. Les symétries de jauge du premier type imposent une structure de couplage entre des champs de natures différentes. Bien sûr, cette symétrie ne détermine pas ce couplage, mais elle le balise fortement. Je reviendrai sur ce point plus loin.

D'autres théories de jauge sont invariantes sous des transformations qui forment des groupes de Lie non abéliens unitaires, comme par exemple, la théorie de la chromodynamique quantique qui est invariante sous des transformations qui forment un groupe isomorphe à $SU(3)$. Dans ces cas, le tenseur de force est un peu plus complexe et n'est pas invariant de jauge, cependant la densité lagrangienne l'est toujours. Comme dans le cas de l'électrodynamique, une "rotation" locale du champ de matière est exactement compensée par une modification du champ de jauge. Cet aspect est l'essence de la symétrie de jauge dans les théories quantiques.

Sans aller profondément dans l'analyse à cette étape-ci, quelques remarques devraient aiguiser la curiosité du philosophe.

- La symétrie de jauge est locale. Elle ne correspond donc pas aux symétries traditionnellement étudiées.
- Toutes les théories modélisant les quatre interactions fondamentales sont invariantes de jauge.
- Le statut empirique des symétries de jauge n'est pas clair. Cette symétrie si fondamentale pourrait n'être que l'indice d'un surplus de structure dans la théorie.

Pour plus de détails, voir le chapitre 4 de [Cor97].

## 5.3 Symétrie de jauge et surplus de structure

Qu'est-ce que la symétrie de jauge? Est-ce une symétrie fondamentale des phénomènes? Si c'était le cas, cela expliquerait pourquoi on la retrouve dans toutes les théories modélisant les interactions fondamentales. Est-ce une symétrie formelle, qui ne dépend que de notre mode de représentation? Si c'était le cas, pourquoi est-elle si présente en physique? En d'autres mots, quel est le statut de cette symétrie? À défaut d'amener des éléments de réponse, comme je le ferai au cours des sections suivantes, la présente section tentera d'exposer clairement les options possibles.

Si l'on adhère à l'interprétation de Yang et Wu [WY75], une jauge est une collection de coordinations locales nous permettant de représenter la phase complexe d'un champ de matière. De façon générale, une jauge est une structure mathématique qui nous permet de représenter une structure physique.[6] Formalisons cela. Je vais présenter trois cas de figure montrant comment ce rapport entre structures physique et mathématique peut s'articuler.

Premier cas, soit $P$ une structure physique, c'est-à-dire une collection d'entités et leurs relations. Dans l'approche sémantique des théories scientifiques, $P$ est un modèle et est ce qui est confronté au réel dans une expérimentation. Soit $M$ une structure mathématique isomorphe à $P$ et qui me sert à représenter ce dernier.[7] Dans le langage de la physique, on dit de $M$ que c'est une jauge de $P$. Bien sûr, $M$ n'est pas toujours unique. $P$ peut entretenir des relations isomorphiques avec plus d'une structure mathématique, par exemple $M_1$ et $M_2$; par les isomorphismes $U_1 : P \to M_1$ et $U_2 : P \to M_2$. Dans cet exemple, le morphisme $U_2 \circ U_1^{-1} : M_1 \to M_2$ est un changement de jauge, auquel correspond une transformation de jauge. Un tel morphisme s'interprète naturellement comme un changement de représentation.

[6]La discussion qui suit puise abondamment dans Michael Redhead [Red02].

[7]Pour les fins de la discussion, je pose que cette relation est de type isomorphique. On pourrait envisager des cas plus faibles.

Cette liberté du choix de cadre de représentation s'appelle la liberté de jauge. Cette liberté, que l'on formule souvent comme une symétrie, n'a bien sûr aucune signification physique. Si la symétrie de jauge correspond à ce cas de figure, elle ne nous informe en rien sur le monde empirique. Le défi philosophique serait alors d'expliquer pourquoi cette symétrie formelle est si présente dans le discours théorique.

Deuxième cas, imaginons qu'il soit possible de définir plus d'un isomorphisme de $P$ vers $M$, par exemple $U : P \to M$ et $V : P \to M$. Dans ce cas, le morphisme combiné $V^{-1} \circ U : P \to P$ est un automorphisme de $P$, c'est-à-dire une transformation active du système modélisé par $P$. Par contre, le morphisme $U \circ V^{-1} : M \to M$ correspond à un changement de coordonnées, c'est-à-dire une transformation passive de $P$. Par extension de notre vocabulaire, on appelera cette transformation: transformation de jauge. On constate que l'ensemble des automorphismes de $P$ est en bijection avec l'ensemble des automorphismes de $M$. Ceci n'est pas étonnant puisque j'ai posé que $P$ et $M$ sont isomorphes entre eux. Dans ce cas de figure, qui n'est pas le cas le plus général, les symétries de $P$ correspondent aux symétries de $M$. Si la symétrie de jauge est de ce type, elle aura évidemment une signification physique. Elle correspondra à une symétrie du modèle.

Troisième cas, admettons que le modèle $P$ soit représenté par une structure mathématique $M'$ et que $P$ entretienne une relation isomorphique avec $M$ une sous-structure de $M'$. Le complément de $M$ dans $M'$ est ce que l'on appelle un surplus de structure. En pratique, la frontière entre $M$ et son complément est difficile à identifier. Dans ce cas de figure, un automorphisme de $M'$ qui se réduit à l'identité pour $M \setminus M'$ est un cas de liberté de jauge, même si structurellement cette situation ressemble au deuxième cas. Avons-nous affaire à ce genre de situation dans le cas de la symétrie de jauge? Je vais tenter de donner des éléments de réponse tout au long de ce chapitre.

## 5.4 Le principe de jauge

Si le rôle de la symétrie de jauge dans le développement de la relativité générale et de l'électrodynamique quantique ne semble pas avoir été central, il en a été tout autrement des théories qui ont suivi. La symétrie de jauge a eu au minimum un rôle heuristique et ce, à travers ce que les physiciens appellent le principe de jauge ou ce que les philosophes appellent l'argument de jauge. Comme première analyse visant à clarifier la symétrie de jauge, je me propose de me pencher sur ce principe, qui a de nombreuses implications philosophiques.

### 5.4.1 Présentation de l'argument de jauge

Comme à mon habitude, je vais présenter l'argument de jauge comme les physiciens le font. Dans la sous-section suivante, je me pencherai sur l'analyse philosophique d'un tel argument. Par simplicité, je présenterai l'argument dans le cas particulier de l'électrodynamique quantique des électrons. De plus, je suivrai l'argument tel que présenté au chapitre 15 de Peskin et Schroeder [PS95], car leur façon de faire est typique.

Soit un champ de Dirac $\psi(x)$ représentant les électrons. On pose que la théorie doit être invariante sous la transformation locale

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{5.6}$$

Si on désire avoir une théorie d'électrons libres, il nous faut inclure dans la densité Lagrangienne un terme de masse et un terme cinétique. Pour le terme de masse, la tâche est aisée. Le terme de masse $m\bar{\psi}\psi$ est invariant sous la transformation (5.6). $m$ est à l'exposant 1 pour des raisons de dimensionnalité. Quant au terme cinétique, c'est une autre paire de manches, car ce terme implique une dérivée de $\psi(x)$. Je rappelle que la dérivée de $\psi(x)$ dans la direction du vecteur $n^\mu$ est

$$n^\mu \partial_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\psi(x+\epsilon n) - \psi(x)\right] \tag{5.7}$$

Parce que la transformation (5.6) a une dépendance locale, son effet sera différent aux points $x + \epsilon n$ et $x$. Si l'on veut que la dérivée du champ soit bien définie, il nous faut en quelque sorte soustraire l'effet de rotation de la phase du champ d'un point à l'autre. Pour ce faire, on peut définir une quantité scalaire $U(y,x)$ qui dépend des deux points que l'on veut comparer et qui se transforme simultanément au champ, ainsi:

$$U(y,x) \to U'(y,x) = e^{i\alpha(y)} U(y,x) e^{-i\alpha(x)} \tag{5.8}$$

En général, on peut poser que $U$ est une phase pure $U(y,x) = e^{i\phi(y,x)}$. Muni de ce facteur, on peut constater que $\psi(y)$ et $U(y,x)\psi(x)$ ont la même loi de transformation. On peut donc les soustraire malgré la transfomation locale. Sachant cela, je peux définir la *dérivée covariante de jauge*:

$$n^\mu D_\mu \psi = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n, x)\psi(x)\right] \tag{5.9}$$

Si $U(y,x)$ est une fonction continue, on peut en faire un développement en série

$$U(x+\epsilon n, x) = 1 - ie\epsilon n^\mu A_\mu(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{5.10}$$

Notez que j'ai mis en évidence une constante $e$ arbitraire. Le coefficient du déplacement $\epsilon n^\mu$ est un nouveau champ vectoriel $A_\mu(x)$, champ qui en géométrie correspond à une connexion. La nouvelle dérivée prend donc la forme

$$D_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + ieA_\mu \psi(x) \tag{5.11}$$

La transformation (5.8) et l'expression (5.10) impliquent que le nouveau champ se transforme ainsi:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{5.12}$$

Maintenant, vérifions comment se transforme la dérivée.

$$D_\mu \psi(x) \to D'_\mu \psi'(x) = \left[\partial_\mu + ie(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha)\right] e^{i\alpha(x)}\psi(x) \tag{5.13}$$

$$= e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x) \tag{5.14}$$

La dérivée covariante se transforme de la même façon que le champ; on peut construire un terme cinétique en reprenant le terme habituel de Dirac et en remplaçant la dérivée par une dérivée covariante $\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu})\psi$.

Je suis presque parvenu à retrouver le Lagrangien de l'électrodynamique quantique. Imaginons que le champ $A_{\mu}$ possède aussi une dynamique. Il me faut ajouter à la densité Lagrangienne un terme cinétique et possiblement un terme de masse. Tous les termes en $A^2$ ne sont pas invariants de jauge. Il n'y aura donc pas de terme possible de masse. Passons au terme cinétique, c'est-à-dire un terme comportant des dérivées de $A_{\mu}$. Sachant que la dérivée covariante se transforme comme le champ, on constate qu'une combinaison de dérivées fait de même, en particulier le commutateur

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\,\psi(x) \to [D'_{\mu}, D'_{\nu}]\,\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\,[D_{\mu}, D_{\nu}]\,\psi(x) \tag{5.15}$$

Cependant le commutateur n'est pas lui-même une dérivée

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]\,\psi = [\partial_{\mu}, \partial_{\nu}]\,\psi + ie\left([\partial_{\mu}, A_{\nu}] - [\partial_{\nu}, A_{\mu}]\right)\psi - e^2\,[A_{\mu}, A_{\nu}]\,\psi \tag{5.16}$$

$$= ie(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}) \cdot \psi \tag{5.17}$$

Ceci me permet de poser la définition $[D_{\mu}, D_{\nu}] = ieF_{\mu\nu}$. Le terme invariant de jauge le plus simple que l'on peut former à l'aide du tenseur $F_{\mu\nu}$ est $-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$. Il est à noter qu'en définissant le tenseur de force à partir du commutateur de la dérivée covariante, ce tenseur correspond à la courbure du champ de jauge. J'ai donc finalement retrouvé la densité Lagrangienne de l'électrodynamique quantique.

### 5.4.2 Analyse de l'argument de jauge

Je vais me pencher sur l'argument de jauge pour voir dans quelle mesure il peut nous apprendre quelque chose sur la symétrie du même nom. Si on observe l'argument de façon globale, on constate d'abord deux choses: 1) l'argument va schématiquement comme suit; si on impose la symétrie de jauge aux électrons, on obtient l'électrodynamique, 2) la symétrie de jauge a à voir avec la géométrie car elle engendre une connexion $A_\mu$.

Revenons sur le premier point. Tel que formulé, il implique que la symétrie de jauge est le fondement de la dynamique. La présence de la symétrie de jauge est une contrainte forte sur le type d'interactions possibles. Une interaction de type électromagnétique serait la seule ou la meilleure façon de maintenir la symétrie de jauge $U(1)$. Quand bien même la déduction passant de la symétrie à l'électromagnétisme setait vraie, l'existence d'une interaction de cette forme n'implique en rien l'existence de la symétrie de jauge. Si l'on désire que l'argument de jauge soit interprété de manière forte, c'est-à-dire qu'il soit plus qu'un simple outil heuristique, on doit se convaincre qu'indépendamment de l'électrodynamique, la symétrie de jauge est une symétrie physique. On doit avoir des raisons de croire que la symétrie de jauge n'est pas simplement un artefact du formalisme, car si c'était le cas, la première étape de l'argument, qui consiste à imposer la symétrie de jauge aux électrons, serait grandement affaiblie. Il est intéressant de constater que les premiers physiciens qui ont formulé un argument de jauge ont pris la peine de justifier cette étape. Pourquoi imposer la symétrie locale de rotation de phase aux particules? Yang et Mills nous affirment que c'est parce que la symétrie globale associée pose problème. Et ils ajoutent dans le cas particulier de l'isospin qui selon eux a la symétrie de jauge $SU(2)$:

> It seems that this [imposition de la symétrie globale] is not consistent with the localized field concept that underlies the usual physical theories. In the present paper we wish to explore the possibility of requiring all interactions to be invariant under *independent* rotations of the isotopic spin at all space-time points, so that the relative orientations of the isotopic spin at two space-time points becomes a physically meaningless quantity (the electromagnetic field being neglected). [[YM54], page 192, italique dans le texte original.]

Ce passage de Yang et Mills n'a malheureusement pas qu'une interprétation plausible. Voyons cela de plus près.

L'invariance sous une transformation de phase globale est aussi présente en mécanique quantique non relativiste. En effet, si un système quantique est décrit par un ket $|\psi\rangle$, on sait qu'aucune mesure ne serait modifiée si on travaillait avec le ket $e^{i\alpha}|\psi\rangle$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette constatation est tout à fait cohérente avec le principe que ce sont les rayons, et non les kets, qui représentent les états physiques. La phase absolue d'un ket est donc une affaire de convention. Si on transfert cet argument à la théorie quantique des champs, on pourrait se dire que la phase absolue d'un champ de Dirac n'est pas une quantité physiquement pertinente. C'est une quantité conventionnelle. Seules les différences de phase comptent. Alors comment comprendre l'objection de Yang et Mills? Admettons que l'on interprète les transformations de jauge globales de façon passive. Dans ce contexte, faire une telle transformation consiste à changer globalement de convention de phase. Un peu comme si on modifiait notre échelle de mesure de température en tous points. Comment cette transformation pourrait-elle mettre en péril notre conception d'un champ localisé? Dans son livre, Sunny Y. Auyang nous donne une piste de réponse:

> The global convention requires that all field operators share a common state space. It violates the spirit of local field theories, in which descriptions concentrate on a point and its infinitesimal vicinity. [[Auy95], page 55.]

Comme l'affirme Auyang, le préjugé philosophique concernant la nature des champs quantiques en physique n'est pas seulement que ces objets ne doivent avoir que des propriétés intrinsèques locales, il est à l'effet que leur mode de description doit aussi être local. Dans un article fondamental [WY75], Yang et Wu ont clairement argumenté en faveur d'une conception locale de la convention de description des champs de jauge. Ces derniers ont montré que le choix de jauge est une affaire locale et que dans certains cas, comme celui des monopoles de Dirac, il est impossible de définir une jauge globale comme étant une coordination de la phase qui s'appliquerait à l'ensemble de l'espace-temps. Il nous faut dans ces cas prévoir au minimum plusieurs conventions qui ne s'appliquent qu'à une région donnée. On définit des fonctions de transition pour passer d'une convention à l'autre dans les régions où les conventions se superposent. En conséquence, une transformation globale $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$ ne peut être définie de cette façon que dans le cas où la jauge est l'application uniforme d'une coordination. Selon Yang et Wu, les cas de coordinations multiples ne sont pas l'exception mais bien la règle. Si on adopte la position de Yang et Wu, toute transformation de phase, même globale, a une dépendance locale, de même la symétrie associée.

En fait si on prend la conception de la jauge de Yang et Wu au sérieux, on est forcé d'admettre que la distinction entre rotations globale et locale du champ n'a pas beaucoup de sens. En effet, une transformation quelconque $\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi$ peut toujours être interprétée comme

1. une transformation locale mesurée dans une jauge utilisant une coordination de la phase pour tout l'espace-temps ou
2. une transformation globale mesurée dans une jauge où il y a une coordination différente de la phase pour chaque point de l'espace-temps.

La géométrie des fibrés qui est implicite au travail de Yang et Wu ne permet pas de choisir préférablement l'une ou l'autre des possibilités. Sachant que le cas le plus général est d'attribuer une coordination, un espace d'état du champ, à chaque point de l'espace-temps, on comprend l'objection de Auyang et de Yang et Mills. La symétrie de jauge locale est la bonne symétrie que doit avoir un système physique.

D'un autre point de vue, si on considère la transformation $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ comme active, cela implique que l'on associe comme équivalents des champs qui ne diffèrent que d'une phase globale. La phase absolue, malgré l'impossibilité qu'il y a à la mesurer, prend dans cette conception un caractère physique. Contrairement à certains auteurs, je ne crois pas que l'on puisse aisément rejeter une interprétation active de la transformation de jauge. Si la symétrie de jauge est, comme on l'affirme souvent, plus qu'un simple surplus de structure et est une symétrie fondamentale de la nature, elle doit avoir une interprétation active défendable. Admettons ceci pour les fins de la discussion. Je reviendrai sur la possibilité d'une interprétation active dans une section subséquente. Si on interprétait une transformation globale comme une modification instantanée de la phase en tous points de l'espace-temps, on serait en droit de se demander si une telle transformation n'est pas exclue par la théorie de la relativité restreinte, théorie qui est bien sûr respectée par la mécanique quantique relativiste. J'aurais donc, à partir de la relativité restreinte, une ligne d'argumentation possible pour contester la possibilité d'une transformation globale active de la phase. Il y a cependant une difficulté si on persiste dans cette voie. Comme le fait remarquer Martin dans [Mar02], l'ensemble des transformations locales de la phase compatibles avec la relativité restreinte ne correspond pas à l'ensemble des transformations locales de jauge. Le premier ensemble est un sous-groupe du second. Devrais-je alors restreindre le groupe des transformations locales de jauge? Cette position est difficile à soutenir. Elle briserait la bijection que j'ai proposée jusqu'ici entre les transformations passives et actives. Compte tenu du fait que, si on interprète la jauge comme Yang et Wu le font, il est toujours possible de passer d'une interprétation active à une interprétation passive et vice versa, la distinction impliquée par cette restriction me demande une révision de ce qu'est une jauge. Ceci n'implique en rien qu'une transformation globale de jauge active ne puisse être exclue à l'aide d'un autre principe de localité, cependant, un tel principe m'est inconnu. Admettons pour le moment que l'imposition de la symétrie locale aux électrons est justifiée et continuons notre analyse de l'argument de jauge.

Une fois convaincu que le Lagrangien doit être invariant de jauge, je débute en posant les termes d'une théorie de champ libre. Le terme de masse de l'électron ne pose pas de problème, mais le terme cinétique demande l'introduction d'un terme dépendant d'un nouveau champ $A_\mu$. En passant de $\partial_\mu \to D_\mu$, j'ai fait le choix d'ajouter le terme le plus simple possible. Rien n'interdit d'ajouter des termes plus complexes, comme par exemple le terme de Pauli $\bar{\psi}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi F^{\mu\nu}$. Pourquoi faire le choix du terme d'interaction minimal? En général, les présentations de l'argument de jauge tombent un peu court sur ce point. On peut cependant, dans la documentation de la physique, trouver des raisons pour limiter notre choix. Steven Weinberg, page 517 [Wei95], propose de rejeter le terme de Pauli car il n'est pas renormalisable. Ainsi, en plus de la simplicité, la renormalisibilité serait un critère de choix. Mais l'histoire ne s'arrête pas là. Même si les théories non renormalisables exhibent de nombreux problèmes techniques qui en limitent le pouvoir prédictif, il est loin d'être évident que ces théories n'ont aucune valeur en physique. En effet, toujours selon Weinberg, toute théorie raisonnable de la gravitation quantique contiendra des termes non renormalisables et ce, parce que sa constante de couplage a une dimension négative. On peut proposer d'autres critères pour choisir le ou les termes d'interaction, mais dans ces cas, il faut souvent se placer dans un autre contexte que celui que j'ai présenté. C'est ce que fait Holger Lyre [Lyr01] lorsqu'il remplace l'argument de jauge traditionnel par un raisonnement permettant de coupler une théorie de champ de matière et une théorie de champ d'interaction. Par ce choix, il affaiblit grandement l'argument de jauge traditionnel.

Il est intéressant de noter que la contrainte de simplicité ou de couplage minimal est exactement celle qui fait que le champ de jauge peut être interprété comme une connexion. C'est en effet dans ce cas que le champ de jauge s'intègre naturellement à une dérivée covariante.

Bien que j'aie choisi le terme d'interaction le plus simple, je ne suis pas encore parvenu au Lagrangien de l'électrodynamique quantique. Il me manque le terme cinétique du champ de jauge. À ce moment de l'argument se pose un problème.

Jusqu'ici, la densité Lagrangienne s'écrit comme suit:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \tag{5.18}$$

Rappelons que cette densité demeure inchangée sous la transformation

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x). \tag{5.19}$$

Ceci étant dit, on constate qu'il est toujours possible, localement, de faire une rotation de phase qui rende $A_\mu = 0$. On ne peut pas toujours le faire globalement pour toutes les configurations, mais dans l'esprit de Yang et Wu, il est toujours possible de choisir une jauge, c'est-à-dire un ensemble de coordinations, telle que dans chacune des cartes, le champ de jauge est nul. Cette possibilité a pour conséquence qu'à cette étape-ci de l'argument de jauge, nous n'avons pas de raison de croire que le champ de jauge a une courbure non nulle, c'est-à-dire que $F^{\mu\nu} \neq 0$. Il est cependant nécessaire que le tenseur de force soit non nul quelque part, sinon le champ de jauge ne possède pas d'énergie cinétique et donc pas de dynamique. L'absence de raison en faveur d'un terme cinétique pour $A_\mu$ pourrait nous inciter à soutenir le point de vue de Holger. Ce seraient bien deux théories de champ libre que l'on couple par l'argument de jauge. Avant de poursuivre, il semble donc nécessaire de poser que la courbure du champ de jauge est non nulle quelque part, c'est-à-dire que ce champ possède une véritable dynamique. Notez que c'est seulement après l'introduction de ce terme cinétique que le paramètre arbitraire $e$ peut être interprété comme la charge de l'électron.

La discussion précédente pourrait être interprétée comme une critique de l'argument de jauge. Il n'en n'est rien. Je ne conteste pas fondamentalement cet argument. Je ne fais que soulever ses lacunes, les endroits où il devrait être complété. Cette discussion nous a quand même appris des choses sur la nature du champ de jauge. En considérant le champ de jauge comme une connexion, l'argument de jauge place la question de l'interprétation de ce champ dans le contexte de la géométrie. Ce cadre, en particulier, bien mis en évidence par Yang et Wu, décrit le champ de jauge comme la connexion d'une variété qui est coordonnée par plusieurs cartes. Cet atlas forme une jauge, un point de vue. Dans une section subséquente, je reviendrai sur les implications philosophiques de cette vision géométrique. Il est important de noter en terminant que l'approche géométrique est le produit direct de l'imposition de la symétrie locale de jauge et de l'adoption du postulat de couplage minimal.

Il est à noter qu'il existe des approches alternatives à ce que je viens de présenter. Dans la théorie des supercordes, théorie qui se veut plus générale que la mécanique quantique relativiste, on identifie dans le spectre d'une corde en 10 dimensions une particule sans masse, de spin 1 (un photon). Par la suite, on peut constater que la théorie effective des champs qui décrit de telles particules possède la symétrie de jauge locale. Voir le chapitre 6 de [GSW87] pour les détails. Dans ce contexte théorique, la symétrie de jauge n'est pas un axiome, mais bien une conséquence de principes plus fondamentaux. Il est fort possible que dans les années à venir cette approche devienne dominante.

## 5.5 Le statut empirique de la symétrie de jauge

Je continue mon exploration de la symétrie de jauge et vais me concentrer sur son statut empirique. Comme je l'ai présenté dans le chapitre précédent, pour qu'une symétrie soit observée, il faut constater deux choses: 1) que les transformations impliquées par la symétrie sont observées et 2) que les aspects concernés par la symétrie demeurent inchangés. La symétrie de jauge étant une symétrie interne, il semble qu'une observation directe de celle-ci soit difficile, voire même impossible. En effet, la phase d'un champ de matière n'étant pas une quantité invariante de jauge, on présume qu'elle n'est pas observable. Comment alors mesurer sa modification?

On peut heureusement se rabattre sur un système simple. Étudions le cas de la mécanique quantique non relativiste d'un électron qui subit l'influence d'un champ électromagnétique classique. L'Hamiltonien d'un tel système est

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\phi \tag{5.20}$$

où $\vec{p}$ est l'impulsion de l'électron, $m$ sa masse, $e$ sa charge, $\vec{A}$ le potentiel vecteur et $\phi$ le potentiel scalaire du champ électromagnétique. Voir Aitchison et Hey pour plus de détails, [AH89] pages 48-51. À l'aide de cet Hamiltonien, on obtient l'équation de Schrödinger suivante:

$$\left(\frac{1}{2m}\left(-i\vec{\nabla} - e\vec{A}\right)^2 + e\phi\right)\psi(\vec{x},t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{5.21}$$

Cette équation est invariante sous la transformation suivante:

$$\psi(\vec{x},t) \to \psi'(\vec{x},t) = e^{i\alpha(\vec{x},t)}\psi(\vec{x},t) \tag{5.22}$$

$$\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{e}\vec{\nabla}\alpha(\vec{x},t) \tag{5.23}$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{e}\frac{\partial\alpha(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{5.24}$$

On peut réécrire cette transformation d'une façon plus familière:

$$\psi \to \psi' = e^{i\alpha(\vec{x},t)}\psi, \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(\vec{x},t). \tag{5.25}$$

Je possède donc un modèle de travail. Un électron non relativiste subissant l'effet d'un champ électromagnétique externe est un système exhibant une symétrie locale de jauge. Il est possible de créer expérimentalement des montages qui approximent de façon convaincante les conditions nécessaires à l'application de ce modèle théorique. Peut-on y observer la symétrie de jauge? Voyons cela de plus près.

Tout d'abord, peut-on, au moins en principe, observer une rotation de phase de la fonction d'onde? Cette quantité n'étant pas représentée par une observable, cette démarche semble condamné d'avance. Si une observation directe est exclue, une observation indirecte est peut-être possible. Analysons le problème pour un montage particulier: l'expérience de la diffusion des électrons à travers deux fentes. Rappelons cette expérience. On utilise une source d'électrons non polarisés et on les envoie un à

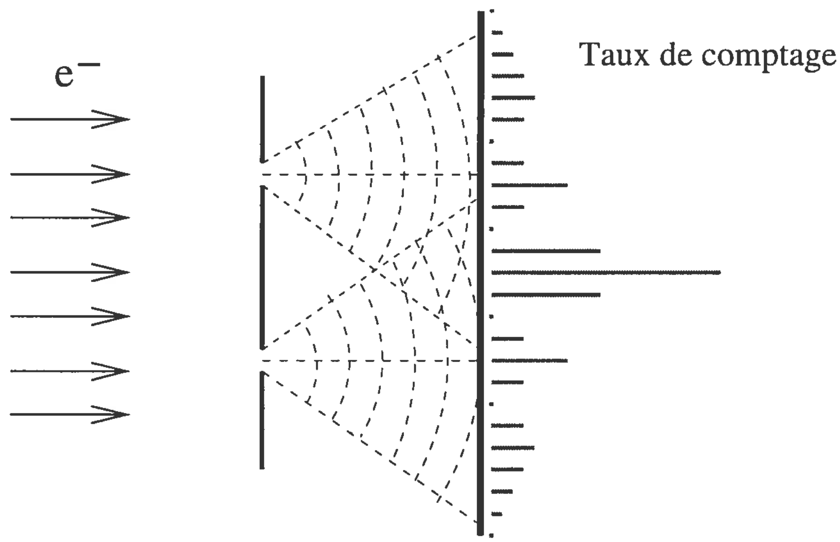


Figure 5-1: Diffusion d'un électron à travers deux fentes.

un vers un écran percé de deux minuscules orifices.[8] Certains électrons franchissent l'obstacle et on enregistre leur point d'impact sur une plaque sensible de l'autre côté de l'écran. On répète la mesure pour un grand nombre d'électrons. Par la suite, on compte le nombre d'impacts en fonction de la position. Pour un système d'électrons classique, on s'attendrait à voir une gaussienne comme distribution d'impacts. C'est en effet ce qui est prédit si l'électron a une chance sur deux de passer par l'une ou l'autre des fentes. Ce n'est pas ce que l'on trouve. On mesure plutôt un motif d'interférence, de diffraction. Ce motif n'est pas une surprise. Il est déductible de la théorie de la mécanique quantique. Il résulte d'additions de phases constructives et destructives de la fonction d'onde.[9] Cette expérience ne me permet pas de mesurer la phase absolue de la fonction, mais elle me permet d'observer directement l'effet de phase relative de cette fonction.

Maintenant, peut-on observer, même indirectement, une transformation globale

[8] En réalité pour faire cette expérience, on utilise un crystal ou un réseau très fin.

[9] Rappelons que la probabilité de présence d'un électron en un point à un temps donné est de $\psi^*(x)\psi(x)$.

ou locale de la phase de la fonction d'onde? Imaginons que je possède un instrument qui peut changer la phase de la fonction d'onde d'une certaine valeur, sans qu'il y ait effondrement de cette dernière. Cet instrument est l'équivalent pour les électrons d'une lame quart d'onde ou de demi onde pour la lumière. Je ne sais pas si un tel instrument existe, mais je vais poser son existence pour les fins de la discussion.[10] Qu'arriverait-il si je plaçais un tel instrument sur le parcours des électrons? Comme

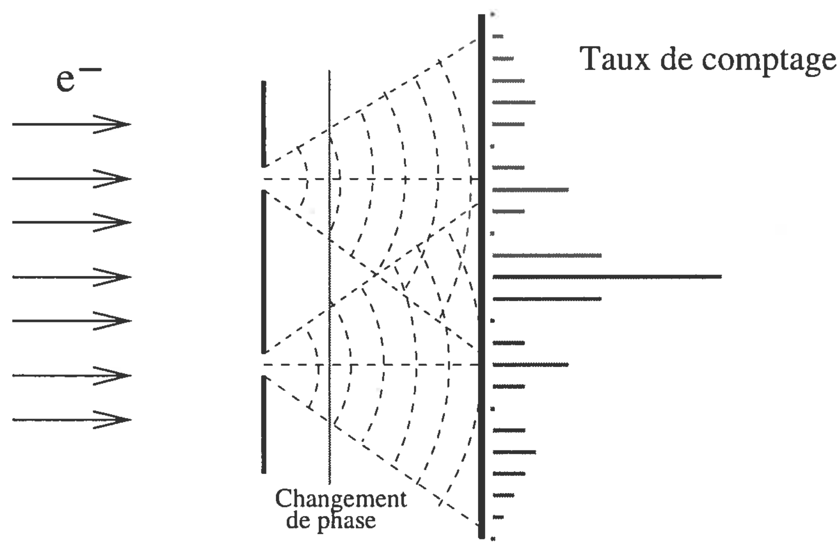


Figure 5-2: Diffusion d'un électron à travers deux fentes et qui passe dans une plaque modifiant sa phase.

on peut le constater à la Figure 5-2, rien ne change dans le motif de diffraction. C'est ce à quoi on s'attend. Le motif dépend des différences de phase et non de la phase absolue. Modifier la phase du faisceau en bloc revient à faire une transformation globale de phase pour tout ce qui se passe en aval du faisceau. J'aurais tout aussi bien pu mettre l'instrument devant le faisceau avant les fentes. La symétrie apparente du système m'empèche d'observer la transformation. L'invariance est bien observée, mais je ne peux certifier que la transformation a eu lieu. Je pourrais cependant

[10] En faisant cela, je fais la même hypothèse que Gerard 't Hooft dans [tH80]. L'un des seuls articles de physique qui, à ma connaissance, s'intéresse à l'observation de la phase de la fonction d'onde.

n'appliquer l'instrument que devant une des fente. Dans ce cas, il y a modification

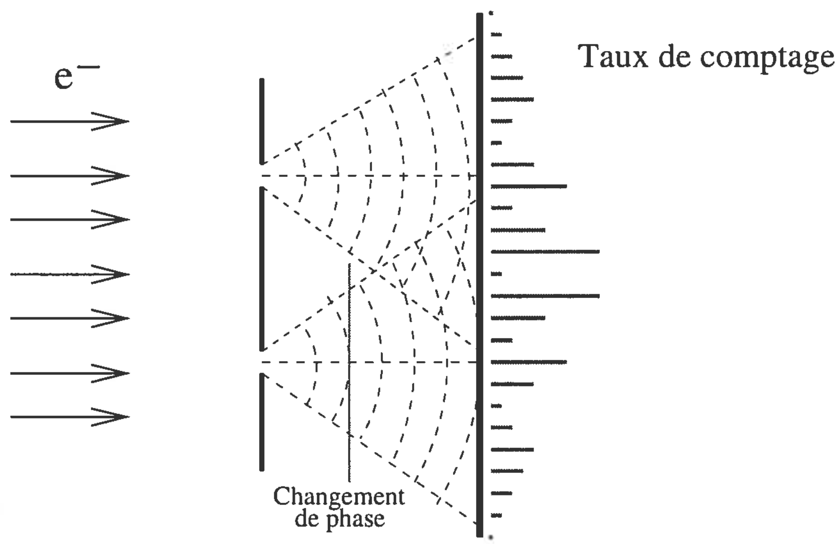


Figure 5-3: Diffusion d'un électron à travers deux fentes et où la moitié du faisceau a sa phase modifiée.

du motif d'interférence. Si l'enveloppe reste la même, la phase relative du motif change. Les maximums et minimums ne se trouvent plus aux mêmes endroits. Une transformation locale de la phase est donc observable. Par extension, on peut en déduire que la modification de la phase de la Figure 5-2 est observable aussi. On peut, à partir du montage de la Figure 5-3, allonger progressivement l'instrument de changement de phase et ainsi affecter petit à petit une portion de plus en plus grande du faisceau diffusé. À chaque nouvel allongement, le motif est décalé jusqu'à ce que je retrouve le motif de la Figure 5-2. Donc, malgré l'impossibilité qu'il y a de connaître la phase absolue de la fonction d'onde, il n'y a pas d'objection de principe à une observation d'un changement de phase global et local.

Passons à l'observation de l'invariance comme telle. L'absence de modification du motif de diffraction entre le montage de la Figure 5-1 et 5-2, si elle est observée en laboratoire, constitue une observation directe de l'invariance de la mécanique quantique sous une transformation globale de la phase de la fonction d'onde. Cette symétrie a donc un caractère potentiellement empirique et pourrait être mise en évidence par l'usage d'un instrument tel que décrit plus haut. Qu'en est-il de l'invariance sous transformation locale? Une modification locale de la phase a un effet mesurable. Il n'y a donc pas invariance. On peut par contre compenser cette modification de la phase grâce à l'ajout d'un champ de jauge. Comment introduire expérimentalement un tel champ? Cette étape n'est pas aussi évidente qu'elle en a l'air. La transformation de la phase ne modifie pas l'enveloppe du motif de diffraction, mais bien seulement sa phase relative. Si on faisait subir aux électrons un champ électromagnétique, il y aurait changement d'impulsion de ces derniers. Cela entraînerait une mutation de l'enveloppe du motif, ce qui ne permettrait bien sûr pas de compenser exactement pour le changement local de phase. Voir à ce sujet Olariu et Iovitzu Popescu [OP85], page 351. Pour éviter ce problème, il me faut modifier la phase des électrons à l'aide d'un champ de jauge de courbure nulle. On peut le faire avec le montage de la Figure 5-4.

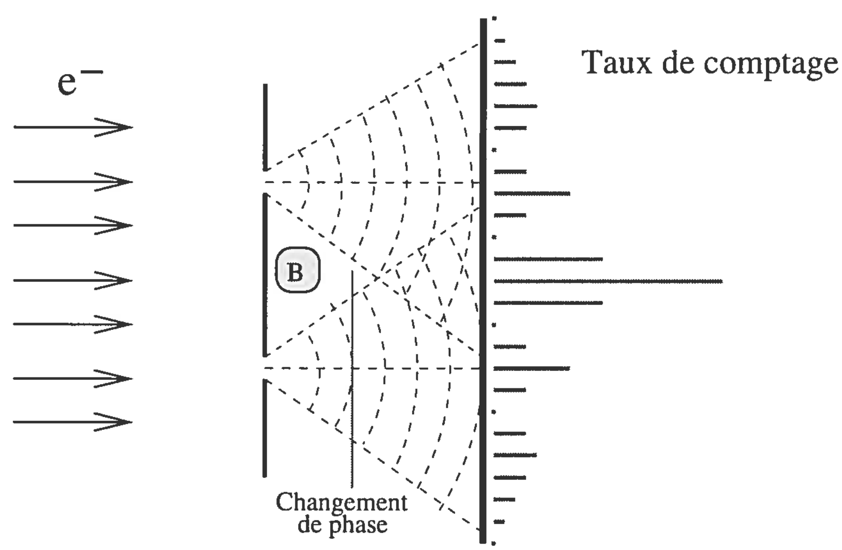


Figure 5-4: Diffusion d'un électron à travers deux fentes avec un solénoïde placé perpendiculairement au plan des fentes.

Ce montage n'est qu'une simple variation de l'expérience des deux fentes. Il consiste à insérer entre ces dernières un long et très fin solénoïde, en d'autres mots un fil conducteur uniformément enroulé autour d'un long et mince cylindre placé perpendiculairement au plan des fentes. Par la suite, on blinde le solénoïde de façon à ce qu'aucun électron ne puisse pénétrer à l'intérieur. Lorsqu'un courant continu passe dans le fil, un champ magnétique uniforme est engendré à l'intérieur du solénoïde. Si ce dernier est très long en comparaison des autres dimensions du montage, *il n'y aura pas de champ magnétique significatif engendré à l'extérieur du solénoïde.*[11] Les électrons ne sont donc jamais en contact avec une zone où $F^{\mu\nu} \neq 0$. Si $F^{\mu\nu} = 0$ à l'extérieur du solénoïde, $A^{\mu}$ ne l'est pas nécessairement. La résolution de l'équation de Schrödinger de ce système montre clairement qu'il y a un effet mesurable sur le motif si le courant est non nul dans le solénoïde. La phase relative du motif sera décalée (sans qu'il n'y ait modification de l'enveloppe) d'un facteur de phase proportionnel au flux magnétique $\Phi$ dans le solénoïde. Cet effet surprenant et purement quantique se nomme l'effet Aharonov-Bohm, du nom des deux physiciens qui l'on explicitement prédit en 1959 [AB59]. Je vais revenir sur cet effet dans la sous-section suivante.

À partir de l'existence de l'effet Aharonov-Bohm, que peut-on conclure sur le statut empirique de la symétrie locale de jauge? Tout d'abord, si on pouvait modifier la phase de la fonction d'onde dans une région, on pourrait l'observer (Figure 5-3). Quant à l'invariance, elle ne peut être mesurée directement. Certes, je peux compenser le changement de phase en introduisant une interaction électromagnétique (Figure 5-4), mais ce constat d'invariance est indirect. Pour l'obtenir, je dois ajuster à la main le courant pour obtenir le bon flux $\Phi$. On pourrait voir le problème sous un autre angle et considérer qu'avec l'effet Aharonov-Bohm, je peux reproduire dans un système exempt d'une transformation locale de phase, l'effet d'un tel changement. Par analogie avec le principe d'équivalence en relativité générale, je

[11] Dans une expérience récente, Tonomura et associés [TOM+86] ont réussi à recréer les conditions que je viens de décrire. Leur montage est quelque peu différent et fait appel à des matériaux supraconducteurs, mais il semble clair qu'il soit possible de reproduire les conditions de blindage et de fuite minimum du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde.

pourrais dire qu'il est impossible de distinguer expérimentalement par des mesures à l'extérieur du solénoïde le système ayant subi une modification locale de phase d'un système subissant une interaction électromagnétique de type Aharonov-Bohm. L'effet Aharonov-Bohm est donc une observation indirecte de la symétrie locale de jauge. Son existence est nécessaire, s'il y a bien symétrie, car c'est la théorie des électrons quantifiés subissant les effets d'un champ électromagnétique extérieur qui est invariante de jauge.

Le fait que la symétrie locale de jauge ne soit observée qu'indirectement mine les efforts que j'aurais pu faire pour justifier cette symétrie par un argument empirique. Rien dans cette analyse ne me permet d'affirmer que cette symétrie ne peut pas être un artefact de la théorie. Par contre, cette discussion a mis en évidence l'importance de l'effet Aharonov-Bohm pour la compréhension de la symétrie locale de jauge. Dans le reste de cette section, je vais m'attarder à cet effet.

### 5.5.1 Retour sur l'effet Aharonov-Bohm

Dans cette sous-section, je vais discuter un peu plus en détails de l'effet magnétique d'Aharonov-Bohm. Il est à noter que la communauté philosophique s'est aussi récemment penchée sur cet effet, que ce soit pour discuter de la localité ou de l'existence du champ de jauge. Je réfère le lecteur aux articles de philosophie suivants [Hea97], [Mau98], [Hea99], [Lee99] et [Hea01]. Je reviendrai sur ceux-ci plus loin.

Je vais présenter en détails un calcul qui prédit l'effet Aharonov-Bohm à partir de la théorie de la mécanique quantique. Cette preuve est avant tout utile pour des raisons pédagogiques. Elle met aussi en évidence le caractère purement quantique de cet effet. Pour cette preuve, je travaillerai dans le formalisme de l'intégrale de chemin de Feynman [Fey48]. Ce formalisme, équivalent à celui de l'équation de Schrödinger, est particulièrement approprié dans le contexte de l'effet Aharonov-Bohm.

**Définition 22 (L'intégrale de chemin)** *L'amplitude de probabilité (aussi appelée propagateur) pour une particule qui était à la position $\vec{q}$ au temps $t = 0$, soit à $\vec{p}$, au temps $t = T$, est*

$$A = K(\vec{p}, T; \vec{q}, 0) = \int D(\vec{q}(t)) e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}(t)]}$$

*où $S[\vec{q}(t)]$ est l'action classique du chemin $q$, c'est-à-dire $S[\vec{q}(x)] = \int_0^T L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) dt$, où $L(\dot{\vec{q}}, \vec{q})$ est le Lagrangien classique de la particule. L'intégrale $\int D(\vec{q}(t))$ est une somme sur toutes les trajectoires possibles entre $(0, \vec{q})$ et $(T, \vec{p})$. En d'autres mots, pour calculer le propagateur, je dois faire une somme de fonctions de l'action classique pour toutes les trajectoires possibles entre $(0, \vec{q})$ et $(T, \vec{p})$.*

Pour illustrer cette définition, je vais considérer la somme partielle de seulement deux chemins $q_1$ et $q_2$. Pour ces deux chemins, la somme des amplitudes est

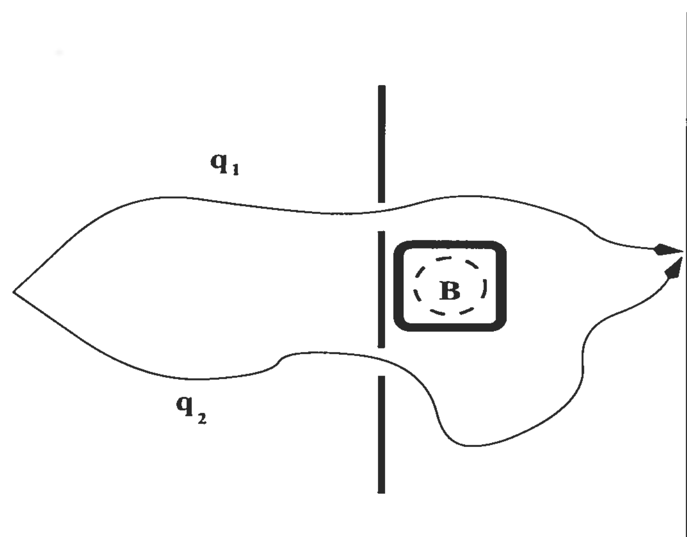


Figure 5-5: Deux trajectoires débutant au même point et se terminant au même moment et au même endroit de l'écran.

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}_1(t)]} + e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}_2(t)]} &= e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}_1(t)]} \left(1 + e^{\frac{i}{\hbar}(S[\vec{q}_2(t)] - S[\vec{q}_1(t)])}\right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{q}_1(t)]} \left(1 + e^{\frac{i}{\hbar} \Delta_{21}}\right) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Notez que la phase relative entre ces deux contributions $\Delta_{21}$ est la différence d'action entre les deux trajectoires. Si on étend cette somme partielle à tous les chemins se terminant à ce point, on obtient l'amplitude de probabilité pour qu'un électron arrive à ce point au temps $T$. Si on refait ce calcul pour tous les points de l'écran, on peut, à l'aide de ces amplitudes, retrouver le motif de diffraction (Figure 5-1).

Qu'arrive-t-il lorsque l'on ajoute un champ électromagnétique? Classiquement, nous savons que le Lagrangien d'une particule chargée (de charge $e$) est modifié de la façon suivante:

$$L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) \to L'(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) = L(\dot{\vec{q}}, \vec{q}) + e\left(\frac{\vec{v}(t)}{c} \cdot \vec{A}(\vec{q}(t)) - \phi(\vec{q}(t))\right) \tag{5.27}$$

où $\vec{v}(t)$ est le vecteur vitesse de l'électron.[12] Ceci modifie l'action de la façon suivante:

$$\begin{aligned} S[\vec{q}(t)] \to S'[\vec{q}(t)] &= S[\vec{q}(t)] + e\int\left(\frac{\vec{v}}{c}(t) \cdot \vec{A}(\vec{q}(t)) - \phi(\vec{q}(t))\right)dt \\ &= S[\vec{q}(t)] + \frac{e}{c}\int\left(\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{A} - c\phi\right)dt \\ &= S[\vec{q}(t)] - \frac{e}{c}\int_q A^\mu(x)dx_\mu \end{aligned} \tag{5.28}$$

Notez que l'action d'un chemin est modifiée par un facteur proportionnel à l'intégration en 3+1 dimensions du champ de jauge le long de ce chemin. Ceci est important, car cela ouvre la possibilité qu'un champ de courbure nulle ait un effet physique.

Qu'arrive-t-il à la différence de phase entre deux chemins (Figure 5-5)?

$$\begin{aligned} \Delta_{21} \to \Delta'_{21} &= \Delta_{21} - \frac{e}{c}\left(\int_{q_2} A^\mu dx_\mu - \int_{q_1} A^\mu dx_\mu\right) \\ &= \Delta_{21} - e\left(\int_{q_2} A^\mu dx_\mu + \int_{-q_1} A^\mu dx_\mu\right) \\ &= \Delta_{21} - e\oint A^\mu dx_\mu \\ &= \Delta_{21} - \frac{e}{c}\int_\Sigma F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} \quad \text{par le théorème de Stokes} \end{aligned} \tag{5.29}$$

[12] Je vais conserver le Lagrangien le plus général possible, même si dans notre cas l'absence de champ électrique peut signifier que $\phi = 0$. Aussi, je néglige dans le Lagrangien la contribution du spin.

où $\Sigma$ est la surface formée par l'union des trajectoires, $d\sigma_{\mu\nu}$ l'élément d'aire de cette surface et $-q_1$ le chemin inverse à $q_1$. Dans notre cas, où seul un champ magnétique sortant se trouve dans le solénoïde,

$$\Delta_{21} \rightarrow \Delta_{21} - \frac{e}{c}\Phi \tag{5.30}$$

où $\Phi$ est le flux du champ magnétique perpendiculaire au montage représenté.

Ce résultat est surprenant. Il implique que le changement de phase relative causé par l'action du champ électromagnétique entre deux chemins ne dépend pas du détail de ces trajectoires, mais bien du nombre d'enroulements autour du solénoïde de la boucle formée par l'union des chemins. Cette propriété m'amène à classer les chemins selon leur enroulement net autour du solénoïde. Ces classes $C_{\pm n}$ seront désignées à l'aide de deux indices: un signe et un entier positif $n$. Le signe sera positif si la trajectoire tourne dans le sens horaire autour du solénoïde et négatif pour le sens anti-horaire. $n$ est le nombre d'enroulements net du chemin autour du solénoïde. La Figure 5-6 illustre un chemin typique pour quelques classes. Ce classement est aussi un développement de l'intégrale en série. En effet, les chemins semblables au chemin classique sont ceux qui contribuent le plus à l'intégrale. La progression selon l'indice $n$ des classes dénote des chemins de plus en plus loin de la trajectoire classique. On peut donc affirmer que les classes de $n$ élevé contribuent de moins en moins à l'intégrale.

En utilisant cette classification, je peux diviser l'intégrale de chemin en une somme sur les classes. Pour chaque classe, on peut écrire la somme partielle

$$A_{\pm n} = \int_{C_{\pm n}} D\vec{q}(t) e^{\frac{i}{\hbar}S[\vec{q}(t)]} \tag{5.31}$$

L'effet de l'ajout du champ électromagnétique sur une classe est

$$A_{\pm n} \rightarrow A'_{\pm n} = A_{\pm n} e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\pm n} A^{\mu} dx_{\mu}} \tag{5.32}$$

Notez que l'intégrale sur le champ de jauge sort de l'intégrale de chemin. Elle peut se faire sur n'importe quel chemin appartenant à la classe, car la phase relative entre

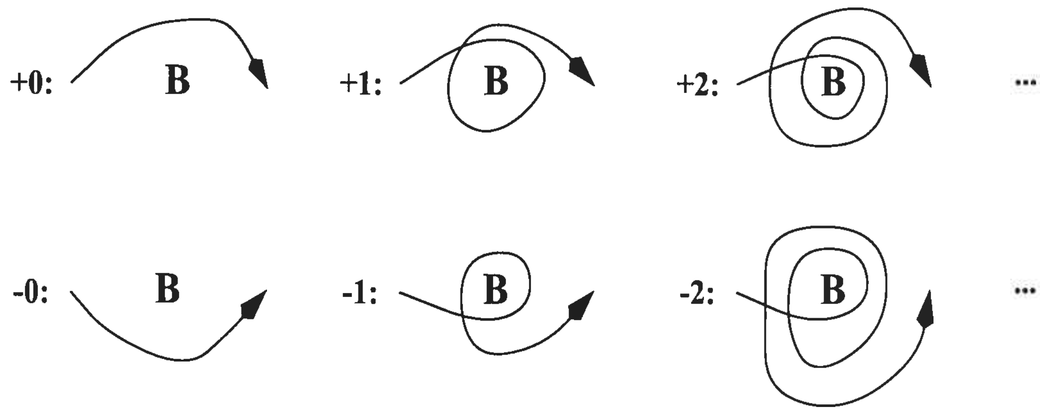


Figure 5-6: Quelques exemples de classes représentées par un chemin qui y figure.

ces chemins causée par l'action du champ électromagnétique est nulle. On combine les sommes partielles:

$$\vec{B} = 0 : \qquad A = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{+n} + A_{-n}) \tag{5.33}$$

$$\vec{B} \neq 0 : \qquad A' = e^{-\frac{ie}{\hbar c}\int_{+0} A^{\mu} dx_{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{ie}{\hbar c} n\Phi} \left( A_{+n} + A_{-n} e^{-\frac{ie}{\hbar c}(2n+1)\Phi} \right) \tag{5.34}$$

J'en conclus, à une phase non mesurable près, qu'au premier ordre, la présence du champ magnétique engendre un changement de phase proportionnel au flux du champ magnétique dans le solénoïde.[13]

L'effet Aharanov-Bohm a suscité de nombreux débats. Beaucoup ont contesté son existence, même s'il semble clairement nécessaire pour conserver la symétrie locale de jauge en mécanique quantique. Cependant, aujourd'hui de nombreuses expériences ont établi son existence et son origine quantique. Voir à ce sujet le livre de Peshkin et Tonomura [PT89]. L'interprétation philosophique de cet effet n'est pas aisée. Est-ce un indice en faveur de l'action à distance des charges ou du champ électromagnétique? Est-ce la preuve de l'existence du champ de jauge comme vecteur de l'interaction comme le défendait Richard Feynman ([FLS64], page 12-15)? Toutes

[13] Cette preuve personnelle me fut inspirée par la lecture de Richard MacKenzie [Mac00].

ces questions ne sont pas indépendantes de l'élucidation de la symétrie de jauge.

Le champ de jauge, contrairement au champ électromagnétique, n'est pas invariant de jauge. On présume donc qu'on ne peut le mesurer, car il n'y a pas une *vraie* jauge qui me permettrait de mesurer la véritable amplitude de ce champ. Le contraire modifierait complètement notre concept de jauge, de cadre de référence. Je vais revenir sur cette question dans la section suivante.

À l'extérieur du solénoïde $F^{\mu\nu} = 0$. Ceci implique que dans cette région, on peut définir localement $\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial g(x)}{\partial t}$ et $\vec{A}(x) = \vec{\nabla} g(x)$, où $g(x)$ est une fonction lisse et en général multivalente. On peut, dans toute région qui n'encercle pas le solénoïde, faire une transformation de jauge, telle que $\alpha(x) = eg(x)$, pour que $A^\mu(x) = 0$ dans cette région. Je peux donc couvrir l'extérieur du solénoïde de régions où le champ de jauge est nul. Cependant, à cause des conditions aux frontières, l'intégration $\oint A^\mu dx_\mu \neq 0$ autour du solénoïde. La multivalence de $g(x)$ représente cet état de fait. On constate donc que le champ de jauge n'est pas comme un champ ordinaire. Lorsque sa courbure est non nulle, il semble avoir des propriétés locales. En effet, si $F^{\mu\nu} \neq 0$ dans une région $\mathcal{R}$, $\oint_C A^\mu dx_\mu$, où $C \subset \mathcal{R}$, sera non nulle pour des $C$ aussi petits que l'on veut. D'un autre côté, si $F^{\mu\nu} = 0$ dans une région $\mathcal{R}$ alors $A^\mu$ n'exprime que des propriétés non locales, comme celles exhibées dans l'effet Aharonov-Bohm. Du point de vue de l'observabilité, seule l'intégrale du champ de jauge sur un parcours fermé semble observable. Le champ de jauge serait-il un surplus de structure? Sa symétrie un artefact du formalisme? Avant de retourner au cas quantique, je vais passer la prochaine section à discuter de l'électromagnétisme classique, où le champ de jauge est universellement considéré comme un surplus de structure.

## 5.6 Le champ de jauge classique

Dans cette section, je vais débuter le travail d'interprétation de la symétrie de jauge. Pour l'heure, je repousse à la prochaine section la discussion sur le cas quantique. Ici, je me consacre au cas classique. Il n'est pas sans intérêt de revenir sur une théorie qui semble bien comprise. Cela nous permet de raffiner des arguments dont nous sommes à peu près sûrs à l'avance de l'aboutissement. Voyager en terrain connu me permettra de clairement définir certaines notions qui me seront utiles dans les sections qui suivent.

On peut, de façon légitime, se demander quel est l'intérêt de discuter de l'ontologie d'une théorie, comme l'électrodynamique classique, que l'on sait être inadéquate. Même le plus farouche réactionnaire en physique considère, à juste titre, que l'électromagnétisme classique est une théorie empiriquement inadéquate. On pourrait dans le même souffle se demander pourquoi on enseigne encore cette théorie? La réponse est pourtant simple. Malgré ses défaillances, l'électromagnétisme classique a de remarquables capacités prédictives dans un large domaine de phénomènes. Bien sûr, le fait que cette théorie ne tienne pas compte des aspects quantiques devrait nous inciter à la prudence quant à d'éventuelles conclusions ontologiques que l'on pourrait en tirer mais, après tout, ne doit-on pas avoir la même circonspection dans toute analyse philosophique?

Comme je l'ai déjà mentionné, je défendrai dans cette section que la symétrie de jauge en électromagnétisme classique est le résultat d'un surplus de structure. Il y a plus d'une façon d'interpréter ce surplus. Je prendrai donc la peine de discuter de l'action à distance et de l'interaction avec médiateur.[14]

[14]Cet angle d'attaque m'a été suggéré par une conversation avec James Ladyman.

### 5.6.1 Discussion préalable

En physique, toute discussion ontologique passe par l'interprétation de la théorie qui colle aux phénomènes empiriques. Ce travail d'interprétation qui vise à associer une collection d'objets empiriques aux souvent riches structures mathématiques qui composent la théorie, n'est peut-être pas une étape nécessaire au développement de la science, comme le défend van Frassen[15], mais il me paraît essentiel à la compréhension des conséquences philosophiques de la physique. Si la physique peut contribuer aux débats philosophiques, en métaphysique par exemple, elle ne peut le faire qu'à travers une analyse de ses structures formelles et par l'interprétation du contenu de ces mêmes structures[16]. Si le but ultime de la discipline qu'est la physique est de produire des théories toujours plus empiriquement adéquates, son objectif philosophique est de nous donner une image cohérente d'une certaine partie de la réalité. Cette image se compose d'entités et de leurs relations. Malheureusement, il n'y a pas une façon unique de faire surgir cette image du corpus de la physique. Pour choisir entre les différentes possibilités, l'argumentation philosophique demeure notre meilleur outil. Historiquement, certaines valeurs épistémologiques ont joué un rôle important pour juger de la qualité de ces argumentations.

**La cohérence interne** L'interprétation d'une théorie physique doit être exempte de contradiction.

**La cohérence externe** Une interprétation doit être cohérente avec les interprétations des théories physiques connexes à celles étudiées.

**La simplicité** Une interprétation doit faire appel au plus petit nombre d'éléments possibles et comporter le maximum de symétries[17].

[15] L'absence de justification rationnelle pour une telle démarche est défendue dans *The Scientific Image* [vF80].

[16] Il est à noter que dès 1927, dans *L'analyse de la matière* [Rus65], Russell défendait une thèse semblable.

[17] Ceci fait référence à l'analyse de Peter Kosso qui défend que la beauté, l'élégance, en science

**La fécondité** Une interprétation doit être suffisament riche et générale pour espérer qu'elle soit appliquée dans l'avenir à d'autres théories physiques[18].

Ces valeurs sont aussi les balises du travail scientifique. Il n'est pas étonnant que je les soutienne car je défends une façon de philosopher qui, bien que ne reprenant pas les méthodes de la science, tente d'en reprendre l'esprit. Dans ce contexte, la science n'est pas subordonnée à la philosophie, ni l'inverse d'ailleurs. La science et la philosophie sont complémentaires dans la compréhension du monde. Le lecteur est prévenu que mon argumentation ontologique est guidée par ces valeurs.

Parfois, certaines interprétations de théories physiques impliquent des conséquences empiriques nouvelles. Dans ces cas, l'interprétation quitte le domaine de la philosophie et devient une hypothèse scientifique qui devra être rejetée ou acceptée selon les procédures de la branche de la physique concernée. Dans le cadre philosophique que je défends, la philosophie ne peut se substituer à la physique lorsqu'un jugement empirique est en jeu.

Ceci étant dit, à partir de quelles bases consensuelles vais-je débuter mon analyse? L'assise empirique de l'électromagnétisme est que les phénomènes que l'on mesure sont les mouvements de corps électriquement chargés. Ce sont des aimants qui bougent, des forces qui s'exercent sur des corps. De prime abord, ce sont les mouvements de corps macroscopiques qui forment cette assise empirique, mais on peut facilement étendre le domaine des mesures directes aux corps chargés microscopiques et considérer que l'on peut mesurer, avec la même assurance que le mouvement d'un aimant, un courant dans un fil.

Je vais volontairement taire la question de la nature de la charge électrique. Je ne crois pas que cette question puisse être adéquatement traitée dans le cadre de

est réductible au concept de symétrie [Kos99].

[18] Pour retrouver les valeurs que l'on attribue usuellement à la démarche scientifique, il ne manque que l'exactitude empirique.

l'électromagnétisme classique, ni même dans celui de la mécanique quantique non relativiste. C'est en théorie quantique des champs, ou dans d'autres théories plus générales, que l'on peut associer une symétrie fondamentale à la conservation de la densité de courant et donc à la charge électrique. Cette symétrie est l'invariance du champ de matière sous un changement global de phase[19]. Comme dans le cas des fonctions d'onde en mécanique quantique, la phase absolue d'un champ ne semble pas mesurable. Dans le cas de l'électromagnétisme classique, l'interaction n'implique pas un échange de charge électrique. Je me sens donc justifié de mettre cette question de côté, puisque je concentre mon analyse sur le médiateur de l'interaction. Quand on mesure le mouvement de corps chargés, on constate que l'interaction électromagnétique se fait à distance. Il suffit de s'être amusé avec deux aimants pour en être convaincu. Ce qui est moins évident, c'est que l'interaction ne se propage pas instantanément, mais bien avec une vitesse finie. Par exemple dans le vide, la vitesse de transmission d'un effet électrique est de $c$, soit la vitesse de la lumière[20].

Résumons-nous. Nous avons une base empirique qui fait l'unanimité. On mesure des forces exercées sur des corps chargés. Les interactions qui engendrent ces forces se font à distance, mais se propage à une vitesse finie. Les régularités que l'on peut déduire de ces mesures sont formalisées par les équations de Maxwell, l'équation de force et l'équation de conservation de la charge. Tous ces éléments constituent le fondement de la théorie de l'électromagnétisme classique. Je peux maintenant passer au travail philosophique comme tel. Comment interpréter l'interaction électromagnétique? Je propose deux interprétations: soit l'interaction électromagnétique se fait sans entité intermédiaire, soit cette interaction se fait à l'aide d'une entité intermédiaire. Les prochaines sous-sections seront consacrées à l'analyse de ces possibilités.

[19]Voir les chapitres 2 et 3 de [PS95].

[20]Cette vitesse $c$ est celle qui est inclus dans les équations de Maxwell.

### 5.6.2 L'action à distance retardée

Si on adoptait en électromagnétisme classique, l'action à distance retardée comme mode d'interaction, la symétrie de jauge ne serait que l'expression de la liberté de jauge. Voyons cela. J'ai un modèle physique composé d'entités chargées qui interagissent entre elles par action à distance retardée. À cette structure, je peux associer une structure mathématique, une structure de champs, qui me permet de représenter l'action à distance. Historiquement, deux choix de structure ont eu une importance: le champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ et le champ de jauge $A^{\mu}$. Ces structures s'interprètent comme des dispositions, c'est-à-dire qu'elles nous permettent de caractériser l'effet électromagnétique que subirait un corps chargé à tel ou tel point de l'espace-temps. Ces champs ne caractérisent en aucun cas une entité médiatrice, comme un médium. Il y a donc un certain arbitraire dans le choix de ces structures. La seule contrainte est qu'avec leur aide, on puisse être en mesure de reproduire les forces dues aux charges et à leur mouvement. Dans ce contexte, la transformation $A^{\mu} \to A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi$ n'est qu'un changement de représentation, donc un choix de jauge permis par la liberté du même nom. Cette analyse repose bien sûr sur l'hypothèse de départ, à savoir que l'interaction est à distance et retardée. Quelle est la valeur de cette hypothèse?

Dans l'histoire de la physique, le concept d'action à distance a suscité des opinions tranchées. Allant du refus total d'Isaac Newton:

> Tis unconceivable that inanimate brute matter should (without ye mediation of something else wch is not material) operate upon & affect other matter whout mutual contact.... And this is one reason why I desired you would not ascribe innate gravity to me.... [That] is to me so great absurdity that I believe no man who has in philosophical matters any competent faculty of thinking can ever fall into it. Gravity must be caused by an agent acting constantly according to certans laws, but

> whether this agent be material or immaterial is a question I have left to ye consideration of my readers. (Lettre à Richard Bentley, 25 février 1692) [[Tur61], page 253.]

Au scepticisme de James Clerk Maxwell en 1890:

> [I]n many cases the action between bodies at a distance may be accounted for by a series of actions between each successive pair of a series of bodies which occupy intermediate space; and it is asked, by the advocate of mediate action, whether, in those cases which we cannot perceive the intermediate agency, it is not more philosophical to admit the existence of a medium which we cannot at a present perceive, than to assert that a body can act at a place where it is not. [[Cus98], page 193.]

À la petite ouverture de Richard Feynman en 1964:

> [M]any physicists used to say that direct action with nothing between was inconceivable. (How could they find an idea inconceivable when it had already been conceived?) [[FLS64], page 1-9.]

Malgré quelques exceptions, on peut dire que globalement la communauté des physiciens fut et est mal à l'aise avec l'interaction conçue comme une action à distance directe. Pourquoi est-ce ainsi? A-t-on de bonnes raisons de rejeter l'action à distance? Après tout, l'action à distance a au moins l'avantage de ne pas alourdir l'ontologie en posant l'existence d'un agent médiateur entre les corps interagissants. Compte tenu du fait qu'en électromagnétisme on ne peut mesurer que les mouvements des corps chargés, on ne pourra détecter les agents médiateurs qu'indirectement. À moins que des découvertes futures n'élargissent les possibilités de mesures. Sachant cela ne serait-il pas raisonnable pour le moment de se passer de ces intermédiaires?

### a. Le coût métaphysique présumé de l'action à distance

Contrairement à ce que semble affirmer Newton, l'action à distance n'est pas logiquement impossible. L'action retardée est même compatible avec le cadre causal de la relativité restreinte car dans aucun référentiel un effet causal ne peut se transmettre plus rapidement que la vitesse de la lumière. Si l'action à distance implique un coût inacceptable, c'est, à mon avis, parce qu'elle viole un principe de localité auquel de nombreux physiciens et philosophes adhèrent implicitement, au moins en ce qui concerne la physique classique[21]:

**Définition 23 (La localité causale spatiale)** *Pour tout événement $E$ et pour toute distance finie $\delta > 0$, il existe un ensemble complet d'événements causalement pertinents à $E$, tel que pour tout $C$ appartenant à cet ensemble, la position où se produit $C$ est à une distance plus petite que $\delta$ de la position où se produit $E$.*[22]

L'action à distance retardée viole de façon évidente ce principe de localité. Entre deux corps qui interagissent électriquement, il n'y a pas pour tous les $\delta$ finis un ensemble d'événements qui respecte le principe. En effet, si $\delta < d$, où $d$ est la distance qui sépare les corps, il n'y a pas dans cet intervalle un événement causalement pertinent à l'interaction. Ceci est en fait la définition même de l'action à distance. Je ne vois qu'une seule raison pour soutenir que la localité spatiale doive toujours être respectée, c'est la croyance que finalement l'interaction est toujours une affaire nécessitant un contact, que la propagation de l'interaction ne peut se faire que de proche en proche. Si cela est juste, beaucoup d'arguments contre l'action à distance sont en fait circulaires. Ils iraient comme suit. L'action à distance doit être rejetée car elle viole le principe de localité spatiale. Le principe de localité spatiale est valide car la causalité se transmet de proche en proche. Cette dernière affirmation est vraie

[21] La définition qui suit est une variation de celle de Marc Lange dans [Lan02], page 14.

[22] Il y a de nombreux concepts de localité en physique. Le lecteur veillera à ne pas confondre la localité spatiale avec les autres présentées dans cette thèse.

car l'action à distance est impossible.

Alors si j'ai des raisons d'accepter l'action à distance, comme la simplicité ontologique et la compatibilité avec la relativité resteinte, y'a-t-il aussi de solides raisons de la rejeter?

### b. Le problème de la conservation de l'énergie

> Although the introduction of actions at a distance, which propagate with the speed of light, remains thinkable, according to this theory, it appears unnatural; for in such a theory there could be no such thing as a reasonable statement of the principle of conservation of energy. [Albert Einstein, [Ein70], page 61.]

Comme Einstein, je crois qu'il y a une bonne raison de ne pas être satisfait avec l'action à distance retardée[23]. Si l'interaction ne possède pas d'agent médiateur, il n'y a pas de façon naturelle de comprendre la conservation de l'énergie. Soit que cette symétrie est brisée, soit qu'il nous faut reviser de façon très importante ce que l'on entend par l'énergie dans un système mécanique.

Voyons ce qu'impliquerait la conservation de l'énergie dans un système où seules les forces électromagnétiques sont en jeu[24]. Imaginons que dans un volume fini $V$ se trouve un certain nombre de particules (ou de corps) chargées qui interagissent les unes avec les autres à l'aide de forces magnétiques et électriques. Chacune de ces particules subit une force de $\vec{F} = q_i\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}\right)$ (équation 3.21), où $i$ réfère à une énumération des particules. Le travail effectué sur chacune des particules par la

---

[23] L'argumentation présentée dans cette sous-section ne s'applique pas à l'action à distance instantanée. Cette dernière étant incompatible avec la relativité restreinte, elle possède d'autres défauts qui nous la font mettre de coté.

[24] La discussion qui suit s'inspire de la preuve du théorème de Poynting (1884). Voir [Jac75] page 236-240

force électromagnétique est, en utilisant l'équation de force:

$$\vec{F} \cdot d\vec{s}_i = q_i \vec{E} \cdot d\vec{s}_i \tag{5.35}$$

où $d\vec{s}_i$ est un vecteur infinitésimal qui est tangent à la trajectoire de la particule. $\vec{B}$ engendre une force qui est perpendiculaire au mouvement de la charge. Sa contribution au travail est donc nulle. Si on s'intéresse au taux de variation de ce travail, on obtient

$$q_i \vec{E} \cdot \frac{d\vec{s}_i}{dt} = q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i \tag{5.36}$$

où $\vec{v}_i$ est le vecteur vitesse de la particule $i$. Le taux de variation du travail pour l'ensemble des particules est de

$$\sum_i q_i \vec{E} \cdot \vec{v}_i = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3x \tag{5.37}$$

où $\vec{J}$ est la densité de courant en fonction de la position. Cette puissance est donc la variation d'énergie mécanique des particules dans le volume $V$, noté $\frac{dE_m}{dt}$. On peut transformer cette expression en

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3x = \int_V \vec{E} \cdot \frac{c}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3x \tag{5.38}$$

car l'équation de Maxwell (équation 3.22) implique que $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$. Maintenant, si on emploie l'identité vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$, on obtient

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3x = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left( c\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d^3x \tag{5.39}$$

En posant que $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$ et $u = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$, on réécrit l'expression précédente comme

$$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3x = -\int_V \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} \right) d^3x \tag{5.40}$$

Par le théorème de la divergence, cela se transforme en

$$\frac{dE_m}{dt} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3x = -\int_V \frac{\partial u}{\partial t} d^3x - \oint_S \vec{n} \cdot \vec{S}\, da \tag{5.41}$$

où $S$ est la surface du volume $V$, $da$ un élément infinitésimal de cette surface et $\vec{n}$ un vecteur normal à cette surface. Avant d'aller plus loin, notez que $u$ a les unités d'une densité d'énergie et $\vec{S}$ celle de énergie/(temps×surface). On nomme habituellement le vecteur $\vec{S}$ le vecteur de Poynting.

Le terme $\oint_S \vec{n}\cdot\vec{S}\,da$ représente un flot d'énergie qui franchit la surface du volume $V$. Si aucune particule ne franchit cette surface et que le système est isolé, ce terme ne peut qu'être nul. Si je fais l'hypothèse que l'énergie mécanique est conservée, j'arrive à l'équation suivante:

$$\frac{dE_m}{dt} = -\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\, d^3x = 0 \tag{5.42}$$

$$\Rightarrow \quad \int_V (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\, d^3x = \text{constante} \tag{5.43}$$

Cette condition mène à une absurdité, car seul un système statique peut la respecter. Ceci vient justement du fait que l'action n'est pas instantanée. Imaginons que l'une des particules soit en mouvement sous l'action d'une interaction. Ce mouvement modifiera la configuration des fonctions $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans le voisinage de la particule. Avant que le reste du volume puisse ajuster les fonctions $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour compenser cette modification locale, il faudra que l'information parvienne aux autres régions du volume. Cette transmission ne sera pas immédiate, mais se fera dans un temps fini. L'énergie mécanique ne peut donc être une constante que dans un système statique, où les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas modifiés par le mouvement de charges. Si l'énergie mécanique des particules est le seul type d'énergie dans ce système, le petit exercice que nous venons de faire a pour conséquence logique que le principe de conservation de l'énergie est violé. Le principe de la conservation de l'énergie étant le plus fondamental de la physique et cherchant à ce que mon interprétation soit cohérente avec les autres parties de la discipline, il me semble que renoncer à ce principe serait une faiblesse importante de mon interprétation. Cette incohérence n'est pas une raison suffisante pour rejeter l'action à distance, mais je la prends comme un indice m'invitant à analyser la situation avec plus de circonspection. La question qui vient naturellement à l'esprit à cette étape-ci est “ai-je des raisons de croire que l'énergie mécanique, telle que présentée, n'est pas la seule énergie du système?" S'il y en avait une autre, peut-être que malgré tout l'énergie serait conservée.

Ce qu'est l'énergie est loin d'être une évidence. Nous savons cependant de nombreuses choses à son sujet. Nous savons que c'est une certaine fonction des paramètres qui caractérisent l'état d'un système. L'énergie vient en différents types: énergie mécanique, énergie de masse au repos, énergie thermique, électrique, etc. L'énergie est additive. L'énergie totale d'un système est la somme de toutes les formes d'énergie. Une certaine partie de l'énergie totale peut être convertie en d'autres formes (l'exergie), tandis que l'autre partie ne le peut pas (l'anergie)[25]. Le principe de conservation de l'énergie implique que pour un système fermé, l'énergie totale est conservée. Il est aussi présumé qu'en physique classique l'interaction implique l'application de forces, ce qui se traduit par un échange local d'énergie. Ces conceptions me suggèrent d'analyser plus en détails les degrés de liberté nécessaires à la description de l'interaction. Peut-être ai-je négligé un type d'énergie. Revenons au système de particules en interaction. L'énergie mécanique est l'énergie associée aux mouvements des particules. L'état de mouvement des particules est décrit grâce à leurs vecteurs position et vitesse. Cependant, ces paramètres ne semblent pas suffisants pour décrire adéquatement l'interaction entre les particules. L'interaction est une action à distance retardée. Elle se transmet dans un temps fini. Il me faut donc des paramètres pour représenter les degrés de liberté supplémentaires nécessaires à la description de la propagation de l'interaction. Dans les équations de Maxwell, ce sont les composantes du tenseur de force qui représentent ces degrés supplémentaires. Je n'ai pas jusqu'ici attribué d'énergie à ces degrés de liberté. Faisons-le maitenant. Si je reviens à la discussion plus haut, je constate que

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(E_m + \frac{1}{8\pi}\int_V (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\, d^3x\right) = 0 \tag{5.44}$$

[25]Voir [BHSL02], page 683-84.

Si je considère $u$ comme une densité d'énergie ontologiquement distincte de l'énergie mécanique, le principe de conservation d'énergie est à nouveau valide. Comment interpréter ce nouveau terme d'énergie. Je serais mal avisé de l'attribuer à une nouvelle entité qui occuperait l'espace et qui serait représentée par $F^{\mu\nu}$. J'ai justement adopté l'action à distance pour ne pas poser l'existence d'un agent intermédiaire à l'interaction électromagnétique. Je dois trouver autre chose. Observons l'équation 5.44 plus attentivement. Le second terme de la dérivée, que je nommerai $E_{em}$, permet de stocker momentanément de l'énergie entre le moment où une particule "émet" une interaction et le moment où cette interaction parvient à une autre particule où cette énergie est reconvertie en énergie mécanique. La conservation de l'énergie implique cet échange entre $E_m$ et $E_{em}$. Si on attribue l'énergie d'interaction aux particules, seules entités du système, on obtient une curieuse conséquence. À chaque moment, $E_{em}$ ne dépend pas de la configuration du système à ce moment-là, mais bien de sa configuration passée. En effet, si l'on désire réécrire cette énergie en fonction des positions et vitesses des particules, il nous faudrait connaître leur position et vitesse à un moment antérieur.[26] Ceci est une conséquence directe de la vitesse de transmission finie de l'interaction électromagnétique. Par conséquent, si les particules sont les seules entités du système et que l'on veut que l'énergie soit conservée, il nous faut attribuer aux particules deux sortes d'énergie: l'une qui dépend de leur mouvement actuel et une autre qui dépend de leur position et vitesse passées. Cette dernière conclusion pourrait nous mettre en porte à faux. Généralement, l'électromagnétisme est considéré comme le paradigme des théories physiques classiques. Ce statut implique que cette théorie est déterministe. Rappelons que la définition traditionnelle du déterminisme telle que formulée par Laplace est

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la

[26] Voir [LL89], chapitre 8.

> nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle est assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'univers et ceux du plus léger atome: rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux. (p. vi-vii, [Lap12])

Pour connaître l'entière évolution d'un système physique, il nous faut connaître ses conditions initiales, c'est-à-dire la situation des éléments du système (position et vitesse), et les lois qui régissent ce système, c'est-à-dire les équations qui quantifient les forces. Dans notre cas, ce serait insuffisant car, la vitesse de propagation de l'interaction étant finie, il nous faut de l'information sur la configuration passée du système.[27]

Je me résume. Si l'on adopte l'action à distance retardée comme mode d'interaction, on a une apparente violation du principe de conservation de l'énergie. La solution à ce problème est d'attribuer aux particules un type d'énergie supplémentaire qui dépend des positions et vitesses passées de ces particules. Cet artifice rend la théorie de l'électromagnétisme incompatible avec le déterminisme au sens de Laplace. Tout cela commence à devenir gênant. L'action à distance n'est pas impossible, mais son adoption demande au mieux de reviser une notion fondamentale de la mécanique classique, soit l'axiome du déterminisme.

Bien sûr, cet argument ne convainc pas tout le monde. Plusieurs physiciens, comme José Sánchez-Ron [SR82], pensent que l'apparent problème concernant les degrés de liberté tenant compte du passé n'est en fait qu'un artefact dû à notre interprétation de la physique en trois dimensions. Selon lui, en travaillant directement dans l'espace de Minkowski, on peut définir de façon naturelle l'énergie et

[27] Même en physique classique le déterminisme n'est plus le dogme qu'il a été. Le développement du chaos déterministe en mathématique demande à ce que la définition du déterminisme soit réexaminée. Il n'est cepandant pas clair dans quelle mesure les conclusions de la théorie du chaos s'appliquent aux systèmes physiques.

l'impulsion électromagnétique. Se demander où est l'énergie quand une interaction voyage d'une particule à l'autre n'aurait pas de sens dans ce contexte. Évidemment, ce qui semble naturel pour l'un ne l'est pas nécessairement pour un autre.

Avant Sánchez-Ron, Wheeler et Feynman [WF49] avaient proposé une théorie de l'électromagnétisme où l'interaction se fait par action à distance retardée. Dans le cas d'un système à plusieurs particules, ils ont montré que leur théorie reproduit le contenu empirique des équations de Maxwell. Par contre dans un système où une seule particule est en mouvement, les choses se compliquent. Dans les théories avec médiateur, une particule en mouvement émet un rayonnement et ralentit par le fait même. Dans une théorie d'action à distance, ce genre d'auto-interaction n'est pas possible. Une question se pose: dans cette théorie, la particule ralentit-elle? En principe non. Cependant, pour constater que la particule ralentit, il nous faut utiliser un instrument de mesure, donc dans ce cas, nous ne sommes plus dans un modèle où il n'y a qu'une particule. L'instrument doit être tenu en compte. Ce petit exemple a des conséquences surprenantes. Si on pousse le raisonnement, comme le fait Peter Havas [Hav48], pour reproduire dans une théorie avec action à distance retardée les conséquences empiriques du principe de la conservation de l'énergie des théories avec médiateur, il faut que toutes les interactions soient absorbées. La théorie électromagnétique doit donc inclure toutes les particules de l'univers. Toute utilisation locale de la théorie ne sera qu'une approximation de la théorie cohérente. Cet état de fait n'est pas fatal à la théorie, mais cela pourrait nous inciter à voir s'il n'y a pas d'autres options disponibles.

### c. Le statut des composantes de $F^{\mu\nu}$

Les composantes de $F^{\mu\nu}$ nous permettent de calculer la force que subirait une charge test si on la plaçait à tel ou tel endroit à un moment donné. Elles représentent les degrés de liberté supplémentaires nécessaires à la description de l'interaction.

Dans le contexte de l'action à distance, elles ne sont pas associées à d'autres entités que les particules. Elles restent de simples fonctions. Sachant cela, aucun argument d'ordre ontologique ne nous permet de choisir entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ou $A^{\mu}$. Seule l'utilité peut nous suggérer, selon le contexte, quelle représentation choisir. Cette absence de correspondance entre ces fonctions et la réalité nous permet de circonscrire certaines difficultés que je n'ai pas mentionnées jusqu'ici. L'équation 3.22 $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^{\nu}$ implique que $|\vec{E}| = \infty$ en tout point où se trouve une particule ponctuelle. Ce résultat n'est pas problématique car cette valeur du champ électrique ne réfère pas à une entité qui aurait une valeur infinie. En effet l'interaction à distance n'a de sens que pour une distance finie justement. Bien sûr, si je pose que $F^{\mu\nu}$ réfère à une entité réelle, il me faudra revenir sur ces suppositions.

### 5.6.3 Réalité du champ électromagnétique

Passons de l'autre côté du miroir et faisons l'hypothèse que l'interaction électromagnétique se fait par l'intermédiaire d'un agent réel. Je nomme cet agent le champ électromagnétique. Cette terminologie sera justifiée plus loin. Je postule donc que les charges créent quelque chose qui se propage à la vitesse $c$ dans le vide, qui porte de l'énergie et de l'impulsion et qui interagit avec les charges pour engendrer les effets électromagnétiques que nous mesurons. Quelles raisons ai-je de postuler l'existence de cette entité? La principale, mais non la seule, serait d'ainsi recouvrer un principe de localité fort.

**Définition 24 (Localité causale spatio-temporelle)** *Pour tout événement $E$, pour tout intervalle temporel fini $\tau > 0$ et pour toute distance finie $\delta > 0$, il y a un ensemble complet d'événements causalement significatifs à $E$ tel que pour tout événement $C$ de cet ensemble, la position où $C$ se produit ne se trouve pas à une distance supérieure à $\delta$ de la position où se produit $E$ et le moment où $C$ se produit n'est pas séparé par un intervalle de temps supérieur à $\tau$ du moment où se produit*

$E$.[28]

Le désir de poser un mécanisme d'interaction compatible avec un principe de causalité semblable est, selon moi, la principale motivation pour poser l'existence d'un agent intermédiaire. Cette motivation explique les passages suivants provenants de manuels connus:

> Le changement de position de l'une des particules ne se fait sentir sur les autres particules qu'au bout d'un certain temps. Cela signifie que le champ se présente ici comme un être physique. [...] L'interaction ne peut se produire à tout instant que de proche en proche, d'un point au point voisin de l'espace (action de proche en proche). (Landau & Lifchitz, page 62, [LL89].)

> What we mean here by a "real" field is this: a real field is a mathematical function we use for avoiding the idea of action at a distance. (Feynman, page 15-7, [FLS64].)

De même John David Jackson, dans [Jac75], soulève deux particularités de cet agent. Premièrement, il nous permet de découpler conceptuellement les charges-sources de la charge-test qui subit la force électromagnétique. Si deux champs électromagnétiques sont les mêmes en un point donné de l'espace, même s'ils proviennent de deux sources différentes, la force exercée sur une charge qui se trouve à ce point sera la même. Ce fait porte Jackson a considérer que le champ a une signification indépendante de sa source. Deuxièment, cet agent peut exister dans des régions où il n'y a pas de source. Jackson suppose cette existence car le champ a une énergie[29], une impulsion et même un moment cinétique. Trois quantités qui

[28] Variation sur la définition de Lange ([Lan02], page 15).

[29] On peut en effet lui attribuer l'énergie $E_{em}$ que nous avons calculée dans la sous-section précédente.

confèrent au champ, selon lui, une existence indépendante des charges.

Ces positions se justifient bien par l'adoption d'un principe de localité causale spatio-temporelle. Ce principe implique une interaction de proche en proche (par contact). Il est incompatible avec l'action à distance et, s'il est concrétisé par l'existence d'un agent médiateur, découple l'interaction des charges qui l'ont engendré. Dans cette sous-section, je vais donc me pencher plus avant sur l'agent médiateur qu'est le champ électromagnétique.

### a. Nature du champ électromagnétique

Jusqu'ici, j'ai nommé l'agent médiateur de l'interaction le champ électromagnétique. L'usage du mot "champ" suggère que cet agent est une entité étendue. Ceci m'est suggéré par le fait que dans la zone autour d'une charge, une charge-test subit une force quelle que soit sa position ou le moment. Il n'y a pas d'échelle discrète à l'interaction. Si l'agent médiateur consistait en particules émises à une fréquence finie par la source, la continuité des équations de Maxwell serait incongrue. Bien que nous sachions qu'à petite échelle l'électrodynamique doit être remplacée par l'électrodynamique quantique, si l'on se restreint à la physique classique[30], l'agent médiateur ne peut être que continu. Je suis donc justifié de l'appeler un champ.

Ceci étant dit, une question se pose immédiatement après avoir postulé la continuité du champ: "Y'a-t-il un ou plusieurs champs?". J'affirme que les charges produisent quelque chose qui par la suite interagit avec les autres charges, mais est-ce que chaque charge produit un champ ou contribuent-elles toutes à la même entité qui serait le champ électromagnétique.

Au premier abord, les deux interprétations sont possibles car la linéarité des équations de Maxwell est compatible avec les deux hypothèses. Ne pouvant exclure

[30] Si l'on présume que l'électromagnétisme est une théorie vraie.

l'une ou l'autre des hypothèses par l'analyse du formalisme, je me dois d'examiner leurs avantages respectifs sur une base philosophique plutôt que purement physique. La valeur épistémologique de simplicité, comprise dans ce cas comme une économie ontologique, devrait me faire pencher vers l'existence d'un seul champ. Après tout, les fonctions $A^{\mu}$ ou $F^{\mu\nu}$, qui me servent à déduire les effets des champs, ne me permettent pas de les distinguer. Seule la superposition des contributions électromagnétiques des différents champs est significative dans une interaction. Alors pourquoi s'embarrasser? Il y a deux avantages apparents au choix d'une multitude de champs. Je vais montrer que ces avantages ne sont pas aussi intéressants qu'ils ne le paraissent.

Premièrement, si nous avions des raisons de croire qu'il existe des interactions électromagnétiques dans des régions où il n'y a pas de charges, l'explication la plus simple serait d'attribuer ces effets aux interactions entre champs électromagnétiques. Ce genre d'interactions, qui sont possibles dans le contexte de l'électrodynamique quantique, ne le sont pas en théorie classique. En physique classique, pour qu'il y ait interaction, il faut qu'il y ait force et donc dans notre cas, il faut qu'il y ait charge. Le champ électromagnétique n'étant pas chargé, il n'est pas susceptible d'interagir avec un autre champ ou à l'auto-interaction. Ce point en faveur de plusieurs champs ne tient pas en physique classique.

Deuxièmement, l'hypothèse des multiples champs nous permet d'exclure facilement l'auto-interaction des charges. Pour ce faire, il me suffit d'exclure qu'une particule puisse interagir avec son propre champ. Il est à noter qu'une telle théorie des champs me rapproche d'une théorie de l'action à distance. Wheeler et Feynman [WF49] considéraient comme équivalentes les théories de l'action à distance et une théorie des champs de ce type. Mais pourquoi exclure l'interaction avec son propre champ? Tout simplement pour exclure les infinités dans la théorie. Par exemple, si le champ engendré par une particule ponctuelle est inversement proportionnel à la distance, le champ qu'exerce une telle particule sur elle-même est infini. Ce genre de difficultés serait automatiquement exclu si on faisait l'hypothèse qu'une particule ne peut interagir avec son propre champ. Une telle position soulève des difficultés. Elle se concilie mal avec la symétrie de l'inversion du temps. Je m'explique. Je sais qu'une particule qui accélère transfert de l'énergie au champ électromagnétique, qu'il y en ait un ou plusieurs. On peut se convaincre facilement de ce fait en calculant, grâce au théorème de Poynting, le flux d'énergie qui traverse un volume qui entoure la charge. Si la particule perd de l'énergie, par conservation de cette dernière, il y a donc une force de freinage qui s'exerce sur la charge. À quoi peut être due cette force, sinon à une interaction avec son propre champ?[31] Une telle conclusion semble aller de soi si on analyse les implications de la symétrie sous l'inversion du temps ($t \to t' = -t$). Sous une telle inversion, les positions restent les mêmes, les vitesses changent de signe et les forces demeurent inchangées. Donc, après une telle transformation, l'état d'un système change, mais la dynamique, les forces, ne changent pas.[32] Une particule qui décélère en émettant une radiation électromagnétique, sous inversion du temps devient une particule qui accélère sous l'influence d'un champ externe. Ces deux situations sont donc symétriques quant à la théorie de l'électromagnétisme classique. À moins d'exclure cette symétrie, on peut difficilement prétendre qu'une particule ne peut pas, en principe, interagir avec son propre champ.

Les deux avantages apparents de l'hypothèse des champs multiples ne semblent pas tenir la route. À défaut de nouveaux avantages, je poserai comme hypothèse de base que les particules chargées interagissent avec <u>un</u> seul champ électromagnétique. L'image, que nous avons jusqu'ici, est celle de quelque chose qui est défini en tous points de l'espace-temps et qui diverge en chaque point où il y a une charge ponctuelle.

---

[31] On pourrait toujours affirmer que cette force est causée par le champ engendré par l'appareil de mesure mais dans ce cas, on revient en pratique à une théorie équivalente à l'action à distance.

[32] Voir Jackson [Jac75], page 249.

### b. La représentation du champ électromagnétique

Ayant adopté l'hypothèse de l'unicité du champ électromagnétique, je vais maintenant tenter d'élucider sa structure. Dans le formalisme de l'électrodynamique classique, deux candidats sont naturellement disponibles pour représenter ce champ: les composantes de $F^{\mu\nu}$ (les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$) et le champ de jauge $A^{\mu}$. Est-ce que l'une de ces structures mathématiques est plus à même de représenter le champ électromagnétique, intermédiaire de l'interaction du même nom?

Pour le moment, je vais me concentrer sur le champ de jauge. La valeur absolue des composantes du champ de jauge ne semble pas être observable, car toutes les interactions impliquées par les équations de Maxwell ne dépendent que de la variation de ces composantes. Ce qui est empiriquement accessible ce sont les différences de champ, pas le champ lui-même. Cette impossibilité de mesure faisait dire à Eugene Wigner que ce champ était une fiction ([Wig67], page 22.). Peut-on conclure à partir de cette seule observation? Je ne crois pas. Cette incapacité de mesure est peut-être temporaire. Bien que l'on doive être doublement circonspect à propos d'une quantité physique que l'on ne peut mesurer, on ne peut la considérer comme une fiction pour cette seule raison. Prenons comme exemple la température; avant la découverte du zéro absolu qui fixe un point de départ à l'échelle, les mesures de température étaient toujours relatives. Ceci n'était pas un problème puisque en pratique ce sont les écarts de température qui ont des conséquences physiques dans les applications. Dans ce contexte, aurions-nous dû considérer la température comme une fiction? Je ne crois pas. Si l'on doit rejeter le champ de jauge, il faut amener d'autres éléments que l'impossibilité de mesure.

Autre observation concernant le champ de jauge: les composantes $\phi$ et $\vec{A}$ du champ ne sont pas invariantes sous une transformation de référentiel. Les valeurs de ces composantes ne réfèrent donc pas à une réalité immuable comme la charge. Elles se mélangent sous l'action d'une transformation. On se doit donc de toujours les considérer ensembles. C'est le statut du champ $A^\mu$ qui est discuté ici, pas celui des potentiels particuliers. Il est à noter que pour les composantes de $F^{\mu\nu}$, la situation est la même. Il y a cependant un autre facteur de variabilité qui a davantage de conséquences. Je rappelle que dans cette théorie, il y a ambiguïté quant à la description d'une situation à l'aide du champ de jauge. Tous les champs qui ne varient que d'une transformation de jauge du second type (équation 5.1) sont équivalents. De cette symétrie découle que toute quantité observable doit être invariante de jauge. Ceci n'est pas sans conséquences. Si c'est le champ $A^\mu$ qui représente véritablement le champ électromagnétique, la théorie devient indéterministe. En effet, pour un système physique qui est dans un certain état, état qui implique un certain $A^\mu(x)$, on ne peut prédire la configuration future du champ de jauge.[33] En fait, on obtient une infinité de solutions qui ne diffèrent que d'une transformation de jauge près. On ne peut donc déterminer l'état futur du champ, mais bien une classe de champs possibles. Fait à noter, les quantités mesurables évoluent de façon déterministe. Face à cette conclusion pour le moins déplaisante, ne devrais-je pas plutôt me rabattre sur une description qui préserve le déterminisme de la théorie, c'est-à-dire celle utilisant le tenseur de force pour décrire le champ électromagnétique? Cette théorie étant le paradigme d'une théorie classique, ce choix est préférable.

Revenons tout de même à nouveau sur le champ de jauge. Ce dernier exhibe un surplus de structure qui est simplement causé par la symétrie. En effet, par le théorème de Stokes, je sais que

$$\oint_C A^\mu dx_\mu = \int_\Sigma F^{\mu\nu} d\sigma_{\mu\nu} \tag{5.45}$$

où $\Sigma$ est l'hypersurface délimitée par la courbe $C$. Si la zone où $F^{\mu\nu} \neq 0$ est strictement incluse dans $C$, je pourrais en conclure que le champ de jauge le long de $C$ possède de l'information concernant une zone $\Sigma$ à distance. Cette propriété du champ de jauge, qui est essentielle à l'effet Aharonov-Bohm, me laisse supposer que le champ de jauge possède des propriétés non locales. Je me résume:

[33]On peut trouver une preuve détaillée de ce fait dans l'article de Gordon Belot [Bel98].

- Propriétés locales de $A^\mu$: Lorsque $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \neq 0$, le champ de jauge peut être tenu responsable d'interaction locale, tel que décrit par les équations de Maxwell.
- Propriétés globales de $A^\mu$: L'intégrale sur la courbe $\oint A^\mu dx_\mu$, qui est une quantité invariante de jauge, décrit des caractéristiques du champ qui sont à distance de la courbe. Ces quantités ne sont pas mesurables dans le cadre de la théorie de l'électromagnétisme classique.

Étant donné que nous présumons que la théorie de l'électromagnétisme classique est locale, c'est-à-dire qu'à un point donné, connaître les propriétés du voisinage immédiat est suffisant pour prévoir ce qui se passera à ce point, alors je dois conclure que le champ possède des propriétés non pertinentes.

À partir des deux points précédents, j'en arrive à l'image suivante. J'ai un modèle physique $P$ où les charges interagissent entre elles par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique. La structure mathématique $M$ isomorphe à ce champ physique est le tenseur de force $F^{\mu\nu}$. Si je décris ce champ à l'aide d'un champ de jauge $A^\mu$ (structure $M'$), j'ai un surplus de structure. La symétrie de jauge est un artefact de ce surplus. Elle correspond à un automorphisme de $M'$ qui se réduit à l'identité pour la sous-structure $M$.

### c. Problème de localité

Je fais ici une courte digression pour discuter d'un vieux problème de l'électromagnétisme qui a ressurgit récemment dans le débat philosophique. La discussion précédente repose sur la conviction que l'électromagnétisme classique est une théorie déterministe et locale. Le philosophe Mathias Frisch [Fri02] conteste ce constat. Son argumentation se base sur un article de P.A.M. Dirac [Dir38] publié dans les années 30. Voyons l'argument de Dirac de plus près, car je crois que Frisch pousse son interprétation trop loin.

Au début de l'article, Dirac exprime sa conviction que les particules élémentaires sont ponctuelles. Sa position s'appuie sur un rejet des travaux de Lorentz portant sur l'électromagnétisme des particules de tailles finies. Si les particules sont ponctuelles, il y aura des divergences dans le champ électromagnétique aux endroits où se trouvent les particules. Si, contrairement à l'équation de force traditionnelle $F = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$, on inclut l'interaction avec son propre champ, la force exercée sur une particule devient infinie. On doit pourtant le faire, si on veut modéliser adéquatement la force de freinage due à la radiation. Pour remédier à cette difficulté, Dirac propose une procédure de renormalisation de la masse des particules élémentaires.[34] Après application de cette procédure, il obtient l'équation de force suivante:

$$F = m\ddot{z}^{\alpha} = F^{\alpha}_{ext} + \frac{2q^2}{3c^3}\left(\dddot{z}^{\alpha} - \ddot{z}_{\beta}\ddot{z}^{\beta}\dot{z}^{\alpha}\right) \tag{5.46}$$

où $z^{\alpha}$ est le quadrivecteur position et $F_{ext}$ contient les termes de l'équation habituelle de force. Si on étudie les solutions de cette équation, comme le fait dans son mémoire Ludde Edgren [Edg00], on constate que le terme $2q^2\dddot{z}^{\alpha}/3$ permet une violation de la localité causale, car une accélération peut débuter avant que la force ne se fasse sentir. La durée typique de cette préaccélération est très courte pour un électron, typiquement $10^{-24}$secondes. Cette non localité est donc impossible à observer.

Le travail de Dirac tendrait à prouver que l'électrodynamique classique, si elle est bien comprise, est non locale. Cette conclusion n'est peut-être pas aussi solide qu'elle n'y paraît. Si le temps était discret, avec un pas très court, le terme de préaccélération pourrait ne pas être présent. Cette hypothèse n'est pas farfelue, les recherches récentes en géométrie non commutative posent souvent cette condition. Autre possibilité, les particules ne sont pas ponctuelles dans la nature. Les charges sont étendues, que ce soit sous forme de corde, de surface ou de corps. Par exemple, en 1962, Dirac a proposé le modèle d'une bulle chargée, c'est-à-dire

[34] Notez qu'il s'agit bien de renormalisation dans un contexte classique.

qu'un électron serait une surface conductrice chargée, maintenue par une certaine tension. Ce modèle n'est pas complètement satisfaisant, mais n'implique pas de préaccélération. D'autres modèles étendus ont aujourd'hui la faveur des chercheurs. Pour des exemples, voir le mémoire de Edgren. Autre possibilité, on peut ajouter à l'électromagnétisme un champ scalaire supplémentaire. Ce dernier couplé aux particules élimine la préaccélération ([Edg00], chapitre 6.).

Toutes ces hypothèses me laissent croire que l'électromagnétisme est peut-être une théorie locale après tout. Le travail de Dirac n'est pas un coup fatal à l'argument.

## 5.7 Le champ de jauge en mécanique quantique

Dans leur article classique [AB59], Aharonov et Bohm ont posé le problème du champ de jauge de façon claire. Si le champ de jauge n'est qu'un surplus de structure alors l'effet Aharonov-Bohm est le produit d'une action à distance, soit des charges, soit du champ électromagnétique présent dans le solénoïde. Si on ne retient pas l'action à distance à cause des difficultés soulevées dans la section précédente, le seul champ non nul dans la zone d'interaction est le champ de jauge. On pourrait donc naturellement attribuer l'effet Aharonov-Bohm à l'action du champ de jauge sur les électrons. Cette hypothèse amène une difficulté. Le système étant invariant sous une transformation locale de jauge, il y a ambiguïté de description. Parmi tous les champs de jauge qui ne diffèrent que d'une transformation, lequel est le bon? Si tous sont également valables, à quoi réfère exactement un champ de jauge particulier? C'est à ces questions que cette section s'attaque.

### 5.7.1 La question de l'interprétation

Discuter du statut d'entités dans un modèle physique demande d'interpréter le modèle ou la théorie. Ce travail, qui fut au coeur de la recherche en physique classique, est-il toujours justifié dans le contexte quantique? Certains physiciens, comme Christopher Fuchs et Asher Peres [FP00], affirment que la seule bonne interprétation de la mécanique quantique est justement de ne pas avoir d'interprétation ou plutôt, pour être précis, d'adhérer à l'interprétation de Copenhague stricte. Il est vrai qu'il y a sur le marché de nombreuses interprétations farfelues qui, parfois, de façon maladroite, tentent de nier la réalité des phénomènes quantiques. Si je compatis avec Fuchs et Peres pour affirmer que souvent ces interprétations n'ont aucune valeur physique ou philosophique, je ne vois pas comment prôner l'absence d'interprétation pourrait être souhaitable.

Nier le rôle de l'interprétation en physique revient à considérer la théorie comme un simple formalisme. Même les adeptes de l'interprétation de Copenhague stricte ne devraient pas être aussi radicaux. S'ils affirment avec force que la mécanique quantique n'est pas une description de la réalité extérieure, mais bien celle de blocs indissociables sujet-objet, ils ne défendent en rien que la théorie de la mécanique quantique est une théorie mathématique. Pour avoir une bonne compréhension de la théorie de la mécanique quantique, il faut plus que d'être capable d'engendrer des théorèmes à partir d'un formalisme. Il faut être capable de cerner les domaines où telle ou telle portion de la théorie s'applique. Ceci demande une interprétation de cette dernière, interprétation qui varie souvent d'un physicien à l'autre mais qu'il est nécessaire d'avoir. Sans interprétation, il n'y a pas d'arrimage entre nouveaux phénomènes et parties inexploitées de la théorie.

J'irais plus loin, même des interprétations en apparence ridicules ou fausses ont possiblement un rôle à jouer dans le développement de la théorie. Assez souvent, une interprétation initiale est abandonnée lorsque la théorie est achevée, mais cela n'enlève rien à la pertinence épistémologique de son utilisation. Comme exemples d'interprétations suspectes mais qui furent utiles, je place sans hésitation le modèle de l'éther électromagnétique de Maxwell ([Cus98], chapitre 13) ou encore la mer d'électrons d'énergie négative de Dirac ([Dir58], page 274). Ces interprétations de la théorie ont permis aux chercheurs qui les ont élaborées de dépasser le cadre traditionnel de ces théories et d'en développer de nouvelles.[35] Bien sûr, la très grande majorité des interprétations n'ont aucun avenir et nous n'avons pas de moyens totalement efficaces pour identifier celles qui en ont. J'adopte tout même une règle de base: les interprétations qui restent proches des théories déjà acceptées sont les plus susceptibles de nous être utiles. Cette maxime me paraît justifiée car historiquement, le cadre théorique de la physique se développe par petits pas, et non par puissants bonds.

### 5.7.2 Le modèle des boucles

Compte tenu des difficultés qu'il y a à clairement définir le champ de jauge à cause justement de la variabilité de jauge, il est tentant de reformuler la théorie de l'électromagnétisme en fonction de quantités invariantes de jauge. Ainsi, on espère pouvoir circonscrire un modèle sans surplus de structure. Une telle formulation est possible. Cette sous-section sera concacrée à l'un de ces modèles: le modèle des boucles.

#### a. Une description minimale de l'électromagnétisme

Comme je l'ai montré plus haut, l'effet Aharonov-Bohm dépend de la valeur du facteur $e^{-\frac{ie}{c\hbar}\Phi}$, où $\Phi$ est le flux magnétique dans le solénoïde. On remarque que si

[35] Pour plus de détails sur l'importance épistémologique des interprétations, voir le texte non publié de Karl Svozil [Svo02].

deux expériences $a$ et $b$ sur le même montage ne diffèrent que par la valeur de leur flux magnétique

$$\Phi_a - \Phi_b = entier \times \left(\frac{2\pi\hbar c}{e}\right) \tag{5.47}$$

alors nous obtiendrons le même motif de diffraction. Généralisons ce constat:

**Théorème 1** *Si 5.47 est satisfaite, alors aucune expérience à l'extérieur du solénoïde ne permet de différencier la situation a de la situation b.*[36]

Je vais prouver ce théorème en montrant comment on peut passer de la situation $a$ à la situation $b$ par une transformation locale de jauge. Je recherche un $S = e^{-i\alpha}$ tel que

$$S = S_{ab} = (S_{ba})^{-1} \tag{5.48}$$

$$\psi_b = S^{-1}\psi_a \text{ ou } \psi_b = e^{i\alpha}\psi_a \tag{5.49}$$

$$(A_\mu)_b = (A_\mu)_a - \frac{i\hbar c}{e} S\partial_\mu S^{-1} \Rightarrow (A_\mu)_b = (A_\mu)_a + \frac{\hbar c}{e}\partial_\mu\alpha \tag{5.50}$$

Pour que cette transformation de jauge soit bien définie, il faut que $S$ soit une fonction elle-même bien définie, en particulier, il faut qu'elle soit univalente, mais $\alpha$ n'a pas besoin de l'être. Sachant que $(A_\mu)_b - (A_\mu)_a$ est de courbure nulle à l'extérieur du solénoïde, on peut toujours trouver un $\alpha$ satisfaisant aux conditions, cependant cette fonction augmente d'une magnitude à chaque tour que l'on fait autour du solénoïde;

$$\Delta\alpha = \frac{e}{\hbar c}\oint[(A_\mu)_a - (A_\mu)_b]dx^\mu = \frac{e}{\hbar c}(\Phi_a - \Phi_b) \tag{5.51}$$

Si 5.47 est satisfaite alors $\Delta\alpha = 2\pi \times entier$ et $S$ est univalente. On peut donc transformer la situation $a$ en $b$ et inversement à l'extérieur du solénoïde. Cette preuve peut se généraliser à tout système de particules à l'extérieur du solénoïde en autant que leur charge soit un multiple de $e$.

On peut conclure de ce théorème que si on exclut l'action à distance:

[36] Source du théorème, Yang et Wu [WY75].

1. $F^{\mu\nu}$ n'est pas suffisant pour décrire l'électromagnétisme. En effet, plusieurs situations physiques distinctes correspondent au même $F^{\mu\nu} = 0$ à l'extérieur du solénoïde, d'où l'effet Aharonov-Bohm.

2. La phase $\frac{e}{\hbar c} \oint A^\mu dx_\mu$ surdécrit l'électromagnétisme, car des phases différentes peuvent décrire la même situation physique à l'extérieur du solénoïde.

Ce qui décrit adéquatement l'électromagnétisme, avec juste ce qu'il faut d'information, ce sont les facteurs de phase:

$$\text{Boucle de Wilson: } \Phi(C) = e^{\frac{ie}{\hbar c} \oint_C A^\mu dx_\mu} \tag{5.52}$$

Cette conclusion s'applique aux cas d'électromagnétisme dans une topologie non triviale. Ils s'appliquent d'autant mieux dans les cas plus simples.

La nom donné à ces facteurs n'est pas standard. Le philosophe Richard Healey les appelle facteurs de phase de Dirac [Hea01]. Dans un article de 1974, C.N Yang les nomme tout simplement facteurs de phase [Yan74]. Ces temps-ci, dans la communauté des physiciens, le terme de boucle de Wilson semble de plus en plus prendre le dessus. Ce nom fait référence à Kenneth Wilson qui a utilisé ces facteurs pour décrire la chromodynamique quantique, une théorie de jauge non abélienne [Wil74].

### b. Le modèle des boucles

Les boucles de Wilson sont invariantes de jauge. Si ces entités sont choisies comme moyens de représentation, il n'y a plus d'ambiguïté de description. L'intérêt d'utiliser ces facteurs est que toute théorie de jauge peut être représentée de façon unique par un ensemble de facteurs de phase [Mak02].

L'intégrale de la connexion sur une boucle fermée est ce que les mathématiciens appellent une holonomie. Cette intégration correspond dans notre cas au transport parallèle de la phase sur une boucle fermée de l'espace-temps. Ce concept d'holonomie peut être défini intrinsèquement sans faire appel à la notion de connexion. Malgré l'aspect purement formel de ce concept, on peut en faire quelque chose d'intéressant en physique. On peut définir des classes de boucles équivalentes quant à leur facteur de phase. De plus, ces classes sont structurées en un groupe qui est un sous-groupe de U(1). Ce groupe est l'espace dans lequel on développe la théorie de jauge. Même si ce groupe n'est pas un groupe de Lie, on peut définir un générateur infinitésimal de ce dernier. Cet opérateur est un opérateur différentiel qui nous permet de définir une dérivée dans l'espace des boucles [GP96]. Nous avons donc tous les éléments pour développer la théorie de jauge.

Ceci étant dit, quelles sont les conséquences philosophiques d'une telle formulation. À ma connaissance, seul le philosophe Richard Healey [Hea01] a défendu ce modèle, car il correspond à sa conception de la mécanique quantique. Voyons cela de plus près. Admettons que l'on prenne au sérieux ce formalisme, c'est-à-dire que l'on considère que ce modèle est isomorphe au modèle physique de l'électromagnétisme. Une conséquence immédiate en découle. Si la structure des boucles reflète bien la structure des interactions électromagnétiques, nous avons affaire à une théorie non séparable par rapport à l'espace-temps, c'est-à-dire à une théorie non locale.[37] Que la mécanique quantique soit non locale, cela ne surprendra personne. Ce qui peut être surprenant, c'est que l'interaction électromagnétique des électrons avec un champ non quantifié soit non locale aussi et de façon non séparable, ce qui n'est pas la même chose que la non localité de l'action à distance. On peut se convaincre de la

[37] Je rappelle les définitions de Healey sur la séparabilité:

> [A] physical process will be said to be *spatio-temporally separable in spacetime $R$* if and only if it is supervenient upon an assignement of qualitative intrinsic physical properties at space points in $R$.
>
> A process which occupies a spacetime region $R$ is *separable* just in case it is saptio-temporally separable in $R$; otherwise it is *nonseparable*.

non localité de cette formulation aisément. Si toute la théorie de l'électromagnétisme est reformulée en termes de nombres complexes associés à des boucles finies, aucune propriété locale n'est pertinente. Au mieux, on approchera ces supposées propriétés locales avec des boucles de plus en plus petites, mais c'est le maximum que l'on pourra faire. Un facteur de phase n'est pas une propriété des points de la boucle. Il est une caractéristique de la boucle entière. Je n'irai pas plus loin dans l'élaboration de ce modèle.

Au sein de ce modèle, la symétrie de jauge est donc purement formelle. Elle est un artefact de l'assignation de propriétés locales, compatibles avec les facteurs de phase, aux points de l'espace-temps. Cette assignation n'étant pas unique, on peut choisir différents $A^{\mu}(x)$, nous sommes donc en présence d'un cas de surplus de structure, surplus qui est la cause de la symétrie. Par ailleurs, la formulation de l'électromagnétisme en termes de facteurs de phase semble un candidat intéressant, car elle est conforme aux données empiriques et ne fait pas appel à des quantités inobservables, c'est-à-dire dépendantes de jauge. De plus, ce qui ne gâte rien, elle est déterministe.

### 5.7.3 Le champ de jauge une quantité intrinsèque?

Tous les points que j'ai présentés jusqu'ici vont dans le même sens. La symétrie de jauge est un artefact du formalisme, la conséquence d'un surplus de structure et ce, pour la bonne raison que le champ de jauge $A^{\mu}(x)$ est une entité fictive, qui ne représente pas un champ physique du modèle, que ce soit classique ou quantique. Ce n'est cependant pas encore la fin de l'histoire. Comme le suggère le philosophe Stephen Leeds [Lee99], il y a une façon standard dans la documentation de la physique de concevoir le champ de jauge comme une quantité intrinsèque, c'est-à-dire dans ce contexte, de façon indépendante de toute coordination. Il faut le voir comme une propriété topologique d'une certaine géométrie. Je vais montrer dans cette sous-section que là encore on n'obtient pas ce que l'on désire. Cependant, les conséquences de cette analyse sont loin d'être inintéressantes. Elle cloue le cercueil de l'hypothèse d'un champ de jauge local tel qu'on le conçoit habituellement.

### a. Formulation de l'électromagnétisme dans la géométrie des fibrés

Cette façon de formuler l'électromagnétisme, qui je le répète est tout à fait standard dans le discours de la physique mathématique, pose comme point de départ que le champ de jauge est une connexion au sens mathématique du terme. Comme je l'ai montré dans la section sur l'argument de jauge, cette hypothèse est plausible. Elle découle directement de l'adoption d'un critère de couplage minimal entre champ de matière et champ d'interaction. Si cette position est adoptée, le champ d'interaction se couple toujours au champ de matière dans une dérivée covariante, où il est proportionnel à la connexion de cette dernière. Si le champ de jauge est une connexion, il est légitime de ce demander de quelle géométrie. C'est ce que je vais déterminer.

Je rappelle que la transformation de jauge de l'électromagnétisme quantique est

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{5.53}$$

Cette transformation est une rotation locale de la phase du champ de Dirac. De cette transformation, on peut conclure que le champ de jauge est la connexion d'un espace interne de phase associé à chaque point de l'espace-temps. On peut représenter une phase de diverses façons, mais il est aisé de se convaincre que toutes ces représentations sont isomorphes au groupe de Lie $U(1)$. Une représentation fréquente de ce groupe est l'ensemble des nombres complexes de norme 1, avec la multiplication des complexes comme opération de groupe. Donc, le champ de jauge semble être la connexion de l'espace interne $M^4 \times U(1)$, où $M^4$ est un espace de Minkowski à quatre dimensions représentant l'espace-temps. Je me dois cependant d'être plus général. La conception des jauges de Yang et Wu [WY75] suggère que le cas général est celui de coordinations locales de l'espace de phase. Pour respecter cette position, je vais poser que c'est seulement localement que l'espace interne est de la forme $M^4 \times U(1)$. Je vais définir l'espace total de façon intrinsèque et clarifier comment on peut développer un atlas de coordinations qui le couvre. Par chance, les mathématiciens ont déjà défini ce genre d'espace.

**Définition 25 (Un fibré principal)** *Un fibré principal (différentiel) $P$ de base $B$ et de fibre $G$ est un quintuplet $(P, B, \pi, G, \mathcal{A})$, où $P$ et $B$ sont des variétés, $G$ est un groupe de Lie, $\pi$ est une application surjective de $P$ vers $B$, appelée projection, et $\mathcal{A}$ est une collection $(U_i, \phi_i)$, appelée atlas du fibré, satisfaisant certaines propriétés. Les $U_i$ forment un recouvrement d'ouverts de la base $B$. Les $\phi_i$, appelées trivialisations locales (ou jauges locales) sont des difféomorphismes (globaux) de $\bar{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$ vers $U_i \times G$ tel que $pr \circ \phi_i = \pi$, où $pr$ désigne la projection canonique de $U_i \times G$ sur $U_i$. Enfin, les changements de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des isomorphismes de la forme $\phi_i \circ \phi_j^{-1}(p, g) = (p, g_{ij}(p) \cdot g)$, où $g_{ij} : U_i \to G$ et est appelée une fonction de transition. La structure de ces fonctions est isomorphe à $G$.*

Dans le cas de l'électromagnétisme, le fibré correspondant est celui où $B \equiv M^4$ et $G = U(1)$.

Il est à noter que dans cette structure, le groupe $G$ a deux fonctions. Il est isomorphe à la fibre typique et, c'est un point très important, il est isomorphe à la structure algébrique qui caractérise les changements de cartes. En général, dans un fibré, la structure de la fibre est dissociée du groupe caractérisant la structure algébrique du fibré. L'équivalence de ces structures dans un fibré principal aura des conséquences sur l'interprétation des transformations de jauge. On doit se rendre compte que dans le cas du fibré qui nous occupe, cette correspondance n'est pas un artefact mathématique. On ne peut la définir autrement. Par définition, l'ensemble des phases est isomorphe au groupe de jauge. Il est tentant d'affirmer qu'un tel fibré représente l'espace naturel où “vivrait” le champ quantique ou la fonction d'onde. Je

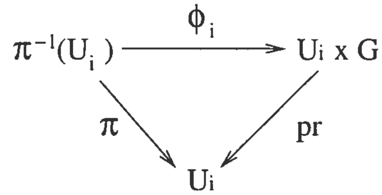


Figure 5-7: Structure de trivialisation du fibré.

m'abstiendrai de le faire pour deux raisons: 1) ce formalisme favorise explicitement une représentation de la fonction d'onde en fonction de la position. Nous savons que nous pourrions tout aussi bien travailler dans une représentation en fonction de l'impulsion. Je ne vois pas de raison valable pour favoriser la position sur l'impulsion. 2) Les champs de particules non chargées ou les fonctions d'onde représentant des particules non chargées ne se couplent pas à l'aide de $A^\mu$. Ce fibré n'est donc pas approprié pour les représenter. Comme toujours en philosophie, il faut s'abstenir de défendre trop hâtivement un substantialisme des structures géométriques.

Revenons au fibré de jauge. Aux changements de cartes $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont associées des fonctions de transition qui agissent conventionnellement par multiplication à gauche sur les éléments de fibre. Posons que $\phi_i(u) = (\pi(u), \hat{\phi}_i(u))$, les fonctions $\hat{\phi}_i$ sont définies sur $\pi^{-1}(U_i)$ à valeurs dans $G$. Je peut alors définir une action à droite de $G$ vers $P$, $u \to ug$, par la formule $\phi_i(ug) = (p, \hat{\phi}_i(u)g)$, où $u \in \pi^{-1}(p)$. En effet, si $p \in U_i \cap U_j$ alors

$$ug = \phi_j^{-1}(p, \hat{\phi}_j g) = \phi_j^{-1}(p, g_{ij}^{-1}\hat{\phi}_i g) = \phi_i^{-1}(p, \hat{\phi}_i g) \tag{5.54}$$

Cette action de $G$ sur $P$ est donc intrinsèque, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la trivialisation locale utilisée. Cette action est libre et transitive[38] sur la fibre et les éléments $v$ de la fibre $G_u \equiv \pi^{-1}(\pi(u))$ s'écrivent de façon unique sous la forme $v = ug$, $g \in G$. Cette action à droite a une importance capitale dans ce qui suit. Dans

[38]Je rappelle que $G$ opère librement sur $X$ si $\sigma_g(x) \neq x$ à moins que $g = e$. $G$ opère transitivement sur $X$ si $\forall x, y \in X$, il existe un $g \in G$ tel que $\sigma_g(x) = y$.

une jauge locale, les phases peuvent être translatées d'un $g \in G$. Ce qui, généralisé à l'ensemble du fibré, implique une transformation locale de jauge. J'y reviendrai.

Avant de nous attaquer à la définition de la connexion, il me manque une dernière définition

**Définition 26 (Une section)** *On appelle section du fibré une application $\sigma$ de $B$ vers $P$ telle que $\pi \circ \sigma = 1_B$.*

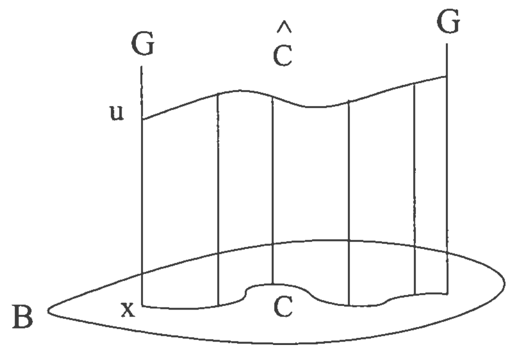


Figure 5-8: Illustration de l'élévation horizontale.

Dans un fibré principal $(P, B, \pi, G, \mathcal{A})$ chaque fibre est difféomorphique à $G$. Cependant, ce difféomorphisme[39] n'est pas canonique. Il dépend des ouverts $\{U_i\}$ qui couvrent $B$ et du choix des $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$. Une connexion de $P$ amène une correspondance entre deux fibres quelconques le long de la courbe $C$, où $C \subset B$. On dira d'un point $u$ de la fibre, au-dessus du point $x$ de la courbe $C$, qu'il est *transporté parallèlement* le long de la courbe à l'aide de cette correspondance. On dira aussi que la courbe $\hat{C}$ décrite à l'aide du transport parallèle de $u$ est une *élévation horizontale* de la courbe $C$.

Pour obtenir les élévations horizontales de la courbe $C$ dans $B$, il suffit d'en

[39]Rappel: $f : U \to V$ est un difféomorphisme si $f$ est une bijection et que $f$ et $f^{-1}$ sont continûment différentiables.

définir la contrepartie "infinitésimale", c'est-à-dire d'associer à chaque vecteur tangent $\vec{v_x}$, $\forall x \in B$ et à chaque point $u$ de la fibre $G_x \equiv \pi^{-1}(x)$, un vecteur tangent $\vec{v_u}$ de $P$ à $u$, appelé *vecteur horizontal*, qui projeté par $\pi'$ donne $\vec{v_x}$. L'élévation horizontale de la courbe $C$, passant par le point $u \in P$, sera obtenue par l'intégrale sur la courbe passant par $u$ des vecteurs horizontaux.

Il y a quelques contraintes à cette construction. Je désire que le transport parallèle soit compatible avec la structure différentielle de $P$. Les morphismes entre les espaces tangents $T_x(B)$ et $T_u(P)$ doivent préserver la structure des vecteurs et être différentiables par rapport à $x$. De plus, j'ai montré que le groupe de structure $G$ engendre une action intrinsèque et globale à droite sur $P$, qui préserve et agit transitivement sur chaque fibre. Je désire donc que deux élévations horizontales $\hat{C}_1$ et $\hat{C}_2$ de la courbe $C$ de $B$ et par le fait même la connexion, qui passent par différents points $u_1, u_2 \in \pi^{-1}(x)$ soient reliées par la transformation à droite qui amène $u_1$ sur $u_2$.

À partir de toutes ces données, on peut montrer qu'il existe une 1-forme $\omega$ sur $P$ qui prend ses valeurs dans $\mathcal{G}$, l'algèbre de Lie de $G$, qui respecte toutes nos contraintes ([CBDMDB82], chapitre 5). Pour plus de détails voir l'appendice B.

Il est à noter que cette connexion est définie indépendamment de toute jauge particulière. On peut cependant montrer que, étant donné une collection de trivialisations locales, c'est-à-dire de jauges locales, $\{U_i, \phi_i\}$ de $P$ et une connexion $\omega$ sur le même espace, il existe une famille unique de $\bar{\omega}_i$ de 1-forme connexion sur la variété $B$. D'abord, je définis la section $s_i$ de $\pi^{-1}(U_i)$ canoniquement associée à la trivialisation $\phi_i$. On définit $\bar{I}d : U_i \to U_i \times G$ par $x \mapsto (x, e)$. Donc, la trivialisation $\phi_i$ définit une section $s_i$ et vice versa par l'équation $s_i = \phi_i^{-1} \circ \bar{I}d$. À partir de cela, je peux poser $\bar{\omega}_i = s_i^* \omega$, où $s^*$ est le "pull-back". Cette 1-forme $\bar{\omega}_i$ sur $U_i$ est appelée *1-forme de connexion dans la jauge locale $\phi_i$ ou encore champ de jauge.*

Je me résume. J'ai défini $\omega$ une connexion intrinsèque au fibré principal. Cette

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\phi_i"] & & U_i \times G \\ & U_i \arrow[ul, "s_i"] \arrow[ur, "\overline{\mathrm{Id}}_i"'] & \end{tikzcd}$$

Figure 5-9: Définition de la section canonique.

connexion s'exprime de façon unique par une famille de connexions de l'espace de base $\{\bar{\omega}_i\}$ selon les jauges locales choisies. Il est tentant d'interpréter $\omega$ comme la véritable expression du champ de jauge et les $\bar{\omega}_i$ comme sa représentation dans différentes jauges locales. De cette façon, j'aurais clarifié à quoi réfère les différents $A^{\mu}(x)$. On doit se garder de cette interprétation pour le moment. Plus loin, je vais démontrer son incohérence.

Portons maintenant notre attention sur le cas particulier de l'électromagnétisme. Je pose que $B \equiv M^4$ et $G \equiv U(1)$. J'ai affaire à un fibré trivial, c'est-à-dire qu'il est possible de choisir une jauge pour tout l'espace-temps.[40] Je vais donc m'intéresser au passage d'une jauge globale à une autre. Les fonctions de transition de $U_i \cap U_j$ dans $U(1)$ sont données par $g_{ij}(x) = e^{i\alpha(x)}$ et $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$, où $x \mapsto \alpha(x)$ est une fonction réelle sur $U_i \cap U_j$, dans notre cas $M^4$. Une connexion dans une jauge locale est une 1-forme $\bar{\omega}_i$ sur $U_i \subset M^4$ prenant ses valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{U}(1)$ de $U(1)$. On peut choisir $\bar{\omega}_i = ieA_{i\mu}dx^{\mu}$. Il s'en suit que le passage entre les deux jauges se fait de la façon suivante:

$$A_{i\mu} = A_{j\mu} - \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha \tag{5.55}$$

Ceci est bien une transformation de jauge du second type. Le formalisme est donc cohérent avec la notion de transformation de jauge. Concentrons-nous maintenant sur la symétrie de jauge.

[40]Il est à noter que ceci n'est pas possible pour les théories de jauge non abéliennes.

### b. La symétrie de jauge

Avant de sauter trop rapidement aux conclusions, je vais prendre la peine d'analyser avec plus d'attention la symétrie de jauge. Tout d'abord une définition:

**Définition 27 (Automorphisme vertical)** *$\mathcal{F}$ est un automorphisme vertical si et seulement si*

$$\mathcal{F} : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x), \quad \mathcal{F}(ug) = \mathcal{F}(u)g, \quad u \in P, \quad ug = \tilde{R}_g u. \tag{5.56}$$

*où $\tilde{R}_g$ est l'action à droite du groupe.*

Un automorphisme vertical est donc un morphisme à l'intérieur de la fibre qui préserve la structure de l'action à droite. Dans notre cas, si je représentais $U(1)$ à l'aide de la variété du cercle $S_1$, ces automorphismes correspondraient à des rotations du cercle. Cette structure d'équivalence découle du fait que $U(1)$ est à la fois la fibre typique et le groupe de structure du fibré. Cela entraîne que les élements de fibre reliés par une action du groupe à droite sont en fait indifférentiables. Je vais revenir sur ce point sous peu.

En général, on s'intéresse peu aux théories de champ de jauge libre. On étudie plutôt les théories où le champ de jauge est couplé à un champ de matière. Si ce couplage se fait à l'aide d'une dérivée covariante, comme dans notre cas, les structures mathématiques nous permettant de représenter le champ de jauge et le champ de matière sont intimement liées. Le champ de matière est représenté dans un fibré vectoriel associé.

**Définition 28 (Fibré associé)** *Un fibré vectoriel $(E, B, \pi_1, F, G)$ de base $B$, de fibre typique $F$ et de groupe structural $G$ est dit associé au fibré principal $(P, B, \pi, G)$ par la représentation $\rho$ de $G$ sur l'espace vectoriel $F$, si ses fonctions de transition* *sont les images sous $\rho$ des fonctions de transition correspondantes du fibré principal $P$.*

Pour faire une histoire courte, cette association de fibrés me permet d'utiliser la section $s_i$ sur $P$ pour déterminer une jauge locale qui s'applique aussi à $E$. Cela se fait à travers l'expression suivante. Pour un champ scalaire comme une fonction d'onde:

$$\hat{\phi}_{i,x} \circ \psi(x) = \tilde{\psi}(s_i(x)) \tag{5.57}$$

où $\tilde{\psi}$ est une représentation du champ de matière comme un morphisme de $P$ vers $F$. Pour plus de détails, voir [CBDMDB82], pages 404-406.

Penchons-nous sur la symétrie de jauge. Cette symétrie implique l'invariance de la "physique" sous une transformation de jauge. Dans le formalisme que j'ai présenté jusqu'ici, il y a comme toujours deux interprétations de cette transformation, la passive et l'active. La passive consiste à considérer la transformation de jauge comme une transformation de coordination, en d'autres mots comme un changement de trivialisation locale. L'active consiste à transformer les points de $P$ en d'autres points qui leur sont équivalents. Dans le formalisme des fibrés principaux, pour chaque transformation passive, il y a une transformation active et inversement.

Une transformation de jauge passive consiste à ne pas modifier les points $u \in P$, mais à changer de jauge locale. Dans une fibre cela consiste à coordonner le même point $u \in P$ selon deux jauges locales $\{U_i, \phi_i\}$ et $\{U_j, \phi_j\}$. Le passage de l'une à l'autre est la transformation comme telle. À ce changement de trivialisation correspond bien sûr un automorphisme vertical $\mathcal{F}$ tel que $\hat{\phi}_j(u) = \hat{\phi}_i(\mathcal{F}(u))$, c'est-à-dire que les coordonnées du point $u$ dans la jauge $j$ correspondent aux coordonnées de $\mathcal{F}(u)$ dans la jauge $i$. On constate aisément que du point de vue d'un observateur qui conserve le même cadre de référence $i$, cette transformation consiste à associer les points $u$ et $\mathcal{F}u \in P$. De même dans l'autre sens. À chaque transformation active correspond une transformation passive et inversement. Maintenant, comparons les conséquences de telles transformations:

Point de vue passif:

$$\text{Section:} \quad s_i(x) \to \mathcal{F}(s_i(x)) \tag{5.58}$$

$$\text{Connexion sur } P\text{:} \quad \omega \to \omega \tag{5.59}$$

$$\text{Champ de jauge:} \quad s_i^*\omega \to (\mathcal{F} \circ s_i)^*\omega \tag{5.60}$$

$$\text{Champ de matière:} \quad \tilde{\psi} \to \tilde{\psi} \tag{5.61}$$

Note: $s_i^*\omega$ est le "pull-back". En coordonnées, cette transformation correspond à

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{5.62}$$

Point de vue actif:

$$\text{Section:} \quad s_i(x) \to s_i(x) \tag{5.63}$$

$$\text{Connexion sur } P\text{:} \quad \omega \to \mathcal{F}^*\omega \tag{5.64}$$

$$\text{Champ de jauge:} \quad s_i^*\omega \to s_i(\mathcal{F}^*\omega) \tag{5.65}$$

$$\text{Champ de matière:} \quad \tilde{\psi} \to \mathcal{F}^*\tilde{\psi} \tag{5.66}$$

Cette transformation correspond à

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \tag{5.67}$$

Ce résultat amène des difficultés philosophiques.

Premièrement, tenter de soulever l'ambiguïté de description en affirmant que tous les champs de jauge équivalents réfèrent à la même connexion intrinsèque échoue. La version active de la transformation de jauge associe des connexions qui sont manifestement distinctes. Il me paraît donc clair que ce formalisme laisse croire que l'indétermination du champ de jauge est fondamentale. On pourrait être tenté d'exclure tout simplement l'interprétation active, mais je ne vois pas sur quelle base. La version active de la symétrie de jauge est aussi une symétrie du fibré. Elle n'entraîne aucune modification d'une quantité observable. En fait, elle associe des élements de fibres qui ne sont pas distingables. De plus, renoncer à la transfomation active viderait totalement la symétrie de jauge de son contenu physique. Et un contenu, elle en a un, puisque l'on peut interpréter une telle transformation comme une modification active du cadre de référence. Cette situation est tout à fait semblable à celle où on associe une rotation passive d'un système de coordonnées à une rotation active de l'observateur.

Deuxièmement, on peut tirer des résultats plus haut, un argument contre la substantialisation de l'espace fibré. Cet argument a des affinités avec un argument similaire contre la substantialisation de l'espace-temps de John Earman et John Norton [EN87]. En effet, même si à un point du fibré la connexion $\omega$ est déterminée, son évolution ne l'est pas. Le point de vue actif implique une classe infinie d'évolutions futures. Comme dans la discussion sur le champ de jauge classique, cela amène un indéterminisme maximal de la théorie. Indéterminisme clairement causé par le fait que les points du fibré sont équivalents entre eux à un automorphisme vertical près. Ces points équivalents ne sont pas empiriquement différenciables. Considérer malgré tout ces points comme distincts entraîne un coût important: l'indéterminisme de la théorie, un indéterminisme qui n'a rien à voir avec celui de la mécanique quantique. Cet indéterminisme que je qualifierais de maximal enlève toute capacité prédictive à la théorie en ce qui concerne l'une de ses entités. Il reste pourtant une tactique, comme le suggère Healey[41] [Hea01]. On pourrait faire comme certains le font pour la relativié générale, c'est-à-dire défendre un essentialisme de la connexion.[42] Cette thèse propose de définir un point du fibré par rapport à ses relations avec les points voisins. Ceci implique une structure de connexion intrinsèque sur le fibré qui serait présente dès le départ du travail théorique. Dans ce contexte, l'ambiguïté de description ne serait qu'apparente. Toutes les connexions $\omega$ reliées par la transformation $\mathcal{F}^*\omega$ référeraient à la même structure de relations entre les points. Cette position est

[41] Il est à noter que Richard Healey ne défend pas cette position.

[42] Pour plus de détails, voir John Earman [Ear89], chapitre 9.

certes attrayante, mais elle ne règle pas le problème de l'indéterminisme. Tant que je travaillerai dans un système de coordonnées tel que montré plus haut, l'ambiguïté demeurera. Pourrais-je me passer d'une telle coordination? Sûrement pas en physique.

Une solution économique aux difficultés du substantialisme est tout simplement d'y renoncer. Dans ce contexte, un automorphisme vertical n'associe pas des points différents, mais bien des points identiques. Ces automorphismes impliquent au mieux un changement passif de jauge ou une modification active du cadre de référence. Dans les deux cas, la symétrie de jauge semble perdre de son contenu physique car elle n'associe plus des états distincts du modèle, mais cela n'entraîne en rien qu'elle soit arbitraire. Je le répète, si dans l'argument de jauge, on impose que le couplage entre le champ de matière et le champ d'interaction se fasse de façon minimale, cela entraîne que le champ de jauge participe à une dérivée covariante ce qui, par la suite, implique une géométrie du type du fibré principal, où il y a nécessairement une symétrie locale de jauge. Comme dans le modèle des boucles, la symétrie de jauge ne semble pas être soutenue par une entité bien définie.

### 5.7.4 Le groupoïde de jauge

Jusqu'ici, j'ai toujours abordé la symétrie de jauge à partir de son support, le champ de jauge. Cette approche m'a été utile pour montrer combien ce substrat connaît des problèmes d'identité. Je vais maintenant changer d'angle d'attaque. Si dans le cas des symétries globales, l'étude de la structure des transformations invariantes nous a permis d'utiliser la machinerie des groupes, la structure des transformations de jauge locales fera ressortir la structure des groupoïdes. Malheureusement, ce chapitre sera plus mince que je ne l'aurais voulu, car la documentation est rare à ce sujet. Il y a déjà des résistances quant à l'utilité des groupoïdes chez les mathématiciens; chez les physiciens, l'utilisation de ce formalisme est pour le moins peu fréquente.

Débutons par la définition du groupoïde de jauge. Cette définition varie légèrement d'un auteur à l'autre. Je reprends ici celle de Meinhard Mayer [May90] et tenterai de la justifier, ce qu'il ne se donne pas la peine de faire.

**Définition 29 (Le groupoïde de jauge)** *Le groupoïde de jauge associé au fibré principal* $(P, B, \pi, G)$ *est l'ensemble des morphismes* $\langle p_2, p_1\rangle \in \mathcal{O} = \frac{P\times P}{G}$ *et a comme base* $B$. *Les morphismes* $s$ *et* $t$ *sont* $s, t : \mathcal{O} \to B$ *par* $s\langle p_2, p_1\rangle = \pi(p_1)$ *et* $t\langle p_2, p_1\rangle = \pi(p_2)$. *L'opération de multiplication du groupe lorsqu'elle est définie, quand* $s\langle p_3, p_2'\rangle = t\langle p_2, p_1\rangle$, *est:*

$$\langle p_3, p_2'\rangle\langle p_2, p_1\rangle = \langle p_3 \cdot g^{-1}_{p_2 p_2'}, p_1\rangle. \tag{5.68}$$

*où* $g_{p_2 p_2'}$ *est l'élément du groupe* $G$ *tel que* $p_2' = p_2 \cdot g_{p_2 p_2'}$. *L'élément inverse d'une flèche est* $\langle p_2, p_1\rangle^{-1} = \langle p_1, p_2\rangle$. *L'élément neutre à gauche de* $\langle p_2, p_1\rangle$ *est* $\langle u, u\rangle, \forall u \in \pi^{-1}(\pi(p_2))$, *à droite* $\langle u, u\rangle, \forall u \in \pi^{-1}(\pi(p_1))$.

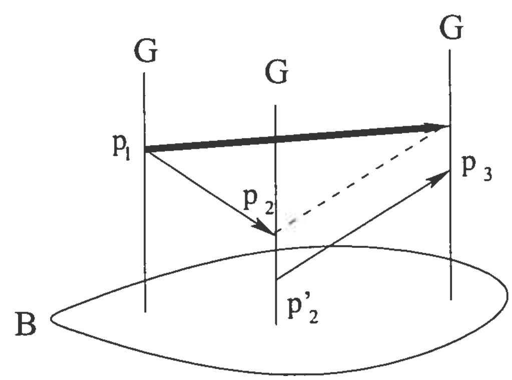


Figure 5-10: Illustration de l'opération de multiplication du groupoïde.

L'invariance de jauge est la symétrie qui concerne la phase d'un champ de matière. Je prétends que la définition du groupoïde de jauge exprime avec succès cette symétrie. Voyons cela de plus près.

Si la phase absolue du champ n'a pas d'importance, ce qui a une signification c'est la comparaison de la phase d'une fibre à l'autre. La façon la plus simple d'écrire le passage d'un élément de fibre à l'autre est de définir un morphisme à l'aide d'un couple $(p_2, p_1) \in P \times P$, c'est-à-dire une flèche partant du point $p_1$ du fibré et allant à $p_2$. Sachant que la phase absolue n'est pas pertinente et qu'en fait elle peut être changée à volonté par une transformation de jauge, on définit sur les flèches $P \times P$ l'action du groupe $G$ à droite: $(p_2, p_1) \mapsto (p_2 \cdot g, p_1 \cdot g)$. Par invariance de jauge, toutes les flèches associées par cette action sont équivalentes. Cela entraîne qu'une flèche est l'orbite engendrée par l'action du groupe. Cette orbite est notée $\langle p_2, p_1 \rangle$. L'espace des flèches distinctes sera constitué de la variété $\mathcal{O} = \frac{P \times P}{G}$. Cette variété est lisse. En effet, $(P \times P, \frac{P \times P}{G}, \pi, G)$ est lui-même un fibré principal [Mac89]. Quant à la règle de multiplication, elle est conforme à la symétrie de jauge locale. Les flèches se multiplient en se mettant à la queue leu leu, mais la symétrie de jauge locale permet de multiplier des flèches qui arrivent et partent de la même fibre sans que ce soit du même point. En effet, par une transformation de jauge locale, il est toujours possible de transformer un point dans une fibre en un autre dans la même fibre. C'est l'essence même de l'automorphisme vertical. L'opération de multiplication consiste à ramener par transformation de jauge la fin de la première flèche sur le point de départ de la seconde. Voir Figure 5-10. Bien sûr, on ne peut le faire que quand ces points se trouvent sur la même fibre, c'est-à-dire quand $s\langle p_3, p_2' \rangle = t\langle p_2, p_1 \rangle$. La transformation consiste à obtenir que $p_2' = p_2$. La symétrie de jauge locale est donc intégrée au groupoïde de jauge.

En utilisant le formalisme des groupoïdes, on recentre son attention sur la structure de transformation d'un objet, plutôt que sur l'objet lui-même. Ce changement de point de vue renforce la position que j'ai développée dans la section précédente. Voyons cela. Admettons que j'ai affaire à un fibré principal trivial $(B \times G, B, \pi, G)$, ce qui est d'ailleurs le cas du fibré de l'électromagnétisme sans monopole magnétique. Dans ce cas, on peut choisir une jauge locale qui en fait couvre l'entièreté de $B$. Le groupoïde de jauge associé est constitué des morphismes $\frac{B \times G \times B \times G}{G}$. On peut se convaincre que ce groupoïde se ramène à ce que l'on appelle un groupoïde trivial [Mac89].

**Définition 30 (Groupoïde trivial)** *L'ensemble $B \times G \times B$ est un groupoïde dit trivial, de base $B$, où $B$ est un ensemble et $G$ un groupe, s'il admet les morphismes $s(y, g, x) = x$ et $t(y, g, x) = y$ et une règle de multiplication partielle $(z, h, y)(y, g, x) = (z, hg, x)$.*

On constate donc que dans ce cas, le groupoïde de jauge correspond au groupoïde de transformation de $M^4$ par le groupe $G$. Il est à noter que ce groupoïde est du même genre que celui dont j'ai discuté dans le chapitre 3 à propos des symétries du carrelage.

L'interprétation de ce groupoïde est simple. On attribue en chaque point de l'espace-temps un groupe de symétrie interne $G$. L'opération de multiplication dénote l'action électromagnétique nette entre deux points de l'espace-temps, le changement de phase relative. La transitivité[43] de ce groupoïde ne rend pas l'utilisation de ce formalisme absolument nécessaire. Cependant, du point de vue philosophique, l'équivalence des structures de transformation, $(M^4 \times U(1), M^4, \pi, U(1)) \Leftrightarrow$ groupoïde de jauge $\Leftrightarrow$ groupoïde trivial, est éclairante.

Le groupoïde trivial $M^4 \times G \times M^4$ représente les transformations de phase d'un point à l'autre de l'espace-temps. Ces flèches demeurent inchangées sous une transformation globale de phase, la phase absolue n'ayant aucune importance. À l'aide de flèches "infinitésimales", je peux définir la notion de transport parallèle et d'holonomie. De façon générale pour les groupoïdes, ceci se fait avec la notion d'algèbroïde. Les algèbroïdes de Lie sont aux groupoïdes de Lie[44] ce que sont les algèbres de Lie aux groupes de Lie. Pour plus de détails, voir le livre de Kirill MacKenzie [Mac87].

Voyons ce que m'amène l'analyse du groupoïde trivial. Une flèche dans un

[43] Un groupoïde $\Omega$ sur $B$ est *transitif* si $\forall x, y \in B$ il existe un élément $\xi \in \Omega$ et que $s\xi = x$ et $t\xi = y$.

[44] Notez que tous les groupoïdes de jauge sont des groupoïdes de Lie.

groupoïde de jauge trivial $\langle x_2, g_2 | x_2, g_1 \rangle$ se réduit à $(x_2, h, x_1)$ où $g_1 h = g_2$ dans le groupoïde trivial. Admettons que j'impose un automorphisme vertical $\mathcal{F}$ en chaque point de l'espace-temps. Je rappelle que selon ce que j'ai présenté dans la dernière section, cette transformation ne devrait modifier aucun paramètre physique puisque elle est inclue dans une symétrie. Je constate que

$$\mathcal{F}(x_2, g_2) = \mathcal{F}(x_2, g_1 h) = \mathcal{F}(x_2, g_1)h \tag{5.69}$$

Cela entraîne que chaque flèche du groupoïde se transforme ainsi

$$(x_2, h, x_1) \rightarrow (x_2, k, x_1) \text{ où } \mathcal{F}(x_1, g_1)k = \mathcal{F}(x_2, g_1)h \tag{5.70}$$

À moins que $\mathcal{F}$ soit une transformation globale, c'est-à-dire que l'on fasse subir le même automorphisme sur chaque fibre, alors $\mathcal{F}(x_1, g_1) \neq \mathcal{F}(x_2, g_1)$. On constate donc que la structure du groupoïde trivial change. Ceci est compatible avec ce que j'ai montré dans la section précédente. Un automorphisme modifie la connexion intrinsèque du fibré. En conséquence, il modifie la structure de transformation représentée par le groupoïde.

Si j'interprétais l'automorphisme vertical d'une autre façon, non pas comme une transformation active des éléments des fibres, mais plutôt comme une transformation de la jauge permettant de plaquer une coordination sur les fibres. Dans ce cas, il me paraît clair que cette transformation n'engendre pas de modification du groupoïde de jauge ou du groupoïde trivial. Ce dernier dépend des différences de phase intrinsèques entre les flèches. Une modification de l'étiquettage ne l'affectera pas.

Le formalisme des groupoïdes me permet sans peine de retrouver les résultats de la section précédente. La symétrie sous automorphisme vertical des fibres engendre une ambiguïté dans la structure de transformation. Des groupoïdes différents représentent la même situation physique. Une substantialisation des groupoïdes, ce qui revient à substantialiser le champ d'interaction, mène donc à une ambiguïté non soutenable.

## 5.8 Quelques remarques en conclusion

Ce chapitre soulève plus de questions qu'il n'amène de réponses. Si l'interaction électromagnétique classique procède par un intermédiaire, ce dernier est très probablement représenté adéquatement par le tenseur de force $F^{\mu\nu}$. Le cas quantique est quant à lui plus complexe. Si l'action à distance est mise de côté, le seul candidat naturel pour représenter ce médiateur est le champ de jauge $A^{\mu}$. Ce dernier est, par contre, problématique. Il ne semble pas possible de lever l'ambiguïté dans sa description. C'est ce que nous avons vu en analysant sa formulation dans le formalisme des fibrés et des groupoïdes. Il n'y a pas bijection entre la situation physique et une connexion intrinsèque qui serait le référent du champ de jauge, de même il n'y a pas de bijection avec un groupoïde. Ceci me force littéralement à considérer la symétrie de jauge comme le résultat d'un surplus de structure. Il reste cependant des analyses à faire, même si je ne vois pas comment elles pourraient modifier ma conclusion. Entre autres, l'étude de l'algébroïde associé au fibré manque dans mon travail.

Ce qui me frappe c'est que la symétrie de jauge n'est pas arbitraire. Elle apparaît naturellement si on couple un champ de matière et un champ d'interaction par une dérivée covariante. En fait, compte tenu du fait que cette symétrie se retrouve dans toutes les théories des interactions fondamentales, j'aurais tendance à la considérer comme une propriété fondamentale qu'une théorie doit posséder. Par contre, substantialiser le champ de jauge, support de la symétrie, me semble une voie sans issue. Dans ce contexte, à quoi réfère la symétrie de jauge? Revenons au formalisme des fibrés. La symétrie de jauge est la symétrie impliquée par les automorphismes verticaux des fibres, qu'ils soient compris de façon passive ou active. Elle apparaît donc comme caractérisant le rapport entre les espaces de phase internes associés à chaque point de l'espace-temps. Il faut cependant se rendre à l'évidence, cette structure ne peut être représentée par une connexion. Pourquoi? À cette question, il y a deux stratégies de réponse. La première est celle du modèle des boucles. Seule une théorie où toutes les quantités sont invariantes de jauge serait adéquate. Implicitement, cette position impute le caractère local du champ de jauge pour les difficultés qu'il soulève. L'électromagnétisme serait une théorie non locale décrite maladroitement par des quantités locales. En fait, on pourrait argumenter que la symétrie de jauge est une contrainte inévitable si l'on désire décrire de façon locale le champ électromagnétique, qui est en réalité un champ non local. La seconde stratégie est celle de l'aveu d'incompréhension. La symétrie de jauge n'est pas arbitraire, mais son élucidation nous échappe toujours. Compte tenu des analyses effectuées à l'aide du formalisme des fibrés et des groupoïdes, même si cette position est possible, elle me paraît improbable.

# Conclusion

Cette thèse est un point de départ. Même si on se restreint au caractère ontologique des symétries, il reste encore de nombreuses questions à éclaircir. Par exemple, quel est le statut de la brisure spontanée de symétrie, un mécanisme qui occupe une place de choix dans la physique théorique récente? Malgré les lacunes de cette thèse, des approches nouvelles à de vieilles questions ont été proposées dans cette thèse, comme l'intérêt qu'il y a à utiliser les groupoïdes dans le contexte des symétries locales ou encore l'analyse de la symétrie de jauge comme un surplus de structure.

Une constatation surgit de l'ensemble de la thèse. Elle met en évidence la généralité et la vaste étendue des applications du concept de symétrie en physique. J'irais même jusqu'à dire que toutes mes discussions et celles de mes collègues laissent croire que le concept de symétrie pourrait déloger celui de loi comme fondement de la physique. Bien sûr, dans un certain sens, une loi est une symétrie[45], car elle dénote ce qui reste invariant malgré le changement. Le passage des lois aux symétries ne serait donc qu'une simple généralisation. Une bonne compréhension du concept de loi nécessite peut-être de constater qu'il est un cas particulier de symétrie.

Les analyses diverses, couplées aux nombreux exemples que recèlent cette thèse, me portent à croire que la symétrie est bien le concept fondamental de toute démarche scientifique. Faire de la science consiste à identifier et à caractériser les régularités perçues dans les phénomènes. N'est-ce pas en fait identifier ce qui ne change pas dans le changement? Ces dernières années, en mettant l'accent sur les symétries, les physiciens auraient donc déplacé le focus de leur discipline vers un concept beaucoup

[45] Cette idée était déjà présente dans l'oeuvre de Joe Rosen.

plus fondamental que celui de loi. Serait-ce le début d'une explication des énormes succès de la physique contemporaine? L'avenir nous le dira.

# BIBLIOGRAPHIE


[AB59] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Physical Review*, 115(3):485–491, August 1959.

[AH89] J.R. Aitchison and Anthony J.G. Hey. *Gauge Theories in Particle Physics*. Adam Hilger, 1989.

[AM84] Claude Albert and Pierre Molino. *Pseudogroupes de Lie transitifs*. Hermann, Paris, 1984.

[Auy95] Sunny Y. Auyang. *How is Quantum Field Theory Possible?* Oxford University Press, 1995.

[BBH96] Barry Barnes, David Bloor, and John Henry. *Scientific Knowledge: a sociological analysis*. The University of Chicago Press, 1996.

[Bel98] Gordon Belot. Understanding electromagnetism. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 49:531–555, 1998.

[BHSL02] Walter Benenson, John W. Harris, Horst Stocker, and Holger Lutz, editors. *Handbook of Physics*. Springer, 2002.

[BKL00] Anouk Barberousse, Max Kistler, and Pascal Ludwig. *La philosophie des sciences au XXe siècle*. Flammarion, 2000.

[Bro87] Ronald Brown. From groups to groupoids: a brief survey. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19:113–134, 1987.

[Bun73] Mario Bunge. *Philosophy of Physics*. D. Reidel Publishing Company, 1973.

[Car83] Nancy Cartwright. *How the Laws of Physics Lie.* Clarendon Press, 1983.

[CBDMDB82] Yvonne Choquet-Bruhat, Cécile DeWitt-Morette, and Margaret Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics: Part 1.* Elsevier, revised edition, 1982.

[CH98] Masud Chaichian and Rolf Hagedorn. *Symmetries in Quantum Mechanics: from angular momentum to supersymmetry.* Institute of Physics Publishing, 1998.

[Col85] Sidney Coleman. *Aspects of Symmetry.* Cambridge University Press, 1985.

[Cor97] J. F. Cornwell. *Group Theory in Physics: an introduction.* Academic Press, 1997.

[CTDL86a] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Lanoë. *Mécanique Quantique*, volume 2. Hermann, 3e edition, 1986.

[CTDL86b] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Lanoë. *Mécanique Quantique*, volume 1. Hermann, 3e edition, 1986.

[Cus98] James T. Cushing. *Philosophical Concepts in Physics.* Cambridge University Press, 1998.

[Dir38] P.A.M. Dirac. Classical theory of radiating electrons. *Proceedings of the Royal Society of London*, 167(A929):148–169, August 1938.

[Dir58] P.A.M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, fourth edition, 1958.

[Ear89] John Earman. *World Enough and Space-Time.* The MIT Press, 1989.

[ED79] J.P. Elliott and P.G. Dawer. *Symmetry in Physics.* Oxford University Press, 1979.

[Edg00] Ludde Edgren. Classical models of charged relativistic particles. Master's thesis, Göteborg University et Chalmers University of Technology, Sweden, 2000.

[Ein70] Albert Einstein. Autobiographical notes. In Paul Arthur Schilpp, editor, *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, pages 1–94. Cambridge University Press, third edition, 1970.

[EN87] John Earman and John Norton. What price spacetime substantivalism? The hole story. *British Journal for the Philosophy of Science*, 38(4):515–525, December 1987.

[Fey48] Richard P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rewiew of Modern Physics*, 20(2):367–387, April 1948.

[FLS64] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman Lectures in Physics*, volume 2. Addison-Wesley, 1964.

[FP00] Christopher A. Fuchs and Asher Peres. Quantum theory needs no 'interpretation'. *Physics Today*, 53(9):70–71, March 2000.

[Fri02] Mathias Frisch. Non-locality and classical electrodynamics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 53(1):1–19, March 2002.

[Gie88] Ronald N. Giere. *Explaining Science: a cognitive approach.* The University of Chicago Press, 1988.

[Gie99] Ronald N. Giere. *Science without Laws.* The University of Chicago Press, 1999.

[Gol80] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics.* Addison Wesley Publishing Company, second edition, 1980.

[GP96] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. *Loops, Knots, Gauge Theories, and Quantum Gravity.* Cambridge University Press, 1996.

[GSW87] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1987.

[Hac83] Ian Hacking. *Representing and Intervening: introductory topics in the philosophy of natural science.* Cambridge University Press, 1983.

[Hav48] Peter Havas. On the classical equations of motion of point charges. *Physical Review*, 74(4):456–463, August 1948.

[HDW65] R.M.F. Houtappel, H. Van Dam, and E.P. Wigner. The conceptual basis and use of the geometric invariance principles. *Reviews of Modern Physics*, 37(4):595–632, October 1965.

[Hea97] Richard Healey. Nonlocality and the Aharonov-Bohm effect. *Philosophy of Science*, 64:18–41, March 1997.

[Hea99] Richard Healey. Quantum analogies: a reply to Maudlin. *Philosophy of Science*, 66(3):440–447, september 1999.

[Hea01] Richard Healey. On the reality of gauge potentials. *Philosophy of Science*, 68(4):432–455, December 2001.

[HM84] Francis Halzen and Alan D. Martin. *Quarks and Leptons: an introductory course in modern particle physics.* John Wiley & Sons, 1984.

[Jac75] John David Jackson. *Classical electrodynamics.* John Wiley & Sons, second edition, 1975.

[Kos99] Peter Kosso. Symmetry arguments in physics. *Studies in History and Philosophy of Science*, 30(3):479–492, 1999.

[Kos00a] Peter Kosso. The empirical status of symmetries in physics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 51:81–98, 2000.

[Kos00b] Peter Kosso. The epistemology of spontaneously broken symmetries. *Synthese*, 122:359–376, 2000.

[Kuh83] Thomas S. Kuhn. *La structure des révolutions scientifiques*. Flammarion, 1983.

[Lan02] Marc Lange. *An Introduction to the Philosophy of Physics*. Blackwell Publishers, 2002.

[Lap12] Pierre-Simon Laplace. *Oeuvres Complètes*, volume 7. Gauthier-Villars, Paris, 1878-1912.

[Lee99] Stephen Leeds. Gauges: Aharonov, Bohm, Yang, Healey. *Philosophy of Science*, 66:606–627, December 1999.

[LL89] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique Théorique*, volume 2. Mir, Moscou, 4e edition, 1989.

[Loc94] Georges Lochak. *La géométrisation de la physique*. Flammarion, 1994.

[LW86] Bruno Latour and Steve Woolgar. *Laboratory Life: the social construction of scientific facts*. Princeton University Press, second edition, 1986.

[Lyr01] Holger Lyre. The principles of gauging. *Philosophy of Science*, 68(3):S371–S381, September 2001. Proceedings of the 2000 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association.

[Mac87] Kirill MacKenzie. *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*. Cambridge University Press, 1987.

[Mac89] Kirill MacKenzie. Classification of principal bundles and Lie groupoids with prescribed gauge group bundle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 58:181–208, 1989.

[Mac00] Richard MacKenzie. Path integral methods and applications. arXiv: quant-ph/0004090, April 2000.

[Mah01] Martin Mahner, editor. *Scientific Realism: selected essays of Mario Bunge*. Prometheus Books, 2001.

[Mak02] Yuri Makeenko. *Methods of Contemporary Gauge Theory*. Cambridge University Press, 2002.

[Mar02] Christopher A. Martin. Gauge principles, gauge arguments and the logic of nature. *Philosophy of Science*, 69(3):S221–S234, September 2002. Proceedings of the 2000 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association.

[Mau98] Tim Maudlin. Discussion: Healey on the Aharonov-Bohm effect. *Philosophy of Science*, 65:361–368, June 1998.

[May90] Meinhard E. Mayer. Principal bundles versus lie groupoids in gauge theory. In L.-L. Chau and W. Nahm, editors, *Differential Geometric Methods in Theoretical Physics*, pages 793–802. Plenum Press, 1990.

[MDC00] Peter Machamer, Lindley Darden, and Carl F. Craver. Thinking about mechanisms. *Philosophy of Science*, 67(1):1–25, March 2000.

[Mil89] Robert Mills. Gauge field. *American Journal of Physics*, 57(6):493–507, June 1989.

[Nii99] Ilkka Niiniluoto. *Critical Scientific Realism*. Oxford University Press, 1999.

[OF63] R. Omnès and M. Froissart. *Mandelstam theory and Regge poles*. W.A. Benjamin, 1963.

[OP85] S. Olariu and I. Iovitzu Popescu. The quantum effects of electromagnetic fluxes. *Reviews of Modern Physics*, 57(2):339–436, april 1985.

[O'R97] Lochlainn O'Raifeartaigh. *The Dawning of Gauge Theory.* Princeton University Press, 1997.

[Pau41] W. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Reviews of Modern Physics*, 13:203–232, July 1941.

[Pol98] Joseph Polchinski. *String Theory: a introduction to the bosonic string*, volume 1. Cambridge University Press, 1998.

[Pos63] Heintz R. Post. Individuality and physics. *The Listener*, 70:534–537, 1963.

[PS95] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory.* Perseus Books, 1995.

[Psi99] Stathis Psillos. *Scientific Realism: how science tracks truth.* Routledge, 1999.

[PT89] M. Peshkin and A. Tonomura. *The Aharonov-Bohm Effect.* Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, 1989.

[Put83] Hilary Putnam. *Realism and Reason: philosophical paper, volume 3.* Cambridge University Press, 1983.

[Put84] Hilary Putnam. *Raison, vérité et histoire.* Les Éditions de Minuit, 1984.

[Put90] Hilary Putnam. *Realism with a Human Face.* Harvard University Press, 1990.

[Red88] Michael Redhead. A philosopher looks at quantum field theory. In Harvey R. Brown and Rom Harré, editors, *Philosophical Foundations of Quantum Field Theory*, pages 9–23. Clarendon Press, Oxford, 1988.

[Red02] Michael Redhead. The interpretation of gauge symmetry. In Meinhard Kuhlmann, Holger Lyre, and Andrew Wayne, editors, *Ontological Aspects of Quantum Field Theory*, pages 281–301. World Scientific, 2002.

[Roc87] John J. Roche. A critical study of symmetry in physics from Galileo to Newton. In Manuel G. Doncel, Armin Hermann, Louis Michel, and Abraham Pais, editors, *Symmetries in Physics (1600-1980)*, pages 1–28. Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1987.

[Ror91] Richard Rorty. *Objectivity, Relativism, and Truth.* Cambridge University Press, 1991.

[Ros75] Joe Rosen. *Symmetry Discovered: concepts and applications in nature and science.* Cambridge University Press, 1975.

[Ros81] Joe Rosen. Resource letter SP-2: symmetry and group theory in physics. *American Journal of Physics*, 49(4):304–319, Avril 1981.

[Ros95] Joe Rosen. *Symmetry in Science: an introduction to the general theory.* Springer-Verlag, 1995.

[RS86] M.L.G. Redhead and J.S. Steingerwald. Discussion: ontological economy and grand unified gauge theories. *Philosophy of Science*, 53(2):280–281, June 1986.

[RT91] Michael Redhead and Paul Teller. Particles, particles labels, and quanta: the toll of unacknowledged metaphysics. *Foundations of Physics*, 21(1):43–62, 1991.

[RT92] Michael Redhead and Paul Teller. Particles labels and the theory of indistinguishable particles in quantum mechanics. *British Journal for the Philosophy of Science*, 43:201–218, 1992.

[Rus65] Bertrand Russell. *L'analyse de la matière.* Payot, Paris, 1965.

[Sha82] Dudley Shapere. The concept of observation in science and philosophy. *Philosophy of Science*, 49:485–525, 1982.

[SK74] A.V. Shubnikov and V.A. Koptsik. *Symmetry in Science and Art.* Plenum Press, 1974.

[SR82] José Sánchez-Ron. Actions at a distance, four-dimensionality, and the problem of "where is the energy?". *American Journal of Physics*, 50(8):739–742, August 1982.

[Svo02] Karl Svozil. What could be more practical than a good interpretation? arXiv: quant-ph/0204168, May 2002.

[Tar86] Lev Tarasov. *This Amazingly Symmetrical World.* Mir Publishers, Moscou, 1986.

[tH80] Gerard 't Hooft. Gauge theories of the forces between elementary particles. *Scientific American*, 242:104–138, 1980.

[Tol79] Richard C. Tolman. *The Principles of Statistical Mechanics.* Dover Publications, New York, 1979.

[TOM+86] Akira Tonomura, Nobuyuki Osakabe, Tsuyoshi Matsuda, Takeshi Kawasaki, Junji Endo, Shinichiro Yano, and Hiroji Yamada. Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave. *Physical Review Letters*, 56(8):792–795, February 1986.

[Tur61] H.W. Turnbull, editor. *The Correspondence of Isaac Newton*, volume 3. Cambridge University Press, 1961. Published for the Royal Society.

[Uti56] Ryoyu Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, 101(5):1597–1607, March 1956.

[vF80] Bas C. van Fraassen. *The Scientific Image*. Clarendon Press, Oxford, 1980.

[vF89] Bas C. van Fraassen. *Laws and Symmetry*. Clarendon Press, Oxford, 1989.

[Wei72] Steven Weinberg. Approximate symmetries and pseudo-Goldstone Bosons. *Physical Review Letters*, 29(25):1698–1701, December 1972.

[Wei84] Robert Weingard. Grand unified gauge theories and the number of elementary particles. *Philosophy of Science*, 51(1):150–155, March 1984.

[Wei95] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.

[Wei96a] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 2. Cambridge University Press, 1996.

[Wei96b] Alan Weinstein. Groupoids: unifying internal and external symmetry. *Notices of the American Mathematical Society*, 43(7):744–752, July 1996.

[Wey52] Hermann Weyl. *Symmetry*. Princeton University Press, 1952.

[WF49] John Archibald Wheeler and Richard Phillips Feynman. Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):425–433, July 1949.

[Wig67] Eugene P. Wigner. *Symmetries and Reflections.* Indiana University Press, 1967.

[Wil74] Kenneth G. Wilson. Confinement of quarks. *Physical Review D*, 10(8):2445–2459, October 1974.

[WY75] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Physical Review D*, 12(12):3845–3857, December 1975.

[Yan74] C.N. Yang. Integral formalism for gauge fields. *Physical Review Letters*, 33(7):445–447, August 1974.

[YM54] C.N. Yang and R.L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Physical Review*, 96(1):191–195, October 1954.

# APPENDICE A

## Preuves du chapitre 3

---

**Proposition 1** $\forall T_i \in \mathcal{G}',\ T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$

*Preuve:*

*En utilisant la définition de l'opération de multiplication, pour le côté gauche de la proposition:*

$$\forall u \in E \qquad (T_3(T_2T_1))(u) = T_3((T_2T_1)(u)) \tag{A.1}$$

$$= T_3(T_2(T_1(u))) \tag{A.2}$$

*Pour le côté droit:*

$$\forall u \in E \qquad ((T_3T_2)T_1)(u) = (T_3T_2)(T_1(u)) \tag{A.3}$$

$$= T_3(T_2(T_1(u))) \tag{A.4}$$

$$= (T_3(T_2T_1))(u) \tag{A.5}$$

**Proposition 2** $\forall T \in \mathcal{G}',\ TI = IT = T$

*Preuve:*

*Ceci se prouve aisément car* $\forall T \in \mathcal{G}'$, $\forall u \in E$

$$(TI)(u) = T(I(u)) = T(u) \tag{A.6}$$

$$(IT)(u) = I(T(u)) = T(u) \tag{A.7}$$

**Proposition 3** *Pour toute transformation* $T \in \mathcal{G}$, $v = T(u)$, *il existe dans* $\mathcal{G}$ *une transformation* $T^{-1}$, $u = T^{-1}(v)$ *tel que* $T^{-1}T = I = TT^{-1}$.

*Preuve:*

*Montrons la première égalité:*

$$\begin{aligned} \forall u \in E \qquad (T^{-1}T)(u) &= T^{-1}(T(u)) && \text{(A.8)} \\ &= T^{-1}(v) && \text{(A.9)} \\ &= u && \text{(A.10)} \\ &= I(u) && \text{(A.11)} \end{aligned}$$

*La seconde:*

$$\begin{aligned} \forall v \in E \qquad (TT^{-1})(u) &= T(T^{-1}(v)) && \text{(A.12)} \\ &= T(u) && \text{(A.13)} \\ &= v && \text{(A.14)} \\ &= I(v) && \text{(A.15)} \end{aligned}$$

# APPENDICE B

## Connexion sur un fibré principal

Dans cet appendice, je vais donner quelques détails sur la définition d'une connexion sur un fibré principal.

Quelques questions de notation: les fibrés principaux admettent une action à droite qui définit un morphisme $\tilde{R}_g$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ et qui peut être définie de façon cohérente pour toutes les fibres. $\tilde{R}_g : G \to G$ tel que $\tilde{R}_g(h) = hg$. De même, on peut définir l'action sur les espaces tangents $\tilde{R}'_g : T_h(G) \to T_{hg}(G)$ représentée par $(\tilde{R}'_g(h))^\alpha_\kappa = \frac{\partial \tilde{R}^\alpha(g^\beta, h^\gamma)}{\partial h^\kappa}$

La connexion peut être définie comme

**Définition 31 ((a) Connexion sur un fibré principal)** *Une connexion sur* $(P, B, \pi, G, \mathcal{A})$ *est un morphisme* $\sigma_u : T_x(B) \to T_u(P)$*, où* $\pi(u) = x$ *et* $\forall u \in P$ *tel que:*

*1)* $\sigma_u$ *est linéaire,*

*2)* $\pi' \sigma_u$ *est le morphisme identité sur* $T_x(B)$*,*

*3)* $\sigma_u$ *a une dépendance différentiable de* $u$*,*

*4)* $\sigma_{\tilde{R}'_g u} = \tilde{R}'_g \sigma_u, g \in G$*.*

Donc, si $C : I \subset \mathbb{R} \to B$ par $t \mapsto C(t)$ est une courbe dans $B$ qui passe par le point $x_0 = C(0)$ et si $u_0$ est dans la fibre au-dessus de $x_0$, alors le transport parallèle de

$p_0$ le long de $C$ est donné par la courbe $\hat{C} : I \subset \mathbb{R} \to P$ par $t \mapsto \hat{C}(t)$ définie ainsi

$$\frac{d\hat{C}(t)}{dt} = \sigma_u \frac{dC(t)}{dt}, \quad \hat{C}(0) = u_0, \quad \hat{C}(t) = u \tag{B.1}$$

Cette définition est intuitive et est facile à visualiser. On peut montrer que cette définition est équivalente à une autre beaucoup plus abstraite ([CBDMDB82], chapitre 5). Cette connexion est basée sur la division de l'espace tangent au fibré en vecteurs horizontaux $H_P$ et verticaux $V_P$. Voici une définition équivalente mais plus abstraite.

**Définition 32 ((b) Connexion sur un fibré principal)** *Une connexion sur $(P, B, \pi, G)$ est une 1-forme $\omega$ sur $P$ prenant ses valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{G}$, l'algèbre de Lie de $G$ tel que:*

*1) $\omega_p(u) = \hat{u}$, où $u \in V_P$ et $\hat{u} \in \mathcal{G}$ sont reliés par l'isomorphisme canonique.*

*2) $\omega_p$ dépend différentiellement de $p$.*

*3) $\omega_{\tilde{R}_g p}(\tilde{R}'_g \vec{v}) = Ad(g^{-1})\omega_p(v)$ où $Ad$ est la représentation adjointe.*

Une petite note sur cette définition, si $\hat{v} \in \mathcal{G}$ correspond à $\left.\frac{dg(s)}{ds}\right|_{s=0} \in T_e(G)$ alors l'équation

$$v(p) = \left.\frac{d(\tilde{R}_{g(s)}p)}{ds}\right|_{s=0} \tag{B.2}$$

définit l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{G}$ et $V_P$. Aussi, la représentation adjointe est la représentation du groupe $G$ sur son algèbre de Lie $\mathcal{G}$. Rappelons que cette algèbre est isomorphe à $T_e(G)$.