

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ



Ecole Doctorale en Mathématiques  
et Informatique de Marseille

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL



Faculté des Arts et des Sciences

THÈSE DE DOCTORAT  
en Informatique

---

par

Arnaud Polette

en vue d'obtenir le grade de Docteur d'Aix-Marseille Université  
et le grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.) de l'Université de Montréal

Analyse de maillages surfaciques par construction et  
comparaison de modèles moyens et par décomposition  
par graphes s'appuyant sur les courbures discrètes  
Application à l'étude de la cornée humaine

---

soutenue le jeudi 3 décembre 2015 devant le jury composé de

<i>Rapporteurs :</i>	Laurent NAIMAN	Professeur, Université Paris-Est
	Nicolas PASSAT	Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne
<i>Président :</i>	Marc DANIEL	Professeur, Aix-Marseille Université
<i>Examineurs :</i>	Isabelle BRUNETTE	Professeure Titulaire, Université de Montréal
	Mireille GARREAU	Professeure, Université Rennes 1
	Gérard SUBSOL	Chargé de recherche CNRS, LIRMM Montpellier
<i>Directeurs :</i>	Jean-Luc MARI	Maître de Conférences HDR, Aix-Marseille Université
	Jean MEUNIER	Professeur Titulaire, Université de Montréal



---

# RÉSUMÉ

Cette thèse se découpe en trois parties. Les deux premières portent sur le développement de méthodes pour la construction de modèles géométriques moyens et pour la comparaison de modèles. Ces approches sont appliquées à la cornée humaine pour l'élaboration d'atlas et pour l'étude biométrique robuste. La troisième partie porte sur une méthode générique d'extraction d'informations dans un maillage en s'appuyant sur des propriétés différentielles discrètes afin de construire une structure par graphe permettant l'extraction de caractéristiques par une description sémantique.

Les atlas anatomiques conventionnels (papier ou CD-ROM) sont limités par le fait qu'ils montrent généralement l'anatomie d'un seul individu qui ne représente pas nécessairement bien la population dont il est issu. Afin de remédier aux limitations des atlas conventionnels, nous proposons dans la première partie d'élaborer un atlas numérique 3D contenant les caractéristiques moyennes et les variabilités de la morphologie d'un organe, plus particulièrement de la cornée humaine. Plusieurs problématiques sont abordées, telles que la construction d'une cornée moyenne et la comparaison de cornées. Il existe à ce jour peu d'études ayant ces objectifs car la mise en correspondance de surfaces cornéennes est une problématique non triviale. En plus d'aider à développer une meilleure connaissance de l'anatomie cornéenne, la modélisation 3D de la cornée normale permet de détecter tout écart significatif par rapport à la "normale" permettant un diagnostic précoce de pathologies ou anomalies de la forme de la cornée.

La seconde partie a pour objectif de développer une méthode pour reconnaître une surface parmi un groupe de surfaces à l'aide de leurs acquisitions 3D respectives, dans le cadre d'une application de biométrie sur la cornée. L'idée est de quantifier la différence entre chaque surface et une surface donnée, et de déterminer un seuil permettant la reconnaissance. Ce seuil est dépendant des variations normales au sein d'un même sujet, et du bruit inhérent à l'acquisition. Les surfaces sont rognées et trouées de façon imprévisible, de plus il n'y a pas de point de mise en correspondance commun aux surfaces. Deux méthodes complémentaires sont proposées. La première consiste à calculer le volume entre les surfaces après avoir effectué un recalage, et à utiliser ce volume comme un critère de similarité. La seconde approche s'appuie sur une décomposition en harmoniques sphériques en utilisant les coefficients comme des descripteurs de forme, qui permettront de comparer deux surfaces. Des résultats sont présentés pour chaque méthode en les comparant à la méthode la plus récemment décrite dans la littérature, les avantages et inconvénients de chacune sont détaillés. Une méthodologie en cascade utilisant ces deux

méthodes afin de combiner les avantages de chacune est aussi proposée.

La troisième et dernière partie porte sur une nouvelle méthode de décomposition en graphes de maillages 3D triangulés. Nous utilisons des cartes de courbures discrètes comme descripteur de forme afin de découper le maillage traité en huit différentes catégories de carreaux (ou *peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* et *flat*). Ensuite, un graphe d'adjacence est construit avec un nœud pour chaque carreau. Toutes les catégories de carreaux ne pouvant pas être adjacentes dans un contexte continu, des jonctions intermédiaires sont ajoutées afin d'assurer une cohérence continue entre les zones. Ces graphes sont utilisés pour extraire des caractéristiques géométriques décrites par des motifs (ou *patterns*), ce qui permet de détecter des régions spécifiques dans un modèle 3D, ou des motifs récurrents. Cette méthode de décomposition étant générique, elle peut être appliquée à de nombreux domaines où il est question d'analyser des modèles géométriques, en particulier dans le contexte de la cornée.

**Mots-clés** : modélisation géométrique, maillages, surfaces, cornées, atlas anatomiques, biométrie cornéenne, topographie cornéenne, géométrie différentielle, courbures discrètes, descripteurs de forme.



---

# ABSTRACT

This thesis comprises three parts. The first two parts concern the development of methods for the construction of mean geometric models and for model comparison. These approaches are applied to the human cornea for the construction of atlases and a robust biometric study. The third part focuses on a generic method for the extraction of information in a mesh. This approach is based on discrete differential properties for building a graph structure to extract features using a semantic description.

Conventional anatomical atlases (paper or CD-ROM) are limited by the fact they generally show the anatomy of a single individual who does not necessarily represent the population from which they originate. To address the limitations of conventional atlases, we propose in the first part of this thesis to construct a 3D digital atlas containing the average characteristics and variability of the morphology of an organ, especially that of the human cornea. Several issues are addressed, such as the construction of an average cornea and the comparison of corneas. Currently, there are few studies with these objectives because the matching of corneal surfaces is a non-trivial problem. In addition to help to develop a better understanding of the corneal anatomy, 3D models of normal corneas can be used to detect any significant deviation from the norm, thereby allowing for an early diagnosis of diseases or abnormalities using the shape of the cornea.

The second part of this thesis aims to develop a method for recognizing a surface from a group of surfaces using their 3D acquisitions in a biometric application pertinent to the cornea. The concept behind this method is to quantify the difference between each surface and a given surface and to determine the threshold for recognition. This threshold depends on normal variations within the same subject and noise due to the acquisition system. The surfaces are randomly trimmed and pierced ; moreover, there is no common landmark on the surfaces. Two complementary methods are proposed. The first method consists of the computation of the volume between the surfaces after performing geometrical matching and the use of this volume as a criterion of similarity. The second approach is based on a decomposition of the surfaces into spherical harmonics using the coefficients as shape descriptors to compare the two surfaces. Each result of the proposed methods is compared to the most recent method described in the literature, with the benefits and disadvantages of each one described in detail. A cascading methodology using both methods to combine the advantages of each method is also proposed.

The third and final part of this thesis focuses on a new method for decomposing 3D triangulated meshes into graphs. We use discrete curvature maps as the shape descriptor to split the mesh in eight different categories (*peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* and *flat*). Next, an adjacency graph is built with a node for each patch. Because all categories of patches cannot be adjacent in a continuous context, intermediate junctions are added to ensure the continuous consistency between patches. These graphs are used to extract geometric characteristics described by patterns that allow for the detection of specific regions in a 3D model or recurrent characteristics. This decomposition method, being generic, can be used in many applications to analyze geometric models, especially in the context of the cornea.

**Keywords** : geometric modeling, meshes, surfaces, corneas, anatomical atlas, corneal biometry, corneal topographer, differential geometry, discrete curvatures, shape descriptor.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Résumé</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>Table des figures</b>	<b>11</b>
<b>Remerciements</b>	<b>15</b>
<b>1. Introduction</b>	<b>17</b>
<b>2. Notions de base et revue bibliographique</b>	<b>19</b>
2.1 Les atlas anatomiques numériques . . . . .	19
2.2 La cornée . . . . .	20
2.2.1 Données et acquisitions . . . . .	20
2.2.2 Visualisation par <i>Best Fit Sphere</i> (BFS) . . . . .	21
2.2.3 Représentation de surfaces cornéennes . . . . .	23
2.3 Concept de cornée moyenne et recalage de surface . . . . .	28
<b>3. Travaux préliminaires : échantillonnage et recalage de cornées</b>	<b>31</b>
3.1 Méthode de ré-échantillonnage . . . . .	31
3.1.1 Etude expérimentale de différentes méthodes d'interpolation . . . . .	32
3.1.2 Interprétation des données expérimentales de l'étude des différentes méthodes d'interpolation . . . . .	35
3.2 Méthode de mise en correspondance de surfaces cornéennes . . . . .	36
3.3 La base de données de cornées . . . . .	39

<b>4. Construction et comparaison d'atlas cornéens (article)</b>	<b>41</b>
4.1 Introduction . . . . .	45
4.2 Basic notions . . . . .	46
4.2.1 Corneal basic concepts . . . . .	46
4.2.2 Corneal atlas . . . . .	48
4.2.3 Registration by BFS normalization . . . . .	49
4.3 Description of the proposed method . . . . .	50
4.3.1 Overview of the atlas construction . . . . .	50
4.3.2 Resampling method . . . . .	50
4.3.3 Registration by inter-surface volume minimization of two surfaces . . . . .	52
4.3.4 Intermediate control surface for the registration of two-surfaced corneal acquisition . . . . .	55
4.3.5 Iterative registration algorithm for a set of surfaces . . . . .	56
4.3.6 Corneal atlas construction using a registration driven by an intermediate control surface . . . . .	57
4.3.7 Comparison . . . . .	58
4.4 Results and discussion . . . . .	58
4.4.1 Dataset . . . . .	58
4.4.2 Surfaces weighting . . . . .	59
4.4.3 Construction . . . . .	60
4.4.4 Comparison . . . . .	60
4.5 Conclusion and future work . . . . .	63
<b>5. Biométrie cornéenne (article)</b>	<b>65</b>
5.1 Introduction . . . . .	69
5.2 Basic notions . . . . .	70
5.2.1 Corneal basic concepts . . . . .	70
5.2.2 Zernike polynomials . . . . .	73
5.2.3 Corneal biometry using Zernike coefficients comparison . . . . .	74
5.3 Description of our two new methods . . . . .	75
5.3.1 METHOD 1: Corneal biometry using spherical harmonics coefficients comparison . . . . .	75
5.3.2 METHOD 2: Corneal biometry using inter-surface residual volume . . . . .	77
5.4 Results and discussion . . . . .	79

---

5.4.1	Dataset . . . . .	79
5.4.2	Results with Zernike coefficients . . . . .	79
5.4.3	Results with spherical harmonics coefficients . . . . .	81
5.4.4	Results using inter-surface residual volume . . . . .	82
5.5	Discussion . . . . .	83
5.6	Conclusion . . . . .	85
<b>6.</b>	<b>Description de forme par graphe s'appuyant sur les courbures discrètes (article)</b>	<b>87</b>
6.1	Introduction . . . . .	89
6.2	Basic notions on curvatures . . . . .	91
6.3	Graph construction method . . . . .	94
6.3.1	Decomposition into patches . . . . .	95
6.3.2	Continuous boundary between areas . . . . .	97
6.3.3	Construction of the graph . . . . .	102
6.4	Feature extraction method . . . . .	102
6.4.1	Feature extraction schemes . . . . .	103
6.4.2	Pattern extraction method . . . . .	104
6.5	Examples and validation . . . . .	106
6.5.1	Semantic description of a feature . . . . .	106
6.5.2	Similarity between two meshes . . . . .	107
6.5.3	Self-similarity within a mesh . . . . .	108
6.6	Conclusion and future work . . . . .	109
6.7	Acknowledgments . . . . .	110
<b>7.</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>111</b>
7.1	Synthèse . . . . .	111
7.2	Perspectives des travaux de thèse . . . . .	113
7.2.1	Atlas cornéens . . . . .	113
7.2.2	Biométrie cornéenne . . . . .	113
7.2.3	Extraction de caractéristiques par graphe enrichi . . . . .	114
7.3	Perspectives générales . . . . .	114
	<b>Publications de l'auteur</b>	<b>117</b>

**Bibliographie**

**119**

---

## TABLE DES FIGURES

2.1	Vue en coupe du globe oculaire. . . . .	20
2.2	Construction de la surface cornéenne avec les données brutes de l' <i>Orbscan II</i> . . .	21
2.3	Construction de la carte de couleur par BFS. . . . .	22
2.4	Quatre cornées mesurées avec l' <i>Orbscan II</i> , d'yeux droits de sujets sains. . . . .	23
2.5	Modèle par révolution conique. . . . .	23
2.6	Modèle biconique. . . . .	24
2.7	Polynômes de Zernike. . . . .	24
2.8	Décomposition en polynômes de Zernike. . . . .	25
2.9	Illustration graphique de $l$ et $m$ . . . . .	26
2.10	Modèle utilisant des cartes de courbures tangentiellles. . . . .	27
2.11	Illustration des plans de coupe de mesure des courbures tangentiellles et axiales. .	27
2.12	Exemple d'une topographie cornéenne trouée. . . . .	28
2.13	Les trois zones de repère pour le ré-alignement. . . . .	29
2.14	Résultat de la méthode de recalage par normalisation de BFS. . . . .	30
2.15	Carte de variance. . . . .	30
3.1	Interpolation d'une élévation suivant l'axe des $z$ par rapport à une coordonnée $xy$ .	32
3.2	Construction de la face représentative d'une sphère afin de pouvoir la comparer aux différentes méthodes proposées. . . . .	33
3.3	Comparaison des tests d'interpolation. . . . .	34
3.4	Volume entre deux surfaces. . . . .	36
3.5	Exemples de convergences. . . . .	37
3.6	Equation de la moyenne des différences absolues ( <i>mda</i> ). . . . .	37
3.7	Recalage de deux surfaces. . . . .	38
4.1	Sectional view of the eyeball. . . . .	47
4.2	Surface mesh construction step from <i>Orbscan II</i> raw data. . . . .	47
4.3	Color map building steps. . . . .	48

4.4	A color map. . . . .	48
4.5	Overview of the atlas construction using an iterative registration of the ICS. . . . .	50
4.6	The average absolute difference equation. . . . .	53
4.7	Registration of two surfaces. . . . .	54
4.8	Intermediate control surface equation. . . . .	56
4.9	Iterative registration algorithm. . . . .	57
4.10	Corneal atlas construction methodology. . . . .	58
4.11	Evolution of the disparity after registration for different values of $r_a$ and $r_p$ . . . . .	59
4.12	Average OD atlas built with 3835 right eyes. . . . .	60
4.13	Male - female difference. . . . .	61
4.14	Average myopic (top) and hyperopic (bottom) right eye. . . . .	62
4.15	Myopic – hyperopic difference maps. . . . .	63
5.1	Deux acquisitions pour quatre cornées différentes. . . . .	67
5.2	Sectional view of the eyeball. . . . .	71
5.3	Surface mesh construction step from <i>Orbscan II</i> raw data. . . . .	71
5.4	Color map building steps. . . . .	72
5.5	Two acquisitions for 3 different subjects a, b and c. . . . .	72
5.6	The average absolute difference equation ( <i>aad</i> ). . . . .	77
5.7	Registration of two surfaces. . . . .	78
5.8	Matching values using a Zernike coefficients comparison . . . . .	80
5.9	ROC curve comparison of the Zernike method. . . . .	80
5.10	Matching values using a spherical harmonics coefficients comparison . . . . .	81
5.11	ROC curve comparison of the Zernike method. . . . .	81
5.12	Matching values using inter-surface residual volume comparison . . . . .	82
5.13	ROC curve comparison of the Zernike method. . . . .	82
5.14	All results grouped on a ROC curve . . . . .	84
5.15	The cascade fusion architecture . . . . .	85
6.1	The curvature on a curve. . . . .	91
6.2	The curvature on a surface. . . . .	92
6.3	Mean and Gaussian curvatures on a bunny mesh . . . . .	93
6.4	Shape categories using mean and Gaussian curvatures. . . . .	93
6.5	Category map on a bunny mesh. . . . .	94
6.6	Overview of the graph construction methodology . . . . .	94



---

6.7	Three examples of the influence of the distance parameter on the <i>bunny</i> mesh. . .	95
6.8	The selection of vertices. . . . .	96
6.9	Vertices used for the local curvature estimation. . . . .	96
6.10	Adjacency rules between patches. . . . .	97
6.11	Continuous boundary enrichment on a simple bumped mesh . . . . .	98
6.12	Continuous boundary enrichment. . . . .	99
6.13	Graph construction procedure . . . . .	102
6.14	Three examples of graph construction. . . . .	103
6.15	Pattern extraction schemes. . . . .	104
6.16	Feature extraction by terminal sub-graph recognition. . . . .	106
6.17	Extraction of flowers on the Buddha mesh. . . . .	107
6.18	Feature recognition between two meshes. . . . .	107
6.19	Self-similarity extraction on a mesh. . . . .	108
7.1	Deux objets différents produisant le même graphe. . . . .	115



---

# REMERCIEMENTS

Je souhaiterais remercier chaque personne qui ont rendu ce travail possible.

Merci aux membres du jury pour leur participation et l'attention qu'ils ont su porter à ce travail. Je remercie Laurent Najman et Nicolas Passat pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Mireille Garreau et Gérard Subsol pour leur participation au jury de thèse.

Je remercie Isabelle Brunette, sans qui ces travaux n'auraient pas été possibles, pour son support clinique, mais aussi pour la confiance qu'elle a su m'accorder.

Merci à Marc Daniel, pour sa sagesse, sa sympathie et ses précieux conseils.

Je remercie également Jean-Luc Mari et Jean Meunier pour m'avoir guidé pendant ces années, pour leur disponibilité en tout temps, leur parfaite synergie, leur soutien, ainsi que pour leurs qualités scientifiques et humaines.

Merci également aux membres de l'équipe de G-Mod à Marseille et du Laboratoire de Traitement d'Images à Montréal, pour l'accueil chaleureux, les discussions enrichissantes, et les moments partagés durant ces années.

Je remercie les thésards, étudiants, et post-docs qui m'ont accompagnés durant mon doctorat, aussi bien à Marseille qu'à Montréal et qui ont su, chacun à leur façon, contribuer au bon déroulement de cette thèse, merci à Aldo, Claire, Edouard, Joris, Jules, Nicolas, Nicole, Lilia, et Valentin.

Je remercie Edouard Auvinet pour ses précieux conseils et les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble.

Je remercie Aldo, pour son réconfort et sa bonne humeur quotidienne dans le bureau à Marseille. Merci également à Lilia, pour son irremplaçable présence, aussi bien au bureau qu'au McCarold à Montréal.

Je tiens également à remercier mes parents et ma sœur pour leur soutien durant ces années.



## INTRODUCTION

Lors d'un examen ophtalmologique, pour réaliser un diagnostic ou un suivi, il est courant de mesurer la surface tridimensionnelle de la cornée. En effet, des déformations peuvent être liées par exemple, à des pathologies, des traumatismes, une chirurgie, ou même simplement à l'âge. Dès lors, la possibilité d'estimer et caractériser cette déformation permet d'apporter une information pertinente au médecin pour aider à son diagnostic. Pour pouvoir différencier une cornée pathologique d'une cornée saine, il est nécessaire de spécifier ce qu'est une cornée saine. La difficulté de cette spécification vient de la variabilité importante de la forme de la cornée au sein de la population.

Un modèle d'atlas anatomique de la cornée se compose d'une surface moyenne et de la variance autour de celle-ci. En général, la construction d'un atlas anatomique se fait en deux étapes : mettre en correspondance plusieurs données d'une même partie de l'anatomie, et combiner ces données afin de déterminer une moyenne. Dans le cas de la cornée, un problème non trivial se pose dans l'étape de mise en correspondance des données, la cornée étant quasi sphérique, il n'y a pas de point de repère permettant de facilement combiner des surfaces cornéennes. De plus, la cornée est un volume constitué de deux surfaces distinctes (antérieure et postérieure).

Dans cette thèse, nous nous intéressons à plusieurs problématiques liées à la géométrie cornéenne : combiner plusieurs cornées afin de construire une moyenne, comparer plusieurs cornées, discriminer ou reconnaître des cornées parmi d'autres.

Les applications qui en découlent sont nombreuses, telles que l'enrichissement de la connaissance anatomique cornéenne, faire de l'aide au diagnostic, reconnaître et décrire des pathologies en quantifiant leurs différences relatives à la moyenne, ou encore reconnaître des personnes à l'aide d'une application de biométrie cornéenne.

Cette thèse par articles est composée de trois articles de journaux. Dans une première partie, le contexte médical ainsi que les notions de bases nécessaires à l'interprétation des résultats sont décrites. Ensuite une revue de l'existant est présentée sur les méthodes de représentations de surfaces cornéennes, puis sur les approches existantes de mise en correspondance et de comparaison de cornées.

Le chapitre 4 présente notre première contribution à travers un article sur la construction et la comparaison d'atlas cornéen. Le chapitre 5 présente un deuxième article portant sur la biométrie cornéenne. Le chapitre suivant est notre troisième contribution, plus fondamentale, sur l'étude de forme à l'aide de décomposition de maillages en graphes en s'appuyant sur la géométrie différentielle discrète. Cette étude a pour objectif de décrire une forme à l'aide d'un graphe, cette méthodologie peut être appliquée à de nombreux domaines où il est question d'analyser des modèles géométriques, en particulier dans le contexte de la cornée.

Ce manuscrit s'achève par une conclusion et une discussion générale sur nos travaux dans un dernier chapitre, et des perspectives sont proposées pour le prolongement de ce travail.

---

## NOTIONS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### Sommaire

---

2.1	Les atlas anatomiques numériques . . . . .	19
2.2	La cornée . . . . .	20
2.2.1	Données et acquisitions . . . . .	20
2.2.2	Visualisation par <i>Best Fit Sphere</i> (BFS) . . . . .	21
2.2.3	Représentation de surfaces cornéennes . . . . .	23
2.3	Concept de cornée moyenne et recalage de surface . . . . .	28

---

## 2.1 Les atlas anatomiques numériques

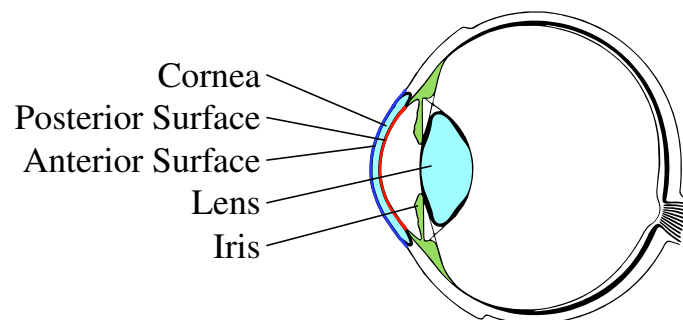
Un *atlas anatomique numérique* est généralement une représentation moyenne d'une partie de l'anatomie, relatif à une population donnée, et accompagné de sa variance. Ce type de données a de nombreuses applications, comme la caractérisation de l'impact d'une pathologie (différences relatives à la moyenne), l'aide à la segmentation automatique, et plus globalement, élargir la connaissance anatomique générale.

Un atlas anatomique est réalisé par une mise en correspondance des données d'une partie de l'anatomie provenant de différents individus (le plus souvent par recalage), et d'une moyenne de ces données. La variance de ces données après recalage permet d'indiquer les extrêmes possibles de la partie de l'anatomie étudiée.

Pour créer un atlas anatomique d'une population, il faut un nombre relativement important de données pour qu'il soit représentatif de cette population. On cherche alors pour chaque cas particulier et chaque type d'acquisition les meilleurs *amers*<sup>1</sup> *anatomiques*, ainsi qu'un type de recalage adapté. De nombreuses études ont eu pour objectif la construction d'atlas anatomiques, beaucoup se portant sur l'anatomie humaine : atlas 3D du crâne [Subsol et al. 1998], atlas des artères coronaires [Lemke et al. 2002], atlas du cerveau [Guimond et al. 2000], atlas du cortex cérébral [Van Essen 2005].

## 2.2 La cornée

La cornée est la partie extérieure de l'œil, elle recouvre environ un cinquième de la surface du globe oculaire, pour une moyenne, chez l'adulte, de 11 mm de diamètre. Elle est la principale lentille de l'œil, responsable de deux tiers de sa puissance dioptrique (le tiers restant vient du cristallin), avec un indice de réfraction de 1,377.



**Figure 2.1:** Vue en coupe du globe oculaire.

La cornée est légèrement plus épaisse en périphérie : environ 0,5 mm au centre, et environ 0,6 mm en périphérie. Le rayon de courbure de la surface antérieure varie de 7 à 9 mm, et est d'environ 6,5 mm pour la surface postérieure.

### 2.2.1 Données et acquisitions

L'*Orbscan II* (Bausch & Lomb.) est un appareil de mesure d'élévations de la cornée, il est capable de mesurer la partie antérieure ainsi que la partie postérieure de la cornée avec une marge d'erreur de l'ordre du micron. Les données peuvent se présenter sous la forme de grilles d'élévations  $101 \times 101$ , espacées uniformément de 0,1 mm en X et en Y. La Figure 2.2 (a) illustre les données brutes de l'*Orbscan II*, le système d'acquisition fournit directement ces données

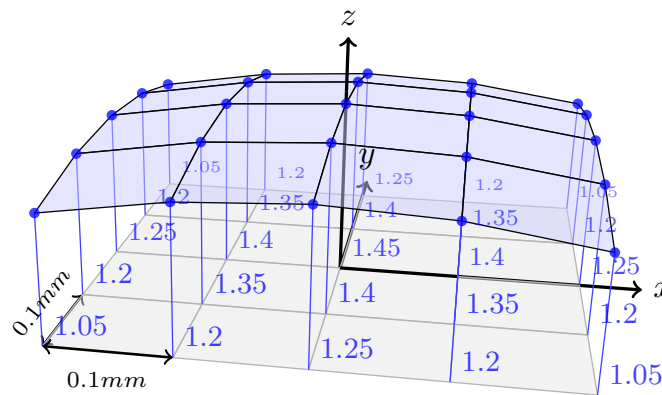
1. Point de repère fixe et identifiable commun à un jeu de données.



après la mesure. La Figure 2.2 (b) présente la procédure de construction d'un maillage à partir des élévations. Les sommets sont élevés par les valeurs leur correspondant, puis liés par des arêtes afin de former les faces. Cette représentation simplifiée de  $5 \times 5$  points en élévation de la Figure 2.2 (b) sera utilisée tout au long de ce document pour une meilleure compréhension.

(a) Le topographe *Orbscan II*.

1.05	1.20	1.25	1.20	1.05
1.20	1.35	1.40	1.35	1.20
1.25	1.40	1.45	1.40	1.25
1.20	1.35	1.40	1.35	1.20
1.05	1.20	1.25	1.20	1.05

(b) Données brutes de l'*Orbscan II*.

(c) Maillage construit avec les élévations.

**Figure 2.2:** Construction de la surface cornéenne avec les données brutes de l'*Orbscan II*.

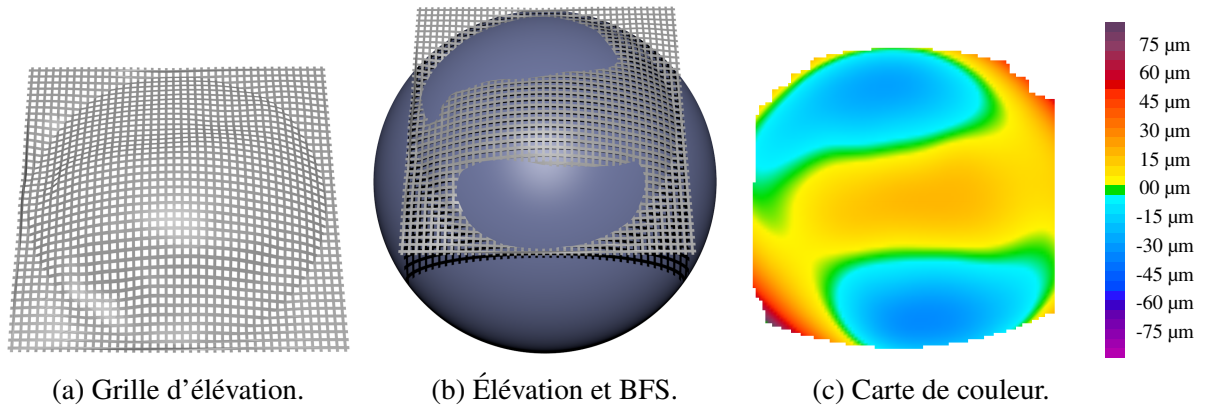
### 2.2.2 Visualisation par *Best Fit Sphere* (BFS)

La cornée étant presque sphérique, un moyen simple et efficace de visualiser l'aspect de sa surface est d'utiliser une référence sphérique (*Best Fit Sphere*<sup>2</sup>) afin d'étudier ses différences par rapport à une sphère. Dans un premier temps, la sphère qui correspond le mieux à la grille d'élévation étudiée est calculée, puis la différence qu'il y a avec la surface de la sphère par rapport à son centre en chaque point de cette grille est estimée. Ceci permet d'associer cette différence à une couleur ; un jeu de couleurs standard sera utilisé : des couleurs chaudes (rouge, orange, jaune) pour les différences positives (les points extérieurs à la BFS) et des couleurs froides (bleu

2. Best Fit Sphere (BFS) : meilleure approximation sphérique.

foncé, bleu clair) pour les différences négatives (les points intérieurs à la BFS). Les couleurs sont ensuite projetées sur un plan sur l'axe des  $z$ .

Les ophtalmologistes utilisent cette représentation par carte de couleurs ainsi que le jeu de couleurs de la Figure 2.3 pour procéder à leurs examens médicaux.



**Figure 2.3:** Construction de la carte de couleur par BFS.

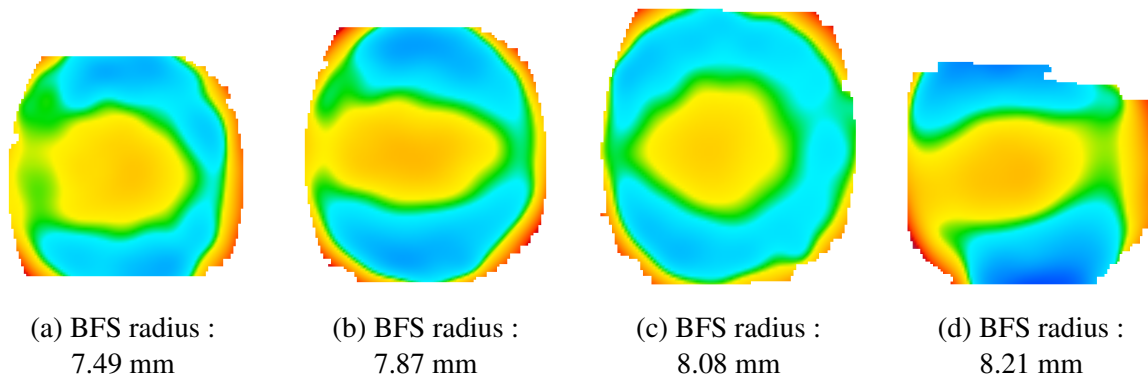
### Calcul de la BFS

La BFS est calculée en minimisant la somme des distances au carré entre la sphère et chaque point de la cornée, ce qui donne l'expression suivante à minimiser :

$$f(c, R) = \sum_{k=1}^n (\sqrt{(x_k - x_c)^2 + (y_k - y_c)^2 + (z_k - z_c)^2} - R)^2$$

Avec  $k$  un point de la cornée,  $c$  le centre de la BFS,  $R$  son rayon, et  $n$  le nombre de points de la cornée.

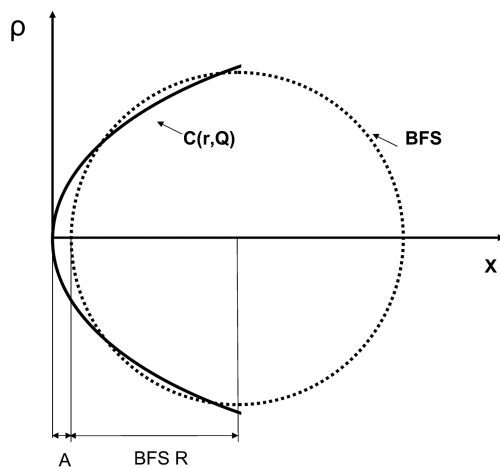
La Figure 2.4 montre quatre exemples de surfaces cornéennes antérieures droites de 4 sujets différents afin d'illustrer la variabilité au sein d'une population.



**Figure 2.4:** Quatre cornées mesurées avec l'Orbscan II, d'yeux droits de sujets sains.

### 2.2.3 Représentation de surfaces cornéennes

Il existe plusieurs moyens de représentation de la surface cornéenne. Des modèles mathématiques ont été proposés afin de caractériser l'asphéricité et la toricité de la surface, en s'appuyant sur une équation conique [Bennett and Rabbetts 1991] (Figure 2.5), ou biconique [Gatinel et al. 2011] (Figure 2.6).



$$C(r, Q) = \frac{r - \sqrt{r^2 - (Q+1)\rho^2}}{Q+1}$$

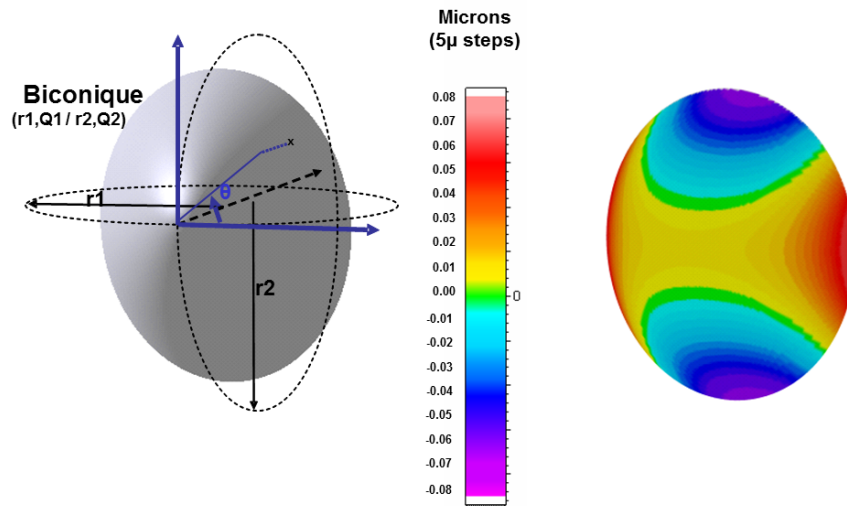
$r$  : rayon de courbure apical

$Q$  : asphéricité

$R$  : rayon de la BFS

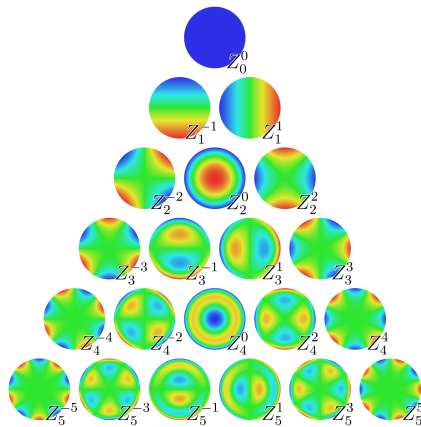
$A$  : distance à l'apex

**Figure 2.5:** Modèle par révolution conique (source : D. Gatinel [Gatinel et al. 2011]).



**Figure 2.6:** Modèle biconique ; la surface est construite par interpolation de deux coniques horizontale et verticale [Gatnel 2015].

Un autre moyen de représentation d'une surface cornéenne est la décomposition en polynômes de Zernike de la carte d'élévation cornéenne [Iskander et al. Jan. 2001] (Figures 2.7 et ??).



Avec  $m$  et  $n$  des entiers naturels non nuls, et  $n \geq m$  :

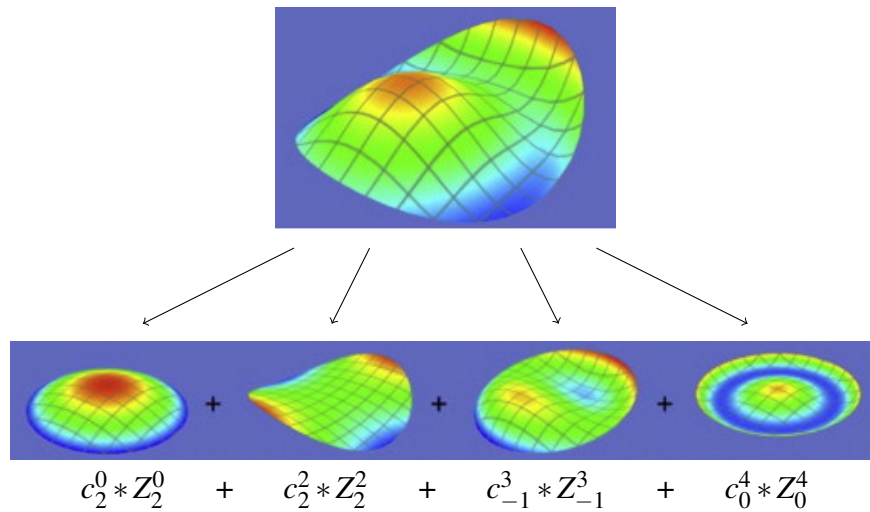
$$Z_n^m(r, \theta) = R_n^m(r) \cos(m\theta) \text{ (paires)}$$

$$Z_n^m(r, \theta) = R_n^m(r) \sin(m\theta) \text{ (impaires)}$$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{(s)! (\frac{n+m}{2} - s)! (\frac{n-m}{2} - s)!} r^{n-2s}$$

**Figure 2.7:** Polynômes de Zernike.

Les polynômes de Zernike sont couramment utilisés dans le domaine de l'ophtalmologie car ils peuvent être directement interprétés comme des quantifications de certaines aberrations optiques, par exemple l'astigmatisme.



**Figure 2.8:** Une surface peut être décomposée en une série de coefficients  $C_n^m$ , chaque coefficient étant un poids. Ces coefficients peuvent être utilisés comme critères de forme, et permettent aussi la reconstruction de la surface.

Une autre façon de représenter une surface cornéenne est l'utilisation d'harmoniques sphériques (utilisées dans [Iskander 2009]).

Toute surface d'élévation  $f(\theta, \varphi)$  peut être décomposée en une somme de  $2l + 1$  harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , avec  $-l \leq m \leq l$ , pondérées par un coefficient  $C_l^m$ , où  $l$  et  $m$  sont des entiers, tel que :

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Avec  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  tel que :

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\varphi)$$

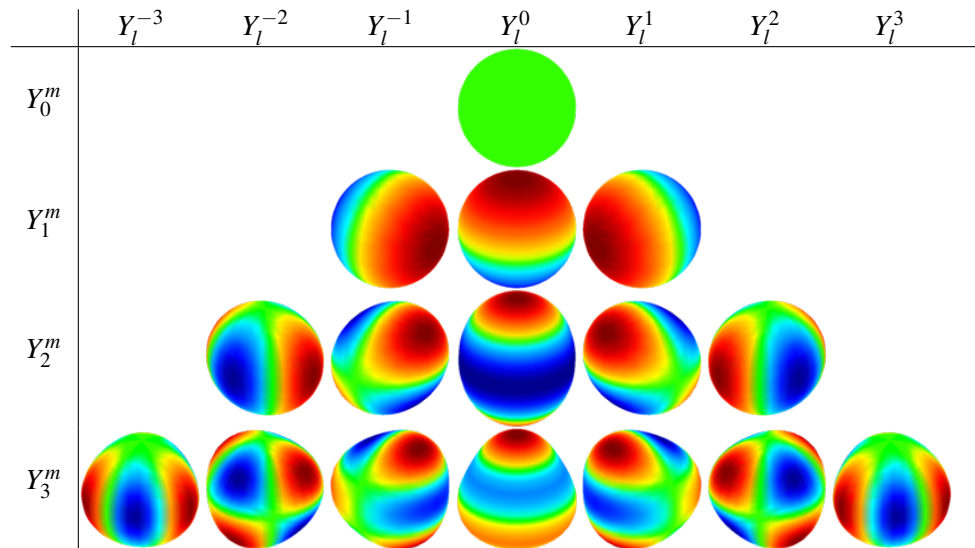
Avec la fonction de Legendre :

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l$$

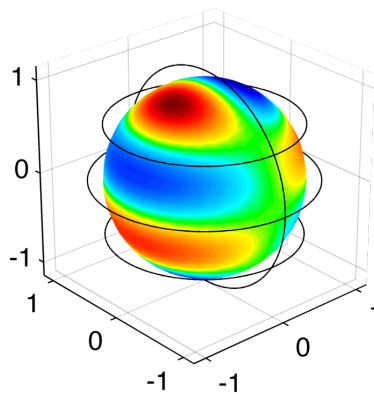
Puis chaque coefficient est associé à un index :

	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$l = 0$			$C_0^0$ (1)		
$l = 1$		$C_1^{-1}$ (2)	$C_1^0$ (3)	$C_1^1$ (4)	
$l = 2$	$C_2^{-2}$ (5)	$C_2^{-1}$ (6)	$C_2^0$ (6)	$C_2^1$ (7)	$C_2^2$ (8)
...	...	...	...	...	...

Ce qui permet de représenter une surface uniquement avec une liste de coefficients. La table suivante montre les 16 premières harmoniques sphériques  $Y_0^0$  à  $Y_3^3$  relativement à une sphère unitaire, les valeurs négatives sont en bleu (à l'intérieur de la sphère) et les valeurs positives sont en rouge (en dehors de la sphère), les valeurs nulles sont en vert (sur la sphère) :

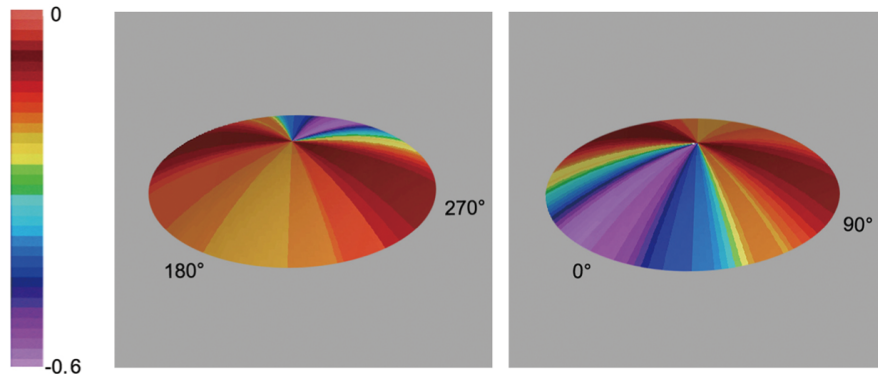


La Figure 2.9 illustre graphiquement la signification de  $l$  et  $m$  avec un exemple.



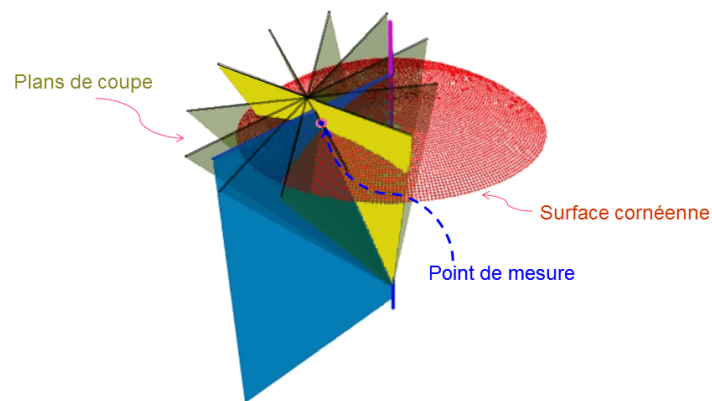
**Figure 2.9:**  $Y_l^m = Y_4^1$ , où  $l$  correspond au nombre de jonctions circulaires entre les valeurs positives et négatives (indiquées par 4 cercles noirs), et  $m$  correspond au nombre de jonctions verticales (méridiens).

Plus récemment, un modèle utilisant des cartes de courbures tangentielles [Zheng et al. 2013] a été proposé (Figures 2.10).



**Figure 2.10:** Modèle utilisant des cartes de courbures tangentielles, chaque semi-méridien est une valeur représentant l'asphéricité ( $Q$ ).

Il existe plusieurs types de cartes de courbures cornéennes, les principales sont les courbures tangentielles (ou instantanées), et les courbures axiales (ou sagittales). La courbure tangentielle est mesurée sur chaque méridien tangentiel, formé par le plan de coupe qui passe par l'axe central (en bleu sur la Figure 2.11, l'axe central est en violet), et la courbure axiale qui est mesurée sur le plan de coupe perpendiculaire au méridien tangentiel au point d'intérêt (en jaune sur la Figure 2.11).

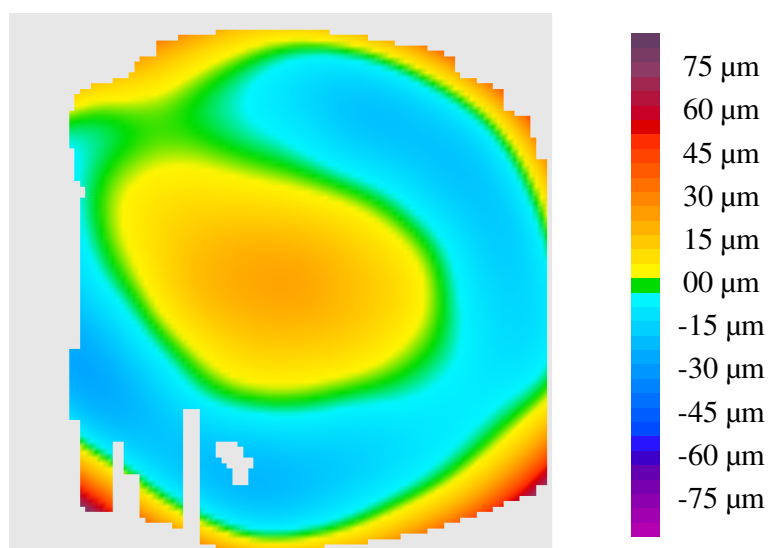


**Figure 2.11:** Illustration des plans de coupe de mesure des courbures tangentielles et axiales [Gatinel 2015].

Dans cette étude, nous utilisons directement les cartes d'élévation, qui sont les données brutes du système d'acquisition, et qui peuvent être directement maillées afin de construire une surface discrète.

## 2.3 Concept de cornée moyenne et recalage de surface

La cornée est une membrane qui n'a que très peu de caractéristiques anatomiques évidentes (comme par exemple les doigts sur une main) ce qui la rend difficile à appréhender. C'est pourquoi la réalisation d'une cornée moyenne est assez complexe. De ce fait, il n'existe pas de réel amer anatomique sur la cornée. De plus, pour les données provenant de l'*Orbscan II*, les grilles sont rognées en périphérie, et parfois trouées, et ce, de façon non prévisible : sur l'image de la Figure 2.12 on peut voir que les acquisitions sont rognées et trouées ; la partie grisée correspond au complémentaire de la surface cornéenne, soit un carré de 10 mm par 10 mm.



**Figure 2.12:** Exemple d'une topographie cornéenne trouée.

Le concept de cornée moyenne a déjà été utilisé lors d'études médicales afin de comparer plusieurs groupes de différentes chirurgies [Hayashi et al. 1994], de différentes tranches d'âge [Hayashi et al. 1995], de patients lors d'une étude de la stabilité de la surface oculaire dans la période entre les clignements des yeux [Buehren et al. 2001], ou de différence à la moyenne pour une étude de répétabilité [FAM et al. 2005].

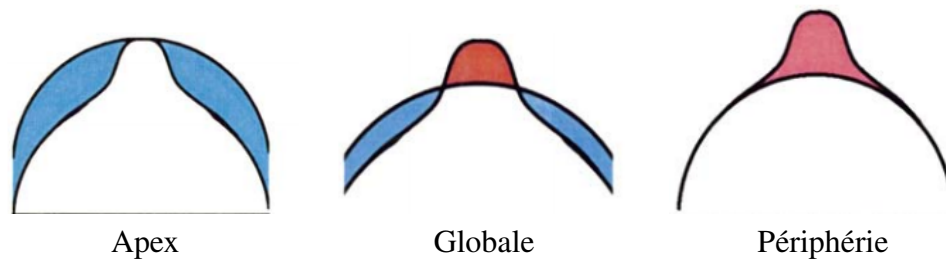
En 2002 Buehren *et al.* introduisent la notion de ré-alignement des surfaces [Buehren et al. 2002] afin d'avoir une meilleure moyenne, en recalant en  $xyz$  à l'aide de l'apex<sup>3</sup> de la *best fit sphere*, et avec une régression de plan pour corriger l'inclinaison. Les auteurs observent qu'après

3. Extrémité conique d'un organe, le point le plus haut dans le cas de cartes d'élévation cornéenne.



correction des surfaces, la variabilité inter-sujets des coefficients d'une décomposition en polynômes de Zernike diminue.

Grzybowski *et al.* décrivent trois zones de repère pour le ré-alignement en 2005 : le point de l'apex, la périphérie et la zone globale [Grzybowski et al. 2005] (3 exemples de ré-alignement sur une sphère selon les 3 zones de mise en correspondances sont présentés Figures 2.13, en rouge les zones en dehors de la sphère, et en bleu les zones dans la sphère).



**Figure 2.13:** Les trois zones de repère pour le ré-alignement [Grzybowski et al. 2005].

En 2007, Laliberté *et al.* ont proposé une méthode de ré-alignement destinée à la construction d'atlas anatomique cornéen, afin de recaler des cornées issues de différents patients, en effectuant une normalisation de BFS [Laliberté et al. 2007], cette méthode a été réutilisée dans le cadre d'études médicales dans [Auvinet et al. 2012]. C'est la seule approche proposée pour la génération d'atlas cornéen à ce jour.

Pour construire cet atlas, les auteurs utilisent 516 grilles d'élévations, d'yeux droits, de sujets sains, provenant de *l'Orbscan II*. Les grilles sont de taille  $101 \times 101$ , espacées uniformément de 0,1mm en x et en y. Il s'agit de les recaler afin d'en faire la moyenne.

La méthodologie est la suivante :

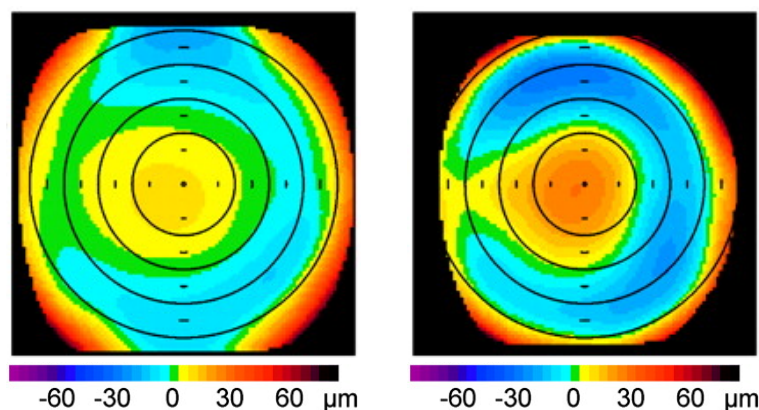
1. Calcul d'une sphère moyenne des BFS de chaque topographie, afin d'avoir une BFS moyenne commune.
2. Normalisation spatiale<sup>1</sup> de chaque topographie sur la BFS moyenne.
3. Ré-échantillonnage des topographies sur la grille d'origine, à l'aide d'une interpolation bi-cubique.
4. Calcul de la moyenne et de la variance des élévations.

Cette méthode s'appuie sur le fait qu'une cornée est très semblable à une sphère, ce qui incite les auteurs à utiliser sa BFS comme élément de référence.

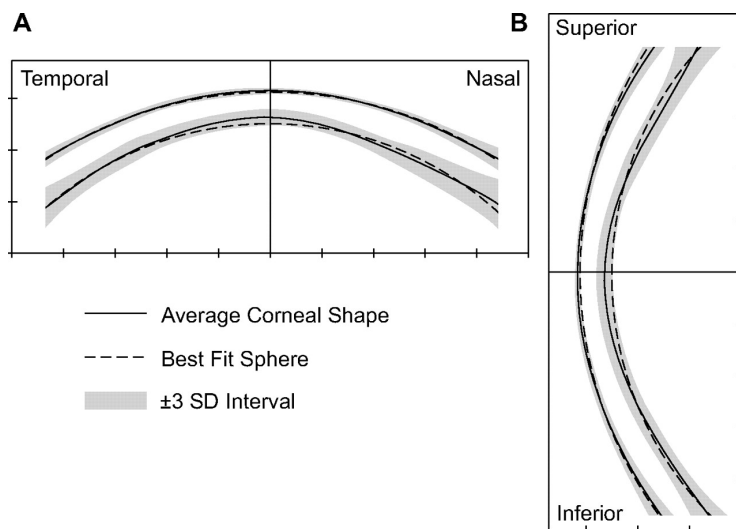
1. C'est une mise à l'échelle combinée à une translation afin de positionner les centres des sphères au même point, et d'avoir le même rayon pour chacune d'elles.

### Résultats et limites de l'approche

Les Figures 2.14 et 2.15 présentent des résultats de la méthode de recalage par normalisation de BFS sur 516 yeux droits sains. La cornée n'étant pas réellement sphérique, la mettre en correspondance avec d'autres cornées en la considérant comme une sphère induit un biais dans l'atlas, ce qui constitue le principal inconvénient de cette approche. De plus, cette méthode ne prend pas en compte la possibilité de rotations : le recalage ne correspond qu'à la combinaison d'une translation et d'une homothétie homogène.



**Figure 2.14:** Résultat de la méthode de recalage par normalisation de BFS [Laliberté et al. 2007].



**Figure 2.15:** Carte de variance [Laliberté et al. 2007].

# TRAVAUX PRÉLIMINAIRES : ÉCHANTILLONNAGE ET RECALAGE DE CORNÉES

## Sommaire

3.1	Méthode de ré-échantillonnage . . . . .	31
3.1.1	Etude expérimentale de différentes méthodes d'interpolation . . . . .	32
3.1.2	Interprétation des données expérimentales de l'étude des différentes méthodes d'interpolation . . . . .	35
3.2	Méthode de mise en correspondance de surfaces cornéennes . . . . .	36
3.3	La base de données de cornées . . . . .	39

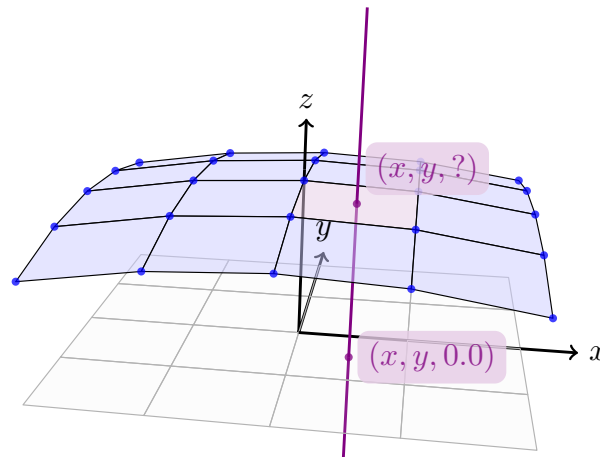
Afin de conserver la précision de la machine lors de l'interpolation de l'élévation (ces interpolations sont indispensables pour la construction d'un atlas, Figure 3.1) ce chapitre propose une étude sur le choix de la méthode à utiliser. Cette méthode d'interpolation s'insère dans une méthodologie de recalage de surfaces cornéennes, qui est ensuite comparée à l'existant. Ces méthodes sont finalement utilisées dans plusieurs études : pour construire un atlas, pour comparer et discriminer des surfaces cornéennes, et pour la reconnaissance d'individus.

## 3.1 Méthode de ré-échantillonnage

Après avoir recalé une surface cornéenne sur une autre, il faut les ré-échantillonner afin d'avoir de nouveau un alignement des grilles d'élévations pour pouvoir les combiner où les comparer. Dans l'article [Laliberté et al. 2007], l'étape de ré-échantillonnage est faite avec une méthode d'interpolation bi-cubique. Dans une étude plus récente, [Auvinet et al. 2012] utilisent une interpolation bi-linéaire. Lors de cette étape, il y a une approximation des données (qui est indispensable). Etant donnée la précision du système d'acquisition, il est important de bien choisir quelle méthode utiliser. La première partie de cette étude a été de comparer plusieurs méthodes afin d'en choisir une qui conserve la précision du système d'acquisition, et qui soit exécutable en un temps raisonnable (cette méthode sera utilisée lors de la construction d'atlas en mettant en

correspondance plusieurs milliers de surfaces cornéennes, le temps de calcul n'est pas le critère le plus important, mais il n'est donc pas à négliger).

### 3.1.1 Etude expérimentale de différentes méthodes d'interpolation



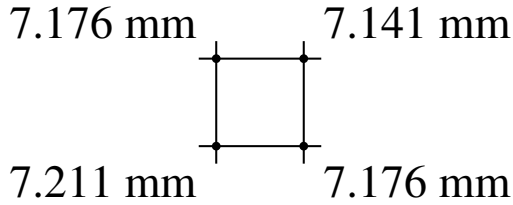
**Figure 3.1:** Interpolation d'une élévation suivant l'axe des  $z$  par rapport à une coordonnée  $xy$ .

La difficulté est liée à la non-planéité des faces du maillage, qui ont 4 sommets. En plus de conserver la précision du système d'acquisition, cette interpolation doit être rapide à exécuter, car elle sera utilisée pour chaque face de chaque maillage, et donc pour chaque itération de recalage. Le temps de calcul est donc un paramètre important. Afin de déterminer la méthode à utiliser, on se propose d'essayer plusieurs approches sur un maillage artificiel, car il est aisément possible d'estimer l'erreur d'interpolation sur une forme connue. En premier lieu, une carte d'élévation sphérique artificielle ayant les mêmes caractéristiques qu'une carte issue du système d'acquisition (grille de  $101 \times 101$ ), avec des dimensions d'une cornée typique (un rayon de 8 mm) est générée.

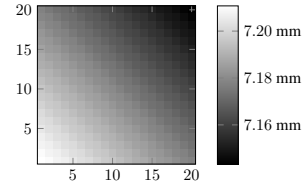
$$\text{élévationRéelle}_{xy} = \sqrt{\left(r^2 - \left(\left(x - \frac{g}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{g}{2}\right)^2\right)\right)}$$

avec  $r$  le rayon de la sphère et  $g$  la largeur de la grille d'élévation.

Une fois la surface artificielle sphérique construite, une face de test est ensuite choisie (Figure 3.2 a), puis une série d'interpolations est effectuée sur cette face, avec les différentes méthodes à expérimenter. Et pour finir, une comparaison est faite entre la valeur interpolée et la valeur réelle (Figure 3.2 b) que l'on obtient avec la formule de l'*élévationRéelle*<sub>xy</sub>. Cette série d'interpolations représente un découpage de  $20 \times 20$  interpolations sur une grille régulière sur toute la surface de la face étudiée.



(a) La face choisie pour faire les tests d'interpolation.



(b) Élévations réelles de la face étudiée.

**Figure 3.2:** Construction de la face représentative d'une sphère afin de pouvoir la comparer aux différentes méthodes proposées.

On peut alors construire une grille de l'erreur due à l'interpolation. Cette grille est calculée par la différence absolue entre les valeurs interpolées et les valeurs réelles. Puis la valeur maximale de ces erreurs est déterminée afin de pouvoir les comparer.

#### Interpolation par recherche du point le plus proche

Cet algorithme s'appuie sur une simple recherche du point le plus proche en  $xy$  de la coordonnée interpolée. On choisit l'élévation de ce point comme nouvelle valeur à la coordonnée recherchée (Figure 3.3a).

#### Interpolation par PID (Pondération Inverse à la Distance [Shepard 1968])

Cette interpolation est une moyenne pondérée par l'inverse de la distance de chaque point (Figure 3.3b). On attribue un poids à chaque point en fonction de la distance de ce point à la coordonnée interpolée (donc plus un point de la face est proche de la coordonnée interpolée, plus il a de poids dans son calcul), et on effectue ensuite une moyenne, ce qui nous donne la formule générale suivante. Avec  $p_{interp}$  la coordonnée  $xy$  interpolée, et  $el_{interp}$  son élévation en  $z$ ,  $p_k$  un point de la liste de points en  $xy$ , et  $el_k$  son élévation en  $z$ ,  $dist$  une distance et  $N$  la taille de la liste de points, avec  $id$  l'inverse de la distance et  $p_{xy}$  un point quelconque, on a l'expression :

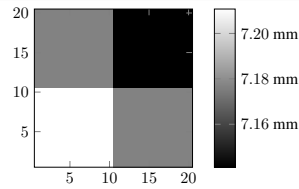
$$id(p_{xy}, p_k) = \frac{1}{dist(p_{xy}, p_k)}$$

ce qui donne l'expression suivante de l'interpolation de l'élévation :

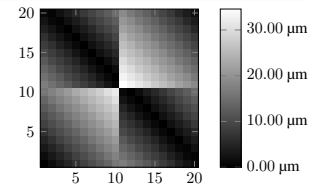
$$el_{interp} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} id(p_{interp}, p_k) el_k}{\sum_{k=0}^{N-1} id(p_{interp}, p_k)}$$

#### Interpolation bilinéaire

L'interpolation bilinéaire est une combinaison de deux interpolations linéaires afin de pouvoir l'appliquer à une grille 2D (Figure 3.3c).

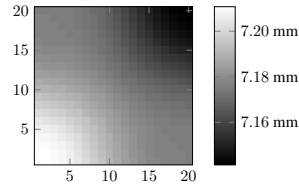


Grille d'élévations 20\*20 interpolée (9,2 ms)

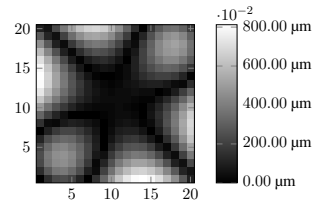


Erreurs dues à l'interpolation (max : 34,6 µm)

(a) Résultats de la méthode d'interpolation du point le plus proche.

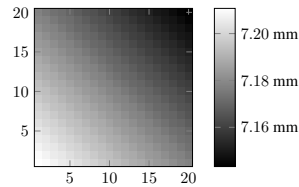


Grille d'élévations 20\*20 interpolée (8,1 ms)

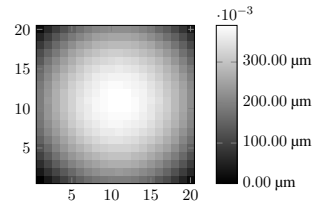


Erreurs dues à l'interpolation (max : 8,12 µm)

(b) Résultats de la méthode d'interpolation par PID.

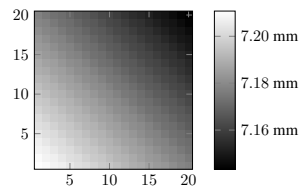


Grille d'élévations 20\*20 interpolée (0,0031ms)

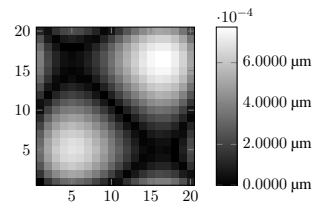


Erreurs dues à l'interpolation (max : 0,39µm)

(c) Résultats de la méthode d'interpolation bilinéaire.

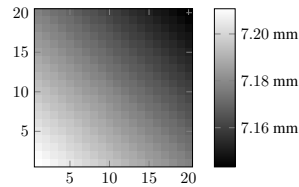


Grille d'élévations 20\*20 interpolée (302,2ms)

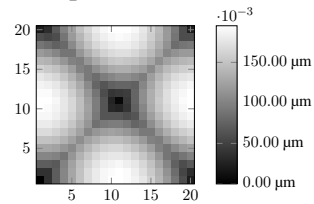


Erreurs dues à l'interpolation (0,0008µm)

(d) Résultats de la méthode d'interpolation bicubique.



Grille d'élévations 20\*20 interpolée (130,3ms)



Grille d'élévations 20\*20 interpolée (0,19µm)

(e) Résultats de la méthode d'interpolation par triangularisation bicubique.

**Figure 3.3:** Comparaison des tests d'interpolation.

### Interpolation bicubique

L'interpolation bicubique est une combinaison de deux interpolations cubiques afin de pouvoir l'appliquer à une grille 2D (Figure 3.3d).

### Interpolation par triangularisation bicubique

Cette méthode a été mise en place après avoir obtenu les premiers résultats présentés ci-dessus, le but étant d'essayer d'utiliser la précision de l'interpolation bicubique, mais en essayant de réduire le temps de calcul. Le principe est relativement simple, on triangularise chaque face en ajoutant un cinquième point à l'intersection des diagonales, dont l'élévation est définie par une interpolation bicubique. Cette étape est faite une seule fois, en pré-calcul. Le problème est donc simplifié à une recherche du triangle dans lequel le point à interpoler se trouve, et au calcul d'une équation de plan sur ce triangle (Figure 3.3e).

## 3.1.2 Interprétation des données expérimentales de l'étude des différentes méthodes d'interpolation

La Table 3.1 illustre en rouge les meilleurs temps de calcul, et en bleu les erreurs maximum inférieures à la précision de *l'Orbscan II* (qui est de 1  $\mu\text{m}$ ).

Méthode	Temps de calcul	Erreur max
Point le plus proche	9,2 ms	34,6 $\mu\text{m}$
PID	8,1 ms	8,12 $\mu\text{m}$
Bilinéaire	0,0031 ms	0,39 $\mu\text{m}$
Bicubique	302,2 ms	0,0008 $\mu\text{m}$
Triangul. bicubique	130,3 ms	0,19 $\mu\text{m}$

**Table 3.1:** Tableau récapitulatif des méthodes d'interpolation.

Les méthodes de recherche du point le plus proche, et de PID ont une erreur maximum supérieure à la précision de *l'Orbscan II*, elles sont donc éliminées.

La méthode la plus précise est la méthode bicubique, mais elle est aussi la plus longue à exécuter, dans notre cas, étant donnée la fréquence d'utilisation de la méthode d'interpolation, le paramètre du temps d'exécution est à prendre en compte. La méthode de triangularisation bicubique, qui tire avantage de la précision de l'interpolation bicubique, en la réduisant à une recherche de triangle couplée à une équation de plan, est la deuxième méthode la plus précise, tout en divisant le temps de calcul par un peu plus de deux par rapport à l'interpolation bicubique classique.

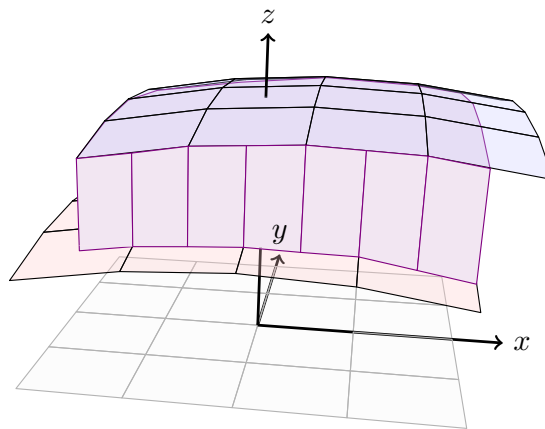
L'interpolation bilinéaire est la troisième méthode la plus précise, mais aussi la méthode la plus rapide qui a une précision inférieure à celle de *l'Orbscan II*. Notre choix se porte donc sur cette méthode.

## 3.2 Méthode de mise en correspondance de surfaces cornéennes

La cornée est une surface dépourvue de point de repère, ou de caractéristique anatomique évidente. L'unique solution est d'utiliser une méthode de recalage s'appuyant sur un critère global. [Laliberté et al. 2007] proposent d'utiliser une sphère de mise en correspondance, en effectuant une translation et une remise à l'échelle de façon à faire correspondre plusieurs cornées à une même sphère (de taille de la moyenne des BFS des cornées recalées). Cette mise en correspondance par normalisation de BFS est ensuite réutilisée dans des études médicales [Auvinet et al. 2012]. Cependant, cette méthode est imparfaite ; la cornée n'étant pas sphérique, la mettre en correspondance à l'aide d'une sphère n'est pas optimal. De plus, cette méthode ne prend pas en compte la possibilité de rotations.

L'idée ici est de mettre en correspondance deux surfaces cornéennes sans sphère, en les recalant l'une sur l'autre. Cependant, une méthode standard de recalage de type ICP n'est pas appropriée, car utiliser une minimisation de distance point à point entraînerait automatiquement un alignement des deux grilles qui biaiserait la mise en correspondance. De plus, la mise en correspondance ne doit pas forcément être faite avec l'intégralité des points des deux surfaces car les grilles sont rognées de façon imprévisible, un point n'a donc pas obligatoirement un correspondant dans l'autre surface.

Le concept choisi pour répondre à cette problématique est de mettre en place un recalage ayant pour objectif de minimiser le volume de recouvrement entre les deux surfaces.

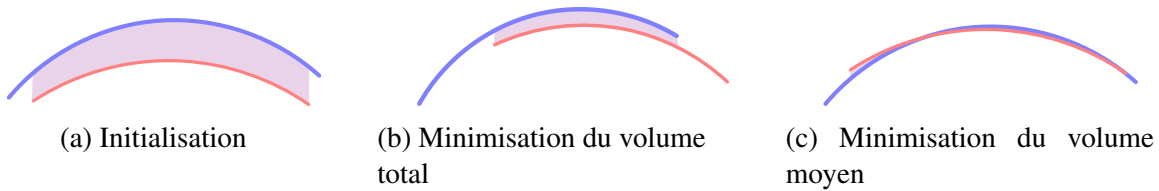


**Figure 3.4:** Volume entre deux surfaces : en rouge clair et bleu clair sont représentées les deux surfaces, et en violet le volume entre les deux. Le volume apparaît uniquement dans les zones de recouvrement selon l'élévation.

L'idée de minimiser le volume permet de pallier les problèmes liés à l'échantillonnage régulier des grilles, et c'est en minimisant le volume moyen que l'on conserve le recouvrement optimal



des deux surfaces (Figure 3.5c).

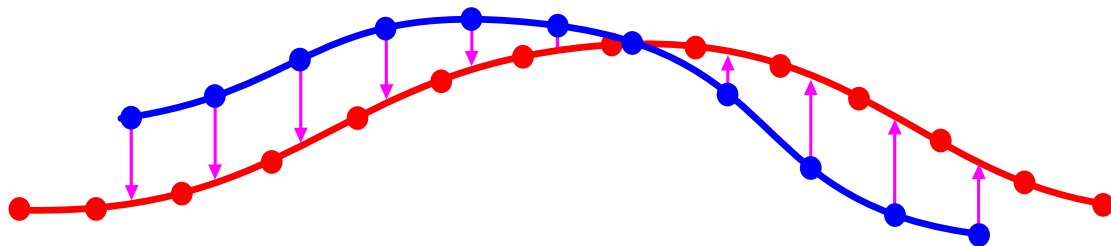


**Figure 3.5:** Exemples de convergences.

En utilisant ce procédé, les surfaces vont glisser l'une sur l'autre jusqu'à trouver la position de mise en correspondance optimale.

Le volume moyen entre les surfaces est réduit en minimisant la moyenne des distances absolues entre les points d'une surface et l'autre surface.

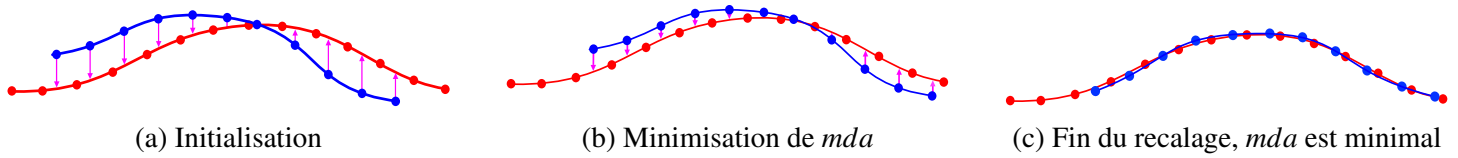
Une différence d'élévation point à face est déterminée par une interpolation bilinéaire (voir section précédente) de l'élévation sur la face aux coordonnées du point ; elle est notée  $diffElev(,)$  dans l'équation ci-dessous de la moyenne des différences absolues ( $mda$ ), avec  $p_{s1}$  un point de la première surface,  $s2$  la seconde surface, et  $n_{s1}$  le nombre de points de  $s1$  :



$$mda = \frac{\sum_{abs} \left( diffElev(p_{s1}, s2) \right)}{n_{s1}}$$

**Figure 3.6:** Equation de la moyenne des différences absolues ( $mda$ ), avec la surface 1 en bleu et la surface 2 en rouge.

Cette valeur est représentative de la différence globale entre les deux surfaces, donc plus elle est petite, plus les surfaces sont proches, et meilleur est le recalage (Figure 3.7).



**Figure 3.7:** Recalage de deux surfaces.

Afin d'évaluer notre méthode de recalage de surface, trois séries de tests ont été effectuées, illustrant trois exemples de recalage :

- Dans le premier, une surface cornéenne a été modifiée, en effectuant une légère rotation en X, Y, et Z (5 degrés), ainsi qu'une translation (0.5 mm) et une remise à l'échelle (de 0.9). Après avoir ré-échantillonné la surface, elle a été recalée sur la même surface avant modification.
- Le second test est un recalage entre deux acquisitions différentes d'un même sujet.
- Le dernier est un recalage entre deux acquisitions de sujets différents.

Pour chaque cas, trois méthodes ont été testées, recalage par BFS commune, recalage par ICP, et recalage par ISVM (*Inter-Surface Volume Minimization*). Pour chaque méthode la différence moyenne inter-surface résiduelle a été notée dans la Table 3.2.

	BFS	ICP	ISVM
Surface modifiée et surface d'origine	1.52 $\mu\text{m}$	0.4 $\mu\text{m}$	0.38 $\mu\text{m}$
Deux acquisitions d'une même personne	1.19 $\mu\text{m}$	1.32 $\mu\text{m}$	0.84 $\mu\text{m}$
Deux personnes différentes	4.68 $\mu\text{m}$	25.14 $\mu\text{m}$	3.43 $\mu\text{m}$

**Table 3.2:** Valeurs de disparité pour chaque cas pour la méthode BFS, la méthode ICP et la méthode ISVM.

On observe que le volume moyen résiduel après recalage avec notre méthode est plus bas qu'avec la méthode utilisée jusqu'à présent. L'ICP semble prometteur lors du premier test, car la problématique de la découpe aléatoire des bords n'est pas présente dans ce cas. Lors du second test avec deux surfaces issues du même oeil, la découpe des contours n'est pas identique, mais très semblable, car elle est en partie dépendante du patient (e.g. ouverture de l'oeil lors de la prise de mesure). Lors du dernier test les deux surfaces sont issues de patients différents, la taille et la découpe des cornées sont différentes, l'ICP minimisant toute une surface sur l'autre, des données n'ayant pas de correspondance sur l'autre surface sont utilisées, ce qui amène à un mauvais recalage.

## 3.3 La base de données de cornées

Dans le cadre de ces travaux, deux bases de données de cornées ont été mises à notre disposition. Elles rassemblent une très grande quantité de surfaces cornéennes. La première base regroupe 3835 sujets sains (1 acquisition cornéenne = 3 grilles 101 x 101, surface antérieure, surface postérieure, et pachymétrie<sup>1</sup>), 1874 femmes et 1961 hommes. La moyenne d'âge est de  $39.0 \pm 10.3$  années (allant de 5.8 à 100 ans). La taille de cette base de données est particulièrement remarquable, et nous permet de travailler sur d'importantes populations. La moyenne du rayon de la BFS des yeux droits (OD<sup>2</sup>) est de  $7.91 \pm 0.21$  pour la surface antérieure et  $6.56 \pm 0.22$  pour la surface postérieure. Cette première base est utilisée lors de l'étude portant sur la construction et la comparaison d'atlas cornéens.

La seconde base a été construite à partir de 257 cornées, avec deux acquisitions pour chaque cornée, ce qui nous donne 514 acquisitions cornéennes, avec 120 doublons d'yeux droits et 137 doublons d'yeux gauches. Cette seconde base est utilisée pour l'étude portant sur l'application de biométrie cornéenne.

De nombreuses informations complémentaires sont associées à chaque cornée ; dans un premier temps nous nous intéressons aux suivantes : l'âge, le genre et l'équivalent sphérique<sup>3</sup>.

Cette base de données est utilisée avec le consentement du comité d'éthique de la recherche de l'Hôpital Maisonneuve-Rosemont (Réf. CÉR : 05066).

---

1. Pachymétrie : épaisseur cornéenne.

2. Oculus Dexter : yeux droits.

3. *L'équivalent sphérique* est un terme utilisé par les médecins. Il s'agit de la puissance de focalisation de l'œil, en ne prenant en compte que les aberrations sphériques. Cette valeur permet par exemple de différencier les yeux myopes (valeurs négatives) des yeux hypermétropes (valeurs positives).



## CONSTRUCTION ET COMPARAISON D'ATLAS CORNÉENS (ARTICLE)

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	45
4.2	Basic notions . . . . .	46
4.2.1	Corneal basic concepts . . . . .	46
4.2.2	Corneal atlas . . . . .	48
4.2.3	Registration by BFS normalization . . . . .	49
4.3	Description of the proposed method . . . . .	50
4.3.1	Overview of the atlas construction . . . . .	50
4.3.2	Resampling method . . . . .	50
4.3.3	Registration by inter-surface volume minimization of two surfaces . . . . .	52
4.3.4	Intermediate control surface for the registration of two-surfaced corneal acquisition . . . . .	55
4.3.5	Iterative registration algorithm for a set of surfaces . . . . .	56
4.3.6	Corneal atlas construction using a registration driven by an intermediate control surface . . . . .	57
4.3.7	Comparison . . . . .	58
4.4	Results and discussion . . . . .	58
4.4.1	Dataset . . . . .	58
4.4.2	Surfaces weighting . . . . .	59
4.4.3	Construction . . . . .	60
4.4.4	Comparison . . . . .	60
4.5	Conclusion and future work . . . . .	63

---

## Avant-propos

Ce chapitre reprend l'article publié en revue internationale suivante :

Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Constructing average models of quasi-spherical objects: Application to corneal topographies*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging & Visualization, Taylor & Francis, 2015 (à paraître), (DOI:10.1080/21681163.2015.1077164).

Il développe les travaux présentés dans les conférences nationales et internationales suivantes :

Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *A New Registration Algorithm for Estimating and Discriminating Average Shapes of Sets of Corneal Topographies*. 36th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC 2014, pp. 3341–3344, Chicago, Etats-Unis, août 2014.

Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Construction of a mean surface for the variability study of the cornea*. 11th Canadian Conference on Computer and Robot Vision, IEEE CRV 2014, pp. 328–335, Montréal, Canada, mai 2014.

Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparaison de surfaces quasi-sphériques – Application à la biométrie cornéenne*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2014, Lyon, France, mars 2014.

Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Construction d'une surface moyenne pour l'étude de la variabilité cornéenne*. 26èmes journées de l'Association Française d'Informatique Graphique et du chapitre français d'Eurographics, AFIG 2013, Limoges, France, novembre 2013.

## Résumé

Cette étude s'intéresse à la construction de surfaces moyennes appliquée à la cornée humaine afin d'étudier sa variabilité au sein d'une population. La cornée étant dépourvue d'amers anatomiques, la principale problématique réside dans la mise en correspondance des surfaces qui permettront la construction de la cornée moyenne.

Afin de pallier l'absence d'amers anatomiques, nous utilisons un algorithme de recalage s'appuyant sur la minimisation d'un facteur global : le volume entre les deux surfaces à mettre en correspondance. La cornée étant une fine membrane délimitée par deux surfaces (antérieure et postérieure) la méthode de recalage utilise une troisième surface virtuelle afin de guider les deux premières simultanément pour conserver l'information volumique de la cornée. Après le recalage de cette surface virtuelle en s'appuyant sur un algorithme itératif, les surfaces moyennes antérieure et postérieure sont construites. Notre étude montre que le choix de la méthode de mise en correspondance est crucial pour correctement construire et comparer des surfaces cornéennes. De plus, des applications cliniques sont présentées afin d'illustrer notre méthodologie.





# Constructing average models of quasi-spherical objects – Application to corneal topographies

## Abstract

In medical imaging it is now common to create 3D models of organs by "averaging" several specimens obtained from different subjects. This requires a registration step to align the organs before averaging their shapes. In this paper, we present the difficult case of a quasi-spherical organ: the cornea. To cope with the lack of anatomical anchor points, we use a registration algorithm based on the minimization of a global factor: the volume between the two surfaces to be registered. The cornea is a thin tissue layered by two (anterior and posterior) surfaces. Therefore, we actually introduce a third virtual surface to drive the two others. After registration using an iterative optimization algorithm, anterior and posterior average surfaces are computed. Our study demonstrates that this matching step is crucial to correctly build and compare surfaces. Several clinical applications of this methodology are also presented to illustrate its efficiency.

## 4.1 Introduction

Three dimensional models are now everywhere in computer graphics and widely used in numerous domains. For instance, to create a 3D model of an organ in medical imaging, averaging of several images obtained from different subjects is often done to obtain the organ's mean shape (and its variance), a process also known as *numerical atlas construction*. Typically this requires some sort of anatomical anchor points to register the organs and build the average 3D shape. With this approach, many studies have successfully built anatomical atlases for several parts of the human body including: the skull [Subsol et al. 1998], the brain [Guimond et al. 2000], the cerebral cortex [Van Essen 2005], and the coronary arterial tree [Lemke et al. 2002] etc. However in some cases the registration of anatomical anchor points is not possible because these points are simply not available, unreliable or too difficult to extract. An example of this is the cornea, which is a quasi-spherical object with no obvious fiducial points. During an eye examination, it is common to measure the 3D corneal surfaces with a medical imaging technique called *corneal topography* to assess morphological changes due to diseases, trauma, surgery or simply aging. However, to distinguish a distorted cornea from a healthy cornea with these data, it is necessary to specify what is a healthy cornea, which can be achieved using an anatomical atlas showing an average representation of the normal population with its variance. To cope with the lack of fiducial points [Laliberté et al. 2007] proposed a different methodology to build a corneal anatomical atlas. The

realignment of subjects topographies is based on a best fit sphere (BFS) normalization (see Section 2.3) and limited to scaling and translation. However, because the eye can rotate, the angular position may vary between acquisitions. In addition, the cornea is not perfectly spherical, and using a spherical reference creates a bias in the matching. It is therefore necessary to perform the matching without the use of a spherical model and allowing rotations. In this paper, we present a new method for building a corneal anatomical atlas, based on an iterative registration procedure that considers the angular variations and keeps the thickness information by using jointly both anterior and posterior surfaces. For this purpose we introduce a third control surface to drive the anterior and posterior surfaces.

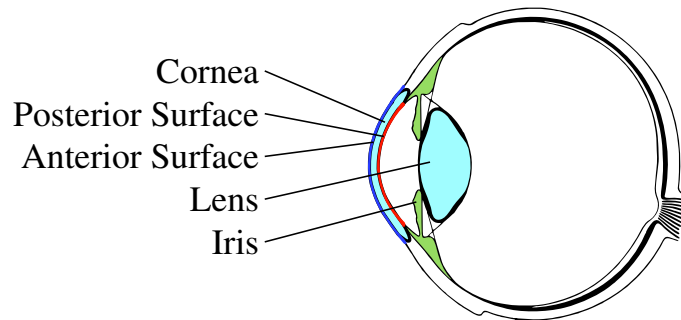
First, some basic concepts are described, followed by a description of the BFS normalization method. The third section describes our method, made of three algorithms: the resampling, the registration by inter-surface volume minimization, and the iterative registration using a reference surface. The fourth section presents the results obtained with our methodology to demonstrate its utility. Finally a conclusion is drawn about our contributions and future work is presented.

## 4.2 Basic notions

### 4.2.1 Corneal basic concepts

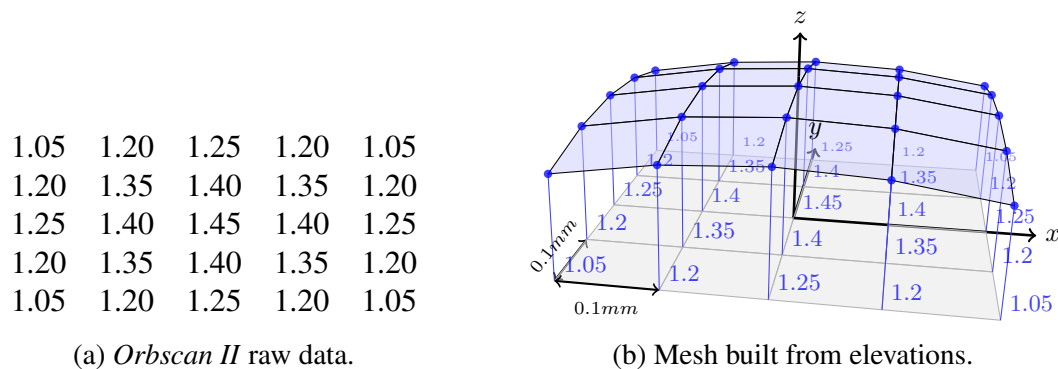
The cornea is the transparent outer front part of the eye. It covers nearly a fifth of the eye surface, with an average diameter of 11 mm. It is the main lens of the eye, responsible for two-thirds of the dioptric power (the remaining third is the eye crystalline lens), with a refractive index of 1.377. The cornea is slightly thicker at its periphery: approximately 0.5 mm at the center and 0.6 mm at the periphery. The curvature radius of the anterior surface varies between 7 and 9 mm and is approximately 6.5 mm for the posterior surface. A cross sectional schematic view of an eye is presented Figure 4.1 showing both anterior and posterior surfaces.

There are several ways to represent a corneal surface. Mathematical models have been proposed to describe the corneal shape using a conic equation ([Bennett and Rabbetts 1991]) or a biconic equation ([Gatinel et al. 2011]). Another way is to use least-squares fitting of Zernike polynomials ([Iskander et al. Jan. 2001]). More recently, a model based on tangential curvature was proposed ([Zheng et al. 2013]). In this study, we use a discrete representation including two meshes built from the raw data obtained by the acquisition system, one for the anterior surface and one for the posterior surface. The *Orbscan II* (Bausch & Lomb) is a topographer that acquires such double elevation points maps of both the anterior and posterior surfaces, with an error margin of 1 micron. The data can be saved as a uniformly spaced  $101 \times 101$  grid of elevations, spaced by 0.1 mm in X and Y. Figure 4.2 (a) shows the raw *Orbscan II* data. Figure 4.2 (b)



**Figure 4.1:** Sectional view of the eyeball.

presents the method of constructing the mesh from the elevations. The points are elevated and linked by edges to their neighbors to build faces. Each measured cornea consists of two mesh surfaces bounding the corneal volume.



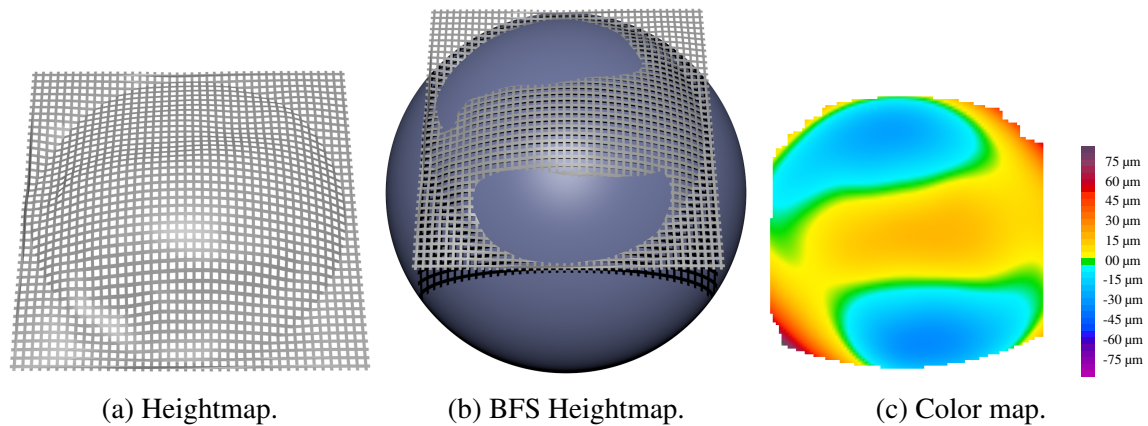
(a) *Orbscan II* raw data.

(b) Mesh built from elevations.

**Figure 4.2:** Surface mesh construction step from *Orbscan II* raw data.

As the cornea is almost spherical, a smart and efficient way to visualize the global appearance of a corneal surface is to use a spherical reference, which makes possible to study the differences from a sphere. First, the BFS (Best Fit Sphere<sup>1</sup>) is computed. Then, the difference between the corneal surface and the BFS surface is estimated at each point along the Z direction. Finally, each difference is associated with a color, using a standard colorset (commonly used by the clinician), with warm colors for positive differences (points outside the BFS) and cold colors for negative differences (points inside the BFS). The colors are projected on a plane along the Z axis. Figure 4.3 shows the construction steps of the colormap. Ophthalmologists commonly use these maps for diagnosis purposes.

1. The BFS center and the BFS radius are calculated by a least square minimisation of the sum of distances between the sphere and the corneal surface ([Gatinel et al. 2011]).

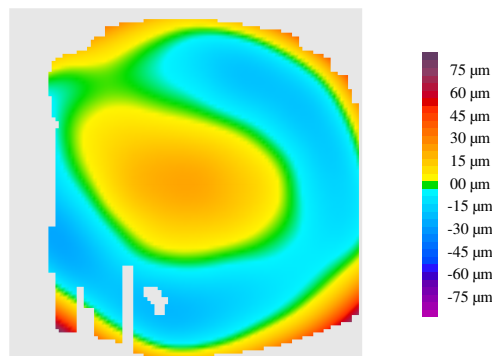


**Figure 4.3:** Color map building steps, this example shows a right anterior corneal surface.

Usually the BFS radius for corneal surfaces is around  $7 \pm 2$  mm. The color scale of the difference map (Figure 4.3) shows that the corneal surface is very close to a sphere.

## 4.2.2 Corneal atlas

The cornea is a thin tissue without particular anatomical characteristics (e.g., like fingers on a hand), which makes it difficult to apprehend. Because there is no anatomical anchor on the cornea, building an average cornea is a non trivial problem. In addition, the *Orbscan II* peripheral data are sometimes cropped because of the lids, lashes or nose, and some holes may appear in an unpredictable way. Figure 4.4 shows such a cropped acquisition, where the gray part is the complementary of the corneal surface on the  $101 \times 101$  grid (the complementary is the part of the  $101 \times 101$  grid where there is no data), these technical constraints must be considered in the atlas construction process.



**Figure 4.4:** A color map.

Corneal atlases can be used to several purposes: comparison between populations (e.g. for statistical comparisons between ages or genders) or to study the corneal evolution over the time. A single subject can also be compared to an atlas, to show how it varies from a population (e.g. to characterize a pathology by comparing a single pathologic subject to a normal atlas).

### 4.2.3 Registration by BFS normalization

This method considers the anterior and the posterior surfaces separately and produces two average surfaces independently, without considering the thickness of the cornea in the registration step.

The methodology is as follows:

1. Computation of an average sphere of all BFS topographies as a spherical reference.
2. Spatial normalization<sup>1</sup> of each topography on the average sphere.
3. Resampling of topographies on the original grid with a bi-cubic interpolation.
4. Computation of the average surface, and variances.

This method, which was first proposed by Laliberté, Meunier et al. (2007), is based on the fact that the cornea is nearly spherical, this is why it uses the BFS as a reference. The cornea is not exactly spherical, and therefore, matching it with other corneas while considering it as a sphere creates a bias in the resulting atlas. Each surface is computed separately, which produces two independent average surfaces losing the corneal thickness information. In addition, this method does not consider rotations: the registration step is based only on a translation and a uniform scaling.

---

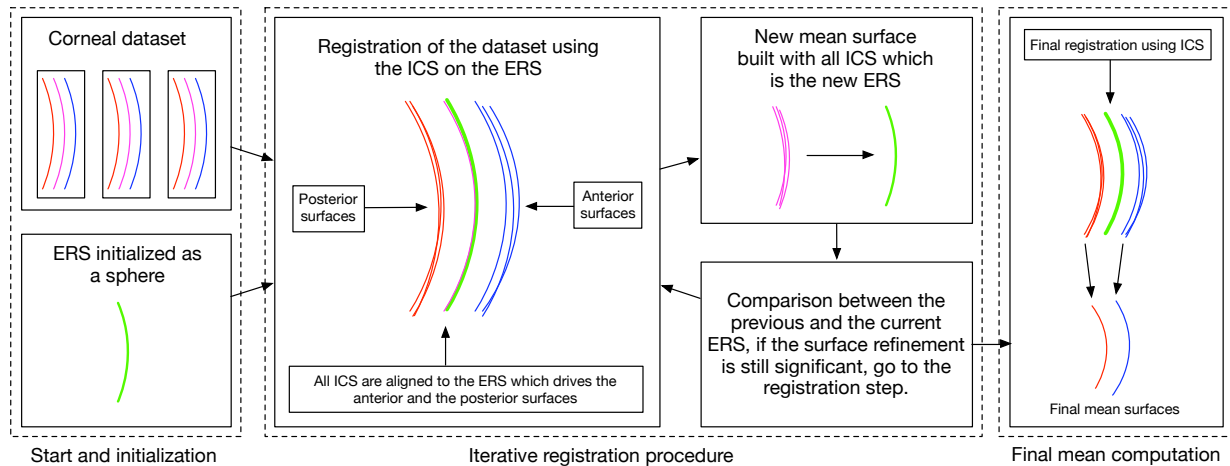
1. Spatial normalization is a uniform scaling step combined with a xyz translation to locate all sphere centers at the same point, with the same radius for all of them.

## 4.3 Description of the proposed method

First an overview of the method is presented, followed by the resampling method and the justification of the choice of bilinear interpolation. Then the inter-surface volume minimization method is presented, followed by the iterative registration algorithm for a set of surfaces. And finally the global methodology using all presented steps is described.

### 4.3.1 Overview of the atlas construction

The basics of this method are to proceed to a registration using jointly the anterior and posterior surfaces to keep the thickness information. The key idea is to use an *intermediate control surface* (ICS) representative of the whole corneal membrane, and use an *evolving reference surface* (ERS), to avoid the bias from a spherical reference. The global methodology uses an iterative registration algorithm (using translations, scaling, and rotations) to minimize the residual inter-surface volume between all *intermediate control surfaces* of corneal shapes of a dataset, and finally compute the average anterior and posterior surface. Figure 4.5 shows a global overview of the registration methodology.



**Figure 4.5:** Overview of the atlas construction using an iterative registration of the ICS. Anterior and posterior surfaces are blue and red, *intermediate control surface* are violet, and the ESR is green.

### 4.3.2 Resampling method

After a spatial transformation of a surface, elevation grids are no longer aligned and must be resampled to a common grid to be used together (for instance in a average shape computation process). To resample a surface, the elevation is interpolated at each coordinates of a common grid, and a new mesh is built from the new elevation map. The elevation interpolation process

is challenging due to the non-planarity of the faces of the mesh, which are made of 4 vertices. In addition to maintaining the accuracy of the acquisition system (1 $\mu$ m), this interpolation must be fast because it will be used on each face of each mesh at each iteration. Execution time is an important parameter, as the global algorithm must be executable within a reasonable time. [Laliberté et al. 2007] used a bicubic interpolation for the resampling step, but more recently [Auvinet et al. 2012] used a bilinear interpolation. We need first to define properly which method to use.

During this step there is an approximation of elevations, and the accuracy of the acquisition system must be preserved, that is why the choice of the interpolation method is crucial. To find a suitable method, we compare different approaches on a known spherical mesh, on which it is possible to estimate the interpolation error. First, a spherical elevation map is built with the characteristics of an elevation map from the acquisition system (101x101 grid) and a typical corneal radius (8 mm) with a spherical equation. Then several interpolations are performed on the surface using different methods. Finally, the interpolated values are compared with the real values which is known with the spherical equation. An error elevation grid is computed based on the absolute difference between the interpolated values and the real values. The max error is then determined to compare the following tested methods.

1. **Closest point interpolation:** This algorithm is based on a simple closest point search algorithm. The closest point is used as the new value.
2. **Inverse Distance Weighting (IDW) interpolation [Shepard 1968]:** IDW is a weighted average of the inverse distance of each point. The closer a point is to the interpolated coordinate, the more it contributes to the average computation, giving us the following general weighting formula:

$$id(p_{xy}, p_k) = \frac{1}{dist(p_{xy}, p_k)}$$

with a point list of size  $N$ ,  $p_k$  a point of this list,  $id$  the inverse of the distance, and  $p_{xy}$  an interpolated point.

The elevation interpolation is as follows:

$$el_{interp} = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} id(p_{interp}, p_k) el_k}{\sum_{k=0}^{N-1} id(p_{interp}, p_k)}$$

where  $p_{interp}$  is the interpolated point and  $el_k$  the elevation of the point  $p_k$ .

3. **Bilinear interpolation:** The bilinear interpolation is a combination of two linear interpolations for a 2D grid, used previously by [Auvinet et al. 2012].

4. **Bicubic interpolation:** The bicubic interpolation is a combination of two cubic interpolations for a 2D grid, used previously by [Laliberté et al. 2007].
5. **Bicubic triangularization interpolation:** This method was tested after the previous methods with the goal of obtaining the bicubic method's precision, but with a better computing time. The approach is simple: each face is triangulated by adding a central point at the intersection of the diagonals, with an elevation computed by the bicubic method. This step is performed only once, as a pre-computing step. Thus the problem is changed from a bicubic form to a planar equation on a triangle. Table 4.1 shows the best computing time in red and errors smaller than the *Orbscan II* accuracy (1  $\mu\text{m}$ ) in blue.

Method	Calculation time (ms)	Max error ( $\mu\text{m}$ )
Closest point interpolation	9.2	34.6
IDW	8.1	8.12
Bilinear	0.0031	0.39
Bicubic	302.2	0.0008
Bicubic triangularization	130.3	0.19

**Table 4.1:** Interpolation tests overview.

The methods using the closest point and IDW has a maximum error higher than the *Orbscan II* accuracy, and they are therefore eliminated. The most accurate method is the bicubic method, but it is also the slowest. As the interpolation method is used many times, execution time is an important parameter. The bicubic triangularization interpolation method, which achieves the bicubic method's accuracy by reducing it to a planar equation, is the second most accurate, and the computing time is halved by comparison to the bicubic interpolation. The linear interpolation is the third most accurate method as well as the fastest, with an accuracy smaller than the *Orbscan II* accuracy. Therefore, the bilinear interpolation method is chosen.

### 4.3.3 Registration by inter-surface volume minimization of two surfaces

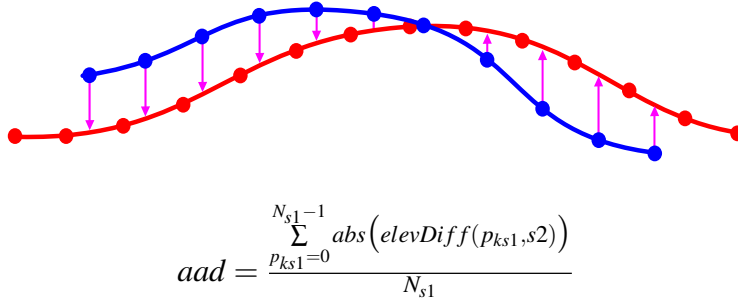
The corneal surface does not have landmark or identifiable anatomical feature. It leads to the use of a registration method based on a global factor. [Laliberté et al. 2007] use a spherical reference (see BFS normalization, Section 4.2.3), performing a translation and a scaling on each corneal surfaces to match all of them on a common sphere (an average sized sphere). This matching method is later used in medical studies (e.g. [Auvinet et al. 2012]). However this method is not perfect because the cornea is not spherical. Using a spherical reference as matching step cannot be optimal. Furthermore, this method does not consider rotations.



The key idea is to match two corneal surfaces without spherical reference, by a free registration from one surface to the other. However a standard free registration method such as ICP cannot be suitable because using a point to point distance minimization would result to false matching by an alignment of the two grids (a point to point registration for two surfaces with a same sized BFS will result as a false rotation around the  $z$  axis by aligning point grids). In addition, the matching does not necessarily need to be done with whole surfaces because surfaces are randomly cropped in boundary, therefore an existing point from a surface does not necessarily have a corresponding point in the other one.

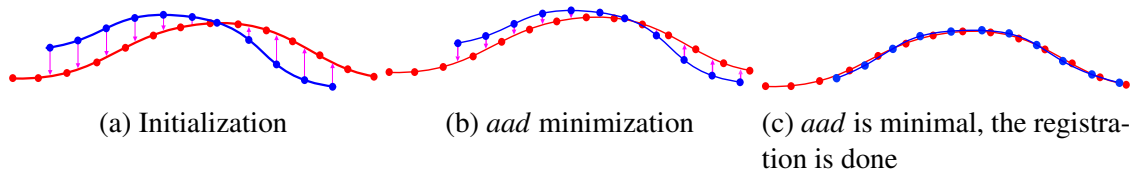
To address this problem we designed a registration algorithm to minimize the overlap volume between two surfaces. The method is based on the minimization of the average absolute elevation difference from a surface to another on overlapping regions of both surfaces. This approach was presented for the first time in one of our previous study [Polette et al. 2014a].

A point to face elevation difference is determined by a bilinear interpolation (described in the previous section) of the elevation on a face from the coordinates of a point of the other. This difference is noted  $elevDiff(p, s)$  in the following equation of the *average absolute difference* ( $aad$ ), with  $s1$  and  $s2$  the two surfaces,  $p_{ks1}$  the  $k^{th}$  point of  $s1$  and  $N_{s1}$  the total number of points in  $s1$  in Figure 4.6. The  $elevDiff(p, s)$  method searches in a first time for the corresponding face to  $p$  in the surface  $s2$ , and proceeds to a bilinear interpolation from  $p$  to the face along the  $Z$  axis.



**Figure 4.6:** The average absolute difference equation ( $aad$ ) with surface 1 in blue and surface 2 in red.

The *aad* is then minimized considering a geometrical transformation characterized by 7 parameters  $(t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z, s)$  with a nonlinear optimization algorithm (Figure 4.7), based on the Nelder-Mead ([Nelder and Mead 1965]) method (available in GSL, the *GNU Scientific Library* [Gough (2009)]), this registration method induces an *Inter-Surface Volume Minimization* (ISVM).



**Figure 4.7:** Registration of two surfaces.

The typical corneal shape (with a central bumped area) helps to drive the two surfaces to a good convergence without any additional spatial constraint.

To evaluate this registration method, three sets of tests have been processed, to show 3 typical registration examples. For each case, three methods have been tested: the gold standard method registration by sphere matching, a standard registration method by ICP, and our method registration by *aad* minimization. The average standard deviation of surfaces, calculated on a point-to-point basis after registration, is representative of the surfaces disparity after registration and is a qualitative criterion of each registration method (the lower the dispersion is, the better the registration).

We can distinguish three cases of single-to-single surface registration:

- Case 1: a corneal surface is modified with rotations (5 degrees in x, y and z), translations (0.5mm in x, y and z) and a scaling (scaled by 0.9). After a resampling step, this surface is registered to the original one. This case shows a configuration with two surfaces with the same cropping.

- Case 2: a registration with two different acquisitions from the same subject is presented, this test shows the case with a similar cropping for both surfaces (two acquisitions from the same subject will have a similar cropping because it is mainly dependent on the eye shape and the eye aperture).

- Case 3: a registration with two different acquisitions from two different subjects is presented, this test shows the case with a totally different cropping for both surfaces.

The surfaces dispersion is lower with our method for all cases than with other methods. As expected, ICP gives wrong registrations whenever there is a different cropping because it uses

	BFS	ICP	ISVM
Modified surface/Original surface	1.52 $\mu\text{m}$	0.4 $\mu\text{m}$	0.38 $\mu\text{m}$
Two different acquisitions from the same subject	1.19 $\mu\text{m}$	1.32 $\mu\text{m}$	0.84 $\mu\text{m}$
Two different acquisitions from two different subjects	4.68 $\mu\text{m}$	25.14 $\mu\text{m}$	3.43 $\mu\text{m}$

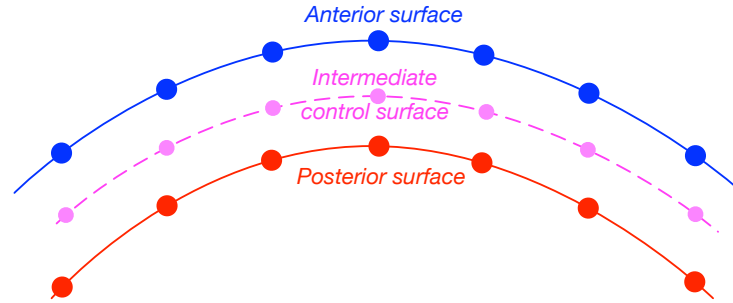
**Table 4.2:** Surface disparity values for each presented cases for the BFS method, an ICP method and our ISVM method

the whole surfaces for the registration, and there is not systematically a corresponding point for each point. In addition, ICP aims at aligning surfaces point to point by pairing a point to another, this operation would result to a local grid alignment (because our corneal surfaces are sampled to a regular grid), and would stop any rotation on the Z axis and result in a false local matching alignment between surfaces.

#### 4.3.4 Intermediate control surface for the registration of two-surfaced corneal acquisition

In previous studies ([Laliberté et al. 2007; Auvinet et al. 2012]), authors use separately anterior and posterior surfaces to build two independent average surfaces, but clinically these surfaces are connected and are two bounding surfaces of the corneal volume. To keep the thickness information during the registration process of the dataset, our idea is to build a third surface to drive the two others together, to apply geometric transformations to the entire corneal volume. This third surface (*intermediate control surface*) is built using a weighted mean equation.

The acquisition method is different for the two surfaces of the corneal volume with the *Orb-scan II*. The anterior surface is more accurate than the posterior one because the posterior surface is the result of a refractive extrapolation of the slit scanning system through the cornea, whereas the anterior surface is directly measured by the slit scanning system combined to a placido disk analysis ([Guilbert et al. 2012]). Therefore the posterior surface is more noisy, and less accurate. This accuracy difference have to be considered in the *intermediate control surface* computation (because it leads both surfaces), using weights for the mean calculation: weighted by  $r_a$  (anterior surface weight) and  $r_p$  (posterior surface weight) with  $r_a$  and  $r_p \in [0, 1]$  and  $r_a + r_p = 1$ . The *intermediate control surface* equation is presented in Figure 4.8.



$$ics(x,y) = antSurf(x,y) \cdot r_a + posSurf(x,y) \cdot r_p$$

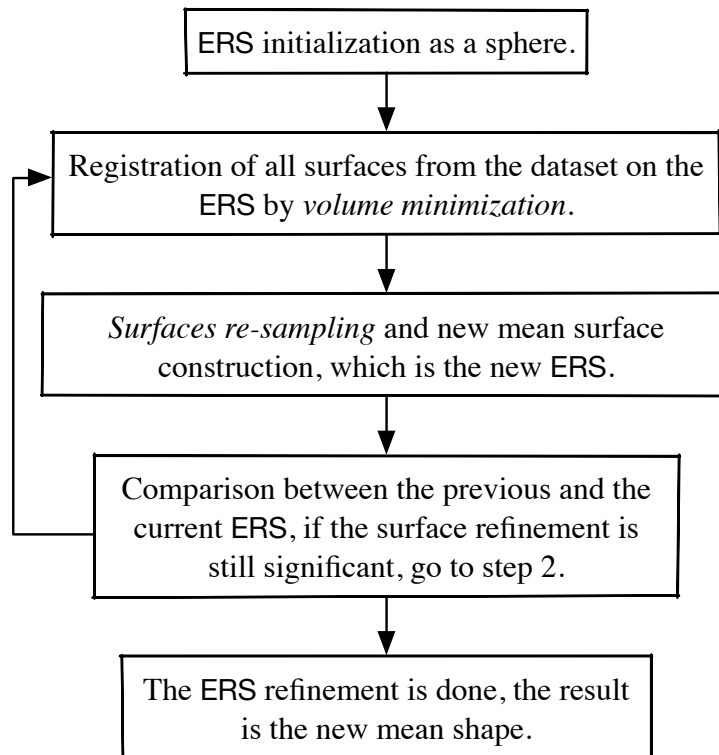
**Figure 4.8:** *Intermediate control surface equation, with  $r_a$  and  $r_p \in [0, 1]$  and  $r_a + r_p = 1$ .*

Weighting values are dependent of the acquisition system, if the acquisition method is the same for both surfaces, weighting values are  $r_a = r_p = 0.5$ .

### 4.3.5 Iterative registration algorithm for a set of surfaces

To register more than two surfaces, we use an additional surface as a registration reference. At the beginning, the reference surface is a sphere, and evolves to become the average surface (using an evolving matching reference avoids the bias introduced by a spherical matching reference). This method is based on an iterative algorithm designed to minimize the *volume difference* between each ICS and the *evolving reference surface* (ERS). This iterative approach allows the refinement of the registration to be more accurate. The methodology is described in Figure 4.9.

The iteration is stopped when the refinement is done, in order to measure that we compare the residual volume of the last two iterations after a volume minimization. When this volume stops to decrease, it means the iterative algorithm has converged to the optimal registration with a minimal global residual volume between all surfaces.



**Figure 4.9:** Iterative registration algorithm.

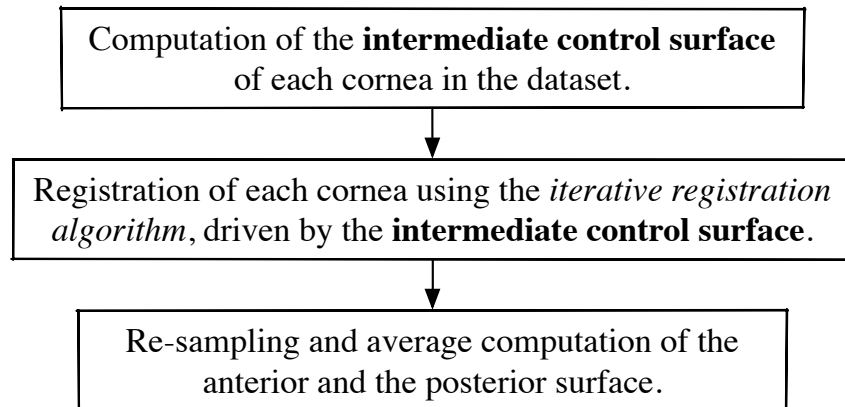
#### 4.3.6 Corneal atlas construction using a registration driven by an intermediate control surface

The entire atlas construction methodology uses the iterative registration algorithm designed for a set of surface, on the intermediate control surface to match several corneas together, and build average anterior and posterior surfaces.

The methodology of the atlas construction is described in Figure 4.10. An average pachymetry<sup>2</sup> map can be built using the two resulting surfaces, by computing for each point of the anterior surface the distance to the posterior surface in the direction of the anterior BFS center<sup>3</sup>.

2. Corneal thickness.

3. The Orbscan acoustic correction factor of 0.92 is applied to the thickness values to get the pachymetry map, the pachymetry values are thus 8% lower than the computed thickness values. The manufacturer has introduced this factor to compensate for differences with the "gold standard" contact ultrasound pachymetry.



**Figure 4.10:** Corneal atlas construction methodology.

### 4.3.7 Comparison

The difference between two corneas can be studied in several ways. In this work, it is represented with a difference map between two corresponding surfaces and an *aad* value for anterior surface and posterior surface. Our previous study ([Polette et al. 2014c]) used only one surface, this approach allows to compare the difference between two corneal membranes by anterior to anterior and posterior to posterior surface comparison with a registration keeping the thickness information.

First a registration is performed between the two compared corneas (by minimizing the volume between ICS of both surfaces), then the registered surfaces are resampled, and finally the difference maps are built by subtracting one surface from the other (posterior surface to posterior surface, and anterior to anterior). Also an *aad* is built for each surface, it can be used as a global similarity quantification, the closer to 0 this value is, the more the surfaces are similar.

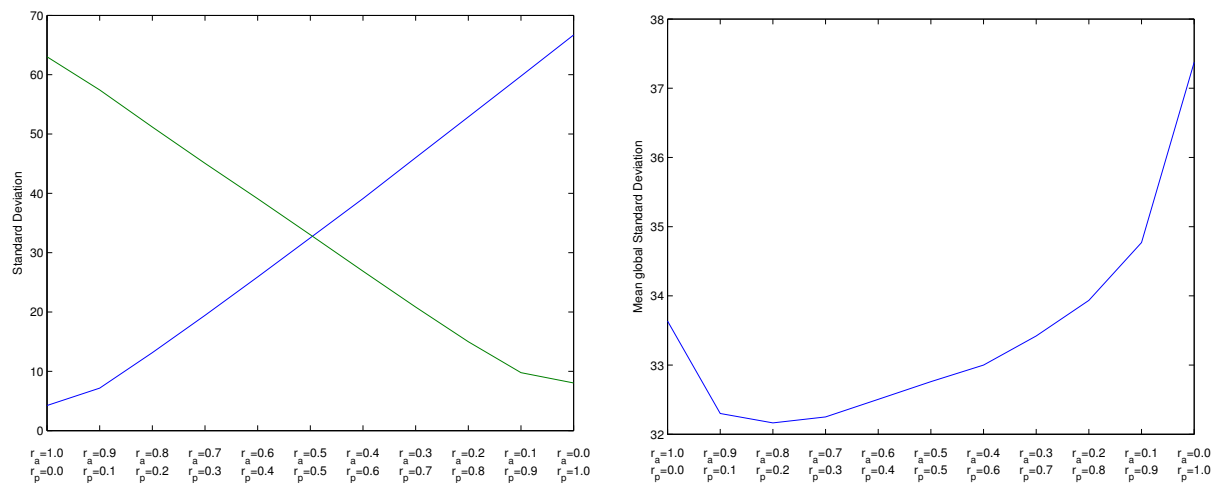
## 4.4 Results and discussion

### 4.4.1 Dataset

Our dataset contain 3835 healthy subjects with right and left eyes, 1874 females and 1961 males. The average ( $\pm$  SD) age was  $39.0 \pm 10.3$  years (range: 5.8 to 100.0 years). The size of the database is particularly noteworthy and allows us to work on a large population. The average ( $\pm$  SD) BFS radius size of OD eyes (*Oculus Dexter*: right eyes) is  $7.91 \pm 0.21$  for posterior surfaces and  $6.56 \pm 0.22$  for anterior surfaces.

## 4.4.2 Surfaces weighting

To observe the impact of the weights  $r_a$  and  $r_p$ , several corneal atlas were built using the whole dataset with different weighting values. The surfaces disparity after registration (average standard deviation of surfaces, calculated on a point-to-point basis after registration) is reported for anterior and posterior surfaces in the Figure 4.11 (a). With  $r_a = 1$  or  $r_p = 1$  the entire volume is driven only by one surface, it minimizes the disparity around this surface, and maximizes the disparity around the other one. Figure 4.11 (b) shows the disparity of the two surfaces. As the surfaces accuracy are different, the global disparity is not minimal for a balanced weighting ( $r_a = 0.5$  or  $r_p = 0.5$ ). The minimal global disparity is reached for  $r_a = 0.8$  or  $r_p = 0.2$ , these



(a) Disparity after registration for anterior (in blue) and posterior (in green) surfaces for different values of  $r_a$  and  $r_p$ .

(b) Global average disparity after registration for both surfaces for different values of  $r_a$  and  $r_p$  (the average curve of the two curves presented in a).

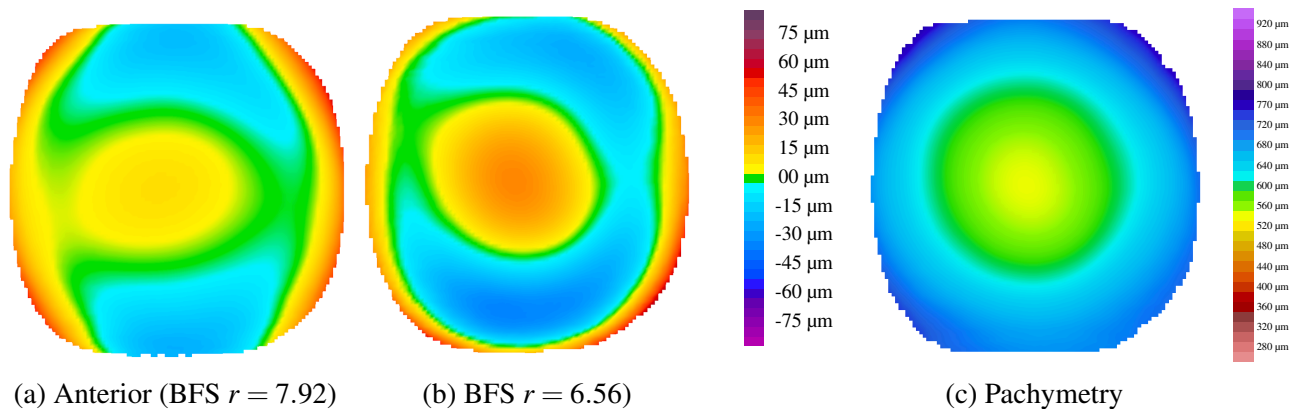
**Figure 4.11:** Evolution of the disparity after registration for different values of  $r_a$  and  $r_p$ .

values are totally dependent to the acquisition system and must be specified for each different topographer. Figure 4.11 shows that the weighting configuration is a determinant parameter for the variance in the resulting atlas, and that it can be used to minimize the global variation during the atlas construction.

This weighting technique can also be exploited in some case if one of the two surfaces is not relevant for a particular matching, e.g. in the case of a pre-surgery/post-surgery comparison, it could be more efficient to use only one surface as matching reference if the surgery has altered the other one. This weighting choice can also be used to trace a pathology even if it has altered one of the two surfaces. This weight distribution has to be specified for each different topographer.

### 4.4.3 Construction

Figure 4.12 (a) and (b) show a right eye atlas built with the entire dataset, with a weighting of  $r_a = 0.8$  and  $r_p = 0.2$ , the anterior BFS radius is 7.92 mm and the posterior BFS radius is 6.56 mm. A pachymetry map is presented in Figure (c). The average disparity for the anterior surface is 13.15  $\mu\text{m}$ , and 51.18  $\mu\text{m}$  for the posterior surface.



**Figure 4.12:** Average OD atlas built with 3835 right eyes.

Using jointly both surfaces increases the average disparity for each surface after the registration of a dataset compared to using each surface separately because the registration process implies a trade-off to align both surfaces at the same time. However this methodology keeps the solid constraint linking both surfaces to include thickness information in the registration process.

### 4.4.4 Comparison

Two comparison configurations are presented, with two populations expected to be identical, and two populations expected to be different.

#### 4.4.4.1 Gender comparison

To illustrate the importance of the matching step, we present an example where two populations supposed to be identical are compared, namely corneas from male and female subjects.

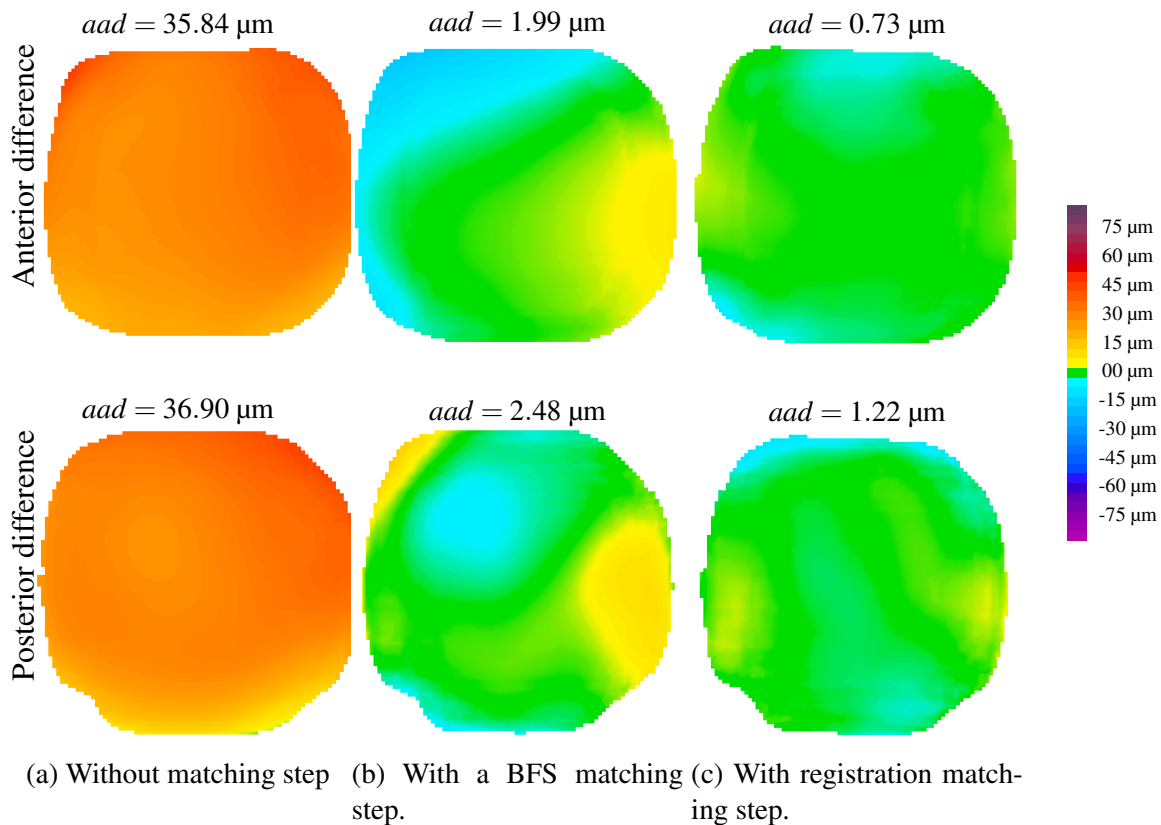
Atlases were built with surfaces of right eyes. Figure 4.13 shows difference maps, anterior surface at the top, posterior surface at the bottom: (a) without matching step,  $aad = 37.84 \mu\text{m}$  and  $36.90 \mu\text{m}$ , (b) with spherical reference (BFS) registration (Section 4.2.3),  $aad = 1.99 \mu\text{m}$ , and  $1.48 \mu\text{m}$ , and (c) with *inter-surface volume minimization* (ISVM),  $aad = 0.73 \mu\text{m}$  and  $1.22 \mu\text{m}$ . With the ISVM registration method, the matching process applies a scaling close to 1 (0.998),



this means that both corneas have the same BFS size.

The *aad* is close to the *Orbscan II* error margin, the difference varies from  $-5 \mu\text{m}$  to  $+5 \mu\text{m}$  in periphery, and it is close to 0 in the central area. Such variations are medically negligible. Figure 4.13 (c) shows that matching with the ISVM registration method allows to refine comparison between groups and help to identify more accurately similar corneal shapes.

Posterior *aad* are lower than the anterior one due to the weighting of the intermediate control surface, because the registration is mostly leaded by the anterior surface.

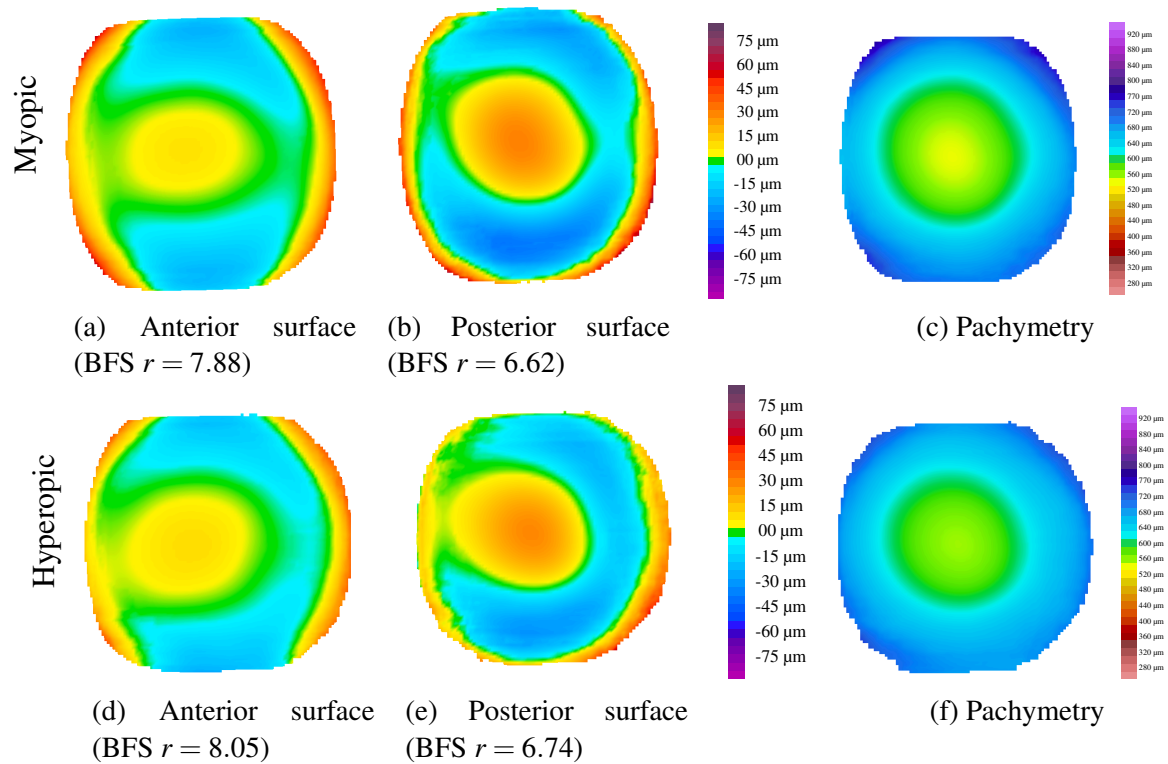


**Figure 4.13:** Male - female difference anterior (top) and posterior (bottom) maps, built with different matching methods used with the *intermediate control surface*.

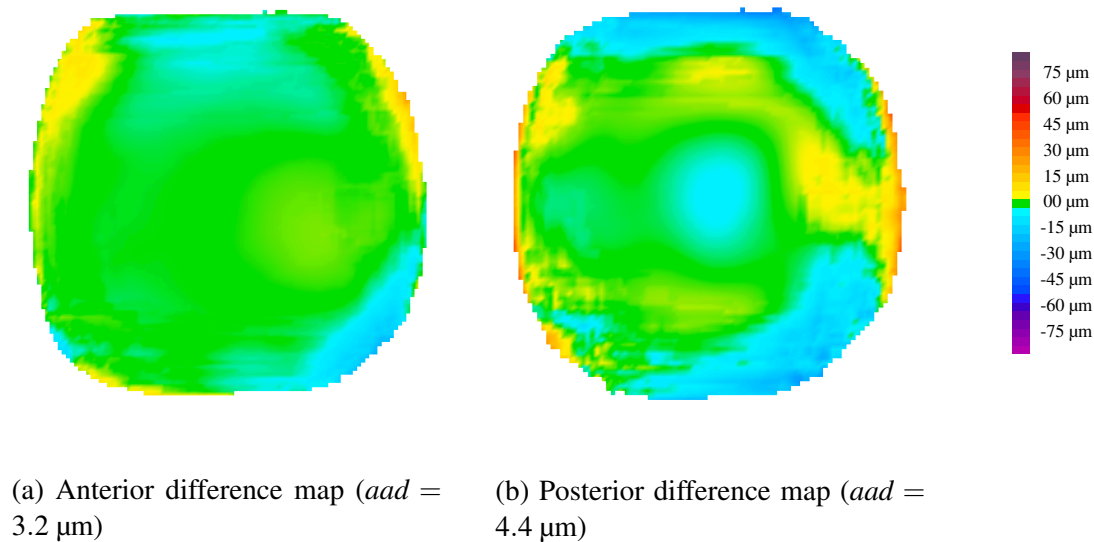
#### 4.4.4.2 Hyperopic and myopic comparison

In the second example two populations expected to be different are compared: myopic (251 subjects) and hyperopic (103 subjects). Figure 4.14 shows myopic and hyperopic atlases, the related difference map is presented Figure 4.15. Matching the myopic surface to the hyperopic surface required a scaling value of 1.024 meaning that overall, the hyperopic eyes BFS (8.05

mm) was larger than that of the myopic eyes (7.88 mm). It is also interesting to note that the mean BFS  $r$  values of the myopic and hyperopic eyes are significantly different from each other ( $p < 0.01$ ). In other words, the hyperopic corneas were flatter than the myopic corneas. These results corroborate those from [Llorente et al. 2004].



**Figure 4.14:** Average myopic (top) and hyperopic (bottom) right eye.



**Figure 4.15:** Myopic – hyperopic difference maps.

## 4.5 Conclusion and future work

The approach detailed in this paper is the first corneal atlas construction method using jointly both surfaces during the registration step to build a volume atlas by the introduction of a new registration approach: to drive the entire corneal membrane with an intermediate control surface. This methodology allows to study the average corneal thickness which has a real clinical interest. In addition, a new surface matching method is presented, which offers a better registration process, and contributes significantly to the improvement of the corneal comparison and atlas construction because no *a priori* (spherical) shape was used. A lot of applications are possible such as diagnostic assistance, by matching a subject to a group of pathologic atlases, or by quantification of differences from a normal healthy atlas can be envisaged. An atlas built as multiple sub-atlases can be envisaged, for each sub-group of a population. Thus it is possible to compare a subject to each branch of a hierarchical atlas, in order to find out which one matches to the subject, for classification purposes for instance. This methodology can be used with data from all topographers that can provide elevation maps, the computation process can be easily implemented to be used for clinical studies.

Finally, some improvements to this approach can be proposed. The intermediate control surface weighting could use a non-uniform weight for each surface, most topographers are less accurate in periphery, considering this it could improve the matching step.

Another application we plan to develop is to use the comparison process to investigate biometric identification of a subject using the corneal shape.

## **Acknowledgment**

The authors would like to thank the Quebec Vision Health Research Network for its support.

## BIOMÉTRIE CORNÉENNE (ARTICLE)

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	69
5.2	Basic notions . . . . .	70
5.2.1	Corneal basic concepts . . . . .	70
5.2.2	Zernike polynomials . . . . .	73
5.2.3	Corneal biometry using Zernike coefficients comparison . . . . .	74
5.3	Description of our two new methods . . . . .	75
5.3.1	METHOD 1: Corneal biometry using spherical harmonics coefficients comparison . . . . .	75
5.3.2	METHOD 2: Corneal biometry using inter-surface residual volume . . . . .	77
5.4	Results and discussion . . . . .	79
5.4.1	Dataset . . . . .	79
5.4.2	Results with Zernike coefficients . . . . .	79
5.4.3	Results with spherical harmonics coefficients . . . . .	81
5.4.4	Results using inter-surface residual volume . . . . .	82
5.5	Discussion . . . . .	83
5.6	Conclusion . . . . .	85

---

## Avant-propos

Ce chapitre reprend l'article soumis à la revue internationale suivante :

Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparison of quasi-spherical surfaces: Application to corneal biometry*.

Il développe les travaux présentés dans les conférences nationale et internationale suivantes :

Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparison of quasi-spherical surfaces using spherical harmonics: Application to corneal biometry*. 4th International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications, IEEE IPTA 2014, pp. 308–312, Paris, France, octobre 2014.

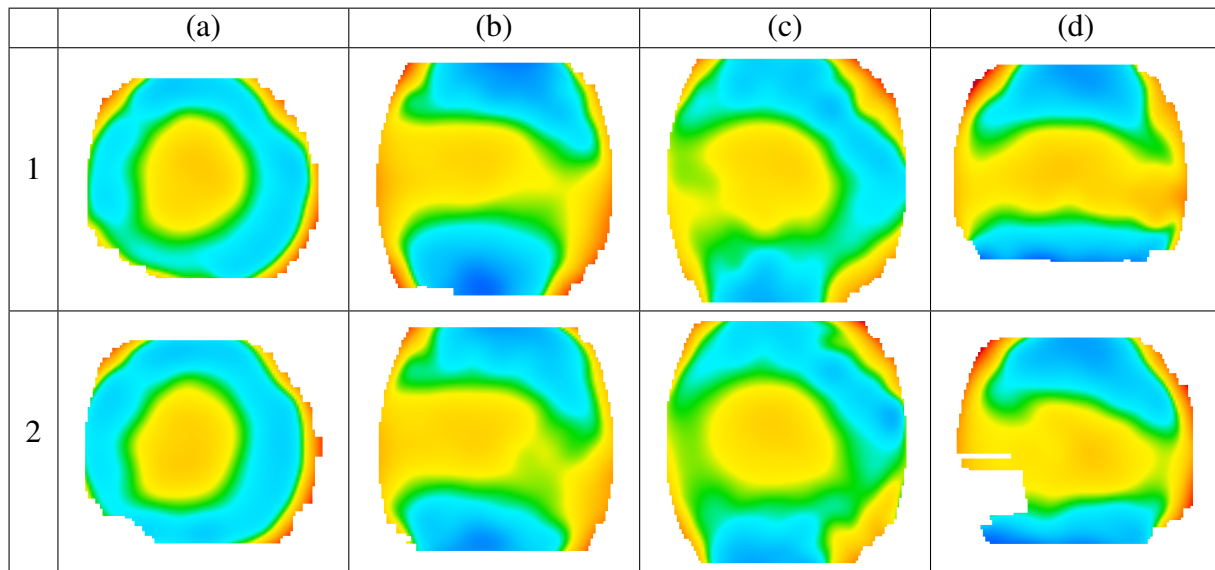
Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparaison de surfaces quasi-sphériques – Application à la biométrie cornéenne*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2014, Lyon, France, mars 2014.

## Résumé

De nos jours, la reconnaissance biométrique est utilisée de façon courante, afin d'identifier une personne en utilisant une caractéristique du corps humain propre à chacun. Différentes parties du corps sont couramment utilisées : les empreintes digitales, la paume de la main, l'empreinte du pied, l'iris, les réseaux veineux, les traits du visage ou encore la forme de l'oreille. Dans cette étude on se propose d'utiliser la cornée.

L'objectif est de reconnaître une surface parmi un groupe de surfaces à l'aide de leurs acquisitions 3D respectives, dans le cadre d'une application de biométrie sur la cornée. L'idée est de quantifier la différence entre chaque surface et une surface donnée, et de déterminer un seuil permettant la reconnaissance. Ce seuil est dépendant des variations normales au sein d'un même sujet, et du bruit inhérent à l'acquisition. Deux méthodes sont proposées. La première consiste à calculer le volume entre les surfaces après avoir effectué un recalage, et à utiliser ce volume comme un critère de similarité (en réutilisant les méthodes décrites dans le chapitre précédent). La seconde approche s'appuie sur une décomposition en harmoniques sphériques en utilisant les coefficients comme des descripteurs de forme, qui permettront de comparer deux surfaces.

La Figure 5.1 montre deux prises de mesures pour quatre cornées différentes. On voit qu'il existe une variabilité non négligeable, mais que les cartes de couleurs sont très proches pour chaque personne. Parfois les variations peuvent être importantes (voir la cornée c). De plus, les acquisitions sont parfois rognées (par exemple pour la cornée d).



**Figure 5.1:** Deux acquisitions (lignes 1 et 2) ont été effectuées pour quatre cornées différentes a, b, c et d.

L'article propose deux méthodes utilisables seules ou en cascade permettant d'utiliser la cornée comme modalité biométrique malgré ces variations.





# Comparison of quasi-spherical surfaces

## Application to corneal biometry

### Abstract

In this paper, we present two new techniques with their own particular advantages dedicated to the authentication of a person based on the 3D geometry of the cornea. A non-invasive device known as corneal topographer is used for capturing the shape of each cornea. Until now only a few studies on corneal biometry have been conducted and they were limited only to the anterior surface. In this work, since the whole cornea is a tissue layered by two (anterior and posterior) surfaces, we propose to use both surfaces to characterize the corneal shape for biometry. The first proposed method consists in comparing coefficients from a spherical harmonics decomposition of corneal surfaces, this allows to do a fast comparison that can be used to perform many-to-one comparisons (for instance to search a surface within a large database). The second approach is based on the minimal residual volume between two corneas after a registration step, this geometry-based method is more accurate but slower, and is thus used to perform one-to-one comparisons (for instance to verify if the person is who he/she claims to be). A serial (or cascade) fusion scheme is also proposed to benefit from the advantages of both methods simultaneously for fast and accurate comparisons. Our study demonstrates clearly that corneal shape could be used for biometry. Moreover using both corneal surfaces in the comparison procedure give much better result than using only one. The two proposed methods have been tested and validated on a dataset of 257 corneas.

## 5.1 Introduction

Nowadays, biometric recognition is commonly used to identify a person using characteristic features of the human body. Several parts are used: fingerprints, footprints, iris, venous networks, facial shape, etc. In this study we propose to use another part of the human body: the cornea. Cornea is the outer part of the eye, it can be measured without contact with a corneal topographer (frequently used by ophthalmologists). Several studies aimed at comparing corneal surfaces, mainly for medical purposes: comparison of groups of different surgeries [Hayashi et al. 1994], of different age ranges [Hayashi et al. 1995], of different disease stages [Brunette et al. 2011], of subjects for a stability study of corneal topography in the post-blink interval [Buehren et al. 2001], for determining differences with an average model for a repeatability study [FAM et al. 2005], for construction of medical atlases [Laliberté et al. 2007] etc. The two main investigations

that focus on the comparison of corneal surfaces for a biometric application are [Lewis 2011] using a Zernike polynomial decomposition [Iskander et al. Jan. 2001] and our preliminary work [Polette et al. 2014b] with spherical harmonics decomposition. However both were limited to the anterior surface only.

In this paper, we present two new methods (and a conceivable fusion scheme) to compare corneas, using both anterior and posterior surfaces to improve separability. The first approach is based on a spherical harmonics decomposition and the second one is based on a registration technique aiming at determining the minimal residual volume between corneas to be compared.

The first one provides a fast comparison to perform a biometric identification by storing only few discriminant coefficients (i.e. comparing one cornea to a large database). The second one is geometry-based, and need to store and to compute the whole geometry to consider thin details of the corneal shape more accurately. It can be suitable for biometric verification purposes which only need a one-to-one comparison (to verify if the person is who he/she claims to be). These two methods could be used separately for two different purposes, or jointly in a cascade fusion architecture to use the accuracy of the second method to check the output of the first method.

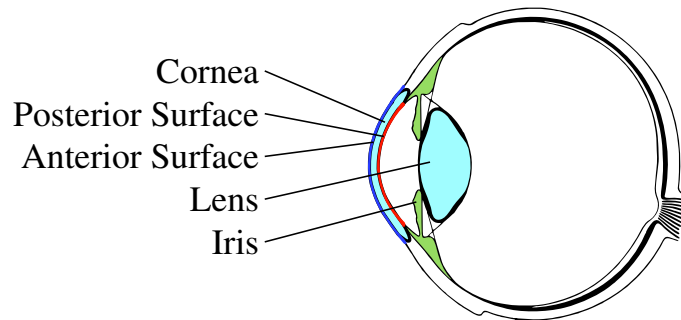
The paper is organized as follows. First, a review of the basic concepts about the cornea is presented, and then Zernike and spherical harmonics decomposition are detailed, followed by a description of our two methods. Then both methods are tested and compared to the existing ones with real data. A ROC curve analysis is then presented. It shows better performance with the two proposed methods. The particular advantages of each method are discussed in the final section.

## 5.2 Basic notions

### 5.2.1 Corneal basic concepts

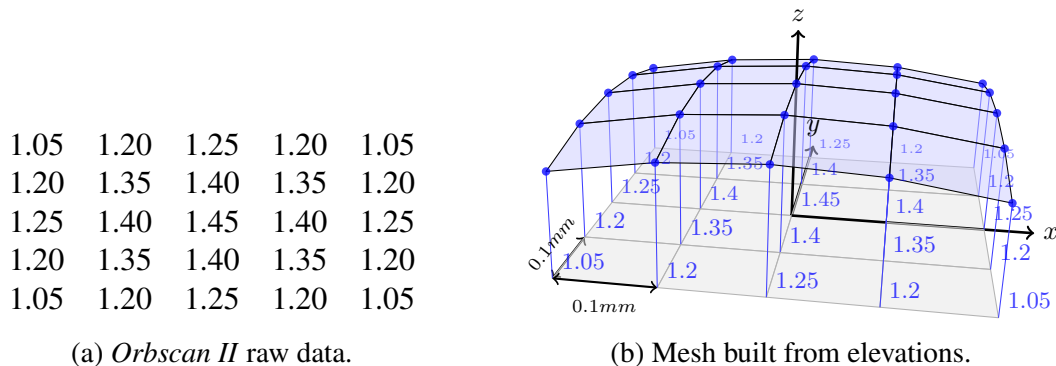
The cornea is the transparent outer front part of the eye. It covers nearly a fifth of the eye's surface, with an average diameter of 11 mm. It is the main lens of the eye, responsible for two-thirds of the dioptric power (the remaining third is the eye crystalline lens), with a refractive index of 1.377. The cornea is slightly thicker at its periphery: approximately 0.5 mm at the centre and 0.6 mm at the periphery. The curvature radius of the anterior surface varies between 7 and 9 mm and is approximately 6.5 mm for the posterior surface. A cross sectional schematic view of an eye is presented on Figure 5.2 showing both anterior and posterior surfaces.

Different corneal topographers exist for capturing the 3D shape of the cornea such as the PENTACAM (Oculus) and the ORBSCAN II (Bausch & Lomb). The ORBSCAN II was used in this study to acquire elevation maps of both the anterior and posterior surfaces, with an error margin of 1 micron. The data were saved as a uniformly spaced 101x101 grid of elevations,



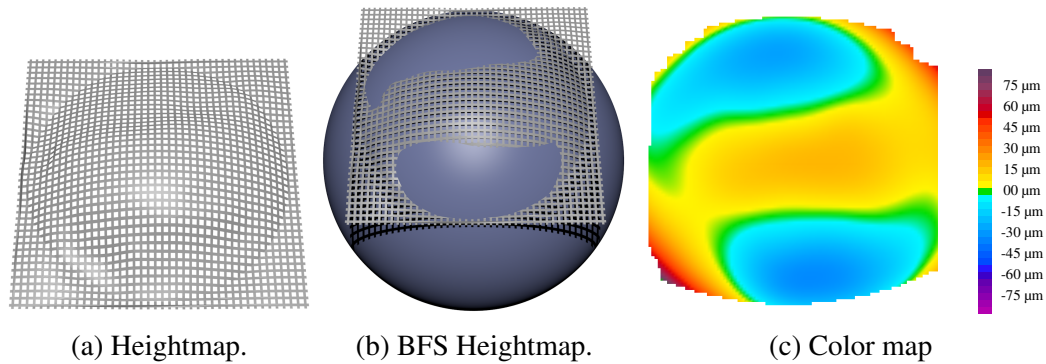
**Figure 5.2:** Sectional view of the eyeball.

spaced by 0.1 mm along the X and Y axes. Figure 5.3 (a) shows an example of raw ORBSCAN II data. Figure 5.3 (b) presents the method for constructing the mesh from the elevations. The points are elevated and linked by edges to their neighbours to build faces. Each measured cornea consists of two mesh surfaces (anterior and posterior) bounding the corneal volume.



**Figure 5.3:** Surface mesh construction step from *Orbscan II* raw data.

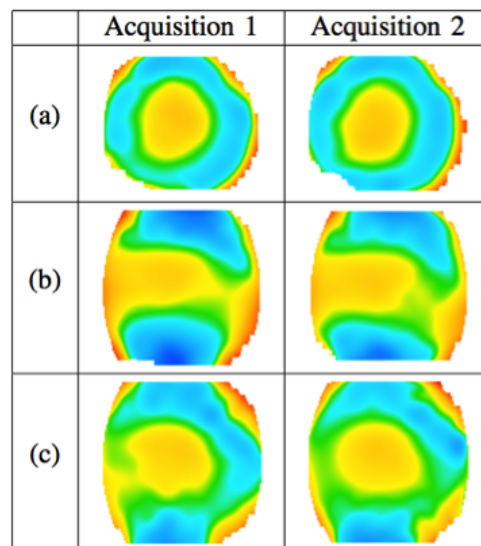
As the cornea is almost spherical, a smart and efficient way to visualize the global appearance of a corneal surface is to use a spherical reference, which makes possible to study the differences from a sphere. First, the BFS (Best Fit Sphere), the BFS centre and the BFS radius are calculated by a least square minimisation of the sum of distances between the sphere and the corneal surface [Gatinel et al. 2011]) is computed. Then, the difference between the corneal surface and the BFS surface is estimated at each point. Finally, each difference is associated with a colour, using a standard colourset (commonly used by the clinician), with warm colours for positive differences (points outside the BFS) and cold colours for negative differences (points inside the BFS). The colours are then projected on a plane perpendicular to the Z-axis to get a colour map useful for diagnostic interpretation. Figure 5.4 shows the construction steps of the colour map. Ophthalmologists commonly use these maps for diagnosis purposes. Usually the BFS radius for corneal surfaces is around  $7 \pm 2$  mm. The colour range of the difference map from a sphere shows that the corneal surface is very close to a sphere.



**Figure 5.4:** Color map building steps, this example shows a right anterior corneal surface.

Figure 5.5 shows two acquisitions for 3 different subjects a, b and c. They illustrate the between-subject differences as well as the within-variability for the same subject for two different acquisitions.

This visually demonstrates the potential of corneal shape for biometry. Consequently, in his thesis, [Lewis 2011] uses a Zernike polynomial decomposition [Iskander et al. Jan. 2001] on the anterior surface as shape descriptors, in order to compare two anterior corneal surfaces for biometric purposes. We now describe this polynomial decomposition in more details.



**Figure 5.5:** Two acquisitions for 3 different subjects a, b and c.

## 5.2.2 Zernike polynomials

Any elevation surface  $f(r, \theta)$  can be decomposed in a sum of Zernike polynomials  $Z_n^m$  over the unit circle, where  $\theta$  is the azimuthal angle,  $r$  the radial distance,  $n$  and  $m$  integers ( $n \geq m$ ) as follows:

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^m \cdot Z_n^m(r, \theta)$$

$n$  is called the degree, and  $m$  the order, with  $n - m$  even.

Zernike polynomials are defined as follows:

$$\begin{aligned} Z_n^m(r, \theta) &= R_n^m(r) \cos(m\theta) \text{ (even)} \\ Z_n^{-m}(r, \theta) &= R_n^m(r) \sin(m\theta) \text{ (odd)} \end{aligned}$$

Where

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{(s)! (\frac{n+m}{2} - s)! (\frac{n-m}{2} - s)!} r^{n-2s}$$

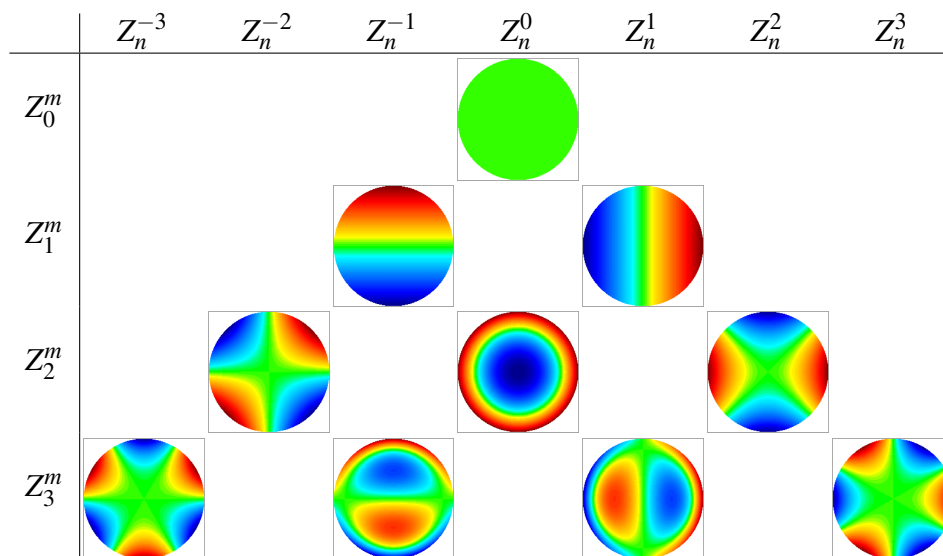
Each coefficient is associated to an index (see table 5.1).

	-2	-1	0	1	2	$m$
0			$C_0^0$ (1)			
1		$C_1^{-1}$ (2)		$C_1^1$ (3)		
2	$C_2^{-2}$ (4)		$C_2^0$ (5)		$C_2^2$ (6)	
$n$	...	...	...	...	...	

**Table 5.1:** Zernike coefficients and indexes

This formalism makes possible the representation of a surface with only an indexed array of coefficients. Table 5.2 shows the 10 first Zernike polynomials from  $Z_0^0$  to  $Z_3^3$  as elevations over the unit circle (negative values are in blue and positive values are in red).

A surface can be decomposed into an array of coefficients using a Zernike polynomials least-square fit to this surface [Iskander et al. Jan. 2001].



**Table 5.2:** The 10 first Zernike polynomials

### 5.2.3 Corneal biometry using Zernike coefficients comparison

The approach proposed by [Lewis 2011] deals with the comparison of arrays ( $C_0^0$  to  $C_7^7 = 36$  values) of Zernike coefficients after a decomposition to determine if compared surfaces are from the same person. Each coefficient is compared one-by-one and then differences are summed:

$$dist(s1, s2) = \sum_x |s1C_x - s2C_x|$$

$s1C_x$  and  $s2C_x$  being the coefficient arrays of compared surfaces  $s1$  and  $s2$ . The author proposes to delete  $C_0^0$ ,  $C_1^{-1}$  and  $C_1^1$  from the sum, because he observed that the variability within different acquisitions from a same subject was too high. Those coefficients ( $C_0^0$ ,  $C_1^{-1}$  and  $C_1^1$ ) correspond respectively to the global mean elevation (Piston), the X-lateral position and the Y-lateral position. They are not dependant on the corneal shape, but on the position of the cornea during the acquisition.

However, according to [Iskander 2009], the use of a spherical harmonics decomposition gives a better fit to a corneal surface than Zernike polynomials for the same number of coefficients. For this reason, we tested spherical harmonics (see next section) for corneal biometry in another study [Polette et al. 2014b] with promising results. However both methodologies use only one (anterior) of the two corneal surfaces, this means the whole corneal shape is not considered in totality.

## 5.3 Description of our two new methods

In this section we present two new techniques with their own particular advantages dedicated to the authentication of a person based on the 3D shape of cornea. The whole cornea is considered by using the two (anterior and posterior) surfaces.

### 5.3.1 METHOD 1: Corneal biometry using spherical harmonics coefficients comparison

Spherical harmonics are a suitable mathematical model for quasi-spherical shapes. Considering our preliminary good results reported in [Polette et al. 2014b], this first method uses spherical harmonics coefficients as shape descriptor to compare surfaces instead of using Zernike coefficients. In addition, in this new approach, both surfaces are represented instead of the anterior surface only.

#### 5.3.1.1 Spherical harmonics decomposition

Any surface  $f(\theta, \varphi)$  can be decomposed in a sum of  $2l + 1$  spherical harmonics  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , with  $-l \leq m \leq l$ , weighted by a coefficient  $C_l^m$ , where  $l$  and  $m$  are integers, as follows:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l^m \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$Y_l^m(\theta, \varphi)$  is defined as follows:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos\theta) \cdot \cos(m\varphi)$$

With the Legendre functions:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l$$

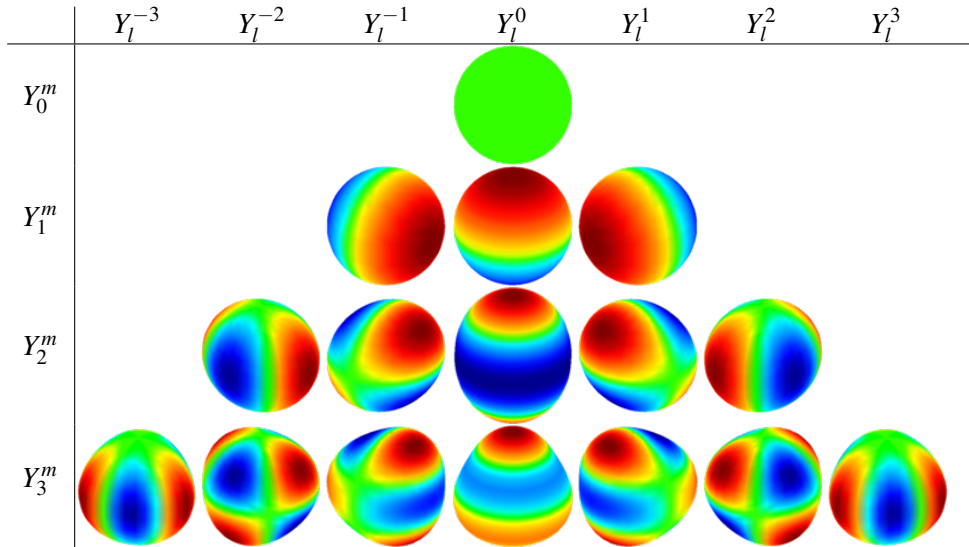
Each coefficient is associated to an index (see table 5.3).

Thus it is possible to represent a surface with only an array of coefficients. Table 4 shows the 16 first spherical harmonics from  $Y_0^0$  to  $Y_3^3$  relatively to a unit sphere, negative values are in blue (inside the unit sphere) and positive values are in red (outside the unit sphere).

#### 5.3.1.2 Spherical harmonics coefficients comparison

To decompose a corneal surface into spherical harmonics, the surface is first centered on a spherical reference, by locating the BFS on the coordinate system origin. By doing that, all the

	$m = -2$	$m = -1$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
$l = 0$			$C_0^0$ (1)		
$l = 1$		$C_1^{-1}$ (2)	$C_1^0$ (3)	$C_1^1$ (4)	
$l = 2$	$C_2^{-2}$ (5)	$C_2^{-1}$ (6)	$C_2^0$ (6)	$C_2^1$ (7)	$C_2^2$ (8)
...	...	...	...	...	...

**Table 5.3:** Spherical harmonics coefficients and indexes**Table 5.4:** 16 first spherical harmonics

spherical information is contained in the first coefficient  $C_0^0$ , all the other coefficients represent the relative deformations to a sphere.

In order to compare fairly our method to the Zernike approach, surfaces are decomposed in the same number of coefficients, from  $C_0^0$  to  $C_5^5$  (36 coefficients), by least-square fitting to the surface.

Our distance computation is close to the previous one (for the Zernike approach), using spherical harmonics coefficients, but the difference is computed with all coefficients:

$$dist(s1, s2) = \sum_x |s1C_x - s2C_x|$$

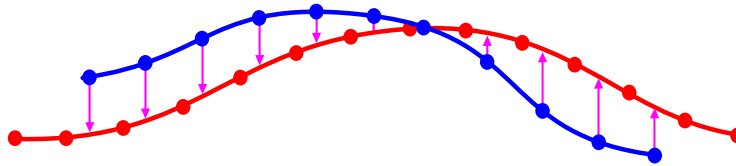
This method can be used with two (anterior and posterior) surfaces by summing the distance of the two surfaces to obtain a distance value for the whole cornea (see [Polette et al. 2014b]).



### 5.3.2 METHOD 2: Corneal biometry using inter-surface residual volume

Here, the aim is to compute a representative value of the real geometrical difference between a pair of surfaces (pair of anterior and pair of posterior surfaces for cornea) to be compared. Evidently, the naive direct subtraction of elevation maps does not work because the corneas are not necessarily properly aligned. The key idea is to perform a registration of a surface to another by minimizing the overlap in-between volume between the two surfaces. The residual volume is then a representative value of the difference between two surfaces: the closer to 0 this value is, the more similar the surfaces. Thus the method is based on the minimization of this residual volume computed as the average absolute elevation difference from a surface to another on overlapping parts of surfaces after registration (see [Polette et al. 2014b]).

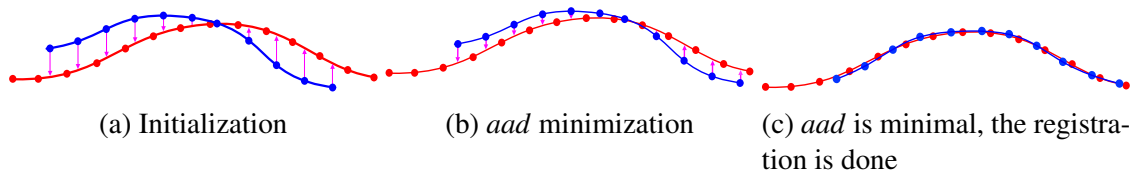
A point to face elevation difference (purple arrows in Figure 5.6) is determined by a bilinear interpolation of the elevation on a face from the coordinates of a point of the other. This difference is noted  $elevDiff(p,s)$  in the following equation of the *average absolute difference* ( $aad$ ), with  $s1$  and  $s2$  the two surfaces,  $p_{ks1}$  the  $k^{th}$  point of  $s1$  and  $N_{s1}$  the total number of points in  $s1$  in Figure 5.6. The  $elevDiff(p,s)$  method searches in a first time for the corresponding face to  $p$  in the surface  $s2$ , and proceeds to a bilinear interpolation from  $p$  to the face along the Z axis.



$$aad = \frac{\sum_{p_{ks1}=0}^{N_{s1}-1} abs(elevDiff(p_{ks1},s2))}{N_{s1}}$$

**Figure 5.6:** The average absolute difference equation ( $aad$ ) with surface 1 in blue and surface 2 in red.

The *aad* is then minimized considering a geometrical transformation characterized by 7 parameters  $(t_x, t_y, t_z, r_x, r_y, r_z, s)$  with a nonlinear optimization algorithm (Figure 5.7), based on the Nelder-Mead ([Nelder and Mead 1965]) method (available in GSL, the *GNU Scientific Library* [Gough (2009)]), this registration method induces an *Inter-Surface Volume Minimization* (ISVM).



**Figure 5.7:** Registration of two surfaces.

After the registration step (Figure 5.7 c), the residual *aad* is representative of the minimal existing average volume between two surfaces, which can be used as a similarity descriptor. This method can also be used with two (anterior and posterior) surfaces by summing the minimal existing average volume of the two (anterior to anterior and posterior to posterior) surfaces to obtain a distance value for the whole cornea.

## 5.4 Results and discussion

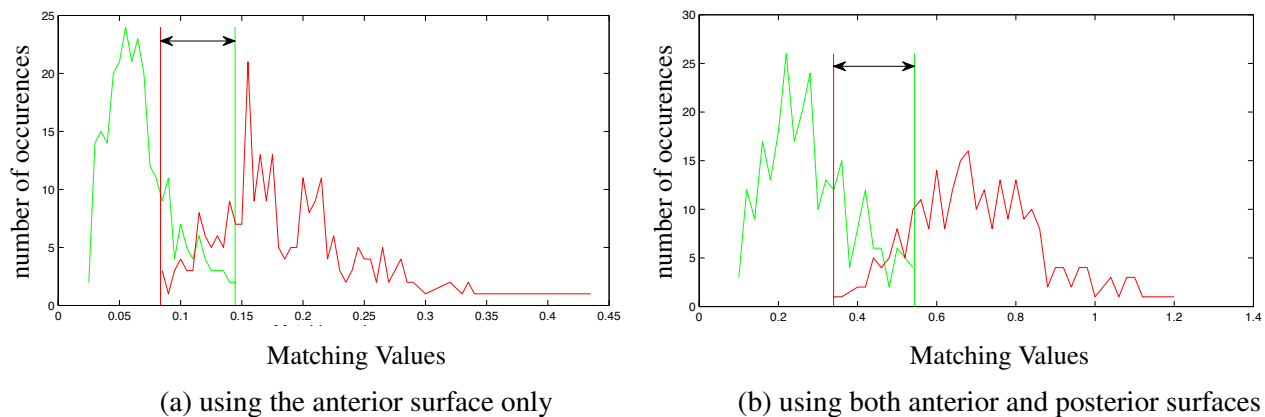
To quantify the error margin of each method, a set of matching-comparisons (comparisons between two corneas from the same eye) and a set of non-matching-comparisons (comparisons between two corneas from different eyes) are computed to observe the variability of each matching case, and how the error margins (identified by the overlapping range between the two sets of values) are large.

### 5.4.1 Dataset

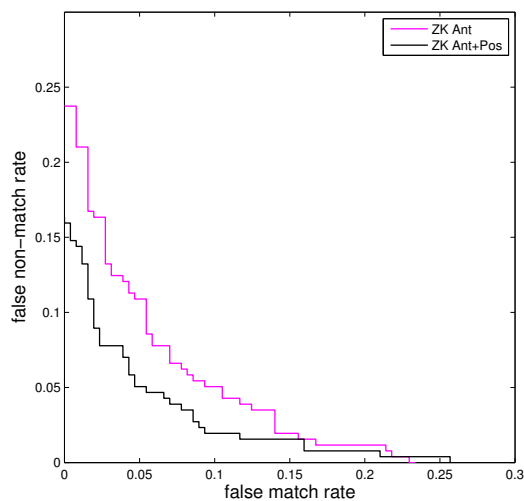
Our dataset contains 2 different acquisitions of 257 corneas (total of 514 corneal topographies), with 120 from right eyes and 137 from left eyes. This allows to compute up to 257 matching-comparisons. Non-matching-comparisons are computed with randomly chosen pairs of right or left corneas.

### 5.4.2 Results with Zernike coefficients

In order to compare our methods to the existing ones, matching values have been computed first with Zernike coefficients with (section 2.2.1). Results are presented in Figure 5.8, with 257 matching-comparisons in green, and 257 non-matching-comparisons in red. The overlapping range between matching-comparisons values and non-matching-comparisons values (emphasized with an arrow in Figure 5.8 is the error margin. A potential discrimination threshold can be set in this range. The threshold position between these two values determines the false-match-rate (false-positive-rate) and the false non-match rate (false-negative-rate) and allows the construction of the ROC curve presented in Figure 5.9. The closer the curve is to the origin (lower left corner), the better the method is to predict correct matching of corneas.



**Figure 5.8:** Matching values using a Zernike coefficients comparison

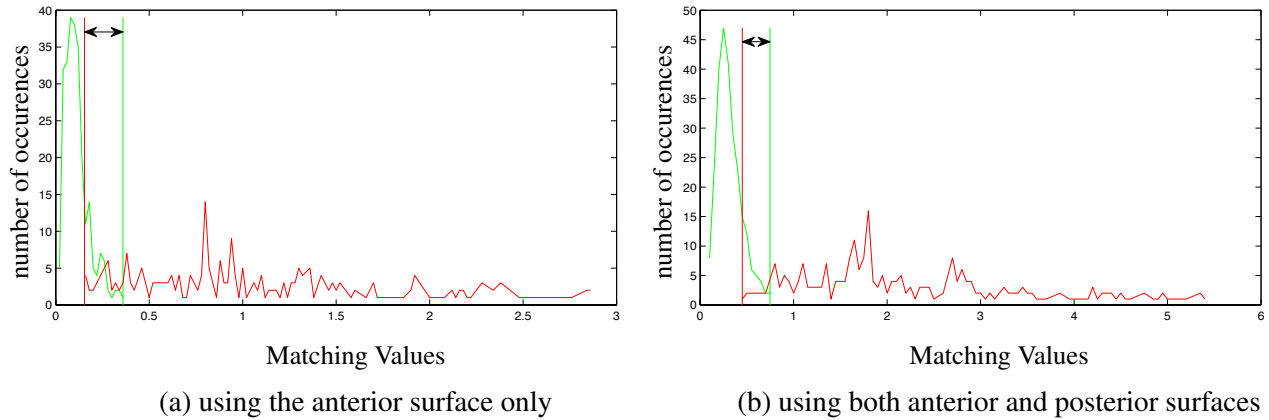


**Figure 5.9:** ROC curve comparison of the Zernike method using one (in pink) and two (in black) surfaces, the nearer to the origin is the curve, the better

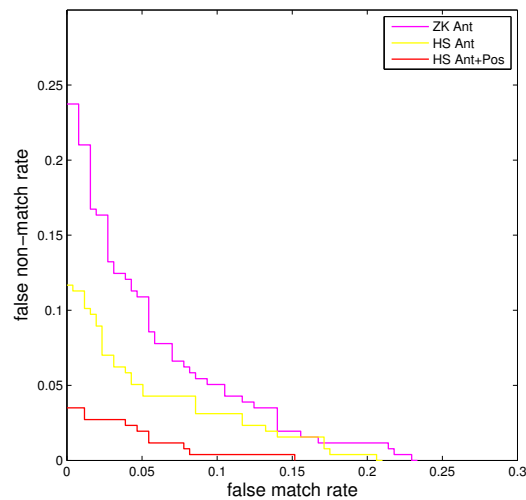
We can observe that the use of a second (posterior) surface provides a more efficient discrimination of the two groups of measures than the anterior surface alone used in the work of [Lewis 2011].

### 5.4.3 Results with spherical harmonics coefficients

The same set of measures was generated using spherical harmonics to compute matching values in Figure 5.10 and the corresponding ROC curve in Figure 5.11.



**Figure 5.10:** Matching values using a spherical harmonics coefficients comparison



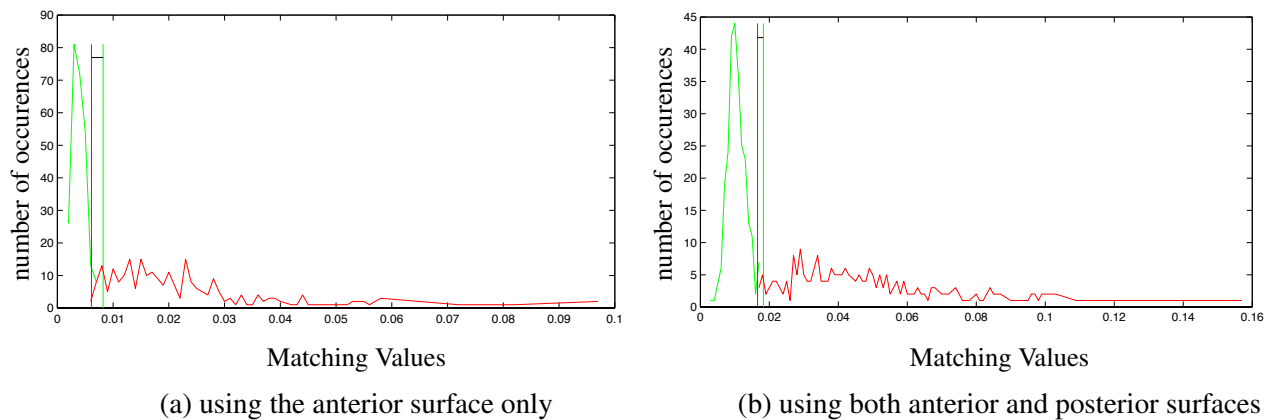
**Figure 5.11:** ROC curve comparison of the Zernike method (in pink), and the spherical harmonics method using one (in yellow) and two (in red) surfaces, the nearer to the origin is the curve, the better

Using only one surface with the same number of coefficients allows to discriminate more efficiently the two groups of measures using the spherical harmonics decomposition (yellow curve,

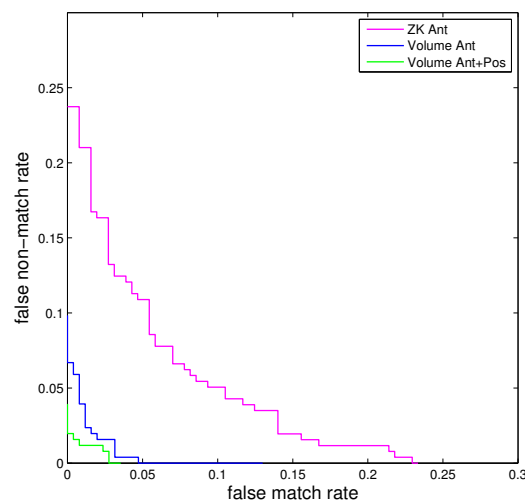
Figure 5.11) than the Zernike decomposition (pink curve, Figure 5.11), and the error decreases even more while using two surfaces (red curve, Figure 5.11).

#### 5.4.4 Results using inter-surface residual volume

The results of our second method are presented figures 5.12 and 5.13, using the same dataset.



**Figure 5.12:** Matching values using inter-surface residual volume comparison



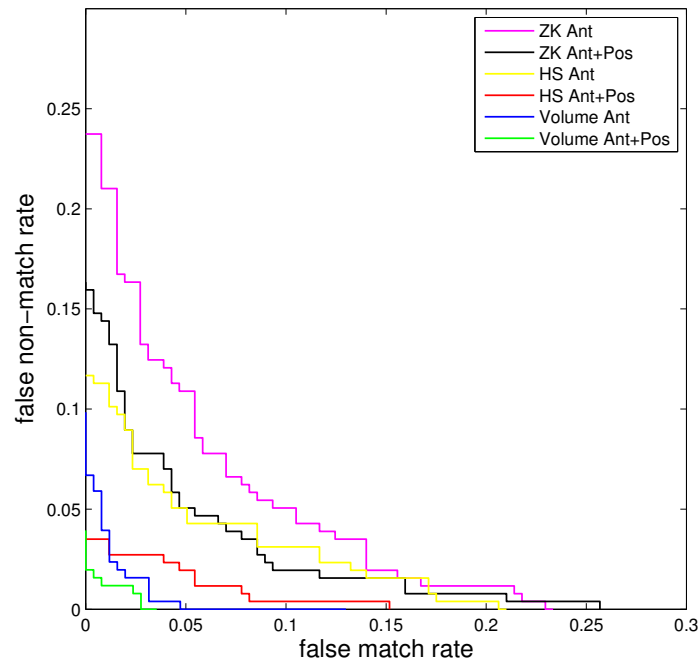
**Figure 5.13:** ROC curve comparison of the Zernike method (in pink), and inter-surface residual volume comparison method using one (in blue) and two (in green) surfaces, the nearer to the origin is the curve, the better

## 5.5 Discussion

All ROC results have been reported on a common graph in Figure 5.14 showing the performance of all approaches. The method proposed by [Lewis 2011] with a Zernike polynomial decomposition is the least efficient (pink curve). Our previous work [Polette et al. 2014b] with Spherical Harmonics decomposition of the anterior surface is significantly better (yellow curve). Finally the residual inter-surface volume approach is the best when only the anterior surface was considered. As expected, the use of the second (posterior) surface is helpful for all approaches i.e. Zernike polynomials, Spherical Harmonics or residual volume. The best overall performance is obtained with the inter-surface residual volume method (blue curve) followed closely by Spherical Harmonics (red curve).

Although the spherical harmonics method is the second best method (based on matching rate), it is the best method based on coefficient comparisons. This fact is important because a method based on coefficients allows the storage of a small number of values (only 36 values here) for each surface, and therefore searching for a cornea is much faster. For example, biometric identification (i.e. comparing one cornea to a large database) is possible with this method and would take only a few seconds for a dataset composed of thousands corneas.

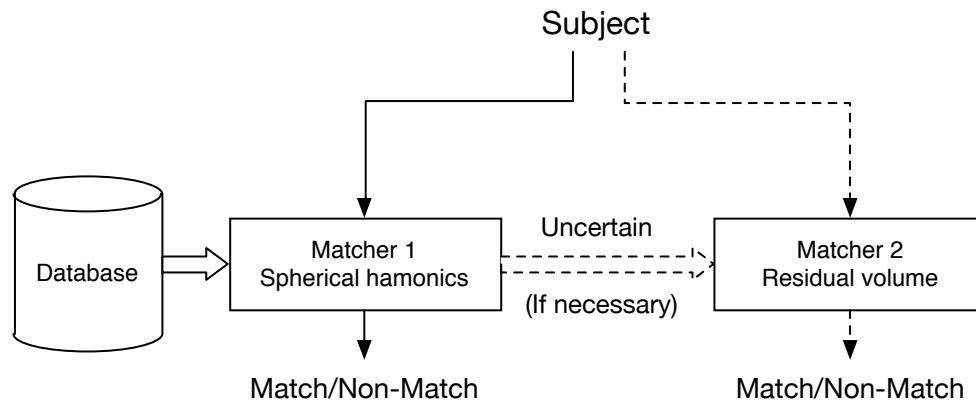
The inter-surface residual volume method gives the best matching rate but needs to store the entire corneal geometry (in this study: two 101 x 101 matrices of elevation values), and would take a few seconds for only one comparison. This method can be suitable for biometric verification purposes, which only needs a one-to-one comparison to verify if the person is who he/she claims to be.



**Figure 5.14:** All results grouped on a ROC curve

Therefore both methods (spherical harmonics and residual volume) have their own specific advantages and application fields for biometry. Moreover they could be combined in a serial (or cascade) fusion architecture (e.g. [Marcialis et al. 2009]) to take advantage of the accuracy of the residual volume method to check the output of the much faster spherical harmonics method (see Figure 5.15). In this serial scheme, biometric identification is done with the fastest method first (i.e. spherical harmonics) to prune the database. If a computed distance is lower than a predefined lower threshold, the subject is immediately identified (true match), without further processing. This threshold can be chosen to get the False Match Rate = 0 to guarantee that no false positive occurs. Conversely, if the distance is more than another predefined upper threshold, the current enrolled individual of the database is immediately rejected (true non-match). This threshold can be set to get the False Non-Match Rate = 0 to guarantee that no false negative occurs. Computed distances between these two thresholds are uncertain and require using a second matcher (residual volume) to identify the subject. This kind of fusion strategy will greatly reduce the computation time required by using the residual volume method alone by eliminating “easy” cases with the faster spherical harmonics method. In our study, with spherical harmonics of both surfaces, only 9.3% (overlapping region in Figure 5.10 b) of the database would need further processing with the more accurate but slower residual volume method.





**Figure 5.15:** The cascade fusion architecture

## 5.6 Conclusion

In this paper, two new methods are presented to compare pairs of quasi-spherical surfaces in the context of corneal biometry. The first one uses a spherical harmonics coefficient comparison and the second one is based on a direct mesh comparison after a prior registration. Both proposed methods gave better results than classical Zernike polynomials decomposition. In addition, they can easily be combined in a serial fusion scheme. This study also shows clearly that corneal shape is suitable as a biometric feature.

Both methods could be improved in the future. The coefficient-based method uses a basic comparison of the coefficients considering them one-by-one. Although this approach was efficient, it can be enhanced by determining which coefficient contributes the most to the surface discrimination (feature selection) or by extracting new more powerful features from them (feature extraction e.g. with LDA: linear discriminant analysis). As for the residual volume comparison it could also be improved by adding other features such as the corneal thickness as a part of the discriminating features to represent in a better way the whole corneal volume (instead of its two surfaces only).

## Acknowledgement

The authors would like to thank the Quebec Vision Health Research Network for its support.



## DESCRIPTION DE FORME PAR GRAPHE S'APPUYANT SUR LES COURBURES DISCRÈTES (ARTICLE)

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	89
6.2	Basic notions on curvatures . . . . .	91
6.3	Graph construction method . . . . .	94
6.3.1	Decomposition into patches . . . . .	95
6.3.2	Continuous boundary between areas . . . . .	97
6.3.3	Construction of the graph . . . . .	102
6.4	Feature extraction method . . . . .	102
6.4.1	Feature extraction schemes . . . . .	103
6.4.2	Pattern extraction method . . . . .	104
6.5	Examples and validation . . . . .	106
6.5.1	Semantic description of a feature . . . . .	106
6.5.2	Similarity between two meshes . . . . .	107
6.5.3	Self-similarity within a mesh . . . . .	108
6.6	Conclusion and future work . . . . .	109
6.7	Acknowledgments . . . . .	110

---

## Avant-propos

Ce chapitre reprend l'article soumis à la revue internationale suivante :

Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Feature extraction and characterization on meshes using a shape descriptor graph based on a patches decomposition from discrete curvature.*

Il développe les travaux présentés dans les conférences nationale et internationale suivantes :

Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Feature extraction using a shape descriptor graph based on discrete curvature patches.* Computer Graphics International, CGI 2015, Strasbourg, France, juin 2015.

Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Un descripteur de forme par graphes utilisant une décomposition de maillages par cartes de courbures.* Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2015, Poitiers, France, avril 2015.

## Résumé

Cette étude présente une nouvelle méthode de décomposition en graphes de maillages 3D triangulés. Notre méthode utilise des cartes de courbures discrètes comme descripteur de forme et découpe le maillage traité en huit différentes catégories de carreaux, ou *patches* (*peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* et *flat*). Ensuite un graphe d'adjacence est construit avec un nœud pour chaque *patch*. Toutes les catégories de *patches* ne pouvant pas être voisines dans un contexte continu, des jonctions intermédiaires sont ajoutées afin d'assurer une cohérence continue entre les zones. Nous montrons à travers quelques exemples que ces graphes peuvent être utilisés pour extraire des caractéristiques géométriques. Nous proposons aussi une méthode de comparaison pour calculer une distance entre ces graphes. Cette étude montre que ces graphes construits en utilisant les propriétés différentielles sur des maillages peuvent être utilisés afin de reconnaître des surfaces discrètes.

# Feature extraction and characterization on meshes using a shape descriptor graph based on a patch decomposition from discrete curvatures

## Abstract

This paper presents a new decomposition method that transforms an arbitrary 3D triangular mesh into a graph. These graphs are used as shape feature extraction structures. Our method uses discrete curvature maps as shape descriptors and divides the meshes into eight categories of patches (*peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* and *flat*). Next, an adjacency graph is constructed with a node for each patch. As all categories of patches cannot be neighbors in a continuous context, additional intermediary patches are added as boundaries to ensure a continuous consistency at the transitions between areas. This modular structure is applied to the extraction of patterns within a surface mesh. This study illustrates that these graphs obtained using differential properties on meshes can be used to identify discrete surfaces.

## 6.1 Introduction

Triangular meshes are currently a standard structure for 3D representation in many domains related to computer graphics. These meshes are becoming increasingly large with the rapid development of 3D scanners. Therefore, geometric analysis is of crucial interest. Shape feature extraction and comparison on meshes is an important step in several graphical 3D applications, such as shape recognition, shape modeling, and shape registration.

A non-trivial problem in 3D shape analysis is the definition of a method with which to characterize the global and local features, independent of scaling or rigid transformations.

In this study, we propose a curvature-based analysis technique to build a representative graph of the shape features of a surface mesh. We aim to extract specific features on a surface mesh embedded in a 3D shape. The object is divided into eight categories of patches, depending on the local curvature: *peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* and *flat*. This process characterizes the local shape in a low-level semantic manner, regardless of the scaling. We propose to enrich the graph with transition boundaries between patches to ensure continuous consistency at the transitions between areas.

The goal is to build a descriptor graph from a discrete object that closely approximates the graph based on the original continuous objects that have been sampled to create this discrete object.

There are many studies regarding shape or feature extraction on meshes using discrete curvatures, e.g., via a skeleton using mean curvature [Kudelski et al. 2013], via crest lines [Hildebrandt et al. 2005; Yoshizawa et al. 2005], via a mesh split into patches using a region growing method driven by curvature variation [Lavoué et al. 2005], or mean-shifted curvature [Zhang et al. 2008], using Gaussian curvature to extract salient features in a multi scale frame [Yang and Shen 2012] (the concept of *saliency feature* has been previously described by [Lee et al. 2005]), by extracting a list of minimal and maximal specific curvature positions on a mesh [Ho and Gibbins 2009].

In addition, some recent studies point to shape analysis, such as feature extraction or local self-similarity extraction, e.g., via a *regularity graphs* [Tevs et al. 2014] and via linear programming [Huang et al. 2014], or mesh segmentation and labeling, e.g., via *consensus of deformable shapes* [Rodola et al. 2014], via *multi-objective approach* [Simari et al. 2009], via *hierarchical planar symmetry* [Simari et al. 2006], and via machine learning [Xie et al. 2014].

Our objective is to propose a modular structure with which to extract specific features via semantic description based on a graph using a specific pattern.

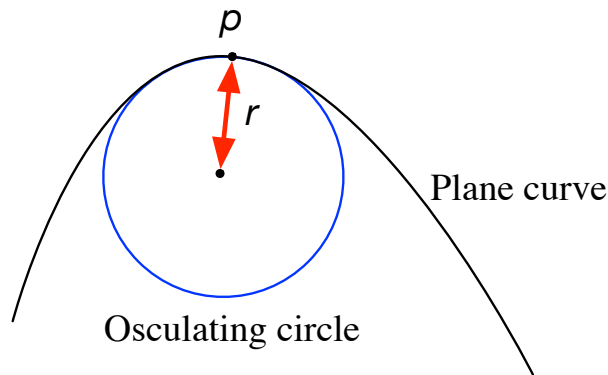
Graph and sub-graph processing for the analysis of shapes is a known methodology [Berner et al. 2008] used to detect shape symmetries, [Gumhold et al. 2001] extract feature on points clouds using sub-graphs selection; [Zhang et al. 2008] also used graphs to perform mesh segmentation, and [Sundar et al. 2003] used skeleton graphs to achieve global matching of shapes.

Following [Gal and Cohen-Or 2006], our main objective is to locally match the surface parts using discrete curvature as an invariant descriptor, using a graph-based approach to be able to use surface propagation schemes, common sub-graphs matching and region growing algorithms. The main challenge with this approach is related to the natural discontinuity of meshes; by its nature, discrete curvatures of meshes are dependent on the sampling of the mesh.

The key idea of the proposed approach is to build a surface graph from a mesh, where nodes (patches) represent different types of parts of the shape, with a node adjacency that respects specific rules (related to continuous properties) to build similar types of features of a shape with a similar surface-graph.

## 6.2 Basic notions on curvatures

Geometrically, the curvature at a regular point on a curve (belonging to a plane) is defined as the inverse of the radius of the *osculating circle* passing through this point (the osculating circle is the circle that better fits the curve on a region infinitesimally small around this point ) see Figure 6.1.



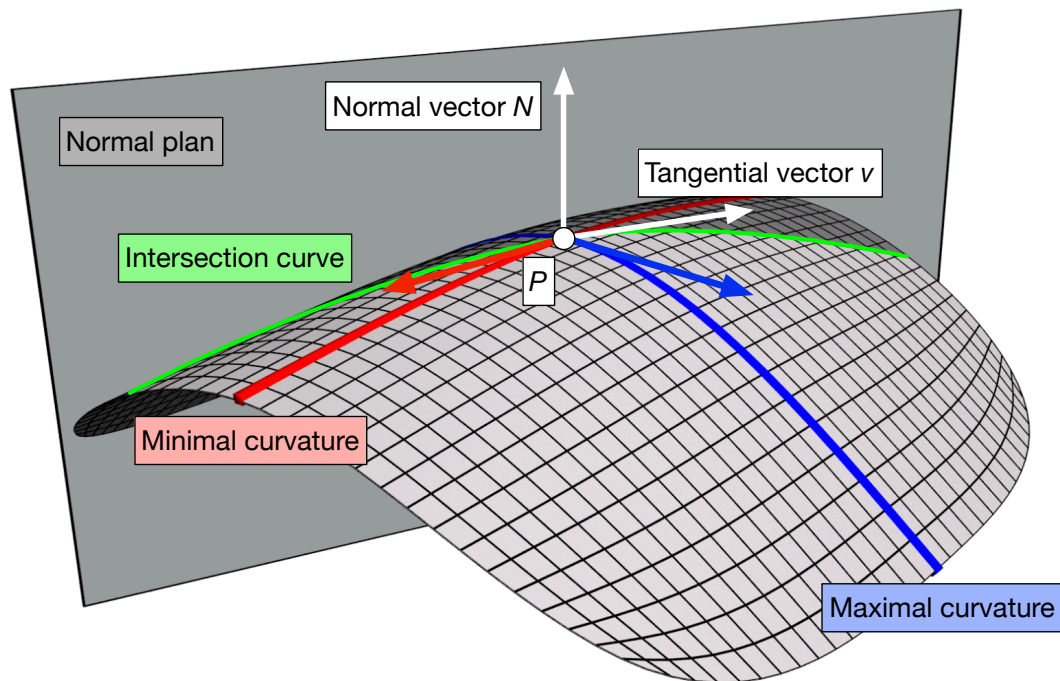
**Figure 6.1:** The curvature value at a point  $p$  is defined as the inverse of the radius of the osculating circle passing through this point.

With a radius of the osculating circle  $r$  (the *radius of curvature*), the curvature  $k$  is defined as:

$$k = 1/r$$

However, this definition is not directly applicable to surfaces. An additional definition is presented to allow for curvature estimation on surfaces.

The value of the curvature being calculated on a curve, a cutting plane is used to obtain an intersection curve to compute the curvature value on a surface. As illustrated in Figure 6.2, the cutting plane is the *normal plane* and is defined with the *normal vector*  $N$  to the surface and the *tangential vector*  $v$ , passing through the point  $P$ . This plane intersects the surface in a curve (the *intersection curve*). This curve gives the *normal curvature* using the osculating circle in the intersection plan. As it exists an infinity of *tangential vectors*, an infinity of *intersection curves* can be built at the same point. This *normal curvature* reaches two maximal and minimal values  $k_1$  and  $k_2$  (with  $k_1 \geq k_2$ ) called *principal curvatures* in the direction of the two respective vectors  $t_1$  and  $t_2$  called *principal directions*. Moreover, these two vectors are orthogonal.



**Figure 6.2:** The cutting plane is defined with the *normal vector*  $N$  to the surface and the *tangential vector*  $v$ , passing through the point  $P$ . This plane intersects the surface in a curve (the *intersection curve*).

Two other quantities are widely used to describe the local differential properties on surfaces—the mean curvature  $H$  and the Gaussian curvature  $K$ , defined as follows:

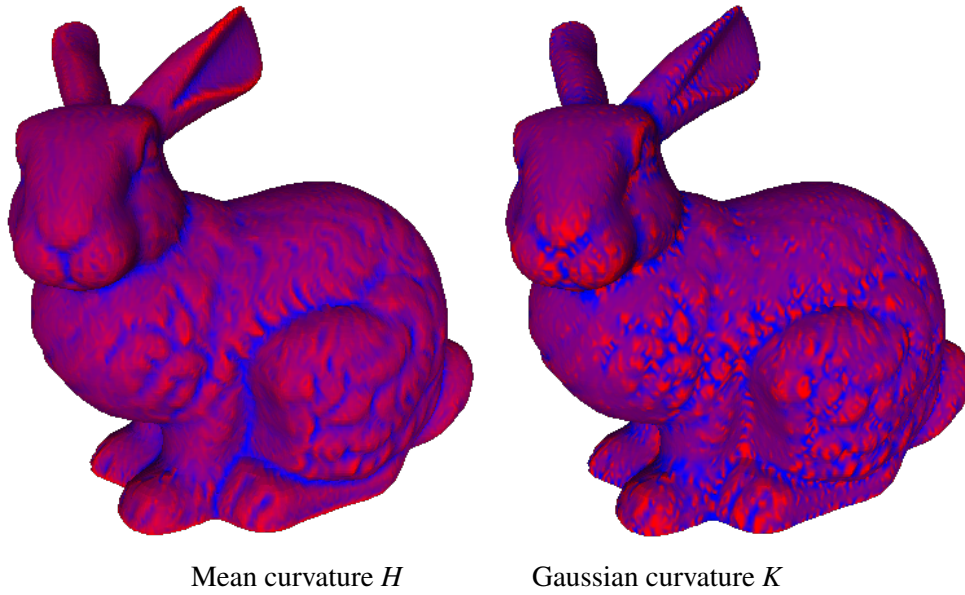
$$H = (k_1 + k_2)/2$$

$$K = k_1 \cdot k_2$$

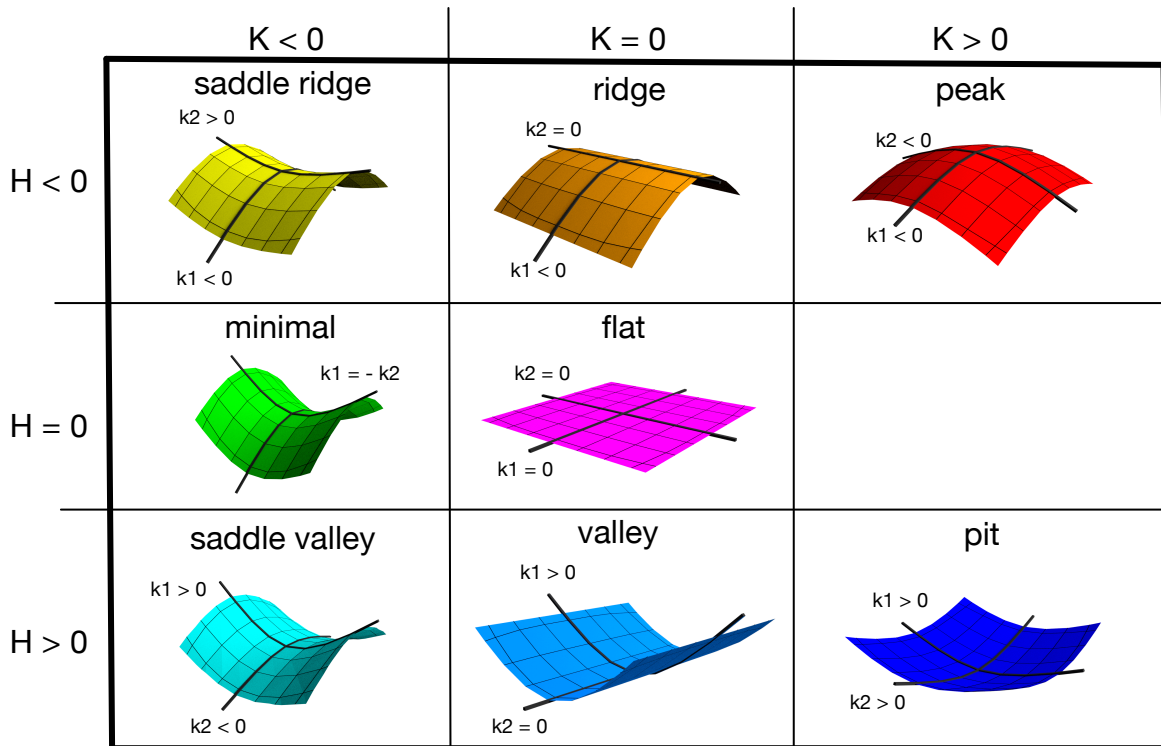
Figure 6.3 shows two bunny meshes colored by the values of  $H$  and  $K$ .

The sign of these values gives eight categories of local shapes (categorization described by [Besl and Jain 1988]): *peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* and *flat* (see Figure 6.4).





**Figure 6.3:** Mean and Gaussian curvatures on a bunny mesh



**Figure 6.4:** Shape categories using mean and Gaussian curvatures.

Figure 6.5 shows a category map on a bunny mesh. This map is independent of the scale of

the mesh; two identical meshes with a different scaling will give two different mean and Gaussian curvature maps but will have the same category map because the categorization is based on the sign of the curvature.

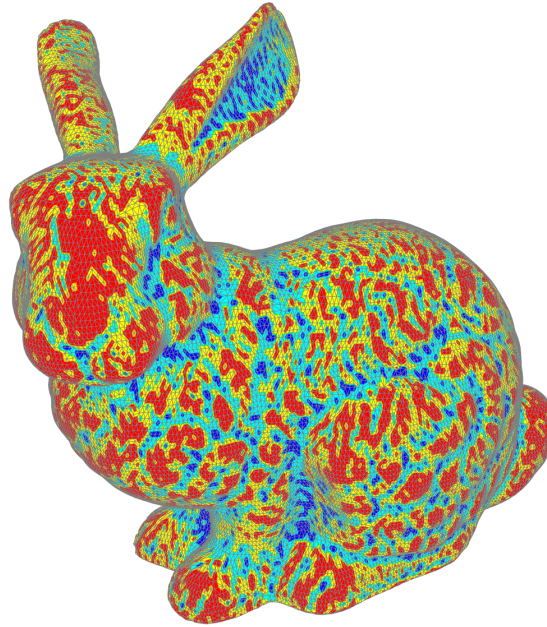


Figure 6.5: Category map on a bunny mesh.

### 6.3 Graph construction method

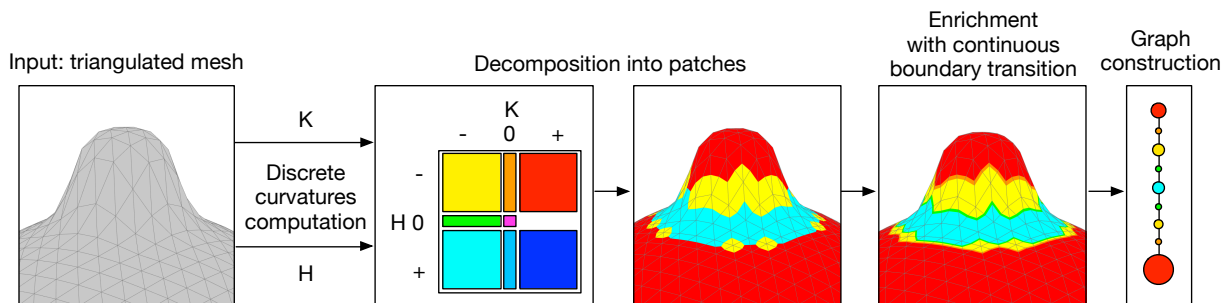
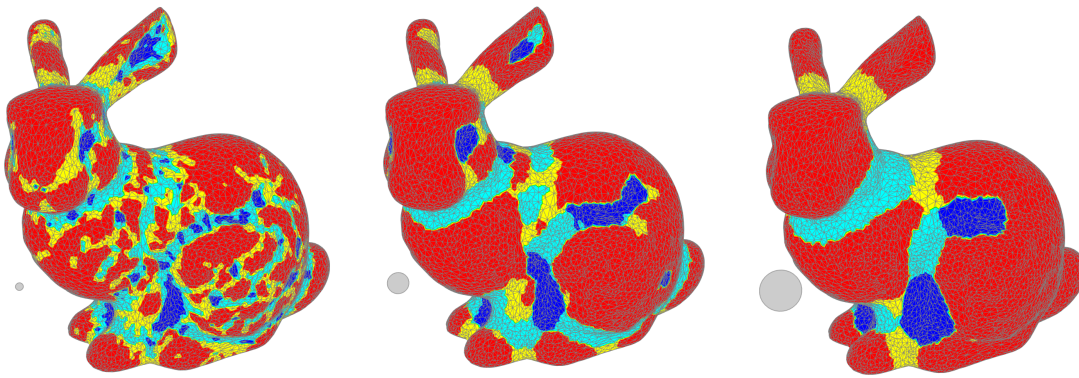


Figure 6.6: Overview of the graph construction methodology

In our work, we use the discrete curvature estimator of Meyer *et al.* [Meyer et al. 2003] to obtain the mean curvature  $H$  and the Gaussian curvature  $K$ . This robust curvature estimation is based on Voronoï cells and a finite-element/finite-volume method.

### 6.3.1 Decomposition into patches

Depending on the size of the features to be detected, before the decomposition procedure, an additional step can be used to extract the mean local curvature at different scales. A small scale extracts the texture and small features (Figure 6.5 and first column of Figure 6.7), and a large scale produces targeted macro-global features (Figure 6.7 last column). We use a mean filter (a smoothing mathematical morphology filter applied on the surface) to locally compute the local mean curvature (the mean value of *Gaussian* and *mean curvature*) of a vertex group, with an adaptive structuring element based on a maximal Euclidian distance threshold.



**Figure 6.7:** Three examples of the influence of the distance parameter on the *bunny* mesh, the radius distance is shown as a grey disk.

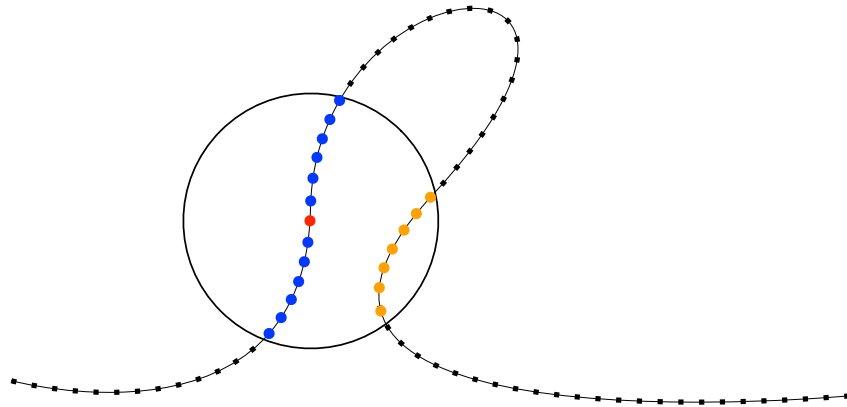
The filter is defined as follows, where  $v$  is the current vertex,  $t$  is the distance threshold,  $S$  the total amount of selected vertices, and  $SelectedVerts_i H$  and  $SelectedVerts_i K$  are the mean and the Gaussian curvatures, respectively, corresponding to the selected vertex  $SelectedVerts_i$ . The selection function  $SelectVerts(startingVertex, threshold)$  uses a propagation scheme to recursively select vertices, starting from a given vertex and bounded by an Euclidian distance threshold.

$$SelectedVerts = SelectVerts(startingVertex, threshold)$$

$$meanH = \frac{\sum_{i=1}^S SelectedVerts_i H}{S}$$

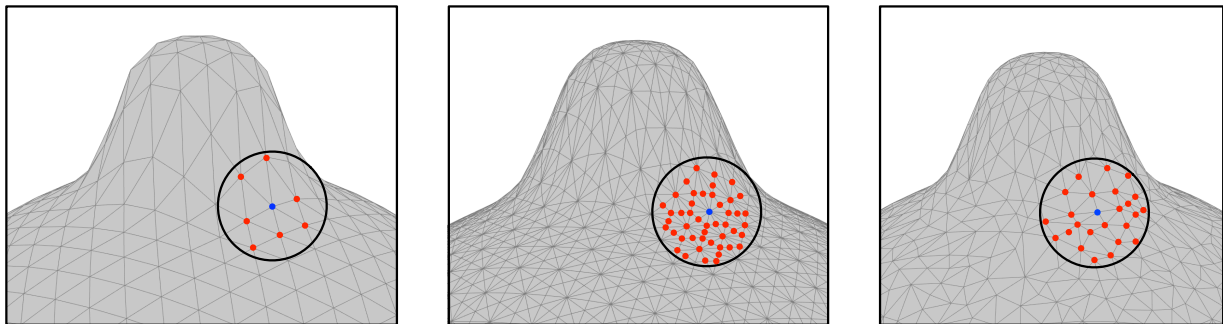
$$meanK = \frac{\sum_{i=1}^S SelectedVerts_i K}{S}$$

This method allows for the selection of vertices with a maximum distance threshold, constrained to only accessible vertices by a local propagation and avoiding the selection of unwanted vertices, as illustrated in Figure 6.8.



**Figure 6.8:** The selection starts from the red vertex, with a threshold represented by a circle; the selected vertices are in blue, and orange vertices are below the threshold value but are not selected using the propagation scheme.

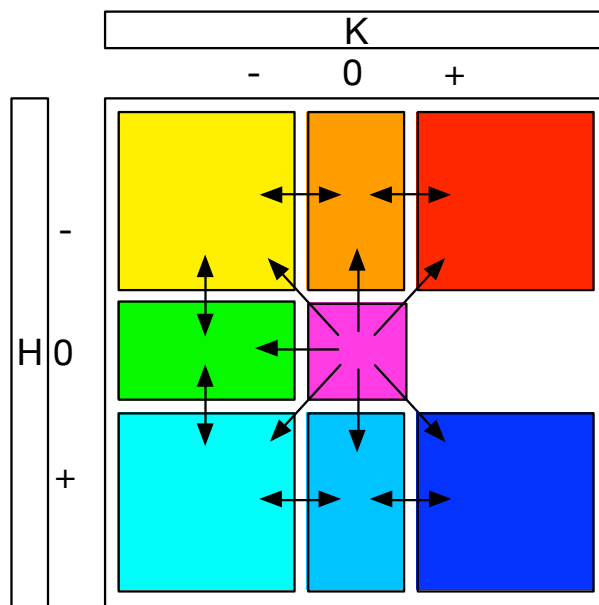
Figure 6.9 shows the vertices used with the same distance on three similar shapes represented by different meshes. Due to this distance, it is possible to compute a local mean estimation of the curvature, regardless of the sampling of the mesh, in a multi-scale way.



**Figure 6.9:** Vertices used for the local curvature estimation of a vertex group with the same distance for three different meshes of the same object.

### 6.3.2 Continuous boundary between areas

By its nature, discrete curvatures are dependent on the sampling of the mesh. Our goal is to build a graph using the previously presented curvature patches as robust as possible. The approach to achieve this goal is to build a graph that closely approximates the graph that would be built if a continuous object was used to obtain this graph. In a continuous context, all patches cannot be adjacent. Continuity rules are defined to ensure a continuous consistency in transitions between patches. Figure 6.10 shows the adjacency rules between them (corresponding categories are presented in Figure 6.4).

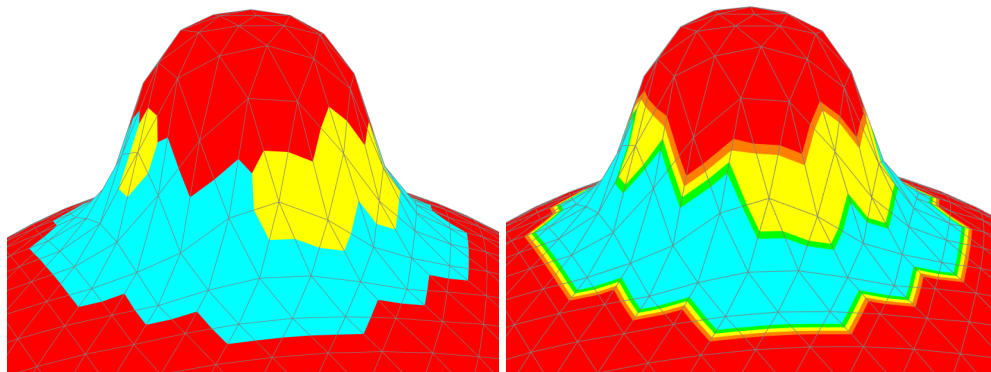


**Figure 6.10:** Adjacency rules between patches.

These rules involve an implicit interpolation of the curvatures between areas to establish the permitted adjacency for each category. These complementary areas on the mesh aim to achieve the same differential transitions between each category. For example, on a  $C^2$ -surface, it is not possible to have a peak area and a pit region without passing a flat or a ridge area. Thus, a graph can be built from a discrete object as close as possible to the original continuous objects that have been sampled to create the discrete object.

Using these rules, only one shortest path exists between two patches. Being a type of interpolation, nothing can ensure that the real continuous path between two nodes is built, but we can choose the most probable one that obeys the continuous adjacency rules. As a result, two non-planar adjacent patches that need an intermediate junction to be consistent will produce a path without a planar node (purple area).

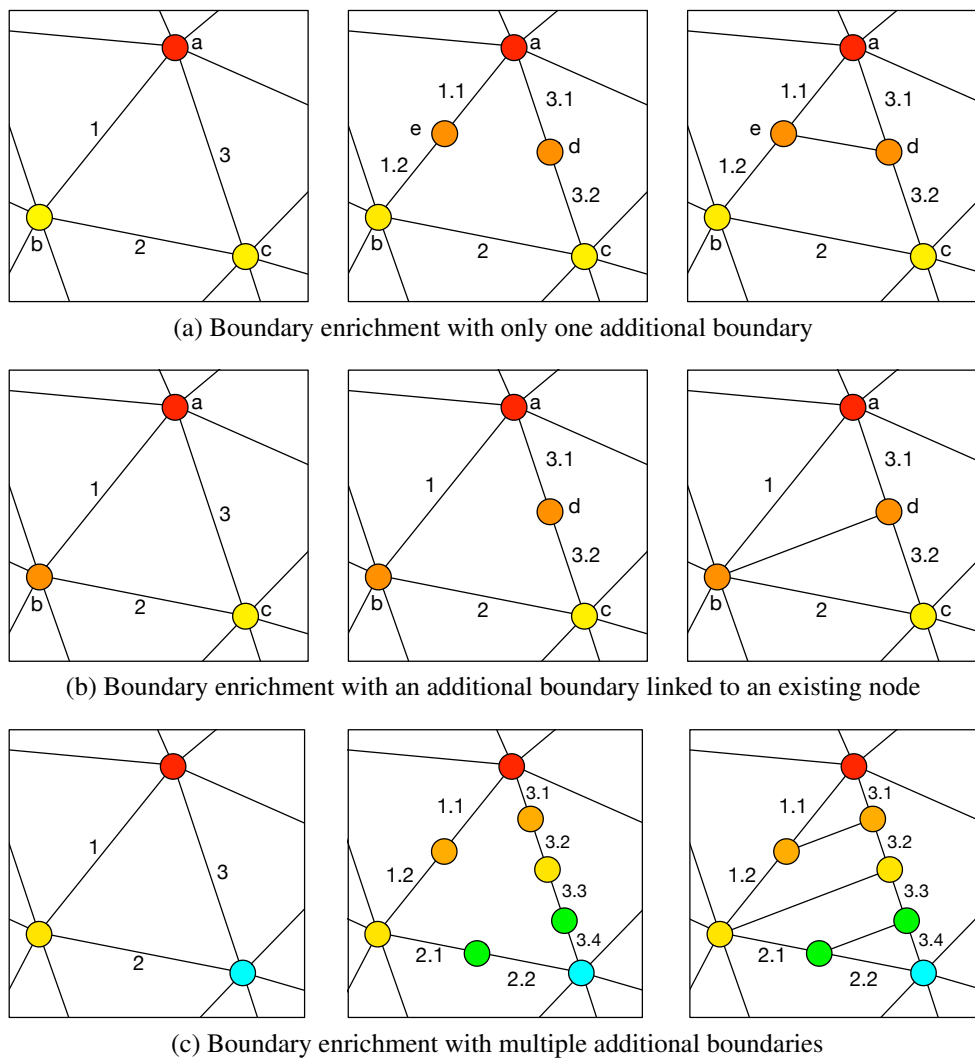
Figure 6.11 shows an enriched mesh with continuous transition boundaries. Each area between two red areas is found to form a ring. The yellow parts are now linked and considered to be a unique area.



**Figure 6.11:** Continuous boundary enrichment on a simple bumped mesh

To enrich the mesh with these sub-vertex boundaries, each face (triangle) of the mesh is checked to ensure that the adjacency rules are respected for all edges. If not, then new areas are added between them and properly linked to their neighbors. The procedure is described as follows (different configurations are presented in Figure 6.12).

The function *enrichMesh* called to enrich the mesh with this continuous boundary is described in Algorithm 1. This process is divided in two parts. The first part is the addition of missing nodes; this process is illustrated in Figure 6.12 in columns 1 and 2. Before adding a new node, its existence is checked. If the node does not exist, then a new one is built; otherwise, the existing one is used (if one of the edges has been processed before, some additional nodes may have been created before). The second part is the creation of links between the additional nodes. This procedure is illustrated in Figure 6.12 in columns 2 and 3. Different cases of junction addition are described in Figure 6.12 (a, b and c); all of them are handled with the *enrichMesh* function. The functions used for this procedure are detailed in Algorithms 1, 2 and 3.



**Figure 6.12:** Continuous boundary enrichment.



```

enrichMesh(mesh)
  foreach face F in mesh do
    addMissingNodes(F.n1, F.n2);
    addMissingNodes(F.n2, F.n3);
    addMissingNodes(F.n3, F.n1);
    dist12 = dist(F.n1, F.n2);
    dist23 = dist(F.n2, F.n3);
    dist31 = dist(F.n3, F.n1);
    distMax = max(dist12, dist23, dist31);
    if distMax = dist12 then
      | addJunctions(F.n1, F.n2, F.n3);
    else if distMax = dist23 then
      | addJunctions(F.n2, F.n3, F.n1);
    else if distMax = dist31 then
      | addJunctions(F.n3, F.n1, F.n2);
    end
  end
end

```

**Algorithm 1:** enrichMesh function.

The enrichMesh function (see Algorithm 1) iterates through all triangles, adds missing nodes on all edges, and finally links them with junctions.

```

addMissingNodes(n1,n2)
  | missingNodeArray = buildPath(n1,n2);
  if size(missingNodeArray) > 0 then
    | addNodes(n1, n2, missingNodeArray);
  end
end

```

**Algorithm 2:** addMissingNodes function

The *addMissingNodes* function (see Algorithm 2) adds missing nodes between two adjacent nodes  $n1$  and  $n2$  to respect the adjacency rules between them. The *buildPath( $n1, n2$ )* function uses the rules described in Figure 6.10 to find a valid path and build a list of additional nodes. The *addNodes( $n1, n2, missingNodeArray$ )* function adds all nodes in *missingNodeArray* between  $n1$  and  $n2$  and properly relink them; all additional nodes are indexed with a hash table using  $n1$  and  $n2$  as names to reuse them later when the neighbor face is computed.



```

addJunctions(startNode, endNode, middleNode)
  curStartToEnd = startNode;
  curStartToMid = startNode;
  while curStartToMid != middleNode do
    | curStartToMid = nextNode(startNode, curStartToMid, middleNode);
    | curStartToEnd = nextNode(startNode, curStartToEnd, endNode);
    | linkNodes(curStartToMid, curStartToEnd);
  end
  if dist(startNode, endNode) != dist(startNode, middleNode) AND
  dist(startNode, endNode) != dist(middleNode, endNode) then
    | linkNodes(middleNode, curStartToEnd);
  end
  curMidToEnd = middleNode;
  while curMidToEnd != endNode do
    | curMidToEnd = nextNode(middleNode, curMidToEnd, endNode);
    | curStartToEnd = nextNode(startNode, curStartToEnd, endNode);
    | linkNodes(curMidToEnd, curStartToEnd);
  end
end

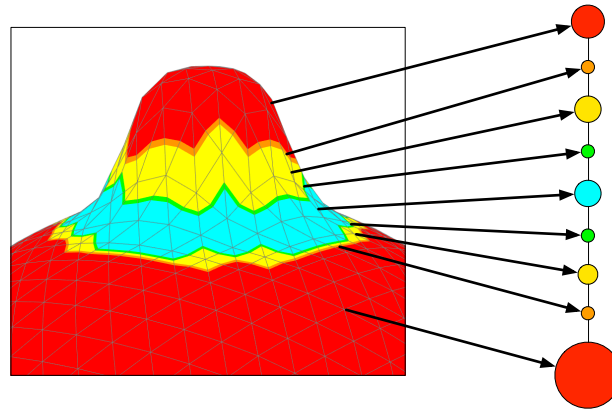
```

**Algorithm 3:** addJunctions function

The *addJunctions* function (see Algorithm 3) links each node of the face to their corresponding nodes. The *nextNode*(*start*, *current*, *end*) returns the next node that belongs to the edge *start* – *end* after the node *current* in the direction of the node *end*.

### 6.3.3 Construction of the graph

After the continuous boundary enrichment, a graph is built using the patch neighborhood, and then a propagation algorithm is used to select all contiguous vertices and build a list of patches by category. A node is defined for each patch; each node contains the category, the patch area, and a link to each neighboring patch (Figure 6.13).



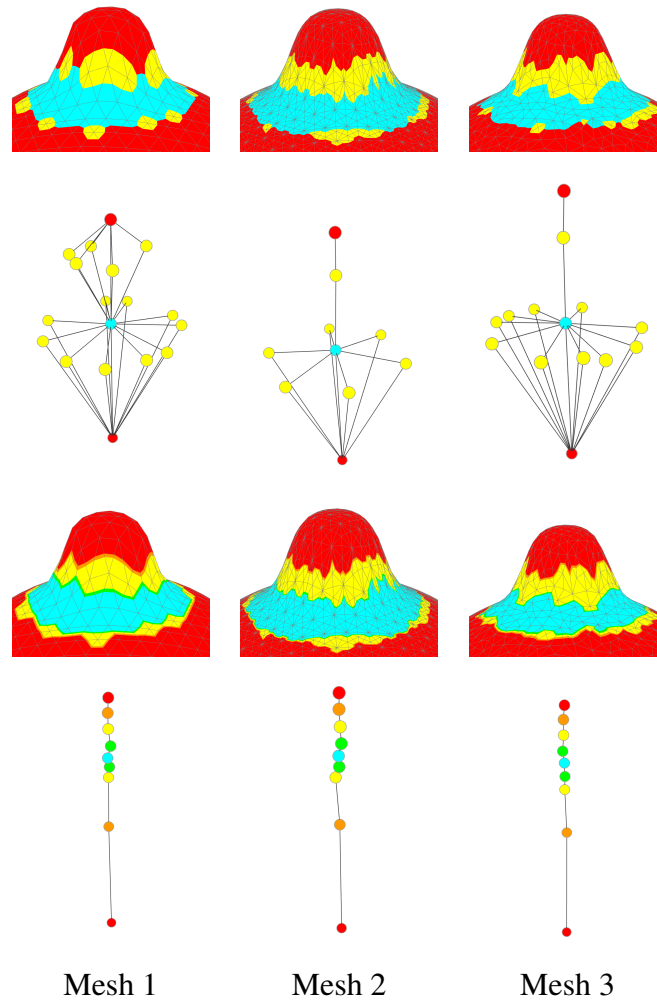
**Figure 6.13:** Graph construction procedure

To show how the boundary enrichment affects graph consistency, three meshes from the same shape with different sampling are presented (Figure 6.14). For each mesh (1, 2 and 3), graphs are built with (Figure 6.14 bottom) and without (Figure 6.14 top) boundary enrichment. Graphs built with boundary enrichment are significantly similar; thus, it is possible to use a simple graph comparison algorithm to compare or extract shapes.

From a triangulated mesh, our graph construction method splits the whole object into a set of patches, depending on the sign of the local curvature. These patches contain the local shape information of the object along with a structured neighborhood based on adjacency rules defined using continuous constraints: two patches that cannot be neighbors on a continuous object cannot be neighbors with these continuous constraints. Using this procedure, the graphs we obtain are more similar for equivalent shapes and are more easily comparable (see Figure 6.14).

## 6.4 Feature extraction method

As a shape can be described with a graph, a desired feature can also be described with a graph. Let us consider two graphs as inputs to the feature extraction method: the first from a decomposed mesh, and the second used as a pattern descriptor. Depending on the feature extraction application, different schemes are possible—three are proposed with different purposes: using a user (hand-made) defined pattern, using two meshes as input, or using one mesh as input to extract self-similarity features.

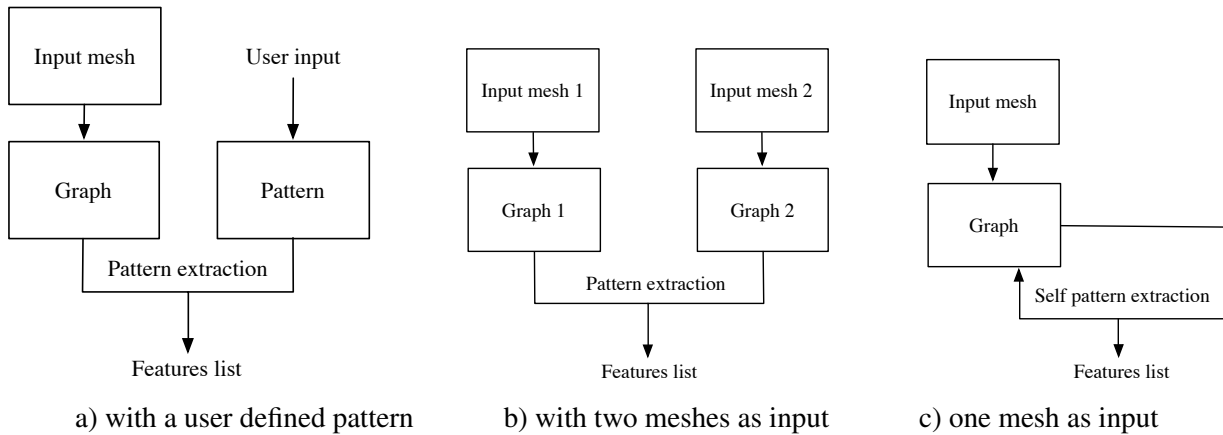


**Figure 6.14:** Three examples of graph construction with (bottom) and without (top) continuous boundary enhancement on a similar shape with different sampling.

### 6.4.1 Feature extraction schemes

Each proposed scheme is illustrated in Figure 6.15.

The purpose of the first scheme (a) is to extract a pattern defined by a user. This scheme allows for the description and extraction of a specific disposition of patches, and it can be semantically described. The second scheme aims to find common sub-graphs between two meshes. The third scheme takes only one mesh as input and searches similarities within this mesh to extract self-similarity features.



**Figure 6.15:** Pattern extraction schemes.

## 6.4.2 Pattern extraction method

The pattern extraction method used in the previous extraction schemes can be formulated as a partial sub-graph matching problem. This is a well-known problem for standard graphs; however, our graphs are categorized and sized for each node, and with specific adjacency rules, a dedicated matching method is proposed for these graphs. Thanks Due to the neighborhood consistency given by the adjacency rules, a weighted pairing node-to-node algorithm can be used to solve this problem with in our graphs.

The methodology consists of three steps:

- construction of the *similarity matrix*  $S$
- starting node pairs selection
- recursive node pairing from starting pairs

### 6.4.2.1 Construction of the similarity matrix

Consider two graphs  $G_1$  and  $G_2$  as inputs defined as  $G_1 = (V_1, E_1)$  and  $G_2 = (V_2, E_2)$ , where  $V$  is a set of nodes and  $E$  is a set of edges,  $|V_1|$  and  $|V_2|$  represent the number of nodes in each graph, and the *similarity matrix*  $S$  is a  $|V_1| \cdot |V_2|$  matrix, with  $S_{ij}$  the similarity between the nodes  $V_{1i}$  and  $V_{2j}$ ,  $S_{ij} \in \mathbb{R}$  and  $0 \leq S_{ij} \leq 1$ . Two strictly identical nodes give a similarity value of 1, and two strictly different nodes give a value of 0.

The similarity matrix is built using the method described by [Nikolić 2012], using the assumption “two nodes  $i \in VA$  and  $j \in VB$  are considered to be similar if neighbor nodes of  $i$  can be matched to similar neighbor nodes of  $j$ ”.

The matrix  $S$  is initialized first by a node-to-node similarity function using the category  $C_V$

and the area size  $A_V$ ; this value is set to zero if the nodes do not belong to the same category:

$$\text{simil}(V_i, V_j) \begin{cases} \min(A_{V_i}, A_{V_j}) / \max(A_{V_i}, A_{V_j}), & \text{if } C_{V_i} = C_{V_j} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Next, the similarity matrix  $S$  is iteratively built by neighbor matching; for each existing pair  $V_i$  and  $V_j$ , the similarity value  $S_{ij}^k$  for the  $k^{\text{th}}$  iteration is updated using the following function, where  $d(V)$  is the degree of the node  $V$ :

$$S_{ij}^{k+1} = \frac{1}{\max(d(V_i), d(V_j))} \sum_{x=1}^{\min(d(V_i), d(V_j))} f_{ij}^k(x)$$

With  $f_{ij}^k(x)$ , the enumeration function of the optimal matching  $ij$  gives the  $x^{\text{th}}$  highest similarity value between the neighborhood of  $V_i$  and  $V_j$  at the  $k^{\text{th}}$  iteration.

The original method defined by [Nikolić 2012] is designed to compute the similarity between two entire graphs and iterates until the similarity matrix is stable. Our goal is to locally compute the similarity between two nodes. The number of iterations required depends on the number of nodes to take in consideration in the similarity computation: starting from a node, for  $k$  iterations, nodes to a depth of  $k$  are taken into account.

#### 6.4.2.2 Starting nodes selection and node pairing

Using the computed similarity matrix, common sub-graphs can be extracted by recursive node pairing. Starting pairs are first found by testing the similarity value using a threshold  $t$ ; a  $ij$  pair is a starting pair if  $S_{ij} > t$ . Starting from each selected pair, each node of their neighborhoods is recursively paired by the maximal similarity value. This pairing function is recursively called on each new pair  $ij$  if  $S_{ij} > t$ . The maximal size of each  $ij$  pair of paired sub-graphs is saved in a new  $|V_1| * |V_2|$  matrix  $M$ .

Finally, the matrix  $M$  is used to extract maximal similar patterns, beginning with the maximal values of  $M_{ij}$ . Similar sub-graphs are reconstructed using the same previous recursive method. Corresponding pairs are indexed as a new extracted pattern. Multiple similarities can be found by a propagation of this index to all the same maximal values through the rows and columns of each indexed node.

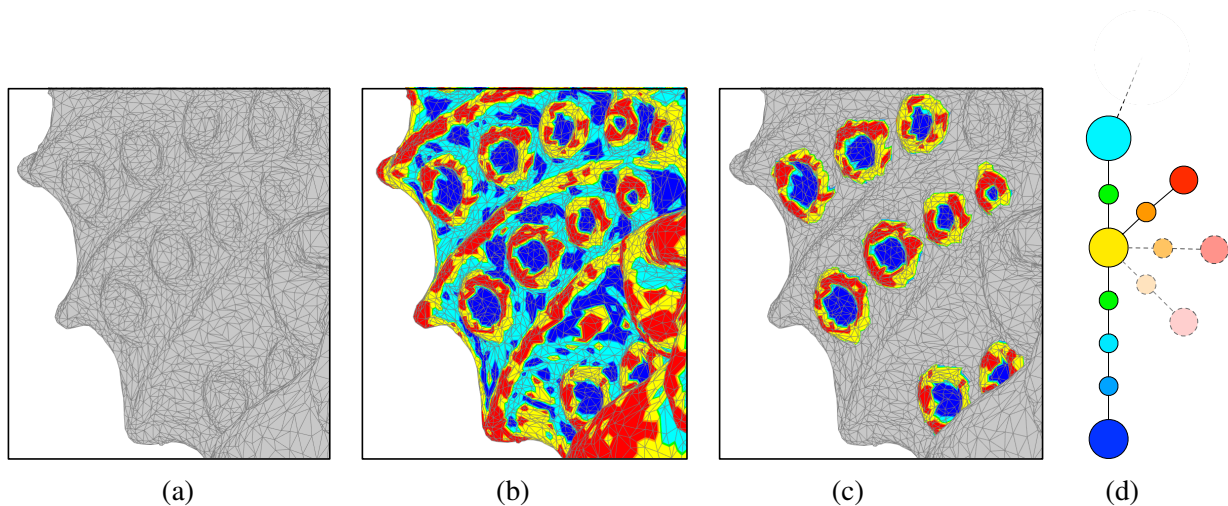
## 6.5 Examples and validation

In this section, examples are presented to illustrate our methods for each proposed scheme.

### 6.5.1 Semantic description of a feature

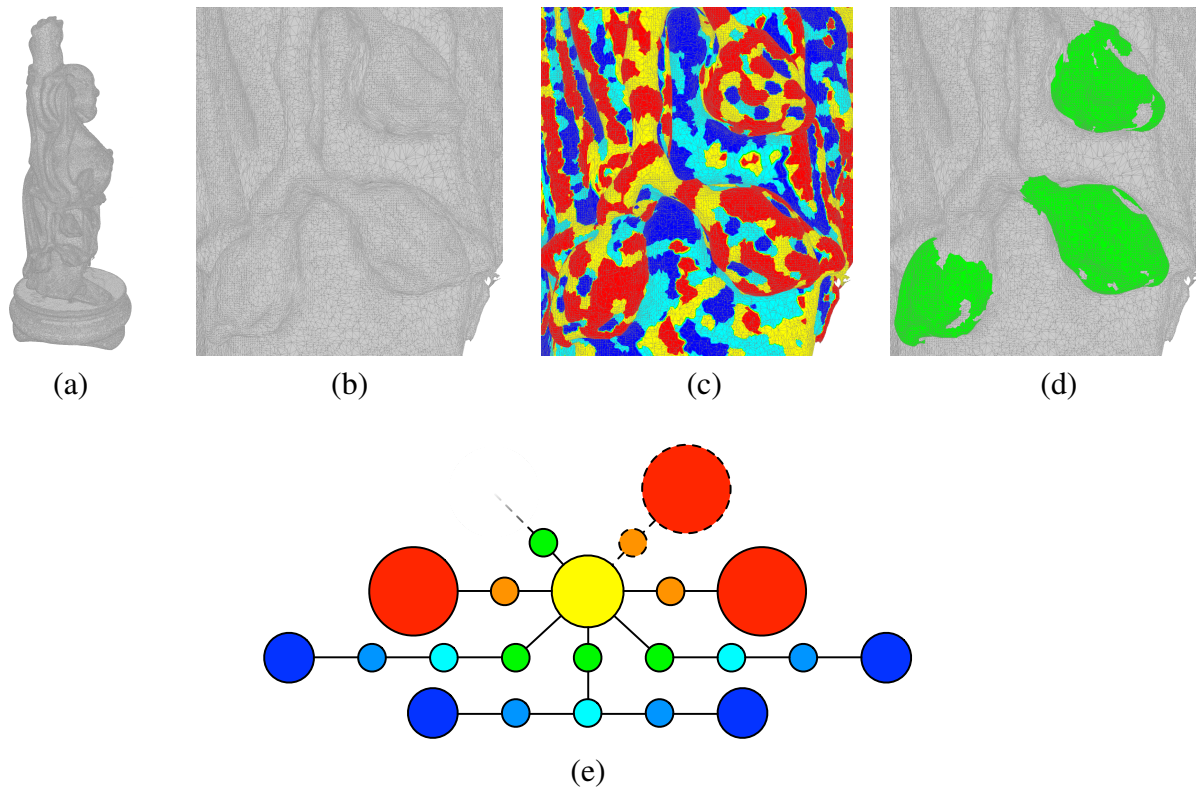
A desired feature can be explicitly described with a pattern via a semantic description. Figure 6.16 shows a feature extraction on the wing of the *gargoyle* mesh. The sub-graph used (Figure 6.16 d) describes “a pit bounded by a saddle ridge that can contain one or more peaks, the whole area being bounded by a saddle valley”.

To achieve this extraction the pattern includes some conditional nodes. During the extraction process, the conditional nodes are taken into account only if they can be paired and if the value of the degree is adapted to fit to the paired nodes.



**Figure 6.16:** Feature extraction by terminal sub-graph recognition: (a) source mesh, (b) mesh split into patches defining a graph, (c) extracted features and (d) terminal sub-graph used as a feature descriptor.

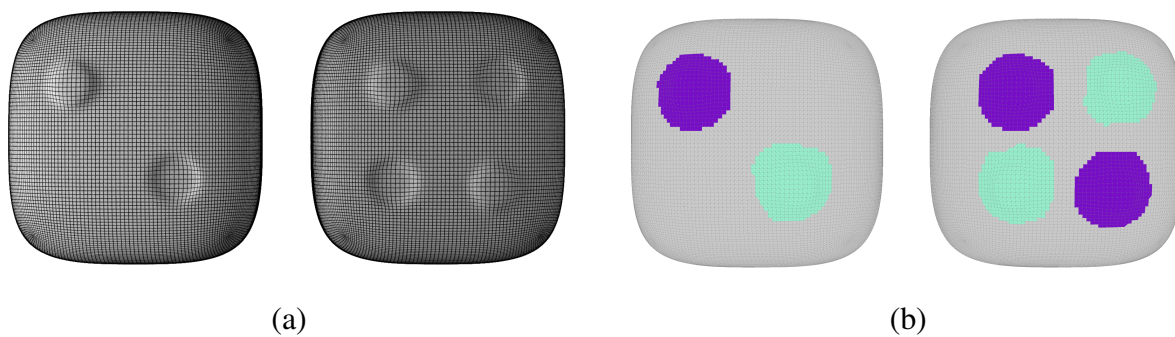
The next example (Figure 6.17) uses the same approach to extract lotus flowers from the Buddha mesh (this extraction is also performed in [Gal and Cohen-Or 2006]). In this example, an additional constraint is used during the graph building process: patches are limited to a maximal size; this allows for the extraction of a feature made of a part of a patch. In this example, the yellow part of the flowers and the branches naturally belong to the same node. By limiting the size of patches, we can extract only the flowers.



**Figure 6.17:** Extraction of flowers on the Buddha mesh (b), categories (c), extracted parts (d) and the extraction pattern used (e).

### 6.5.2 Similarity between two meshes

Figure 6.18 shows an example of similarity between two meshes. Two features are extracted, a peak and a pit.



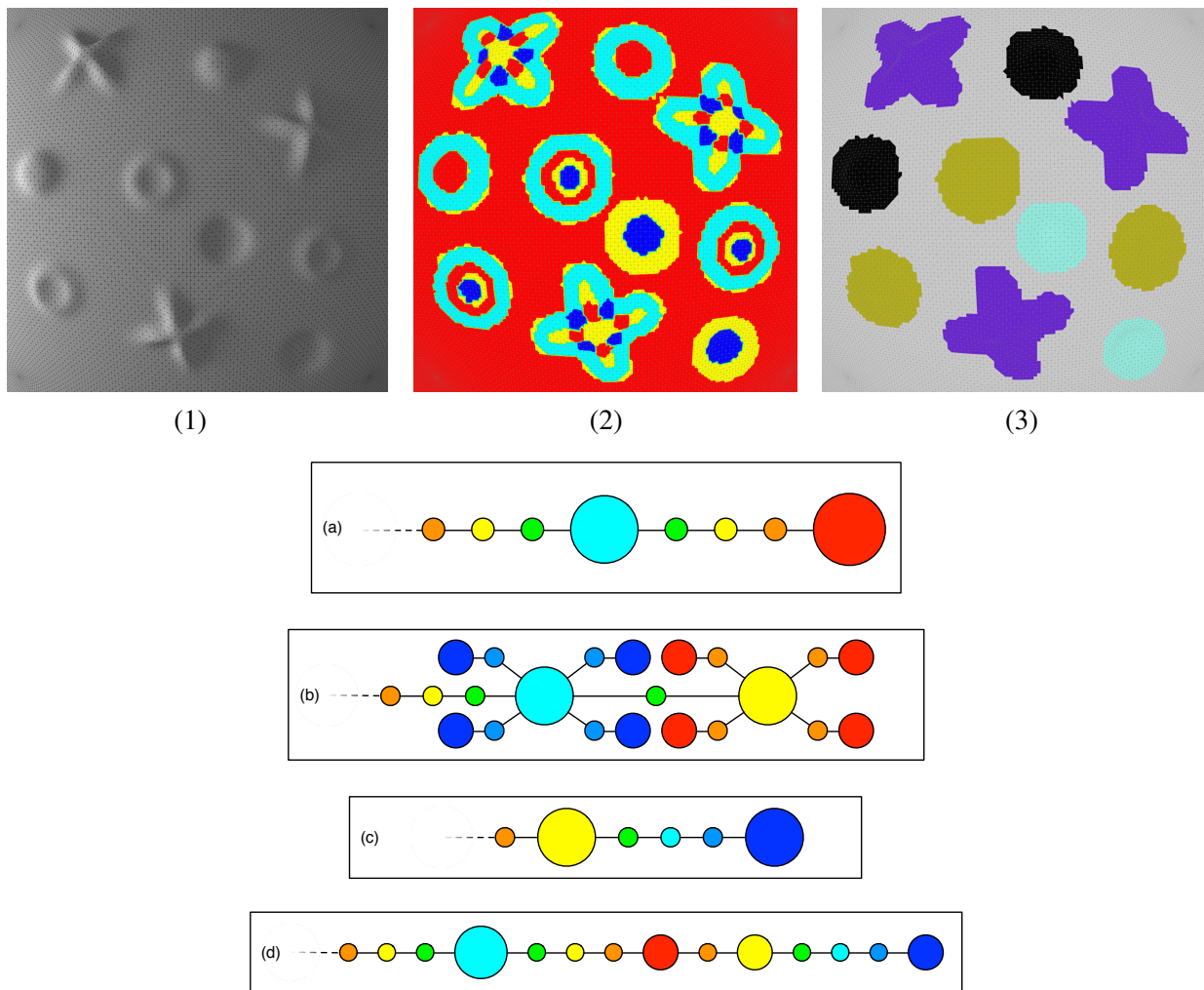
**Figure 6.18:** Feature recognition between two meshes; (a) source meshes (b) extracted features.



### 6.5.3 Self-similarity within a mesh

To achieve self-similarity within a mesh, the same mesh is input to the pattern extraction method. To avoid the trivial pairing of all nodes to itself, an additional constraint is used: a node cannot be paired to itself in the final pairing procedure.

Figure 6.19 shows an example of self-similarity extraction on a mesh. Four maximal sub-graphs are found multiple times; as an additional output, the method gives the found sub-graphs. Figure 6.19 shows the following: a peak (a), a cross (b), a pit (c), and a crater (d).



**Figure 6.19:** Self-similarity extraction on a mesh: (1), (2) and (3) show the input mesh, the computed list of patches and the output classification of sub-graphs. Extracted sub-graphs produced by the method are presented in (a), (b), (c) and (d).



## 6.6 Conclusion and future work

In this paper, we presented a new feature extraction approach based on a shape descriptor graph. In the proposed approach, the mesh decomposition is performed using curvature maps defined by the signs of mean and Gaussian curvatures. The patterns are characterized by sub-graphs. One of our contributions lies in the transition areas between the curvature patches. These areas are constructed by analogy to the continuous world, and they define new predefined nodes on the graph. The extraction of features is more robust because the transition possibilities are very restricted. A sub-graph extraction method was proposed to perform pattern extraction and similarity or self-similarity detection. Some examples were presented to illustrate the proposed schemes of extraction and to show different applications of our graphs.

The approach presented in this paper can be improved upon. The curvature estimator method could support multi-scaling to combine the curvature estimation and the multi-scale local curvature estimation. A new curvature estimator supporting multi-scale estimation could be chosen (e.g., [Yang et al. 2006]). The continuous boundary enrichment method adds nodes with an empty area size. Adding an interpolation step could help to determine a proper area size for additional boundaries.

Some specific configurations of shapes could lead to the addition of junctions that can be chosen in a better way to be closer to the corresponding continuous object. For example, additional junctions between a peak node and a saddle valley node could have more than one path. By default, the most probable path is chosen: ridge, saddle ridge or minimal. However, a shape with a potential plane between to nodes could exist. Some additional adjacency rules could be added to find these specific cases.

With shapes being represented by graphs, the extraction of features is based on the neighborhood between nodes. A localization of patches could be added to the properties of the nodes to find a specific spatial configuration of the nodes.

## 6.7 Acknowledgments

This work was supported by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC). The bunny and the Happy Buddha data sets were provided courtesy of the Stanford University Computer Graphics Laboratory. The gargoyle and the Chinese dragon data sets were provided courtesy of the AIM@SHAPE consortium.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

### Sommaire

7.1	Synthèse . . . . .	111
7.2	Perspectives des travaux de thèse . . . . .	113
7.2.1	Atlas cornéens . . . . .	113
7.2.2	Biométrie cornéenne . . . . .	113
7.2.3	Extraction de caractéristiques par graphe enrichi . . . . .	114
7.3	Perspectives générales . . . . .	114

## 7.1 Synthèse

Depuis des décennies, les atlas anatomiques représentent une source d'informations très importante dans les milieux médicaux et sont couramment utilisés pour transmettre les connaissances anatomiques humaines. Cependant, les atlas anatomiques classiques ne montrent l'anatomie que d'un seul individu et ne représentent pas nécessairement bien la population d'où il est issu. Une nouvelle forme d'atlas anatomiques est alors nécessaire : les atlas anatomiques numériques, contenant les caractéristiques moyennes et les variabilités de la morphologie d'une partie de l'anatomie pour une population. Grâce à l'utilisation devenue commune des systèmes d'acquisition numériques dans les milieux hospitaliers, des bases de données contenant de grandes quantités d'acquisitions se sont formées. C'est en s'appuyant sur ce type de bases de données qu'il est possible de construire un atlas anatomique numérique représentant toute une population. Dans ce document une partie spécifique de l'anatomie humaine est traitée : la cornée. La mise en correspondance de surfaces cornéennes étant une problématique non triviale, des méthodes spécifiques sont requises pour construire un atlas cornéen.

Une nouvelle méthode de recalage de surfaces cornéennes a été présentée, autour de laquelle plusieurs applications et méthodologies ont été proposées, notamment sur la construction, la comparaison et la discrimination de surfaces. Les méthodes présentées étant génériques, elles

peuvent être utilisées avec n'importe quel topographe cornéen produisant des cartes d'élévations, et pourraient ainsi combiner des topographies issues de différentes machines.

Dans notre première étude portant sur la mise en correspondance de cornées et la construction de cornées moyennes, l'utilisation d'une surface supplémentaire de contrôle permet de mettre en correspondance tout un volume cornéen, et donc de construire des atlas volumiques permettant de mesurer des épaisseurs moyennes réelles, ce qui est une information importante pour les cliniciens. De plus, une nouvelle méthode de recalage a été proposée, plus adaptée que la méthode classique par BFS. Une méthode itérative de mise en correspondance d'un grand nombre de surfaces a été mise en place, et des exemples cliniques ont été proposés afin de l'illustrer. Finalement, la méthode de mise en correspondance a été appliquée afin de pouvoir comparer deux cornées en calculant leurs différences après recalage.

Dans la seconde étude portant sur la comparaison de surfaces cornéennes, appliquée à la biométrie cornéenne, deux méthodes pouvant être utilisées en cascade ont été présentées : l'une s'appuyant sur une décomposition en harmoniques sphériques, l'autre utilisant la méthode de volume résiduel décrit dans le premier article. Nous avons pu améliorer le taux de reconnaissance en ajoutant la surface postérieure dans la méthode de comparaison, ce qui nous permet de confirmer que l'utilisation simultanée des deux surfaces cornéennes est pertinente dans le cadre d'une application biométrique. L'exécution en cascade des deux méthodes permet d'utiliser la rapidité de la méthode des harmoniques sphériques pour supprimer les cas de reconnaissances triviaux, puis ensuite d'utiliser la méthode de volume résiduel afin d'affiner le résultat et d'obtenir le meilleur niveau de précision des deux méthodes en un temps minime.

Une troisième étude, plus fondamentale, portant sur la description et l'analyse de formes a fait l'objet de la dernière partie de ce manuscrit. En utilisant un graphe pour représenter un objet divisé en *patches* selon les valeurs de la courbure locale, il est possible de reconnaître et d'extraire des formes en définissant des *patterns* qui sont encodés par des sous-graphes spécifiques. Ces graphes ont la particularité d'être enrichis par des jonctions entre certains nœuds de façon à conserver une logique continue dans l'agencement des *patches* pour une meilleure robustesse. L'objectif de cette étape est de construire un graphe à partir d'un objet discret qui serait aussi proche que possible d'un graphe qui aurait été construit à partir d'un objet continu. De cette façon, le graphe est plus robuste aux changements d'échantillonnage et permet une meilleure analyse de la forme. Dans le cadre de l'extraction de forme, un autre avantage de l'utilisation de ces graphes est de pouvoir décrire de façon sémantique la forme recherchée en construisant un *pattern* sous forme d'un sous-graphe. Des exemples de recherche de caractéristiques décrits par des sous-graphes ont été présentés, ainsi que des exemples d'inter-similarité entre maillages et d'auto-similarité au sein d'un même maillage. De nombreuses applications peuvent en découler, telle que la classification de forme, ou encore la reconnaissance de formes.

## 7.2 Perspectives des travaux de thèse

### 7.2.1 Atlas cornéens

Une des extensions de cette étude peut être la représentation d'une population par un atlas qui ne serait plus une cornée moyenne unique, mais un groupe de moyennes, organisées hiérarchiquement en arbre. L'idée serait de diviser et de sous-diviser récursivement la population selon des critères cliniquement pertinents, dans l'objectif de pouvoir positionner un patient à diagnostiquer dans l'atlas hiérarchique afin de le comparer au sous-groupe de la population lui correspondant. Le même concept pourrait ainsi être appliqué pour la construction d'atlas pathologiques afin de caractériser des maladies pour mieux les reconnaître.

Cet atlas hiérarchique pourrait aussi permettre de sous-catégoriser les cornées par tailles de BFS, afin de conserver l'information liée à l'échelle de la cornée.

Une autre amélioration envisageable lors du traitement des données serait d'interpréter les surfaces de façon non uniforme en s'appuyant sur le fait que la précision de la machine n'est pas la même au centre que sur la périphérie des surfaces. Cette amélioration demanderait cependant une étude approfondie sur le fonctionnement du système d'acquisition.

Finalement, une étude supplémentaire liée aux autres systèmes d'acquisition utilisés actuellement, tel que le *Pentacam* ou encore l'OCT (Optical Coherence Tomography), pourrait être menée dans l'objectif de définir le paramétrage spécifique pour cette machine (telles que les pondérations nécessaires des deux surfaces cornéennes) afin de pouvoir construire des atlas multi-modaux (avec l'avantage d'être issus de bases de données plus importantes encore).

### 7.2.2 Biométrie cornéenne

Il est possible d'améliorer la méthode utilisant les harmoniques sphériques en recherchant quels sont les coefficients les plus discriminants et en ajoutant une pondération selon l'importance de ces coefficients (cela permettrait aussi de supprimer les coefficients les moins discriminants afin de réduire la taille de l'information à stocker), ou encore d'utiliser d'autres méthodes de sélection ou de pondération des coefficients telles que l'*Analyse Discriminante Linéaire* ([Fisher 1936]).

La méthode de volume résiduel pourrait aussi être améliorée en utilisant aussi l'information volumique (pachymétrie) lors de la mise en correspondance des surfaces cornéennes.

### 7.2.3 Extraction de caractéristiques par graphe enrichi

Plusieurs améliorations sont envisageables. Une première serait de choisir un estimateur de courbure capable d'estimer la courbure locale à plusieurs échelles. Cela permettrait de supprimer l'étape d'estimation de courbure moyenne destinée à avoir une information à une échelle donnée, et améliorerait la stabilité de l'estimation. Plusieurs méthodes pourraient être envisagées, telles que [Yang et al. 2006]. Il serait aussi intéressant d'adapter l'échelle locale choisie selon le niveau de détail du maillage lors de l'estimation.

Certaines configurations spécifiques de maillages peuvent mener à des ajouts de jonctions qui pourraient mal représenter l'objet continu correspondant. Par exemple le passage d'un *patch ridge* à un *patch valley* peut avoir plusieurs solutions théoriques ; par défaut, la plus probable est choisie. Sur un objet "organique" (par exemple issu d'un objet numérisé à l'aide d'un scanner) la solution choisie est de passer par un *saddle ridge*, un *minimal* et un *saddle valley*. Cependant, il serait possible d'imaginer des objets dont la jonction intermédiaire réelle est un plan. Nous envisageons d'ajouter des règles d'adjacence supplémentaires afin de mieux repérer ce type de configurations. De plus la méthode d'ajout de jonctions ayant pour unique objectif de rendre cohérente l'adjacence des nœuds du graphe (les jonctions ajoutées ont une taille nulle) il serait intéressant d'estimer cette valeur afin de l'ajouter au graphe.

Les formes étant caractérisées par des graphes, les extractions et reconnaissances de caractéristiques s'appuient sur des comparaisons de voisinage entre les nœuds. Il serait intéressant d'introduire pour chaque nœud en plus d'un voisinage une propriété de localisation, afin d'utiliser cette information pour repérer des agencements spatiaux spécifiques de nœuds.

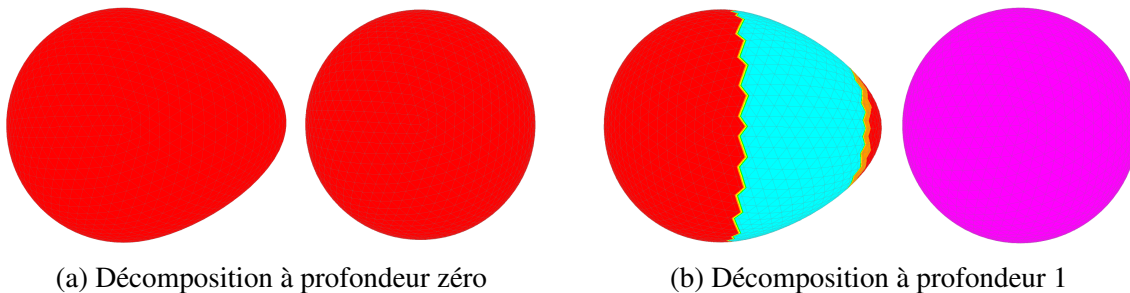
Une autre façon de produire un *pattern* à rechercher pourrait être intéressante à explorer : le *picking* de sous-graphes. L'idée serait de pouvoir directement sélectionner dans une interface une partie d'un maillage, d'en extraire un graphe, et de l'utiliser comme *pattern* de recherche afin de mettre en évidence des zones similaires dans le même graphe.

## 7.3 Perspectives générales

Une des premières perspectives envisageables suite à ces différents travaux serait de caractériser des cornées en utilisant la méthode de décomposition par graphe de la troisième partie de ce manuscrit. L'objectif serait de pouvoir décrire une forme cornéenne (d'un sujet unique ou d'un atlas) à l'aide d'un graphe. Il serait alors possible d'utiliser ces graphes à des fins de classifications, de reconnaissance de sujet ou de pathologie. La cornée étant une surface

bombée proche d'une portion de sphère, effectuer une simple décomposition produirait un graphe contenant un seul nœud "*peak*". Une approche serait d'utiliser la BFS comme référentiel de courbure locale nulle en retranchant la valeur du rayon de la BFS à chaque rayon de courbure locale de la cornée ; cela donnerait alors un nouveau type de graphes construits relativement à la BFS (au même titre que les cartes de couleurs communément utilisées par les cliniciens).

La cornée est un exemple montrant que toutes les formes ne sont pas représentables par ces graphes. Une généralisation de l'idée proposée pour la cornée pourrait alors être formulée en utilisant un concept de graphes à profondeurs multiples. Chaque *patch* serait alors décomposé à son tour en un graphe relatif à la courbure moyenne du *patch* parent. Et ce, de façon récursive jusqu'à ce que les graphes les plus profonds ne soient plus décomposables (i.e. de couleur magenta avec notre code-couleur). Cette idée est illustrée Figure 7.1. On peut observer que la sphère est sous-décomposée en un seul patch magenta, ce qui veut dire qu'elle a une courbure uniforme. Cette propriété pourrait être utilisée pour rechercher ce type de *patches*, afin de rechercher des formes spécifiques telles que des sphères, des cylindres, ou toutes autres formes ayant une courbure uniforme sur sa surface.



**Figure 7.1:** Deux objets différents produisant le même graphe, un sphérique et un asphérique, décomposés normalement (a) puis sous-décomposés une fois.

Une évolution de ces graphes pourrait consister à une forme d'indexation de sous-graphes "génériques" afin de former une base de données de formes, et de pouvoir classifier et reconnaître des formes parmi un grand nombre de modèles 3D.

Un autre sujet que nous prévoyons d'explorer à partir de ces graphes est l'étude de la topologie d'un objet en utilisant son graphe. L'idée serait de déterminer s'il existe un lien entre le graphe d'un objet et la topologie de cet objet.





---

# PUBLICATIONS DE L'AUTEUR

## Reuves internationales

1. Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Constructing average models of quasi-spherical objects: Application to corneal topographies*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering: Imaging & Visualization, Taylor & Francis, 2015 (à paraître), (DOI:10.1080/21681163.2015.1077164).

## Conférences internationales avec comité de lecture et actes

2. Nassima Kihal, Arnaud Polette, Salim Chitroub, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Corneal Topography: An Emerging Biometric System for Person Authentication*. 14th International Conference of the Biometrics Special Interest Group, BIOSIG 2015, Darmstadt, Germany, septembre 2015.

3. Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Feature extraction using a shape descriptor graph based on discrete curvature patches*. Computer Graphics International, CGI 2015, Strasbourg, France, juin 2015.

4. Nassima Kihal, Arnaud Polette, Salim Chitroub, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *A Biometric System Based on Human Cornea Authentication*. 20th Annual Meeting of FRQS Vision Health Research Network, FRQS Vision Health Research Network, novembre 2014.

5. Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparison of quasi-spherical surfaces using spherical harmonics: Application to corneal biometry*. 4th International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications, IEEE IPTA 2014, pp. 308–312, Paris, France, octobre 2014.

6. Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *A New Registration Algorithm for Estimating and Discriminating Average Shapes of Sets of Corneal Topographies*. 36th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC 2014, pp. 3341–3344, Chicago, Etats-Unis, août 2014.

7. Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Construction of a mean surface for the variability study of the cornea*. 11th Canadian Conference on Computer and Robot Vision, IEEE CRV 2014, pp. 328-335, Montréal, Canada, mai 2014.

### **Conférences nationales avec actes**

8. Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Un descripteur de forme par graphes utilisant une décomposition de maillages par cartes de courbures*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2015, Poitiers, France, avril 2015.

9. Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparaison de surfaces quasi-sphériques – Application à la biométrie cornéenne*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2014, Lyon, France, mars 2014.

10. Arnaud Polette, Edouard Auvinet, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Construction d'une surface moyenne pour l'étude de la variabilité cornéenne*. 26èmes journées de l'Association Française d'Informatique Graphique et du chapitre français d'Eurographics, AFIG 2013, Limoges, France, novembre 2013.

11. Marc Daniel, Cédric Guyot, Sébastien Mavromatis, Arnaud Polette. *Réalité virtuelle et manipulation de surface B-splines*. Journées du Groupe de Travail en Modélisation Géométrique, GTMG 2012, pp. 121–126 Strasbourg, France, mars 2012.

### **Articles soumis à des revues internationales**

12. Arnaud Polette, Jean-Luc Mari, Isabelle Brunette et Jean Meunier. *Comparison of quasi-spherical surfaces: Application to corneal biometry*.

13. Arnaud Polette, Jean Meunier et Jean-Luc Mari. *Feature extraction and characterization on meshes using a shape descriptor graph based on a patches decomposition from discrete curvature*.

---

## BIBLIOGRAPHIE

- AUVINET, E., MEUNIER, J., ONG, J., DURR, G., GILCA, M., AND BRUNETTE, I. 2012. Methodology for the construction and comparison of 3D models of the human cornea. *Engineering in Medicine and Biology Society (EMBC), 2012 Annual International Conference of the IEEE*, 5302–5305.
- BENNETT, A. G., AND RABBETTS, R. B. 1991. What radius does the conventional keratometer measure? *Ophthalmic and Physiological Optics* 11, 3, 239–247.
- BERNER, A., BOKELOH, M., WAND, M., SCHILLING, A., AND SEIDEL, H.-P. 2008. A graph-based approach to symmetry detection. In *Proceedings of the Fifth Eurographics / IEEE VGTC Conference on Point-Based Graphics*, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, SPBG'08, 1–8.
- BESL, P., AND JAIN, R. 1988. Segmentation through variable-order surface fitting. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on* 10, 2, 167–192.
- BRUNETTE, I., SHERKNIES, D., TERRY, M. A., CHAGNON, M., BOURGES, J.-L., AND MEUNIER, J. 2011. 3-D characterization of the corneal shape in Fuchs dystrophy and pseudophakic keratopathy. *Investigative Ophthalmology & Visual Science* 52, 1, 206.
- BUEHREN, T., COLLINS, M. J., ISKANDER, D. R., DAVIS, B., AND LINGELBACH, B. 2001. The stability of corneal topography in the post-blink interval. *Cornea* 20, 8.
- BUEHREN, T., LEE, B. J., COLLINS, M. J., AND ISKANDER, D. R. 2002. Ocular microfluctuations and videokeratoscopy. *Cornea* 21, 4.
- FAM, H.-B., LIM, K.-L., AND REINSTEIN, D. Z. 2005. Orbscan global pachymetry: Analysis of repeated measures. *Optometry & Vision Science* 82, 12.
- FISHER, R. A. 1936. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics* 7, 7, 179–188.
- GAL, R., AND COHEN-OR, D. 2006. Salient geometric features for partial shape matching and similarity. *ACM Trans. Graph.* 25, 1, 130–150.
- GATINEL, D., MALET, J., HOANG-XUAN, T., AND AZAR, D. 2011. Corneal elevation topography: best fit sphere, elevation distance, asphericity, toricity, and clinical implications. *Cornea* 30, 5 (5), 508–515.
- GATINEL, D., 2015. Damien Gatinel website [www.gatinel.com](http://www.gatinel.com).

- GOUGH, B. (2009). *GNU Scientific Library Reference Manual - Third Edition*, 3rd ed. Network Theory Ltd.
- GRZYBOWSKI, D. M., ROBERTS, C. J., MAHMOUD, A. M., AND CHANG, JR, J. S. 2005. Model for nonectatic increase in posterior corneal elevation after ablative procedures. *J Cataract Refract Surg* 31, 1, 72–81.
- GUILBERT, E., SAAD, A., GRISE-DULAC, A., AND GATINEL, D. 2012. Corneal thickness, curvature, and elevation readings in normal corneas: Combined placido–Scheimpflug system versus combined placido–scanning–slit system. *Journal of Cataract and Refractive Surgery* 38, 7, 1198–1206.
- GUIMOND, A., MEUNIER, J., AND THIRION, J.-P. 2000. Average brain models: A convergence study. *Computer Vision and Image Understanding* 77, 2 (2), 192–210.
- GUMHOLD, S., WANG, X., AND MACLEOD, R. 2001. Feature extraction from point clouds. In *Proceedings of the 10th International Meshing Roundtable*, 293–305.
- HAYASHI, K., NAKAO, F., AND HAYASHI, F. 1994. Corneal topographic analysis of superolateral incision cataract surgery. *Journal of Cataract & Refractive Surgery* 20, 4 (7), 392–399.
- HAYASHI, K., HAYASHI, H., AND HAYASHI, F. 1995. Topographic analysis of the changes in corneal shape due to aging. *Cornea* 14, 5.
- HILDEBRANDT, K., POLTHIER, K., AND WARDETZKY, M. 2005. Smooth feature lines on surface meshes. In *Proceedings of the Third Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, SGP’05, 085–090.
- HO, H., AND GIBBINS, D. 2009. Curvature-based approach for multi-scale feature extraction from 3D meshes and unstructured point clouds. *Computer Vision, IET* 3, 4, 201–212.
- HUANG, Q., GUIBAS, L. J., AND MITRA, N. J. 2014. Near-regular structure discovery using linear programming. *ACM Trans. Graph.* 33, 3, 23:1–23:17.
- ISKANDER, D. R., COLLINS, M. J., AND DAVIS, B. 2001. Optimal modeling of corneal surfaces with Zernike polynomials. *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* 48, 1, 87–95.
- ISKANDER, D. R. 2009. Modeling videokeratoscopic height data with spherical harmonics. *Optom Vis Sci* 86, 5, 542–547.
- KUDELSKI, D., VISEUR, S., AND MARI, J.-L. 2013. Skeleton extraction of vertex sets lying on arbitrary triangulated 3D meshes. In *Proceedings of the 17th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, DGCI’13, 203–214.
- LALIBERTÉ, J.-F., MEUNIER, J., CHAGNON, M., KIEFFER, J.-C., AND BRUNETTE, I. 2007. Construction of a 3-D atlas of corneal shape. *Invest Ophthalmol Vis Sci* 48, 3, 1072–8.
- LAVOUÉ, G., DUPONT, F., AND BASKURT, A. 2005. A new CAD mesh segmentation method, based on curvature tensor analysis. *Computer-Aided Design* 37, 10, 975 – 987.

- LEE, C. H., VARSHNEY, A., AND JACOBS, D. W. 2005. Mesh saliency. *ACM Trans. Graph.* 24, 3, 659–666.
- LEMKE, H., INAMURA, K., DOI, K., VANNIER, M., FARMAN, A., REIBER, J. C., SHERKNIES, D., AND MEUNIER, J. 2002. *A numerical 3D coronary tree model*. Springer Berlin Heidelberg, 814–818.
- LEWIS, N. D. 2011. *Corneal topography measurements for biometric applications*. PhD thesis, The University of Arizona.
- LLORENTE, L., BARBERO, S., CANO, D., DORRONSORO, C., AND MARCOS, S. 2004. Myopic versus hyperopic eyes: Axial length, corneal shape and optical aberrations. *J Vis* 4, 4, 288–98.
- MARCIALIS, G. L., ROLI, F., AND DIDACI, L. 2009. Personal identity verification by serial fusion of fingerprint and face matchers. *Pattern Recognition* 42, 11, 2807–2817.
- MEYER, M., DESBRUN, M., SCHRÖDER, P., AND BARR, A. 2003. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *Visualization and Mathematics III*, H.-C. Hege and K. Polthier, Eds., Mathematics and Visualization. Springer Berlin Heidelberg, 35–57.
- NELDER, J., AND MEAD, R. 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 4 (1), 308–313.
- NIKOLIĆ, M. 2012. Measuring similarity of graph nodes by neighbor matching. *Intell. Data Anal.* 16, 6, 865–878.
- POLETTE, A., AUVINET, E., MARI, J.-L., BRUNETTE, I., AND MEUNIER, J. 2014. Construction of a mean surface for the variability study of the cornea. In *11th Canadian Conference on Computer and Robot Vision, CRV 2014, Montréal, Canada, May 7–9*, 328–335.
- POLETTE, A., MARI, J., BRUNETTE, I., AND MEUNIER, J. 2014. Comparison of quasi-spherical surfaces using spherical harmonics: Application to corneal biometry. In *4th International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications, IPTA 2014, Paris, France, October 14–17, 2014*, 308–312.
- POLETTE, A., MARI, J.-L., BRUNETTE, I., AND MEUNIER, J. 2014. A new registration algorithm for estimating and discriminating average shapes of sets of corneal topographies. In *36th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, EMBC 2014, Chicaco, USA, August*, 3341–3344.
- RODOLA, E., BULO, S. R., AND CREMERS, D. 2014. Robust region detection via consensus segmentation of deformable shapes. *Computer Graphics Forum* 33, 5, 97–106.
- SHEPARD, D. 1968. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, ACM, New York, NY, USA, ACM'68, 517–524.
- SIMARI, P., KALOGERAKIS, E., AND SINGH, K. 2006. Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Sym-*

- posium on Geometry Processing*, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland, SGP'06, 111–119.
- SIMARI, P., NOWROUZEZAHRAI, D., KALOGERAKIS, E., AND SINGH, K. 2009. Multi-objective shape segmentation and labeling. In *Computer Graphics Forum: Eurographics Symposium on Geometry Processing*, Eurographics Association, Aire-la-Ville, Switzerland.
- SUBSOL, G., THIRION, J.-P., AND AYACHE, N. 1998. A scheme for automatically building 3D morphometric anatomical atlases: Application to a skull atlas. *Medical Image Analysis* 2, 1, 37–60.
- SUNDAR, H., SILVER, D., GAGVANI, N., AND DICKINSON, S. 2003. Skeleton based shape matching and retrieval. In *Proceedings of the Shape Modeling International 2003*, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, SMI'03, 130–.
- TEVS, A., HUANG, Q., WAND, M., SEIDEL, H.-P., AND GUIBAS, L. 2014. Relating shapes via geometric symmetries and regularities. *ACM Trans. Graph.* 33, 4, 119:1–12.
- VAN ESSEN, D. C. 2005. A population-average, landmark and surface-based (PALS) atlas of human cerebral cortex. *NeuroImage* 28, 3 (11), 635–662.
- XIE, Z., XU, K., LIU, L., AND XIONG, Y. 2014. 3D shape segmentation and labeling via extreme learning machine. *Computer Graphics Forum* 33, 5, 85–95.
- YANG, Y.-L., AND SHEN, C.-H. 2012. Multi-scale salient features for analyzing 3D shapes. *Journal of Computer Science and Technology* 27, 6, 1092–1099.
- YANG, Y.-L., LAI, Y.-K., HU, S.-M., AND POTTMANN, H. 2006. Robust principal curvatures on multiple scales. In *SGP 2006: 4th Eurographics Symposium on Geometry processing*, Eurographics Association, K. Polthier and A. Sheffer, Eds., 223–226.
- YOSHIZAWA, S., BELYAEV, A., AND SEIDEL, H.-P. 2005. Fast and robust detection of crest lines on meshes. In *Proceedings of the 2005 ACM Symposium on Solid and Physical Modeling*, ACM, New York, NY, USA, SPM'05, 227–232.
- ZHANG, X., LI, G., XIONG, Y., AND HE, F. 2008. 3D mesh segmentation using mean-shifted curvature. In *Advances in Geometric Modeling and Processing*, F. Chen and B. Jüttler, Eds., vol. 4975 of LNCS. Springer Berlin Heidelberg, 465–474.
- ZHENG, S., YING, J., WANG, B., XIE, Z., HUANG, X., AND SHI, M. 2013. Three-dimensional model for human anterior corneal surface. *Journal of biomedical optics* 18, 6, 065002–065007.

---

## Résumé

ANALYSE DE MAILLAGES SURFACIQUES PAR CONSTRUCTION ET COMPARAISON DE MODÈLES MOYENS ET PAR DÉCOMPOSITION PAR GRAPHES S'APPUYANT SUR LES COURBURES DISCRÈTES - APPLICATION À L'ÉTUDE DE LA CORNÉE HUMAINE

Cette thèse se découpe en trois parties. Les deux premières portent sur le développement de méthodes pour la construction de modèles géométriques moyens et pour la comparaison de modèles. Ces approches sont appliquées à la cornée humaine pour l'élaboration d'atlas et pour l'étude biométrique robuste. La troisième partie porte sur une méthode générique d'extraction d'informations dans un maillage en s'appuyant sur des propriétés différentielles discrètes afin de construire une structure par graphe permettant l'extraction de caractéristiques par une description sémantique. Les atlas anatomiques conventionnels (papier ou CD-ROM) sont limités par le fait qu'ils montrent généralement l'anatomie d'un seul individu qui ne représente pas nécessairement bien la population dont il est issu. Afin de remédier aux limitations des atlas conventionnels, nous proposons dans la première partie d'élaborer un atlas numérique 3D contenant les caractéristiques moyennes et les variabilités de la morphologie d'un organe, plus particulièrement de la cornée humaine. Plusieurs problématiques sont abordées, telles que la construction d'une cornée moyenne et la comparaison de cornées. Il existe à ce jour peu d'études ayant ces objectifs car la mise en correspondance de surfaces cornéennes est une problématique non triviale. En plus d'aider à développer une meilleure connaissance de l'anatomie cornéenne, la modélisation 3D de la cornée normale permet de détecter tout écart significatif par rapport à la "normale" permettant un diagnostic précoce de pathologies ou anomalies de la forme de la cornée. La seconde partie a pour objectif de développer une méthode pour reconnaître une surface parmi un groupe de surfaces à l'aide de leurs acquisitions 3D respectives, dans le cadre d'une application de biométrie sur la cornée. L'idée est de quantifier la différence entre chaque surface et une surface donnée, et de déterminer un seuil permettant la reconnaissance. Ce seuil est dépendant des variations normales au sein d'un même sujet, et du bruit inhérent à l'acquisition. Les surfaces sont rognées et trouées de façon imprévisible, de plus il n'y a pas de point de mise en correspondance commun aux surfaces. Deux méthodes complémentaires sont proposées. La première consiste à calculer le volume entre les surfaces après avoir effectué un recalage, et à utiliser ce volume comme un critère de similarité. La seconde approche s'appuie sur une décomposition en harmoniques sphériques en utilisant les coefficients comme des descripteurs de forme, qui permettront de comparer deux surfaces. Des résultats sont présentés pour chaque méthode en les comparant à la méthode la plus récemment décrite dans la littérature, les avantages et inconvénients de chacune sont détaillés. Une méthodologie en cascade utilisant ces deux méthodes afin de combiner les avantages de chacune est aussi proposée. La troisième et dernière partie porte sur une nouvelle méthode de décomposition en graphes de maillages 3D triangulés. Nous utilisons des cartes de courbures discrètes comme descripteur de forme afin de découper le maillage traité en huit différentes catégories de carreaux (ou *peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* et *flat*). Ensuite, un graphe d'adjacence est construit avec un noeud pour chaque carreau. Toutes les catégories de carreaux ne pouvant pas être adjacentes dans un contexte continu, des jonctions intermédiaires sont ajoutées afin d'assurer une cohérence continue entre les zones. Ces graphes sont utilisés pour extraire des caractéristiques géométriques décrites par des motifs (ou *patterns*), ce qui permet de détecter des régions spécifiques dans un modèle 3D, ou des motifs récurrents. Cette méthode de décomposition étant générique, elle peut être appliquée à de nombreux domaines où il est question d'analyser des modèles géométriques, en particulier dans le contexte de la cornée.

**Mots-clés :** modélisation géométrique, maillages, surfaces, cornées, atlas anatomiques, biométrie cornéenne, topographie cornéenne, géométrie différentielle, courbures discrètes, descripteurs de forme.

---

## Abstract

MESH SURFACE ANALYSIS BY CONSTRUCTION AND COMPARISON OF MEAN MODELS AND BY DECOMPOSITION INTO GRAPHS BASED ON DISCRETE CURVATURES - APPLICATION TO THE STUDY OF THE HUMAN CORNEA

This thesis comprises three parts. The first two parts concern the development of methods for the construction of mean geometric models and for model comparison. These approaches are applied to the human cornea for the construction of atlases and a robust biometric study. The third part focuses on a generic method for the extraction of information in a mesh. This approach is based on discrete differential properties for building a graph structure to extract features using a semantic description. Conventional anatomical atlases (paper or CD-ROM) are limited by the fact they generally show the anatomy of a single individual who does not necessarily represent the population from which they originate. To address the limitations of conventional atlases, we propose in the first part of this thesis to construct a 3D digital atlas containing the average characteristics and variability of the morphology of an organ, especially that of the human cornea. Several issues are addressed, such as the construction of an average cornea and the comparison of corneas. Currently, there are few studies with these objectives because the matching of corneal surfaces is a non-trivial problem. In addition to help to develop a better understanding of the corneal anatomy, 3D models of normal corneas can be used to detect any significant deviation from the norm, thereby allowing for an early diagnosis of diseases or abnormalities using the shape of the cornea. The second part of this thesis aims to develop a method for recognizing a surface from a group of surfaces using their 3D acquisitions in a biometric application pertinent to the cornea. The concept behind this method is to quantify the difference between each surface and a given surface and to determine the threshold for recognition. This threshold depends on normal variations within the same subject and noise due to the acquisition system. The surfaces are randomly trimmed and pierced ; moreover, there is no common landmark on the surfaces. Two complementary methods are proposed. The first method consists of the computation of the volume between the surfaces after performing geometrical matching and the use of this volume as a criterion of similarity. The second approach is based on a decomposition of the surfaces into spherical harmonics using the coefficients as shape descriptors to compare the two surfaces. Each result of the proposed methods is compared to the most recent method described in the literature, with the benefits and disadvantages of each one described in detail. A cascading methodology using both methods to combine the advantages of each method is also proposed. The third and final part of this thesis focuses on a new method for decomposing 3D triangulated meshes into graphs. We use discrete curvature maps as the shape descriptor to split the mesh in eight different categories (*peak*, *ridge*, *saddle ridge*, *minimal*, *saddle valley*, *valley*, *pit* and *flat*). Next, an adjacency graph is built with a node for each patch. Because all categories of patches cannot be adjacent in a continuous context, intermediate junctions are added to ensure the continuous consistency between patches. These graphs are used to extract geometric characteristics described by patterns that allow for the detection of specific regions in a 3D model or recurrent characteristics. This decomposition method, being generic, can be used in many applications to analyze geometric models, especially in the context of the cornea.

**Keywords :** geometric modeling, meshes, surfaces, corneas, anatomical atlas, corneal biometry, corneal topographer, differential geometry, discrete curvatures, shape descriptor.