Université de Montréal

Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans

par

Valériane Passaro

Département de didactique

Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures et postdoctorales

en vue de l'obtention du grade de Ph. D

en didactique

option mathématiques

Avril, 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures et postdoctorales

Cette thèse intitulée :

Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction
à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement
chez des élèves de 15 à 18 ans

Présentée par :
Valériane Passaro

A été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Philippe Richard
Président-rapporteur

Sophie René De Cotret
Directrice de recherche

Louis Charbonneau
Co-directeur

France Caron
Membre du jury

Hassane Squalli
Examinateur externe

François Bowen
Représentant de la doyenne

Résumé

Afin de mieux cerner les enjeux de la transition entre le secondaire et le postsecondaire, nous proposons un examen du passage de la notion de fonction à celle de dérivée. À la lumière de plusieurs travaux mettant en évidence des difficultés inhérentes à ce passage, et nous basant sur les recherches de Carlson et ses collègues (Carlson, 2002; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen et Hsu, 2002; Carlson, Larsen et Jacobs, 2001; Oehrtman, Carlson et Thompson, 2008) sur le raisonnement covariationnel, nous présentons une analyse de la dynamique du développement de ce raisonnement chez des petits groupes d'élèves de la fin du secondaire et du début du collégial dans quatre situations-problèmes différentes. L'analyse des raisonnements de ces groupes d'élèves nous a permis, d'une part, de raffiner la grille proposée par Carlson en mettant en évidence, non seulement des unités de processus de modélisation (ou unités de raisonnement) mises en action par ces élèves lors des activités proposées, mais aussi leurs rôles au sein de la dynamique du raisonnement. D'autre part, cette analyse révèle l'influence de certaines caractéristiques des situations sur les interactions non linéaires entre ces unités.

Mots-clés : didactique des mathématiques, fonction, dérivée, covariation, raisonnement covariationnel, variable, taux de variation, accroissement, modélisation

Abstract

To better understand the transitional challenges between high-school and post-secondary education, we propose a study of the passage from the notion of function to the notion of derivative. Based on numerous studies on the difficulties related to this passage and, more specifically, on the work of Carlson and colleague's (Carlson, 2002; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Carlson, Larsen & Jacobs, 2001; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008) on covariational reasoning, we present an analysis of the dynamics of the development of covariational reasoning. By submitting four different problem-situations to small groups of students ending secondary school and beginning college (15-18 years old), we were able to examine that development. On one hand, the analysis of the reasoning of those students allowed us to refine the grid proposed by Carlson, bringing out, not only the reasoning units used by those students during the proposed activities, but also their role in the dynamic of the reasoning. On the other hand, this analysis reveals the influence of certain characteristics of the situations on the non-linear interactions between those units.

Keywords : mathematics education, function, derivative, covariation, covariational reasoning, variable, rate of change, increment, modeling

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Liste des sigles

MELS : Ministère de l’éducation, du loisir et du sport (Québec)

SN : Séquence sciences naturelles (séquence offerte aux élèves de quatrième et cinquième secondaire dans le système scolaire québécois)

TS : Séquence technico-sciences (séquence offerte aux élèves de quatrième et cinquième secondaire dans le système scolaire québécois)

CEGEP : Collège d’enseignement général et professionnel (Québec)

Liste des abréviations

Sn : Situation n (S1, S2, S3, S4) telle que présentée aux élèves lors de l'expérimentation (voir ces situations en Annexe 4)

S2A, S2B, S4A et S4B : Parties A ou B des situations S2 et S4 telles que présentées aux élèves lors de l'expérimentation (voir ces situations en Annexe 4)

Un : Unité de raisonnement n (U1 à U13) (voir sections 2.4 et Annexe 13)

U1a, U1b, U2a … : Sous-unités associées à l'unité en question telles qu'identifiées dans la grille finale d'analyse du raisonnement covariationnel (voir section 2.4 et Annexe 13)

U3a(*f*), U4b(*g*), U4c(*g*') … : Sous-unités associées à l'unité en question mobilisées sur la fonction indiquée (exemple : U4b(*g*) correspond à la mobilisation de la sous-unité b) de la quatrième unité de raisonnement sur la fonction *g*, voir section 4.1.2 pour les détails)

U3a', U4d$(f)^{-1}$, U5- … : Déclinaisons particulières des unités ou sous-unités en question (par exemple : U3a' correspond à la mobilisation de la sous-unité a) de la troisième unité de raisonnement sur une autre fonction que celles étudiées, voir section 4.1.2 pour les détails)

SEC4, SEC5 et COL : Groupes de quatrième secondaire, de cinquième secondaire et du collégial

Mn_groupeX (M1_SEC4, M3_COL etc.) : n^{e} *moment* de retour aux unités racines observé dans le groupe X (voir section 4.3.5)

« Et, quoi qu'on en dise, dans la vie scientifique, les problèmes ne se posent pas d'eux-mêmes. C'est précisément ce sens du problème qui donne la marque du véritable esprit scientifique. Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir de connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit. »

Gaston Bachelard (1884-1962)

Remerciements

Je tiens avant tout à souligner que la réalisation de cette thèse a été rendue possible grâce au soutien financier du Conseil de recherche en sciences humaines du Canada et de la Faculté des études supérieures et postdoctorales de l'Université de Montréal, mais aussi grâce aux écoles partenaires qui m'ont accueillie et assistée lors de l'expérimentation. Merci aux enseignants pour leur précieuse collaboration et un grand merci aux élèves qui ont accepté d'être observés, scrutés, analysés dans le seul but de contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques.

L'aventure du doctorat m'a fait cheminer à bien des égards. Comme chercheure bien évidemment, mais aussi comme formatrice, enseignante, femme et mère. Cette aventure, je ne l'ai pas vécue seule…en fait, je n'aurais pas pu la vivre sans le support de mon entourage, mes directeurs, mes collègues, mes amis, ma famille. Je suis extrêmement choyée d'avoir autant de gens formidables autour de moi.

Avec mes directeurs, Sophie René de Cotret et Louis Charbonneau, nous avons formé, pendant cinq ans, une équipe passionnée. Grâce à nos échanges, riches et effervescents, je suis restée motivée, même dans les moments difficiles. Je remercie Sophie pour ses commentaires pointus qui m'ont obligée à me dépasser, à préciser mes idées, à peaufiner mon écriture. Je remercie Louis pour son discernement, ses réflexions et ses qualités de médiateur. J'ai adoré travailler avec vous et je vous suis très reconnaissante d'avoir cru en moi!

À mes collègues et amis, tout particulièrement, Mireille, Bernadette, Nadine, Fabienne, Annette, Anie, Michèle et Julie^2, je dis merci pour votre support moral et votre écoute. Vous m'avez permis de relâcher la soupape et de laisser sortir la vapeur. Sans ça, je n'en serais pas où j'en suis.

Je remercie ma famille de m'avoir soutenue dans mes choix et d'avoir eu la patience et l'endurance de supporter ces cinq années exigeantes. Un merci particulier à ma maman, mon modèle de discipline et de rigueur, et ma correctrice linguistique, pour avoir enduré mes lamentations et pris le temps de relire toute la thèse (ce n'est pas rien!). Merci à mon mari, Dominic, qui, sans pouvoir comprendre la passion qui m'anime, a réussi à m'encourager par

sa présence, ses gestes et son enthousiasme. Sa volonté, sa persévérance et sa joie de vivre m'ont inspirée et m'ont permis de me rendre au bout de l'aventure. Merci à mes enfants, Camille et Rémi, mes petits rayons de soleil. Leurs sourires et leurs attentions éclairent mes journées. Leur maturité, leur perspicacité et leur sensibilité en font des êtres exceptionnels qui, sans aucun doute, iront encore plus loin que leur maman!

Introduction

Plusieurs défis accompagnent la transition entre le secondaire et le postsecondaire en mathématiques. Conceptuellement, le passage des mathématiques élémentaires aux mathématiques avancées constitue un enjeu important que plusieurs chercheurs tentent de démystifier (Bloch et Ghedamsi, 2005; Tall, 1992; Schneider, 1992). La rupture qu'impose la nécessité de s'appuyer sur des concepts plus abstraits comme la limite, la continuité ou la dérivée semble inévitable. Nous pensons toutefois qu'il est possible d'amoindrir cette rupture en permettant aux élèves de développer leurs intuitions de ces concepts avant qu'ils ne soient officiellement enseignés. Nous sommes convaincue qu'il est possible d'exploiter ces intuitions dans l'enseignement et de les faire évoluer en amenant les élèves à vivre des expériences mathématiques riches. Pour nous, l'intuition peut être un atout et l'erreur un tremplin dans l'apprentissage des mathématiques.

Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement au passage de la fonction à la dérivée. Nos préoccupations globales concernent l'enseignement de la notion de fonction en vue de **favoriser le continuum entre l'étude des fonctions dans un cadre algébrique au secondaire et l'étude des fonctions en calcul différentiel au collégial**[1]. Nous avons choisi de dégager des pistes pour éclairer cet enseignement à partir **d'analyses didactique, historique et épistémologique des enjeux du passage de la fonction à la dérivée** (Chapitre I). Nous montrerons comment ces analyses débouchent, selon nous, sur la mise en évidence d'un **travail sur la covariation** qui semble jouer un rôle crucial dans la **co-construction des notions de fonction et de dérivée dans l'apprentissage des mathématiques scolaires**. L'objectif général de la recherche sera donc orienté sur l'exploration d'une **approche covariationnelle de la fonction** caractérisée, notamment, par une étude des accroissements concomitants des deux grandeurs mises en relation par cette fonction**.** Nous nous appuierons, pour ce faire, sur plusieurs recherches qui exploitent le travail sur la covariation dans l'enseignement au secondaire et sur d'autres qui abordent le développement d'un raisonnement covariationnel chez des élèves de niveau post-secondaire (Chapitre II). Nous

[1] Au Québec, le niveau collégial se situe entre le secondaire et l'université. L'enseignement collégial, prodigué dans les cegeps (collèges d'enseignement général et professionnel), a notamment pour objectif de préparer les élèves aux études universitaires.

choisirons alors d'explorer **une approche covariationnelle** de la fonction par l'intermédiaire d'une **analyse du raisonnement covariationnel déployé en situation**. À partir du cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de M. Carlson, nous construirons une grille d'analyse du raisonnement covariationnel adaptée au contexte de l'étude des fonctions au secondaire via la modélisation de situations réelles préparant le passage à la dérivée. Cette grille sera utilisée au Chapitre III pour la construction de situations expérimentées auprès d'élèves de 15 à 18 ans (quatrième et cinquième secondaire ainsi que première année du collégial), puis pour l'analyse du raisonnement covariationnel déployé par ces élèves dans ces situations au Chapitre IV. Une analyse fine du discours des élèves nous permettra de mettre en évidence les unités de raisonnement mobilisées, l'actualisation et l'articulation de ces unités dans la dynamique du raisonnement et l'influence des situations. Nous terminerons, au Chapitre V, par la présentation des conclusions qui se dégagent des résultats de cette analyse.

CHAPITRE I : PROBLÉMATIQUE

1.1 Le passage de l'étude des fonctions au secondaire à l'étude des fonctions en calcul différentiel

Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques à l'école, l'étude des fonctions occupe une place importante. Dès le début du secondaire, et même au primaire dans certains pays, les élèves apprennent à étudier, représenter, modéliser des situations fonctionnelles[2]. L'apprentissage de la notion de fonction est effectivement considérée nécessaire dans la formation du citoyen en général. Au-delà de cet apprentissage de base, les élèves qui envisagent de poursuivre leurs études dans des domaines scientifiques sont amenés à approfondir l'étude des fonctions réelles, d'abord dans un contexte algébrique puis dans le contexte du calcul différentiel et intégral.

Pour certaines professions, en général plus techniques, l'acquisition des outils qu'offre le *calcul différentiel et intégral* suffit. Pour d'autres, la compréhension des fondements de ces outils s'avère nécessaire. À l'école, cette compréhension est développée au sein de l'étude de l'*analyse* qui permet d'approfondir, d'élargir et de structurer les techniques du calcul différentiel et intégral. Ainsi, globalement, l'enseignement du *calcul différentiel et intégral* cible l'acquisition d'habiletés opératoires et d'utilisation d'un symbolisme spécifique, alors que l'enseignement de l'*analyse* vise à situer ces opérations au sein de théories reposant notamment sur la structure des nombres réels et complexes. En référence à Chevallard (1991), qui suggère une organisation mathématique en terme du quadruplet constitué des *tâches*, de la *technique*, de la *technologie* et de la *théorie*, on pourrait dire que les cours de *calcul différentiel et intégral* proposent l'acquisition de *techniques* permettant la réalisation de *tâches* spécifiques à la différentiation et l'intégration. Pour nous, la *technologie*, en tant que discours qui justifie l'adéquation des *techniques* à la réalisation desdites *tâches*, doit forcément accompagner la *technique* pour que les élèves développent une compréhension solide et

[2] Nous utiliserons cette expression tout au long de la thèse selon l'usage qui en est fait dans le programme de formation de l'école québécoise (Ministère de l'éducation, du loisir et du sport, 2007). Pour nous, une situation fonctionnelle est, au sens large, une situation dans laquelle on s'intéresse à des relations fonctionnelles entretenues par des grandeurs.

flexible des concepts mathématiques en jeu. Cette compréhension peut alors servir de base à l'étude plus large de l'*analyse* au niveau de la théorie.

Par exemple, en France et en Belgique, l'initiation des élèves au calcul différentiel et intégral s'effectue en dernière année de lycée (élèves de 17-18 ans). Au Canada, la situation varie selon les provinces. En Ontario, les élèves en dernière année du secondaire, soit en 12e année (élèves de 17-18 ans), abordent le calcul différentiel après avoir effectué une étude approfondie des fonctions en 11e et 12e année. Au Québec, l'étude des fonctions est approfondie en quatrième et cinquième secondaire (élèves de 15 à 17 ans) alors que le calcul différentiel et intégral est abordé au cégep (élèves de 17-18 ans). Dans les standards établis par le NCTM aux États-Unis, le calcul différentiel n'apparaît pas au niveau du secondaire (*High School*). Les élèves américains sont ainsi initiés au calcul différentiel au collège ou à l'université (élèves de 17-18 ans). Dans tous ces pays, les cours d'*analyse* ne sont offerts qu'à l'université.

De manière générale, peu importe le contexte scolaire et les divers programmes de formation, l'étude des fonctions réelles dans un cadre algébrique débouche sur l'étude des fonctions réelles dans le cadre du calcul différentiel[3]. Dans ce contexte, la compréhension de la notion de fonction développée dans le cadre algébrique de l'école secondaire devrait pouvoir servir de support la construction de la notion de dérivée. Le passage de la notion de fonction à celle de dérivée dans l'enseignement et l'apprentissage scolaire n'a toutefois jamais été suffisamment analysé pour qu'il soit possible de déterminer clairement comment travailler la notion de fonction au secondaire pour préparer les élèves à aborder la notion de dérivée. En fait, plusieurs chercheurs identifient des facteurs isolés influençant la réussite des élèves en calcul différentiel et intégral, suggérant chacun des pistes d'amélioration de l'enseignement. Dans la section qui suit nous mettrons en évidence plusieurs de ces éléments pour tenter de dégager les caractéristiques d'une approche de la fonction qui en permettrait la prise en compte.

---

[3] La notion de fonction abordée dans cette thèse est celle qu'on peut associer à l'étude des **fonctions réelles** à l'école secondaire. Cette étude se limite, plus ou moins, aux fonctions réelles d'une variable réelle suivantes : fonctions polynomiales (principalement de degré 0, 1 et 2), fonctions exponentielles et logarithmiques, fonctions racines carrés, fonctions en escaliers, fonctions rationnelles, fonctions valeurs absolues et fonctions trigonométriques, ainsi qu'aux fonctions obtenues par diverses opérations sur ces fonctions (addition, soustraction, composition). Par ailleurs, ce sont ces mêmes familles de fonctions qui sont généralement utilisées lors de l'introduction au calcul différentiel.

1.2 Les enjeux didactiques du passage de la notion de fonction à celle de dérivée

Afin de mieux cerner les enjeux didactiques du passage de la notion de fonction à celle de dérivée, nous présentons une revue de la littérature mettant en évidence différents éléments à prendre en compte pour favoriser la compréhension du calcul différentiel et, plus spécifiquement, la compréhension de la notion de dérivée.
Cela nous mènera à dégager les caractéristiques d'un travail sur la notion de fonction préalable à une introduction signifiante de la notion de dérivée. En effet, la construction de la notion de dérivée prenant appui sur la notion de fonction, nous considérons que le sens donné à la notion de fonction dans l'enseignement de l'algèbre doit favoriser cette construction.

Pour certains chercheurs en didactique des mathématiques, la compréhension de la notion de dérivée repose sur celles du taux de variation (Herbert et Pierce, 2012; Orton, 1983; Schneider, 1992; Sofronas et al., 2011; Thompson, 1994a; Weber et Dorko, 2014; Zandieh, 1997), de la variable (Gray, Loud et Sokolowski, 2009; Krysinska et Schneider, 2010; White et Mitchelmore, 1996), de la fonction (Monk, 1992; Vanderbrouck, 2011) et de la covariation (Carlson, 2002; Confrey et Smith, 1995; Zandieh, 2000). L'ensemble de ces notions concernent l'étude des fonctions et sont donc connexes à la notion de fonction.

1.2.1 Dérivée et taux de variation

La notion de dérivée repose sur celle de taux de variation. En effet, la dérivée en un point d'une fonction f correspond au taux de variation en ce point (voir Figure 1). Plus précisément, la dérivée de f en x_0 correspond à la limite d'un rapport entre deux différences ou un *quotient différentiel*. Or, ce rapport correspond au taux de variation moyen entre deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ d'où le fait qu'on dit généralement que le taux de variation instantané en x_0 est la limite du taux de variation moyen lorsque la différence $x - x_0$ tend vers 0.

> ✦ DÉFINITION. Soit f une fonction numérique définie dans un voisinage de x_0 (c'est-à-dire sur un ensemble contenant un intervalle de centre x_0 et de longueur non nulle). On dit que f admet une *dérivée* au point x_0 si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite lorsque x tend vers x_0; cette limite est alors désignée par $f'(x_0)$ et appelée *dérivée de la fonction* f *au point* x_0.

Figure 1 Définition de la dérivée en un point selon Lelong-Ferland (1968)

La fonction dérivée quant à elle peut aussi être définie à partir du taux de variation puisqu'elle correspond en quelque sorte à l'ensemble des valeurs que prend le taux de variation instantané sur l'ensemble du domaine de la fonction.

Herbert et Pierce (2012) considèrent qu'une compréhension avancée du taux de variation constitue la base de la compréhension de la dérivée et, pour Orton (1983), un travail approfondi sur le taux de variation doit être fait *avant* l'introduction au calcul différentiel. Par conséquent, la compréhension du taux de variation apparait comme un préalable essentiel à l'apprentissage de la notion de dérivée. Cette notion est toutefois plus complexe qu'il n'y parait puisque les idées sur ce qu'est un taux de variation sont presque aussi nombreuses que les contextes qui permettent de l'explorer (Noble, Nemirovski, Wright et Tierney, 2001).

1.2.1.1 Différentes conceptions du taux de variation

Noble et al. (2001) indiquent que le taux de variation peut être vu comme une quantité directement perceptible, par exemple, la vitesse lorsqu'on marche, ou comme une relation mathématique entre deux quantités, par exemple, la distance et le temps qui permettent de faire apparaître une nouvelle quantité : la vitesse. Plusieurs descriptions du taux de variation incluent des aspects de ces deux points de vue, reconnaissant, d'une part, la perception directe expérimentée en situation et, d'autre part, la relation numérique sous-jacente.

Dans une étude phénoménologique, Herbert et Pierce (2012) proposent une description des caractéristiques de la compréhension de la notion de taux de variation par vingt élèves de 10^{e} année (quatrième secondaire) ayant déjà travaillé avec les fonctions, mais n'ayant jamais abordé le calcul différentiel. Ils identifient huit manières de concevoir le taux de variation :

A. Le taux est associé à une **qualité** dans une situation concrète.
B. Le taux est associé à une **valeur numérique** sans préoccupation pour la manière d'obtenir cette valeur.

C. Le taux est une **quantité** en soi, elle n'est pas liée à d'autres quantités.
D. Le taux est le résultat de **l'application d'une formule** sans reconnaissance de la relation entre les quantités impliquées pour ce calcul.
E. Le taux est une **relation entre le changement de deux quantités**.
F. Le taux est une **relation numérique constante entre les changements de deux quantités**.
G. Le taux est une **relation numérique entre des changements de distance et de temps (vitesse)**.
H. Le taux est une **relation numérique entre les changements de n'importe quelles deux quantités**.

Ils dégagent ensuite les différentes variantes de la prise en compte de certains aspects du taux de variation dans ces conceptions : le **mot** « taux » (vu qualitativement ou quantitativement), la ou les **quantités** (le taux comme quantité versus les deux quantités mises en rapport), la **relation** entre les quantités (vue comme qualitative, quantitative constante ou quantitative variable) et la **nature** des quantités (distance et temps seulement, ou dépendamment du contexte, et ce, peu importe le contexte). Pour les auteurs, une conception idéale du taux de variation comprend une vision quantitative du mot taux, une prise en compte des deux quantités mises en rapport, une considération pour la relation entre ces quantités à la fois qualitativement et quantitativement constante ou variable, et, une généralisation de la relation à n'importe quel contexte et donc à n'importe quelles deux quantités mises en rapport pour obtenir un taux de variation. Bien que cela ne nous apparaisse pas si évident, ils considèrent que la conception H correspond à cette conception idéale pour des élèves qui terminent le secondaire. En effet, cette conception du taux de variation comme relation numérique entre les changements de deux quantités leur apparait être un préalable pour aborder le calcul différentiel par la suite. Ils notent néanmoins que le passage à la notion de dérivée nécessite la distinction des notions de taux de variation moyen et instantané, ce qui n'est pas traité au secondaire. En fait, les élèves sont amenés à travailler la notion de taux de variation uniquement dans des contextes où celui-ci est constant ce qui n'incite pas à distinguer le taux instantané du taux moyen puisqu'ils sont toujours égaux.

Dans le même ordre d'idée, Weber et Dorko (2014) ont comparé les façons de voir le taux de variation chez des étudiants universitaires suivant un cours de calcul différentiel et intégral, et chez des mathématiciens. Ils identifient quatre conceptions du taux de variation :

1. Le taux est vu comme une **formule** (le taux de variation est un algorithme qu'on exécute sur des nombres et qui retourne une valeur)
2. Le taux de variation est vu comme **propriété d'un objet** (le taux de variation est la propriété d'un objet graphique ou d'une fonction définie algébriquement)
3. Le taux de variation est vu comme **comparaison statique du changement des variables** (le taux de variation est le quotient entre les changements de deux variables qui décrit un graphique)
4. Le taux de variation est vu comme une **mesure de la covariation** (le taux de variation est une mesure des variations simultanées de deux ou plusieurs variables)

Les résultats de cette étude montrent que, lorsqu'on demande aux participants de décrire ce que signifie le taux de variation et de le représenter de manière à illustrer comment le mesurer, les façons de voir des experts (les mathématiciens) et des novices (étudiants) diffèrent. Les façons de voir des experts correspondent à la quatrième conception, c'est-à-dire qu'ils conçoivent le taux de variation comme une mesure de la covariation. De plus, ils sont en mesure de donner un sens à cette conception graphiquement, symboliquement et dans une table de valeurs. Les conceptions des novices sont quant à elles variées, mais elles correspondent toutes à l'une des trois premières conceptions du taux de variation, et elles sont associées à une seule représentation à la fois. Par exemple, le cas de Jamie, une étudiante, est explicité : Jamie associe le taux de variation à la *pente* d'une droite et pour le calculer, elle prend deux points et établit le rapport entre la différence des ordonnées et la différence des abscisses; elle conçoit donc le taux de variation graphiquement et de manière statique dans la mesure où elle calcule la pente de la droite sans voir les différences comme des mesures de la covariation des variables. Les auteurs notent, en outre, que les façons de voir le taux de variation des novices sont déconnectées de la variation et des variables. Ils considèrent, par conséquent, que même à l'intérieur d'un cours de calcul différentiel et intégral, les étudiants développent des conceptions du taux de variation qui ne favorisent pas la compréhension de la notion de dérivée.

En synthèse, nous notons que dans la perspective de préparer les élèves à aborder le calcul différentiel en donnant notamment un sens à la notion de dérivée, il apparait important de les amener à concevoir le taux de variation comme une relation numérique entre les changements de deux quantités (Herbert et Pierce, 2012) ou encore comme une mesure de la covariation (Weber et Dorko, 2014), c'est-à-dire une mesure des variations simultanées de deux ou plusieurs grandeurs. Il faut cependant être conscient que cette conception, tout en étant indéniablement nécessaire, ne permet pas de définir à elle seule le quotient différentiel.

1.2.1.2 Du taux de variation au quotient différentiel

À l'école secondaire, le taux de variation est défini dans le cadre de l'étude des fonctions affines. Il correspond alors au rapport entre deux différences $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ obtenues à partir de deux couples de la fonction étudiée $((x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1})$. Comme nous l'avons rappelé précédemment, la notion de dérivée se définit à l'aide de ce même *rapport de différences* qu'on appelle alors quotient différentiel. Ce quotient est obtenu en établissant le rapport entre la différence de deux valeurs de la variable dépendante $(f(x) - f(x_0))$ et la différence des deux valeurs correspondantes de la variable indépendante $(x - x_0)$ dans l'optique de faire tendre cette dernière vers 0 pour obtenir la valeur limite du quotient ou du taux de variation.

Pour que les élèves soient en mesure de saisir la notion de quotient différentiel, ils doivent pouvoir donner un sens, d'une part, au taux de variation comme *rapport* entre une différence entre deux valeurs de la variable dépendante et la différence entre les deux valeurs correspondantes de la variable indépendante (Orton, 1984; Zandieh, 2000) et, d'autre part, à la notion de limite (Sofronas et al., 2011; White et Mitchelmore, 1996). Le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané est l'élément clé du passage de la fonction à la dérivée. En effet, la dérivée existe au moment où les questions qui se posent appellent la mobilisation de la notion de taux de variation instantané et donc le passage à la limite.

À propos du taux de variation comme rapport entre deux différences

Orton (1983) considère que les difficultés rencontrées par les élèves lors de l'apprentissage du taux de variation concernent particulièrement l'idée de rapport et de proportion. Il suggère par conséquent de travailler la notion de taux de variation lors de l'étude des rapports et des proportions notamment à l'aide de la représentation graphique. Zandieh (2000), quant à elle, considère qu'une conception du taux de variation en tant que rapport nécessite un travail sur les différences ou les accroissements des variables. De plus, ce type de travail est facilement accessible aux élèves du secondaire puisqu'il émerge naturellement de l'observation de régularités en algèbre (Orton, 1984).

À propos de la compréhension de la notion de limite en calcul différentiel

Sofronas et al. (2011) ont interrogé 24 experts en mathématiques afin de savoir ce que, pour eux, signifiait « comprendre le calcul différentiel et intégral pour un étudiant de première année d'université ». Selon 71% de ces experts, la compréhension de la notion de limite est centrale pour l'apprentissage du calcul différentiel. Ils indiquent, par exemple, que le processus de passage à la limite est important pour le calcul de la dérivée en un point. En fait, comme nous l'avons montré précédemment, ce passage permet celui du taux de variation moyen au taux de variation instantané.

Spontanément, les élèves voient la limite comme un processus qui se perpétue infiniment sans jamais atteindre le but visé (Kidron et Tall, 2015). Cette conception intuitive est liée à celle de l'infini potentiel. Historiquement, l'étude des phénomènes de croissance chez les Grecs a mené à la distinction entre l'infini potentiel associé à un processus dynamique et répétitif sans fin, et l'infini actuel associé au résultat statique obtenu lorsque ce processus est complété (Kidron et Tall, 2015; Tall, 1992). Par exemple, dans le cas de l'utilisation de la notion de limite pour définir la dérivée, on dit que lorsque $(x - x_0)$ *tend* vers 0, $(f(x) - f(x_0))$ se *rapproche* d'une certaine valeur $(f'(x_0))$. Une conception de l'infini potentiel mène en fait à se fier à ce qui est perceptible, soit le rapprochement vers la limite : « la différence se rapproche de plus en plus de $f'(x_0)$ mais sans jamais l'atteindre ». Le regard sur la limite avec une conception de l'infini actuel, quant à lui, met l'accent sur la valeur existante sans se préoccuper du processus de rapprochement : « la limite de cette différence est $f'(x_0)$ ». Pour l'introduction de la notion de dérivée, une conception intuitive de la limite liée à l'infini potentiel peut être exploitée à l'aide d'une approche dynamique et globale des graphiques de différents types de fonctions permettant aux élèves d'émettre des conjectures à propos du taux de variation et d'explorer visuellement ce qui se passe lorsque l'intervalle du domaine étudié est de plus en plus petit (Kidron et Tall, 2015). Il est toutefois important de considérer que la distinction entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané nécessite l'acceptation de la limite comme valeur existante et, par conséquent, un passage à l'abstraction par détachement du processus concret de rapprochement.

À propos de la distinction entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané

« Le concept de taux de variation instantané ne peut naître que de l'impuissance du concept de taux moyen à résoudre un problème » (Schneider, 1992, p.346). Ce sont donc les questions qui se posent qui justifient le passage au taux de variation instantané et l'introduction de la notion de dérivée. Selon Orton (1984) la distinction entre l'allure des droites et des courbes est probablement la tâche qui requiert le plus des élèves d'être en mesure d'étudier graphiquement le taux de variation. Pour les droites, le taux de variation moyen est le même peu importe les deux points ou les deux couples considérés pour son calcul. Ce taux de variation est alors *la* caractéristique de variation de la fonction affine représentée, il informe à lui seul sur comment se comporte la fonction et donc sur l'allure de son graphique (ligne droite croissante ou décroissante, pente plus ou moins accentuée). Pour les courbes, le taux de variation moyen entre deux points peut aussi être calculé, mais il ne sera pas forcément le même entre deux autres points. Ce taux ne peut plus être considéré comme représentatif de la fonction. De plus, s'il existe des changements de variation entre les deux points considérés pour le calcul du taux de variation moyen, alors le taux obtenu n'en rend pas compte. Dans ce cas, les élèves sont réticents à calculer le taux de variation moyen car ils réalisent son impuissance à rendre compte du comportement de la fonction (Orton, 1984). Ainsi, le fait que le taux de variation varie et qu'en chaque point de la courbe il soit différent suscite l'identification de la notion de taux de variation instantanée. Il faut néanmoins considérer que l'expérience des élèves avec les droites nuit à cette distinction puisque l'image de la droite, pour laquelle le taux de variation moyen est représentatif, est forte. Pour Orton, la compréhension de la notion de taux de variation instantané repose sur une compréhension solide de la notion de taux de variation moyen. Il considère par conséquent, que cette dernière doit être travaillée de manière approfondie préalablement à l'introduction de la dérivée, et ce, autant pour des fonctions qu'on représente par des droites que pour des fonctions qu'on représente par des courbes.

À propos de la distinction entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée

Dans le cadre d'une étude menée auprès d'élèves terminant le secondaire en Belgique, Gantois (2012) et Gantois et Schneider (2009) ont évalué les capacités des élèves à mobiliser spontanément différents aspects liés aux dérivées en dehors de leur contexte d'enseignement[4]. Il faut noter qu'en Belgique la notion de dérivée est introduite au niveau de l'enseignement dit secondaire, puis elle est exploitée lors de l'étude de l'analyse à l'université. Les connaissances acquises au secondaire sont qualifiées de procédurales; les enseignants indiquent qu'ils insistent sur les techniques de calcul puisque c'est ce qui est accessible à des élèves de cet âge. Le constat est jugé négatif :

> « Les réponses obtenues au questionnaire nous amènent à un constat négatif : les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser la dérivée dans un contexte cinématique. Ils ne parviennent pas non plus à la réinvestir dans le cadre d'approximations numériques locales. (...) Quant au calcul des dérivées, il serait réduit à une procédure sans signification puisque les élèves ne semblent pas être conscients qu'il faut préciser la variable par rapport à laquelle on dérive. » (Gantois et Schneider, 2009, p.12)

Il semble, par conséquent, que les élèves ne soient pas en mesure de mobiliser la dérivée pour résoudre des problèmes d'étude du mouvement. Pourtant, pour les auteurs, l'un des sens importants à donner à la dérivée est associé à la notion de vitesse. Ils expérimentent alors l'impact d'un travail sur la dérivée via l'étude du mouvement sur la compréhension des élèves. La vitesse apparait alors comme un marchepied intéressant vers le concept de dérivée, l'idée de taux de variation instantané s'avérant plus porteuse que l'idée de pente de la tangente. Les auteurs indiquent « que les vitesses peuvent constituer des formes embryonnaires du concept de dérivée, susceptibles de donner naissance à des formes plus générales, au-delà de contextes temporels » (Gantois et Schneider, 2009, p.20). La présence du temps comme variable indépendante dans les situations d'étude du mouvement permet effectivement une utilisation justifiée de l'expression « taux de variation instantanée », l'instantanéité référant au temps. Nous verrons à la section 1.3.2 que ce type d'approche permet une reconnexion épistémologique avec le sens de la dérivée dans le contexte de l'étude du mouvement.

Pour Zandieh (2000), la vitesse est un exemple concret communément utilisé pour introduire l'enseignement de la dérivée. Il est considéré comme familier et il permet l'utilisation d'un langage naturel (cf exemple de Noble et al. (2001) sur la vitesse comme quantité directement perceptible à la section 1.2.1.1). Par exemple, l'augmentation de la vitesse est appelée accélération autant en mathématiques, en physique que dans la vie courante. Il est aussi lié à la

[4] Il est à noter que ce type de « non usage » de connaissances n'est pas spécifique à la dérivée et est un phénomène assez courant étudié notamment dans la recherche sur la didactique du sens commun (René de Cotret, 2009).

plupart des autres contextes dans lesquels la notion de dérivée est mobilisée. En référence aux travaux de Piaget, Thompson (1994a) considère qu'il est important de distinguer le déplacement en tant que phénomène, c'est-à-dire l'expérience du mouvement, et la vitesse en tant que quantité. Une *première conception* de la vitesse peut être associée à l'expérience du déplacement. Selon nous, la vitesse constitue alors, à l'instar du taux de variation (voir section 1.2.1.1), un objet en soi. Elle est perçue comme une grandeur extensive. Cette conception semble cohérente avec celle des élèves du premier cycle du secondaire (12-15 ans) interrogés par René de Cotret (1988), qui ne sont pas en mesure d'envisager la vitesse comme une fonction du temps et de l'espace. Nous pensons que la quantification de la vitesse à l'aide d'outils de mesure, comme l'odomètre de la voiture, renforce cette conception. Toutefois, un travail qualitatif sur des représentations graphiques du mouvement semble permettre aux élèves de dépasser l'obstacle ainsi constitué (René de Cotret, 1988). Subséquemment, la vitesse peut être vue comme une grandeur intensive, c'est-à-dire une grandeur qu'on ne peut pas mesurer en la comparant à un étalon (Schneider, 1992). La vitesse se calcule à partir de mesures d'une autre espèce. La perception de la vitesse est alors liée aux images dynamiques et au sentiment de durée. Pour nous, une *deuxième conception* de la vitesse peut être associée à ce rapport entre un déplacement et une durée. Cette conception est toujours cohérente avec l'expérience sensible et elle a son domaine de validité. Toutefois, à travers cette conception, on a l'impression que, pour qu'une vitesse existe, il doit s'écouler un certain temps. Le concept théorique de vitesse instantanée ne peut alors être accepté (Schneider, 1992). La présence du temps creuse le fossé entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée puisque l'une se définit à l'aide du temps et l'autre non, il y a alors clivage. L'idée de concevoir la vitesse instantanée comme la limite des vitesses moyennes est tout aussi contre-intuitive. « Une vitesse instantanée ne peut se penser en termes « d'ajouts successifs », ce qui contribue à l'éloigner des vitesses moyennes dont elle est la limite. En effet, une vitesse ne peut être décomposée en sommes de « parties de vitesse ». » (Schneider, 1992, p.328) Nous considérons donc que la vitesse instantanée exige la construction d'une *troisième conception* de la vitesse. L'évacuation du temps, que le passage à la limite oblige, fige la vitesse dans un univers où le mouvement ne semble plus exister. Dans ce contexte, la première conception intuitive de la vitesse et l'expérience de sa mesure à l'aide d'outils peuvent servir d'assise pour envisager l'existence de la vitesse instantanée.

1.2.2 Dérivée et variable

L'une des sources de difficultés lors de l'apprentissage du calcul différentiel et intégral est une conceptualisation inappropriée ou incomplète de la variable. Les étudiants traitent régulièrement les variables comme des symboles à manipuler plutôt que comme des quantités à mettre en relation (White et Mitchelmore, 1996). L'étude du calcul différentiel et intégral nécessite la compréhension des variables algébriques en tant que nombres généralisés et en tant que quantités variables fonctionnellement reliées (Gray et al., 2009). Les différents sens de la lettre utilisée en algèbre ne sont effectivement pas suffisamment mis en évidence dans l'enseignement[5]. Dans le cadre de l'étude des fonctions et donc des relations entre des quantités variables, la lettre n'a pas le même statut que dans le cadre de la résolution d'équations algébriques. D'après Sierpinska (1992), la compréhension de la notion de fonction passe par la différenciation entre les quantités connues et inconnues manipulées dans le contexte de la résolution d'équations, et les quantités variables et constantes manipulées dans le contexte de l'étude des fonctions. Krysinska et Schneider (2010) considèrent que le fait que les élèves soient d'abord initiés aux équations, et donc aux quantités connues et inconnues, constitue un obstacle didactique. Elles pensent qu'« en étudiant les fonctions préalablement aux équations, on pourrait apprendre aux élèves à penser « variable » d'emblée, cette variable devenant inconnue lorsqu'elle est soumise à des contraintes particulières » (page 53).

Krysinska et Schneider (2010) considèrent que la notion de variable est une notion paramathématique, au sens où l'entend Chevallard (1991), puisqu'elle n'est pas un objet d'étude comme la notion de fonction, par exemple, mais plutôt un outil au service de l'activité mathématique. La variable se définit donc à travers les différentes situations qui la mettent en jeu. C'est pourquoi il est important de fournir aux élèves les occasions d'analyser diverses situations fonctionnelles sous l'angle de la variation.

« La conceptualisation d'une variation en termes de fonction suppose l'identification de deux variables dont l'une sera choisie comme variable indépendante et l'autre comme variable dépendant de la première » (Krysinska et Schneider, 2010, p.41), la variation de la variable indépendante entrainant celle de la variable dépendante. L'étude de la fonction sous l'angle de

[5] Nous invitons le lecteur intéressé par la problématique du sens de la lettre en algèbre à consulter l'article de Jeannotte (2012) ainsi que le livre de Bednarz, Kieran, & Lee (1996).

la variation correspond donc à l'étude de la variation concomitante des deux grandeurs mises en relation par cette fonction. Ce type de travail permet le développement d'une conception de la variable comme quantité variable. Cette conception est à la fois nécessaire à la conceptualisation de la fonction et de la dérivée. Gray et al. (2009) suggèrent d'amener les élèves à développer cette conception des variables comme quantités covariantes *avant* et *pendant* l'apprentissage du calcul différentiel, et ce, dans divers contextes.

1.2.3 Dérivée, fonction et registres de représentation

L'entrée dans le calcul différentiel exige une compréhension solide de la notion de fonction (Oehrtman et al., 2008). D'ailleurs, plusieurs chercheurs s'entendent à dire que le concept de fonction est un concept fondamental. Ils mettent de l'avant son rôle unificateur au sein des mathématiques ainsi que sa contribution à l'étude de plusieurs phénomènes en sciences (Carlson, 1998; Eisenberg, 1992; Selden et Selden, 1992). Sa richesse et sa complexité viennent de pair avec les difficultés relatives à son apprentissage et son enseignement (Dreyfus et Eisenberg, 1982). En effet, la recherche en didactique des mathématiques a largement mis en évidence les difficultés rencontrées par les élèves du secondaire (Janvier, 1993; Sajka, 2003), les étudiants du collégial et de l'université (Beichner, 1994; Carlson, 1998; Monk, 1992) et même les enseignants (Hitt, 1998) lors de la réalisation de tâches sur les fonctions.

1.2.3.1 L'obstacle d'une conception procédurale de la fonction développée au sein du registre symbolique

Au secondaire, la plupart des tâches proposées aux élèves lors de l'étude des fonctions sont de nature algorithmique (Bloch et Ghedamsi, 2005) et le mode de représentation privilégiée est symbolique (notations algébriques). La fonction est alors vue comme une formule (Sajka, 2003; Vinner, 1983; Vinner et Dreyfus, 1989). Ce qui ne signifie pas néanmoins que le symbolisme algébrique soit bien utilisé par les élèves. Au contraire, Sajka (2003) montre comment le manque de sens accordé à ce symbolisme conduit une élève de 16 ans, classée académiquement comme « moyenne », à des interprétations erronées des tâches proposées. Il met ainsi en évidence certaines caractéristiques de la conception de la fonction développée par cette élève : une tâche qui porte sur la fonction exige de résoudre une équation, la fonction *c'est* une formule, la fonction c'est une machine qui permet d'obtenir des valeurs numériques, la fonction c'est une formule qui permet de tracer un graphique. Ce cas typique illustre une conception procédurale de la fonction. Selden, Mason et Selden (1989) notent que, dans ce contexte, les élèves butent face à des tâches non routinières. La prévalence du mode de représentation algébrique ne permet en effet pas aux élèves de développer une compréhension flexible et significative de la notion de fonction (Monk, 1992; Oehrtman et al., 2008). Ainsi, certains chercheurs suggèrent une coordination de plusieurs registres de représentation afin de développer une meilleure compréhension des notions de fonction (Duval, 1988; Hitt, 1998) et de fonction dérivée (Asiala, Cottrill, Dubinski et Schwingendorf, 1997; Aspinwall et al., 1997; Berry et Nyman, 2003; Bloch, 2002). Le travail graphique constitue en effet une entrée particulièrement intéressante pour aborder *l'articulation* de ces deux notions (Eisenberg, 1992).

1.2.3.2 Le potentiel du registre graphique pour donner un sens à la dérivée

L'une des particularités importantes de la représentation graphique est son aspect visuel. Or, selon Aspinwall et al. (1997), les raisonnements qui s'appuient sur la visualisation contribue au développement d'une compréhension conceptuelle du calcul différentiel :

> "Conceptually, the role of visual thinking is so fundamental to the understanding of calculus that it is difficult to imagine a successful calculus course which does not emphasize the visual elements of the subject. This is especially true if the course is intended to stress conceptual understanding, which is widely recognised to be lacking in many calculus courses so now thought. Symbol manipulation has been overemphasized and…in the process the spirit of calculus has been lost." ((Zimmermann, 1991, p.136, cité par Aspinwall et al., 1997)

Pour l'enseignement, 29% des 24 experts interrogés par Sofronas et al. (2011) considèrent qu'il faut mettre l'accent sur la représentation graphique de la dérivée puisque c'est un moyen essentiel pour donner du sens à ce concept.

Pour introduire le calcul différentiel, une approche intuitive de la dérivée est suggérée par plusieurs chercheurs qui la considèrent comme une base essentielle à la compréhension (Asiala et al., 1997; Berry et Nyman, 2003; Kidron et Tall, 2015). La représentation graphique peut servir de support au développement de l'intuition. Dans cet ordre d'idée, Tall (1992) suggère de s'appuyer sur les *racines cognitives* du concept de dérivée, c'est-à-dire sur les éléments familiers et intuitifs qui permettent aux élèves de donner un sens à cet objet mathématique. Il parle, par exemple, de proposer aux élèves d'observer différents graphiques afin de déterminer s'ils sont plus ou moins courbés et de les amener à constater la linéarité locale lorsqu'on observe la courbe sur des intervalles de plus en plus petits du domaine. La prise de conscience de cette quasi-linéarité locale est effectivement essentielle à la résolution d'une équation différentielle de premier ordre.

Dans sa thèse de doctorat, Salahattin (2005) propose d'envisager l'approche graphique pour la résolution d'équations différentielles en classe de terminale S au lycée en France. Il voit comme synonyme la « résolution graphique » et la « résolution qualitative ». Il explique, en effet, que la résolution qualitative d'équations différentielles consiste à étudier les propriétés globales des courbes qui sont facilement accessibles graphiquement. Il indique que cette technique a l'avantage d'être applicable à toute équation différentielle de la forme $y'=f(x, y)$. Elle permet donc d'aborder la plupart des équations différentielles tirées de l'étude de phénomènes réels et, par conséquent, d'éviter les modélisations artificielles habituellement proposées dans l'enseignement. La résolution graphique permet d'obtenir une première idée de l'allure des fonctions dérivées et donne des informations ponctuelles très précieuses sur les courbes solutions comme le mentionne Salahattin (2005) :

> « En effet, certains des problèmes les plus importants qui concernent les équations différentielles, sont relatifs au comportement qualitatif des courbes solutions (allure et stabilité de celles-ci, sensibilité aux perturbations, existence de vibration, etc.). Obtenir qualitativement l'allure générale de la solution est parfois fort utile, voire suffisant pour comprendre le phénomène. » (page 30)

De plus, l'auteur défend cette approche en indiquant que, d'un point de vue cognitif, elle ouvre un champ d'application à certaines notions de l'analyse (tangentes, fonction, majoration, minorations, extrémums, théorème des valeurs intermédiaires, etc.). Par conséquent, l'approche graphique du calcul différentiel n'est pas uniquement un moyen d'introduire les concepts aux étudiants débutants, elle permet aussi de développer une intuition puissante sur des théorèmes qui seront abordés par la suite en analyse formelle (Tall, 1986). D'un point de vue didactique, Salahattin (2005) indique que l'approche graphique donne lieu à des activités riches en changements de cadres et de registres. Elle offre, de ce fait, la possibilité d'articuler différents registres de représentation.

Toutefois, la richesse de cette représentation dépend de l'habileté à l'utiliser et à l'interpréter. Or, les élèves rencontrent des difficultés avec l'interprétation graphique (Beichner, 1994; Carlson, 1998; C. Janvier, 1993; Monk, 1992) et, ils ne pensent pas à utiliser spontanément cette représentation pour résoudre des problèmes (Vanderbrouck, 2011). Il semble même que les étudiants soient réticents à utiliser cette représentation (Asiala et al., 1997). Nous pensons toutefois que la propension à utiliser le registre symbolique dans l'enseignement, comme nous l'avons indiqué précédemment, est en partie à l'origine des difficultés rencontrées par les élèves. Cela peut aussi être mis en évidence par la considération de l'importance d'articuler différents points de vue dans le travail des fonctions.

1.2.3.3 L'articulation de différents points de vue pour l'étude des propriétés des fonctions et de la dérivée

Dans le contexte français, le passage de l'algèbre à l'analyse dans la transition entre le lycée et l'université pose problème. Vanderbrouck (2011) associe les difficultés de ce passage au manque d'articulation de différents *points de vue* engendré par la trop grande place occupée par l'approche algébrique des fonctions au lycée. L'auteur cerne effectivement trois points de vue spécifiques associés aux différents types de propriétés des fonctions : ponctuel, local et global. Certaines propriétés sont dites ponctuelles, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction pour une valeur de la variable indépendante, par exemple, $f(x_0) = 3$. D'autres propriétés sont dites locales, c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de la fonction sur un voisinage d'une valeur de la variable indépendante aussi petit soit-il, on parle par exemple d'une limite en x_0, de la continuité en x_0 et de la dérivabilité en x_0. Les propriétés globales caractérisent, quant à elles, la fonction dans son ensemble ou du moins sur un intervalle relativement grand du domaine, on dira, par exemple, qu'une fonction est croissante. Ce dernier type de propriété est particulièrement lié à la représentation graphique qui permet, en effet, de déterminer rapidement comment se comporte une fonction. Ainsi, l'auteur indique que « les représentations algébriques seules ne peuvent pas suffire pour adopter la perspective globale en particulier lorsque les propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale » (p.158). Les conséquences sur le passage de l'algèbre à l'analyse sont importantes comme indiqué dans l'extrait suivant :

> « le manque de disponibilité de cette perspective globale, la non articulation entre les perspectives ponctuelles et globales, associée à la seule disponibilité du registre algébrique au détriment des registres graphique ou symbolique, constitue sans doute l'un des obstacles majeurs à l'entrée des lycéens et des étudiants dans les exercices d'analyse, où les mises en perspective sont souvent pertinentes. » (Vanderbrouck, 2011, p. 178)

Adopter une perspective globale lors de l'étude de certaines propriétés de la fonction et de la dérivée, ainsi qu'articuler les perspectives globale, locale, et ponctuelle s'avère être une piste intéressante pour favoriser l'entrée dans l'*analyse*. Le registre graphique offre des opportunités en ce sens contrairement au registre algébrique.

1.2.3.4 Un regard sur la fonction par la covariation

Certains auteurs soutiennent que l'idée de covariation est à la base du calcul différentiel et intégral. Pour Carlson et al. (2002), l'habileté à modéliser des situations dans lesquelles on s'intéresse à la variation continue d'une grandeur dont dépend la variation d'une autre grandeur est essentielle à l'interprétation de phénomènes dynamiques et à la compréhension des principaux concepts du calcul différentiel.

Il semble cependant que les élèves rencontrent des difficultés à mobiliser une telle habileté. Dans le cadre d'une recherche doctorale ayant pour but d'évaluer la compréhension du concept de fonction par des élèves forts de trois niveaux scolaires différents (élèves de la fin du secondaire n'ayant pas encore suivi de cours de calcul, étudiants du collégial suivant leur premier cours de calcul et étudiants universitaires complétant un cours d'analyse complexe ou d'algèbre abstraite), Carlson (1998) a mis en évidence les difficultés à représenter et interpréter les aspects covariants d'une situation fonctionnelle. Il est apparu que les élèves du secondaire n'étaient pas en mesure de représenter graphiquement les aspects covariants d'une situation réelle. Les étudiants du collégial, quant à eux, ont rencontré des difficultés à interpréter les informations sur le taux de variation et sur les graphiques dans des situations où des phénomènes dynamiques sont observés. L'une des tâches ayant permis de dégager ces résultats est celle du traçage du graphique de la hauteur de l'eau en fonction du volume d'eau dans une bouteille qu'on imagine se remplir (voir Figure 2).

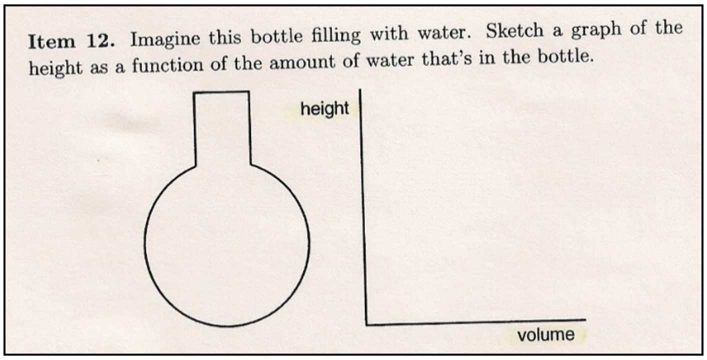


Figure 2 Problème de la bouteille tiré de Carlson (1998)

Pour Carlson, l'aspect de covariation de la fonction est peu exploité dans le curriculum alors qu'il s'avère crucial. Dans des recherches subséquentes, elle propose une analyse approfondie de cet aspect à travers un cadre d'analyse du raisonnement covariationnel développé chez des élèves de niveaux collégial et universitaire (voir section 2.3).

Par ailleurs, il est en général admis qu'une approche de la fonction par la covariation fournit un premier pas indispensable vers une compréhension approfondie du concept de fonction (Llyod et Wilson, 1998). Cette approche est présentée en contraste avec une approche par la correspondance.

À la suite de la recherche de Monk (1992), dans laquelle les questions exigeant une lecture ponctuelle sont distinguées de celles exigeant une lecture au cours du temps (« Pointwise and Across-time questions »), Confrey et Smith (1995) proposent de parler de deux regards sur la fonction, celui de la *correspondance* et de celui de la *covariation*. Pour ces chercheurs, on peut donc regarder le même objet (la fonction) sous deux angles différents. Pour illustrer ces deux approches, prenons l'exemple de la fonction g qui met en relation les variables x et y de manière à ce que y dépende de x :

Covariation : on regarde comment varie $g(x)$ lorsque x varie. La relation de dépendance entre les deux grandeurs fait que lorsque la première grandeur varie, la seconde réagit.

x	$y = g(x)$
x_1	$g(x_1)$
x_2	$g(x_2)$
x_3	$g(x_3)$

Correspondance : on regarde comment obtenir $g(x)$ à partir de x. La fonction étant une relation de dépendance entre deux grandeurs, on peut mettre en correspondance les valeurs de la première grandeur avec celles de la seconde.

Le regard par la *correspondance* est donc associé au lien entre chaque valeur de la grandeur indépendante et la valeur de la grandeur dépendante qui lui correspond. La généralisation de ce lien est particulièrement bien représentée par la règle de correspondance dans le registre symbolique. Le regard de la *covariation*, quant à lui, est associé au lien entre le changement de la grandeur indépendante et le changement de la grandeur qui lui correspond, il permet donc d'étudier les variations concomitantes de ces deux grandeurs. Le registre graphique permet de représenter ce lien de manière synthétique, ce que ne permet pas le registre symbolique.

1.2.4 Synthèse : vers une approche covariationnelle de la fonction pour favoriser le passage de la fonction à la dérivée

La revue de la littérature proposée précédemment éclaire les enjeux du passage de la notion de fonction à celle de dérivée. Plusieurs chercheurs considèrent que les notions de taux de variation, de limite, de variable et de fonction jouent un rôle important lors de l'apprentissage du calcul différentiel et intégral. Ainsi, certains résultats de précédentes recherches nous permettent de dégager les caractéristiques des conceptions de ces notions et des façons de développer ces conceptions pour favoriser la compréhension du calcul différentiel, et plus spécifiquement la compréhension de la notion de dérivée.

D'une part, les recherches en didactique des mathématiques sur le taux de variation, la variable et la fonction révèlent à la fois la richesse et la complexité de ces notions. Il est en effet possible d'en développer différentes conceptions, chacune ayant sa raison d'être au sein d'un ensemble de situations et donc pour certains usages. L'ensemble des considérations présentées précédemment nous permet de cerner les caractéristiques suivantes des conceptions de ces notions appropriées à l'usage qu'on en fait lors de l'étude du calcul différentiel:

- le **taux de variation** doit être vu comme un **rapport** entre les changements de deux quantités (Herbert et Pierce, 2012) ou encore comme une **mesure de la variation concomitante** de ces deux quantités (Weber et Dorko, 2014),
- la **variable** doit être vue comme une **quantité variable** dans des situations où on s'intéresse à étudier des **quantités covariantes** (Gray et al., 2009),

- la **fonction** doit être vue à travers le **regard de la covariation** afin d'en percevoir les **aspects covariants** (Carlson et al., 2002).

Nous constatons que l'ensemble de ces conceptions se rejoignent dans la mesure où elles nécessitent toutes **un regard sur les variations concomitantes de deux quantités ou grandeurs**.

D'autre part, les chercheurs nous informent sur les caractéristiques d'un travail sur ces notions favorisant la compréhension de la notion de dérivée.

À propos du taux de variation, de la limite et de la vitesse

Comme nous l'avons vu plus tôt, le travail approfondi sur le sens du taux de variation moyen apparait important avant que ne s'effectue le passage au taux de variation instantané (Orton, 1984). Ce passage exigeant le recours à la notion de limite, il s'avère aussi important de développer l'intuition de cette notion en lien avec une conception de l'infini potentiel, et donc du processus dynamique de rapprochement de la limite. Pour la construction de la notion de dérivée en une valeur de la variable indépendante, ce processus peut être observé lors d'un travail graphique permettant de voir ce qui se passe lorsque l'intervalle du domaine est de plus en plus petit (Kidron et Tall, 2015). Contextuellement, un questionnement approprié peut mener spontanément à la distinction des notions de vitesse moyenne et de vitesse instantanée et donner ainsi un sens et une utilité à la notion de dérivée (Gantois et Schneider, 2009). Il faut toutefois considérer le clivage entre ces deux notions causé par le rôle du temps (Schneider, 1992).

À propos de l'utilisation des registres de représentation

Dans l'enseignement, les divers registres de représentation disponibles pour travailler les notions de fonction et de dérivée ne sont pas également exploités. Il apparait que le registre symbolique (ici associé aux notations algébriques) ait tendance à être surutilisé alors que le registre graphique est sous-utilisé. Les chercheurs s'entendent pour dire qu'il faut viser un rééquilibre dans l'utilisation de ces registres (Berry et Nyman, 2003; Oehrtman et al., 2008). Le registre graphique offre la possibilité de développer l'intuition et de donner aux élèves une certaine emprise sur les notions de limite et de dérivée (Asiala et al., 1997; Kidron et Tall, 2015). De prime abord, cette intuition peut être exploitée pour construire ces notions même si par la suite elle doit être questionnée, complétée, adaptée afin d'éviter qu'elle ne devienne un obstacle à un travail plus abstrait. Un travail dans le registre graphique peut aussi permettre une articulation de différents points de vue (global, local et ponctuel) sur la fonction et la dérivée, articulation qui est indispensable en analyse et donc pour une étude avancée du calcul différentiel et intégral (Vanderbrouck, 2011).

À propos de la variable et de la covariation

La compréhension de la notion de dérivée nécessite une conception des variables fonctionnellement reliées comme quantités covariantes (Gray et al., 2009). Comme la notion de variable se définit dans l'enseignement et l'apprentissage à travers les différentes situations qui la mettent en jeu, les élèves doivent être amenés à étudier diverses situations fonctionnelles dans lesquelles on s'intéresse aux variations concomitantes de deux quantités ou grandeurs. Le regard covariationnel alors adopté sur la fonction permet d'étudier le changement de la grandeur dépendante entraîné par le changement de la grandeur indépendante. Cette étude repose sur l'observation des différences ou des accroissements (ou décroissements) concomitants des deux grandeurs.

Ces trois considérations viennent appuyer la pertinence d'un travail sur la fonction par un regard sur les variations concomitantes de deux grandeurs mis en évidence plus tôt. Elles peuvent donc être envisagées pour préciser en quoi pourrait consister ce type de travail :

- L'étude des variations concomitantes de deux grandeurs repose sur l'observation du changement et donc des accroissements (ou décroissements) concomitants des grandeurs. Le registre graphique permet cette observation à la fois au point de vue global (on peut décrire globalement comment se comporte la fonction) et au point de vue local (on peut regarder localement comment se comporte les accroissements).
- Cette observation du changement peut mener à la mise en rapport des accroissements concomitants définissant ainsi la notion de taux de variation moyen. Ce sens du taux de variation moyen doit être développé lors de l'étude de différentes familles de fonctions.

- La notion de taux de variation instantané, permettant de définir la dérivée, émerge lorsque les accroissements de la grandeur indépendante deviennent très petits. L'intuition de ce qui se passe lors du passage à la limite peut être exploitée, notamment, dans le contexte de la distinction entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée lors de l'observation de graphiques.

En conclusion, un travail sur la fonction par un regard covariationnel, c'est-à-dire par l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs, semble indiqué pour développer des conceptions du taux de variation, de la variable et de la fonction favorisant la compréhension de la notion de dérivée. Dans cette optique, les aspects covariants de la fonction semblent abordés à travers une étude des accroissements concomitants des deux grandeurs mises en relation dans une situation fonctionnelle permettant notamment d'articuler les observations globale et locale du comportement de la fonction, de développer une conception du taux de variation en tant que rapport entre des accroissements concomitants de deux grandeurs et de donner un sens au passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané.

Dans la mesure où nous avons mis en évidence l'importance, voire même la nécessité, d'un travail sur la covariation pour favoriser un passage harmonieux et signifiant de la fonction à la dérivée, il nous apparait crucial d'explorer ce type de travail; les recherches présentées précédemment fournissant effectivement très peu d'information à ce sujet. Afin de nous engager dans cette exploration dans le contexte de l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques scolaires, nous parlerons d'une **approche covariationnelle de la fonction** comme d'une manière d'aborder la notion de fonction au sein de l'étude des fonctions en algèbre, soit *avant* l'introduction à la notion de dérivée. Cette approche consiste en l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs, mises en relation par une fonction, par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs. À la lumière des conclusions émises plus tôt, nous postulons qu'une **approche covariationnelle de la fonction** contribue au développement de la compréhension de la notion de fonction et prépare le terrain pour une introduction signifiante de la notion de dérivée.

Par ailleurs, nous pensons qu'il est possible d'asseoir plus solidement les fondements d'une **approche covariationnelle de la fonction** en prenant en compte une autre perspective, celle d'une analyse historique et épistémologique du passage de la fonction à la dérivée.

1.3 Les enjeux historiques et épistémologiques du passage de la fonction à la dérivée

À la section précédente, nous avons dégagé l'importance d'un travail sur la covariation pour favoriser le passage de la fonction à la dérivée en prenant appui sur certains travaux de chercheurs en didactique des mathématiques. Nous suggérons à présent d'appuyer les observations de ces chercheurs en mettant en évidence les enjeux historiques et épistémologiques du passage de la fonction à la dérivée. Cette nouvelle perspective permettra, en outre, d'identifier le contexte dans lequel ce passage prend historiquement et épistémologiquement son sens. Dans un premier temps, les éléments historiques que nous présentons mettent de l'avant les origines de la fonction. Nous verrons que celle-ci se développe notamment à travers l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs et que, dans ce contexte, l'émergence des notions de fonction et de dérivée apparait comme une co-construction. Dans un second temps, certains éléments d'analyse épistémologique permettent d'identifier la covariation comme contribuant à la construction d'une notion primitive de fonction.

1.3.1 Une perspective historique sur le développement de la notion de fonction

Certains auteurs (Charbonneau, 1987a, 1987b; Monna, 1972; Youschkevitch, 1981) se sont intéressés particulièrement à l'apparition et l'évolution du concept de fonction à travers l'histoire. D'autres ont concentré leur étude à celle du concept de dérivée (Boyer, 1949; Collette, 1973; Grabiner, 1983). Peu importe la perspective adoptée, les évolutions respectives des concepts de fonction et de dérivée s'entremêlent puisque ce sont deux concepts fondamentalement liés. Nous abordons dans cette section, de manière chronologique, quelques idées présentées particulièrement par ces auteurs permettant d'extraire les fondements historiques d'une approche covariationnelle de la fonction.

1.3.1.1 Le monde grec (-500,400) : étude des relations entre quantités

À l'époque de l'Antiquité, les principales préoccupations scientifiques concernent l'astronomie et c'est dans ce contexte que Ptolémée, par exemple, s'est intéressé à la géométrie du cercle et a construit des tables de cordes correspondant finalement à des tables trigonométriques. Mettant en relation des nombres et des quantités, il amorce un travail qui semble mettre en jeu des fonctions. Toutefois, il n'y a dans ces tables aucune trace de généralisation, élément essentiel à un réel travail fonctionnel (Youschkevitch, 1981).

À la même époque, les géomètres grecs étudient les lieux géométriques en décrivant leurs propriétés verbalement ou à l'aide d'une algèbre-géométrique. De plus, les idées de changement et de quantité variable apparaissent dans la philosophie d'Aristote alors que celles de mouvement, de continuité et d'infini étaient à l'étude. Les mathématiques du changement et de la croissance ont ainsi émergé à l'époque où les Grecs débattaient de la distinction entre l'infini potentiel et l'infini actuel (Kidron et Tall, 2015).

Ainsi, d'une part, plusieurs éléments, que nous identifions aujourd'hui comme relatifs au concept de fonction (relation entre quantités, mouvement, étude de courbes), étaient présents dans les travaux des Grecs de l'Antiquité même si les notions générales de variable et de fonction étaient absentes (Youschkevitch, 1981). D'autre part, certaines notions à la base du calcul différentiel, telles l'infini et la limite, émergent de questionnements confrontant intuition, perception temporelle et raisonnement logique. Ces notions en construction dans l'action sont toutefois loin encore d'être formulées.

1.3.1.2 Le Moyen-âge : émergence d'une approche dynamique à travers l'étude du mouvement

L'obstacle de l'infini avait mené les Grecs à se méfier des raisonnements sur le mouvement. Il aura donc fallu attendre plusieurs siècles pour que, grâce aux « travaux des scientifiques arabes, et surtout de l'effet inhibiteur du temps, les Européens du Moyen-Âge et de la Renaissance surmontent cette peur » (Charbonneau, 1987a). Ils sont intrigués par le mouvement et la recherche d'une relation entre le temps et la position d'un mobile les poussent à aller au-delà de l'approche statique grecque.

C'est dans ce contexte que, parallèlement dans les universités d'Oxford et de Paris (XIII^e siècle), une notion plus générale de fonction se développe. L'étude du mouvement se précise, il n'est plus limité au mouvement uniforme comme précédemment, il devient local et quantitatif. L'étude du changement d'une qualité ou d'une forme (chaleur, lumière, couleur, densité, distance, vitesse etc.) selon une extension (quantité ou temps) amène un travail riche qui contribuera à la genèse des fonctions (Charbonneau, 1987a; Youschkevitch, 1981). Le travail d'Oresme (1323-1382) est un bon exemple de l'avancée en matière de représentation, on sent qu'il chemine vers ce qui sera bientôt une fonction à travers une représentation quasi graphique du mouvement (voir Passaro, 2007 et René de Cotret, 1985 à ce sujet).

À cette époque, le niveau d'abstraction et de généralisation est élevé, mais les représentations utilisées limitent l'avancement des connaissances. Par exemple, elles conduisent les mathématiciens à considérer l'effet global de changements sans leur permettre d'étudier l'évolution à chaque instant de ces changements. Les mathématiciens de l'époque ne disposent pas encore d'un langage leur permettant de gérer le haut niveau d'abstraction des objets mathématiques qu'ils manipulent.

1.3.1.3 Le XVII^e siècle : mise en forme de la fonction et du calcul infinitésimal

C'est à la toute fin du XVI^e siècle que le symbolisme devient vraiment performant grâce à l'approche quasi axiomatique de Viète (1540-1603). Ce nouveau mode de représentation révolutionne les mathématiques car il permet de gérer rapidement et efficacement l'abstraction. Il permet notamment de regrouper sous un seul symbole un ensemble d'intensités pour en faire une quantité variable. À cette même époque, Fermat (≈1605-1665) et Descartes (1596-1650) étudient le mouvement de manière analytique. Descartes délaisse la vision statique des Grecs pour une vision plus dynamique du lien fonctionnel comme l'illustre cet extrait de sa *Géométrie* (1637) :

> « Mesme prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers poins tels que celuy qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée. » (cité par Charbonneau, 1987a, p.9)

C'est alors la première fois que « l'idée d'une équation en x et y est un moyen pour introduire une dépendance entre des quantités variables de manière à permettre le calcul des valeurs de l'une d'elles correspondant aux valeurs données de l'autre » (Youschkevitch, 1981, p.25). Le mot « fonction » apparaît pour la première fois en 1673 dans les travaux de Leibniz.

La mise en forme du calcul différentiel et intégral prend sa source dans les travaux de Newton (1643 – 1727) en Angleterre et de Leibniz (1642 – 1716) en Europe continentale. « Or, par la nature des problèmes qui l'ont fait naître, ce calcul repose sur une vision dynamique de la fonction, vision qui déjà faisait son chemin à l'époque de Descartes. » (Charbonneau, 1987a). La notion de fonction se précise alors dans le cadre de la résolution d'équations différentielles et aux dérivées partielles. Comme le note Dufour (2011), les visions de la dérivée de Newton et de Leibniz sont quelque peu différentes. Newton, dans un contexte physique, décrit la dérivée comme une fluxion, un taux de flux, ou de changement, sans toutefois préciser clairement le sens du terme fluxion. Il associe communément la dérivée à la vitesse. Quant à Leibniz, il décrit la dérivée comme un ratio de différences d'infiniment petits, un quotient différentiel.

C'est dans les avancées de cette époque que nous percevons particulièrement l'interdépendance des conceptualisations de la fonction et de la dérivée.

1.3.1.4 Le XVIII^e siècle : introduction à l'analyse infinitésimale d'Euler

En 1748, le célèbre traité d'Euler *Introduction in Analysin Infinitorum* marque le début du calcul différentiel et intégral tel que nous le connaissons aujourd'hui (Charbonneau, 1987b). La fonction devient explicitement un concept clé du calcul différentiel et intégral. En 1755, il propose la définition suivante de la fonction :

> « Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x. » (cité par Youschkevitch, 1981, p.49)

Cette définition de la fonction par l'intermédiaire du changement concomitant de deux quantités est considérée aujourd'hui comme l'une des innovations du travail d'Euler (Stölting, 2008). Les aspects de dépendance et de variation particulièrement mis de l'avant offrent un nouveau regard sur la fonction (Fikrat, 1994; René de Cotret, 1988).

Pour Chorlay (2007) qui suggère un regard sur l'histoire de l'*analyse* à travers la multiplicité des points de vue (global, local, infinitésimal et ponctuel), la notion primitive chez Euler est la grandeur, dont il existe deux sortes, les grandeurs constantes et les grandeurs variables. Il précise :

> « Dans ce cadre, les fonctions s'invitent lorsque l'on considère plusieurs grandeurs, disons deux. Deux grandeurs variables sont soit indépendantes (et l'histoire s'arrête là), soit liées : la situation fondamentale est $f(x,y)=0$, où x et y sont des grandeurs variables et f une fonction de ces deux variables; dans cette situation, on peut considérer que x est la variable libre et y la variable liée, autrement dit considérer y comme fonction de x. » (Chorlay, 2007, p.219)

puis plus loin :

> « Étudier la dépendance de deux grandeurs variables sous l'angle fonctionnel, c'est étudier en quoi leurs *variations* sont dépendantes, c'est mener l'étude des co-variations. On retrouve ainsi deux voies d'entrée fondamentale dans le monde des fonctions : (1) passer de la relation $f(x,y)=0$ entre les grandeurs, à la relation $f'xdx+f'ydy=0$ liant de nouvelles grandeurs variables, les accroissements de dx et dy; (2) étudier, dans le plan complexe, le chemin parcouru par y connaissant le chemin parcouru par x (problème de la monodromie)[6].» (p.220)

Nous retenons de cela, d'une part, qu'étudier la dépendance de deux grandeurs sous l'angle fonctionnel, c'est mener l'étude de la covariation de ces deux grandeurs, et, d'autre part, que l'entrée dans les fonctions peut se faire lorsqu'on passe de la relation entre les grandeurs à la relation entre les accroissements de ces grandeurs. Or, ce dernier passage correspond à celui de la fonction à la dérivée. Le fait qu'Euler lui-même en soit venu à préciser ce qu'est une fonction lors de l'étude du calcul différentiel ne nous semble effectivement pas anodin.

1.3.1.5 XIX^{e} et XX^{e} siècles : quelques remarques

Le travail sur le vocabulaire et les définitions caractérise la période du XIX^{e} siècle en ce qui concerne les fonctions. Aussi, le symbolisme permet une avancée significative dans les mathématiques en général et, par conséquent, un travail plus rigoureux et systématique sur les fonctions, surtout dans le domaine de l'*analyse*. Ceci est d'autant plus vrai que le travail sur la fonction se fait de plus en plus dans le contexte de la résolution d'équations différentielles ou

[6] Il faut noter que dans cette citation, seule la première voie concerne nos préoccupations. La seconde voie associée au problème de la monodromie, correspondant à l'étude du comportement de certains objets mathématiques autour d'une singularité, se situe dans un cadre complètement différent de celui que nous avons choisi d'explorer dans cette thèse.

d'équations aux dérivées partielles, qui sont en fait une symbolisation précise de la nature d'une covariation. Résoudre une telle équation consiste en effet à trouver une fonction dont le comportement covariationnel correspond à celui décrit par l'équation.

Au XXe siècle, la définition de la fonction poursuit son évolution. Comme le note René de Cotret (1988), l'évolution de la fonction a mené à des définitions de plus en plus abstraites, épurées et formelles comme l'illustre cette définition ensembliste proposée par Bourbaki en 1939 :

> « Soient E et *F*, deux ensembles distincts ou non, une relation entre une variable x de E et une variable y de *F* est dite relation fonctionnelle en y ou relation fonctionnelle de E vers *F*, si pour tout x appartenant à E, il existe un seul y appartenant à *F*, qui soit dans la relation considérée avec x. On donne le nom de fonction à l'opération qui associe ainsi à tout élément x de E, l'élément y dans *F* qui se trouve dans la relation donnée avec x; on dit que y est la valeur de la fonction pour l'élément x, et que la fonction est déterminée par la relation fonctionnelle considérée » [7]. (cité par Kleiner, 1989, p. 299).

Bien que la pertinence d'utiliser ce type de définition dans l'enseignement ait été remise en question à diverses époques (Comin, 2005; Coppé, Dorier et Yavuz, 2007; René de Cotret, 1988; Sierpinska, 1992), on peut facilement constater que les définitions actuellement utilisées mettent toujours l'accent sur les notions d'ensemble et de correspondance (voir Passaro, 2007).

Ces avancées, bien que cruciales pour l'évolution des mathématiques, déconnectent la fonction de ses origines épistémologiques (Biehler, 2005; Comin, 2005; Coppé et al., 2007; Stölting, 2008). D'ailleurs, la rupture engendrée par l'utilisation des définitions modernes dans l'enseignement est considérée à l'origine de plusieurs difficultés rencontrées par les élèves avec la compréhension de la notion de fonction (René de Cotret, 1988; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992; Stölting, 2008).

[7] Dans l'article de Kleiner apparait la traduction en anglais de cette définition : "Let E and *F* be two sets, which may or may not be distinct. A relation between a variable element x of E and a variable element y of *F* is called a functional relation in y if, for all x ϵ E, there exists a unique y ϵ *F* which is in the given relation with x. We give the name of function to the operation which in this way associates with every element x ϵ E the element j ϵ *F* which is in the given relation with x; y is said to be the value of the function at the element x, and the function is said to be determined by the given functional relation. Two equivalent functional relations determine the same function. »

1.3.2 Reconstruction d’un sens à la notion de fonction en lien avec l’émergence de la notion de dérivée

Alors que dans une analyse historique on présente les idées comme des faits en vue d’en décrire le mieux possible le parcours diachronique, dans une analyse épistémologique on prend les faits comme des idées et on tente de les insérer dans un système de pensée (Sierpinska, 1992, en référence à Bachelard). Certains auteurs ont adopté une perspective épistémologique pour analyser le concept de fonction (Piaget, Grize, Szeminska et Bang, 1968; Sierpinska, 1992). Comme nous n’avons pas pu repérer dans ces travaux les enjeux épistémologiques explicites sur le passage de la fonction à la dérivée, nous présentons quelques éléments qui nous semblent éclairer ces enjeux.

1.3.2.1 Quelques enjeux épistémologiques de la construction de la notion fonction

Dans les travaux de Piaget et al. (1968) sur l’investigation de la compréhension de la notion de fonction par des enfants de 7 à 13 ans, une certaine analyse de l’idée de covariation, associée à la variation d’une grandeur entrainée par la variation d’une autre grandeur, apparait dans l’optique d’identifier les enjeux de la construction de la notion de fonction. Premièrement, les auteurs indiquent que pour saisir la variation de la grandeur sur laquelle on s’appuie, il est nécessaire de saisir les relations d’ordre afin de déterminer le sens de la variation (les valeurs de la grandeur indépendante augmentent). Puis, le sens de la variation d’une autre grandeur entraînée par cette première variation est aussi à déterminer (les valeurs de la grandeur dépendante augmentent ou diminuent). Deuxièmement, Piaget et al. (1968) considèrent que des relations causales peuvent aider à percevoir la covariation de deux grandeurs. La notion de causalité est effectivement considérée comme jouant un rôle important dans le développement scientifique en général (Sierpinska, 1992). Ainsi, même si les élèves ont tendance, lors d’un travail avancé sur les fonctions, à confondre la fonction et la relation causale, l’évolution historique montre que la question de la cause a été une étape importante dans le développement du concept de fonction et on pourrait émettre l’hypothèse qu’elle peut aujourd’hui jouer un rôle dans l’apprentissage de ce concept par les élèves (Vollrath, 1986). Troisièmement, Piaget et al. (1968) dégagent l’importance d’établir la constance du phénomène pour construire la loi de variation : « Pour définir cette constance, la loi fonctionnelle implique la recherche de la loi de progression pour quantifier la variation » (p.162). Cette quantification exige, selon eux, une mise en rapport des grandeurs, laquelle permet de saisir la continuité de la variation. La conceptualisation de cette idée de continuité de la variation nous apparait cohérente avec la définition de la continuité par Euler :

> « continuité signifie invariabilité, immuabilité de la loi de l'équation déterminant la fonction sur tout le domaine des valeurs de la variable, alors que la discontinuité d'une fonction signifie un changement de la loi analytique, l'existence de lois différentes sur deux intervalles ou plus de son domaine » (Youschkevitch, 1981, page 42).

Mais, bien que cette définition ait permis à Euler de fonctionner à l'intérieur du système qu'il avait mis en place, elle a été remise en question, entre autres, par Bolzano et Cauchy. Ce dernier aborde effectivement la continuité de façon locale, ou même ponctuelle, alors qu'Euler en avait une perception globale. C'est Cauchy qui définira le premier la continuité en un point : si en un point x, la valeur de la différence $|f(x+\alpha)-f(x)|$ décroît indéfiniment avec celle de α, alors la fonction est continue en x (Charbonneau, 1987b). Il semble donc que la construction de la loi de variation s'accompagne d'une idée intuitive et globale de la continuité en termes d'immuabilité de cette loi. Toutefois, dans une perspective locale ou ponctuelle d'analyse de cette loi, cette idée doit être revue et la continuité redéfinie.
En résumé, l'idée de covariation au sein de la construction de la notion de fonction apparait comme un élément important émergeant de l'analyse épistémologique suggérée par Piaget et al. (1968). Trois enjeux épistémologiques sont identifiés : 1) pour percevoir la covariation de deux grandeurs il faut être en mesure de déterminer le sens de la variation de chacune des deux grandeurs, 2) de prime abord, l'étude des relations causales favorise la perception de la covariation et, 3) il existe différentes conceptions de la continuité et il semble que la perception spontanée de la continuité d'une variation soit davantage globale que locale.

Par ailleurs, pour Sierpinska (1992), qui s'intéresse notamment aux obstacles épistémologiques[8], l'un des obstacles à la compréhension du concept de fonction est l'omniprésence du temps qui porte à penser que toute fonction est une fonction du temps,

[8] Sierpinska s'intéresse aux changements importants ayant permis historiquement de passer de savoirs anciens à des savoirs nouveaux. Elle indique qu'on peut s'intéresser à ces changements en comparant la nouvelle manière de penser à l'ancienne, on prend alors conscience des choses qui nous avaient préalablement empêchés d'y accéder. Ces choses sont ce que l'auteur appelle les obstacles épistémologiques. Sierpinska précise que, dans la mesure où un obstacle est répandu (il est rencontré par la plupart des gens à un moment donné ou dans une culture donnée), il s'agit d'un obstacle épistémologique. Pour elle, un obstacle épistémologique ne peut être évité et son rôle dans la réflexion est important puisque *comprendre c'est dépasser l'obstacle épistémologique*.

c’est-à-dire que la variable indépendante est forcément le temps. Il est possible que cette façon de penser découle du contexte d’étude du mouvement ayant permis l’émergence d’une notion générale de fonction au Moyen-Âge. Ces considérations portent à croire que, d’un côté, les fonctions qui dépendent du temps sont essentielles au développement du sens de la fonction et de la variable (Biehler, 2005), l’idée de variation étant alors beaucoup plus facilement disponible (Krysinska et Schneider, 2010). La référence au temps peut même constituer un marchepied dans la perception de la variation de grandeurs autres que le temps dans la mesure où « une imagerie cinématique des situations qu’elle soit ou non suggérée par le professeur est un facteur didactique pouvant jouer favorablement sur l’émergence du regard fonctionnel » (Krysinska et Schneider, 2010, page 47). D’un autre côté, c’est de ce contexte d’étude de fonctions du temps dans le cadre de phénomènes de mouvement qu’est née l’appellation « taux de variation instantané ». Or, cette appellation qui prend tout son sens dans ce contexte devient abusive et induit une perte de sens quand on n’a plus une fonction du temps. On a ainsi l’impression que le taux de variation en une valeur précise du domaine de la fonction n’a de sens que si la variable indépendante est le temps.

Un autre obstacle épistémologique identifié par Sierpinska (1992) concerne la distinction entre la variable indépendante et la variable dépendante. Les élèves auraient tendance à penser que déterminer l’ordre des variables est inutile. Historiquement, l’importance de distinguer la variable indépendante de la variable dépendante est effectivement apparue tardivement (Sierpinska, 1992). Selon Freudenthal, cité par Haguel et Lemoine (1993), pour Newton, les grandeurs varient dans un lien de dépendance, mais il les imagine toutes dépendantes d’une seule grandeur qui serait analogue au temps. Freudenthal constate en fait que l’écriture utilisée par Newton fait jouer un rôle symétrique aux quantités variables, il en déduit « qu’il n’y a pas de distinction entre variable indépendante et variable dépendante à ce stade et que ce n’est que dans le travail sur les dérivées secondes qu’on sera obligé d’identifier la variable indépendante » (Haguel et Lemoine, 1993, p.44).

Nous retenons, en premier lieu, qu’en ce qui concerne la construction des notions de fonction et de dérivée, le temps apparaît à la fois un allié et un obstacle. Nous pensons qu’il est possible d’exploiter la richesse de la variation dans le temps, notamment pour donner un sens au taux de variation instantanée via la vitesse instantanée, tout en amenant les élèves à prendre conscience du rôle du temps. Si le temps est vu comme une grandeur parmi d’autres sur laquelle on s'appuie pour observer le comportement d'une autre grandeur alors le raisonnement peut être construit autour des grandeurs en général et non pas d'une grandeur spécifique. En second lieu, il semble que, de prime abord, la perception des variations concomitantes de deux grandeurs n'implique pas forcément la distinction d'une grandeur indépendante et d'une grandeur dépendante.

1.3.2.2 Contexte épistémologique du passage de la fonction à la dérivée

L'un des objectifs de la didactique est la reconstruction des mathématiques dans le but de leur donner un sens (Biehler, 2005); ce construit permettant notamment de mettre en place une logique appuyant l'articulation des concepts et processus dans l'enseignement. Il existe évidemment plusieurs reconstructions possibles. Le parcours des mathématiciens au cours de l'histoire s'avère toutefois une source d'information privilégiée depuis la théorie de l'épistémologie génétique de Piaget. Même si la communauté en didactique des mathématiques s'entend en général pour dire que l'apprentissage des mathématiques ne suit pas les étapes de la construction historique de ces mathématiques, l'idée de prendre appui sur l'histoire pour reconstruire le sens du concept de fonction continue d'inspirer beaucoup de chercheurs (Biehler, 2005; Cabana, 1996; René de Cotret, 1987, 1988). En nous appuyant sur les faits historiques sciemment choisis et présentés précédemment, nous proposons une reconstruction de l'émergence et de l'évolution des notions de fonction et de dérivée, laquelle complète les éléments d'analyse épistémologiques rapportés précédemment.

Aux premières origines de la fonction, chez les Grecs, on retrouve notamment les débats philosophiques sur le mouvement et l'infini qui donnent lieu à la confrontation entre l'intuition et la logique mathématique. L'omniprésence du temps et le regard statique sur le mouvement agissent alors comme obstacles, et c'est du dépassement de ces obstacles plusieurs siècles plus tard, au Moyen Âge, qu'émergera une analyse plus fine du mouvement par l'intermédiaire de l'étude de la relation entre la position et le temps. La tendance reste tout de même à considérer l'effet global du changement. Cette analyse de la variation est alors rendue possible grâce au regard dynamique adopté sur la fonction. **Pour nous, ce regard dynamique sur la relation entre une distance parcourue par un objet ou une personne en mouvement au fur et à mesure que le temps s'écoule est lié à une approche covariationnelle de la fonction en tant que manière d'aborder la fonction pour permettre l'étude approfondie**

des variations concomitantes de deux grandeurs. En effet, c'est dans ce contexte qu'est apparu le besoin d'aborder la fonction sous l'angle de la variation et donc de percevoir la fonction comme une relation entre des quantités covariantes. Nous notons aussi que cette première rencontre avec l'étude du mouvement a contribué à l'émergence de la représentation graphique.

Par la suite, aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles, la notion de fonction prend particulièrement son sens à l'intérieur de l'étude du calcul différentiel et intégral. C'est dans ce contexte que le besoin de définir l'objet fonction apparaît. Euler définit alors la fonction, entre autres, comme une relation entre des quantités covariantes : le changement d'une quantité dépend du changement d'une autre quantité. On pourrait en déduire que c'est de l'immersion dans le questionnement du calcul différentiel que naît le besoin d'identifier explicitement le concept de fonction. Le développement du calcul différentiel et intégral tel qu'on le connaît aujourd'hui s'effectue alors avec un regard dynamique sur des relations fonctionnelles dans le but de trouver des réponses à des questions. Par exemple, à partir de la vitesse d'un objet au cours du temps, on cherche à déterminer sa position à un instant précis. **Selon nous, ces éléments montrent d'une part, que pour aborder le calcul différentiel encore faut-il être en mesure de voir la fonction sous l'angle des variations concomitantes de deux grandeurs et, d'autre part, que pour analyser les variations concomitantes de deux grandeurs, encore faut-il être en mesure de s'immerger dans un travail sur la différenciation. Nous mettrons en évidence cette double dépendance au Chapitre II par l'intermédiaire d'un exemple.**

Les avancées importantes, rendues notamment possibles grâce à un symbolisme effectif, synthétique et performant aux XIX^{e} et XX^{e} siècles, permettent d'enrichir les notions de fonction et de dérivée. Elles rendent compte de la puissance de ces deux notions autant en mathématiques que dans d'autres domaines. Toutefois, les sens premiers qu'ont pris ces notions au sein de l'étude du changement ayant donné lieu à leur co-émergence, ont été perdus. Le travail exclusivement symbolique puis la structuration des mathématiques modernes ont changé le regard sur les objets fonction et dérivée. L'aspect de correspondance de la fonction est alors apparu comme prépondérant, alors que la dérivée a été réduite à un calcul. En fait, à l'intérieur de la nouvelle structure des mathématiques, ces concepts apparaissent triviaux. La méprise fut de penser que ce qui est trivial pour un mathématicien le serait aussi pour un élève, d'où l'échec de l'enseignement des mathématiques modernes. **Nous**

pensons, comme beaucoup d'autres chercheurs d'ailleurs (Biehler, 2005; Chorlay, 2007; Sfard, 1992; Sierpinska, 1992 etc.)**, que les avancées du XIX^{e} et du XX^{e} siècles ne sont accessibles aux étudiants qu'au niveau des études supérieures lors de l'étude de la notion de fonction dans un cadre plus large que celui des fonctions réelles. L'enseignement de la fonction et de la dérivée au niveau du secondaire et du collégial gagnerait à s'inspirer des travaux des mathématiciens des XVII^{e} et XVIII^{e} siècles puisque ce sont eux qui ont conduits à une articulation de ces deux notions dans le cadre de l'étude de fonctions réelles.**

1.3.3 Synthèse

Les perspectives historique et épistémologique de l'évolution du concept de fonction et de l'émergence du concept de dérivée nous amènent à établir que le passage de la fonction à la dérivée répond à un questionnement sur le changement et, plus particulièrement, celui qui s'opère lors d'un phénomène de mouvement. Dans ce contexte d'étude de phénomènes dynamiques, la dépendance entre deux grandeurs est établie et les variations concomitantes de ces deux grandeurs sont étudiées, mais le regard est porté sur le changement, c'est-à-dire sur le comportement des accroissements concomitants des deux grandeurs. Ainsi, d'une part, une conception de la fonction en termes de relation entre les variations concomitantes de deux grandeurs apparaît à la base de la construction de la notion de dérivée et, d'autre part, l'étude approfondie de ces variations concomitantes consiste en une analyse des accroissements concomitants.

Par conséquent, l'idée de covariation, identifiée par Piaget et al. (1968) comme un élément de la conceptualisation d'une notion primitive de fonction, est aussi à l'origine de l'émergence de la notion de dérivée. L'étude des variations concomitantes de deux grandeurs par l'étude de relations causales au sein desquelles les variations continues de chaque grandeur sont mises en relation apparait donc comme un contexte propice au développement d'une conception de la fonction favorisant le passage à la dérivée. Ce contexte est aussi associé à un regard dynamique porté sur une relation fonctionnelle pouvant déboucher sur une représentation graphique. Historiquement, une telle représentation a émergé de l'étude de fonctions du temps particulièrement dans un contexte d'étude du mouvement. Le rôle du temps est identifié didactiquement (Krysinska et Schneider, 2010) et épistémologiquement (Sierpinska, 1992) comme jouant un rôle important dans la construction des notions de fonction et de dérivée. Le passage de la fonction à la dérivée exige toutefois plus que la simple perception des variations concomitantes de deux grandeurs puisque l'étude du changement requiert une observation des accroissements concomitants de ces deux grandeurs. Cette dernière observation contribue donc à approfondir la conceptualisation de la fonction.

Les éléments qui se sont dégagés de notre analyse historique et épistémologique de la co-émergence des notions de fonction et de dérivée appuient les observations de chercheurs en didactique des mathématiques. D'une manière générale, le travail sur l'idée de covariation apparait essentiel au développement d'une conception de la fonction favorisant le passage à la notion de dérivée. Encore une fois, il semble qu'une **approche covariationnelle de la fonction** qui s'appuierait sur l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs via l'analyse des accroissements concomitants de ces deux grandeurs pourrait contribuer au développement d'une compréhension approfondie de la notion de fonction supportant la construction de la notion de dérivée.

1.4 L'objectif de la recherche

Dans ce premier chapitre, la mise en évidence d'enjeux didactiques du passage de la fonction à la dérivée dans l'apprentissage des mathématiques scolaires nous a permis de révéler l'importance d'un travail sur l'idée de *covariation* mise de l'avant par plusieurs chercheurs pour favoriser l'apprentissage du calcul différentiel. Nous avons alors suggéré une définition de travail d'une approche covariationnelle de la fonction comme manière de travailler la fonction par le regard de la *covariation* dès le secondaire. Par ailleurs, nous avons montré que certains éléments du développement historique et épistémologique des concepts de fonction et de dérivée permettaient de renforcer la pertinence de ce type de travail pour donner un sens à ces concepts et à leur articulation. Il semble donc qu'une approche covariationnelle de la fonction pourrait contribuer à une transition harmonieuse et riche de la notion de fonction à celle de dérivée dans l'apprentissage. Dans la mesure où aucune recherche, à notre connaissance, n'a proposé jusqu'à présent de décrire une telle approche pour l'apprentissage et l'enseignement de la fonction au secondaire, l'objectif général de la présente recherche est d'explorer les caractéristiques d'une **approche covariationnelle de la fonction** au secondaire, dans l'optique de favoriser le passage de la fonction à la dérivée.

CHAPITRE II : CONTEXTE THÉORIQUE

Au chapitre précédent, nous avons proposé une analyse de quelques enjeux didactique, historique et épistémologique du passage de la fonction à la dérivée. Cela nous a mené à mettre en évidence l'importance du travail sur la covariation au sein de l'étude des fonctions en algèbre avant l'introduction au calcul différentiel. Afin d'examiner ce travail sur la covariation dans l'optique de favoriser un continuum dans l'enseignement et l'apprentissage des notions de fonction et dérivée à l'école, nous avons défini une **approche covariationnelle de la fonction** comme consistant globalement en une étude des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire de l'analyse des accroissements concomitants de ces deux grandeurs. Cette approche, investiguée dans la présente thèse, est donc *une* construction didactique en réponse à un besoin d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques scolaires dans le contexte des curricula en vigueur dans plusieurs pays.

L'objectif général de la recherche est de décrire plus précisément en quoi pourrait consister une **approche covariationnelle de la fonction**. Pour ce faire, en premier lieu, nous décrivons différentes recherches en didactique des mathématiques qui abordent l'idée de covariation, dans le cadre de l'étude de situations fonctionnelles. Nous tentons ainsi de dégager en quoi peut consister un travail sur la covariation relativement au contexte dans lequel il est exploité. Ces considérations nous amènent à définir l'idée de covariation en général et à préciser celle d'approche covariationnelle de la fonction. Il nous semble ainsi nécessaire de tenir compte des situations auxquelles cette approche est associée. En second lieu, nous présentons le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel proposé par Carlson lequel constitue pour nous une source d'information importante pour déterminer les caractéristiques d'un travail sur la covariation visant l'articulation des notions de fonction et de dérivée. Ainsi, le développement du raisonnement covariationnel nous apparait comme une entrée intéressante dans l'exploration d'une approche covariationnelle de la fonction. En dernier lieu, nous proposons d'adapter le cadre de Carlson dans la perspective qui nous intéresse, soit l'analyse du raisonnement covariationnel déployé dans le cadre de tâches d'étude de phénomènes dynamiques avant l'apprentissage du calcul différentiel. Cette adaptation nous permet de formuler des questions spécifiques visant l'analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel chez des élèves de 15 à 18 ans.

2.1 L'idée de covariation et les contextes de son exploitation dans la recherche en didactique des mathématiques

Force est de constater que l'idée de covariation apparait de plus en plus dans la recherche en didactique des mathématiques, mais quelques recherches clés semblent à l'origine de son apparition. Il nous semble important de résumer ces recherches qui sont prises pour appui par la plupart des auteurs qui font référence à l'idée de covariation et qui permettent de cerner cette idée que nous identifions à la base de l'approche covariationnelle de la fonction. Dans cette section nous proposons donc de mettre en exergue les usages de l'idée de covariation exploitée dans l'étude de situations fonctionnelles à divers niveaux scolaires en présentant, pour chaque étude, les manières de définir ou de décrire la covariation, les contextes dans lesquels elle est mise en jeu, ainsi que les habiletés des élèves à la percevoir, la représenter et l'utiliser. Il est à noter que l'étude de Monk (1992) sera présentée, même si elle n'aborde pas explicitement l'idée de covariation, car elle a joué un rôle important dans l'émergence de cette idée comme approche de la fonction. Nous indiquerons d'ailleurs que cette étude est à l'origine des réflexions qui ont donné naissance au cadre de développement du raisonnement covariationnel de Carlson qui constitue le principal appui théorique de la présente recherche.

2.1.1 La perception des variations concomitantes de deux grandeurs chez les enfants

Piaget et al. (1968), qui adoptent une perspective épistémologique et psychologique, proposent une analyse conceptuelle de la fonction. Ainsi, ils mettent de l'avant, entre autres, l'importance et le rôle de *la covariation* lors de l'étude de la relation fonctionnelle entre l'augmentation et la diminution des deux côtés d'un rectangle de périmètre constant. Ils indiquent que « pour comprendre que l'augmentation de la largeur est la conséquence de la diminution de la hauteur, il faut au moins lier deux états de transformations successifs pour déterminer la covariation » (p.126). À la suite d'une expérimentation avec des enfants de 7 à 13 ans, ayant pour but d'évaluer leur capacité à saisir la relation d'implication logique suivante : « la variation de l'une des grandeurs (la hauteur) entraîne celle de l'autre (la largeur) » (p.126) associée à la covariation, ils cernent différents types de conduite. Par exemple, ils indiquent que « pour comprendre que l'augmentation de la largeur est la conséquence de la diminution de la hauteur, il faut tout au moins lier deux états de transformations successifs pour déterminer la covariation ». Néanmoins, ils constatent que lorsque les enfants sont capables de faire ce lien, ils ne le font que localement et ne découvrent pas le système qui régit n'importe quelle transformation. Autrement dit, ils ne généralisent pas la relation de covariation. De plus, les auteurs établissent des stades de développement de la compréhension d'une relation fonctionnelle selon l'âge des enfants. Ils notent, d'abord, que vers 7-8 ans, les enfants ont de la difficulté à mettre en relation les variables, la variable étant pour les auteurs une grandeur qui « peut prendre successivement des valeurs ordonnées dans une progression définie » (p.157). Ensuite, vers 8-9 ans, les enfants gèrent les transformations une à une mais sans pouvoir faire de prédiction, alors que vers 10-11 ans, ils saisissent mieux la force du lien fonctionnel en comprenant que la variation d'une grandeur est la conséquence de la variation d'une autre grandeur. Finalement, l'expression d'une loi de progression ne se fait que vers 11-12 ans.

Ainsi, pour Piaget et ses collègues, la perception des variations concomitantes de deux grandeurs, dans le contexte de l'étude du lien entre le périmètre d'un rectangle et la mesure d'un de ses côtés, s'opère chez les enfants à partir de 10 ans. La généralisation de la concomitance des variations ne s'avère toutefois possible qu'à partir de 11 ans. Évidemment, il est difficile de généraliser ces observations à tous les enfants dans le contexte scolaire actuel. Cette étude peut toutefois servir de référence pour émettre des hypothèses quant au moment opportun d'initier les élèves à l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs à la base d'une approche covariationnelle de la fonction.

2.1.2 La représentation graphique d'une situation au début du secondaire

Pour Saldanha et Thompson (1998), *la notion de covariation* est associée à l'habileté à soutenir mentalement l'image de deux grandeurs (ou de deux valeurs) simultanément. Ils se questionnent ainsi sur les opérations conceptuelles impliquées lorsque les élèves raisonnent à propos de la covariation continue de deux quantités. Ils observent un élève de 8ème année (2ème secondaire) lors de la résolution d'un problème dans lequel il doit mettre en lien les variations de plusieurs grandeurs (une voiture se déplace le long d'une route et on regarde les distances qui la séparent de deux villes A et B, voir Figure 3). Le support fourni est une simulation sur ordinateur permettant à l'élève de déplacer la voiture et de voir simultanément les distances varier. Les distances entre la voiture et les deux villes sont reportées, l'une à la verticale et l'autre à l'horizontale. Ainsi, pour les auteurs, l'élève est amené à envisager la représentation graphique comme moyen de représenter la covariation des deux distances.

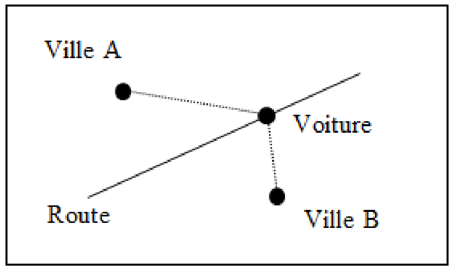


Figure 3 Schéma de la situation proposée à l'élève par Saldanha et Thompson (1998)

Les résultats de l'analyse de la démarche de l'élève ont fait, entre autres, ressortir la difficulté à envisager le graphique comme un continuum d'états de deux quantités covariantes puisque l'élève a eu tendance à ne faire varier qu'une grandeur à la fois.

Dans une précédente recherche, nous avons observé cette même tendance à considérer la variation d'une seule grandeur à la fois (Passaro, 2007). Dans le cadre de l'expérimentation d'une séquence d'enseignement visant l'introduction de la représentation graphique en deuxième année du premier cycle du secondaire, nous avons initié les élèves à l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs. En fait, comme l'enseignement du graphique comme moyen de représenter globalement une situation est prescrit à ce niveau par le Ministère de l'éducation, du loisir et du sport (MELS, 2003), nous avons considéré ce moment propice à l'amorce du travail sur la covariation. En effet, comme l'indique Carlson et ses collègues (Carlson et al., 2002, 2001; Oehrtman et al., 2008), le travail de la fonction en terme de covariation favorise le passage de la situation au graphique et vice-versa. Ainsi, nous avons proposé une séquence d'enseignement basée sur l'exploitation d'une situation fonctionnelle dans le but du passage à la représentation graphique. Le contexte initial de la situation utilisée était celui du randonneur[9] (voir Figure 4).

Un randonneur entreprend une longue randonnée en forêt. Il suit une **piste fermée** qui lui permet donc de revenir à son point de départ à la fin de la randonnée. En suivant cette piste, il ne repasse **jamais au même endroit** de la forêt. Il ne fait qu'un seul tour de piste. Un **poste de secours** est situé **à l'intérieur de la région délimitée par la piste**. Un grand mât avec un drapeau permet au randonneur de repérer l'emplacement du poste de secours quel que soit l'endroit où il se trouve sur la piste.

Figure 4 Situation du randonneur

Les tâches demandaient aux élèves de décrire la variation de la distance à vol d'oiseau entre le randonneur et le poste de secours lorsque la distance parcourue par le randonneur augmente et de créer une représentation visuelle permettant de montrer cette variation. L'ensemble de travail suggéré était donc de nature qualitative.

L'analyse des productions des élèves, soient des explications écrites et des représentations visuelles, nous a permis de faire ressortir plusieurs difficultés émergeant dans le cadre de l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs. D'abord, les élèves ont eu tendance à ne considérer la variation que d'une grandeur à la fois. Ensuite, ils ont abordé le phénomène de manière ponctuelle, c'est-à-dire en regardant des valeurs successives que prenaient les grandeurs sans se questionner sur ce qui se passait entre deux valeurs. Finalement, ils ont rencontré des difficultés à représenter visuellement et à expliquer en mots l'idée des variations concomitantes de deux grandeurs. Nous pouvons dire que cette recherche a permis d'évaluer la capacité des élèves du début du secondaire à comprendre la notion de fonction sous l'angle de l'existence de variations concomitantes de deux grandeurs et à représenter graphiquement ces dernières. Les élèves se sont donc limités à une étude globale de comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente.

Hitt et ses collègues (Hitt, Gonzales-Martin et Morasse, 2008; Hitt et Morasse, 2009) ont donné suite à la précédente recherche en s'intéressant particulièrement à l'articulation faite par des élèves de troisième secondaire entre les représentations spontanées et les représentations officielles dans le cadre de l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs. Ainsi, les auteurs ont proposé une séquence d'enseignement visant l'articulation entre les différentes

[9] Cette situation est inspirée d'une situation semblable présentée dans les notes de cours MAT3225 (didactique de la variable et de la fonction) à l'UQÀM et réalisée par Bernadette Janvier. Nous l'avons transformée afin de concevoir deux versions différentes adaptées pour l'expérimentation auprès des élèves.

représentations d'une fonction. Cette séquence comprenait cinq activités dans lesquelles les élèves étaient amenés à décrire en mots la relation entre deux grandeurs puis à choisir une ou plusieurs représentations (vues en classe ou non) pour présenter les informations que fournit la description. Les activités portaient sur cinq contextes différents présentés, chaque fois, à l'aide de mots et d'un schéma.

Les analyses des productions des élèves visaient particulièrement l'exploration des processus de passage d'une représentation à une autre. Ainsi, parmi les conclusions de cette recherche, nous retenons, d'une part, que la manipulation du matériel permettant aux élèves de faire varier les grandeurs par eux-mêmes et d'observer ce qui se passe s'est avérée jouer un rôle important dans la construction et l'évolution des représentations spontanées. D'autre part, les auteurs notent que la considération des représentations des élèves par l'enseignant a amélioré leur compréhension des représentations officielles.

2.1.3 L'introduction des fonctions exponentielles à la fin du secondaire

Confrey et Smith (1995) proposent deux regards sur la fonction, celui de la correspondance et celui de la covariation. Selon eux, l'approche favorisée dans l'enseignement est celle de la correspondance. Ils proposent donc d'exploiter l'approche par la covariation qui permet de nuancer l'approche par la correspondance. En introduction, ils indiquent que :

> « (…) the idea of a covariation approach to function is introduced and contrasted with a correspondence approach. The conventional secondary functions curriculum is dominated by a correspondence approach where a function is described via a rule (e.*g*., *f*(x)=3x+2). The correspondence approach leads to an overreliance on algebraic representations and to the neglect of tables in building an understanding of functions. In a covariation approach, a function is understood as the juxtaposition of two sequences, each of which is generated independently through a pattern of data values." (p.67)

La table de valeurs est donc la représentation choisie pour approcher les fonctions par la covariation qui est définie comme la coordination de deux séries de données. Selon les auteurs, cette approche par la covariation permet de saisir de manière globale la relation entre les grandeurs et débouche sur des descriptions qualitatives de la façon dont une quantité varie en lien avec la variation d'une autre quantité.

L'expérimentation menée vise l'introduction des fonctions exponentielles à partir de problèmes contextualisés auprès d'élèves du secondaire et l'approche choisie est celle de la covariation. Concrètement, dans ce contexte, les auteurs expliquent que les élèves sont amenés à travailler sur la table de valeurs afin de décrire les situations à l'aide du taux de variation. Ils indiquent que « for example, if one column increased additively by 2 and the other by 6, they (les élèves) would associate a change of 1 with a change of 3 » (p.78) et ils ajoutent que la « covariation makes such operation-based claims as: "the increments of change in linear functions are directly proportional to each other" more accessible » (p.79). Ainsi, l'approche par la covariation, telle qu'elle est utilisée dans cette recherche, repose sur la mise en évidence du lien entre les accroissements des deux grandeurs dans la table de valeurs à des fins d'extrapolation ou d'interpolation. L'analyse des données effectuée ne cible cependant pas l'évaluation de l'impact de cette approche sur la compréhension des élèves. En fait, les auteurs prennent pour acquis que l'approche par la covariation est le moyen le plus approprié pour introduire les fonctions exponentielles. En résumé, pour Confrey et Smith (1995), la covariation est une approche de la fonction qui s'oppose, tout en la complétant, à l'approche « correspondance ». Il s'agit donc d'une façon de travailler la notion de fonction qui, selon eux, est liée à la représentation « table de valeurs » et donc à une étude numérique de la fonction. Leur vision de la covariation par opposition à la correspondance est inspirée de celle de Monk (1992).

2.1.4 La covariation comme une conception « à travers le temps » de la fonction chez des élèves de niveau collégial

Pour Monk (1992), le recours à une situation physique permet de donner du sens à la notion de fonction. Par situation physique, il désigne un système concret construit avec du matériel sur lequel les élèves peuvent agir (ici il s'agit d'un modèle réduit de la situation physique réelle). Selon Monk, il existe deux façons de voir la fonction et chacune est associée à des usages différents des informations données par une fonction. Il distingue donc deux types de questions, les questions ponctuelles (pointwise) et les questions à travers le temps (across-time). Il propose d'explorer ce dernier type de questions à travers l'analyse des démarches d'élèves du collégial ayant déjà au moins complété le premier quart d'un cours de calcul. Des entrevues ont donc été menées et la situation choisie est celle d'une échelle posée contre un mur, sachant qu'on s'intéresse aux variations des distances parcourues par le haut et le bas de l'échelle lorsque le haut de celle-ci glisse le long du mur. En général, les questions posées amènent les étudiants à comparer de manière qualitative les différentes distances parcourues par le haut de l'échelle lorsque la distance parcourue par le bas de l'échelle est constante de manière qualitative, et ce, à partir de la description d'une expérimentation fictive. Trois questions ont été posées. La première question porte sur la comparaison de deux distances (voir Figure 5).

Question 1. Tom sees the ladder in a position like the one shown in figure 3a almost vertical against the wall. He moves the bottom a small distance further away from the wall and records the amount by which the top of the ladder has dropped. Some time later Sally comes along and sees the ladder in a position like the one shown in figure 3b. Sally moves the ladder away from the wall by the same amount that Tom did and records the amount by which the top of the ladder has dropped. Use the model to compare the sizes of the drops in the top of the ladder that these two people see. Does Tom or Sally see the ladder drop more-which one? Or do they see the ladder drop equal amounts? Explain.

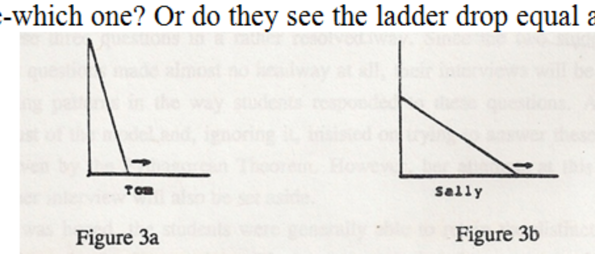


Figure 5 Problème de l'échelle (première question) tiré de Monk (1992) p.181[10]

La seconde question porte, de la même manière, sur la comparaison de plusieurs distances successives. La troisième question propose de simuler un mouvement constant et continu du bas de l'échelle et demande de décrire la vitesse du haut de l'échelle (vitesse constante, qui augmente ou qui diminue). Cette dernière question nécessite donc une généralisation de la « façon de varier » observée dans les premières questions.

De l'analyse des démarches des étudiants, l'auteur dégage deux conceptions de la fonction. La première correspond à une vision ponctuelle caractérisée par une conception de la fonction comme étant un ensemble de valeurs ou de paires de valeurs « input-output » plus ou moins isolées. La seconde correspond à une vision à travers le temps permettant la description

[10] Notre traduction : « Tom voit l'échelle dans la position présentée à la figure 3a qui est presque à la verticale. Il tire un peu le bas de l'échelle et note la distance de laquelle le haut de l'échelle est descendu. Un peu plus tard, Sally arrive et voit l'échelle en position comme à la figure 3b. Elle tire le bas de l'échelle et le déplace alors de la même distance que Tom, elle prend en note la distance de laquelle le haut de l'échelle est descendu. En utilisant la maquette, compare les distances desquelles le haut de l'échelle est descendu observées par les deux individus. Est-ce que Tom ou Sally a observé une descente plus grande de l'échelle-lequel? Ou ont-ils vu l'échelle descendre de la même distance? Explique. »

globale du comportement des variables. Bien que la désignation « à travers le temps » laisse entendre qu'on regarde varier une grandeur lorsque le temps s'écoule, dans les premières questions, le temps n'est pas l'une des grandeurs observées. Comme il s'agissait d'étudier les effets de la variation de l'une des grandeurs sur la variation de l'autre grandeur, nous supposons que la désignation « à travers le temps » est utilisée pour faire référence au fait qu'on fait varier la variable indépendante et qu'on regarde l'impact sur la variation de la variable dépendante. Ces deux conceptions de la fonction rejoignent les deux regards proposés par l'auteur au départ. Il semble en fait, selon lui, que même lorsqu'on pose des questions sollicitant un regard « à travers le temps » de la fonction, certains élèves démontrent qu'ils ont une conception ponctuelle de celle-ci. Ces élèves ne sont alors pas capables de répondre de manière appropriée aux questions posées. Par exemple, l'auteur présente le cas d'un élève qui a refusé de travailler sur le modèle réduit et qui utilisa la formule pour calculer des distances. Cet élève n'a pas été capable d'utiliser les valeurs trouvées pour décrire la variation de la vitesse du haut de l'échelle (troisième question).

Selon nous, la vision « à travers le temps » décrite par Monk correspond à une conception de la fonction comme étant la relation entre les variations concomitantes de deux grandeurs, alors que la vision « ponctuelle » fait appel à une conception de la fonction comme étant la relation de correspondance entre deux grandeurs (voir section 1.2.3.4). D'une part, la fonction est vue par ses aspects de dépendance et de variation (vision à travers le temps) et, d'autre part, elle est vue par son aspect de correspondance (vision ponctuelle). Ainsi, pour nous, les deux visions de la fonction identifiées par Monk se complètent puisqu'elles permettent d'aborder les trois aspects importants de la fonction identifiés par René de Cotret (1988) : la dépendance, la variation et la correspondance.

2.1.5 Synthèse

En résumé, à la fin des années 90, l'idée de covariation apparaît dans quelques recherches en didactique des mathématiques. Alors que Confrey et Smith (1994) considèrent la covariation comme une approche riche qu'ils utilisent pour travailler les fonctions exponentielles, Saldanha et Thompson (1998) la voient à la fois comme une notion à étudier et une façon de travailler. En tant que notion, la covariation désigne les variations concomitantes de deux grandeurs. Ainsi, le terme covariation est utilisé pour parler de la fonction selon ses aspects de dépendance et de variation. Selon nous, la pertinence d'utiliser le terme covariation n'est pas mise de l'avant dans ce contexte puisqu'en tant que notion, le terme covariation est synonyme de fonction. Toutefois, en tant qu'approche, l'utilisation du terme covariation renvoie apparemment, selon notre compréhension du travail de Confrey et Smith, à des raisonnements particuliers impliqués lors de l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs. L'investigation de ces raisonnements est proposée dans plusieurs recherches sur le développement du raisonnement covariationnel comme nous allons le voir dans la section suivante.

En ce qui concerne les contextes dans lesquels l'idée de covariation a été investiguée, on retrouve, selon notre interprétation : la perception des covariations de deux grandeurs dans une situation réelle (Piaget et al., 1968), la représentation graphique de telles covariations (Hitt et al., 2008; Hitt et Morasse, 2009; Passaro, 2007; Saldanha et Thompson, 1998), l'étude des covariations de deux grandeurs dans une table de valeurs (Confrey et Smith, 1995) et l'interprétation des covariations de deux grandeurs dans une situation physique (Monk, 1992). Ainsi, l'idée de covariation apparait particulièrement exploitée lors d'un travail sur des situations réelles dans lesquelles deux grandeurs sont mises en relation par un phénomène physique. D'une part, ce type de travail semble s'intégrer globalement à une démarche de modélisation dans laquelle les représentations graphique et table de valeurs, ainsi que la verbalisation issue de l'interprétation des relations entre les grandeurs dans les phénomènes étudiés jouent un rôle important. D'autre part, le questionnement sur lesdits phénomènes peut permettre l'articulation de différentes fonctions dont les comportements sont liés. Par exemple, dans le contexte de l'échelle (Monk, 1992), la distance du haut de l'échelle est observée puis c'est au tour de la vitesse du haut de l'échelle. Si ces grandeurs sont observées en fonction du temps elles sont clairement liées puisque la vitesse en fonction du temps est la dérivée de la distance en fonction du temps. Il faut noter toutefois que la grandeur indépendante est implicite dans les tâches de Monk qui mettent l'accent sur l'observation des accroissements de la distance parcourue par le haut de l'échelle lorsque le bas de l'échelle est toujours déplacé de la même distance.

En général, l'idée de covariation est utilisée pour parler des variations concomitantes de deux grandeurs étudiées dans une situation réelle. L'étude de ces variations concomitantes par l'intermédiaire des accroissements concomitants est illustrée dans le travail de Monk (1992) et il est possible d'entrevoir l'articulation des notions de fonction et de dérivée dans ce contexte. Il n'est donc pas surprenant que cette étude ait inspiré Carlson pour la création d'un cadre du développement du raisonnement covariationnel qui sera décrit à la section 2.3.

2.2 De la covariation à l'approche covariationnelle de la fonction

Comme nous l'avons mis en évidence à la section précédente, l'utilisation du terme « covariation » dans le cadre de l'étude de situations fonctionnelles ne fait pas toujours référence à la même chose. Chaque auteur définit à sa manière, dans le contexte qui l'intéresse, l'idée de covariation. Nous pensons qu'il y a lieu de chercher à définir plus précisément cette idée en construction.

Nous constatons que le terme « covariation » n'apparaît dans aucun dictionnaire de la langue française courante, ni dans les dictionnaires mathématiques, spécialisés en didactique ou non. On le retrouve néanmoins dans le dictionnaire Larousse en ligne qui définit la covariation comme la « liaison entre les variations dans le temps de deux ou de plusieurs grandeurs ou séries statistiques, tout accroissement ou réduction de l'une se traduisant par un accroissement ou une réduction des autres »[11]. Cette définition semble venir de l'utilisation du terme covariation qu'on retrouve dans certains documents statistiques (cf Julin, 1935). La covariation est alors associée à la covariance de deux séries statistiques. Bien qu'un parallèle puisse être établi avec l'étude des fonctions, les perspectives statistiques et fonctionnelles sont différentes.

L'absence de la covariation liée à l'étude des fonctions dans les ouvrages de références en mathématiques montre qu'il ne s'agit pas d'un objet de savoir identifié. Néanmoins, il est possible que la covariation soit une notion paramathématique au même titre que la variable (voir section 1.2.2) et, par conséquent, que ce soit un objet spécifique à la didactique des mathématiques.

[11] http://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/covariation

Pour Krysinska et Schneider (2010), l'idée de covariation émerge de l'association entre l'idée de dépendance et celle de variation :

> « Par ailleurs, associer l'idée de dépendance à celle de variation ne peut se concevoir sans l'existence d'une double variation concomitante : celle des deux variables dépendantes l'une de l'autre. C'est pourquoi, nous rendrons compte de cette idée en utilisant le mot « covariation » plutôt que le mot dépendance, à l'instar d'autres chercheurs » (Pages 35-36).

D'un point de vue étymologique, le terme « covariation » peut être scindé en deux parties : le préfixe « co » et le mot « variation »[12]. La « variation » fait référence à un changement d'une quantité ou d'une grandeur[13]. Dans le cadre de l'étude des fonctions en algèbre à l'école, on s'intéresse à des grandeurs quantifiables (Baruk, 1995). Par conséquent, faire varier une grandeur, c'est considérer plusieurs valeurs prises par cette grandeur. Le préfixe « co », quant à lui, signifie « avec » ou « en même temps »[14]. Le terme covariation implique donc les variations d'au moins deux grandeurs en même temps. Bien que cette référence au temps nous semble très parlante et naturelle, elle pose problème dans le présent contexte. En effet, à la section 1.3.2.1, nous avons montré que la considération systématique du temps comme grandeur indépendante constitue un obstacle épistémologique à la compréhension de la notion de fonction (Sierpinska, 1992). Les fonctions n'étant pas toutes des fonctions du temps, il porterait à confusion de définir la covariation comme la variation de deux grandeurs *en même temps*. Nous proposons donc d'utiliser l'idée de concomitance, qui est un synonyme de coexistence et de simultanéité, mais qui, selon nous, a une connotation moins temporelle, voire intemporelle, dans son utilisation courante.

Dire qu'il y a covariation de deux grandeurs revient donc, d'un point de vue étymologique, à dire que ces deux grandeurs varient ou changent de manière concomitante. Puisque les variations de deux grandeurs sont forcément mises en relation, on pourrait d'ailleurs parler des covariations des deux grandeurs au lieu de la covariation des deux grandeurs. Ainsi, cette nouvelle perspective appuie les propos des chercheurs desquels nous percevons l'idée générale

---

[12] Certains auteurs écrivent d'ailleurs co-variation au lieu de covariation (cf Hitt, Gonzales-Martin, & Morasse, 2008). L'office de la langue française précise toutefois que les noms composés avec le préfixe « co » ne prennent pas de trait d'union (sauf lorsque le nom qui suit commence par un i).
[13] http://www.le-dictionnaire.com/definition.php?mot=variation
[14] http://66.46.185.79/bdl/gabarit_bdl.asp?id=1017

de covariation comme manière d'établir l'existence d'un lien entre les variations concomitantes de deux grandeurs mises en relation par une fonction.

Par ailleurs, étudier une fonction ne signifie pas forcément étudier les variations concomitantes de deux grandeurs. En fait, ce sont les questions qu'on se pose à propos de la fonction dans certaines situations qui engendrent ou non cette étude. Selon nous, les contextes dans lesquels les variations concomitantes de deux grandeurs ont été observées dans les précédentes recherches informent sur les situations propices à un questionnement qui suscite un regard sur la fonction par la covariation.

D'abord, pour Piaget et al. (1968), s'intéresser à la covariation des grandeurs permet de comprendre la relation entretenue par ces grandeurs en terme de cause à effet : la variation d'une grandeur entraine celle d'une autre grandeur qui lui est liée. Ainsi, la question qui se pose est « comment varie une grandeur lorsque une autre varie? » dans la situation où ces deux grandeurs sont fonctionnellement liées par une relation de causalité. L'objectif visé est alors de comprendre le phénomène et de saisir l'existence d'une relation fonctionnelle entre les deux grandeurs observées.

Ensuite, pour Hitt et al. (2008), Passaro (2007) et Saldanha et Thompson (1998), la question qui se pose est « comment représenter visuellement les variations concomitantes de deux grandeurs? », l'objectif étant à la fois de percevoir le lien entre les variations de deux grandeurs et de représenter visuellement ce lien. Les situations dans lesquelles ces variations sont observées sont aussi des phénomènes où les grandeurs sont liées par des relations de causalité.

Dans le cas de Confrey et Smith (1995), un regard sur la fonction exponentielle par la covariation permet la mise en évidence d'un comportement particulier des accroissements de la grandeur dépendante. Selon nous, la question qui se pose est toujours « comment varie une grandeur lorsque une autre varie? », mais derrière le « comment » se cache la volonté d'identifier précisément une façon de varier associée à un modèle mathématique.

Finalement, cette stratégie de mise en évidence des accroissements des grandeurs est exploitée par Monk (1992) dans l'optique de décrire la variation de la fonction dérivée de la fonction initialement étudiée. L'importance du questionnement est alors révélée puisque Monk distingue les questions « à travers le temps » des questions « ponctuelles ». Pour répondre aux

questions « à travers le temps », il apparait nécessaire de regarder les variations concomitantes des deux grandeurs mises en relation par la fonction étudiée. Ces questions prenant un sens dans le contexte particulier de l'étude du mouvement, elles pourraient être résumées ainsi : « comment se comportent les accroissements de la distance pour des accroissements constants du temps? » et « comment varie l'augmentation de la distance au cours du temps?».
En résumé, d'une part, les situations réelles dans lesquelles deux grandeurs sont liées par une relation de causalité apparaissent propices à un questionnement sur la façon dont varie une grandeur lorsque l'autre varie. Ce questionnement peut mener à la fois à déterminer le comportement global de la grandeur dépendante et à identifier le type de relation entretenu par les deux grandeurs associé à un modèle mathématique. D'autre part, les situations dans lesquelles on étudie la distance parcourue par un objet ou une personne en fonction du temps sont propices à un questionnement sur les accroissements concomitants des grandeurs permettant d'anticiper le comportement de la fonction dérivée, soit la vitesse de cet objet ou de cette personne en fonction du temps.

En général, l'idée de covariation est associée à l'existence des variations concomitantes de deux grandeurs. Or, pour nous, cette existence émerge des questions qui se posent dans des situations particulières. Les variations concomitantes n'existent donc que dans la mesure où on s'y intéresse et l'intérêt nait des problèmes qu'on veut résoudre. Il nous semble donc impossible de définir précisément la covariation sans considérer ces problèmes. En outre, dans la mesure où nos préoccupations concernent le passage de la fonction à la dérivée, nous avions défini, à la section 1.2.4, une approche covariationnelle de la fonction comme une manière de travailler la fonction via l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs mises en relation, et ce, par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs. Nous pouvons dès lors préciser que l'observation du comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants permet de répondre de manière approfondie à un questionnement sur comment varie une grandeur lorsqu'une autre grandeur varie. Dans le contexte où la fonction étudiée est la distance parcourue en fonction du temps, ce type de travail sur les accroissements s'inscrit dans une exploration du comportement de la vitesse en fonction du temps.

En synthèse, nous pouvons convenir que :

Une **<u>approche covariationnelle</u>** est une manière de travailler la fonction **en situation**. Elle consiste en **l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs** par l'intermédiaire d'un travail sur **les accroissements concomitants de ces deux grandeurs** dans des situations dans lesquelles **on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie**.

Même si cette définition explicite davantage l'idée d'une approche covariationnelle de la fonction, il nous apparait nécessaire de préciser en quoi consiste le travail sur les accroissements en situation. Le cadre du développement du raisonnement covariationnel de Carlson contribue selon nous à éclairer ce travail.

2.3 Le développement du raisonnement covariationnel dans le cadre d'un travail sur la covariation

Pour nous, la plus grande source d'information sur le travail de la covariation dans la perspective de l'articulation des notions de fonction et de dérivée est le cadre du développement du raisonnement covariationnel développé par Carlson. En effet, pour elle, le travail sur les aspects covariants de la fonction mène au développement d'un raisonnement covariationnel. Ainsi, l'exploration du développement du raisonnement covariationnel chez les élèves nous apparait comme une piste privilégiée pour préciser les caractéristiques potentielles d'une approche covariationnelle de la fonction, notamment parce que c'est la seule voie qui ait été investiguée jusqu'à aujourd'hui.

Dans cette section nous présentons en premier lieu le cadre développé par Carlson en tentant de transmettre le plus fidèlement possible les idées et le contexte d'émergence de ces idées à propos du développement d'un raisonnement covariationnel chez des étudiants de niveaux collégial et universitaire. En second lieu, nous suggérons une explicitation et une adaptation des éléments de ce cadre à l'aide d'une analyse de notre propre processus de raisonnement en situation. Cela nous mènera à identifier des unités de raisonnement et un cheminement possible à travers ces unités illustrant le déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation. En dernier lieu, nous formulerons des questions spécifiques pour cette recherche en lien avec l'exploration de ce type de cheminement chez des élèves de 15 à 18 ans.

2.3.1 Le cadre d'analyse du développement du raisonnement covariationnel de Carlson

2.3.1.1 Fondements théoriques et contexte de construction du cadre d'analyse de Carlson

Afin de saisir le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel suggéré par Carlson, il nous semble important de mettre en évidence les fondements théoriques à la base de sa construction ainsi que le contexte dans lequel il a émergé. Nous présentons donc, selon notre compréhension des travaux de Carlson, d'une part, le cadre dans lequel un questionnement sur la compréhension du concept de fonction a mené cette chercheure à identifier la covariation comme objet de recherche et, d'autre part, les éléments sur lesquels repose la construction du cadre d'analyse du raisonnement covariationnel qu'elle propose.

2.3.1.1.1 Une analyse de la compréhension de la fonction à l'aide la théorie APOS

À l'origine, les préoccupations de recherche de Carlson concernaient la compréhension de la notion de fonction chez les élèves suivants des cours de calcul différentiel et intégral (Carlson, 1998). Son analyse de cette compréhension l'a alors menée à identifier un ensemble de processus en lien avec la mobilisation de la notion de fonction dans différents types de tâches. Ses propos laissent entendre que sa vision des processus se situe dans la perspective de la théorie APOS (*action, process, object and schema*) laquelle s'inscrit dans la suite des travaux de Jean Piaget sur l'abstraction réfléchissante et suggère une manière de concevoir l'apprentissage de concepts mathématiques avancés (Dubinsky et Mcdonald, 2002). L'idée globale de cette théorie est que la connaissance mathématique, qui se construit en réponse à un problème mathématique, consiste en une construction mentale d'actions, de processus et d'objets s'organisant en schèmes pour donner un sens au problème et le résoudre (Dubinsky et Mcdonald, 2002). Différentes conceptions d'un même concept mathématique sont donc identifiables à l'aide de « stades » du développement de la compréhension.

L'*action* étant décrite comme une transformation d'objets qui suit pas à pas une procédure à suivre préétablie et apprise, un individu qui a une conception d'un concept mathématique en termes d'action donne un sens à ce concept uniquement à travers les procédures qui lui sont associées. À ce stade, les actions sont considérées comme externes à l'individu qui les mobilise en réponse à des stimuli établis.

Lorsque l'individu répète souvent les mêmes procédures et qu'il les intériorise, il développe une conception en termes de processus. Les *processus* se distinguent des actions ou procédures dans la mesure où ils sont construits par l'individu, ils sont donc considérés comme des structures internes.

Une conception en termes d'objet émerge de la manipulation consciente et réfléchie des processus, on dit alors que les processus ont été encapsulés. L'individu qui a une telle conception aurait atteint une compréhension approfondie du concept en tant qu'*objet*. À ce stade, le concept ou l'objet est mobilisé consciemment à travers des actions appropriées et réfléchies.

L'organisation d'un ensemble d'actions, de processus et d'objets à l'aide de principes mathématiques généraux mène à une structure mentale appelée schème ou *schema*. Cette conception du concept mathématique est associée à une compréhension solide et cohérente du concept mathématique qui prend place au sein d'une théorie.

En ce qui concerne l'utilisation du cadre APOS à l'analyse de la compréhension du concept de fonction, Carlson adopte le point de vue de Breidenbach, Dubinsky, Hawks et Nichols (1992) qui établissent trois manières de conceptualiser la fonction : pré-fonction, action et processus. La construction d'une conceptualisation de la fonction en termes de processus apparait alors comme le stade de développement à atteindre pour des élèves de niveau collégial qui débutent l'étude du calcul différentiel. Carlson (1998) identifie donc différents processus qui permettent de caractériser la compréhension de la notion de fonction par les élèves. Parmi ces processus, certains concernent l'idée de covariation qu'elle considère comme fondamentale au développement de la compréhension des principaux concepts du calcul différentiel incluant le concept de fonction. En référence à Harel et Dubinsky (1992), Oehrtman et al. (2008) indiquent qu'une conception de la fonction en termes de processus repose sur l'image mentale des transformations dynamiques de deux quantités. Ils affirment que cette conception, qui permet de voir la fonction de manière dynamique, est requise pour développer un raisonnement covariationnel.

2.3.1.1.2 De l'analyse des aspects covariants de la fonction au raisonnement covariationnel

Selon Mcdonald, Mathews et Strobel (2000), les chercheurs qui s'appuient sur le cadre APOS, suggèrent généralement une décomposition génétique du concept investigué, c'est-à-dire qu'ils décrivent *a priori* les éléments de compréhension de ce concept par les élèves. Ils ajoutent que dans le cas où la compréhension du concept visé n'a jamais été investiguée, le chercheur se base sur sa propre connaissance du concept et sur ses observations des élèves en apprentissage. C'est, apparemment, la voie qu'a suivi Carlson pour l'exploration de la compréhension de la covariation. En effet, après avoir identifié les lacunes des élèves à percevoir les aspects covariants de la fonction (Carlson, 1998), Carlson s'est engagée dans une investigation de l'idée de covariation dans l'optique d'une restructuration des curricula scolaires. Étant l'une des pionnières de la recherche sur cet objet en didactique des mathématiques, elle s'est appuyée sur ses propres connaissances afin de développer « The Covariation Framework ».

Ce cadre a donc été construit sur les expériences de Carlson, chercheure en « mathematics education » dans le département de mathématiques de l'université de l'état d'Arizona (Arizona State University), et enseignante des cours de calcul différentiel et intégral à ce niveau. Ses préoccupations d'amélioration de l'enseignement du calcul différentiel et intégral transparaissent clairement dans ses articles (Carlson, 1998; Carlson et al., 2002, 2001). En recherche, outre la théorie APOS, elle s'inspire principalement des travaux de Patrick W. Thompson (Saldanha et Thompson, 1998; Thompson, 1994a, 1994b) et de Steve Monk (Monk, 1992). Ainsi, elle adhère à l'idée que la construction dynamique d'images mentales, qui s'appuient sur des expériences physiques, est à l'origine des opérations mentales impliquées dans le processus de raisonnement. L'idée d'image mentale est alors apparentée à celle de « concept image » définie par Vinner et Dreyfus (1989) qui englobe les représentations mentale et visuelle, les expériences et les impressions associées à un concept par un individu.

Pour Carlson, chaque élève possède une image mentale de la covariation et, lorsque cette image évolue, elle supporte un raisonnement covariationnel plus sophistiqué. En ce sens, elle considère que le raisonnement covariationnel est développemental. Après une première mise à l'épreuve du cadre d'analyse (Carlson et al., 2001), le raisonnement covariationnel est défini ainsi : « ce sont toutes les activités cognitives impliquées dans la coordination de deux quantités variables dans la mesure où on s'intéresse à leurs manières de varier en relation l'une avec l'autre[15] » (Carlson et al., 2002, p.354). Les activités cognitives sont alors associées à des actions mentales qui permettent d'établir des niveaux de développement du raisonnement covariationnel.

2.3.1.2 Description du cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de Carlson

Le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel a été créé dans le but à la fois de constituer un outil d'analyse du raisonnement covariationnel mobilisé par des étudiants et d'offrir une structure de base pour la construction d'activités d'enseignement favorisant le développement de l'habileté à considérer la nature covariante de relations fonctionnelles. Il comporte cinq actions mentales ainsi que cinq niveaux de développement en lien avec ces actions mentales. Il est à noter que nous décrivons ces éléments tels que présentés par Carlson et ses collègues en tentant de respecter le plus fidèlement possible les propos des auteurs[16].

2.3.1.2.1 Description des actions mentales

Les cinq actions mentales ont été identifiées, de prime abord, lors de l'observation informelle d'étudiants travaillant sur des tâches de représentation et d'interprétation graphique de phénomènes dynamiques (Carlson et al., 2001). Puis, les descriptions de ces actions ont été précisées à la suite d'une expérimentation d'un ensemble d'activités avec des élèves de niveau collégial (Carlson et al., 2002). L'image initiale de deux variables qui changent simultanément est associée à la première action mentale. Puis, cette image évolue et se raffine jusqu'à devenir celle d'un taux de variation instantané qui change sur l'ensemble du domaine de la fonction (5[e] action mentale). Dans le Tableau 1, chaque action mentale et des comportements qui lui sont associés dans un registre graphique sont décrits.

---

[15] "we define covariational reasoning to be the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other."

[16] Nous avons traduit la plupart des descriptions afin de rendre accessible le contenu à un public plus large, nous recommandons cependant au lecteur, qui en a la possibilité, de lire les versions originales en anglais qui rendent mieux compte des idées que les traductions. En effet, afin de ne pas injecter nos propres idées sur le sujet ainsi que notre manière de verbaliser le raisonnement, nous avons traduit quasiment mot à mot avec le moins d'interprétation possible.

Tableau 1 Mental Actions of the Covariation Framework - actions mentales du cadre théorique sur la covariation (présenté dans Carlson et al., 2002, p.357)

Mental action	Description of mental action	Behaviors
Mental Action 1 (MA1)	Coordinating the value of one variable with changes in the other *Coordonner la valeur d'une variable avec les changements de l'autre variable*	• Labeling the axes with verbal indications of coordinating the two variables (e.g., y changes with changes in x) • *Identifier les axes en donnant des indications verbales sur la coordination des deux variables (y change lorsque x change)*
Mental Action 2 (MA2)	Coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable *Coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement de l'autre variable*	• Constructing an increasing straight line • Verbalizing an awareness of the direction of change of the output while considering changes in the input • *Construire une droite croissante* • *Verbaliser une prise de conscience de la direction du changement de la variable dépendante lorsque la variable indépendante change*
Mental Action 3 (MA3)	Coordinating the amount of change of one variable with changes in the other variable *Coordonner la « quantité » de changement d'une variable avec le changement de l'autre variable*	• Plotting points/constructiong secant lines • Verbalizing an awareness of the amount of change of the output while considering changes in the input • *Placer des points/construire des droites sécantes* • *Verbaliser une prise de conscience de la « quantité » de changement de la variable dépendante lorsque la variable indépendante change*
Mental Action 4 (MA4)	Coordinating the average rate-of-change of the function with uniform increments of change in the input variable *Coordonner le taux de variation moyen de la fonction pour des accroissements constants de la variable indépendante*	• Constructing contiguous secant lines for the domain • Verbalizing an awareness of the rate of change of the output (with respect to the input) while considering uniform increments of the input • *Construire des droites sécantes contigües sur l'ensemble du domaine de la fonction* • *Verbaliser une prise de conscience du taux de variation moyen de la variable dépendante lorsque la variable indépendante change selon des accroissements constants*
Mental Action 5 (MA5)	Coordinating the instantaneous rate-of-change of the function with continuous changes in the independent variable for the entire domain of the function *Coordonner le taux de variation instantané de la fonction avec le changement continu de la variable indépendante sur l'ensemble du domaine de la fonction*	• Constructing a smooth curve with clear indications of concavity changes • Verbalizing an awareness of the instantaneous changes in the rate of change for the entire domain of the function of the output (direction of concavities and inflection points are correct) • *Construire une courbe lisse avec des indications sur les changements de concavité* • *Verbaliser une prise de conscience du taux de variation instantané sur l'ensemble du domaine de la fonction (la direction de la concavité et les points d'inflexion sont appropriés)*

Dans Oehrtman et al. (2008), les précisions apportées à ces descriptions amènent les considérations suivantes. De la première action mentale qui correspond à l'image des deux variables qui varient simultanément et donc à **une vision des variations concomitantes des deux variables**, on passe à une image du sens de la variation de la variable dépendante (2^{e} action mentale). Pour cette seconde action mentale, l'attention sur la direction du changement implique de voir des valeurs en *y* qui sont de plus en plus grandes (pour une fonction croissante) lorsqu'on regarde le graphique de gauche à droite. Le comportement le plus fréquent des étudiants mobilisant cette action mentale est la construction d'un trait qui monte en allant de gauche à droite ou des indications verbales suggérant la compréhension de la **direction du changement de la variable dépendante lorsque la variable indépendante augmente**. La troisième action mentale implique la coordination des quantités relatives du changement des variables. Un comportement fréquemment observé chez les élèves qui mobilisent cette action mentale est celui du partitionnement de l'axe des *x* en intervalles d'une longueur fixe, tout en considérant la quantité du changement de la variable dépendante pour chaque nouvel intervalle. Habituellement, ce comportement est suivi par la construction de points sur le graphique et de lignes reliant ces points. Les points étant apparemment vus comme représentant la **quantité de changement de la variable dépendante lorsqu'on considère des accroissements constants de la variable indépendante**[17].

L'élève qui mobilise la quatrième action mentale reconnaît que la **quantité de changement de la variable dépendante (ou l'accroissement de la variable dépendante) pour un accroissement constant de la variable indépendante exprime le taux de variation de la fonction sur un intervalle du domaine de la fonction**. Cela se révèle typiquement par le traçage de sécantes à la courbe sur le graphique ou par le calcul mental ou l'estimation de la pente du graphique sur de petits intervalles du domaine. Même si les troisième et quatrième actions mentales mènent toutes deux à la construction de sécantes, le raisonnement sous-jacent est différent. **La troisième action mentale met l'accent sur la quantité de changement (l'accroissement) de la variable dépendante lorsque la variable indépendante varie, alors**

[17] Cette description un peu ambigüe correspond aux propos des auteurs. Nous comprenons que les points sont vus comme les extrémités des flèches du déplacement vertical correspondant à l'accroissement de la variable dépendante.

que la quatrième met l'accent sur le taux de variation de la variable dépendante pour des accroissements constants de la variable indépendante.
La cinquième action mentale concerne quant à elle l'image du taux de variation instantané qui varie lorsque la variable indépendante varie de manière continue. Cette image est donc celle de la fonction dérivée.

2.3.1.2.2 Description des niveaux de développement du raisonnement covariationnel

Pour Carlson, les habiletés individuelles à mobiliser un raisonnement covariationnel dans le cadre d'une tâche donnée peuvent être déterminées grâce à l'analyse de l'ensemble des comportements et des actions mentales observés lors de la réalisation de cette tâche. Ainsi, elle considère qu'un élève a atteint un certain niveau de développement (voir la description de chacun des niveaux dans le Tableau 2) lorsqu'il mobilise l'action mentale spécifique à ce niveau mais aussi l'ensemble des actions mentales spécifiques aux niveaux inférieurs.

Tableau 2 Levels of the covariation framework – niveaux selon le cadre théorique sur la covariation (présenté dans Carlson et al., 2002, p.358)

Covariational reasoning levels
The covariation framework describes five levels of development of images of covariation. These images of covariation are presented in terms of mental actions supported by each image. *Le cadre théorique sur la covariation décrit cinq niveaux de développement des images de la covariation. Ces images de la covariation sont présentées en termes des actions mentales soutenues par chaque image.*
Level 1 (L1) Coordination At the coordination level, the images of the covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes of the other variable (MA1). *Au niveau de la « coordination », les images de la covariation peuvent soutenir l'action mentale de coordonner le changement d'une variable avec le changement d'une autre variable.*
Level 2 (L2) Direction At the direction level, the images of the covariation can support the mental actions of coordinating the direction of change of one variable with changes of the other variable. The mental actions identified as MA1 and MA2 are both supported by L2 images. *Au niveau de la « direction », les images de la covariation peuvent soutenir les actions mentales de coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement d'une autre variable. Les actions mentales identifiées comme MA1 et MA2 sont toutes deux soutenues par les images au niveau L2.*
Level 3 (L3) Quantitative Coordination At the quantitative coordination level, the images of the covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1, MA2 and MA3 are supported by L3 images. *Au niveau de la « coordination quantitative », les images de la covariation peuvent soutenir les actions mentales de coordonner la quantité de changement d'une variable avec le changement d'une autre variable. Les actions mentales identifiées comme MA1, MA2 et MA3 sont soutenues par les images au niveau L3.*
Level 4 (L4) Average rate At the average rate level, the images of the covariation can support the mental actions of coordinating the average rate of change of the function with uniform changes in the input variable. The average rate of change can be unpacked to coordinate the amount of change of the output variable with changes in the input variable. The mental actions identified as MA1 through MA4 are supported by L4 images. *Au niveau du « taux de variation moyen », les images de la covariation peuvent soutenir les actions mentales de coordonner le taux de variation moyen de la fonction avec le changement uniforme de la variable « d'entrée ». Le taux de variation moyen peut être décortiqué de manière à coordonner la quantité de changement de la variable de « sortie » avec le changement de la variable « d'entrée ». Les actions mentales identifiées comme MA1 jusqu'à MA4 sont soutenues par les images au niveau L4.*
Level 5 (L5) Instantaneous rate At the instantaneous rate level, the images of the covariation can support the mental actions of coordinating the instantaneous rate of change of the function with continuous changes in the input variable. This level includes an awareness that the instantaneous rate of change resulted from smaller and smaller refinements of the average rate of change. It also includes awareness that the inflection point is where the rate of change changes from increasing to decreasing, or decreasing to increasing. The mental actions identified as MA1 through MA5 are supported by L5 images. *Au niveau du « taux de variation instantané », les images de la covariation peuvent soutenir les actions mentales de coordonner le taux de variation instantané de la fonction avec le changement continue de la variable « d'entrée ». Ce niveau inclus la prise en compte du fait que le taux de variation instantané résulte du raffinement du taux de variation moyen pour des intervalles de plus en plus petits. Il inclut aussi la considération du point d'inflexion comme l'endroit où le taux de variation se met à diminuer alors qu'avant il augmentait ou l'inverse. Les actions mentales identifiées comme MA1 jusqu'à MA5 sont soutenues par les images au niveau L5.*

2.3.1.3 Résultats obtenus lors de l'exploitation du cadre d'analyse de Carlson

Comme nous l'avons déjà mentionné, le principal objectif de Carlson est d'améliorer l'enseignement du calcul différentiel et intégral à un niveau universitaire aux États-Unis. Elle utilise donc le cadre du développement du raisonnement covariationnel, d'une part, pour mettre à l'épreuve un module d'enseignement visant l'acquisition d'habiletés sur les aspects covariants de la fonction (Carlson et al., 2001) et, d'autre part, pour mettre en évidence les lacunes des étudiants n'ayant pas suivi un tel module (Carlson, 2002; Carlson et al., 2002; Oehrtman et al., 2008).

2.3.1.3.1 Résultats d'une première expérimentation : mise à l'épreuve d'un module d'enseignement (Carlson et al., 2001)

L'expérimentation du module d'enseignement s'est déroulée auprès d'un groupe de 24 étudiants universitaires suivant leur premier cours de calcul différentiel et intégral. Le module d'enseignement était alors composé de cinq activités qui ont été construites, selon les auteurs, de manière à favoriser le développement de l'habileté à considérer la nature covariante de relations fonctionnelles dynamiques. Chaque activité comprend une série de questions encourageant les étudiants à coordonner l'image de deux variables qui changent et à considérer et représenter la façon dont les variables indépendante et dépendante changent en relation l'une avec l'autre.

La première activité consiste à construire une boîte ouverte sur le dessus à partir d'une feuille 8,5x11 pouces de laquelle on enlève des carrés identiques dans les coins de manière à pouvoir replier les côtés. On cherche à déterminer pour quelle valeur de x (mesure des côtés des carrés), le volume est maximal (voir Figure 6).

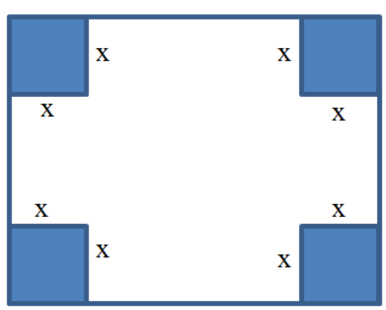


Figure 6 Construction d'une boîte à partir d'une feuille de papier

Après avoir construit le modèle algébrique de la situation, les étudiants doivent déterminer les volumes de la boîte pour des valeurs de x données et inversement, les valeurs de x pour des volumes de boîtes donnés. Par la suite seulement, on demande aux étudiants de déterminer comment le changement de taille du carré influence le changement du volume de la boîte et, plus précisément, de déterminer l'intervalle de valeurs possibles pour x pour lequel le volume de la boîte augmente.

Dans la seconde activité on présente plusieurs graphiques d'une distance en fonction du temps. Les étudiants doivent décrire le mouvement représenté et tenter de le reproduire. En effet, un capteur de mouvement présentant les données sous forme de graphique est disponible et les étudiants l'utilisent pour voir directement l'effet de leurs actions. Ils sont amenés à reconstruire les graphiques fournis en ajustant leur mouvement.

Pour la troisième activité, on sait seulement qu'elle est basée sur une situation réelle qui requiert la construction d'un modèle mathématique tout en demandant aux étudiants de généraliser et de documenter leur pensée. Les étudiants doivent effectivement produire un manuel d'instruction pour un étudiant de physique préparant un examen de laboratoire. Il semble que ce manuel doive comporter un ensemble détaillé d'instructions générales expliquant comment produire le déplacement d'une personne à partir de n'importe quel graphique fourni.

La quatrième activité est celle de l'échelle qui glisse contre un mur (voir section 2.1.4). On demande aux étudiants de déterminer la vitesse du haut d'une échelle de 10 pieds alors que sa base s'éloigne du mur à vitesse constante. Comme cette activité est connue des étudiants, on leur impose de ne pas utiliser les outils de dérivation qu'ils connaissent et d'imaginer une autre démarche. Selon les auteurs, les questions posées sont particulièrement axées sur l'étude de la covariation.

Pour la dernière activité, les étudiants doivent produire le graphique de la hauteur en fonction du volume à partir d'une animation sur ordinateur montrant le remplissage d'un contenant. Puis, ils doivent produire un manuel indiquant aux programmeurs comment construire l'animation du remplissage de n'importe quel contenant. Cette dernière tâche exige des étudiants d'expliciter (organiser et verbaliser) leur raisonnement de façon claire et précise.

À l'aide d'un pré-test, d'un post-test et d'entrevues, les auteurs évaluent l'impact du module proposé aux étudiants. Les analyses proposées sont donc celles des productions des étudiants lors de ces tests; productions complétées par le contenu d'entrevues avec 8 étudiants sélectionnés. Le pré-test comportait une seule tâche consistant à choisir le graphique représentant la hauteur de l'eau en fonction du volume d'eau lorsqu'on remplit une bouteille sphérique vide à un débit constant. Parmi les 4 choix proposés : 1) une ligne droite ascendante, 2) une courbe strictement concave vers le haut, 3) une courbe strictement concave vers le bas et 4) la courbe correcte qui est d'abord concave vers le bas puis vers le haut, seuls 5 étudiants choisirent l'option 4) alors que 13 choisirent l'option 1) et 6 les options 2) ou 3). Pour le post-test le même contexte fût utilisé, mais la bouteille était composée d'une partie sphérique puis d'une partie cylindrique et finalement d'un cône tronqué (voir Figure 7).

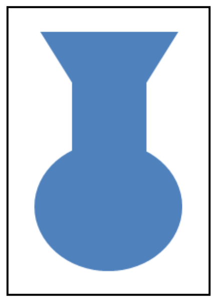


Figure 7 Schéma de la bouteille fournie dans le post-test par Carlson et al. (2001)

On demandait alors aux étudiants de construire le graphique et d'expliquer leur démarche. Pour les auteurs, 23 des 24 étudiants ont fourni une réponse satisfaisante. Leurs explications ont alors été séparées en sept catégories, chacune étant associée à une action mentale et à un exemple de verbalisation d'étudiant (voir Tableau 3).

D'après les auteurs, ces résultats suggèrent que, à la suite au module, la plupart des étudiants ont atteint le cinquième niveau de raisonnement, c'est-à-dire qu'ils sont capables de construire l'image continue d'un taux de variation qui augmente ou diminue alors que la variable indépendante varie sur l'ensemble du domaine. Les entrevues semblent de plus avoir confirmé les habiletés des étudiants à mobiliser l'ensemble des actions mentales associées au raisonnement covariationnel. En effet, les chercheurs ont proposé d'autres contextes, comme celui d'une piste de course sur laquelle on s'intéresse à la variation de la distance la plus courte entre le coureur et le point de départ alors que la distance parcourue augmente, et les étudiants ont mobilisé les mêmes actions mentales que dans la situation de la bouteille. Les auteurs concluent que les étudiants ont développé un raisonnement covariationnel et que, de ce fait, l'impact du module a eu un effet positif sur leur apprentissage.

Tableau 3 Catégories de raisonnement lors du post-test dans Carlson et al. (2001): verbalisations et actions mentales associées

Caté-gorie	Exemple de verbalisation	Action mentale associée	Nombre d'étudiants
1	"For the bottom half of the bottle the height was increasing but at a decreasing rate; then after the middle, the height increased at an increasing rate."	5	7
2	"At first there is an increasing amount of volume needed as the height raises; then there is an increasing height as the volume changes evenly."	5	1
3	"As the bottle gets wider, the rate it filled decreased; then as the bottle gets narrower the rate it filled increased."	5	7
4	"As the cross-sections get progressively wider the height increases at a slower rate because it takes more volume to fill the container evenly – as the cross-sections get smaller the height increases at a quicker and quicker rate."	5	2
5	"From the initial filling, the rate of the height increases more slowly than the volume, resulting in a concave down shape; then at the halfway point the rate of increase of the height increased more and more rapidly resulting in a concave up graph."	5	3
6	"Longer to fill results in a concave down construction and less time to fill results in a concave up construction."	?	2
7	"If the bottle is getting wider, it is concave down and if the bottle is getting narrower it is concave up."	?	2

2.3.1.3.2 Résultats de la seconde expérimentation : évaluation du raisonnement covariationnel mobilisé par des étudiants avancés (Carlson, 2002; Carlson et al., 2002; Oehrtman et al., 2008)

Afin d'évaluer les habiletés d'étudiants avancés à mobiliser un raisonnement covariationnel, les auteurs ont tenté de repéré la mobilisation des actions mentales associées à ce raisonnement dans les productions de vingt étudiants universitaires ayant récemment complété le second semestre d'un cours de calcul différentiel et intégral avec la note A. Ces étudiants représentaient d'ailleurs presque tous ceux ayant obtenu la note A dans cinq groupes différents avec des enseignants différents, le matériel utilisé dans ces cours étant de type traditionnel et les lectures étant privilégiées. Ils ont été rémunérés pour répondre à un test comportant cinq problèmes, puis six d'entre eux ont été invités à une entrevue clinique de 90 minutes pour laquelle ils étaient aussi rémunérés. La sélection des étudiants pour les entrevues a été faite de manière à obtenir des détails sur les différents types de raisonnement.

Les étudiants ont complété ce test moins d'une semaine après la fin de leur examen final. Lors du test, la calculatrice n'était pas permise, mais il n'y avait pas de restriction de temps. Les entrevues ont été menées dans les deux jours suivants. Ces entrevues avaient pour objectif d'amener les étudiants à regarder leurs réponses, les expliquer davantage, les clarifier, voire les corriger. L'intervieweur n'est pas vraiment intervenu sauf pour demander des clarifications. L'analyse des entrevues a été faite par deux chercheurs. Chacun d'entre eux ayant évalué les actions mentales révélées et le niveau atteint par chaque étudiant, l'étiquetage final fût le résultat d'une discussion et d'une entente entre les deux chercheurs.

Nous présentons ici les résultats obtenus pour les trois premiers problèmes présentés dans Carlson et al.(2002) et pour le quatrième présenté dans Carlson (2002).

Pour le premier problème, celui de la bouteille (Figure 8), la tâche consistait à imaginer une bouteille se remplir et à tracer l'esquisse du graphique de la hauteur de l'eau en fonction de la quantité d'eau dans la bouteille. Seulement cinq des vingt étudiants interrogés (25%) ont fourni une solution jugée acceptable alors que quatorze (70%) ont construit un graphique croissant strictement ouvert soit vers le haut, soit vers le bas. Lors des entrevues, les deux étudiants ayant fourni des réponses témoignant d'une image d'un taux instantané variant continuellement (5^e action mentale) dans leur test ont réagi différemment. Le premier étudiant a confirmé sa compréhension en considérant le point d'inflexion comme étant « l'endroit où le taux de variation du remplissage passe de décroissant à croissant ». Le second quant à lui n'a pas su démontrer une réelle compréhension du phénomène puisque lorsqu'on lui a demandé pourquoi il construisait une courbe continue et lisse au lieu d'un ensemble de segments, il a répondu « je sais seulement que cela doit être comme ça parce que c'est à cela que ressemblent toujours les graphiques et pas à une série de segments connectés ».

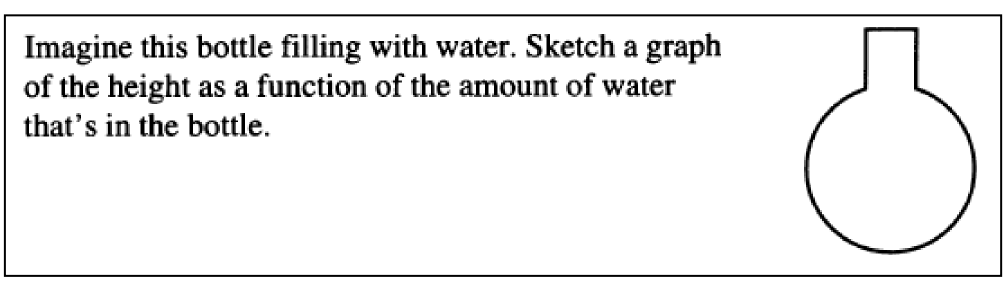


Figure 8 Le problème de la bouteille (Carlson et al., 2002, p.360)

Au second problème (Figure 9), le graphique du taux de variation de la température en fonction du temps est fourni sur une période de huit heures. On demande alors de tracer l'esquisse du graphique de la température en fonction du temps sur cette même période. Les auteurs indiquent que 20% des étudiants (4/20) ont construit un graphique acceptable et que 25% (5/20) ont simplement reproduit le graphique donné. Il est à noter que 30% des étudiants (6/20) ont omis de considérer les changements de concavité à t=2 et t=5. Lors des entrevues, un étudiant ayant construit un graphique correct a expliqué sa démarche en répétant des éléments appris (par exemple : « si la dérivée première est positive alors la fonction est croissante »), mais lorsqu'on lui a demandé d'expliquer son raisonnement, il a indiqué que c'est ce qu'il avait appris en classe et qu'il ne savait pas comment faire autrement. Un autre étudiant, ayant simplement reproduit le graphique fourni a indiqué qu'il était décontenancé, qu'il n'était pas capable de se détacher du graphique fourni et donc qu'il ne pouvait que le reproduire.

Given the graph of the rate of change of the temperature over an 8-hour time period, construct a rough sketch of the graph of the temperature over the 8-hour time period. Assume the temperature at time $t = 0$ is 0 degrees Celsius.

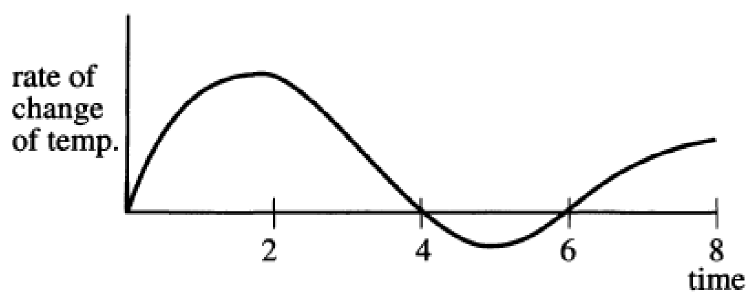


Figure 9 Problème de la température (Carlson et al., 2002, p.369)

Pour ce qui est du problème de l'échelle dont le haut est appuyé contre un mur et dont le bas glisse sur le sol (Figure 10), 40% des étudiants (8/20) ont fourni une justification précise au fait que la vitesse du sommet de l'échelle augmente lorsque la base de l'échelle s'éloigne du mur à vitesse constante. Cinq étudiants (25%) ont indiqué que la vitesse du sommet de l'échelle augmente, mais sans fournir de justification, alors que cinq étudiants (25%) ont indiqué que la vitesse du sommet de l'échelle est constante et deux (10%) que la vitesse diminue. Il est apparu que les étudiants ayant correctement répondu à la question s'étaient imaginé l'échelle glisser et avaient même représenté sur papier différentes positions successives de l'échelle. Cette visualisation a été confirmée lors des entrevues puisque des étudiants interrogés utilisaient le matériel qu'ils avaient sous la main (cahier et stylo) pour montrer ce qu'ils voyaient et supporter leurs explications. En entrevue, les étudiants qui avaient répondu que la vitesse du sommet de l'échelle était constante ont produit des dessins confirmant leur point de vue. Ainsi, de manière à avoir un décroissement constant de la distance le long du mur, ils changent la longueur de l'échelle sans vraiment réaliser que cela n'a pas de sens. Ainsi, leur modélisation de la situation est fausse mais ils ne s'en rendent pas compte.

> From a vertical position against a wall, a ladder is pulled away at the bottom at a constant rate. Describe the speed of the top of the ladder as it slides down the wall. Justify your claim.

Figure 10 Problème de l'échelle (Carlson et al., 2002, p.371)

Dans le cas du quatrième problème, celui de la piste de course (Figure 11), on demande aux étudiants de construire l'esquisse du graphique de la distance la plus courte entre Joni et la ligne de départ en fonction du temps pour une course d'un demi mille que Joni effectue sur une piste ovale d'un quart de mille, la vitesse de Joni étant considérée constante. Parmi les étudiants interrogés, moins de 5%[18] ont pu construire le graphique correct. La plupart tracèrent une ligne droite croissante. Durant les interviews, les étudiants étaient capables de parler du fait que la distance variait au cours du temps, mais ils n'étaient pas capables de tracer le graphique représentant le phénomène. Les auteurs constatent que les résultats sont semblables à ceux obtenus avec les problèmes de la bouteille et de l'échelle.

[18] Nous rapportons cette donnée comme le fait l'auteure. Il semble toutefois que ce pourcentage ait été calculé à partir d'un échantillon de 26 étudiants. Ainsi, « moins de 5% » correspondrait à 1 étudiant sur les 26.

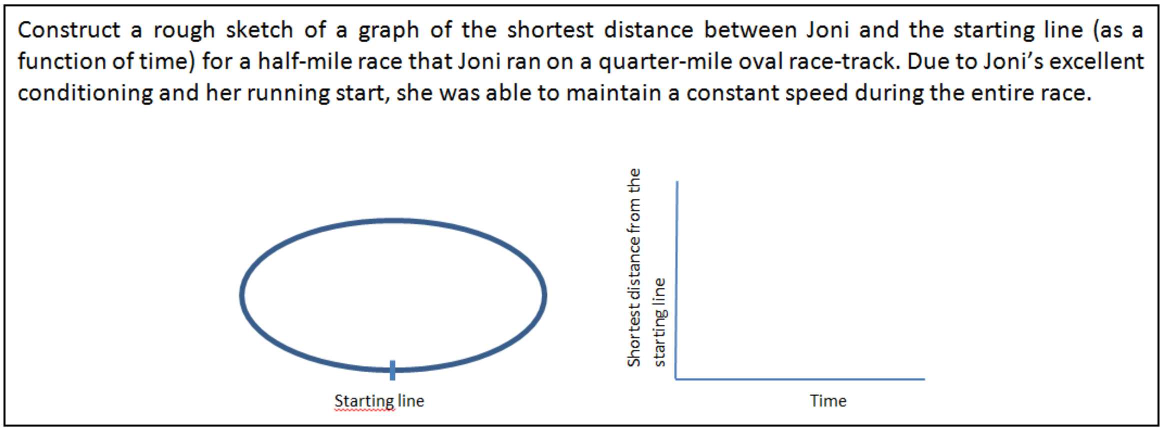


Figure 11 Problème de la piste de course (Carlson, 2002, p.68)

Selon les auteurs, l'ensemble des résultats met en évidence la disparité des capacités des étudiants à utiliser un raisonnement covariationnel lors du travail sur des situations dynamiques. La plupart d'entre eux ont de la difficulté à se construire une image d'un taux de variation qui change continuellement. Il y a donc peu de témoignage de la cinquième action mentale. Néanmoins, la majorité des étudiants ont apparemment déployé un raisonnement associé au 3e niveau, c'est-à-dire que leurs comportements ont montré qu'ils étaient capables de coordonner les changements de direction et de quantifier le changement de la variable dépendante s'opérant en tandem avec le changement de la variable indépendante. Finalement, il est apparu que la majorité des étudiants :

- ne pouvaient pas coordonner de manière certaine les changements du taux de variation moyen pour des accroissements fixes de la variable indépendante;
- n'étaient pas capables, de manière certaine, de coordonner le taux de variation instantané avec la variation continue de la variable indépendante;
- ont eu de la difficulté à expliquer pourquoi une courbe est lisse et ce que signifie un point d'inflexion.

En conclusion, les auteurs rappellent que certaines études ont montré que l'idée de base de la covariation était accessible aux élèves du secondaire (Confrey et Smith, 1994; Thompson, 1994b) et que, par conséquent, tout porte à croire qu'elle l'est aussi pour des étudiants universitaires. Toutefois, les résultats de cette recherche mettent en évidence la difficulté des étudiants à déployer un raisonnement covariationnel dans le contexte de l'enseignement conventionnel au sein duquel les activités permettant de développer des habiletés à percevoir et manipuler les aspects covariants de la fonction sont absentes.

2.3.1.3.3 D'autres résultats dégagés par Carlson sur les caractéristiques du travail favorisant le développement du raisonnement covariationnel

Il faut noter que le défrichage que proposent les recherches de Carlson et ses collègues sur le développement d'un raisonnement covariationnel chez des étudiants de niveaux collégial et universitaire a pour principal objectif de justifier la nécessité d'introduire un travail sur la covariation dans l'enseignement des fonctions en calcul différentiel et intégral. La pertinence de cette introduction, qui repose sur l'hypothèse que la compréhension de l'idée de covariation à l'intérieur de l'étude des fonctions supporte la compréhension de concepts fondamentaux en calcul différentiel, est mise en évidence de deux manières : 1) l'enseignement actuel ne permet pas aux élèves de développer des habiletés à percevoir et utiliser les aspects covariants de la fonction et 2) un enseignement spécifique sur la covariation permet le développement d'un raisonnement covariationnel chez les élèves. Le contenu de l'enseignement spécifique communiqué est constitué d'activités et donc de contextes et de questions sur ces contextes. Les caractéristiques de ces activités ainsi que leur influence sur le développement du raisonnement covariationnel sont toutefois peu explicités. Deux éléments seulement sont mis de l'avant : le rôle des manipulations physique et mentale, et le type de question sollicitant chacune des actions mentales.

Premièrement, pour Carlson (2002), les entrevues avec les étudiants ont révélé que la visualisation du phénomène dynamique ainsi que le travail sur la représentation visuelle avaient joué un rôle important dans le développement du raisonnement covariationnel. En effet, dans le problème de la piste de la course (cf Figure 11), les étudiants ont imaginé le coureur se déplacer sur la piste et ont tracé au fur et à mesure les segments représentant la distance la plus courte entre le coureur et la ligne de départ sur le schéma. Ils ont alors pu regarder comment évoluait cette distance tout au long du déplacement du coureur. Cette manipulation mentale et physique du phénomène a contribué à susciter l'intérêt des étudiants à donner du sens à la covariation. Cela les a apparemment amenés à établir des connexions mentales favorisant le développement du raisonnement covariationnel. De plus, Carlson pense que la visualisation du phénomène dynamique, rendue possible grâce à la manipulation physique et mentale du système créé par la situation, est un moyen d'effectuer la transition vers des représentations plus abstraites tels les graphiques et les formules.

Deuxièmement, Oehrtman, Carlson et Thompson (2008) proposent une réflexion théorique sur l'enseignement et l'apprentissage du raisonnement covariationnel dans le cadre d'un cours de calcul différentiel. Selon eux, l'habileté à interpréter la nature changeante des situations fonctionnelles est fondamentale pour comprendre les principaux concepts de ce cours. Cette idée transparait dans les recommandations qu'ils font à propos du travail sur la covariation. La principale recommandation concerne le type de questions à poser pour solliciter la mobilisation de chacune des actions mentales identifiées dans le modèle de développement du raisonnement covariationnel :

- 1e action mentale : poser des questions du type « Quelles sont les quantités qui changent et quelles sont les quantités qui influencent d'autres quantités? Existe-t-il une seule quantité qui détermine la valeur des autres quantités? Comment les variables sont-elles liées et à l'aide de quelle représentation cette relation peut-elle être exprimée? »
- 2e action mentale : demander si la fonction croit ou décroit lorsque la variable indépendante augmente (ou diminue) à partir de divers modes de représentation.
- 3e action mentale : demander de décrire le changement de la fonction pour des accroissements constants de la variable indépendante.
- 4e action mentale : demander de regarder et d'interpréter différents taux de variation moyens, et ce, à l'aide de plusieurs représentations.
- 5e action mentale : demander d'anticiper les informations sur la dérivée seconde dans le contexte du problème, par exemple, en décrivant la variation du taux de variation d'une fonction lorsque la variable indépendante varie continuellement sur l'ensemble du domaine de la fonction ou encore en déterminant les points d'inflexion et leur interprétation dans le contexte du problème.

2.3.1.3.4 Synthèse, interprétation et questionnement à propos du cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de Carlson et de son utilisation

Le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de Carlson offre une description des différents éléments de raisonnement impliqués dans le cadre de la réalisation de tâches sollicitant les aspects covariants de la fonction. Les recherches menées mettent en évidence, d'une part, des lacunes de l'enseignement conventionnel de l'étude des fonctions dans un contexte algébrique au secondaire et dans le contexte de l'étude du calcul différentiel et, d'autre part, le potentiel de situations visant le travail de la covariation pour l'amélioration de cet enseignement. Ces recherches ne constituent toutefois que des amorces d'analyse du développement du raisonnement covariationnel. **Il nous apparaît donc important de poursuivre ce travail afin de mieux comprendre, notamment, comment s'opérationnalise ce raisonnement dans l'action.** Dans cette optique, nous proposons une synthèse interprétative des idées de Carlson et la mise en évidence du questionnement qu'elle suscite sur trois thèmes : la description des actions mentales, l'analyse du développement d'un raisonnement covariationnel et les activités sollicitant un raisonnement covariationnel.

À propos de la description des actions mentales

Selon notre interprétation des descriptions des actions mentales et des niveaux de développement du raisonnement covariationnel de Carlson, nous comprenons que :

1. La première action mentale est liée aux habiletés à déterminer l'existence d'une relation fonctionnelle, à identifier les variables indépendante et dépendante et à reconnaître le type de relation entretenu par les variables. De ces propos, nous dégageons particulièrement l'aspect de dépendance de la fonction lorsqu'il est question d'une relation entre les variables et du fait que l'une des variables dépend de l'autre.
2. La seconde action mentale concerne la détermination de la variation de la fonction en termes de croissance, décroissance ou constance, mais cette variation est décrite en tenant compte des variations concomitantes des grandeurs : lorsque la variable indépendante augmente, la variable dépendante augmente, diminue ou reste constante. L'aspect de variation de la fonction nous semble ici mis de l'avant puisqu'on s'intéresse de manière globale à la variation d'une grandeur lorsque l'autre varie.
3. La troisième action mentale repose sur une analyse du changement de la grandeur dépendante lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante est constant. D'après le type de questionnement suggéré pour solliciter cette action mentale, il semble que l'idée de prendre des accroissements (ou des écarts ou des augmentations) constants de la grandeur dépendante soit donnée aux étudiants.

4. Pour la quatrième action mentale, il est question de considérer et interpréter plusieurs taux de variation moyens. Il nous apparait difficile d'identifier exactement ce qui est demandé aux étudiants et ce qui est attendu comme solution. Dans Carlson (2002), il est stipulé que les étudiants qui mobilisent cette action mentale tracent des sécantes à la courbe sur le graphique ou calculent mentalement le taux de variation moyen (ou la pente de la sécante). Toutefois, on ne sait pas quelles interprétations doivent être faites ni comment les étudiants font le lien entre le changement de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante, le taux de variation et la sécante tracée. Nous nous demandons aussi si cette action mentale est liée à un travail qualitatif ou quantitatif puisqu'il est parfois question de calcul et parfois de description.
5. La cinquième action mentale est liée à l'habileté à décrire la variation du taux de variation de la fonction et donc de décrire la variation de la dérivée de cette fonction. Dans Carlson (2002), il est précisé que cette action mentale concerne le taux de variation instantané résultant du raffinement du taux de variation moyen. On comprend donc qu'un lien est fait avec la quatrième action mentale, mais on ne sait pas si le questionnement proposé amène les étudiants à faire ce lien et si oui, comment.

En outre, nous comprenons que la première action mentale est liée à la considération d'une fonction alors que la cinquième est liée à la considération de la fonction dérivée de cette fonction. Il nous semble donc que les cinq actions mentales pourraient servir d'appui à l'investigation des étapes d'une approche covariationnelle de la fonction comme moyen de favoriser le passage de la fonction à la fonction dérivée.

À propos de l'analyse du développement du raisonnement covariationnel chez les élèves

Lors de l'utilisation de la grille d'analyse du raisonnement covariationnel pour évaluer le niveau de raisonnement atteint par les élèves après un enseignement spécifique (Carlson et al., 2001), Carlson et ses collègues ont constaté qu'il arrivait que certains étudiants présentent des comportements laissant croire qu'ils mobilisaient une certaine action mentale, mais sans qu'il y ait de preuve d'une compréhension réelle par ceux-ci des actions posées. Ainsi, ils pointent en quelque sorte une faiblesse dans la méthodologie d'attribution d'un niveau de raisonnement atteint par un étudiant. En effet, l'utilisation de la grille pour analyser des solutions d'étudiants implique que les actions posées soient considérées comme le témoin des actions mentales mobilisées. Mais alors, toute action posée est vue comme le résultat d'un raisonnement. Or, il est possible qu'un élève agisse par imitation ou reproduction et qu'il ne mobilise ainsi pas réellement l'une des actions mentales identifiées. **Nous pensons que pour pallier cette difficulté dans l'analyse, il faudrait considérer l'ensemble du processus de raisonnement afin de mieux comprendre la logique sous-jacente à la mobilisation apparente d'une action mentale.**

Ensuite, la perspective développementale dans laquelle s'inscrit le cadre de l'analyse du raisonnement covariationnel implique, d'une part, qu'il existe une évolution de la pensée qui n'est possible que si des liens sont faits entre les différentes actions mentales. **Il serait donc important de se questionner sur la nature de ces liens et sur les moyens de les mettre en place.** Dans les analyses du raisonnement covariationnel suggérées par Carlson et ses collègues, il n'y pas de précisions sur les liens établis par les élèves ni sur les moyens de les amener à faire ces liens. D'autre part, le développement du raisonnement covariationnel investigué est celui issu de la comparaison de deux états, avant et après un enseignement spécifique (Carlson et al., 2001). **Il serait toutefois intéressant et nécessaire d'explorer le processus de développement dans la dynamique du raisonnement pendant la réalisation des activités.**

Finalement, la mobilisation lors d'une tâche spécifique d'une action mentale donnée semble associée par Carlson et ses collègues à l'atteinte d'un niveau de raisonnement de manière absolue. On pourrait toutefois se demander si le même niveau de raisonnement serait atteint dans le cadre d'une autre tâche et, si non, **dans quelle mesure les caractéristiques des situations influencent-elles la mobilisation des actions mentales et l'atteinte d'un certain niveau de raisonnement.**

À propos des activités sollicitant un raisonnement covariationnel

Selon les observations de Carlson, les manipulations physiques et mentales jouent un rôle important dans le développement d'un raisonnement covariationnel, ce qui apparait logique dans la mesure où l'idée de covariation repose sur les variations concomitantes de deux grandeurs qui se perçoivent lorsque des phénomènes dynamiques s'opèrent. La place et le rôle de ces manipulations au sein de la dynamique du raisonnement n'ont toutefois pas été mis en évidence par les analyses proposées par Carlson et ses collègues. **Il est donc encore une fois**

difficile d'établir les modalités d'utilisation des simulations physiques dans les situations d'enseignement, doivent-elles être réalisées par les élèves, sont-elles nécessaires pour solliciter chaque action mentale, quels contextes sont propices à des manipulations physiques signifiantes?

Le type de questionnement sollicitant chaque action mentale suggéré par Carlson et ses collègues donne des indications sur les situations qui peuvent être utilisées pour développer le raisonnement covariationnel. L'aspect décontextualisé de ce questionnement ne permet cependant pas de mettre en relief la pertinence de déployer un raisonnement covariationnel. Or, pour nous, un raisonnement est déployé de manière pertinente lorsqu'il répond à un besoin, qu'il permet de cheminer vers une réponse à un problème. **Il nous apparait donc important de préciser pour répondre à quelles questions le déploiement d'un raisonnement covariationnel s'avère-t-il pertinent.** De plus, la forme du questionnement suggéré semble située dans la perspective d'évaluer les habiletés des élèves à mobiliser des actions mentales lorsqu'elles sont spécifiquement appelées. **Il serait toutefois intéressant d'identifier, en dehors d'un contrat didactique établi, les questions sollicitant la mobilisation spontanée de ces actions mentales.**

En général, les études de Carlson et ses collègues ne mettent pas évidence le rôle des situations lors de la mobilisation des actions mentales. En effet, d'une part, les analyses *a priori* des activités n'apparaissent pas, il est donc difficile de savoir à quoi s'attendent les chercheurs et en quoi les activités choisies appellent effectivement les actions mentales visées. D'autre part, les analyses du raisonnement des élèves ne sont pas suffisamment approfondies pour permettre d'évaluer l'influence des caractéristiques des situations choisies. Nous avons d'ailleurs constaté, en réalisant nous-même certaines tâches proposées par Carlson et ses collègues, qu'à l'instar des élèves nous n'aurions pas forcément mobilisé les actions mentales attendues. La non prise en compte explicite du rôle des situations dans la mobilisation des actions mentales ainsi que le manque d'indications sur le potentiel de ces situations à solliciter un raisonnement covariationnel rend difficile la transposition de ces activités dans un autre contexte. **Par conséquent, il nous apparait important d'analyser les situations en rendant compte des raisons, théoriques ou empiriques, qui laissent penser que des composantes du raisonnement covariationnel sont sollicitées.**

2.3.2 Ébauche d'un questionnement issu de l'analyse des travaux de Carlson

La précédente synthèse interprétative des travaux de Carlson nous a menée à identifier des éléments importants à considérer pour poursuivre l'exploration du raisonnement covariationnel et des tâches qui en suscitent le déploiement. Dans la présente recherche nous contribuons à éclairer les questions suivantes :

- Quelles sont les composantes du raisonnement covariationnel impliquées lors d'une approche covariationnelle de la fonction favorisant le passage de la fonction à la dérivée?
- Comment s'articulent ces composantes dans la dynamique du raisonnement?
- Comment les caractéristiques des situations influencent-elles le déploiement d'un raisonnement covariationnel? Et, plus spécifiquement, à quelle(s) question(s) répond la mobilisation de chaque composante de ce raisonnement?

Dans la section qui suit nous explicitons notre perspective du déploiement d'un raisonnement covariationnel dans le cadre d'un travail sur la notion de fonction visant à préparer les élèves au passage à la dérivée. Ainsi, nous proposons de poursuivre la réflexion de Carlson sur les composantes du raisonnement covariationnel à l'aide d'une analyse *a priori* de l'articulation de ces composantes dans la dynamique du raisonnement.

2.4 Proposition d'un cadre d'analyse du déploiement du raisonnement covariationnel chez des élèves du secondaire

Dans la section précédente nous avons mis en évidence le contexte dans lequel le cadre du développement du raisonnement covariationnel a été mis en place afin de situer les éléments de ce cadre au sein des préoccupations de recherche et des fondements théoriques et empiriques de Carlson. Le travail sur la covariation apparaît alors comme un moyen de développer un raisonnement covariationnel dans l'optique de faire passer les étudiants d'une conception de la fonction mobilisée lors de l'étude du calcul différentiel et intégral en terme d'action à une conception en terme de processus. Ainsi, le travail sur la covariation suggéré s'adresse à des étudiants qui ont déjà été initiés aux outils du calcul différentiel et le développement du raisonnement covariationnel, au sein de tâches sollicitant les aspects covariants de la fonction, vise en quelque sorte à donner un sens à ces outils. L'identification des actions mentales caractérisant le raisonnement covariationnel a donc eu lieu dans le contexte où les outils du calcul différentiel étaient disponibles. On ne sait toutefois pas comment ces outils ont été exploités, quelle place ils occupent au sein du raisonnement et comment on en arrive à leur donner un sens. Pour nous ce type d'implicites rend difficile l'interprétation et l'exploitation de ce cadre par d'autres chercheurs.

Notre perspective sur le raisonnement covariationnel est différente de celle de Carlson. En effet, l'analyse du raisonnement covariationnel déployé en situation par des élèves n'ayant pas encore été initié au calcul différentiel constitue, pour nous, une manière de préciser en quoi consiste une approche covariationnelle de la fonction, notamment, en ce qui concerne le travail sur les accroissements concomitants et les questions sollicitant ce travail. Rappelons que nous avons défini à la section 2.2 **l'approche covariationnelle de la fonction comme une manière de travailler la fonction en situation consistant en l'étude approfondie des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs dans des situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie.** Ainsi, le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel tel que décrit par Carlson doit être adapté au contexte qui nous préoccupe.

Nous proposons donc dans cette section d'adapter le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel mis en place par Carlson afin d'identifier des unités de raisonnement mobilisées en situation, d'expliciter l'actualisation de ces unités dans le discours et d'établir une articulation possible de ces unités au sein de la dynamique du raisonnement déployé dans un but précis, et ce, dans le contexte de tâches associées à une approche covariationnelle de la fonction. En premier lieu, nous préciserons les fondements théoriques qui nous amènent à contraster les idées de Carlson à propos du déploiement d'un raisonnement en mathématiques. Puis, en second lieu, nous présenterons une synthèse de notre propre réflexion menant à l'identification d'unités de raisonnement et à leur possible articulation en situation. De cela, nous dégagerons un cadre d'analyse du raisonnement covariationnel adapté au contexte qui nous préoccupe et nous poserons des questions spécifiques sur le déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation par des élèves de 15 à 18 ans.

2.4.1 Fondements théoriques pour l'analyse du déploiement d'un raisonnement en situation

L'intérêt récent pour le raisonnement covariationnel en fait un objet encore peu connu. Ainsi, nous pensons qu'il serait prématuré de chercher en quoi ce type de raisonnement ressemble et se distingue des autres types de raisonnement habituellement définis en mathématiques. Nous choisissons donc d'adopter un regard global sur le raisonnement pour pouvoir poursuivre l'exploration du raisonnement covariationnel amorcée par Carlson en prenant appui sur certaines réflexions théoriques sur la nature et l'expression du raisonnement en général, sur le lien entre les situations et le déploiement d'un raisonnement en mathématiques et sur les liens spécifiques entre le raisonnement covariationnel et l'activité de modélisation.

Nous adhérons d'abord à certaines idées communiquées par Blanché (1973) dans une perspective philosophique sur la nature du raisonnement en général. Nous notons que le mot raisonnement est ambigu dans la mesure où il désigne à la fois l'acte de penser et son expression dans le discours. Ces deux dimensions sont toutefois intimement liées puisque le discours prend son sens au sein de l'unité de la pensée comme l'exprime L. Brunschvicg :

> « Il n'y a pas de pensée discursive : ce que les discours laissent apercevoir de la pensée, c'est ce qui peut être traduit au-dehors, les termes extérieurs les uns aux autres, matériellement séparables, susceptibles d'une analyse élémentaire analogue à l'analyse chimique; mais la pensée ne se laisse pas épuiser dans cet aspect extérieur, elle est spécifiquement pensée par ce que le discours ne traduit pas, par ce que le perroquet ne comprend pas, c'est-à-dire par l'intelligence des rapports internes, où l'analyse - analogue cette fois à l'analyse mathématique - discerne la condition nécessaire pour donner une signification au discours, retrouvant ainsi l'unité synthétique, forme générale de la pensée. En d'autres termes, la fonction discursive du langage implique la fonction unifiant de la pensée. » (cité par Blanché, 1973, page 36)

Ainsi, dans le discours, on reconnaît le raisonnement comme une certaine manière d'enchaîner des propositions. Mais pour que cet enchaînement soit autre chose qu'une simple succession de phrases isolées, il faut bien qu'un lien logique unisse chaque phrase à la suivante. Or, ce lien n'apparaît pas forcément dans le discours qui ne donne accès qu'à une partie de la pensée. Les implications pour l'analyse du raisonnement sont telles que, n'ayant accès qu'à l'expression écrite ou orale, le processus de raisonnement est forcément investigué au sein du discours. Le défi réside alors en l'identification des propositions, de leur enchaînement, mais aussi de la logique sous-jacente à cet enchaînement.

En outre, le raisonnement étant décrit comme « un mouvement de pensée qui conduit des prémisses à la conclusion en passant par un ou plusieurs intermédiaires » (Blanché, 1973, page 34), les prémisses et la conclusion nous apparaissent jouer un rôle important. Pour l'analyse du raisonnement en situation, nous pensons que les prémisses sont constituées, entre autres, des connaissances de l'individu, connaissances qui lui permettent d'interpréter les données de la situation, et que la conclusion est déterminée par un questionnement qui se pose à l'individu dans cette situation. Ainsi le rôle de la situation est crucial.

L'importance des situations (ou tâches) au sein de la compréhension est particulièrement mise de l'avant par Vergnaud (1990). Pour lui, le sens donné à un concept mathématique peut être associé à des raisonnements, des procédures, des algorithmes etc. qui sont mobilisés dans l'action donc dans le cadre de la réalisation d'une tâche spécifique. La compréhension de l'objet mathématique dépend alors de la tâche dans laquelle il est utilisé et de l'expérience de l'individu qui réalise cette tâche. Cette expérience se composant, entre autres, de l'ensemble des situations qu'il a déjà rencontrées. Dans ce contexte, le sens donné à l'objet mathématique est étroitement lié à cet ensemble de situations connues, mais aussi au champ conceptuel regroupant l'ensemble des situations possibles. Ainsi, pour nous, le raisonnement déployé par un individu dans une situation donnée dépend de son expérience avec ce type de situation et avec les concepts qui sont mis en jeu.
Par ailleurs, le questionnement joue un rôle important puisque c'est lui qui, *a priori*, sollicite l'engagement dans une démarche de résolution et, par conséquent, le déploiement d'un raisonnement. Pour solliciter le déploiement d'un raisonnement par un élève, la situation doit être organisée de manière à ce que l'élève s'y engage. À ce propos, Brousseau (1998) parle de la dévolution comme l'action de faire accepter à l'élève la responsabilité de la situation et la prise en charge de la démarche de résolution. Les problèmes ou les situations doivent donc être choisis de manière à ce que l'élève puisse les accepter mais aussi de manière à le « faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement » (Brousseau, 1998, p.59). Pour cela, nous pensons que, pour considérer que les questions posées orientent le raisonnement de l'élève, il faut d'abord s'assurer que le questionnement est pris en charge par l'élève.

Nous avons montré précédemment qu'une approche covariationnelle de la fonction consistait en une manière d'aborder la fonction en situation. La considération des caractéristiques des situations exploitées dans les recherches antérieures et du contexte historique de co-émergence des notions de fonction et de dérivée permet d'établir un lien étroit entre l'activité de modélisation de situations réelles et le déploiement d'un raisonnement covariationnel. Ainsi, le raisonnement covariationnel pourrait être vu comme un type de raisonnement pouvant être mis à contribution dans le processus de modélisation. Caron (2008), s'appuyant sur (Blum et al., 2002), mentionne que le processus de modélisation est cyclique et qu'il inclut notamment les phases suivantes : la structuration et la simplification d'une situation issue du monde réel, la traduction du problème en un modèle mathématique, le travail mathématique sur le modèle pour aboutir à une solution au problème et l'interprétation et la validation des résultats à l'égard de la situation de départ.

En synthèse, le raisonnement peut être associé à une succession de propositions selon une certaine logique. Cette logique dépend, d'une part, de la situation et donc des questions qui se posent dans cette situation et, d'autre part, des connaissances de l'individu qui déploie le raisonnement. Les propositions mobilisées et leur articulation dans la dynamique du raisonnement sont donc tributaires des caractéristiques de la situation et des connaissances de l'individu qui fait face à cette situation. Par ailleurs, le déploiement d'un raisonnement covariationnel est un processus dynamique qui nécessite l'engagement dans une activité de modélisation de situations fonctionnelles. Ainsi, pour nous, l'analyse du déploiement d'un raisonnement en situation consiste en l'identification **d'unités de raisonnement ou unités de processus de modélisation**[19] et de la logique menant à **leur articulation** dans un but précis, logique qui informe sur l'interprétation de la situation par l'individu et sur les questions qu'il se pose dans cette situation.

[19] Nous appelons unités de raisonnement ou unités de processus de modélisation, les composantes du raisonnement covariationnel qui s'articulent en situation. Ces unités sont donc une adaptation des « propositions » évoquées dans la définition générale du raisonnement. Afin de faciliter la lecture, nous parlerons uniquement d'unités de raisonnement dans la suite du document.

2.4.2 Mise en évidence d'unités de raisonnement et de leur articulation lors du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous pensons qu'il est nécessaire d'adapter le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de Carlson dans la mesure où le contexte dans lequel nous nous intéressons au déploiement de ce type de raisonnement n'est pas le même et que les descriptions des composantes du raisonnement covariationnel identifiées par Carlson (actions mentales) comportent certains implicites rendant difficile leur interprétation. Notre objectif est effectivement d'identifier les caractéristiques possibles d'une approche covariationnelle de la fonction favorisant le passage de la fonction à la dérivée par l'intermédiaire de l'analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation. Nous avons établi que globalement une approche covariationnelle de la fonction consistait en une étude des variations concomitantes de deux grandeurs via un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs dans l'optique de déterminer précisément comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie.

Dans ce contexte, afin de mieux comprendre comment le raisonnement covariationnel peut s'actualiser dans l'action et d'identifier et expliciter des composantes de ce raisonnement ainsi que leur possible articulation, nous avons procédé à une auto-analyse du raisonnement covariationnel déployé dans une situation donnée. Nous avons choisi un problème typique d'étude du mouvement répondant aux caractéristiques des situations propices à un travail sur la covariation dans la visée du passage à la dérivée identifiées à la section 2.2 et aux recommandations de Carlson et ses collègues pour solliciter un raisonnement covariationnel. Ainsi, nous avons affaire à une situation réelle (une voiture qui se déplace) dans laquelle le questionnement vise à explorer le comportement de la distance puis de la vitesse lorsque le temps passe. Puis nous avons résolu ce problème dans une perspective de construction didactique des savoirs en utilisant des notions et des outils que nous savons disponibles *avant* l'étude du calcul différentiel à l'école[20]. L'analyse détaillée de notre raisonnement, exprimé dans le discours tout au long de la démarche de résolution du problème, met en évidence les

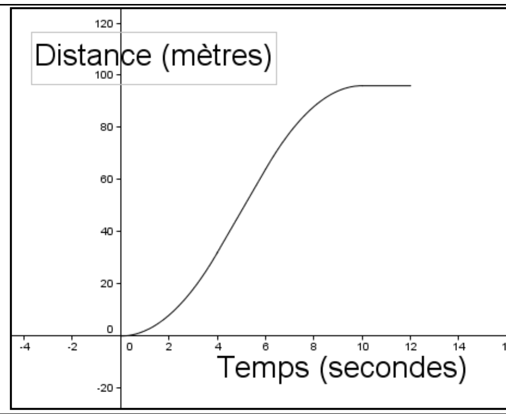
[20] À l'origine, nous nous étions engagée dans cette démarche de résolution afin d'expliciter, dans un registre verbal, les liens entre l'idée de covariation et les notions de fonction et de dérivée à partir d'un exemple. Nous avons constaté par la suite que cet exercice de verbalisation avait permis de donner un sens au passage de la fonction à la dérivée et de rendre accessible les composantes du raisonnement déployé dans un tel contexte.

différentes unités de raisonnement mobilisées ainsi que leur articulation pour atteindre le but visé, c'est-à-dire pour répondre aux questions posées. En outre, notre démarche montre comment nous donnons un sens à l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs par l'intermédiaire d'un travail sur les accroissements concomitants de ces deux grandeurs. Elle révèle aussi comment une telle approche covariationnelle de la fonction permet le passage à la notion de dérivée. En fait, cette démarche d'auto-analyse joue un rôle important dans cette recherche puisqu'elle permet d'expliciter les liens entre les notions de fonction, de dérivée et l'idée de covariation, lesquels donnent un sens aux propos des chercheurs rapportés dans la problématique (Chapitre I).

L'analyse complète de notre démarche est disponible en annexe (Annexe 1). Nous présentons ici le problème puis une synthèse de notre démarche de résolution de ce problème. Cette synthèse met en évidence deux dimensions à l'exploitation du travail sur les accroissements, l'une qualitative et l'autre quantitative, ainsi que les liens entre ces deux dimensions. Finalement, nous présentons les unités de raisonnement que cette analyse nous a permis de dégager et l'articulation de ces unités dans le contexte de notre résolution au problème proposé.

2.4.2.1 Le problème de la voiture

Rappelons, qu'historiquement, les problèmes de mouvement dans lesquels on s'intéressait à la position d'un mobile au cours du temps ont mené à la construction du calcul différentiel (Charbonneau, 1985). Dans ce contexte, la fonction était définie à partir des variations concomitantes de deux grandeurs (cf la définition d'Euler présentée à la section 1.3.1.4). Ce type de problème nous apparaît donc approprié pour mettre en évidence le déploiement d'un raisonnement covariationnel dans l'optique du passage de la fonction à la dérivée. Nous proposons une version moderne de ce type de problème dans lequel on s'intéresse à la distance parcourue par une automobile au cours du temps. Voici donc le contexte et le graphique fourni:

Le graphique ci-contre présente la distance parcourue par une automobile en fonction du temps.	

La fonction *f* qui exprime la distance parcourue par la voiture en fonction du temps est présentée sur l'intervalle $[0,12]$ on peut donc voir comment évolue la distance parcourue dans un intervalle de 12 secondes.

Afin d'étudier le phénomène présenté, nous allons répondre à plusieurs questions :

1) Comment varie la distance lorsque le temps augmente?
2) Est-ce que la façon de varier est la même entre 2 et 4 secondes, et entre 4 et 6 secondes?
3) Quelle est la vitesse maximale atteinte par la voiture?
4) À quel moment la voiture roule-t-elle exactement à 15 m/s?
5) Quelle est la vitesse exacte de la voiture 2 secondes après le début de l'observation?

2.4.2.2 Synthèse de la démarche de résolution du problème de la voiture

Tout au long de la résolution du problème de la voiture, nous avons mis en évidence des unités de raisonnement et les liens entre ces unités de raisonnement. Nous avons montré comment pouvait se faire l'étude des accroissements concomitants des deux grandeurs, et ce, dans le but de répondre à des questions spécifiques sur la fonction. Nous avons vu que, selon la question posée, cette étude des accroissements pouvait être faite de manière qualitative ou de manière quantitative. Des liens entre les différentes questions et entre les unités de raisonnement mobilisées pour y répondre ont aussi été mis en évidence. Nous proposons donc de reprendre les différentes étapes de la démarche en généralisant les raisonnements et les liens entre les raisonnements.

L'étude qualitative des accroissements concomitants de deux grandeurs

Lors de l'étude de la fonction selon laquelle la grandeur B dépend de la grandeur A, on peut se questionner sur « comment varie une grandeur B lorsque la grandeur A augmente ». La réponse à cette question est une description du type « quand la grandeur A augmente, la grandeur B diminue ». On peut arriver à cette réponse soit en considérant les différentes valeurs que prend la grandeur dépendante (approche par la correspondance), soit en considérant les accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements de la grandeur indépendante (approche par la covariation). La seconde possibilité bien que peu commune présente des avantages. D'une part, elle permet de garder en tête qu'il y a deux grandeurs qui varient et, d'autre part, elle initie l'étude des accroissements qui offre une manière de traiter un questionnement plus large.

Un premier questionnement concerne la façon de varier de la grandeur dépendante. En fait, on pourrait envisager répondre à la question « comment varie une grandeur B lorsque la grandeur A augmente » en faisant une analyse plus approfondie des accroissements. On fixe alors la variation de la grandeur indépendante en prenant des accroissements constants. Une étude qualitative, mais spécifique, consiste donc à prendre des accroissements constants de la grandeur indépendante A et à comparer les accroissements (ou les décroissements) de la grandeur dépendante B. Plusieurs cas sont alors possibles :

• les accroissements de B sont de plus en plus grands • les accroissements de B sont de plus en plus petits • les accroissements de B sont constants	• les décroissements de B sont de plus en plus grands • les décroissements de B sont de plus en plus petits • les décroissements de B sont constants

Cette étude spécifique permet de mettre en évidence différentes phases de variation – une phase correspondant à un intervalle sur lequel la façon de varier est la même. Cependant, si les accroissements de la grandeur indépendante sont trop grands, il est possible que ces phases ne se dégagent pas. De plus, sur une phase identifiée, il est possible que des changements de variation mineurs aient lieu et on ne peut s'en rendre compte que si on prend des accroissements plus petits de la grandeur indépendante. Évidemment, si ce travail s'effectue sur un graphique, comme c'est le cas dans le problème de la voiture, on est limité à ce qui est visible.

Lorsqu'on compare les accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante, on compare en quelque sorte des taux de variation sans nécessairement le savoir. La notion de taux n'est en fait pas nécessaire tant qu'on travaille au niveau qualitatif. Elle devient par contre très importante lorsqu'on étudie quantitativement les accroissements concomitants des deux grandeurs.

L'étude quantitative des accroissements concomitants de deux grandeurs

L'étude quantitative permet de répondre à de nouvelles questions. Dans le problème de la voiture, les questions portant sur la quantification de la vitesse nécessitaient une étude quantitative des accroissements. Selon nous, les questions exigeant une quantification sont celles qui portent directement sur le taux, que cela soit fait implicitement ou explicitement, le taux de variation étant le rapport entre l'accroissement (ou le décroissement) de la grandeur dépendante et l'accroissement de la grandeur indépendante correspondant :

$$taux\ de\ variation = \frac{accroissement\ (ou\ décroissement) de\ la\ grandeur\ dépendante}{accroissement\ de\ la\ grandeur\ indépendante}.$$

Ainsi, dans toute situation fonctionnelle on peut s'intéresser au taux de variation, mais certains contextes nécessitent la distinction entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané comme c'est le cas dans le problème de la voiture.

Un premier niveau d'étude quantitative des accroissements pourrait donc être celui associé au taux de variation moyen. Tout rapport entre un accroissement de la grandeur dépendante et l'accroissement correspondant de la grandeur indépendante correspond à un taux de variation moyen. Un second niveau concernerait alors le taux de variation instantané. Ce taux correspond à la limite du rapport entre l'accroissement de la grandeur dépendante et l'accroissement correspondant de la grandeur indépendante lorsque ce dernier tend vers 0. Le passage au taux de variation instantané peut donc être fait à partir du taux de variation moyen en prenant des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante. À ce sujet, le mouvement uniformément accéléré dans le problème de la voiture ne favorisait pas ce passage à la limite puisque le taux de variation moyen sur l'intervalle $[t-\alpha, t+\alpha]$ était égal au taux de variation instantané à l'instant t[21]. Regardons donc comment s'effectue le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané en général.

Sur le graphique de la fonction h telle que $y=h(x)$ (voir Figure 12), on cherche le taux de variation instantané[22] en x_0. On sait que le taux de variation moyen correspond au rapport entre les accroissements de la variable dépendante et indépendante qui se correspondent. Entre $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$, l'accroissement de la variable indépendante est 2α et l'accroissement correspondant de la variable dépendante est $h(x_0 + \alpha) - h(x_0 - \alpha)$. Le taux de variation moyen est donc égal à $\frac{h(x_0+\alpha)-h(x_0-\alpha)}{2\alpha}$. Lorsqu'on prend des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante on prend en fait un α de plus en plus petit. À un certain moment, α devient tellement petit qu'il est presque nul. Pourtant, potentiellement, il existe toujours une valeur plus petite que la précédente, c'est pourquoi la notion de limite est importante. En effet, le taux de variation instantané en x_0 correspond à la limite du rapport des accroissements lorsque α tend vers 0 et donc à la valeur de la dérivée de la fonction en x_0. La fonction dérivée de la fonction h mettant en relation x et les taux de variation instantanés pour chaque valeur de x est notée $h'(x)$. On peut donc écrire que $h'(x_0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{h(x_0+\alpha)-h(x_0-\alpha)}{2\alpha}$. Évidemment, si cette limite n'existe pas en x_0 alors la dérivée en cette valeur n'existe pas non plus.

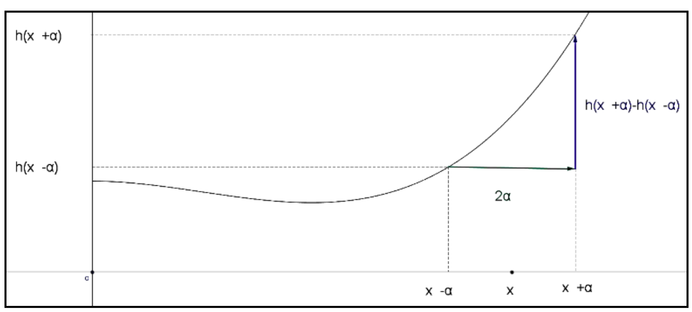


Figure 12 Dérivée en x_0 de la fonction h

[21] En effet, pour tout mouvement uniformément accéléré, la vitesse moyenne sur un intervalle de temps quelconque est égale à la vitesse instantanée à l'instant milieu de cet intervalle. Nous avons choisi cette situation particulière puisqu'elle rend accessible le calcul d'une vitesse instantanée même si elle ne justifie pas l'introduction de la notion de limite. Il faut aussi considérer que la famille des fonctions quadratiques est beaucoup travaillée au secondaire, il est donc important d'en connaitre le potentiel pour le passage à la dérivée.

[22] Dans le cas où x ne représente pas la grandeur « temps », il faut être conscient que le terme « instantané » est un abus de langage comme nous l'avions fait remarquer au chapitre I.

Notre démarche a mené à une définition de la dérivée différente de celle habituellement rencontrée puisque nous avons eu recours à un schéma centré. En effet, pour répondre à la cinquième question, nous avions encadré l'instant connu pour obtenir des marches/contremarches plus petites, mais surtout pour calculer les vitesses moyennes correspondantes. Nous avons donc gardé cette même manière de procéder pour construire une formule définissant la dérivée. Or, dans la définition classique (schéma décentré), on considère des accroissements de plus en plus petits mais en partant toujours de la valeur de la variable indépendante pour laquelle on cherche le taux de variation instantané :

$$h'(x_0) = \lim_{\beta \to 0} \frac{h(x_0 + \beta) - h(x_0)}{\beta}.$$

Si nous avions procédé ainsi dans le problème de la voiture, donc si nous étions toujours partie de l'instant connu pour prendre des accroissements de plus en plus petits, la démarche aurait été quelque peu différente (voir Annexe 2) et l'enjeu de la question n'aurait pas été le même.

Liens entre les facettes qualitative et quantitative des accroissements concomitants de deux grandeurs

Nous avons dégagé, lors de notre analyse, deux facettes d'une étude des accroissements concomitants, l'une qualitative, l'autre quantitative. L'étude qualitative permet de déterminer le sens de variation, mais aussi de répondre au questionnement plus précis sur la façon de varier. L'étude quantitative répond aux questions portant sur le taux de variation. Dans les cas où ce taux de variation est le même sur l'ensemble du domaine de la fonction (fonctions affines, par exemple) ou que le taux variation change un nombre fini de fois (fonction valeur absolue, par exemple), la distinction entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané n'est pas nécessaire. Par contre, lorsque le taux de variation change sans arrêt sur le domaine de la fonction alors cette distinction prend un sens. Mais ce changement continuel fait que le calcul du taux de variation instantané peut sembler inutile; les questions contextuelles sont alors importantes pour donner un sens à ce calcul comme il a été possible dans le contexte de la voiture. Le calcul du taux de variation instantané repose alors sur le fait de prendre des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante, ce qui, d'ailleurs a déjà été initié lors de l'étude qualitative.

Finalement, bien que les questions menant à une étude qualitative ne soit pas les mêmes que celles menant à une étude quantitative, nous avons mis en évidence le fait que l'étude qualitative pouvait servir de manière significative d'appui à l'étude quantitative. Les éléments permettant de faire le lien entre les deux types d'étude sont donc :

- la considération des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements de la grandeur indépendante,
- la considération des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante,
- les interprétations contextuelles sur le taux de variation.

2.4.2.3 Des unités de raisonnement associées au raisonnement covariationnel et leur possible articulation en situation

L'analyse de notre démarche de résolution du problème de la voiture nous permet de dégager treize unités de raisonnement mobilisées pour répondre aux questions posées. Chaque unité correspond à une action qui a été posée et qui a joué, selon nous, un rôle dans la dynamique du déploiement d'un raisonnement covariationnel. Le repérage de ces actions est évidemment influencé par notre expérience avec le travail sur la covariation (cf Passaro, 2007) et par notre interprétation du cadre d'analyse de raisonnement covariationnel de Carlson (voir section 2.3.1.3.4). À ce propos, nous effectuons un parallèle entre les actions mentales du cadre de Carlson et nos unités de raisonnement (voir Tableau 4) afin de situer notre cadre d'analyse par rapport à celui disponible.

Tableau 4 Parallèle entre les composantes du raisonnement covariationnel dans le cadre de Carlson et dans notre cadre

Cadre de Carlson		**Notre cadre**	
Action mentale	**Description de l'action mentale**	**Unité**	**Description de l'unité de raisonnement**
AM1	Coordonner la valeur d'une variable avec les changements de l'autre variable	U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante
		U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs
AM2	Coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U3	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente
AM3	Coordonner la « quantité » de changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante
		U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)
		U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante
		U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)
AM4	Coordonner le taux de variation moyen de la fonction pour des accroissements constants de la variable indépendante	U8	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante
		U9	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante
		U10	Quantifier le rapport entre l'accroissement correspondant (taux moyen) à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier
		U11	Quantifier le rapport entre les accroissements correspondants (taux de variation moyen) à des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante et ces derniers
AM5	Coordonner le taux de variation instantané de la fonction avec le changement continu de la variable indépendante sur l'ensemble du domaine de la fonction	U12	Déterminer une valeur de la grandeur indépendante pour laquelle on connait la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)
		U13	Déterminer, pour une valeur de la grandeur indépendante donnée, la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)

Toutefois, rappelons que notre perspective étant différente, on ne peut pas dire que nos unités de raisonnement soient incluses dans les actions mentales de Carlson. De plus, les implicites dans la description de ces dernières mises en évidence à la section 2.3.1.3.4, ne permettent pas de faire une association précise. Nous pensons toutefois réussir à préciser certaines idées exprimées dans les descriptions des actions mentales notamment en décortiquant le travail sur les accroissements (U4 et U6). Nous organisons les unités de raisonnement identifiées en quatre catégories selon les questions qui ont motivé leur mobilisation : 1) les unités mobilisées pour répondre à « comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? (Tableau 5), 2) les unités mobilisées pour répondre à « comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? » (Tableau 6), 3) les unités mobilisées pour répondre à « quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? » (Tableau 7) et 4) les unités mobilisées pour répondre à « quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs en une valeur de la grandeur indépendante » (Tableau 8). Pour chacune des quatre catégories d'unités de raisonnement, nous qualifions le regard adopté sur la fonction selon les points de vues identifiés par Chorlay (2007) et Vanderbrouck (2011) : global, local et ponctuel. Pour les catégories 2) et 3), nous précisons aussi le type d'étude des accroissements, soit qualitatif ou quantitatif. La description de chaque unité de raisonnement est accompagnée d'une procédure type[23] dans le registre graphique inspirée à la fois des comportements explicités par Carlson et al. (2002) (voir Tableau 1 à la section 2.3.1.2) et de notre démarche de résolution du problème de la voiture (voir Annexe 1). Un exemple du discours contextuel dans le problème de la voiture est aussi donné afin de montrer comment nous avons identifié l'unité de raisonnement. Ensuite, nous présentons notre articulation de ces unités dans le cadre de la résolution du problème de la voiture à l'aide d'un schéma.

Dans le Tableau 5, on peut voir que l'unité U1 concerne l'identification de l'aspect de dépendance mais aussi la détermination d'un sens à la relation de dépendance (quelle grandeur dépend de l'autre). Cette dépendance est directement reliée au fait qu'on s'intéresse à une relation fonctionnelle spécifique que l'on peut nommer (la fonction f par exemple). L'unité U2 découle de U1 à laquelle on ajoute l'aspect de variation de la fonction. Alors que l'unité U2 se

[23] Cette procédure informe sur les actions qui pourraient être observées chez les élèves et rendraient compte de la mobilisation de l'unité de raisonnement concernée.

traduit par des descriptions du type « lorsqu'une grandeur varie l'autre varie », l'unité U3 précise la direction du changement de la grandeur dépendante (augmentation, diminution ou constance) lorsque la grandeur indépendante augmente. Nous considérons effectivement que comme, selon les conventions graphiques, la lecture se fait de la gauche vers la droite, la grandeur indépendante augmente forcément. Néanmoins, le modèle de Carlson et al. (2002) indique qu'on peut aussi considérer la direction du changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante diminue. Il est donc possible que dans un registre autre que graphique cette version de l'unité U3 apparaisse. Évidemment, pour nous, ces trois unités sont liées du fait que la troisième est une précision de la seconde qui repose elle-même sur la première. En général, nous constatons que pour l'ensemble de ces unités le point de vue sur l'étude de la fonction est *global*. En effet, la préoccupation pour les variations concomitantes des deux grandeurs est associée à un regard global sur la variation de la fonction qui met en relation ces deux grandeurs.

Tableau 5 Description des unités mobilisées pour répondre à « comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? »

	Raisonnement	**Procédure dans le registre graphique**	**Exemple de description verbale**
U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante	Lecture de l'identification des axes	La (grandeur dépendante) dépend de la (grandeur indépendante) selon la fonction (nom de la fonction).
U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs		Lorsque (grandeur indépendante) varie, alors (grandeur dépendante) varie.
U3	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	Comparer les segments verticaux représentant les valeurs que prend la grandeur dépendante OU comparer les segments verticaux représentant l'accroissement de la grandeur dépendante pour un certain accroissement de la grandeur indépendante (voir section 3.3.2)	Lorsque (grandeur indépendante) augmente, alors (grandeur dépendante) diminue.

Dans le Tableau 6, quatre unités de raisonnement associées au questionnement sur le comportement des accroissements de la grandeur dépendante sont proposées. Dans la synthèse de notre démarche de résolution du problème de la voiture présentée précédemment, ces unités de raisonnement sont apparues lors de l'étude qualitative des accroissements concomitants des deux grandeurs. Les unités U4 et U6 sont semblables puisqu'elles concernent la description du changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante. Toutefois, U6 ne peut être mobilisée qu'à partir du moment où U4 l'a été puisqu'avant de considérer des accroissements plus petits, encore faut-il en avoir déjà étudiés. Cette idée de prendre des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante est motivée par l'unité U5 qui consiste à déterminer des phases de variation.

Tableau 6 Description des unités mobilisées pour répondre à : « Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? »

	Raisonnement	**Procédure graphique**	**Exemple de description verbale**
U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Comparer les différents accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Pour des accroissements constants de (grandeur indépendante), les accroissements de (grandeur dépendante) sont de plus en plus petits.
U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)	À partir de la qualification du changement de la grandeur dépendante (R6), séparer le domaine de la fonction en différents intervalles. Sur chaque intervalle, la « façon de varier » semble être la même.	Sur l'intervalle $[x_1,x_2]$ du domaine (phase A), pour des accroissements constants de la grandeur indépendante, les accroissements de la grandeur dépendante sont toujours de plus en plus grands, alors que sur l'intervalle $[x_2,x_3]$ du domaine (phase B), ils sont de plus en plus petits.
U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante	Comparer les différents accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante de plus en plus petits.	Pour des accroissements constants de (grandeur indépendante) de plus en plus petits, les décroissements de (grandeur dépendante) sont toujours de plus en plus grands.
U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)		Lorsque, pour des accroissements constants et de plus en plus petits de la grandeur indépendante, on a des accroissements de la grandeur dépendante de plus en plus grands, cela signifie que le taux de variation de la fonction augmente de plus en plus.

L'unité U7, quant à elle, nécessite de faire le lien entre une notion appelant le taux de variation (vitesse, débit etc.) et les accroissements concomitants. Elle joue un rôle clé pour le passage à l'étude quantitative des accroissements concomitants des deux grandeurs associée au questionnement sur la valeur du rapport entre ces accroissements concomitants. En outre, l'ensemble de ces unités de raisonnement émerge d'un regard local et qualitatif sur la fonction.

Les trois unités de raisonnement associées au questionnement sur la valeur du rapport entre les accroissements concomitants des deux grandeurs alors que l'accroissement de la grandeur indépendante est connu sont présentées dans le Tableau 7. Ce questionnement mène à une étude quantitative des accroissements concomitants des deux grandeurs telles qu'identifier dans la synthèse à la section 2.4.2.2, le rapport entre les accroissements concomitants correspondant au taux de variation moyen. L'unité U8 consiste donc à déterminer un taux non unitaire, par exemple, en 2 secondes la voiture parcourt 9 mètres (taux de 9 mètres par 2 secondes). L'unité U9 est associée à la même procédure que U8 sauf que l'accroissement de la grandeur indépendante est de 1, ce qui permet d'obtenir un taux unitaire et donc d'obtenir la valeur du rapport égal au taux de variation moyen directement (taux de 4 mètres par seconde). Dans le cas où le taux de variation moyen n'est pas unitaire (U8), le calcul (la division) permettant d'obtenir le taux unitaire correspond à l'unité U10.

Du taux de variation moyen, on peut passer au taux de variation instantané en utilisant la notion de limite. Toutefois, la construction de cette notion se fait intuitivement par une réduction de l'accroissement de la grandeur indépendante puisqu'on essaie de se rapprocher d'une valeur précise de cette dernière. C'est pourquoi l'unité U11 est semblable à l'unité U10, mais pour des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante. U11 est donc une unité de raisonnement transitoire permettant de passer à la notion de taux de variation instantané équivalente ici à la notion de dérivée en un point. En général, ces unités de raisonnement sont issues d'un regard local et quantitatif sur la fonction.

Tableau 7 Description des unités mobilisées pour répondre à : « Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? »

	Raisonnement	**Procédure graphique**	**Exemple de description verbale**
U8	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante	Pour un segment orienté horizontal vers la droite de la longueur correspondant à l'accroissement de la grandeur dépendante qui part de la courbe, mesurer la longueur du segment orienté vertical permettant de revenir à la courbe. Si ce dernier va vers le bas, la mesure est négative et s'il va vers le haut elle est positive. La mesure correspond à la différence entre l'ordonnée du point d'arrivée et l'ordonnée de départ du segment orienté.	Entre 2 et 4 secondes, pour un accroissement de deux secondes, l'accroissement de distance est de 9 mètres.
U9	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante	Pour un segment orienté horizontal vers la droite de longueur 1 unité qui part de la courbe, mesurer la longueur du segment orienté vertical permettant de revenir à la courbe. Si ce dernier va vers le bas, la mesure est négative et s'il va vers le haut elle est positive. La mesure correspond à la différence entre l'ordonnée du point d'arrivée et l'ordonnée de départ du segment orienté.	Entre 2 et 3 secondes, pour un accroissement d'une seconde, l'accroissement de distance est de 4 mètres.
U10	Quantifier le rapport entre l'accroissement correspondant (taux moyen) à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier	Même procédure que pour R8 PUIS calcul du rapport des longueurs obtenues	Entre 2 et 4 secondes, pour un accroissement de deux secondes, l'accroissement de distance est de 9 mètres, la vitesse moyenne est alors de 9÷2=4,5 mètres par seconde.

Les unités U12 et U13 sont, quant à elles, mobilisées pour répondre à un questionnement sur la valeur du rapport entre les accroissements concomitants en un point. Il s'agit en fait, de déterminer, dans un premier cas, une valeur de grandeur indépendante pour laquelle on connait la limite du rapport des accroissements (U12) et, dans un second cas, la limite de ce rapport pour une valeur de la grandeur indépendante connue (U13). Ces deux dernières unités permettent de répondre à des questions différentes menant à définir la dérivée comme la limite du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour une valeur précise de la grandeur indépendante. Elles nécessitent, par conséquent, un nouveau regard sur la fonction, un regard ponctuel.

Tableau 8 Description des unités mobilisées pour répondre à : « Quelle est la valeur du rapport des accroissements des deux grandeurs en une valeur de la grandeur indépendante? »

	Raisonnement	**Procédure graphique**	**Exemple de description verbale**
U11	Quantifier le rapport entre les accroissements correspondants (taux de variation moyen) à des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante et ces derniers	Même procédure que pour U10 avec des segments horizontaux de plus en plus petits (qui ont toujours le même point de départ ou dont les points de départ et d'arrivée sont équidistants de ceux du segment précédent)	Entre 2 et 5 secondes, pour un accroissement de trois secondes, l'accroissement de distance est de 12 mètres, la vitesse moyenne est alors de 12÷3=4 mètres par seconde. Entre 1 et 3 secondes, pour un accroissement de deux secondes, l'accroissement de distance est de 9 mètres, la vitesse moyenne est alors de 9÷2=4,5 mètres par seconde. Entre 1,5 et 2,5 secondes, pour un accroissement d'une seconde, l'accroissement de distance est de 5 mètres, la vitesse moyenne est alors de 5 mètres par seconde. Etc.
U12	Déterminer une valeur de la grandeur indépendante pour laquelle on connait la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)	Plusieurs procédures sont possibles dont : ajuster des couples de segments orientés (marche-contremarche) de plus en plus petits à la courbe et identifier la valeur vers laquelle les segments horizontaux tendent	Graphiquement, quand on prend des segments de plus en plus petits, on constate qu'ils entourent une valeur précise correspondant à t=5 secondes.
U13	Déterminer, pour une valeur de la grandeur indépendante donnée, la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)	Plusieurs procédures sont possibles dont : déterminer directement la valeur vers laquelle les taux de variation moyens déterminés pour des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante (U11) tendent	Entre 1 et 5 secondes, une automobile roule à une vitesse moyenne de 8 m/s, entre 2 et 4 secondes, sa vitesse moyenne est aussi de 8 m/s, entre 2,5 et 3,5 secondes sa vitesse moyenne est aussi de 8 m/s. Par conséquent, la vitesse à l'instant t=3 secondes est 8 m/s.

Nous avons schématisé l'articulation des unités de raisonnement identifiées dans notre démarche afin de montrer comment elles peuvent être liées les unes aux autres lors du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation (voir Figure 13). On peut voir le questionnement à l'origine de la mobilisation de quatre catégories d'unités de raisonnement, ainsi que l'enchaînement de ces unités dans la dynamique du raisonnement (les unités de la première catégorie apparaissent dans des cases quadrillées, les unités de la seconde catégorie apparaissent dans des cases lignées, les unités de la troisième catégorie apparaissent dans des cases grises et les unités de la quatrième catégorie apparaissent dans des blanches). De plus, le passage d'un regard global sur la fonction à un regard ponctuel s'effectue, dans notre démarche, grâce à un regard local qui se concrétise par l'étude qualitative puis quantitative des accroissements concomitants des deux grandeurs mises en relation par la fonction. Nous avons montré, dans la synthèse de la résolution du problème de la voiture, comment l'étude qualitative des accroissements concomitants pouvait servir d'appui à l'étude quantitative de ces accroissements concomitants et c'est pourquoi elles apparaissent dans cet ordre.

Ce schéma montre comment notre articulation des unités de raisonnement permet le passage de la fonction, particulièrement observée dans premières unités, à la dérivée en un point, ciblée dans les dernières unités. Il apparaît, de plus, que l'étude globale de la variation de la fonction soit à la base du travail local sur les accroissements. En effet, ce travail est un outil permettant d'analyser finement la variation d'une fonction et il prend donc son sens dans le cadre d'un questionnement sur la variation. Le questionnement sur le comportement des accroissements concomitants n'a donc d'intérêt qu'à l'intérieur d'un questionnement sur les variations concomitantes de deux grandeurs.

Au regard de cette analyse du raisonnement covariationnel déployé en situation, nous pensons que les quatre catégories d'unités de raisonnement dégagées peuvent servir à préciser les caractéristiques d'une approche covariationnelle de la fonction. Nous considérons donc qu'*a priori* la mobilisation des unités de raisonnement des catégories 2) et 3) caractérise particulièrement une approche covariationnelle de la fonction permettant de passer de considérations sur la fonction (unités de la première catégorie) à des considérations sur la dérivée (unités de la quatrième catégorie).

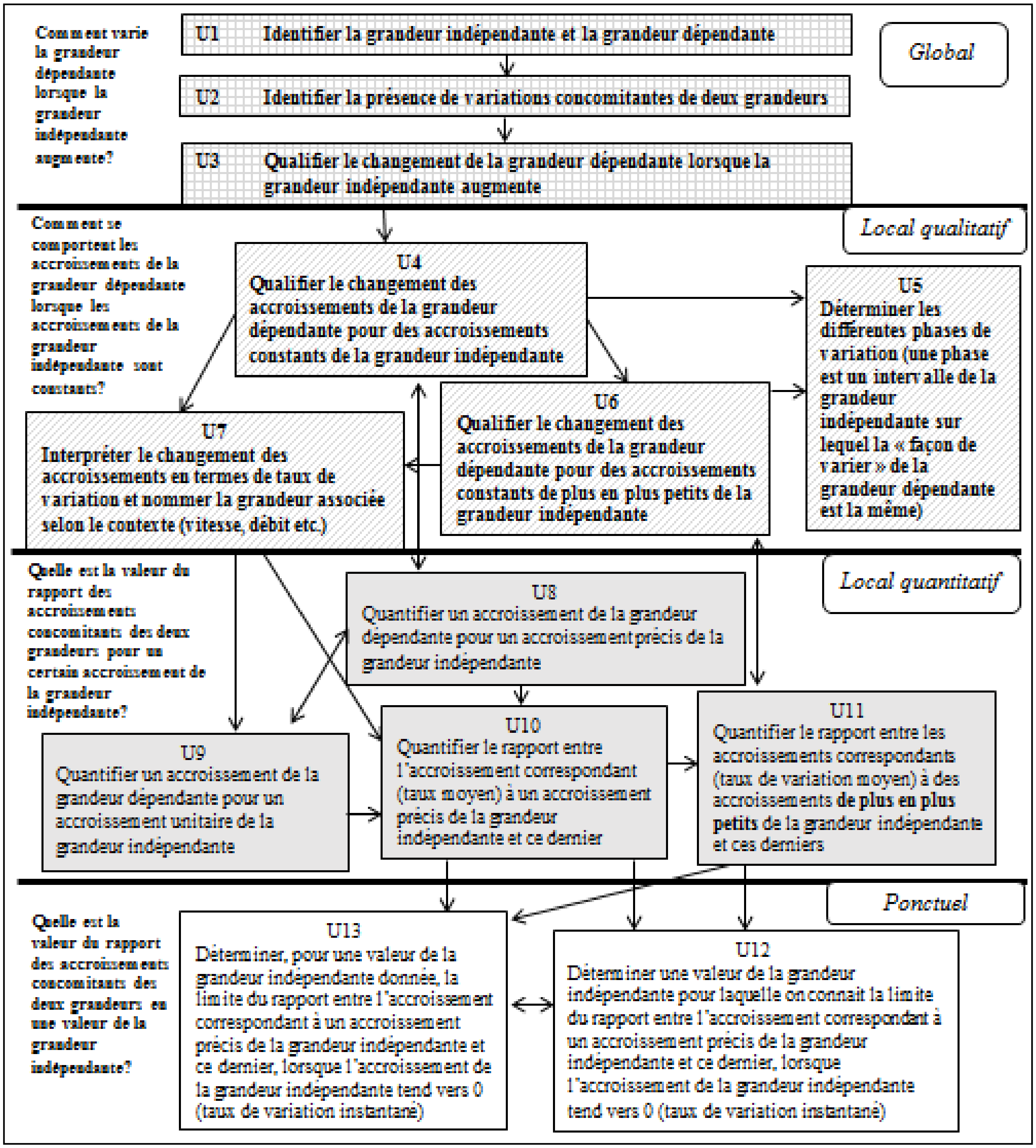


Figure 13 Schéma de l'articulation des unités de raisonnement révélée par notre auto-analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel dans la situation de la voiture

2.5 Questions spécifiques de la recherche

Dans un premier temps, nous avons mis en évidence la nécessité d'un travail sur la covariation lors de l'étude des fonctions en algèbre afin de préparer les élèves à aborder le calcul différentiel (voir Chapitre I). Tenant compte des travaux en didactique des mathématiques dans lesquels ce type de travail est exploité, nous avons choisi de parler d'une approche covariationnelle de la fonction pour décrire une manière de travailler la notion de fonction à travers l'étude des variations concomitantes de deux grandeurs en situation via une analyse des accroissements concomitants de ces deux grandeurs. Nous nous sommes alors fixé comme objectif général pour cette recherche d'explorer les caractéristiques d'une approche covariationnelle de la fonction qui pourrait permettre d'assurer un continuum entre l'apprentissage de la notion de fonction et celui de la notion de dérivée. Nous voulions particulièrement identifier comment une approche covariationnelle de la fonction pourrait offrir l'occasion de tisser des liens entre les notions de fonction et de dérivée et dégager les caractéristiques de tâches suscitant l'amorce de la mise en place de tels liens, même de façon non explicite, chez les élèves.

Dans un second temps, nous avons associé cette approche covariationnelle de la fonction aux situations dans lesquelles on s'intéresse à déterminer de manière approfondie comment varie une grandeur dépendante lorsqu'une grandeur indépendante varie. Puis, considérant les travaux de Carlson, nous avons précisé que, face à de telles situations, un individu déploie un raisonnement covariationnel. Ainsi, nous en sommes venue à explorer les caractéristiques d'une approche covariationnelle à travers l'analyse du déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation. D'un point de vue théorique, nous avons mis en évidence les liens qui pouvaient être tissés entre les notions de fonction et de dérivée lors de l'articulation d'unités de raisonnement associées à un raisonnement covariationnel dans une situation précise. Nous avons aussi dégagé le questionnement ayant sollicité la mobilisation de chaque unité de raisonnement et décortiqué le raisonnement de manière à identifier des étapes par lesquelles semble passer son déploiement. Cela nous a amenée à constater que différents points de vue sur la fonction étaient adoptés et que le travail sur les accroissements pouvait se faire de manière qualitative et quantitative, chaque perspective ayant son rôle dans le passage de la fonction à la dérivée.

Il nous semble à présent important de compléter notre analyse du raisonnement covariationnel de manière empirique. La grille d'analyse du raisonnement covariationnel que nous avons mise en place grâce à l'analyse de notre propre raisonnement doit, selon nous, être mise à l'épreuve afin, d'une part, de déterminer si les unités de raisonnement identifiées peuvent être mobilisées par des élèves et, d'autre part, de préciser ces unités de raisonnement et leur actualisation en situation par des élèves. Nous pensons, de plus, que pour identifier les caractéristiques des situations qui sollicitent le déploiement d'un raisonnement covariationnel chez les élèves, il faut observer les élèves en action dans des situations construites théoriquement dans ce but. Dans la mesure où nous nous intéressons à explorer une approche covariationnelle de la fonction comme manière de faire travailler les élèves lors de l'étude des fonctions en algèbre avant l'étude des fonctions en calcul différentiel, il nous semble opportun d'observer le déploiement d'un raisonnement covariationnel par des élèves de 15 à 18 ans. Il est à noter, qu'aucune recherche n'a jusqu'alors suggéré une analyse de ce type de raisonnement chez des élèves de cet âge. Nous nous demandons donc comment s'actualise le déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans et, plus précisément, nous posons les questions suivantes :

1) Quelles unités de raisonnement sont mobilisées par ces élèves, comment s'actualisent-elles et en réponse à quelles questions?
2) Comment s'articulent ces unités dans la dynamique du raisonnement déployé par ces élèves et comment les situations influencent-elles cette articulation?

CHAPITRE III : MÉTHODOLOGIE

Dans l'optique d'explorer les caractéristiques d'une approche covariationnelle de la fonction favorisant le passage à la dérivée, nous avons montré, au chapitre précédent, comment pouvait s'actualiser le déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation. Afin de compléter cette perspective théorique, nous proposons de réaliser une expérimentation permettant d'observer comment s'actualise le déploiement d'un raisonnement covariationnel chez des élèves de 15 à 18 ans.

Nous nous intéressons donc à identifier les unités de raisonnement mobilisées et leur articulation par ces élèves dans des situations où un raisonnement covariationnel est sollicité. Nos questions spécifiques de recherche nous amènent à envisager une étude clinique et une collecte de données permettant une analyse qualitative de protocoles verbaux. Dans ce chapitre, nous présentons donc dans un premier temps, le processus de construction des situations afin de mettre en évidence leur potentiel à solliciter un raisonnement covariationnel chez les élèves visés. Dans un second temps, nous détaillons les modalités de la collecte de données.

3.1 La construction des situations

Plusieurs recherches, que nous avons présentées au Chapitre II, proposaient des tâches sollicitant un travail sur la covariation (Carlson, 2002; Carlson et al., 2001; Hitt et Morasse, 2009; Monk, 1992; Passaro, 2007; Piaget et al., 1968; Saldanha et Thompson, 1998; Vollrath, 1986). Dans chacune de ces tâches l'objectif était de faire l'étude d'une fonction, entre autres, en observant les variations concomitantes des deux grandeurs. Or, nous avons montré par l'identification des unités de raisonnement U1 à U3 que cette observation est à la base du déploiement d'un raisonnement covariationnel. Dans ces recherches, très peu d'indications ont été données à propos du processus de construction des situations. De ce fait, on ne sait pas, d'une part, quelles en sont les caractéristiques et, d'autre part, pourquoi elles ont été choisies. Les seules caractéristiques dont l'influence sur le travail de la fonction en terme de covariation a fait l'objet d'une analyse sont la disponibilité d'un modèle physique permettant la manipulation (Carlson, 2002; Monk, 1992) et l'usage de divers registres de représentation

(Hitt et Morasse, 2009). Nous pensons toutefois que les choix des situations par les chercheurs, même s'ils n'ont pas été explicitement justifiés dans les articles que nous avons pris en référence, sont basés sur des arguments dont nous voulons tenir compte.

Nous proposons donc, dans un premier temps, de mettre en évidence des caractéristiques des situations qui ont été utilisées dans les recherches antérieures. En regard de ces caractéristiques, nous présentons, dans un deuxième temps, nos choix quant aux valeurs de certaines variables didactiques pour les situations qui seront expérimentées. Puis, dans un troisième temps, nous explicitons la structure, les objectifs et le contenu du questionnement. Nous terminons en présentant brièvement comment nous avons procédé pour nous assurer de la pertinence des situations aux vues des objectifs visés.

3.1.1 Mise en évidence de certaines caractéristiques des situations exploitées dans des recherches antérieures sur la covariation

Notre seconde question de recherche vise l'exploration de l'articulation des unités de raisonnement par les élèves et de l'influence des situations sur cette articulation. Par conséquent, il est important, pour nous, de mettre en évidence les caractéristiques des situations que nous mettons en place pour créer un milieu propice au déploiement d'un raisonnement covariationnel. Ces caractéristiques ayant été peu investiguées dans la recherche, nous avons effectué une analyse de plusieurs situations utilisées dans des recherches antérieures sur la covariation (la plupart de ces situations ont été présentées au Chapitre II). Partant de l'hypothèse que les choix implicites des situations par les chercheurs s'appuient sur leurs connaissances et leurs expériences d'experts sur le sujet, cette analyse tente, en quelque sorte, de révéler les caractéristiques des situations favorisant le travail sur la covariation d'après ces chercheurs. Nous avons ainsi dégagé certaines caractéristiques à partir de l'observation des similitudes et des différences entre les différentes situations. Les caractéristiques répertoriées au sujet de l'énoncé de la situation sont le contexte, la disponibilité d'un matériel concret (modèle réduit de la situation réelle), les registres de représentation dans lesquels la situation est présentée et les grandeurs étudiées (voir tableau 3-A à l'Annexe 3). Celles relatives au questionnement sont les tâches à effectuer, les registres de représentation à utiliser pour y répondre et la nature de l'étude de la covariation proposée (qualitative ou quantitative) (voir tableau 3-B à l'Annexe 3). Pour chaque recherche, la clientèle visée est précisée afin de situer les caractéristiques des situations en fonction de l'expérience scolaire des élèves.

En synthèse, nous avons identifié que :

- Sur dix-sept contextes, dix concernent le mouvement d'un objet ou d'une personne, deux le remplissage ou vidage d'un contenant, quatre la modification d'une figure géométrique selon certaines contraintes et une l'observation de l'évolution d'une quantité (qui n'est ni une longueur ni un volume) au cours du temps.
- Les registres de représentations privilégiés pour présenter les situations sont les registres verbal et figural (10 fois sur 17). La figure complète en effet l'énoncé de manière à ce que les caractéristiques du contexte soient claires (pour plus de détails sur le rôle de la figure dans de tels énoncés, voir Passaro, 2007).
- Parmi les grandeurs, on retrouve le temps, la distance, l'aire, le volume, la température et la vitesse. Les longueurs et les distances, associées aux contextes de mouvement, sont particulièrement utilisées certainement du fait qu'elles sont facilement appréhendables par les élèves dans le cadre de tâches où elles doivent être représentées visuellement sur papier. C'est d'ailleurs aussi le cas de l'aire, alors que le volume, appréhendable par expérimentation avec du matériel, est plus difficile à représenter visuellement sur papier. Le temps et la température sont, quant à eux, mesurables à l'aide d'outils de mesure et la vitesse est une grandeur dont on a une expérience quotidienne. Ces dernières sont perceptibles car on les associe à des expériences sensorielles, mais on ne les voit pas et il est plus difficile de les représenter par une représentation visuelle. Nous distinguons donc quatre types de grandeurs fréquemment utilisées : longueur/distance, volume, temps et vitesse.

Dans les situations proposées dans ces recherches, le travail à partir d'un modèle réduit de la situation réelle n'est pas très répandu. Il apparaît uniquement dans des contextes pour lesquels les grandeurs étudiées sont des longueurs et des vitesses. Nous notons, toutefois, que dans le cas du contexte géométrique de transformation d'une figure, le modèle manipulable ne permet qu'une approche discrète de la variation. En effet, Piaget et al. (1968) fournissent aux élèves une planche à clou leur permettant de faire varier les mesures des côtés d'un rectangle tout en conservant un périmètre constant. Considérant l'âge des enfants, ce travail nous semble approprié, mais, pour la présente recherche, nous voulons favoriser une approche continue de la variation qui est à la base de la construction de la notion de variable (voir à ce sujet la section 1.2.2 du Chapitre I).

Les tâches demandées sont variées et concernent majoritairement une étude globale qualitative de la fonction qui se concrétise par la production d'une description de la variation d'une grandeur ou des variations concomitantes de deux grandeurs (registre verbal) et par la construction de l'esquisse d'un graphique (registre graphique). Ainsi, les énoncés des questions ne permettent pas aux élèves d'approfondir leurs descriptions et le passage à une autre représentation est rapidement exigé. Dans une précédente recherche (Passaro, 2007), nous avons montré que les difficultés de conversion d'un registre à un autre pouvaient être liées au décalage entre les représentations spontanées des élèves et les représentations institutionnelles qui leur sont imposés. Ainsi, nous formulerons le contexte et le questionnement en nous limitant aux registres « verbal », « figural » et « numérique » qui sont plus familiers aux élèves. En effet, ces registres sont utilisés depuis l'école primaire pour présenter des problèmes et des situations-problèmes en mathématiques. Ainsi, les élèves seront libres d'utiliser des représentations spontanées ou institutionnelles pour répondre à la plupart des questions. Les diverses représentations utilisées seront, lors de l'analyse des données, mises en lien avec les unités de raisonnements mobilisés.

L'ensemble de ces remarques nous mènent à expliciter nos choix pour les situations exploitées dans la présente recherche.

3.1.2 Le choix des caractéristiques des situations

L'analyse des situations sollicitant un travail sur la covariation dans des recherches antérieures a permis la mise en évidence de certaines caractéristiques. Nous considérons que ces éléments peuvent constituer des variables didactiques[24] influençant le raisonnement déployé par les élèves. Dans l'optique de garantir le potentiel des situations à solliciter un raisonnement

[24] Nous considérons effectivement qu'un enseignant pourrait agir sur de telles variables dont un changement de valeur pourrait entrainer un changement de procédures (Artigue & Douady, 1986). Toutefois, nous n'envisageons pas la hiérarchie de ces procédures dans la mesure nous ne les connaissons qu'à travers une analyse *a priori*.

covariationnel, nous choisissons, parmi les valeurs de ces variables dégagées dans notre analyse, les valeurs suivantes :

a) Deux types de contextes : le mouvement d'un objet et le remplissage d'un contenant

Ces contextes sont particulièrement utilisés dans le cadre d'un travail sur la covariation proposé dans différentes recherches et ils y apparaissent facilement accessibles aux élèves. Ils offrent aussi la possibilité de manipuler des objets concrets de manière à simuler le phénomène. Ce sont donc des contextes qui permettent la visualisation et la manipulation tout en étant appropriés à un traitement mathématique plus abstrait (modélisation algébrique par exemple).

b) Quatre types de grandeurs : longueur/distance, volume, temps, vitesse

Nous avons relevé dans la recherche l'utilisation fréquente de grandeurs appréhendables visuellement telles la longueur, la distance et le volume. Ce choix apparait judicieux dans la mesure où il optimise les possibilités de représentation de la variation des grandeurs. Par ailleurs, notre perspective d'une approche covariationnelle exploite l'analyse des accroissements concomitants que nous voulons pousser jusqu'à envisager les taux de variation moyen et instantané comme nous l'avons mis en évidence au chapitre précédent. Or, le sens attribué à ces derniers semble plus difficilement saisissable s'ils ne correspondent pas à une grandeur identifiable. En effet, nous pensons que dans les situations contextualisées, les taux de variation qui portent un nom (par exemple : vitesse, densité, débit) sont plus facilement appréhendables. Puisque le travail proposé aux élèves est strictement contextualisé, nous devons identifier les taux qui ont un sens dans ces contextes. Parmi ces taux, nous retenons la vitesse (en mètres par seconde par exemple). Nous considérons que la vitesse est une grandeur dont les élèves ont une expérience et qui leur est relativement accessible. Rappelons que le passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané s'effectue de manière plus signifiante dans un contexte d'étude du mouvement dans lequel la vitesse en fonction du temps est la fonction dérivée de la distance en fonction du temps (voir les propos de Gantois et Schneider, 2009 et Zandieh, 2000) à la section 1.2.1.2). De plus, la vitesse est une grandeur qui peut être étudiée dans les deux contextes choisis (voir S2 et S4 dans le Tableau 9 qui suit).

Étant donné l'ensemble de ces considérations, nous ajoutons deux grandeurs moins abordées dans les précédentes recherches : le temps et la vitesse.

c) Deux registres de représentation : verbal et figural

Les registres dans lesquels les élèves sont amenés à travailler influencent leurs raisonnements (Confrey et Smith, 1995; Hitt et al., 2008; Passaro, 2007). En fait, les registres institutionnels imposés peuvent autant favoriser la compréhension qu'y nuire. Ainsi, nous choisissons de ne pas imposer de registre institutionnel et de laisser les élèves travailler dans les registres qui leur conviennent. Évidemment, nous devons tout de même présenter les situations aux élèves et, pour ce faire, nous avons choisi deux registres accessibles de par leur fréquence d'utilisation dans la vie courante et à l'école : les registres « verbal » et « figural ». Il est à noter que pour certains élèves ces registres peuvent aussi constituer un obstacle. Dans Passaro (2007), nous avions noté que les élèves plus faibles avaient de la difficulté à comprendre le registre verbal. Dans la présente recherche, cependant, nous nous adressons à des élèves plus expérimentés pour qui la compréhension des énoncés ne devrait pas poser problème.

d) Des modèles réduits des situations réelles (matériel concret)

Carlson (2002) et Monk (1992) ont mis en évidence la contribution importante de la manipulation d'un matériel de manière à visualiser la variation des grandeurs. Nous pensons aussi que ce moyen permet la mobilisation de raisonnements plus riches. Puisque les contextes et les grandeurs choisis offrent la possibilité de simuler les phénomènes, nous fournirons un matériel et poserons des questions suscitant cette manipulation (voir les énoncés des situations à l'Annexe 4).

Nous proposons donc d'exploiter les deux contextes à l'aide de quatre situations dans lesquelles les grandeurs observées changent (voir Tableau 9). Dans un premier temps (en S1 et S3), les deux grandeurs observées sont liées par une relation de causalité. Nous avions effectivement noté (voir section 1.3.2.1) que ce type de situation favorisait la perception de la covariation selon Piaget et al. (1968). Dans un deuxième temps (en S2 et S4), deux fonctions du temps (la seconde étant la dérivée de la première) sont étudiées. Nous voulons ainsi exploiter le potentiel de ce type de fonction pour donner un sens à la variation après que l'idée de covariation ait été introduite dans un contexte différent. Nous tentons donc à la fois de tirer parti de l'utilisation du temps et d'amoindrir l'impact de l'obstacle que cette grandeur peut constituer (voir à ce sujet la section 1.3.2.1).

Tableau 9 Situations proposées : grandeurs observées dans chaque contexte

Contexte du pichet On remplit un pichet vide avec de l'eau.	Situation 1 (S1) On s'intéresse au **niveau de l'eau en fonction du volume d'eau** dans le pichet.	Situation 2 (S2) Le pichet est rempli avec un robinet à débit constant. On s'intéresse d'abord au **niveau de l'eau en fonction du temps** puis à la **vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet en fonction du temps**.
Contexte de l'échelle Une échelle est posée contre un mur de même hauteur et on fait glisser le bas de l'échelle sur le sol.	Situation 3 (S3) On s'intéresse à **la distance qui sépare le haut de l'échelle du haut du mur en fonction de la distance qui sépare le bas de l'échelle du bas du mur**.	Situation 4 (S4) Le bas de l'échelle se déplace à vitesse constante. On s'intéresse d'abord à **la distance qui sépare le haut de l'échelle du haut du mur en fonction du temps** puis à **la vitesse du haut de l'échelle en fonction du temps**.

Il est à noter que, d'une part, la forme du pichet choisi pour S1 et S2 influence l'enjeu de la tâche. Nous choisissons donc un pichet de forme irrégulière (on peut l'associer à un solide composé d'un cylindre et d'une boule - voir la figure dans le questionnaire à l'Annexe 4). Dans ce contexte et avec les grandeurs choisies, la modélisation algébrique n'est pas accessible aux élèves visés. En outre, le contexte de l'échelle avec les grandeurs de S3 (des distances) permet ce type de modélisation. D'autre part, les fonctions étudiées n'appartiennent ni à la famille des fonctions affines, ni à celle des fonctions quadratiques, les accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante ne sont donc pas constants, et ils n'augmentent pas non plus de manière constante. Cette caractéristique est importante pour nous puisque, comme nous l'avons montré dans l'exemple de la voiture à l'Annexe 1, la nécessité de définir la notion de dérivée n'apparaît pas dans les cas de figure pour lesquels il est facile d'extrapoler sur la valeur du taux de variation instantané. Ces propos sont aussi illustrés dans l'analyse *a priori* des situations (voir Annexe 6), lesquelles se trouvent en Annexe 4[25].

[25] Nous avons choisi de mettre cette analyse en annexe car elle aurait alourdi le corps du texte. Même si sa lecture n'est pas indispensable à la compréhension de l'analyse des données, nous invitons le lecteur soucieux de bien saisir le potentiel des situations à en prendre connaissance.

3.1.3 La structure du questionnement

Dans cette section, nous présentons la structure globale du questionnement dans les situations construites puisque nous nous intéressons à voir comment celui-ci sollicite la mobilisation des unités de raisonnement lors du déploiement d'un raisonnement covariationnel par les élèves (première question spécifique de la recherche). Nous avons choisi de structurer le questionnement de manière à solliciter directement les treize unités de raisonnement identifiées au Chapitre II (section 2.4.2.3). Nous émettons l'hypothèse que ces unités peuvent être successivement mobilisées, et ce, dans l'ordre, par l'intermédiaire d'un questionnement semblable à celui qui a été à l'origine de la mobilisation de ces unités dans notre propre démarche de résolution d'un problème. Rappelons que nous avions classé les unités de raisonnement en quatre catégories selon les questions ayant suscité leur mobilisation : 1) Comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente?, 2) Comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants?, 3) Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? et 4) Quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs en une valeur de la grandeur indépendante? (voir section 2.4.2.3).

Par ailleurs, pour favoriser la transition entre les unités de raisonnement, nous proposons un travail en spirale dans lequel les élèves sont guidés progressivement à travers quatre stades d'étude la fonction : étude globale du comportement de la fonction, étude locale qualitative du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante, étude locale quantitative du rapport des accroissements concomitants et étude ponctuelle du rapport des accroissements concomitants. Ces quatre stades sont inspirés des quatre catégories d'unités décrites à la section 2.4.2.3 et sont donc en lien avec le questionnement rappelé précédemment. Le tableau 10[26] montre comment s'articule le questionnement par rapport à ces quatre stades d'étude de la fonction. On voit ainsi, par exemple, que la première question de S1 et S3 se situe au stade de *l'étude globale du comportement de la fonction* puis que les questions 2 à 5 de ces mêmes situations se situent au

[26] Noter que les numéros indiqués dans le tableau correspondent aux questions du questionnaire tel que donné aux élèves (voir Annexe 4).

stade de *l'étude locale qualitative du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante*.

Tableau 10 Articulation du questionnement par rapport aux différents stades d'étude de la fonction

Stades d'étude	**S1 et S3**												**S2 et S4**								
													Partie A				**Partie B**				
Étude *globale* du comportement de la fonction	**1**							**6**				**10**	**1**			**4**	**1**				5
Étude *locale qualitative* du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante		**2**	**3 a.**	**3 b.**	**3 c.**	**4**	**5**							**2**	**3**						
Étude *locale quantitative* du rapport des accroissements concomitants									**7**	**8**	**9**							**2**			
Étude *ponctuelle* du rapport des accroissements concomitants																			**3**	**4**	

En outre, il est important de considérer que ce questionnement est élaboré spécifiquement pour cette étude clinique[27]. Son principal objectif étant de favoriser la collecte de données, et ce, dans le contexte précis de l'expérimentation qui sera menée (les modalités de la collecte sont explicitées à la section 3.2). Nous cherchons avant tout à amener les élèves à expliciter leur raisonnement afin, notamment, d'identifier des unités de raisonnements mobilisées et leur articulation. Le contenu et les objectifs du questionnement sont présentés à la section suivante.

3.1.4 Les objectifs et le contenu du questionnement

Le questionnement est le même pour les situations 1 et 3 puis pour les situations 2 et 4. À l'Annexe 5, deux tableaux présentent en détails les informations suivantes pour chaque question des situations 1 et 3 (S1 et S3) puis 2 et 4 (S2 et S4) :

[27] Nous mettons ici en garde le lecteur : les situations telles que présentées en annexe ne constituent pas des situations pour l'enseignement en classe.

a) le contenu de la question : quelles informations sont données et quelle tâche doit être réalisée,
b) les intentions didactiques : quelles informations nous voulons tirer de l'analyse des solutions des élèves et pourquoi nous avons fait certains choix,
c) les unités de raisonnement associées : quelles sont les unités de raisonnement que ces questions sollicitent et sur lesquelles nous voulons obtenir de l'information (comment elles se manifestent, comment elles sont liées etc.).

Nous présentons ici une synthèse de ces informations. Rappelons que les situations complètes sont disponibles à l'Annexe 4.

Dans S1 et S3, les grandeurs observées sont fixées et on précise le sens de la relation fonctionnelle étudiée (quelle grandeur dépend de l'autre). Comme nous l'avons indiqué précédemment, les grandeurs dépendantes sont des longueurs pour les deux situations, mais la grandeur indépendante de S1 est un volume alors que pour la S3 c'est aussi une longueur. Le schéma fourni montre où observer les grandeurs. La formulation de la **première question** suggère que les variations des deux grandeurs sont concomitantes. Ainsi, nous prenons pour acquis que si les élèves comprennent la première question, c'est qu'ils sont capables de mobiliser les unités de raisonnement 1 et 2. Ensuite, s'ils peuvent y répondre correctement c'est qu'ils mobilisent l'unité de raisonnement U3. Les unités de raisonnement associées à l'étude globale du comportement de la fonction sont donc survolées de manière à pouvoir passer aux unités de raisonnement spécifiques à une approche covariationnelle de la fonction telle que nous l'avons précisée à la section 2.4.2.3. La **seconde question** vise à susciter la nécessité d'une étude plus approfondie de la variation afin de préciser *comment* augmente la grandeur dépendante. Il sera alors possible de voir comment les élèves répondront spontanément à ce questionnement et si, éventuellement, ils mobiliseront les unités U4 à U6 ou des variantes.

La **troisième question** amorce l'étude qualitative des accroissements. Elle propose, en effet, de prendre des accroissements constants de la grandeur indépendante et de regarder les accroissements de la grandeur dépendante. Les élèves sont amenés à comparer les accroissements successifs et à généraliser cette comparaison en décrivant le comportement des accroissements pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (analyse discrète de l'augmentation) puis le comportement de l'augmentation (continue) de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente.

La **quatrième question** est semblable à la troisième sauf qu'on propose de prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante et, dans la **cinquième question,** on propose d'anticiper ce qui se passerait avec des accroissements encore plus petits. Ce questionnement introduit le processus de rapetissement des accroissements de la grandeur indépendante sur lequel repose la construction de la notion de dérivée. En outre, il permet ici aux élèves de généraliser leur description et donc de prendre du recul par rapport aux manipulations de divers accroissements. Ce recul est d'autant plus sollicité à la **question six** laquelle introduit pour la première fois une représentation institutionnelle. La production d'un graphique permet de passer de l'étude locale des accroissements à l'étude globale de la variation de la fonction qui était en fait la préoccupation initiale du questionnement.

Le va-et-vient entre l'étude locale et l'étude globale est aussi exploité dans les **questions sept et huit**, en introduisant une dimension quantitative. En fait, l'étude locale se fait quantitativement à l'aide de données numériques et l'étude globale reste qualitative. L'étude quantitative des accroissements sollicitée par ces questions propose d'analyser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante à partir de la comparaison de données numériques. La mise en place de liens entre les unités de raisonnement associées aux études qualitative et quantitative est donc favorisée. Le principal intérêt de ce travail quantitatif concerne le passage à la notion de dérivée. En effet, les questions qui justifient le besoin d'introduire cette nouvelle notion sont des questions quantitatives. Ces dernières sont aussi ponctuelles, c'est-à-dire qu'elles concernent la détermination d'une valeur d'une grandeur pour une valeur donnée de l'autre grandeur. C'est, entre autres, pour cette raison que la **question neuf** est quantitative et ponctuelle. Afin de voir si les élèves vont prendre en compte le comportement de la fonction établi précédemment à l'aide du travail sur les accroissements, il est demandé d'approximer une valeur de la grandeur dépendante qui correspond à une valeur donnée de la grandeur indépendante.

La **dernière question** propose de fermer la boucle du travail effectué en amenant les élèves à prendre du recul par rapport à l'étude des accroissements et à en voir ainsi la pertinence pour décrire de manière plus précise comment se comporte la fonction étudiée. Nous avons choisi, à ce stade, la description verbale comme moyen de faire une synthèse du travail effectué alors que précédemment, à la question six, nous avions choisi le graphique. En effet, il nous semble qu'à la suite de la collecte de données effectuée, la production d'un graphique soit beaucoup moins intéressante puisqu'elle mène à une vision ponctuelle de la courbe (les points sont placés puis reliés) alors que nous voulons favoriser la vision globale de cette dernière.

Pour S2 et S4, l'énoncé précise qu'un dispositif est utilisé pour que le phénomène se déroule de manière continue et constante au cours du temps (dans S2 le pichet est rempli à l'ide d'un robinet dont le **débit est constant** et dans S4 le bas de l'échelle est fixé sur un mobile qui se déplace à **vitesse constante**). Le questionnement est séparé en deux parties.

Pour la *partie A*, la grandeur indépendante est le temps et la grandeur dépendante est la même que dans S1 ou S3. Le schéma fourni montre où observer la grandeur dépendante qui est une longueur. Les deux premières questions ont pour but de rappeler le travail effectué dans S1 ou S3. L'objectif de la démarche, soit décrire le comportement de la grandeur dépendante au cours du temps, est le sujet de la **première question**. La **seconde question**, quant à elle, rappelle que l'étude des accroissements est un bon moyen d'arriver à ce type de description. La **troisième question**, en plus de guider vers la généralisation du comportement des accroissements, sollicite l'identification de la grandeur implicite sur laquelle on travaille : la vitesse. Cette question constitue donc une amorce pour la partie B du questionnement dans laquelle on s'intéresse explicitement à cette grandeur. Le graphique demandé à la quatrième question constitue aussi un outil qui pourra être utilisé dans la partie B.

L'énoncé de la *partie B* précise qu'on observe la vitesse en fonction du temps. Pour S2, la vitesse est celle de l'eau qui monte dans le pichet et pour S4, il s'agit de la vitesse du haut de l'échelle. La première question demande de décrire le comportement de la vitesse en fonction du temps. Cette description est facilement accessible à condition qu'un lien soit établi avec la fonction étudiée à la partie A. En effet, cette nouvelle fonction est la fonction dérivée de celle étudiée précédemment. Dès la seconde question, l'étude des accroissements devient quantitative puisqu'elle a pour but de susciter un questionnement sur la distinction des notions de vitesse moyenne et de vitesse instantanée. La **question deux** vise le calcul de vitesses moyennes alors que les **questions trois et quatre** ont pour but d'évaluer la capacité des élèves à envisager la vitesse instantanée et à la distinguer de la vitesse moyenne. La **cinquième et**

dernière question concerne la construction d'un graphique qui encore une fois apparaît comme un moyen de représenter globalement la relation entre les grandeurs.

Comme nous l'avons montré à la section précédente à propos de la structure du questionnement, le regard sur la fonction observée dans la *partie B* (la vitesse en fonction du temps) est d'abord global, puis local, puis ponctuel pour finalement redevenir global.

3.1.5 Validation des situations

Afin de nous assurer du potentiel des situations construites à solliciter le déploiement d'un raisonnement covariationnel, nous avons en premier lieu effectué une analyse *a priori* détaillée de ces situations en imaginant ce que des élèves de 15 à 18 ans pourraient faire (voir Annexe 6). En second lieu, nous avons pré-expérimenté ces situations auprès de quelques élèves dans notre entourage. Nous avons, par la suite, révisé et amélioré les énoncés des contextes et des questions.

3.2 Les modalités de la collecte de données

Comme nous l'avons déjà mentionné, nous voulons procéder à l'analyse du raisonnement covariationnel déployé en situation par des élèves de 15 à 18 ans. Nous avons en effet considéré que, dans un cursus régulier et dans divers pays, ce sont des élèves de cette tranche d'âge qui étudient de manière approfondie les fonctions en algèbre avant d'être initiés au calcul différentiel. Plus précisément, nous voulons déterminer si les unités de raisonnement identifiées peuvent être mobilisées par des élèves en situation et, si oui, comment et en réponse à quel questionnement. Nous voulons aussi analyser l'articulation de ces unités au sein de la dynamique du raisonnement et tenter d'évaluer l'influence des caractéristiques des situations sur cette articulation. L'importance que nous accordons aux situations nous a menée à expliciter de manière approfondie leur processus de construction. Nous présentons à présent nos choix quant aux modalités de travail sur ces situations et de sélection des sujets d'étude.

3.2.1 La sélection des lieux et les caractéristiques des sujets d'étude

Au Québec, ce sont les élèves de quatrième (15-16 ans) et cinquième secondaire (16-17 ans) dans les séquences sciences naturelles (SN) et technico-sciences (TS) qui se destinent à l'étude du calcul différentiel[28] au collégial. En général, les cours de calcul différentiel sont suivis par les élèves de première année du collégial (17-18 ans) dans des programmes pré-universitaires à vocation scientifique (Ministère de l'éducation, du loisir et du sport, 2010).

Ainsi, les sujets ciblés pour cette recherche sont des élèves de quatrième et cinquième secondaire dans les séquences TS ou SN, ainsi que des élèves de première année du collégial ayant suivi un cours de calcul différentiel.

L'expérimentation s'est déroulée de mars à juin 2013. À ce moment, tous les élèves avaient déjà travaillé sur les fonctions. Les élèves de quatrième secondaire avaient étudié en profondeur deux familles de fonction : les fonctions affines et les fonctions quadratiques, alors que les élèves de cinquième secondaire avaient, en plus, travaillé au moins deux autres familles de fonctions (fonctions exponentielles et logarithmiques, fonctions trigonométriques). Les élèves du collégial avaient quant à eux déjà suivi un cours de calcul différentiel (de septembre à décembre) et ils étaient en train de suivre un cours de calcul intégral.

3.2.2 Le recrutement des sujets d'étude

Pour atteindre nos objectifs de recherche, nous avons choisi de recruter un petit nombre d'élèves et de les faire travailler en équipe d'un même niveau scolaire sur les situations construites (quatre élèves par niveau). Le travail d'équipe nous apparait effectivement favoriser la communication orale et, par conséquent, la verbalisation du raisonnement par les élèves. Les situations ont, de plus, été construites de manière à ce que les élèves puissent être autonomes et prendre en charge la résolution des problèmes sans qu'un enseignant n'ait besoin d'intervenir. Ainsi, une étude clinique dans laquelle quelques élèves sont observés en dehors de la classe nous est apparue particulièrement appropriée.

Avec l'aide d'un enseignant collaborateur à chacun des niveaux visés, nous avons procédé au recrutement d'élèves volontaires. L'enseignant a présenté les grandes lignes de la recherche à tous ses élèves (voir Annexe 7) et a invité ceux qui étaient intéressés à une séance d'information plus détaillée dans laquelle nous avons expliqué le but de la recherche et les étapes qui seront suivies (voir Annexe 8). Lorsque plus de quatre élèves par niveau se sont dits intéressés, nous avons procédé à un tirage au sort (le cas s'est présenté uniquement en

[28] Les cours de mathématiques de ces séquences sont des prérequis aux cours de calcul différentiel et intégral au CÉGEP d'après le programme du MELS (Ministère de l'éducation, du loisir et du sport, 2010, 2011).

quatrième secondaire). Tous les principes éthiques ont été respectés, notamment, en ce qui concerne l'obtention du consentement parental (voir la lettre de présentation et le formulaire de consentement aux Annexes 9 et 10). Avant la première séance, les élèves ont reçu le calendrier du déroulement de l'expérimentation.

3.2.3 Le déroulement des séances de travail et les modalités de la collecte de données

Les quatre séances (une par situation) de travail pour chaque niveau ont eu lieu à des moments différents. Ainsi, lors d'une séance, seuls les quatre élèves du même niveau et la chercheure étaient présents. Les élèves devaient travailler à la fois individuellement et collectivement. Ils ont été placés à la même table de manière à favoriser les échanges entre les quatre participants lors de la partie collective du travail. L'ensemble des séances a été enregistré à l'aide de deux caméras vidéo et d'un dictaphone.

Chaque séance de travail a duré environ 75 minutes et le temps a été réparti comme suit :

- Consignes pour le déroulement de la séance : 5 minutes
- Travail individuel sur les deux premières questions (S1 et S3) ou sur la première question seulement (S2 et S4) : 5-10 minutes
- Travail collectif sur l'ensemble des questions : 50-60 minutes
- Entretien d'explicitation conduit par la chercheure : 5-10 minutes

Les consignes détaillées pour le déroulement de la séance sont présentées à l'Annexe 11. Globalement, elles expliquent le fonctionnement de la séance (répartition du temps, couleur des feuilles et des stylos pour distinguer le travail individuel du travail collectif, utilisation du matériel fourni uniquement, distribution des questions une à une par la chercheure), les caractéristiques du travail demandé (un seul et même contexte pour toutes les questions, travail parfois répétitif, liens entre les questions, manipulation possible, matériel disponible, longueur des solutions) et les comportements attendus (respect, travail collaboratif, explicitation des idées, ne pas raturer les écrits).

Le travail individuel avait pour but de permettre aux élèves de s'approprier le contexte et de leur laisser le temps de formuler leurs premières intuitions. Les réponses écrites individuelles ont été recueillies sur des feuilles roses afin de les distinguer des réponses collectives. Par la suite, les élèves devaient d'abord partager leurs réponses individuelles, puis constituer une réponse collective avant de pouvoir passer à la question suivante. Chaque question a été donnée séparément de manière à ce que les élèves puissent répondre sans se soucier des questions à venir, du manque de temps pour compléter le travail etc. Les solutions collectives écrites ont été recueillies sur des feuilles bleues (questions ayant été travaillées individuellement) et blanches (toutes les autres questions). La chercheure s'est assurée du bon déroulement de l'expérimentation et de la saisie appropriée des données, sans intervenir sur le contenu des réponses des élèves.

Une dizaine de minutes avant la fin de chaque séance, la chercheure a arrêté les élèves peu importe où ils en étaient en essayant de ne pas couper le déploiement du raisonnement. Un court entretien d'explicitation collectif, conduit par la chercheure, a été mené de manière à amener les élèves à préciser quelques éléments laissés en suspens, peu explicités ou difficile à saisir. Le questionnement a alors été organisé par la chercheure, pendant la séance et aux vues du travail des élèves, en respectant les principes de l'entretien d'explicitation selon Vermersch (1994).

CHAPITRE IV : ANALYSE

Au chapitre précédent, nous avons explicité le processus de planification et de réalisation de l'expérimentation. Nous avons ainsi recueilli des données audiovisuelles et écrites afin d'analyser le raisonnement déployé par les élèves. Nous avons choisi de nous concentrer sur le discours des groupes d'élèves et c'est pourquoi nous avons transcrit l'intégralité des discussions pour chaque groupe à chacune des quatre séances[29]. Bien que nous nous soyons servie des enregistrements vidéo pour mieux comprendre le discours, l'analyse des données a été principalement réalisée par l'intermédiaire de l'analyse du texte transcrit (protocoles verbaux).

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord la méthodologie de l'analyse des protocoles verbaux, soient les étapes suivies et les outils construits. Ensuite, nous dégageons une structure globale du raisonnement covariationnel suggérant une nouvelle organisation des unités de raisonnement selon le rôle de ces unités au sein du raisonnement déployé par les élèves visés lors de l'expérimentation. Nous terminons par une analyse détaillée du raisonnement axée sur la description des unités de raisonnement mobilisées et de l'articulation de ces unités dans la dynamique du raisonnement.

4.1 Méthodologie de l'analyse

Pour motiver l'expression orale spontanée des élèves donnant accès au raisonnement, nous avons choisi de les faire travailler en équipe. Ce dispositif a donc favorisé la construction collective d'un raisonnement. Considérant que ce raisonnement n'est pas égal à la somme des raisonnements de chaque élève, les groupes d'élèves constituent les entités observées sans distinction des individus. Ce choix ne nuit pas à l'obtention de résultats pertinents dans la mesure où notre intérêt est de mieux comprendre comment le raisonnement covariationnel peut être déployé par des élèves dans des situations spécifiques et non d'évaluer les apprentissages individuels des élèves.

Afin d'analyser le raisonnement covariationnel déployé par les groupes d'élèves en situation, nous avons procédé à une analyse de protocoles verbaux, c'est-à-dire à une analyse du

---

[29] Ces transcriptions intégrales sont disponibles sur demande.

discours. Comme nous l'avons indiqué précédemment ce discours peut donner accès au raisonnement dans la mesure où il offre la possibilité de dégager la logique de la succession des idées communiquées. Afin de dégager cette logique, nous avons suivi, en partie, une méthodologie apparentée à l'analyse inductive générale telle que décrite par Blais et Martineau (2006). Le processus de réduction des données visait donc à « donner un sens » au corpus de données brutes que constituaient les transcriptions des discussions entre les élèves. Le sens, attribué a posteriori par notre interprétation, peut alors être considéré comme « une construction mentale qui s'effectue à l'occasion d'une expérience, laquelle est mise en relation avec des expériences antérieures » (Blais et Martineau, 2006, p.3). Nous nous sommes effectivement immergée dans les données afin leur donner un sens. Cette expérience nous a permis d'associer une logique au raisonnement des élèves à partir des *a priori* sur le déploiement d'un raisonnement covariationnel explicité dans notre grille d'analyse comprenant treize unités de raisonnement (section 2.4.2.3) et dans l'analyse *a priori* des situations (Annexe 6). Nous avons ainsi procédé à une **analyse interprétative et émergente** au sens de Blais et Martineau (2006).

Concrètement, nous avons suivi plusieurs étapes pour le traitement des données en vue de leur interprétation. Nous expliquons donc globalement ces étapes puis, nous présentons les divers tableaux d'analyse que nous avons construits afin de tirer les fils organisant l'analyse détaillée du raisonnement. Il est à noter que ces tableaux, au-delà de leur caractère instrumental, constituent en eux-mêmes des résultats de cette recherche puisqu'ils ont été élaborés tout au long du processus d'analyse pour permettre de donner un sens aux données recueillies. C'est donc en réponse à la nature spécifique de ces données, à la perspective inductive choisie pour leur analyse et aux questions de recherche que ces outils ont été construits.

4.1.1 Le codage des données

Afin de condenser les données collectées, soit les transcriptions complètes des discussions, nous avons procédé à un codage à partir de la grille d'analyse initiale (voir section 2.4). Les segments de texte présentant en soi une signification spécifique ont été repérés puis associés aux unités de raisonnement[30]. Les discussions des élèves représentant le principal biais pour

[30] Pour cette étape, le logiciel d'analyse qualitative QDAMiner a été utilisé pour faciliter le codage.

l'analyse de leur raisonnement, nous avons considéré tous les sujets abordés (en lien avec la réalisation de tâches) comme des éléments jouant un rôle dans le raisonnement. À partir du moment où un extrait de discussion nous est apparu en lien avec l'une des unités de raisonnement de la grille d'analyse, nous en avons tenu compte comme d'un élément prenant part au développement du raisonnement covariationnel. La longueur moyenne des segments codés est de l'ordre d'une phrase comprenant une vingtaine de mots. Il est à noter que la plupart des segments, lorsqu'on les sort de leur contexte, sont difficiles à interpréter. En fait, ils sont porteurs de sens dans la mesure où l'on considère la question posée aux élèves et l'ensemble des éléments de la discussion au sein de laquelle ils prennent part. C'est pourquoi dans notre analyse, l'interprétation des segments codés nécessitera une re-contextualisation.

Le raffinement de la grille d'analyse initiale a eu lieu tout au long du repérage des unités de raisonnement afin de rendre compte des nuances au sein d'une même unité de raisonnement. La comparaison du codage réalisé individuellement par trois codeurs a permis la validation, la précision ou le rejet de l'association entre un segment de texte et une certaine déclinaison d'une unité de raisonnement à divers moments. Les choix faits par l'équipe et leurs justifications ont été notés dans un journal de bord tenu par la chercheuse. À la fin du processus de codage, nous avons obtenu la grille finale d'analyse dans laquelle les unités de raisonnement et leurs éventuelles sous-unités associées sont décrites (voir Annexe 13). Nous avons, de plus, construit plusieurs tableaux permettant de rendre compte des résultats quant à divers aspects révélés par le codage des transcriptions. Ces tableaux, ainsi que la grille finale d'analyse, le journal de bord, les vidéos et les productions écrites des élèves constituent l'ensemble des sources d'information ayant servi pour l'analyse et l'interprétation du raisonnement déployé par les élèves.

4.1.2 La construction de tableaux d'analyse

Afin de répondre à nos questions de recherche, nous avons élaboré plusieurs tableaux d'analyse rendant compte de certains résultats révélés par le codage. Chaque tableau présente une synthèse des données en vue de faciliter leurs analyses et interprétations qui seront présentées dans les sections suivantes.

Dans cette section, nous présentons les tableaux construits et donnons des indications sur la façon de les lire à partir d'extraits. La plupart des tableaux complets se trouvent à l'Annexe

12. Nous invitons toutefois le lecteur à ne pas s'engager d'entrée de jeu dans leur lecture approfondie laquelle s'avérera plus pertinente lors de la présentation des analyses et interprétations aux sections suivantes.

D'abord, nous avons mis en parallèle les grilles initiale et finale d'analyse du raisonnement afin d'identifier rapidement les éléments nouveaux ayant émergés lors de l'analyse des données. Pour les unités U1 à U6, la grille finale est différente de la grille initiale. La description de l'unité U5 a été modifiée et celles des autres unités ont été précisées. La grille finale comporte donc des unités ainsi que des sous-unités de raisonnement (voir Tableau 11). On peut lire, par exemple, que l'unité U1 a été associée initialement à l'action d' « identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante ». Puis elle a été redéfinie plus globalement comme l'action d' « identifier une relation fonctionnelle » qui se décline en deux sous-unités : a) Identifier les deux grandeurs étudiées et b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance).

De plus, nous avons ajouté des sigles pour préciser la forme d'occurrence des sous-unités de raisonnement (voir Tableau 12) et, pour certaines sous-unités, nous avons précisé entre parenthèses la fonction sur laquelle porte le segment codé (les trois fonctions étudiées sont présentées au Tableau 13). Ainsi, par exemple, le codage U3a(*f*)* dans la situation 1 (S1) est attribué à un segment de texte dans lequel nous avons identifié la mobilisation de la sous-unité U3a sur la fonction *f* sous une forme particulière en décalage avec celle attendue. Lors de l'interprétation des données présentée à la section suivante, nous expliciterons et illustrerons chaque type de codage utilisé et nous montrerons en quoi ils nous ont été utiles pour mieux comprendre le raisonnement covariationnel déployé par les élèves en situation.

Tableau 11 Parallèle entre les grilles initiale et finale (U1 à U7)

Unité	Description de la grille initiale	Description de la grille finale
U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante	Identifier une relation fonctionnelle
		a) Identifier les deux grandeurs étudiées
		b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance)
U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation
		a) Établir que la grandeur indépendante est variable
		b) Établir que la grandeur dépendante est variable
		c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs
U3	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	Décrire le comportement de la fonction
		a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente
		b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale
U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Décrire le comportement de la fonction dérivée
		a) Considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante
		b) Considérer des accroissements de la grandeur dépendante
		c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs
		d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants
		e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente
U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)	Considérer les changements de comportement de la fonction dérivée
U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante	Considérer le comportement d'une fonction continue et monotone sur un intervalle (ou une phase) de plus en plus petit du domaine
		a) Généraliser intuitivement le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits (le passage à des accroissements plus petits est induit par la question)
		b) Prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante et observer le comportement des accroissements de la grandeur indépendante (le passage à des accroissements plus petits est spontané)
		c) Généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont infiniment petits (passage à la limite)
U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)	

Tableau 12 Sigles utilisés pour préciser la forme d'occurrence des sous-unités de raisonnement

Sigle (associé à une sous-unité donnée)	Signification
- (moins)	Dans le segment de texte nous décelons une **amorce de mobilisation** de la sous-unité de raisonnement identifiée.
* (étoile)	Le segment de texte peut être associé à une sous-unité de raisonnement identifiée MAIS celle-ci est mobilisée **d'une manière particulière et singulière en décalage avec le sens propre que nous lui avons attribué**.
' (prime)	Le segment de texte peut être associé une sous-unité de raisonnement identifiée MAIS **la fonction concernée n'est pas l'une de celles imposées** par les situations. La sous-unité de raisonnement est donc bien mobilisée mais sur une autre fonction.
-1 (exposant -1)	Le segment de texte peut être associé une sous-unité de raisonnement identifiée MAIS **la fonction concernée est la réciproque de l'une de celles imposées** par les situations. La sous-unité de raisonnement est donc bien mobilisée mais sur la fonction réciproque de celle identifiée entre parenthèse.

Tableau 13 Les trois fonctions étudiées dans chaque contexte et situation

Fonction	Contexte du pichet	Contexte de l'échelle
f	(S1) Le niveau d'eau dépend du volume d'eau.	(S3) La distance du haut dépend de la distance du bas.
g	(S2A) Le niveau d'eau dépend du temps.	(S4A) La distance du haut dépend du temps.
g'	(S2B) La vitesse à laquelle monte le niveau de l'eau dans le pichet dépend du temps.	(S4B) La vitesse du haut de l'échelle dépend du temps.

Pour les unités U7 à U13, les grilles initiale et finale sont identiques. Les descriptions de ces unités sont donc celles présentées au Chapitre II (section 2.4.2.3). L'analyse détaillée de la mobilisation de l'unité U7 permettra toutefois de préciser les éléments de sa description (voir section 4.5.5). Quant aux unités U8 à U13, elles ne seront pas sujettes à une analyse détaillée dans la mesure où elles ont été peu observées (voir à ce sujet la section 4.6).

Ensuite, nous avons créé des tableaux-synthèses permettant de répertorier les unités de raisonnements observées par question pour chaque groupe et de comparer ces unités mobilisées par les élèves à celles sollicitées par le questionnement (voir les tableaux 12-A à 12-F à l'Annexe 12). Les tableaux 12-A à 12-D présentent les sous-unités de raisonnement identifiées lors du codage des transcriptions. Par exemple, dans l'extrait (Figure 14) du tableau 12-A qui concerne les discussions des élèves lors du travail sur S1, on peut lire à la première ligne qu'aux questions 1 et 2, les sous-unités U1a et U1b ont été repérées dans le groupe de quatrième secondaire, que la sous-unité U1a a été identifiée dans le groupe du collégial et que, par conséquent, l'unité U1 a été observée au moins une fois dans l'ensemble des groupes. Ainsi, sur chaque ligne, les déclinaisons des unités de raisonnements qui ont été observées au moins une fois sont indiquées pour chaque groupe, ce qui facilite la comparaison, et la dernière colonne présente globalement toutes les unités observées pour chaque question.

Tableau 12-A Unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves lors de la première séance (travail sur S1)

Question	Secondaire 4	Secondaire 5	Collégial	Tous (global)
1 et 2	U1a ; U1b		U1a	**U1**
	U2a ; U2c			**U2**
	U3a(f) ; U3a(g') U3b' ; U3b(f)* ; U3b(f)-	U3a(f) U3b(f)	U3a(f) U3b' ; U3b(f) ; U3b(f)-	**U3**
		$U4c(f)^{-1}$	$U4c(f)^{-1}$	**U4**
	U5-; U5	U5-	U5-	**U5**

Figure 14 Extrait du tableau 12-A de l'Annexe 12 présentant les unités identifiées pour chaque question de S1 par chaque groupe d'élèves

À partir de ces tableaux, nous en avons construits d'autres afin d'avoir une vue globale sur les unités mobilisées à chacune des questions et pour chaque groupe. Par exemple, dans l'extrait du Tableau 18 qui sera présenté à la section 4.3.2, on peut voir que l'unité U1a a été mobilisée par les élèves de quatrième secondaire et du collégial aux deux premières questions de S1. Il est à noter que ce type de tableau ne tient pas compte des déclinaisons observées pour chacune des sous-unités qui apparaissent dans les tableaux 12-A à 12-D (Annexe 12).

Tableau 18 Apparition des sous-unités de raisonnement associées à U1 et U2 par groupe, par situation et par question

		U1a			U1b			U2a			U2b			U2c		
	Question \ Groupe	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col
S1	1 et 2	X		X	X			X						X		
	3	X			X			X						X		
	4															
	5															
	6	X			X	X	X	X				X		X		X
	7															
	8															
	9															
	10															

Figure 15 Extrait du Tableau 18 présentant les sous-unités associées à U1 et U2 observées

Les unités colligées dans la dernière colonne de chacun des tableaux 12-A à 12-D se retrouvent dans les deux dernières colonnes des tableaux 12-E et 12-F (cf Annexe 12). Elles sont alors mises en parallèle avec les unités sollicitées par chacune des questions posées aux élèves dans les quatre situations. Dans l'extrait du tableau 12-F (Figure 16), par exemple, on peut voir que, pour la première question de la partie A de S2 et S4 :

- Les unités U1, U5 et U7 qui n'étaient pas sollicitées ont été observées en S2 mais pas en S4.
- L'unité U2 qui était sollicitée a été observée en S2 mais pas en S4.
- L'unité U3 qui était sollicitée a été observée dans les deux situations.
- L'unité U3 qui n'était pas sollicitée a été observée dans les deux situations.

Ces tableaux viennent donc compléter ceux de l'Annexe 5 qui présentaient le contenu, les intentions didactiques et les unités sollicitées par chacune des questions. Ils mettent en parallèle, en quelque sorte, les résultats de l'analyse *a priori* et *a posteriori* des situations en ce qui concerne la mobilisation des unités de raisonnement.

Tableau 12-F Synthèse comparative des unités de raisonnement sollicitées par les questions en S2 et S4 et des unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves

Question		Contenu	Unités sollicitées	Unités observées	
				Pichet (S2)	Échelle (S4)
	1	On demande de décrire comment se comporte la grandeur dépendante lorsque le temps s'écoule.		U1	
			U2	U2	
			U3	U3	U3
				U4	U4
				U5	
				U7	

Figure 16 Extrait du tableau 12-F de l'Annexe 12 présentant en parallèle les unités sollicitées et les unités observées pour chaque question de chaque situation

Finalement, à partir des transcriptions codées, des tableaux montrant l'ordre d'apparition des unités de raisonnement ont été constitués (Tableaux 12-G à 12-S de l'Annexe 12). Du début à la fin de la discussion, une case noircie marque l'occurrence d'une sous-unité. On voit donc la succession des sous-unités. Par exemple, l'extrait de transcription codée présentée à la Figure 17, correspondant au début de la discussion entre les élèves du collégial à la deuxième séance (S2), a permis de remplir les premières colonnes du Tableau 12-Q de l'Annexe 12 (voir extrait à la Figure 18). Nous avons repéré d'abord un segment exprimant la sous-unité U3a(*g*) puis un autre exprimant U1b' puis encore un autre exprimant U3a(*g*) de nouveau etc. Ces tableaux rendent donc compte de l'enchaînement des sous-unités de raisonnement tout au long des échanges verbaux entre les élèves. On peut y repérer rapidement les sauts d'une unité à une autre, des regroupements de sous-unités associées à une même unité, des séquences particulières etc. Toutefois, l'ordre d'apparition ne donne pas d'indication sur la longueur des intervalles de temps, ni sur la quantité d'informations contenue dans le texte entre chaque occurrence d'une sous-unité. À l'intérieur de ces tableaux, nous avons schématisé le mouvement du raisonnement pour avoir une vue d'ensemble du chemin suivi (voir exemple à la Figure 19). Cette représentation visuelle du chemin suivi par le raisonnement permet, d'une part, d'identifier rapidement les moments d'apparition des sous-unités de raisonnement et, d'autre part, de repérer les enchainements de ces sous-unités. Nous exploiterons donc cet outil à divers stades de l'analyse lorsque nous nous intéresserons à savoir à quels moments une certaine sous-unité de raisonnement est mobilisée ou deux sous-unités se succèdent. Par exemple, à la Figure 19, sont identifiés ce que nous avons nommé des *moments* de mobilisation des unités U1 et U2. Il est à noter que comme, occasionnellement, certains segments ont été double-codés, il arrive que des cases noircies soient placées dans la même colonne. Dans les schémas du mouvement, nous avons relié ces cases par un trait plein vertical. L'ensemble des tableaux de mouvement du raisonnement est disponible en Annexe 12 (Tableaux 12-G à 12-S).

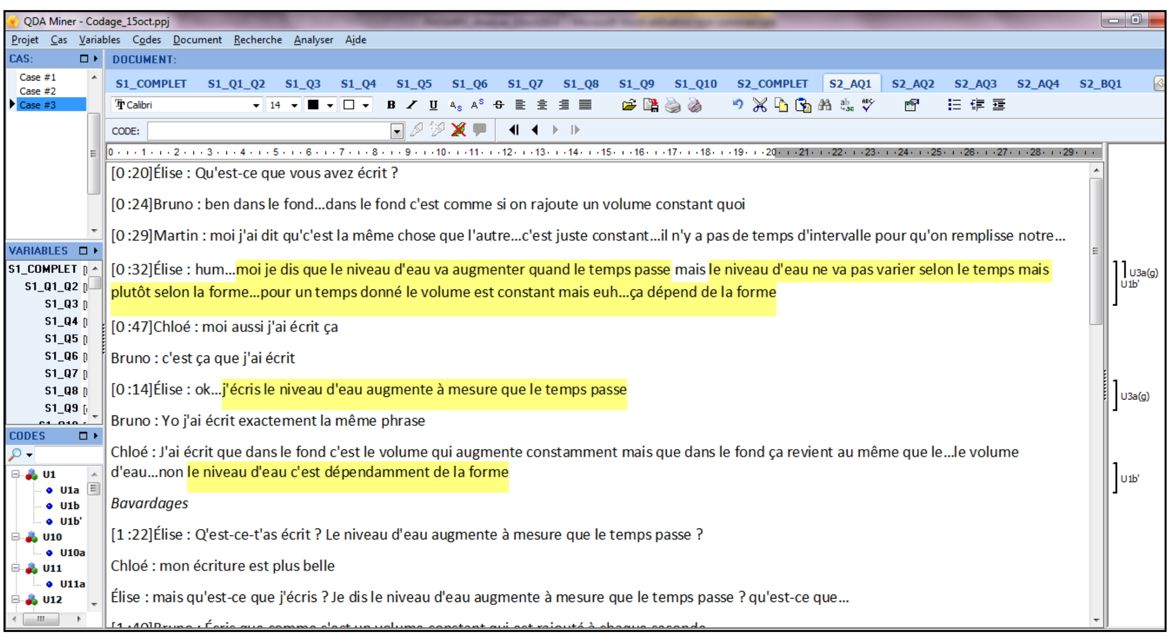


Figure 17 Extrait de transcription codée dans QDAminer

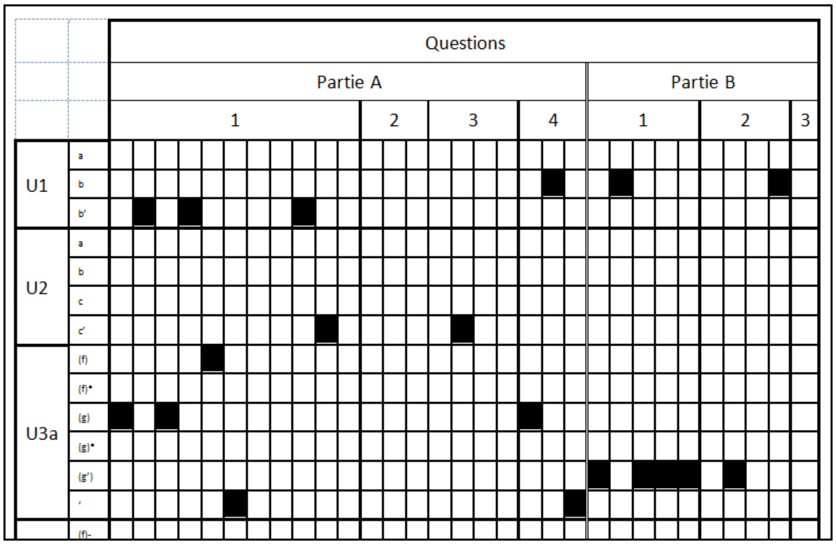


Figure 18 Extrait du tableau 12-Q montrant l'ordre d'apparition des unités de raisonnement dans les discussions du groupe du collégial en S2

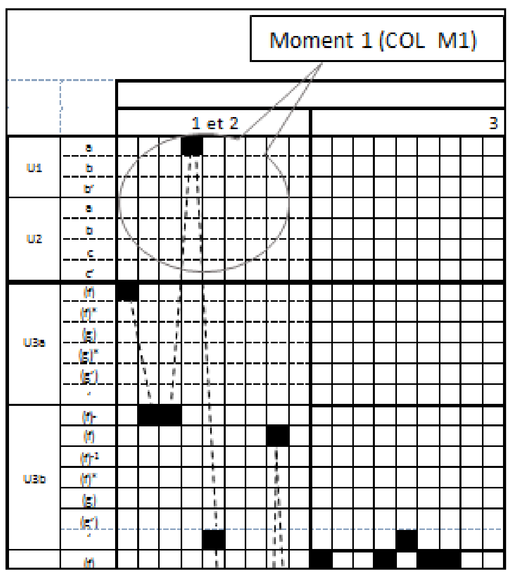


Figure 19 Extrait de la schématisation du mouvement du raisonnement (pointillés) et de l'identification du *moment 1* pour le groupe du collégial (S1)

4.2 Structure globale de la grille finale d'analyse

La grille initiale d'analyse a été réalisée à partir de la littérature (grille de Carlson) et d'une réflexion personnelle (voir section 2.4). Les situations présentées aux élèves avaient pour objectif de solliciter les unités de raisonnement de cette grille. L'observation des unités de raisonnement identifiées dans la grille initiale apporte une première information sur le raisonnement covariationnel déployé par les élèves interrogés. Toutefois, afin de rendre compte plus finement du processus de déploiement de ce raisonnement, nous avons choisi de raffiner cette grille. Ainsi, tout au long du processus de codage des transcriptions nous avons adapté la grille de manière à préciser les unités de raisonnement. Le contenu de la grille finale est donc une adaptation de la grille initiale tenant compte du raisonnement des élèves interrogés et de nos réflexions engendrées par l'analyse de ce raisonnement. Par conséquent, la comparaison des grilles initiale et finale nous apparait un bon moyen de mettre en évidence notre apport en ce qui concerne l'analyse du raisonnement covariationnel déployé par des élèves de 15 à 18 ans. Cette comparaison permet, d'une part, de décrire le raisonnement de ces élèves et, d'autre part, de proposer un raffinement de la grille d'analyse issue du cadre théorique.

Dans la grille initiale, nous avions identifié quatre catégories d'unités de raisonnement selon **les questions pouvant en susciter la mobilisation** : 1) les unités mobilisées pour répondre à « comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente? (U1 à U3), 2) les unités mobilisées pour répondre à « comment se comportent les accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants? » (U4 à U7), 3) les unités mobilisées pour répondre à « quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs pour un certain accroissement de la grandeur indépendante? » (U8 à U11) et 4) les unités mobilisées pour répondre à « quelle est la valeur du rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs en une valeur de la grandeur indépendante » (U12 et U13). Ces quatre catégories avaient permis d'organiser le questionnement dans les situations construites en vue d'amener les élèves à passer d'une *étude globale* du comportement de la fonction à une *étude ponctuelle* associée à la dérivée par l'intermédiaire de l'*étude locale* des accroissements concomitants (voir Tableau 10 à la section 3.1.3). Par ailleurs, inspirée par le cadre d'analyse de Carlson, nous avions perçu une hiérarchie *a priori* des unités de raisonnement et nous pensions que le questionnement progressif appellerait successivement chaque catégorie d'unités.

Toutefois, nous avons constaté, lors de l'analyse du raisonnement déployé par les élèves dans les situations proposées, que la mobilisation des unités de raisonnement ne suivait pas la hiérarchie ordonnée préétablie dans la grille d'analyse. Ainsi, la succession linéaire des unités telle que suscitée par le questionnement n’a pas été observée. Les mouvements de va-et-vient fréquents entre les unités U1 à U7 nous ont fait prendre conscience du **rôle** de chacune de ces **au sein du raisonnement covariationnel** et nous ont inspiré une structure que nous décrivons à l’aide de la métaphore de l’arbre (voir Figure 20).

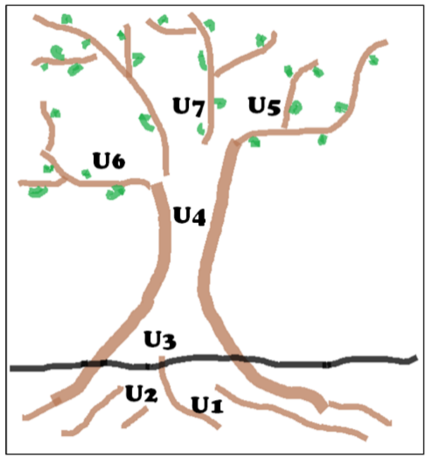


Figure 20 Organisation des unités de raisonnement suivant la métaphore de l'arbre

Nous avons effectivement observé que les unités U3 et U4 semblent constituer le *tronc* du raisonnement, la partie à la fois la plus solide, concentrée, dense et visible. Les unités U1 et U2 jouent alors le rôle des *racines* du raisonnement, la partie à la base, majoritairement cachée mais sans laquelle le raisonnement ne peut tenir debout. Quant aux unités U5 à U7, elles constituent chacune une branche prolongeant le raisonnement. Le raisonnement covariationnel peut donc être vu comme une structure organique qui, à l’image d’un arbre, est composée d’unités de raisonnements *racines*, *troncs* et *branches*. Toutes les parties de l’arbre sont liées les unes aux autres. Aussi, plus l’arbre est grand, plus ses *racines* sont ancrées, plus son *tronc* est solide et plus le branchage est dense. Lorsque l’arbre pousse, les *racines* s’allongent, le *tronc* élargit, les *branches* s’étirent et donnent naissance à d’autres ramifications. Les ramifications ne peuvent apparaitre si l’ensemble de l’arbre ne continue pas à croitre. Nous décrivons le déploiement du raisonnement covariationnel en nous appuyant sur cette image. Les unités de raisonnement U5 à U7 apparaissent toujours en interaction avec les unités U3 et U4 qui reposent elles-mêmes sur les unités U1 et U2.

Dans la grille finale, nous distinguons donc ces trois catégories d'unités de raisonnement pour les unités U1 à U7 (voir Tableau 14). Ce découpage complète celui établi dans la grille initiale d'analyse. En effet, les catégories d'unités de raisonnement de la grille initiale ont été élaborées selon une perspective théorique d'analyse du raisonnement covariationnel décrivant *a priori* le type de travail appelant la mobilisation des différentes unités de raisonnement. Les nouvelles catégories, qui émergent quant à elles d'une perspective empirique, prennent en compte les interactions entre les élèves et les situations. Ainsi, il s'agit d'une catégorisation située directement en lien avec les caractéristiques des situations choisies et avec les individus interrogés. Dans la présente recherche nous avons pris pour hypothèse que les caractéristiques des situations sont des éléments importants à considérer lors de l'analyse du raisonnement covariationnel déployé par les élèves. La grille finale d'analyse est ainsi adaptée pour la classe spécifique de situations à laquelle appartiennent celles présentées. Par exemple, les unités de raisonnement *troncs* constituent le cœur le raisonnement covariationnel déployé par les élèves en raison, notamment, du questionnement élaboré pour solliciter ces unités. Ainsi, le travail suggéré aux élèves a permis de caractériser certaines unités de raisonnement d'unités *racines* dans la mesure où elles sont omniprésentes dans le raisonnement des élèves tout en étant peu exprimées sauf à certains moments clés. Ces unités apparaissent à la base du raisonnement covariationnel car, sans elles, l'étude des accroissements n'a pas de sens, mais elles peuvent facilement rester implicites dans le discours. Les unités *branches*, quant à elles, prolongent les unités *troncs* en montrant vers quoi peut mener l'étude des accroissements. Bien qu'elles puissent paraître accessoires, ces unités sont importantes puisque ce sont elles qui justifient la pertinence des unités *troncs*.

La nouvelle organisation des unités de raisonnement U1 à U7 constitue en soi un résultat de la recherche puisqu'elle a été dégagée lors du processus de l'analyse des données. Nous l'avons toutefois présentée avant l'analyse détaillée de chacune des unités de raisonnement car elle servira à en structurer la présentation. Il est à noter que l'absence des unités U8 à U13 dans cette structure indique que nous n'effectuerons pas l'analyse détaillée pour ces unités pour diverses raisons que nous explicitons à la section 4.6.

Tableau 14 Catégorisations des unités de raisonnement U1 à U7 dans les grilles initiale et finale

Catégories dans la grille initiale	Description de la grille initiale	Unités	Description de la grille finale	Catégories dans la grille finale
Étude *globale* du comportement de la fonction	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante	**U1**	Identifier une relation fonctionnelle	**Unités de raisonnement *racines***
			a) Identifier les deux grandeurs étudiées	
			b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance)	
	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs	**U2**	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation	
			a) Établir que la grandeur indépendante est variable	
			b) Établir que la grandeur dépendante est variable	
			c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs	
	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	**U3**	Décrire le comportement de la fonction	**Unités de raisonnement *troncs***
			a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente	
			b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale	
Étude *locale qualitative* du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	**U4**	Décrire le comportement de la fonction dérivée	
			a) Considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante	
			b) Considérer des accroissements de la grandeur dépendante	
			c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs	
			d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants	
			e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	
	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)	**U5**	Considérer les changements de comportement de la fonction dérivée	**Unités de raisonnement *branches***
	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante	**U6**	Considérer le comportement d'une fonction continue et monotone sur un intervalle (ou une phase) de plus en plus petit du domaine	
			a) Généraliser intuitivement le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits (le passage à des accroissements plus petits est induit par la question)	
			b) Prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante et observer le comportement des accroissements de la grandeur indépendante (le passage à des accroissements plus petits est spontané)	
			c) Généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont infiniment petits (passage à la limite)	
	Interpréter le changement des accroissements en terme de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)	**U7**	Interpréter le changement des accroissements en terme de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)	

4.2 Structure de l'analyse détaillée du raisonnement covariationnel déployé par les élèves

Afin de décrire le déploiement d'un raisonnement covariationnel par les élèves, nous présentons de manière détaillée les unités et les sous-unités de raisonnement de la grille finale d'analyse qui constitue le principal résultat de la thèse. Dans un premier temps, chacune sera décrite afin de mettre en évidence :

- Les différentes déclinaisons observées ainsi que la pertinence de les distinguer pour décrire finement le raisonnement déployé par les élèves;
- Les verbalisations types ainsi que les éléments clés de ces verbalisations associées à sa mobilisation;
- La traduction symbolique possible de l'unité afin de la situer au sein du savoir mathématique officiel.

Puis, dans un deuxième temps, les résultats globaux du repérage de chaque unité de raisonnement dans le discours des élèves, obtenu lors du codage des transcriptions, sont présentés. Nous répondrons ainsi à deux éléments de la première question spécifique de la recherche : quelles unités de raisonnement sont mobilisées par les élèves et à quelles questions cette mobilisation répond-elle? Nous verrons que ce regard global sur le raisonnement justifie la pertinence d'une analyse détaillée puisqu'il fournit peu d'information sur le déploiement du raisonnement covariationnel par les élèves, particulièrement en ce qui concerne l'actualisation des unités de raisonnement dans le discours.

C'est pourquoi, dans un troisième temps, nous présentons une analyse spécifique et détaillée de chaque unité de raisonnement, et ce, selon le rôle de cette unité au sein du raisonnement covariationnel, c'est-à-dire selon que l'unité est considérée comme une unité *racine*, une unité *tronc* ou une unité *branche* (voir Tableau 15). La pertinence de cette nouvelle structure sera d'ailleurs dévoilée au fur et à mesure de cette analyse détaillée.
Pour les unités *racines* (U1 et U2), l'analyse spécifique comporte l'identification des moments particuliers de mobilisation de ces unités. Les retours fréquents et surprenants à ce type d'unités, en regard de l'analyse *a priori*, nous sont effectivement apparus comme significatifs.

De plus, l'analyse de la dynamique du raisonnement à travers les tableaux de mouvement (voir Annexe 12, Tableaux 12-G à 12-S) a permis une analyse de l'articulation des unités U2 et U3, et par conséquent, du passage des unités *racines* aux unités *troncs*. Pour les unités *troncs*, l'analyse spécifique comporte une analyse détaillée de la forme et du contenu des verbalisations employées par les élèves. Ainsi, l'actualisation de ces unités dans le discours est particulièrement scrutée. Le contenu des verbalisations mène, notamment, à une analyse de la trajectoire du raisonnement lors de la mobilisation des unités *troncs* et, de ce fait, à une analyse de l'articulation entre les unités U3 et U4.

En ce qui concerne les unités *branches*, les verbalisations sont aussi les principaux objets d'analyse. Par exemple, différents niveaux de mobilisation de l'unité U5 sont mis en évidence, alors que, pour les unités U6 et U7, l'utilisation d'un vocabulaire mathématique (proportionnalité, taux de variation, vitesse, accélération) est analysée afin de déterminer le sens qui lui est attribué par les élèves.

Tableau 15 Contenu de l'analyse spécifique selon les catégories d'unités

Analyse spécifique des unités *racines* (section 4.3)	**Analyse spécifique des unités *troncs* (section 4.4)**	**Analyse spécifique des unités *branches* (section 4.5)**
○ Analyse des *moments* de retours à ces unités : description et contextualisation ○ Catégorisation des types de contextes dans lesquels apparaissent ces moments	○ Analyse des verbalisations : synthèse sur le vocabulaire utilisé et organisation de l'information communiquée ○ Mise en évidence de catégories de verbalisations, étude de l'évolution des verbalisations pour une même sous-unité chez un même groupe d'élèves	○ U5 : mise en évidence de quatre niveaux de raisonnement dépendant des facteurs considérés comme influençant la variation, trajectoire du raisonnement à travers ces niveaux selon les groupes ○ U6 et U7 : analyse des verbalisations mettant en évidence le sens d'un vocabulaire mathématique injecté par les élèves (proportionnalité, taux de variation, vitesse, accélération)
<u>Articulation U2-U3 (section 4.3.6)</u> Analyse fine du raisonnement mis en place lors du passage de U2 à U3 chez les élèves de quatrième secondaire	<u>Articulation U3-U4 (section 4.4.9)</u> Étude de cas : articulation absente, articulation implicite et articulation explicite	

4.3 Présentation et analyse des unités de raisonnement *racines*

Comme annoncé précédemment, nous présentons dans cette section une analyse détaillée de la mobilisation des unités de raisonnement *racines* par les élèves. Nous décrivons les sous-unités associées à U1 et U2 dans la grille finale, puis nous présentons les résultats du repérage de ces unités dans le discours des élèves. Ensuite, afin de comprendre le rôle de ces unités au sein du raisonnement covariationnel déployé par les élèves, nous proposons de définir des *moments* de retour aux unités *racines* à partir des contextes dans lesquels ils apparaissent. Nous analysons alors de manière approfondie certains *moments* pour préciser comment ces contextes apparaissent dans les situations données. Finalement, nous tentons de voir comment l'articulation des unités *racines* et *troncs* s'opère chez les élèves de quatrième secondaire de manière à identifier ce qui, potentiellement, leur a permis d'entrer dans une étude covariationnelle des fonctions étudiées. Ce groupe est effectivement le seul chez qui nous avons été en mesure de repérer des indices sur le raisonnement sous-jacent à cette articulation.

4.3.1 Description de l'unité U1 *(identifier une relation fonctionnelle)*

La première unité de raisonnement identifiée dans la grille initiale était décrite de la manière suivante « Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante » (voir Tableau 16).

Tableau 16 Description de l'unité U1 dans les grilles initiale et finale

Unité	Description de la grille initiale	Description de la grille finale
U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante	Identifier une relation fonctionnelle
		a) Identifier les deux grandeurs étudiées
		b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance)

Dans les situations proposées aux élèves, nous avions volontairement imposé les grandeurs indépendante et dépendante. Nous ne nous attendions donc pas à ce que cette unité de raisonnement soit explicitement mobilisée sauf lors des tâches dans lesquelles le traçage d'un graphique est demandé (voir Annexes 5 et 6). Pourtant, nous avons repéré divers segments témoignant d'une réflexion spécifique en lien avec l'identification des grandeurs indépendantes et dépendantes. Il est alors apparu nécessaire de distinguer deux sous-unités en lien avec l'identification d'une relation fonctionnelle : a) «Identifier les deux grandeurs étudiées » et b) « Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance) ». Nous avons en effet remarqué que les élèves étaient parfois préoccupés à identifier les grandeurs étudiées, alors qu'à d'autres moments, la distinction entre la grandeur sur laquelle on s'appuie (grandeur indépendante) et la grandeur conséquente (grandeur dépendante) était le sujet de la discussion. Il est vrai que ces deux activités sont différentes et complémentaires. L'unité U1a précède forcément l'unité U1b, c'est seulement lorsque les deux grandeurs sont identifiées qu'il est possible d'établir laquelle on fera varier pour observer le comportement de l'autre. Dans la grille finale utilisée pour le repérage des unités de raisonnement, nous avons intégré des verbalisations « types » ainsi que les éléments clés à retrouver dans un segment de texte codé U1a ou U1b (voir Tableau 17).

Tableau 17 Verbalisations types et éléments clés pour le repérage de U1

Description des unités de raisonnement		**Verbalisation(s) type(s) (contexte du pichet)**	**Éléments clés**
U1 Identifier une relation fonctionnelle			
	a) Identifier les deux grandeurs étudiées	Dans le pichet, on regarde le **volume** et le **niveau de l'eau**.	les deux grandeurs étudiées
	b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance)	Le niveau **dépend** du volume.	l'existence d'un lien de dépendance entre une grandeur prédominante et une grandeur conséquente[31]

En tentant d'associer un symbolisme mathématique à l'unité U1, nous avons réalisé que celle-ci était très contextuelle. En fait, lorsque les élèves mobilisent U1, ils s'investissent dans une première étape du processus de modélisation mathématique soit *la structuration et la simplification d'une situation issue du monde réel* (voir à ce sujet la section 2.4.1). Même si nous avons voulu économiser cette étape en imposant dès le départ les grandeurs étudiées et le sens de la dépendance, les élèves s'y sont plongés, à certains moments, afin de s'approprier le phénomène. Le symbolisme qui nous est alors apparu le plus approprié en est un qui tient compte du fait que, dans la situation, on regarde bouger des grandeurs, on ne travaille pas encore sur des variables mathématiques : $G_1 et\ G_2$ pour U1a et $f(G_1) = G_2$ pour U1b.

La description des résultats globaux du repérage de U1 qui suit donne un premier portrait des contextes de mobilisation de cette unité par les différents groupes d'élèves.

[31] Ce vocabulaire est celui suggéré par Janvier & Pelletier (2003).

4.3.2 Résultats globaux du repérage de l'unité U1

En général, les tâches dans lesquelles on demande comment varie une grandeur dépendante lorsqu'une grandeur indépendante varie ou de représenter graphiquement cette variation ont déclenché la mobilisation de la sous-unité de raisonnement U1a.

Au Tableau 18, on peut voir que l'unité U1a a en effet été observée chez les élèves de quatrième secondaire et du collégial lors du travail sur des questions demandant de décrire le comportement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (questions 1 et 2 de S1 et question 1 de S2B) et des questions portant sur le traçage du graphique de la fonction *f* (question 6 de S1 et S3). Elle est, de plus, apparue dans un cas isolé du groupe de quatrième secondaire à la question 3 de S1 demandant d'établir le comportement des accroissements du niveau de l'eau alors que l'accroissement du volume est constant. Pour ce qui est de la sous-unité U1b, elle a été mobilisée par les trois groupes d'élèves dans des contextes variés notamment dans celui du traçage d'un graphique (cases grises dans le Tableau 18 : S1 et S3-question 6; S2A et S4A-question 4; S2B et S4B-question 5) comme nous l'avions anticipé (voir les tableaux de l'Annexe 5). Il est à noter que l'unité U1a n'a pas été observée dans le groupe de cinquième secondaire, ce qui signifie qu'ils ne se sont pas intéressés à identifier les deux grandeurs sans déterminer laquelle dépend de l'autre. La préoccupation des élèves à déterminer les grandeurs indépendante et dépendante semble donc récurrente. Dans la situation du pichet, les élèves de quatrième secondaire mobilisent la sous-unité U1b dans 7 questions sur 18 alors que les élèves du collégial le font dans 5 questions sur 18.

Tableau 18 Apparition des sous-unités de raisonnement associées à U1 et U2 par groupe, par situation et par question

		U1a (identifier les deux grandeurs)			U1b (existence et sens de la dépendance)			U2a (grandeur indépendante est variable)			U2b (grandeur dépendante est variable)			U2c (concomitance entre les variations)		
	Groupe / Question	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col
S1	1 et 2	X		X	X			X						X		
	3	X			X			X						X		
	4															
	5															
	6	X			**X**	**X**	**X**	X				X		X		X
	7															
	8															
	9															
	10															
S2A	1				X		X									X
	2															
	3				X											X
	4					**X**	**X**							X		
S2B	1	X			X		X	X						X		
	2						X									
	3															
	4															
	5				**X**											
S3	1 et 2				X									X		X
	3															
	4															
	5															
	6	X		X			**X**									X
	7															
	8															
	9															
	10															
S4A	1															
	2				X											
	3															
	4						**X**				X	X				

4.3.3 Description de l'unité U2 *(considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation)*

Dans la grille initiale, la seconde unité de raisonnement complétait la première en proposant d'orienter le regard porté sur la relation fonctionnelle identifiée (voir Tableau 19). Nous avions en effet établi à la section 2.4 que, pour permettre une étude covariationnelle de la fonction, il était d'abord nécessaire d'aborder la relation fonctionnelle sous l'angle des variations concomitantes de deux grandeurs.

Tableau 19 Description de l'unité U2 dans les grilles initiale et finale

Unité	Description de la grille initiale	Description de la grille finale
U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation
		a) Établir que la grandeur indépendante est variable
		b) Établir que la grandeur dépendante est variable
		c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs

Alors que la mobilisation de la première unité de raisonnement (U1) se situe au niveau d'une première étape de modélisation consistant en *la structuration et la simplification d'une situation issue du monde réel*, et donc en l'identification des grandeurs mises en jeu dans le phénomène étudié, la mobilisation de la seconde (U2) oriente la démarche de *traduction de la situation en un modèle mathématique* (deuxième étape du processus de modélisation, voir section 2.4.1). La mobilisation de U2 s'appuie alors sur la considération de chaque grandeur comme une grandeur variable et donc sur la conceptualisation de la notion de variation.

Lors du codage des données recueillies, il s'est avéré nécessaire de distinguer trois sous-unités relatives à cette unité de raisonnement : a) Établir que la grandeur indépendante est variable, b) Établir que la grandeur dépendante est variable, et c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs.

Nous avons constaté que le passage de la « grandeur » à la « grandeur variable » pouvait être décelé dans les propos des élèves. Les verbalisations types et l'élément clé pour U2 présentés dans la grille d'analyse finale (voir Tableau 20) montrent bien cette préoccupation caractéristique de U2 pour la variation. On peut noter toutefois que lorsque les élèves parlent de variation, par exemple en disant que le volume varie, on ne peut savoir jusqu'à quel point cette variation est pour eux continue. Nous avons néanmoins considéré que l'utilisation des termes d'action « varie », « bouge », « change », « augmente » ou « diminue » fait référence à un mouvement continu et est caractéristique de U2 tant et aussi longtemps qu'il n'y a pas une qualification des variations concomitantes laquelle est associée à U3. Par ailleurs, nous n'avons pas pris en considération la nuance entre la variation et la variation orientée (« varie » et « augmente » par exemple) même si le second terme témoigne d'une étude plus approfondie du phénomène étudiée.

Tableau 20 Verbalisations types et éléments clés pour le repérage de U2

Description des unités de raisonnement	Verbalisation(s) type(s) (contexte du pichet)	Élément clé
U2 Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation		
a) Établir que la grandeur indépendante est variable	Le **volume** d'eau dans le pichet **augmente**. Quand on verse de l'eau dans le pichet, le **volume** d'eau dans le pichet **varie**.	La grandeur indépendante bouge (variation continue).
b) Établir que la grandeur dépendante est variable	Le **niveau** d'eau **augmente**. Quand on verse de l'eau dans le pichet, le **niveau varie**.	La grandeur dépendante bouge (variation continue).
c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs	**Lorsque** le volume **change**, le niveau **change aussi**. Le niveau d'eau dans le pichet **varie lorsque** le volume **varie**.	La concomitance des variations

Au niveau de l'unité U2, la notion de variable est très présente. Lorsque les élèves mobilisent cette unité, ils sont, selon nous, entre la première et la seconde étape du processus de modélisation rappelées précédemment. Ils se détachent progressivement de la situation réelle en utilisant un vocabulaire conventionnel (variation, variable, dépendant, indépendant) tout en gardant le contact attendu avec le contexte (les variables sont nommés contextuellement, par exemple *le niveau* et *le volume*). Les symbolismes mathématiques qui peuvent être associés à U2a, U2b et U2c sont respectivement x, y et $x \rightarrow y\ ou\ y = f(x)$. Toutefois, nous avons réalisé qu'il était peu commun d'utiliser cette dernière écriture alors que l'existence même d'une règle définissant f n'a pas encore été envisagée.

4.3.4 Résultats globaux du repérage de l'unité U2

Les sous-unités U2a et U2b ont été peu observées comme le montre le Tableau 18. Toutefois, il faut prendre en compte qu'elles sont aussi incluses dans la sous-unité U2c puisque la considération des variations concomitantes de deux grandeurs n'est possible que lorsqu'il y a considération des variations de chacun de ces deux grandeurs. Ainsi, lorsqu'une sous-unité U2a ou U2b a été repérée, c'est que les propos des élèves montraient la considération de la variation d'une seule grandeur.

On peut voir dans le Tableau 18 que c'est uniquement dans le cadre des tâches de construction d'un graphique et de celles demandant de déterminer comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante varie que l'unité U2 a été mobilisée. Les élèves de quatrième secondaire et du collégial ont été en mesure de considérer des grandeurs variables et d'exprimer la concomitance des variations de deux grandeurs. Or, cette concomitance des variations des deux grandeurs mises en jeu dans la relation fonctionnelle étudiée est à la base d'une approche covariationnelle de la fonction consistant en l'analyse des accroissements concomitants de ces deux grandeurs, elle est donc indispensable au passage aux unités de raisonnement suivantes. Les propos des élèves de cinquième secondaire montrent qu'ils n'ont pas, quant à eux, mobilisé la sous-unité U2c. Les tableaux de mouvement du raisonnement pour ce groupe (voir tableaux 12-L à 12-O en Annexe 12) révèlent en effet que les « pics » supérieurs se trouvent majoritairement au niveau de U3. De plus, le nombre d'occurrence des unités de raisonnement observées est inférieur dans ce groupe même s'ils se sont bien engagés dans les tâches. Nous pensons donc que ces élèves n'ont simplement pas ressenti le besoin de s'exprimer sur les unités U1 et U2 ce qui ne signifie pas, d'une part, qu'ils n'aient pas mentalement mobilisé ces unités et, d'autre part, qu'ils ne seraient pas en mesure, dans le cadre d'une autre tâche, de s'exprimer à propos de ces unités.

Cette analyse globale donne une première idée des contextes dans lesquels les unités de raisonnement U1 et U2 ont été mobilisées. Il nous apparait toutefois nécessaire d'investiguer davantage ces contextes en étudiant les *moments* d'apparition de ces unités.

4.3.5 Les moments d'apparition de U1 et U2

Rappelons que les unités U1 et U2 sont les *racines* du raisonnement covariationnel. Ce sont des unités qui étaient peu sollicitées par le travail proposé dans la mesure où nous considérions leur mobilisation triviale pour les élèves interrogés et où notre objectif était de les faire travailler sur les unités de raisonnement caractéristiques du raisonnement covariationnel (à partir de U3). Il est toutefois apparu qu'à certains moments, les élèves effectuaient un retour explicite à ces unités puisque nous avons repéré dans leurs propos des segments de texte que nous associons à U1 ou U2. Ces moments inattendus de mobilisation des unités de raisonnement *racines* nous sont apparus comme une occasion de mettre en relief le rôle de ces unités de raisonnement lors du déploiement d'un raisonnement covariationnel par ces élèves. Nous présentons donc une analyse de ces moments menée dans l'optique d'identifier dans quels contextes ces unités sont mobilisées et comment leur mobilisation s'intègre à l'ensemble de raisonnement déployé.

Afin d'identifier les différents moments de retours aux unités *racine*s, nous avons repéré toutes les occurrences des sous-unités associées à U1 et U2 dans les tableaux du mouvement du raisonnement (voir Annexe 12). Chacune de ces occurrences correspondant à un segment de texte codé, nous avons consulté les extraits de conversation dans lesquels apparaissent ces segments. La lecture de ces extraits, dans la perspective de comprendre le raisonnement des élèves, nous a menée par la suite à identifier les *moments* de retour à U1 et U2. Les sous-unités apparaissant successivement, sans qu'il n'y ait de coupure ou de saut dans le raisonnement, d'après notre analyse du segment de conversation dans lequel elles prennent part, ont alors été associées à un même *moment*. À la fin de ce processus d'identification des *moments* nous avons constaté que chacun d'entre eux était composé de une à huit sous-unités séparées par au plus sept autres sous-unités associées à d'autres unité de raisonnement. Dans les tableaux du mouvement du raisonnement nous avons encerclé les groupes de sous-unités constituant les *moments* de retour à U1 et U2 (voir à la Figure 21 un exemple de repérage de *moments* dans un tableau de mouvement du raisonnement et en Annexe 12 tous les *moments* repérés dans l'ensemble des tableaux de mouvement du raisonnement). Finalement, nous avons repris chaque extrait de conversation dans lequel apparait l'ensemble des segments exprimant les sous-unités constituant un *moment* et nous avons établi le contexte caractéristique d'apparition de ce *moment*. Le Tableau 21 présente la compilation des contextes d'apparition des 27 *moments* repérés dans l'ensemble des groupes pour les quatre situations.

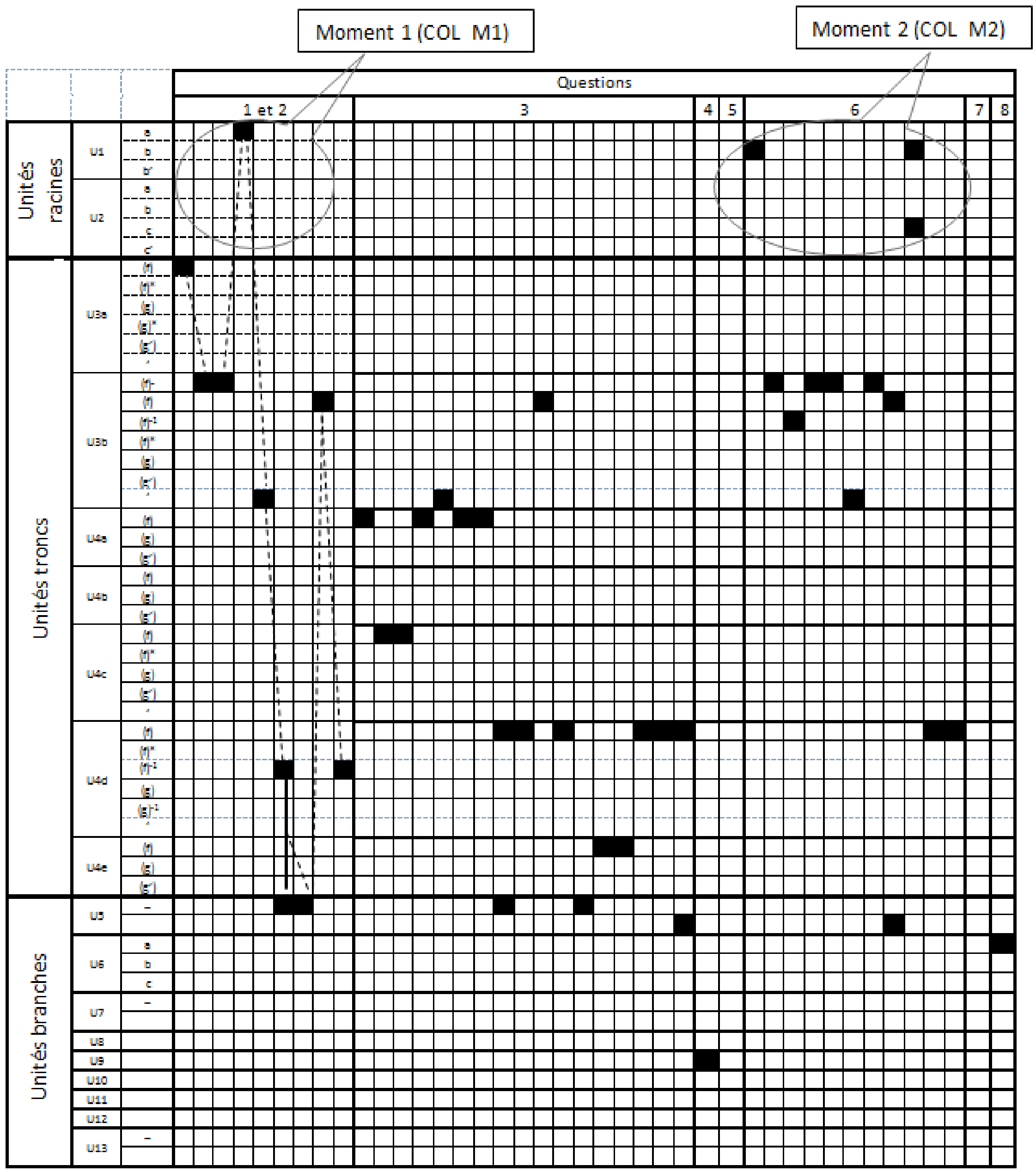


Figure 21 Repérage des *moments* d'apparition de U1 et U2 lors du travail sur S1 par le groupe du collégial

Sur les 27 *moments* identifiés, 13 apparaissent dans le contexte de traçage d'un graphique (cases blanches), 5 dans le contexte du changement de la fonction étudiée (cases grises), 6 dans celui de la recherche d'une grandeur intermédiaire (cases lignées à la verticale) ou de rechange lorsqu'il s'agit d'étudier le phénomène de remplissage du pichet et 3 dans le contexte d'interprétation de l'idée de « varier de la même façon » (cases lignées à l'horizontale) suggérée par le questionnement. Les quatre types de contextes sont apparus dans les groupes de quatrième secondaire et du collégial. Le nombre de moments repérés est toutefois plus élevé dans le groupe de quatrième secondaire (14 moments contre 10 au collégial). Pour le groupe de cinquième secondaire, les retours exprimés aux unités *racines* ont été moins fréquents; le seul contexte identifié est celui du traçage d'un graphique.

Afin de préciser les contextes dans lesquels sont apparus les différents *moments* de mobilisation des unités *racines* et de comprendre comment ces unités s'intègrent à l'ensemble du raisonnement covariationnel déployé, nous proposons une analyse détaillée de quelques extraits de conversation dans les sections qui suivent[32].

[32] Dans chaque extrait, les segments de texte associés à une unité *racine* (U1 ou U2) sont <u>soulignés</u>. Les lignes auxquelles nous référons dans la description et l'interprétation du contenu de la discussion apparaissent, quant à elles, **en gras**.

Tableau 21 Compilation des *moments* d'apparition de U1 et U2

Groupe	Situation	Question	*Moment* (code de repérage)	Contexte
SEC4	S1	1 et 2	SEC4-M1	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		1 et 2	SEC4-M2	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		3	SEC4-M3	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		6	SEC4-M4	**Traçage du graphique de *f***
	S2	A-1	SEC4-M5	**Changement de fonction (on passe de *f* à *g*)**
		A-3	SEC4-M6	**Changement de fonction (on passe de *f* à *g*)**
		A-4	SEC4-M7	**Traçage du graphique de *g***
		B-1	SEC4-M8	**Changement de fonction (on passe de *g* à *g'*)**
		B-5	SEC4-M9	**Traçage du graphique de *g'***
	S3	1 et 2	SEC4-M10	**Interprétation de « varier de la même façon »**
		1 et 2	SEC4-M11	**Interprétation de « varier de la même façon »**
		6	SEC4-M12	**Traçage du graphique de *f***
	S4	A-2	SEC4-M13	**Changement de fonction (on passe de *f* à *g*)**
		A-4	SEC4-M14	**Traçage du graphique de *g***
SEC5	S1	6	SEC5-M1	**Traçage du graphique de *f***
	S2	A-4	SEC5-M2	**Traçage du graphique de *g***
	S3			-
	S4	A-4	SEC5-M3	**Traçage du graphique de *g***
COL	S1	1 et 2	COL-M1	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		6	COL-M2	**Traçage du graphique de *f***
	S2	A-1	COL-M3	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		A-3	COL-M4	**Recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange**
		A-4	COL-M5	**Traçage du graphique de *g***
		B-1	COL-M6	**Changement de fonction (on passe de *g* à *g'*)**
		B-2	COL-M7	**Traçage du graphique de *g'***
	S3	1 et 2	COL-M8	**Interprétation de « varier de la même façon »**
		6	COL-M9	**Traçage du graphique de *f***
	S4	A-4	COL-M10	**Traçage du graphique de *g***

4.3.5.1 Analyse de moments de mobilisation de U1 et U2 apparaissant dans le contexte du traçage d'un graphique

La plupart des *moments* identifiés dans le contexte du traçage d'un graphique sont apparus alors que ce traçage était imposé par la question (question 6 en S1 et S3 et questions 4-partie A et 5-partie B de S2 et S4). Les unités de raisonnement U1 et U2 étaient alors sollicitées (voir Annexe 5). En effet, le traçage du graphique visait pour chaque fonction à amener les élèves à effectuer une synthèse de l'étude qualitative des accroissements concomitants effectuée dans les questions précédentes. Le retour à un regard global sur les variations concomitantes des deux grandeurs obligeait, selon nous, les élèves à prendre du recul par rapport au travail local des accroissements en vue de représenter globalement la relation entre les grandeurs. La question ne rappelant pas, volontairement, quelle grandeur dépend de l'autre, les discussions ont tourné autour de ce sujet avant tout traçage comme nous l'avions anticipé. Nous présentons l'analyse de deux extraits de conversation pour illustrer les *moments* de retour à U1 et U2 dans le contexte du traçage d'un graphique induit par le questionnement. Il est à noter que, pour le premier extrait uniquement, nous illustrons comment repérer le *moment* concerné et la place de l'extrait de conversation dans l'ensemble de la discussion au sein des tableaux de mouvement du raisonnement disponibles à l'Annexe 12.

A. Premier extrait : COL-M2 (S1-Q6)

Le premier extrait de conversation est issu du deuxième *moment* (COL-M2) identifié dans le groupe du collégial. On y retrouve le premier segment codé U1b identifié dans la portion de grille de mouvement de la Figure 22 (extrait du Tableau 12-P situé en Annexe 12) et souligné dans l'extrait de conversation.

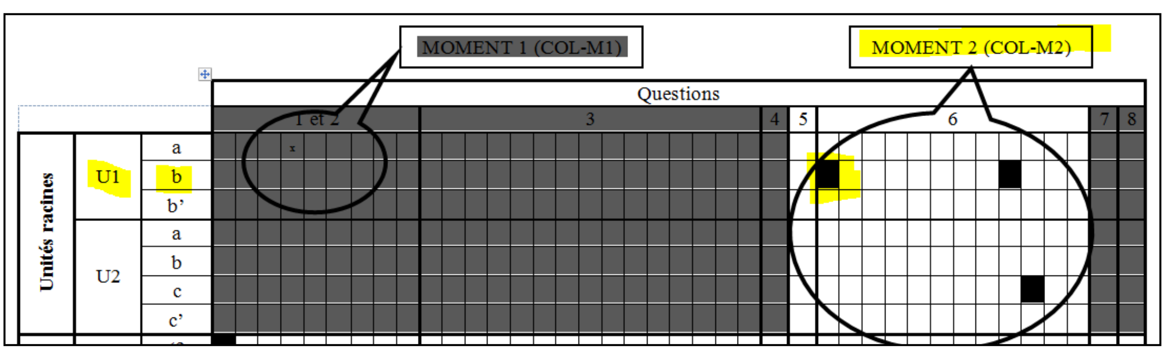


Figure 22 Localisation d'un extrait de conversation issu du *moment* COL-M2

(30 :06) Martin : C'est quoi la question?

Bruno : C'est dessiner le graphique

(30 :10) Chloé : La relation entre le volume d'eau et le niveau

Bruno : Est-ce que c'est le niveau en fonction du volume, ou c'est le volume en fonction du niveau? Le niveau en fonction du volume?

(30 :15)Élise : Le volume… la relation entre le volume d'eau et…mais le volume est constant

Chloé : Attends, attends, le volume d'eau rajouté ou le volume d'eau… non ça va être constant

(30 :30) Bruno : Non ça va pas être constant

Chloé : Ça va être constant, parce que c'est pas le rayon *lalala* qui change, c'est comme le…

Bruno : Mais attends, il faut décider si c'est le volume en fonction du niveau ou le niveau en fonction du volume

(30 :40) Chloé : C'est le niveau en fonction du volume

Martin : *(il lit la question)* Tracer le graphique représentant la relation entre le volume de l'eau et le niveau d'eau

(30 :47) Élise : Le niveau de l'eau dans le pichet, donc plus le volume est grand ben…

Bruno : <u>C'est le niveau d'eau qui va être indépendant</u> *(U1b)*

Élise : Parce que c'est pas le volume rajouté, c'est le volume total

(30 :56)Chloé : Ok c'était, ok moi je pensais que c'était le volume rajouté

Élise : Non, c'est le volume total

Dès le début de la discussion (lignes 1 à 5), on voit que la tâche incite les élèves à se questionner sur la dépendance entre les grandeurs mises en jeu par la fonction étudiée. Pourtant, l'ensemble des questions précédentes portait sur une seule fonction : le niveau de l'eau en fonction du volume. Il semble donc que le travail sur la covariation proposé dans les questions 1 à 5 n'ait pas sollicité la distinction des grandeurs indépendante et dépendante. L'unité de raisonnement U1b (établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante) n'est donc pas forcément préalable à l'unité U2c (établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs) puisque ces élèves ont été capables de travailler sur les variations concomitantes et sur les accroissements sans établir précisément une variable indépendante et une variable dépendante. Dans le registre verbal, l'identification du sens de la dépendance entre les grandeurs étudiées n'est donc pas apparue comme une unité de raisonnement jouant un rôle dans le déploiement d'un raisonnement covariationnel par ces élèves. Cependant, sa mobilisation s'est avérée nécessaire lors du passage au registre graphique.

De plus, aux lignes 6 à 9 puis 17 à 19 on voit que les élèves du collégial se questionnent sur la grandeur *volume*, parle-t-on du *volume total* ou du *volume ajouté*? Un questionnement semblable est apparu chez les élèves de cinquième secondaire comme le montre l'extrait qui suit.

B. Deuxième extrait : SEC5-M1 (S1-Q6)

Ce deuxième extrait est issu du premier *moment* identifié dans le groupe de cinquième secondaire. Les élèves travaillaient alors sur la question 6 de S1.

FABRICE : la variable indépendante c'est le volume *(U1b)*

(18 :16) JUSTIN : C'est ça le problème, on a aucune donnée, on a aucun chiffre et on doit faire un graphique

CHARLES : Ouais ben c'est ça c'est…

JUSTIN : Le plus exactement possible?

(18 :45) JUSTIN : Moi je dirais que au début ça fait…

MATHIEU : Ça serait croissant

FABRICE : Au début t'as besoin de plus de volume

CHARLES : Mais c'est sûr que faut que ça revienne à la même place, tsé comme, tu commences comme ça, tu montes, tu redescends (il mime une *courbe normale*)

(19 :06) JUSTIN : Ouais mais faut que l'affaire et le niveau soient au maximum, ça finit genre ici, puis nous on commence là… fait qu'il faut se rendre là admettons. On peut pas faire quelque chose, on peut pas le faire à moins qu'on vide le pichet, j'pense pas qu'on peut pas…

(19 :30) MATHIEU : Ça serait comme un cycle dans le fond

JUSTIN : Non faut pas que ça soit un cycle, faut que ça soit juste un graphique

(19 :41) CHARLES : Mais c'est sûr que ça va être comme ça là, on s'entend que ici ça monte de plus en plus, fait que ça monte de plus en plus…

(19 :41) MATHIEU : on s'entend que ça va partir tranquillement puis il va avoir… c'est sûr qu'il va y avoir un sommet à quelque part parce que le sommet il va être là

CHARLES : y a un pic puis quand tu vas arriver ici t'es à la même place que….

CHARLES : Quand t'arrives ici, t'arrives ici

(…)

(21 :26) CHARLES : Ah non c'est vrai ok, je viens de comprendre, ok c'est bon

MATHIEU : C'est quoi t'as?

JUSTIN : Au début je dirais que ça ferait plus… genre plus une fonction exponentielle au début, parce que au début c'est lent, pis après ça ça monte, pis après ça….

CHARLES : Non

(21 :41) FABRICE : Check en gros là, le volume d'eau admettons, ça c'est le truc pour le volume d'eau

CHARLES : Mets le donc ici à la place

FABRICE : Bah il est déjà fait là. Check t'a genre ça de même là, c'est toujours le même volume d'eau fait que le premier volume d'eau mettons t'en a besoin de plus pour augmenter ton…ton niveau d'eau, c'est-à-dire que pour le même volume d'eau ton niveau d'eau va être plus bas que pour admettons ton deuxième ici, ton niveau d'eau va être plus haut, mais pour ton troisième tu vas en avoir… pour le même tu vas augmenter ton niveau encore plus genre. Fait que ça va être comme ça, comme ça, ça va faire ça de même

(22 :15) MATHIEU : Ça va fait tu une droite?

FABRICE : Ben pas nécessairement une droite, mais ça va être croissant

CHARLES : *Inaudible*

FABRICE : Ça va s'enligner vers une croissance là

(…)

(23 :51) CHARLES : Ouais

MATHIEU : Puis là ici, y en faut de moins en moins, fait que c'est comme une exponentielle parce que après ça, ça s'en va comme ça, t'en a moins à mettre pour que ça augmente

CHARLES : Ah ouais ok

(…)

(24 :34) CHARLES : C'est juste parce que à un moment donné ton pichet il finit, ton graphique il arrête à un moment donné

JUSTIN : Ouais mais là ici vers la fin il est en train de dire que le niveau augmente sans qu'on ajoute de volume, c'est ça qui arrive
MATHIEU : Non, j'ai jamais dit ça
JUSTIN : C'est environ qu'est-ce qu'on voyait un peu avec ton graphique
MATHIEU : Non j'ai dit que ça s'en allait comme ça, mais c'est une fonction ça sera jamais droit comme ça
(24 :54) JUSTIN : Quand tu t'en va comme ça, c'est qu'à un moment donné ça va finir par être droit
MATHIEU : Mais non ça ne sera plus une fonction parce que il va y avoir plusieurs valeurs de Y pour une valeur de X…
CHARLES : Ton niveau d'eau va toujours augmenter …*(U2b)*
MATHIEU : Regarde j'ai dit que le graphique était comme ça, puis que au début il te faut plus de volume pour que ton niveau augmente, puis après ça il t'en faut de moins en moins fait que ta fonction s'en va par en haut, puis j'ai pas dit que… *inaudible*
(25 :16) FABRICE : First là, faut différencier est-ce que ça c'est le niveau total dans le pichet, ou le niveau à chaque fois qu'on ajoute de l'eau, c'est ça qu'il faut différencier
JUSTIN : Moi je dirais que c'est le niveau total
FABRICE : Le niveau total?
JUSTIN : Ouais

Pour bien comprendre le contenu de la discussion, il faut considérer que, pour répondre aux questions 1 à 5 de S1, les élèves de cinquième secondaire ont majoritairement traité la fonction réciproque de celle imposée par l'énoncé sans toutefois établir clairement une grandeur indépendante. En l'occurrence, ils s'intéressent au comportement du volume lorsque le niveau augmente. Cette permutation des grandeurs leur permet quand même d'analyser le phénomène globalement sans que de grandes difficultés se posent. Toutefois, à la question 6, ils doivent tracer un graphique et là ils n'ont pas le choix de déterminer clairement les variables indépendante et dépendante. Ils établissent, à partir de l'énoncé du contexte présenté au début de S1, qu'on étudie la variation du niveau en fonction du volume, mais ils ne sont pas conscients que leur raisonnement a porté jusqu'alors sur la variation du volume en fonction du niveau, ils se retrouvent donc à tenter une conciliation entre les deux fonctions. Aux lignes 9 et 10, Charles parle des accroissements du volume pour des accroissements de niveau constants. Il décrit déjà le comportement des accroissements du niveau puisqu'il indique que ça monte puis ça redescend, ce qui correspond en fait au comportement de la dérivée par rapport au niveau de la réciproque de la fonction *f*. Aux lignes 31 à 36 Fabrice ramène la discussion sur le comportement des accroissements du niveau alors que les accroissements du volume sont constants. Malgré tout, aux lignes 43 et 44, Mathieu justifie l'allure de la courbe en indiquant que l'accroissement de volume nécessaire pour faire augmenter le niveau est plus petit que précédemment (raisonnement tenu par ces élèves pour répondre aux cinq premières questions). Suite aux échanges des lignes 62 à 66, Fabrice identifie la source des quiproquos : la confusion entre l'accroissement de volume et le volume. Cette difficulté est celle dont nous avons parlé précédemment et qui concerne la distinction entre l'augmentation du volume et le volume total. Nous pensons qu'elle est en lien avec le type de travail imposé. Le travail sur les accroissements oblige les élèves à regarder l'augmentation du volume de manière discrète afin de pouvoir déterminer le comportement de l'augmentation du niveau. Ce subterfuge de discrétisation est nécessaire, mais il confronte les élèves au passage du discret au continu lorsque vient le temps de généraliser le comportement des accroissements du niveau alors que le volume augmente de façon continue. Nous décrivons plus précisément cet obstacle lors de l'analyse de l'unité de raisonnement U4 à la section 4.4.8.5.

4.3.5.2 Analyse des moments de mobilisation de U1 et U2 apparaissant dans le contexte du changement de la fonction étudiée

Comme prévu lors de la conception des situations, les questions imposant le remplacement d'une des grandeurs étudiées ont suscité les unités de raisonnement U1 et U2 (voir Annexe 5). En effet, cinq des *moments* identifiés apparaissent dans ce contexte. Rappelons que les situations ont été élaborées de manière à ce que le questionnement amène les élèves à étudier trois fonctions et que, lors du passage d'une fonction à une autre, une seule grandeur est remplacée (voir Tableau 13 à la section 4.1.2).

Nous présentons deux extraits accompagnés de leurs interprétations pour illustrer les *moments* de retour à U1 et U2 dans le contexte du passage d'une fonction à une autre et donc du changement d'une des grandeurs étudiées. Le premier extrait illustre un comportement typique observé dans tous les groupes : l'identification de ce qui a changé par rapport aux questions précédentes. Évidemment, ce comportement a été induit par la formulation semblable des questions. Le deuxième concerne la problématique liée au travail imposé sur les accroissements identifiée précédemment (section 4.3.5.1).

A. Premier extrait : SEC4_M5 (S2A-Q4)

Ce premier extrait est issu de la discussion entre les élèves de quatrième secondaire lors du travail sur la quatrième question de la partie A de S2. Ils étudient donc le niveau de l'eau en fonction du temps (fonction *g*). Bien que la question demande de tracer le graphique, la discussion nous semble davantage porter sur le fait que la fonction n'est pas la même qu'en

S1. Le retour aux unités *racines* est alors provoqué par le remplacement de la grandeur indépendante qui passe du volume (fonction f étudiée en S1) au temps (fonction g étudiée en S2A).

1	(8 :34) SIMON : Regardes donc les autres choses qu'on avait fait….
2	ÉMILIE : Ah on avait fait euh, ben moi j'm'en rappelle, on avait pris la règle
3	SIMON : Non c'est pas comment on avait fait mais je veux voir c'était quoi la question exactement
4	(9 :01) KARINE : Ça c'était en …
5	JULIE : Le temps…
6	KARINE : Le temps comme ça
7	ÉMILIE : Le temps comme ça, puis ton niveau de l'eau comme ça, ça c'est ton niveau de l'eau qui
8	varie en fonction du temps *(U2c)*
9	JULIE : Non, c'est ici le niveau de l'eau
10	(9 :14) SIMON : Non
11	ÉMILIE : Non, là
12	SIMON : *inaudible*
13	JULIE : Ah ouais c'est vrai excuse
14	**SIMON : Puis la dernière fois nous autre le graphique qu'on avait fait c'est entre le volume**
15	**d'eau et le niveau de l'eau, puis là dans le fond c'est…**
16	**Julie : le temps**
17	**Simon :… le temps à la place… c'est pas *pentoute* les mêmes affaires, donc…**

Avant cet extrait, les élèves ont eu tendance temporairement à ne pas tenir compte du fait qu'une des grandeurs avait changé et à décrire le phénomène comme dans les questions précédentes. Ensuite, apparait ce *moment* où ils reviennent au problème réalisant que la fonction a changé. L'extrait précédent illustre le raisonnement des élèves de quatrième secondaire alors que, dans le contexte du pichet, on passe de la fonction f à la fonction g. Ils identifient alors la grandeur ayant été remplacée (lignes 14 à 17). Cet exemple illustre un comportement typique puisque, dans tous les groupes, les élèves sont retournés à un moment ou à un autre relire les questions précédentes pour les comparer à la nouvelle question. Ainsi, des discussions semblables à celle présentée dans cet extrait ont eu lieu à divers moments dans chacun des groupes.

B. Deuxième extrait : COL_M6 (S2B-Q1)

Ce deuxième extrait est tiré des discussions du groupe du collégial lors du travail sur la question 1 de S2B. Il illustre lui aussi la mobilisation des unités U1 et U2 lors du passage d'une fonction à une autre mais, cette fois, il s'agit du passage de g à g' dans le contexte du pichet (la grandeur dépendante qui était le niveau de l'eau en S2A devient la vitesse du niveau de l'eau en S2B).

(17 :25) Élise : maintenant il faut dire comment elle varie la vitesse, il faut pas dessiner le graphique… Comment elle varie la vitesse? Est-ce qu'elle varie de la même façon que ici?
Bruno : ben en fait, au début la vitesse elle est rapide, après elle est plus lente
Martin : ouais
Bruno : après elle…
Martin : la vitesse en fonction du niveau de l'eau?… Ou bien
Élise : ouais
Bruno : du temps ou du niveau?
Élise : on s'intéresse à la vitesse à laquelle le niveau monte
Chloé : en fonction du temps?
(17 :48) Bruno : c'est le temps, c'est le niveau d'eau en fonction du temps
Chloé : non c'est la vitesse…
Élise : non c'est la…
Martin : c'est la vitesse du niveau…
Élise : c'est la vitesse à laquelle le niveau d'eau monte dans le pichet à mesure que le temps passe
Bruno : fait que c'est la dérivée du niveau d'eau en fonction du temps *(U1b)*
Élise : ouais

On peut voir que les élèves du collégial en viennent assez rapidement à établir le lien entre les fonctions « niveau en fonction du temps » et « vitesse en fonction du temps » (lignes 15 à 17) et à nommer la seconde comme étant la dérivée de la première. On voit ainsi, qu'avec la fonction *g*, l'étude des accroissements du niveau pour des accroissements constants du temps n'amène pas les élèves du collégial à confondre l'augmentation du temps et le temps comme grandeur indépendante comme ils ont pu le faire avec la fonction *f* (cf. la confusion entre le *volume total* et le *volume ajouté* identifiée dans le premier extrait de la section 4.3.5.1). Cela découle, selon nous, de la connaissance de la vitesse comme d'un taux de variation et, évidemment, du lien entre les fonctions « distance et fonction du temps » et « vitesse en fonction du temps ». Ce lien semble toutefois apparaitre comme une connaissance déclarative apprise car il n'y a pas d'indications sur le raisonnement tenu par les élèves.

4.3.5.3 Analyse des moments de mobilisation de U1 et U2 apparaissant dans le contexte de la recherche d'une grandeur intermédiaire ou de rechange (pichet)

Nous avons identifié six *moments* apparaissant dans le contexte où les élèves cherchent à introduire une autre grandeur afin de décrire ce qui se passe avec le niveau de l'eau dans le pichet. Nous présentons deux extraits, le premier concerne les élèves de quatrième secondaire et le second les élèves du collégial.

A. Premier extrait : SEC4_M1 (S1-Q1/Q2)

Dans ce premier extrait tiré de la discussion entre les élèves de quatrième secondaire lors du travail sur les deux premières questions de S1, le questionnement imposé porte sur la *manière de varier* du niveau alors que le volume augmente. Cependant, pour les élèves, il n'est possible de répondre à cette question qu'en introduisant une autre grandeur permettant de décrire plus précisément le phénomène.

(11 :16) SIMON : Ben dans le fond, c'que ça veut dire c'est que est-ce que ça varie toujours de la même façon, le niveau de l'eau là, si admettons que tu mets un litre par heure, admettons qu'il soit beaucoup plus gros là, est-ce que le niveau monterait à la même vitesse. Dans le fond la réponse c'est non parce que… il ne varie plus de la même façon parce que ici, comme on vient de dire, ça va monter plus lentement, puis ici ça va monter plus rapidement.
(11 :34) ÉMILIE : Ça dépend de la forme aussi
SIMON : Ça dépend aussi des contours
KARINE : ben j'pense qu'on parle de lui parce c'est… *(elle montre le pichet)*
ÉMILIE : Ouais c'est la question 2
SIMON : Plus le diamètre est grand moins ça augmente rapidement
(11 :56) JULIE : Ok fait que là je vais inscrire : non dépendamment du diamètre du pichet et de la vitesse à laquelle euh *(U1a)*
SIMON : hein?
(12 :09) JULIE : Non dépendamment de la grosseur du pichet *(U1a)*
SIMON : Non dépendamment du contour du pichet, c'est avec ce pichet-là, c'est dans ce cas ci
ÉMILIE : Ça dépend du pichet, ça veut pas nécessairement…*(U1a)*
ÉMILIE : Ouais, fait que c'est ça
JULIE : Ouais c'est ça, non mais dépendamment de où ça se situe
SIMON : Du contour du pichet dans le fond *(U1a)*

Aux lignes 6 et 7, 10 à 12 puis 14, 15 et 19, des grandeurs sont suggérées : forme, contour, diamètre, vitesse et grosseur du pichet. On comprend que les élèves veulent justifier le fait que le niveau ne varie pas toujours de la même façon. Pour eux, le volume n'est pas la grandeur qui est à la source de ce changement, c'est la forme du pichet. C'est comme si le lien de causalité était plus fort entre la forme et le niveau qu'entre le volume et le niveau. Lorsqu'à la ligne 8 Karine fixe la forme du pichet - c'est celle de celui qui est présenté - Simon suggère une grandeur en lien avec la forme mais qu'il est possible de faire varier : le diamètre (ligne 10). En effet, dans le ballon du pichet si le volume augmente, le diamètre du pichet où est rendue l'eau change continuellement et, pour lui, c'est ce changement qui induit celui du niveau. Ainsi, c'est comme si les élèves considéraient implicitement la composition de deux fonctions : le niveau en fonction du diamètre et le diamètre en fonction du volume (voir Figure 23).

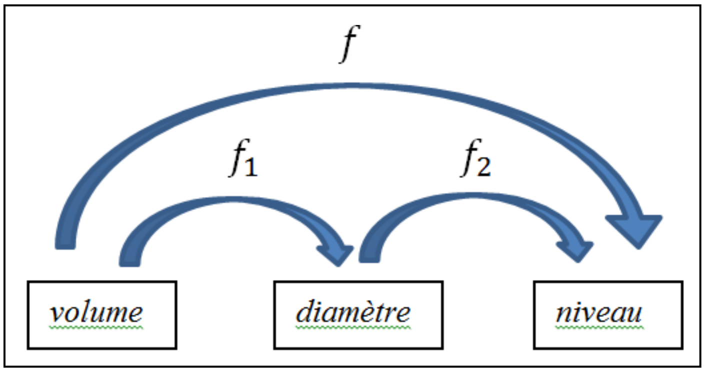


Figure 23 Composition de deux fonctions dont la résultante est la fonction f dans le contexte du pichet (le niveau en fonction du volume)

B. Deuxième extrait : COL_M3 (S2A-Q1)

En S1, les élèves du collégial ont une discussion semblable à celle des élèves de quatrième secondaire du précédent extrait. L'extrait suivant montre que cette tendance à vouloir exprimer la variation du niveau en fonction de la variation de la forme du pichet est forte et ne semble pas apparaître uniquement parce que le volume est une grandeur moins facilement appréhendable (comparativement au diamètre par exemple) puisqu'elle apparait de nouveau en S2 alors que la fonction étudiée devient le niveau en fonction du temps.

[0 :32] Élise : hum…moi je dis que le niveau d'eau va augmenter quand le temps passe mais le niveau d'eau ne va pas varier selon le temps mais plutôt selon la forme *(U1b')***…pour un temps donné le volume est constant mais euh…ça dépend de la forme**
[0 :47] Chloé : moi aussi j'ai écrit ça
Bruno : c'est ça que j'ai écrit
[0 :54] Élise : ok…j'écris le niveau d'eau augmente à mesure que le temps passe
Bruno : Yo j'ai écrit exactement la même phrase
Chloé : J'ai écrit que dans le fond c'est le volume qui augmente constamment mais que dans le fond ça revient au même que le…le volume d'eau…non le niveau d'eau c'est dépendamment de la forme *(U1b')*

Les élèves reconnaissent qu'il y a un lien entre le temps et le niveau. À la ligne 6, Élise dit que « le niveau d'eau augmente à mesure que le temps passe ». Mais, ils ne peuvent pas faire abstraction de l'influence de la forme du pichet car celle-ci est trop forte (lignes 1 à 3 puis 8 à 10). Ainsi, il semble que c'est le phénomène étudié qui, par les grandeurs qu'il met en jeu et les liens de causalité entre ces grandeurs, engendre la mobilisation des unités de raisonnement U1 et U2.

4.3.5.4 Analyse des moments de mobilisation de U1 et U2 apparaissant dans le contexte de l'interprétation de « varier de la même façon »

Nous avons identifié trois moments apparaissant dans le contexte de l'interprétation de l'expression « varier de la même façon ». Rappelons que nous avions anticipé que cette formulation pouvait mener à diverses interprétations (voir analyse *a priori* en Annexe 6). L'extrait suivant montre deux interprétations de « varier de la même façon » et illustre le type de discussion ayant eu lieu dans ce contexte.

SEC4_M11 (S3-Q1/Q2)

Aux deux premières questions de S3, les élèves de quatrième secondaire ont mobilisé les unités de raisonnement U1 et U2 alors qu'ils tentaient de donner un sens à ce que signifie « varier de la même façon ». La question demandait en fait si la grandeur dépendante, soit la distance du haut ici dans le contexte de l'échelle, variait toujours *de la même façon* à mesure que la distance du bas augmente.

(12 : 15) Simon : donc non dans le fond
Julie : ce que tu as dit précédemment c'était bon
Simon : ouais exactement donc ça fait « non, » euh…
Karine : non elles ne varient pas de la même façon car…
Simon : car…
Julie : la distance n'est pas la même
Karine : mais si…
Simon : les bonds sur le haut…
Julie : la distance entre chaque déplacement n'est pas…
Karine : ben elle, elle ne varie pas de la même façon ici … mais comme je pense que ici…
Simon : ça c'est la variable indépendante *(U1b)*
Karine : ce que je veux dire, au début elle et elle varient à peu près…
Simon : ça c'est X
Karine : Ben varie de la même façon de la même façon genre, ensemble
Julie : ouais
Karine : c'est ça que je voulais dire ou début
Simon : ça veut dire quand une augmente l'autre augmente et quand une diminue l'autre diminue
Julie et Karine : ouais
Simon : ça c'est la variable indépendante, ça c'est X ça c'est Y *(U1b)*
Karine : mais je veux dire comme ça varie en même temps genre…
Simon : sauf que ça ne varie pas autant
Karine : ici on demande juste en haut là, la hauteur là, la distance du haut si elle varie mais…
(13:23) Simon : je ne sais vraiment pas comment formuler

La première interprétation de l'expression « varier de la même façon » est associée à la comparaison les accroissements concomitants des deux grandeurs : l'accroissement de la distance du haut est-il égal à celui de la distance du bas? Aux lignes 6 à 10, les élèves établissent que ce n'est pas le cas et que, par conséquent, les grandeurs ne varient pas de la même façon.

La seconde interprétation concerne le sens de variation des deux grandeurs : la distance du haut et la distance du bas varient-elles dans le même sens? Si l'une augmente, l'autre augmente-t-elle aussi? Si l'une diminue l'autre diminue-t-elle aussi? Aux lignes 14 à 18, les élèves établissent que c'est le cas et que par conséquent les grandeurs varient de la même façon. On voit toutefois qu'ils remettent en question cette conclusion qui n'est pas satisfaisante parce que la distance du haut ne varie pas *autant* que la distance du bas, c'est-à-dire que même si elles augmentent toutes les deux, la seconde n'augmente pas toujours de la même distance alors que la première semble le faire. Par ailleurs, Karine ramène le sujet de la question, il s'agit de déterminer uniquement si la distance du haut varie toujours *de la même façon*. On voit bien que cette question est problématique dans la mesure où lorsqu'on dit que la distance du bas augmente, on ne dit pas comment elle augmente. Or, après le travail sur S1 et S2, on peut supposer que les élèves accordent une importance à la façon de varier de la grandeur indépendante. Il y a un implicite sur la variation constante et continue de la distance du bas et les élèves ont en quelque sorte mis le doigt sur les difficultés qu'engendre un tel implicite.

4.3.6 L'articulation des unités U2 et U3

Rappelons d'abord que globalement l'unité de raisonnement U3 concerne la description du comportement de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente. Le passage de U2 à U3 consiste donc en la précision de comment varient les grandeurs. Plus précisément, lorsque les élèves établissent une concomitance des variations des deux grandeurs – par exemple « le niveau varie lorsque le volume varie » - ils mobilisent U2c alors que lorsqu'ils sont en mesure de préciser comment les grandeurs varient tout en maintenant l'emphase sur la concomitance – par exemple « plus le volume augmente plus le niveau augmente » - ils mobilisent U3a. Même si la différence est subtile, nous pensons qu'il est pertinent de les distinguer. D'une part, la précision de comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente nécessite une compréhension plus approfondie du phénomène or, cette compréhension est indispensable à la poursuite de l'activité de modélisation. Par exemple, dans le contexte du pichet, si un élève ne peut déterminer que le niveau augmente alors que le volume augmente c'est qu'il ne saisit pas le phénomène observé et qu'il ne sera pas en mesure d'effectuer l'étude des accroissements. D'autre part, rappelons que l'étude des accroissements a pour objectif de comprendre de manière plus approfondie ledit phénomène en offrant la possibilité de préciser **comment** augmente (ou diminue) la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente. Il est donc évident que cette étude n'a de sens que si on est d'abord capable de déterminer globalement si la grandeur dépendante augmente ou diminue.

Afin de comprendre les processus de passage des unités *racines* aux unités *troncs*, nous avons d'abord repéré les occurrences successives des unités de raisonnement U2 et U3 dans les tableaux du mouvement du raisonnement. Nous nous sommes concentrés sur les cas où l'apparition de sous-unités associées à U2 est suivie de l'apparition de sous-unités associées à U3 (voir exemple ci-dessous en A.). Ensuite, nous avons identifié les extraits de conversation dans lesquels apparaissent les segments codés concernés. Finalement, l'analyse du raisonnement déployé par les élèves dans ces extraits a mené à rejeter certains extraits dans lesquels les liens entre les unités U2 et U3 ne sont pas explicites et à en retenir trois particulièrement significatifs provenant **uniquement du groupe de quatrième secondaire**. Nous les présentons ici accompagnés d'une analyse de l'articulation entre U2 et U3.

Pour chaque extrait, nous rappelons les questions sur lesquelles les élèves travaillent et nous résumons les idées exprimées ainsi que les éléments du processus de transition en parallèle avec les propos des élèves. L'analyse de l'articulation des unités U2 et U3 prend alors la forme d'une description du mouvement du raisonnement puis d'une interprétation du processus de passage d'une unité à l'autre.

A. Premier extrait : S1-Q1/Q2

L'extrait présenté a été repéré dans le tableau du mouvement du raisonnement du groupe de quatrième secondaire (Tableau 12-G en Annexe 12). Comme on peut le voir à la Figure 24, les unités U2 et U3 se suivent dans la section encadrée en double.

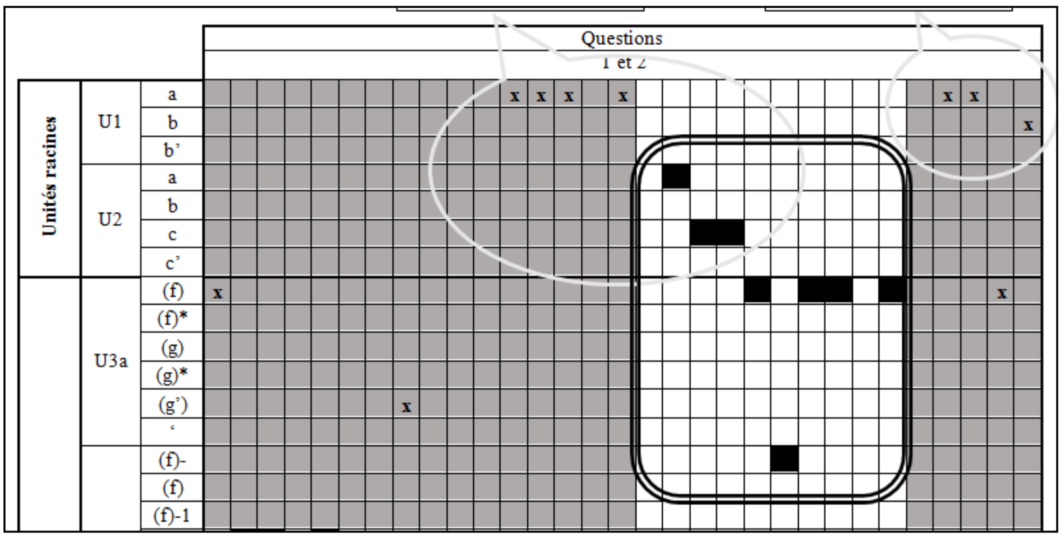


Figure 24 Exemple de repérage de la succession des unités U2 et U3 dans un tableau de mouvement du raisonnement

Rappel des questions et extrait commenté

On s'intéresse au niveau de l'eau et au volume d'eau dans le pichet. Question 1 : Décrivez comment réagit **le niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet. Question 2 : Le niveau de l'eau varie-t-il toujours de la même façon à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet?

Texte (segments codés soulignés)	**Code**	**Idée exprimée**	**Transition**
(13 :38) SIMON : le volume d'eau dans le fond, comment c'est, mais juste en général, on peut dire simplement il va augmenter	U2a	Le volume augmente.	Centration sur les deux grandeurs observées simultanément
JULIE : c'est le niveau d'eau à mesure que le volume d'eau augmente	U2c	On regarde le niveau d'eau à mesure que le volume augmente.	
SIMON : c'est ça, mais sans préciser admettons, en partant on dit il augmente avec le volume d'eau	U2c	Le niveau augmente AVEC le volume.	Formulation de l'augmentation concomitante des deux grandeurs Première tentative d'une qualification de la variation
ÉMILIE : mais dans un sens les deux augmentent, c'est juste pas à la même vitesse	U3a(*f*)	Le niveau et le volume augmentent MAIS pas à la même vitesse.	
JULIE : ouais c'est ça, plus le volume augmente, plus le niveau…			Deuxième tentative d'une qualification de la variation par comparaison des variations des deux grandeurs
ÉMILIE : la question, il te demande pas là; décrivez comment réagit le niveau de l'eau à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet; ben il augmente en même temps-là, il augmente juste pas au fur et à mesure que le volume augmente	U3b(*f*)-	Le niveau d'eau n'augmente pas au fur et à mesure que le volume augmente.	
JULIE : ben ouais, plus le niveau augmente…			Reformulation de l'augmentation concomitante des deux grandeurs
SIMON : ça veut dire que plus le volume d'eau augmente, plus le niveau augmente	U3a(*f*)	Plus le volume augmente plus le niveau augmente.	
ÉMILIE : ouais c'est ça, les deux ils varient dans le même sens	U3a(*f*)	Le niveau et le volume varient dans le même sens.	

Description du mouvement du raisonnement

D'abord, Simon établit que le volume augmente (U2a). Aussitôt, Julie précise qu'on regarde le niveau alors que le volume augmente « C'est **le niveau d'eau à mesure que le volume d'eau augmente** ». Elle ramène ainsi le focus sur l'observation simultanée des deux grandeurs. Simon ajoute alors la variation du niveau : « **il** augmente **avec** le volume d'eau ». Émilie combine les augmentations des deux grandeurs, elle fait une synthèse : « **Mais dans un sens les deux augmentent ».** Elle fait aussi une première tentative pour qualifier ces augmentations : « c'est juste pas à la même vitesse » puis une seconde « il augmente en même temps-là, il augmente juste pas au fur et à mesure que le volume augmente ». Dans cette dernière formulation elle exprime clairement la simultanéité des augmentations. Elle ajoute néanmoins que le niveau et le volume n'augmentent pas au même rythme comme si elle voyait l'augmentation changeante du niveau alors que le pichet se remplit à un débit constant.

Ces tentatives de qualifier les augmentations simultanées du volume et du niveau nous semble importantes car, d'une part, on comprend que pour Émilie, de dire uniquement que les deux grandeurs augmentent n'est pas suffisant. Ainsi, une partie de l'objectif de la seconde question a été atteint puisqu'il y a une remise en question de la réponse donnée à la première question. D'autre part, l'idée de comparer les vitesses d'augmentation des deux grandeurs montre une omniprésence du temps, c'est comme s'il y avait deux fonctions du temps : le niveau en fonction du temps et le volume en fonction du temps et qu'Émilie comparait les variations de ces deux fonctions. Évidemment, nous ne pensons pas que cette stratégie soit consciemment mise en place, l'utilisation du terme « vitesse » nous apparait davantage comme un réflexe dans la mesure où on observe un phénomène dynamique, ce terme est celui qui est disponible dans le registre langagier des élèves à ce moment-là et dans ce contexte pour formuler leur idée. La formulation « il augmente juste **pas au fur et à mesure** que le volume augmente » confirme la stratégie de comparaison et l'utilisation de la négation montre qu'Émilie amorce la sous-unité U3b, elle tente d'exprimer comment l'augmentation du niveau ne se comporte pas.

Finalement, Simon revient à une formulation plus claire de l'augmentation concomitante des deux grandeurs « plus le volume d'eau augmente, plus le niveau augmente ». Cette verbalisation était celle attendue à la première question, elle correspond d'ailleurs aux réponses écrites individuelles des quatre élèves de ce groupe. Le retour à cette formulation, et par conséquent à l'unité U3a, montre selon nous que le passage à U3b ou à U4 constitue un saut conceptuel important. Les élèves de quatrième secondaire n'ont à ce moment et dans ce contexte pas les outils pour mobiliser ces unités de raisonnement ou du moins pour agir et s'exprimer sur le comportement de l'augmentation du niveau à mesure que le volume augmente.

Interprétation du processus de passage de U2 à U3

Ici, le passage de U2c à U3a semble être simplement lié à la formulation de la relation de variation entre les grandeurs. C'est uniquement lorsque les augmentations des deux grandeurs sont clairement mises en lien qu'on est certain que U3a est mobilisée. Dans la mesure où nous considérons la logique du raisonnement, la première formulation de U3a par Émilie (en gras) correspond à une combinaison des trois premières assertions. Pour nous, il y a ici une prise en compte des assertions précédentes puisqu' Émilie ne cherche pas à réfuter l'affirmation de Simon mais plutôt à la préciser, dans « les deux augmentent », elle sous-entend « les deux augmentent ensemble ». Le passage à U3a s'effectue donc naturellement lorsque les élèves établissent l'augmentation individuelle de chaque grandeur ET la concomitance des variations des deux grandeurs.

Le chemin du raisonnement, lors l'articulation de U2 et U3 mise en évidence, a d'abord été repéré dans le tableau du mouvement (voir section agrandie à la Figure 25) puis explicité comme illustré dans le Tableau 22.

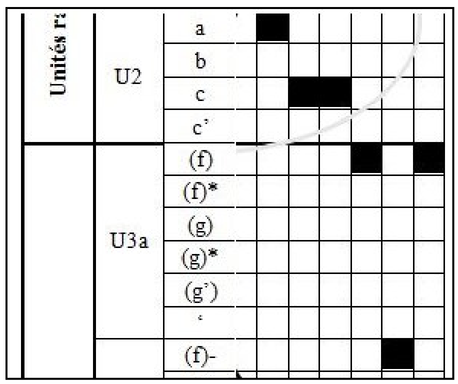


Figure 25 Agrandissement du mouvement du raisonnement lors de l'articulation de U2 et U3

Tableau 22 Chemin détaillé du raisonnement lors de l'articulation de U2 et U3

U2a	Le volume augmente.					
U2b						
U2c		Le niveau et le volume bougent ensemble.	Le niveau et le volume bougent ensemble et le niveau augmente.			
U3a(*f*)				**Le volume et le niveau augmentent.**		Plus le volume augmente, plus le niveau augmente.
U3b(*f*)-					Le niveau n'augmente pas de la même façon que le volume.	

B. Deuxième extrait : S2B-Q1

Rappel des questions et extrait commenté

On s'intéresse à la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet et au temps qui passe.
Question 1 : Décrivez comment se comporte **la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet** à mesure que le temps passe.

Texte (segments codés soulignés)	**Code**	**Idée exprimée**	**Transition**
SIMON : là tu ne peux plus dire… oui c'est vrai que plus le temps passe plus le niveau de l'eau augmente mais c'est pas ça la question			
(20 :11) ÉMILIE : attends les deux variables c'est le temps puis la vitesse c'est ça? SIMON : La vitesse…	U1a	Les variables étudiées sont le temps et la vitesse.	
Julie : ouais ÉMILIE : ok, le temps, j'veux dire il augmente tout le temps JULIE : ouais c'est ça mais la vitesse? SIMON : de toute façon tu peux pas dire que…	U2a	Le temps augmente.	La vitesse dépend du diamètre. Le diamètre dépend du temps. Le temps augmente. Description de la variation de la vitesse lorsque le diamètre change.
ÉMILIE : la vitesse elle va varier parce que ça dépend de… JULIE : du bombage ÉMILIE : … du bombage ou du diamètre de ton pichet, où ce que tu es rendu	U2c'	La vitesse varie en fonction du diamètre (ou du bombage).	
(20 :28) SIMON : mais avant c'est que… à mesure que le temps passe, lorsque le diamètre est plus grand la vitesse est plus petite, quand le diamètre est plus petit la vitesse est plus grande	U3a(g')	Au cours du temps, lorsque le diamètre est plus grand, la vitesse est plus petite. Lorsque le diamètre est plus petit, la vitesse est plus grande.	

Description du mouvement du raisonnement

Dans la partie A, on demandait de travailler sur la fonction g (le niveau de l'eau en fonction du temps). À présent, dans la partie B, les élèves sont amenés à étudier la fonction g' (la vitesse de l'eau en fonction du temps). Ainsi, les élèves établissent d'abord quelles sont les grandeurs observées puisque la grandeur indépendante a été remplacée. Ensuite, Émilie indique que le temps augmente puis que la vitesse varie en fonction du diamètre (ou du bombage). Finalement, Simon tente de mettre en relation les trois grandeurs : « **à mesure que le temps**

passe, lorsque le diamètre est plus grand la vitesse est plus petite, quand le diamètre est plus petit la vitesse est plus grande ». Ainsi, le diamètre du pichet à l'endroit où l'eau est rendue apparait, encore une fois, comme une grandeur intermédiaire. Nous avions effectivement déjà identifié cette stratégie mise en place par les élèves de ce même groupe lors du travail sur S1 (*f* : le niveau dépend du volume) à la section 4.3.5.3. Cette fois, le raisonnement qui semble être tenu est le suivant : lorsque le pichet est rempli avec un débit constant, la vitesse dépend du diamètre qui, lui, dépend du temps. On peut y voir, de manière semblable à ce que nous avions vu précédemment, une composition de deux fonctions : la vitesse en fonction du diamètre et le diamètre en fonction du temps (voir Figure 26).

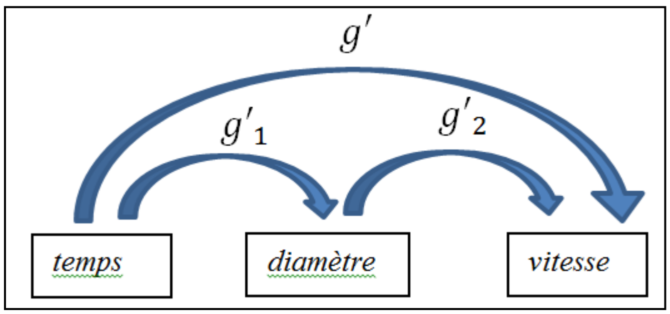


Figure 26 Composition de deux fonctions dont la résultante est la fonction *g*' dans le contexte du pichet (la vitesse en fonction du temps)

<u>Interprétation du processus de passage de U2 à U3</u>

Notons en premier lieu que U2c a été identifiée sur une fonction qui n'est pas celle étudiée (d'où le codage U2c**'**). Les élèves établissent que la vitesse varie lorsque le diamètre varie. Ils passent tout de même à la fonction *g*' soit la vitesse en fonction du temps mais de manière indirecte puisqu'ils utilisent une grandeur intermédiaire, le diamètre du pichet. Le passage à U3 dans ce contexte de remplissage d'un pichet ne semble possible pour eux que dans la mesure où ils considèrent le diamètre. Il est vrai que la forme du pichet doit forcément être considérée et pour ces élèves la stratégie pour la prendre en compte est l'introduction de cette grandeur intermédiaire.

C. Troisième extrait : S3 - Q1/Q2

Rappel des questions et extrait commenté

On s'intéresse à la distance entre le haut de l'échelle et le haut du mur (distance du haut) et à la distance entre le bas de l'échelle et le bas du mur (distance du bas). Question 1 : Décrivez comment réagit la distance du haut à mesure que la distance du bas augmente. Question 2 : La distance du haut varie-t-elle toujours de la même façon à mesure que la distance du bas augmente?

Texte (segments codés soulignés)	**Code**	**Idée exprimée**	**Transition**
Simon : ben premièrement, plus la distance du bas augmente plus la distance du haut augmente	U3a(*f*)	Plus la distance du bas augmente plus la distance du haut augmente.	Les grandeurs varient simultanément. Les deux augmentent mais selon l'endroit où se trouve l'échelle la distance du haut augmente plus ou moins vite. Il y a deux phases pour lesquelles la variation est différente : au début l'augmentation est lente et à la fin elle est plus rapide.
Julie : hum hum Simon : ben mettons c'est ici mettons…une affaire tsé au début que j'avais pensé écrire c'est que j'me suis dit une fois que ici ce serait rendu à 45°…ça tomberait d'un coup…mais finalement non dans le fond ça tomberait pas d'un coup mais…ok ça varie pas toujours de la même façon dans le fond Julie : moi je dis que oui là		Raisonnement autour de la manipulation, comment ça varie?	
Karine : ben moi j'ai dit que ça dépend aussi toujours de ça…que comme ça varie…que ça pis ça, ça varie en même temps tout le temps genre c'est comme le même rapport je dirais…mais, mais elle, elle varie pas toujours de la même façon, ça dépend toujours de elle	U2c	Les distances du haut et du bas varient simultanément. Il y a un rapport constant mais la distance du haut ne varie pas toujours de la même façon.	
Simon : *inaudible*…de là à là elle va peut-être augmenter plus vite que de là à là…tsé ce que j'veux dire…si mettons… Karine : c'est que…on parle pas de temps, on parle de… Simon : c'est que quand ça augmente, ça ça …*inaudible*… *Inaudible*…ils manipulent du matériel	U3b(*f*) U5-	Entre le milieu et le bas du mur la distance du haut augmente plus vite qu'entre le haut et le milieu du mur.	
Simon : on va prendre ça de même...ok, comme ça…tsé au début c'est que ça augmente…tsé quand t'es ici là…tsé là je l'augmente de même ça va augmenter un tout petit peu tandis que si je le bouge de la même distance par là-bas ça descend ben plus…comprends-tu? Julie : ouais j'comprends	U4c(*f*)	Pour un même accroissement de la distance du bas, l'accroissement de la distance du haut est petit au début et plus grand à la fin.	
Simon : pis ça dans le fond ça varie…la différence…à un certain moment ça peut augmenter plus puis moins	U4b(*f*)	L'accroissement de la distance du haut varie, la distance du haut augmente plus ou moins.	
Julie : non mais ça varie de la même façon dans le fond puisque plus la distance en bas augmente, plus la distance en haut augmente…plus la distance Karine : ouais	U3a(*f*)	La distance du bas et la distance du haut augmentent DONC elles varient de la même façon.	

Description du mouvement du raisonnement

Dès le départ Simon indique que les deux grandeurs augmentent, mais il est conscient que cela ne suffit pas à dire si la distance du haut varie toujours de la même façon. Karine exprime l'idée de variation simultanée des deux grandeurs, puis elle tente de trouver un moyen pour parler de la variation particulière de la distance du haut. Simon aborde l'idée de phase en délimitant deux zones sur le mur, le milieu du mur semblant être la frontière entre les deux. Il y a donc une première phase sur laquelle la distance du haut augmente lentement puis une seconde sur laquelle elle augmente plus rapidement.

Interprétation du processus de passage de U2 à U3

Dans ce contexte de l'échelle le passage de U2 à U3 semble plus facile qu'avec le contexte du pichet. Les élèves passent naturellement des variations concomitantes des deux grandeurs à la qualification de la variation de la grandeur dépendante. Cette qualification a d'abord lieu à l'aide de la notion de vitesse, la grandeur « temps » est alors omniprésente. Toutefois, Karine fait remarquer qu'on ne parle pas du temps. L'évacuation de cette grandeur force Simon à reformuler son idée, il exploite alors la notion d'accroissement, tout en n'utilisant pas ce terme. Il procède en comparant deux accroissements de la distance du haut pour un même accroissement de la distance du bas pour deux positions différentes de l'échelle. Il y a ici un grand saut par rapport à S1 puisque, d'une part, les élèves réinvestissent l'étude des accroissements de leur propre chef avant même que ce ne soit demandé et, d'autre part, ils sont en mesure de prendre des accroissements non successifs ce qui implique d'être conscients que pour un même accroissement de la distance du bas il suffit que deux accroissements de la distance du haut soient différents pour établir que celle-ci ne varie pas toujours de la même façon.

Il est intéressant de noter que ces trois articulations de U2 et U3 sont apparues dans le contexte des questions demandant aux élèves de décrire le comportement des fonctions f, g et g'. Ce questionnement est aussi à l'origine de la mobilisation des unités *troncs* dont nous effectuons l'analyse détaillée à la section suivante.

4.4 Présentation et analyse des unités de raisonnement *troncs*

Rappelons que les situations proposées aux élèves ont été conçues dans l'optique de solliciter l'ensemble des treize unités de raisonnements identifiées dans la grille d'analyse initiale (voir tableau 4 à la section 2.4.2.3). Les unités de raisonnement U3 et U4 sont toutefois apparues plus fréquemment que les autres et ce, même lorsque les questions ne les sollicitaient pas particulièrement. Par conséquent, et comme ces unités constituent le cœur du raisonnement covariationnel, nous sommes particulièrement intéressée à en analyser la mobilisation par les élèves.

Afin de mieux rendre compte du raisonnement covariationnel déployé par les élèves, les unités de raisonnement *troncs* ont été déclinées en plusieurs sous-unités. D'abord, comme pour les unités U1 et U2, elles ont été précisées en U3a, U3b, U4a etc. Puis, elles ont été associées à la fonction concernée (*f*, *g* ou *g*'). Il est apparu en effet indispensable de préciser à quelle fonction les élèves font référence. Lorsqu'un raisonnement est mobilisé sur une fonction donnée, il y a deux cas possibles : soit cette fonction est celle étudiée, soit elle ne l'est pas, et, ce, d'après l'énoncé et le questionnement imposés. Or, le raisonnement n'est pas le même dans les deux cas. De plus, la référence à l'une des autres fonctions étudiées informe sur les liens établis entre les différentes fonctions par les élèves, ce qui nous apparait intéressant à mettre en évidence.

L'analyse complète de U3 est présentée puis suit celle de U4. Pour chacune de ces unités, nous décrivons d'abord, de la même manière qu'à la section 4.3, les sous-unités associées dans la grille finale, puis nous présentons les résultats du repérage de cette unité dans le discours des élèves. Par la suite, nous regardons de près les segments codés en nous concentrant sur la forme et le contenu des verbalisations utilisées par les élèves pour exprimer, selon notre interprétation, ces sous-unités. Nous terminons cette section par trois études de cas (chaque groupe étant un cas) sur l'articulation des unités U3 et U4. Nous dégageons alors ce qui a amené les élèves à passer de l'étude globale de la fonction à l'étude locale des accroissements concomitants.

4.4.1 Description de l’unité U3 *(décrire le comportement de la fonction)*

Dans la grille initiale, nous avions décrit l’unité de raisonnement U3 comme l’activité de qualification du changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (voir Tableau 23).

Tableau 23 Description de l’unité de raisonnement U3 dans les grilles initiale et finale

<table>
<tr><th>Unité</th><th>Description de la grille initiale</th><th>Description de la grille finale</th></tr>
<tr><td rowspan="3">U3</td><td rowspan="3">Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente</td><td>Décrire le comportement de la fonction</td></tr>
<tr><td>a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente</td></tr>
<tr><td>b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale</td></tr>
</table>

Les propos des élèves nous ont toutefois forcée à distinguer deux sous-unités que nous avons regroupées sous l’activité plus globale consistant en la **description du comportement de la fonction** étudiée : a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente et b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale. En effet, les descriptions du comportement de la fonction par les élèves ont été de deux natures. Soit ils établissaient comme attendu l’augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmentait, soit ils tentaient de qualifier cette augmentation ou diminution intuitivement. Il y a, pour nous, une différence importante entre ces deux sous-unités puisque la seconde se trouve à cheval entre U3 et U4. En fait, en qualifiant l’augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante, les élèves montrent qu’ils sont conscients qu’il y a moyen de caractériser plus précisément la variation. Ils tentent cette caractérisation à partir de leur compréhension de la relation entre les grandeurs liée à l’expérience sensorielle qu’offrent les phénomènes étudiés (ils ne tentent pas d’effectuer de modélisation algébrique). Cette tentative peut être vue comme un premier pas vers l’étude covariationnelle de la fonction qui, par le travail sur les accroissements, apporte un outil pour analyser précisément le comportement de l’augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante. Dans la grille finale, des verbalisations types et des éléments clés sont suggérés (voir Tableau 24). On voit que dans les deux cas (U3a et U3b) la préoccupation est celle de la qualification globale du changement de la grandeur dépendante (comment bouge-t-elle?). Pour U3a, la description correspond à l'expression de l'augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (par exemple, dans le contexte du pichet, lorsque le volume augmente le niveau augmente). Pour U3b, il y a caractérisation de l'augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (par exemple, dans le contexte du pichet, le niveau augmente rapidement dans le goulot). Il faut noter que pour U3a il y a clairement concomitance des variations des deux grandeurs alors que pour U3b la loupe est placée sur la variation de la grandeur dépendante. Dans ce dernier cas, l'augmentation de la grandeur indépendante est implicite.

Tableau 24 Verbalisations types et éléments clés pour le repérage de U3

	Description des unités de raisonnement	Verbalisation(s) type(s) (contexte du pichet)	Éléments clés
U3 Décrire le comportement de la fonction			
	a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente	**Lorsque** le volume **augmente**, le niveau **augmente aussi**. Le niveau d'eau dans le pichet **augmente au fur et à mesure que** le volume **augmente**.	qualification globale du changement de la grandeur dépendante (augmentation ou diminution)
	b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale	Le niveau de l'eau augmente **rapidement** au début, puis **lentement**, puis **encore plus rapidement**.	qualification intuitive de l'augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante

Le symbolisme mathématique qu'on pourrait associer à U3a est celui de la croissance d'une fonction, par exemple, on peut définir une fonction strictement croissante de la manière suivante :

Définition : Soit *f*, une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction réelle *f* est strictement croissante sur un intervalle I
$\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$[33]

Pour U3b, il s'agit d'une qualification intuitive, il est donc difficile de l'associer à un symbolisme rigoureux. En fait, à partir du moment où on précise comment augmente ou diminue la grandeur dépendante, on fait habituellement appel à la notion de dérivée pour laquelle il existe un symbolisme particulier. Mais ici, cette notion n'est pas explicitement

[33] Cet exemple est tiré du site http://macformath.net/math/analyse/notioncroiss/index.html

impliquée puisqu'il s'agit d'une qualification intuitive basée sur la perception visuelle du mouvement.

4.4.2 Résultats globaux du repérage de l'unité U3

Comme on peut le voir dans le Tableau 25, l'unité U3a a été systématiquement mobilisée par tous les groupes d'élèves dès qu'une question demandait de décrire comment se comporte une grandeur dépendante lorsqu'une grandeur indépendante augmente (questions 1 et 2 de S1 et S3, questions 1 des parties A et B de S2 et S4). Chaque groupe a plus ou moins mobilisé cette unité à d'autres moments de manière ponctuelle. Alors que le groupe de quatrième secondaire y a fait appel dans cinq autres questions, les groupes de cinquième secondaire et du collégial l'ont abordé dans seulement deux autres questions.

Dans le contexte du pichet (S1 et S2) l'unité U3b apparait aussi systématiquement dans tous les groupes aux questions 1 et 2 de S1 et dans deux groupes à la question 1 de la partie A de S2. Les élèves tentent donc spontanément de qualifier l'augmentation du niveau de l'eau dans le pichet à mesure que le volume augmente ou à mesure que le temps passe.

4.4.3 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3a

4.4.3.1 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3a(*f*)

Tous les segments codés U3a(*f*) sont répertoriés dans le Tableau 26. En premier lieu, nous avons relevé le vocabulaire utilisé par les élèves pour exprimer les deux éléments clés de la sous-unité de raisonnement U3a : la concomitance et la qualification des variations des deux grandeurs. En second lieu, nous avons repéré des expressions dans lesquelles les élèves amorcent une considération de la façon de varier (voir Tableau 27). Ces derniers éléments qui apparaissent comme des précurseurs à la mobilisation des unités U3b et U4, seront abordés lors de l'analyse de l'articulation des unités U3 et U4 à la section 4.4.9.

Tableau 25 Apparition des sous-unités de raisonnement associées à U3 par groupe, par situation et par question

		U3a (augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante)			**U3b** (qualification intuitive de l'augmentation ou la diminution)		
	Question \ Groupe	**Sec 4**	**Sec 5**	**Col**	**Sec 4**	**Sec 5**	**Col**
S1	**1 et 2**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
	3	**X**			**X**	**X**	**X**
	4					**X**	
	5						
	6	**X**					**X**
	7						
	8				**X**		
	9						
	10		**X**				
S2 A	**1**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	
	2						
	3						
	4			**X**			
S2 B	**1**	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**	
	2			**X**			
	3						
	4						
	5	**X**					
S3	**1 et 2**	**X**	**X**	**X**	**X**		**X**
	3	**X**					
	4						
	5						
	6					**X**	
	7						**X**
	8						
	9						**X**
	10		**X**				
S4 A	**1**	**X**	**X**	**X**	**X**		
	2						
	3						
	4	**X**					**X**
S4 B	**1**	**X**	**X**	**X**			**X**
	2						

Tableau 26 Segments codés U3a(*f*)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S1	1 et 2	SEC4	Mais dans un sens **les deux augmentent**, c'est juste pas à la même vitesse
			Ça veut dire que **plus le volume d'eau augmente, plus le niveau augmente**
			Ouais c'est ça**, les deux ils varient dans le même sens**
			t'as juste à dire que ça augmente quand ça monte qu'**ils varient dans le même sens**
			ça va augmenter au fur et à mesure que le volume d'eau va augmenter
		SEC5	**à force que le volume d'eau augmente, le niveau de l'eau augmente aussi**
		COL	**plus le volume d'eau augmente dans le pichet plus que le niveau du liquide va augmenter**
	6	SEC4	Dans le fond **le volume d'eau au départ**, **quand il augmente, dans le fond le niveau de l'eau augmente toujours avec le volume d'eau même si il y a des variations**
	10	SEC5	**Le niveau total augmente en fonction que le volume augmente**
S2A	1	COL	c'est un volume constant rajouté à chaque seconde donc **le volume d'eau à l'intérieur augmente et le niveau augmente aussi** mais pas genre en fonction du…
S3	1 et 2	SEC4	ce serait plus **ce qui varie dans le même sens tout le temps**
			ça veut dire **quand une augmente l'autre augmente et quand une diminue l'autre diminue**
			Ben de la même façon, oui, **quand il y en a un qui augmente l'autre augmente**, ça c'est sûr
			c'est que **quand ça augmente en haut ça augmente en bas et quand ça diminue en haut, ça diminue en bas**
			non mais ça varie de la même façon dans le fond puisque **plus la distance en bas augmente, plus la distance en haut augmente**
			plus la distance du bas augmente plus la distance du haut augmente
		SEC5	**Plus que la distance du bas diminue, plus que la distance du haut diminue**
			plus que la distance du bas augmente plus que la distance du haut augmente
		COL	moi je dis que ça augmente quand l'autre… Quand le haut, **quand le bas augmente, le haut augmente**
			j'ai écrit que oui **ça varie toujours de la même façon à mesure que la distance du bas augmente**

Tableau 27 Vocabulaire utilisé pour exprimer certains éléments de U3a(*f*)

Expression de la concomitance	Qualification des variations des deux grandeurs	Amorce de considération sur la façon de varier
• Plus…plus • À force que…aussi • Et…aussi • Quand une…l'autre • Avec	• Elles augmentent (pichet) • Elles augmentent ou diminuent (échelle) • Les deux varient dans le même sens.	• Ça varie toujours de la même façon. • « le niveau de l'eau augmente toujours avec le volume d'eau **même si il y a des variations** » • « c'est juste pas à la même vitesse »

4.4.3.2 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3a(g)

Tous les segments codés U3a(g) sont répertoriés dans le Tableau 28.

Tableau 28 Segments codés U3a(g)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# de segment
S2A	1	SEC4	j'ai écrit que **plus le temps passe plus le niveau de l'eau augmente**	1
			j'ai juste marqué ça, **plus le temps passe, plus le niveau augmente**	2
			en rapport avec la question dans le fond que **plus le temps passe plus le niveau de l'eau augmente**	3
		SEC5	**plus que le temps passe, plus que le niveau de l'eau augmente**	**4**
		COL	j'écris **le niveau d'eau augmente à mesure que le temps passe**	5
			moi je dis que **le niveau d'eau va augmenter quand le temps passe**	6
	4	COL	tu veux dire **plus le temps avance et plus le niveau d'eau augmente**	7
S4A	1	SEC4	**plus le temps passe plus la distance du haut va augmenter**	**8**
		SEC5	Charles : **Plus le temps passe plus la distance du haut augmentera s'il se déplace vers la droite** Mathieu : **s'il se déplace vers la gauche, elle rapetissera à mesure que le temps passe**	9
			je pense qu'on a tous écrits que **plus le temps passe plus la… Plus la distance du haut augmente**	10
		COL	ben moi j'ai dit, que **quand le temps passe, la distance du haut ça va augmenter**	11
	4	SEC4	**Plus le temps passe plus la hauteur du haut augmente**	**12**

Encore une fois, nous avons relevé le vocabulaire exprimant la concomitance et la qualification des variations des deux grandeurs (voir Tableau 29). Nous constatons, d'une part, que le vocabulaire utilisé diffère en raison de la nature de la grandeur indépendante : le temps. En effet, les élèves utilisent des termes à connotations temporelles comme « à mesure que » et « quand » pour exprimer la concomitance et lorsqu'ils parlent de la variation du temps c'est exclusivement à l'aide de l'expression « le temps passe ». D'autre part, le vocabulaire est moins varié, peut-être parce que le contexte de variation du niveau au cours du temps est plus familier.

Il est à noter, de plus, que les élèves de cinquième secondaire distinguent deux cas de figure : le cas où le bas de l'échelle s'éloigne du mur et celui où il se rapproche (segment #9). En effet, l'énoncé n'indiquait pas le sens du déplacement de l'échelle. Or, ce dernier influe sur le sens de variation de la fonction g alors qu'il n'avait aucune incidence sur la fonction f. Ainsi, l'étude de la variation de la distance du haut au cours du temps implique d'établir une chronologie au phénomène en précisant le point de départ de l'échelle et le sens dans lequel elle se déplace alors que cela n'est pas nécessaire lorsqu'on s'intéresse à la variation de la distance du haut en fonction de la distance du bas.

Tableau 29 Vocabulaire utilisé pour exprimer certains éléments de U3(*g*)

Expression de la concomitance	**Qualification des variations des deux grandeurs**
• Plus…plus • À mesure que… • Quand…	• Le temps passe • Le niveau augmente (pichet) • La distance du haut augmente ou rapetisse (échelle)

4.4.3.3 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3a(*g*')

Dans les tableaux 30 et 31, tous les segments codés U3a(*g*') sont répertoriés. Les verbalisations sont ici directement en lien avec l'unité U3b(*g*). Par exemple, dans le contexte du pichet, lorsque le niveau augmente en fonction du temps (fonction *g*), les élèves indiquent déjà intuitivement qu'il augmente plus ou moins rapidement selon la forme du pichet. Lorsque vient le temps d'étudier la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet (fonction *g*'), ils assoient ces intuitions. Nous analyserons d'ailleurs l'articulation entre U3b(*g*) et U3a(*g*') à la section 4.4.5.

La fonction *g*' est introduite à la partie B de S2 et S4. À ces moments, les élèves s'expriment sur la vitesse en fonction du temps (soit la vitesse du niveau de l'eau, soit la vitesse du haut de l'échelle). Les deux contextes offrent alors deux cas de figure différents, dans le cas du pichet il y a trois phases de variation alors que dans le cas de l'échelle il n'y en a qu'une.

Tableau 30 Segments codés U3a(*g*') dans le contexte du pichet (S1 et S2)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S1	1 et 2	SEC4	Ben dans le fond, c'que ça veut dire c'est que est-ce que ça varie toujours de la même façon, le niveau de l'eau là, si admettons que tu mets un litre par heure, admettons qu'il soit beaucoup plus gros là, **est ce que le niveau monterait à la même vitesse**. Dans le fond la réponse c'est non parce que… il ne varie plus de la même façon parce que ici, comme on vient de dire, **ça va monter plus lentement, puis ici ça va monter plus rapidement.**
S2B	1	SEC4	**Le temps passe, ici une seconde, c'est plus rapide, ça devient plus lent, plus lent, plus lent, une seconde, plus rapide, plus rapide, plus rapide**
			Dans le fond j'ai écrit **à mesure que le temps passe lorsque le diamètre est grand, la vitesse est moins grande que lorsque le diamètre est petit… plus petit ou la vitesse est plus grande**, c'est une façon de le dire
			Simon : la partie B…ok là on parle de la vitesse KARINE : **Elle est lente puis après elle augmente**
			Le temps augmente tout le temps, je parlais de la vitesse, mais en fait la vitesse faut pas dire qu'elle augmente, faut dire qu'elle varie parce que….
			On peut faire ça simple, **augmente puis diminue**, ou faire ça par étapes
			mais avant c'est que… **à mesure que le temps passe, lorsque le diamètre est plus grand la vitesse est plus petite, quand le diamètre est plus petit la vitesse est plus grande**
		SEC5	**la vitesse va décroître, accélérer, puis rester constante**
			Fabrice : décrivez comment se comporte la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet à mesure que le temps passe… Silence Fabrice : ben il monte, il monte moins vite Mathieu : et **lentement, rapidement, constant**
			Mathieu : ici ça va être lent… C'est sûr que ça va **accélérer** parce qu'il en faut moins Fabrice : ici **ça va être plus rapide** Justin : ça va **accélérer** puis…
		COL	ben en fait, **au début la vitesse elle est rapide, après elle est plus lente**
			ça va varier, ça va être comme… **Ça va être rapide au début pis là ça va commencer à diminuer la vitesse**, pis là à un moment donné ça va refaire…
			Chloé : la vitesse est par ici genre Bruno : **au début elle est plus grande** Chloé : **puis après elle diminue, elle diminue, elle diminue puis elle remonte…**
			j'ai écrit **la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet est rapide au début à cause de la petite largeur du pichet, et va ensuite ralentir dans la partie la plus large, enfin ça va ré-augmenter dans la partie moins large**
	2	COL	Élise : on l'a eu, **ça ça diminue et ça va remonter à la fin**
	5	SEC4	**Au début plus grand… En fait non ça va être plus grand, plus petit parce que la relation est inversée. La vitesse ici est plus petite, ici ça va faire ça comme ça**
			Euh plus grand, plus petit, plus grand
			SIMON :… Mais là ici par contre c'est **la vitesse, au début la vitesse est plus haute que zéro**, donc ça va faire **vitesse plus grande**… ÉMILIE : Ok (48 :24) SIMON : … **elle diminue puis elle va augmenter ici**

Tableau 31 Segments codés U3a(g') dans le contexte de l'échelle (S3 et S4)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S3	10	SEC5	La **vitesse d'augmentation n'est pas constante**
			la **vitesse** ne va pas être constante, elle va être **de plus en plus grande**
S4A	1	COL	**même si la vitesse est constante en bas de l'échelle, en haut, ce ne serait pas constant**
S4B	1	SEC4	Parce que la vitesse à laquelle se déplace, encore la c'est **plus le temps passe plus la vitesse augmente**… La vitesse à laquelle
		SEC5	Mathieu : en divisant par le même intervalle de temps Fabrice : **ça veut dire que la vitesse va être plus grande…**
			Mathieu : étant donné que la distance par seconde augmente euh… Fabrice : étant donné que la distance par seconde… la vitesse augmente Mathieu : **la vitesse augmente**
			elle va de plus en plus vite
			à la vitesse?… On s'intéresse à la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle (il mime le déplacement de l'échelle avec un crayon)… **Parce que dans le fond elle va être de plus en plus grande dans le fond parce qu'à la fin elle va faire plus de distance sur le temps**
		COL	Élise : **ça devient de plus en plus vite la vitesse non?** Chloé : ouais Martin : donc c'est soit une droite, soit exponentiel aussi, ben soit une parabole
			Chloé : tu écris juste ça? Élise : ben, que **la vitesse augmente**

Premier cas : le pichet

Le vocabulaire utilisé pour qualifier la variation de la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet peut être classé selon deux catégories : les termes qui expriment un état de la vitesse (ex : rapide, lent) et ceux qui expriment un changement de la vitesse (ex : augmente, diminue). Les verbalisations types utilisant ces qualificatifs et résumant les propos des élèves sont présentées dans le Tableau 32.

Tableau 32 Verbalisations types utilisant les qualificatifs d'état et de changement pour la fonction g'

Verbalisations utilisant des qualificatifs exprimant un état de la vitesse	Verbalisations utilisant des qualificatifs exprimant le changement de la vitesse
- La vitesse est **lente**. - La vitesse est **rapide**. - La vitesse est **grande**. - Le niveau monte **lentement, rapidement** puis de façon **constante.**	- La vitesse est **plus rapide**. - La vitesse est **plus lente**. - La vitesse **augmente**. - La vitesse **diminue**. - La vitesse va **décroître, accélérer,** puis rester **constante.** - La vitesse est **plus grande, plus petite puis plus grande.**

Nous remarquons que les verbalisations des élèves comportent majoritairement des qualificatifs de changement. Toutefois, il arrive qu'ils utilisent successivement les deux types de qualificatifs. C'est le cas des élèves du collégial qui indiquent qu' « au début la vitesse elle est **rapide**, après elle est **plus lente** » puis que « ça (la vitesse) va être **rapide** au début pis là ça (la vitesse) va commencer à **diminuer** » et finalement que « la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet est **rapide** au début à cause de la petite largeur du pichet, et va ensuite **ralentir** dans la partie la plus large, enfin ça va **ré-augmenter** dans la partie moins large ». Au départ, l'utilisation d'un qualificatif d'état témoigne de la volonté d'établir une situation de départ en déterminant la valeur initiale (au temps t=0) de la vitesse. Ne disposant pas de valeurs numériques les élèves déterminent que la vitesse est rapide ce qu'ils justifient par la petite largeur du pichet à la base. On peut aussi penser que la diminution de la vitesse qui suit, du fait de l'élargissement du pichet, les incite à partir avec une vitesse relativement grande pour éviter d'obtenir une vitesse négative. Les élèves de quatrième secondaire quant à eux ont aussi recours à une verbalisation mixte mais ils considèrent en premier lieu l'état de la vitesse à un certain endroit non précisé du pichet et le changement qui s'ensuit : « elle (la vitesse) est **lente** puis après elle **augmente** ». Plus tard, cependant, on comprend qu'ils se préoccupent aussi de la valeur initiale de la vitesse puisqu'ils indiquent qu' « **au début la vitesse est plus haute que zéro** ».

En ce qui concerne les qualificatifs de changement, nous constatons que l'utilisation des termes « augmente » ou « diminue » est liée à la considération préalable d'un état de la vitesse comme l'illustrent les verbalisations qui viennent d'être présentées. Les expressions « plus rapide », « plus lente », « plus lentement » et « plus rapidement » sont souvent utilisées pour qualifier la variation de la vitesse à un endroit précis du pichet. Par exemple, les élèves de cinquième secondaire indiquent : « **ici** ça va être plus rapide ». Le « ici » étant accompagné d'un geste montrant une partie précise du pichet. Ils ne précisent toutefois pas *plus rapide* que quoi? Ou que dans quelle autre partie du pichet?

L'idée d'accélération est de plus exprimée par les élèves de cinquième secondaire. Ils opposent toutefois l'accélération à la décroissance et non à la décélération.

Finalement, deux verbalisations réinvestissent une grandeur intermédiaire introduite précédemment :

1. (SEC4) à mesure que le temps passe lorsque **le diamètre** est grand, la vitesse est moins grande que lorsque **le diamètre** est petit… plus petit ou la vitesse est plus grande…

2. (COL) la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet est rapide au début **à cause de la petite largeur du pichet**, et va ensuite ralentir dans **la partie la plus large**, enfin ça va ré-augmenter **dans la partie moins large**

La première formulation est une tentative de généralisation du phénomène sur l'ensemble du domaine. Les élèves de quatrième secondaire expriment la variation de la vitesse en fonction de la variation du diamètre du pichet. La seconde formulation, quant à elle, utilise la largeur du pichet comme une manière d'expliquer le changement de comportement de la vitesse. Les élèves du collégial identifient donc trois parties du pichet : une partie étroite suivie d'une partie large puis d'une partie moins large.

Deuxième cas : l'échelle

Les verbalisations dans le contexte de l'échelle sont moins variées que dans le contexte du pichet, on y retrouve les idées suivantes :

- la vitesse d'augmentation n'est pas constante;
- la vitesse augmente;
- la vitesse va être plus grande;
- elle va être de plus en plus grande;
- elle va de plus en plus vite.

Nous remarquons qu'il n'y a plus de qualificatifs faisant état de la vitesse à un moment donné, ce qui peut être dû au fait que, dans cette situation, contrairement au pichet, la vitesse au départ est nulle. Les verbalisations sont plus claires et plus articulées probablement pour deux raisons : 1) dans le contexte de l'échelle, le comportement de la grandeur dépendante est toujours le même, il n'est donc pas nécessaire de distinguer des phases, le phénomène est à ce titre plus simple à modéliser; 2) les élèves en sont à la dernière situation (S4), ils ont acquis une expérience dans les séances précédentes, leur capacité à parler de la variation s'est améliorée.

La sous-unité U3a(g') a de plus été repérée à trois moments lors de l'étude des fonctions f et g :

- S1 (questions 1 et 2) : alors qu'ils étudient la variation du niveau de l'eau en fonction du volume et qu'ils se questionnent si la façon de varier est toujours la même, les élèves de quatrième secondaire reformulent le problème comme celui de l'étude de la vitesse du niveau de l'eau. Ils se demandent si la vitesse est toujours la même et ils sont capables de dire intuitivement que l'eau monte lentement puis plus rapidement. Ils semblent donc articuler, sans forcément en prendre conscience, les sous-unités U3b(f) et U3a(g').

- S3 (question 10) : à la fin du travail sur la fonction f dans le contexte de l'échelle (la distance du haut en fonction de la distance du bas), les élèves de cinquième secondaire anticipent le comportement de la vitesse qu'ils envisagent certainement évoluer dans le temps, ils indiquent d'abord que « la vitesse d'augmentation n'est pas constante » puis ils précisent qu' « elle va être de plus en plus grande ». Cette qualification du comportement de la vitesse est spontanée et intuitive.
- S4A (question 1) : les élèves du collégial anticipent eux aussi que « même si la vitesse est constante en bas de l'échelle, en haut, ce ne serait pas constant » alors que la fonction étudiée est la distance du haut de l'échelle en fonction du temps (fonction g). Ils sont donc en mesure de faire le lien entre les fonctions g et g' même s'ils ne précisent pas encore comment varie la vitesse. Rappelons en effet qu'à ce stade, ils ne disposaient pas du matériel nécessaire pour simuler concrètement la variation au cours du temps, ils ont donc dû le faire mentalement.

4.4.3.4 Les cas particuliers de U3a

À la section 4.1.2 (voir Tableau 12), nous avions indiqué que certaines sous-unités, en plus d'être associées à une fonction précise (f, g ou g'), pouvaient apparaitre sous des formes particulières. Nous avions alors présenté les différents signes utilisés (voir Tableau 33). Dans le cas de U3a, quelques segments ont été codés U3a' (la sous-unité est mobilisée mais pour une fonction différente de celles étudiées) et d'autres U3a(f)* (la sous-unité apparait sous une forme particulière différente de celle attendue). Ces versions particulières de la sous-unité de raisonnement U3a font partie du raisonnement des élèves, elles informent sur leurs interprétations des situations et des questions ainsi que sur les obstacles qu'ils rencontrent. Pour nous, ces éléments inattendus injectés par les élèves sont une source d'information importante pour l'analyse du raisonnement covariationnel. Nous présentons donc notre interprétation de chacun des extraits dans lesquels apparaissent les cinq segments codés numérotés de i à v (voir Tableau 33).

Tableau 33 Segments codés U3a' et U3a(f)*

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	#
U3a’				
S1	3	SEC4	plus le volume d'eau nécessaire à remplir le pichet est grand, moins le niveau de l'eau se remplit…	i
S2A	1	COL	c'est le volume d'eau à l'intérieur qui augmente en fonction comme…ouais …constamment…c'est pas le niveau d'eau	ii
	4		le volume va augmenter constamment en fonction du temps	iii
S3	3	SEC4	Simon : ben par contre… À mesure que cet angle-là est plus… Parce que dans le fond c'est vraiment un rapport qu'on voit… tsé au début par exemple les deux angles pourraient être à 45, mais c'est ça, plus lui est petit par rapport à lui qui est grand… Dans le sens que lui est petit et lui est grand, ça veut dire que le rapport des distances… Car si admettons les angles ils sont… Soit que lui est plus petit… Julie : dans le fond les deux rapetissent Simon : ben on quand lui rapetisse l'autre augmente	iv
U3a(*f*)*				
S3	1 et 2	COL	moi je dis qu'elles varient de la même distance	v

<u>Extrait dans lequel apparait le segment i :</u>

(26 :48) JULIE : Parce que c'est pas euh… moi comment que j'explique**, c'est pas avec le volume d'eau total, c'est juste vraiment par petites couches si on veut**
(27 :07) ÉMILIE : Fait que comment tu vas expliquer que le volume d'eau total euh..
JULIE : Ben tu comprends ce que je veux dire?
ÉMILIE : Ouais ouais mais moi **je le ferais en étapes**, tsé en
JULIE : En **comme parties** si on veut
ÉMILIE : Moi je le comprends **en parties là**
JULIE : Ouais moi aussi
(27 :23) JULIE : Dans le fond c'est… plus le niveau…**plus le volume d'eau nécessaire à remplir le pichet est grand, moins le niveau de l'eau…**
KARINE : Il monterait tout le temps fait que, je pense pas que…
(27 :40) KARINE : Mais si on dit comme ça, **plus le volume d'eau nécessaire à remplir le pichet est grand, moins le niveau de l'eau se remplit…**

Dans cet extrait on comprend que les élèves de quatrième secondaire s’intéressent au volume ajouté et non au volume total (lignes 1 et 2, et 5 à 7). Dans ce contexte, le volume nécessaire à remplir le pichet est le volume nécessaire pour faire augmenter le niveau. La formulation « plus le volume d'eau nécessaire à remplir le pichet est grand, moins le niveau de l'eau se remplit » pourrait alors s’interpréter comme « plus il faut d’eau pour faire augmenter le niveau d’une certaine hauteur, moins l’augmentation du niveau est grande pour une quantité d’eau donnée ». Nous pensons en effet qu’ici les élèves comparent deux accroissements de niveau successifs lorsque le pichet s’élargit. Le volume d’eau ajouté qui serait nécessaire pour que le niveau augmente de la même hauteur est effectivement plus grand, mais comme on sait que ce volume ajouté est constant, le niveau augmente moins. Dans cette simple formulation plutôt maladroite nous décelons donc un raisonnement en partie déductif que nous résumons ainsi :

> À un certain endroit du pichet, un accroissement de volume entraine un certain accroissement du niveau.
> À un endroit où le pichet est plus large, pour avoir ce même accroissement du niveau, l'accroissement de volume doit être plus grand.
> MAIS l'accroissement du volume est constant, DONC l'accroissement du niveau est plus petit.

Ce qui est, selon nous, intéressant de retenir dans ce raisonnement c'est que les élèves commencent avec une situation de référence puis la comparaison de la nouvelle situation avec celle-ci passe par la considération d'accroissements constants du niveau. Ils exercent donc un contrôle sur le lien entre les accroissements concomitants du volume et du niveau en prenant tantôt un accroissement constant du niveau, tantôt un accroissement constant du volume. Ce processus montre d'une part que le raisonnement sort temporairement du chemin imposé pour y revenir ensuite, et, d'autre part, que, pour ces élèves, l'étude des accroissements concomitants passe par l'articulation de ces deux manières d'observer leur comportement.

Les segments ii et iii

Pour ces segments, il n'est pas nécessaire de revenir au contexte plus large de la conversation puisque les élèves du collégial identifient simplement que la fonction « volume en fonction du temps » est une fonction à variation constante puisque le débit du robinet est fixé. Ils interprètent donc que lorsque le débit du robinet est constant cela implique que le volume d'eau dans le pichet augmente de façon constante. Ce raisonnement est essentiel lors du passage de la fonction f à la fonction g dans le contexte du pichet. Nous avions en effet établi dans l'analyse *a priori* que pour déterminer la variation du niveau en fonction du temps les élèves devaient comprendre l'impact d'un remplissage à un débit constant. L'analyse fine de ce raisonnement sera présentée à la section 4.4.8.3.5 (partie C.) lors de l'analyse de U4c.

Extrait dans lequel apparait le segment iv :

Karine : la distance augmente… de plus en plus
Karine : de plus en plus
Simon : oui mais **pour l'explication c'est avec l'angle**
Julie : avec l'angle? Plus l'angle est… ici, au départ
Simon : ben par contre… À mesure que cet angle-là est plus… Parce que dans le fond c'est vraiment un rapport qu'on voit… tsé au début par exemple les deux angles pourraient être à 45, mais c'est ça, plus lui est petit par rapport à lui qui est grand… Dans le sens que lui est petit et lui est grand, ça veut dire que le rapport des distances… Car si admettons les angles ils sont… Soit que lui est plus petit…
Julie : **dans le fond les deux rapetissent**
Simon : ben **on quand lui rapetisse l'autre augmente**
Karine : est-ce qu'il faut le dire
Julie : non
Simon : **quand lui rapetisse l'autre augmente**… **C'est 180°, 90 c'est toujours comme ça, lui augmente à ce moment-là**
Julie : OK ouais… À mon avis c'est vrai
Karine : la distance augmente mais l'angle diminue
Julie : ici l'angle diminue mais là lui ici
Simon : **ben en fait l'angle… En fait c'est juste l'explication ce n'est pas et ça c'est juste que**
Karine : mais on dit juste avec la mesure parce que si on part de l'angle, des deux angles et de la mesure ça va être trop

En S3, les élèves de quatrième secondaire tentent d'expliquer pourquoi la distance du haut n'augmente pas de façon constante (lignes 3 et 18). Ils regardent alors une autre relation, celle entretenue par deux angles, celui formé par l'échelle et le mur et celui formé par l'échelle et le sol. Simon établit que lorsque l'un augmente l'autre diminue. On comprend vaguement aux lignes 13 et 14 qu'il considère la somme des mesures des 3 angles du triangle rectangle formé par le mur, l'échelle et le sol. Cette fonction (on ne sait d'ailleurs pas quelle variable dépend de l'autre et cela n'a, en fait, aucune importance ici) n'est pas celle étudiée dans la situation, pourtant, les élèves évaluent son potentiel à fournir une explication sur la variation de la fonction étudiée soit la distance du haut en fonction de la distance du bas. Cette stratégie montre, d'une part, que ces élèves sont en mesure de faire appel à d'autres fonctions et de chercher à établir des liens entre plusieurs fonctions différentes impliquées dans un même phénomène et, d'autre part, que la compréhension du phénomène physique étudié est importante pour eux. Nous notons que l'étude d'une fonction sortie du système duquel elle est issue est difficile puisqu'on perd le tout cohérent que forme ce système. Dans le cas de l'échelle, la modélisation suggérée est strictement mathématique puisqu'elle exclut les facteurs physiques (frottement de l'échelle sur le mur et le sol, masse de l'échelle etc.). Ainsi, les raisons qui font que la distance du haut n'augmente pas de façon constante sont mathématiques. On pourrait étudier le problème comme celui d'un triangle rectangle pour lequel on veut établir la relation entre les mesures des côtés alors que la mesure de l'hypoténuse est fixe. Les élèves ne semblent toutefois pas avoir le réflexe de traduire le phénomène étudié de cette façon probablement parce qu'ils ne font pas le lien entre le phénomène physique et les mathématiques (la géométrie ici en l'occurrence).

Le segment v

Aux questions 1 et 2 de S3, les élèves tentent de s'approprier le phénomène étudié. Ils se demandent alors comment se comporte la distance du haut alors que la distance du bas augmente. La phrase « elles varient de la même distance » indique d'une part, que les élèves voient les deux grandeurs augmenter et, d'autre part, que les augmentations sont les mêmes. Ils comparent en fait les variations des deux grandeurs et établissent que les accroissements de la distance du haut et de la distance du bas sont égaux. Ce segment aurait donc pu être codé à l'aide de l'unité de raisonnement U4. Toutefois, l'extrait de conversation dans lequel il apparaît montre que les élèves ne se préoccupent alors pas encore des accroissements.

Il est à noter que cette idée de comparer la distance du haut avec la distance du bas est déjà apparue dans notre analyse des *moments* de retour à U1 et U2. Les élèves de quatrième secondaire avaient alors eu ce même réflexe alors qu'ils tentaient de donner un sens à l'expression « varier de la même façon » (voir section 4.3.5.4).

4.4.4 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3b

4.4.4.1 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3b(*f*) et U3b(*g*)

En général, pour les fonctions *f* et *g*, les trois groupes d'élèves utilisent plusieurs termes faisant référence à la notion de vitesse pour indiquer comment augmente la grandeur dépendante : vite, lent, rapidement, lentement, ralentir et vitesse (voir Tableau 34 et Tableau 35), alors que la vitesse n'est pas l'une des deux grandeurs étudiées. Toutefois, dans le cas de la fonction *g*, il pourrait s'avérer pertinent de décrire le comportement de la fonction en utilisant la vitesse, mais nous considérons qu'à ce stade, les élèves n'en sont pas conscients.

Nous pensons que ces qualificatifs sont issus d'une considération, consciente ou non, du temps comme grandeur indépendante et nous les qualifions, par conséquent, de *temporels*. Ils indiquent que les élèves conçoivent la variation de la grandeur dépendante au cours du temps même lorsque la grandeur indépendante n'est pas le temps (fonction *f*). Cette utilisation intuitive de la notion de vitesse semble être le moyen privilégié par les élèves pour décrire le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente Nous avions anticipé cette tendance dans l'analyse *a priori* (Annexe 6) tenant compte du fait que ce type de verbalisation est suggérée dans certains manuels scolaires.

Tableau 34 Segments codés U3b(*f*)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# segment
S1	1 et 2	SEC5	Le niveau il va monter **plus vite** là que là	1
		COL	le niveau d'eau quand la circonférence du pichet est plus petite, ben le niveau d'eau va augmenter **plus rapidement**	2
	3	SEC4	Mais ici (elle montre le haut du pichet) encore **plus rapidement** qu'au début (elle montre le bas du pichet), dans le sens qu'ici (elle montre le haut du pichet) ça augmente **plus rapidement** que là (elle montre le bas du pichet) mais…	3
			Et ensuite ça va être **plus lent**, pis on peut dire qu'un peu en haut, c'est petit mais c'est **plus rapide**, ben **plus rapide ici** et un **peu plus lent en haut là**, minime.	4
		SEC5	Et il gardera la même vitesse CHARLES : Ouais il gardera **la même vitesse** jusqu'au bord JUSTIN : **La même vitesse d'augmentation**	5
			qu'au début l'augmentation quand même sera assez **lente**…parce que le temps qu'il arrive jusqu'au plus gros ici	6
			le niveau monte **lentement** je dirais, ensuite **rapidement** puis il continue à être **rapidement**… **de plus en plus rapidement**	7
			C'est **lent**, puis ici c'est **plus rapide**, puis ici ben c'est encore **constant**	8
		COL	mais rendu ici ça va augmenter **plus rapidement**	9
	4	SEC5	Au début **il va augmenter assez lentement**, après ça **il va aller plus rapidement**	10
	6	COL	Ok non, parce qu'au début c'est petit donc ça augmente **rapidement**, après ça **ralenti**, puis là ça recommence **rapidement**	11
S3	1 et 2	SEC4	il va peut-être augmenter **plus vite**	12
		COL	au début c'est **lent**	13
			À la fin ça augmente **rapide**	14
	7	COL	Élise : j'ai écrit plus que la distance du bas augmente, le pas de 1,7 plus que la distance du haut augmente… Hein? Martin : hum…c'est vrai Élise : augmente **plus rapidement** Bruno : **exponentiellement**	15
	9	COL	ça se peut, au début **ça n'augmente pas vite**, c'est après que **ça augmente vite**… C'est pour ça que c'est **exponentiel**	16

Tableau 35 Segments codés U3b(*g*)

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# segment
S2A	1	SEC4	SIMON : C'est ça que j'ai dit aussi… inaudible… j'ai dit qu'à un certain moment, comme t'as dit, le niveau de l'eau va augmenter **plus rapidement** ÉMILIE : Ouais c'est ça, ok SIMON : Ou **plus lentement**	17
		SEC5	j'ai dit que quand c'était large ça augmentait **plus lentement** et quand c'était étroit ça augmentait **plus rapidement**	18
			au début c'est **de moins en moins rapide**, ensuite **de plus en plus rapide** et après c'est **constant**	19
			j'ai dit que c'était **de moins en moins rapide**, **de plus en plus rapide**, puis **constant**	20
S2B	1	SEC4	ÉMILIE : Le temps passe mais ça diminue un peu? Le temps passe pendant que le niveau de l'eau diminue? (15 :41) JULIE : Ben y augmente mais **moins rapidement** que rendu ici	21
S4A	1	SEC4	la distance du haut ne va pas augmenter ou diminuer **de façon constante**	22
			Que plus, plus, plus la distance était grande…euh plus il s'éloignait là, plus ça variait **lentement**	23
			La distance du haut va diminuer ou augmenter **plus rapidement** ou **plus lentement** à mesure que le temps va passer	24
			et plus qu'il s'approchait plus ça variait **plus vite**	25
	4	COL	mais au début la distance du haut va augmenter **lentement**… euh c'est **exponentiel**	26

Les qualificatifs temporels sont utilisés de différentes façons.

Premièrement, on les retrouve souvent dans des expressions qui montrent la comparaison de la vitesse pour différentes parties du pichet. Par exemple, les élèves disent qu' « il (le niveau) va monter **plus vite là que là** » (#1) en montrant deux parties du pichet ou que « rendu ici ça va augmenter **plus rapidement** » (#9). Dans ce cas, on peut voir que les élèves qualifient spontanément l'augmentation lorsque la vitesse à laquelle le niveau augmente change. Chaque groupe tente d'ailleurs à sa façon de généraliser le raisonnement. Dans le contexte du pichet (fonction *f*), les élèves du collégial font le lien entre la circonférence et la vitesse : « le niveau d'eau **quand la circonférence du pichet est plus petite**, ben le niveau d'eau va augmenter plus rapidement » (#2). Les élèves de cinquième secondaire établissent une relation semblable alors qu'ils étudient la fonction *g* : « j'ai dit que **quand c'était large** ça augmentait plus lentement et **quand c'était étroit** ça augmentait plus rapidement » (#18). Les élèves de quatrième secondaire quant à eux résument leur pensée sur l'augmentation de la distance du haut lorsque le temps augmente (contexte de l'échelle, fonction *g*) : « La distance du haut va diminuer ou augmenter **plus rapidement ou plus lentement à mesure que le temps va**

passer » (#24). Il semble donc important pour les élèves de déterminer UNE relation valable sur l'ensemble du domaine en généralisant la variation de l'augmentation globalement. Il faut noter toutefois que ces généralisations ne permettent pas le traçage de l'allure du graphique lequel nécessite des descriptions plus précises sur chaque phase s'il y en a plusieurs.

Deuxièmement, les qualificatifs temporels sont aussi utilisés pour statuer sur l'état de la vitesse à un endroit donné, par exemple, les élèves du collégial indiquent, dans le contexte de l'échelle, que « au début c'est lent » (#13) puis « à la fin ça augmente rapide » (#14). Dans ce cas, il n'y a pas d'indication sur ce qui permet de dire qu'une augmentation est rapide ou lente. Il est intéressant de voir que cette manière de qualifier l'augmentation dans l'absolu amène les élèves du collégial à associer un modèle mathématique connu aux fonctions f et g dans le contexte de l'échelle : « ça se peut, au début **ça n'augmente pas vite**, c'est après que **ça augmente vite**… C'est pour ça que c'est **exponentiel** » (#16) et « mais au début la distance du haut va augmenter **lentement**… euh c'est **exponentiel** » (#26). On comprend bien que pour ces élèves l'idée d'augmenter lentement puis rapidement est la caractéristique du modèle de variation exponentiel.

4.4.4.2 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3b(g')

Pour le repérage de l'unité de raisonnement U3b, il nous est apparu nécessaire de distinguer les sous-unités U3b(g) et U3b(g'). En effet, comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, les verbalisations liées à l'étude la fonction g s'appuient sur la notion intuitive de vitesse, or, la fonction g' concerne justement l'étude de la vitesse en fonction du temps. Ainsi, pour nous, lorsque les élèves indiquent que le niveau augmente lentement alors que la fonction étudiée est f ou g, c'est qu'ils qualifient l'augmentation du niveau et non l'augmentation ou la diminution de la vitesse. Le comportement de l'augmentation ou de la diminution de la vitesse correspond en fait à celui de l'augmentation ou de la diminution de l'augmentation du niveau. Par conséquent, la qualification de l'augmentation ou de la diminution de la vitesse correspond à la description du comportement de l'accélération (est-elle constante ou est-ce qu'elle augmente ou diminue?). Seuls trois segments ont été codés U3b(g') (voir Tableau 36).

Tableau 36 Segments codés U3b(g')

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S2B	1	SEC5	**l'accélération, elle va être constante**
S3	1 et 2	COL	ici dans **ta vitesse, ça va te donner une… Une droite croissante**, une droite, ça veut dire que ton graphique de position en fonction du temps c'est une parabole
S4B	1	COL	ben je pense que **ça n'augmentait pas de façon constante**

Le premier segment est apparu lors du travail sur S2B par les élèves de cinquième secondaire. L'extrait suivant montre le contexte de la discussion :

1	Mathieu : ici ça va être lent… C'est sûr que ça va accélérer parce qu'il en faut moins
2	Fabrice : ici ça va être plus rapide
3	Justin : ça va accélérer puis…
4	Fabrice : **ça va être de plus en plus lent, de plus en plus rapide, constant**
5	Mathieu : **l'accélération, elle va être constante**
6	Fabrice : **une accélération de 9,8**
7	*Rires*

Alors que la question porte sur le comportement de la vitesse au cours du temps (fonction *g*'), les élèves reprennent la verbalisation qu'ils avaient élaborée lors du travail sur le niveau en fonction du temps (fonction *g*) (ligne 4). Cette préoccupation pour la vitesse amène Mathieu à parler d'accélération et il ajoute spontanément que celle-ci va être constante (ligne 5). Fabrice associe alors le terme « accélération » au nombre 9,8. On comprend que les liens que font ces élèves sont issus de leurs connaissances en physique. Le seul contexte dans lequel ils ont eu affaire à l'accélération semble être celui de la chute des corps en physique d'où le fait d'associer au terme « accélération » le nombre 9,8, qui correspond à la constante gravitationnelle (en m/s^2), et de penser qu'une accélération est forcément constante.

Le second segment codé U3b(*g*') est apparu dans le cadre de S3 lors du travail sur la fonction *f* (la distance du haut en fonction de la distance du bas). Il apparait alors que, pour les élèves du collégial, le comportement de *g*' puisse servir de moyen pour prédire le comportement de *f*.

1	Élise : quand l'échelle s'approche du sol…
2	**Martin : au début c'est lent**
3	**Bruno : c'est la vitesse, ça c'est quand on a du temps, ici c'est l'un par rapport à l'autre**
4	**Martin : ici dans ta vitesse, ça va te donner une… Une droite croissante, une droite, ça veut dire**
5	**que ton graphique de position en fonction du temps c'est une parabole**
6	Bruno : si ça donne une droite…
7	Martin : ouais
8	Bruno : non… Donc
9	Martin : si dans ta vitesse, c'est une droite…
10	Élise : mais on peut dire aussi que, que la vitesse…
11	**Bruno : la tangente est une droite**
12	**Martin : je dis, si dans ton graphique de vitesse en fonction du temps, c'est une droite, dans ton**
13	**graphique de vit… De position en fonction du temps, c'est quoi?… Une courbe?**
14	**(06:04) Bruno : ouais, mais c'est pas une parabole**
15	**Martin : une courbe**
16	**Bruno : ouais**
17	**Martin : donc puisque c'est une courbe, ça veut dire que les distances sont pas les mêmes**

Dès le départ, Martin parle de la vitesse du haut de l'échelle. Bruno lui fait remarquer qu'on peut parler de vitesse uniquement lorsque qu'on a une fonction du temps, dans le cas présent on étudie la distance du haut en fonction de la distance du bas (lignes 2 et 3). Martin continue quand même, pour lui, la vitesse augmente de façon constante puisqu'il anticipe sa représentation graphique comme étant une droite croissante. Il fait alors le lien entre la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps et celle de la position en fonction du temps : Si le graphique de la dérivée est une droite alors le graphique de la fonction doit être une parabole (lignes 4 et 5). Bruno, quant à lui, voit bien que la tangente à la courbe peut être une droite, mais il ne semble pas saisir le lien que fait Martin car, pour lui, la courbe de la distance en fonction du temps n'est pas une parabole. Martin acquiesce que c'est une courbe et ajoute que, dans ce cas, les accroissements de la distance du haut ne sont pas égaux (lignes 11 à 17). Le raisonnement tenu par les élèves dans cet extrait suit la logique suivante :

Si la vitesse augmente de façon constante alors :

→ la représentation graphique de la vitesse en fonction du temps est une droite croissante

→ la représentation de la fonction primitive (distance en fonction du temps) est une parabole

→ la fonction primitive (distance en fonction du temps) n'est pas une fonction à variation constante

Ainsi, c'est à partir du comportement de la vitesse en fonction du temps, dont les élèves ont une forte intuition, qu'ils arrivent à déduire le comportement de la distance du haut en fonction du temps. Cette démarche nous apparait intéressante car les élèves utilisent le travail sur les accroissements pour anticiper l'allure du graphique de la fonction dérivée, laquelle leur donne une idée de l'allure du graphique de la fonction.

Le troisième segment est aussi apparu chez les élèves du collégial lors du travail sur S4. Ils ne déterminent alors pas exactement comment la vitesse augmente ou diminue mais ils ont des échanges intéressants à ce sujet comme on peut le voir dans cet extrait :

(08:55) Élise : on s'intéresse à la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle… Au temps qui passe… Décrivez comment se comporte la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle
Martin : même chose
Chloé : c'est pas la même chose
Élise : la même vitesse
Martin : non non, ce n'est pas constant…
Chloé : ce n'est pas constant
Élise : ça devient de plus en plus vite la vitesse non?
Chloé : ouais
Martin : donc c'est soit une droite, soit exponentiel aussi, ben soit une parabole
Chloé : je ne pense pas que c'est une droite
Élise : ben oui, si sa c'est comme ça…
Martin : en physique, si c'était comme ça, l'autre ce serait une droite
Élise : ben c'est parce que la dérivée de ça, ça va donner la distance qu'on a faite avant genre
Bavardages
Élise écrit.
(10:00) Chloé : tu écris juste ça?
Élise : ben, que la vitesse augmente
Martin : tu veux faire le graphique aussi?
Élise : non non, mais la vitesse augmente… Vous voulez dire quelque chose d'autre?
Chloé : je ne sais pas, mais ça a l'air vide
Élise : ben, ça augmente
Chloé : ben, je sais pas, OK… Mais ça n'augmente pas de façon constante
Martin : ce n'est pas ce qu'elle a écrit?
Chloé : ben je pense que ça n'augmentait pas de façon constante… Mais lui, il a dit que c'était une droite
Élise : non, je ne pense pas
Martin : ça peut être une des deux, mais on n'a pas assez d'informations pour le trouver

Dans un premier temps, aux lignes 5 à 14, ils les établissent que la vitesse augmente. Martin indique alors que trois allures de courbes sont possibles : « donc c'est soit une droite, soit exponentiel aussi, ben soit une parabole ». Intuitivement, Chloé pense que ce n'est pas une droite. Martin doute cependant car il se rappelle qu'en physique, il a déjà vu une fonction dont l'allure était semblable à celle de la fonction g et la fonction dérivée était alors une droite. L'association entre une fonction représentée par une courbe et sa fonction dérivée représentée par une droite est intéressante. On comprend que l'expérience des élèves les amenés à faire cette association. Cette connaissance fonctionne effectivement lorsque la fonction est quadratique. Le domaine de validité de cette connaissance n'est donc pas connu des élèves. Dans le contexte de l'échelle, comme ils n'ont pas été en mesure de déterminer exactement le modèle de variation de la fonction g, il leur est difficile de conclure sur l'allure de g'. C'est d'ailleurs le sujet de la discussion aux lignes 17 à 28. Ils en arrivent à la conclusion que l'allure de la fonction g' pourrait aussi bien être une droite qu'une courbe et qu'ils ne disposent pas d'assez d'informations pour le déterminer.

Nous dégageons de l'analyse de ces segments, une constatation importante. **Les élèves de cinquième secondaire et du collégial utilisent leurs connaissances en physique pour essayer de donner un sens à la vitesse, à l'augmentation de la vitesse et au lien entre une fonction et sa dérivée.** Il semble alors que leur expérience limitée dans cet autre domaine les amène à penser que la dérivée d'une courbe est toujours une droite et que seuls trois modèles graphiques sont possibles pour décrire les phénomènes physiques : les droites, les paraboles et les courbes exponentielles.

4.4.4.3 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U3b(*f*)-

Certains segments de conversation nous sont apparus intéressants et significatifs pour comprendre la sous-unité de raisonnement U3b même s'ils ne témoignaient pas d'une mobilisation claire de cette sous-unité. Nous les avons considérés comme des amorces ou des tentatives de qualification de l'augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante.

La plupart des segments codés U3b(*f*)- sont apparus chez les groupes de cinquième secondaire et du collégial (voir Tableau 37). On retrouve alors des références à des modèles de variation connus.

Premièrement, les élèves du collégial se questionnent à savoir si le niveau d'eau dans le pichet augmente proportionnellement ou pas. Ils indiquent que c'est « proportionnel **mais pas directement** proportionnel » (#2) et, plus tard, ils réalisent que ça augmente mais pas proportionnellement car sinon on obtiendrait une droite (#5). Les élèves de cinquième secondaire associent, quant à eux, le fait que « plus que tu augmentes la distance du bas, plus que la distance du haut va augmenter » (#9) à une variation « un petit peu proportionnel ». Nous pensons que pour ces deux groupes d'élèves l'utilisation du terme « proportionnel » signifie « ça bouge ensemble ». En fait, un sens commun de la proportionnalité est celui des variations concomitantes de deux grandeurs. Pour nous, ce sont les connaissances mathématiques de ces élèves qui, en entrant en conflit avec le sens commun, les amène à dire c'est « proportionnel mais pas directement proportionnel » ou c'est « un petit peu proportionnel **».**

Deuxièmement, les élèves de cinquième secondaire font référence à la fonction racine carrée comme modèle correspondant à « la distance du haut va être plus petite et à la fin elle va devenir plus grande ». Ils expriment néanmoins leurs doutes en indiquant que ce pourrait être une fonction racine mais pas racine carrée puis suggèrent un autre modèle transformé : « proportionnelle avec une fin ». Nous trouvons ce « cafouillage » significatif dans le sens qu'il montre bien la complexité de la phase de recherche d'un modèle mathématique approprié. Les élèves tentent d'adapter les modèles connus dans des situations réelles. Ils ne poursuivent toutefois pas ce processus de modélisation probablement parce que ce n'est pas indispensable, en cohérence les objectifs du questionnement, pour répondre aux questions posées.

Tableau 37 Segments codés U3b(*f*)-

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# segment
S1	1 et 2	SEC4	La question il te demande pas là; décrivez comment réagit le niveau de l'eau à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet; Ben **il augmente en même temps-là, il augmente juste pas au fur et à mesure que le volume augmente**	1
		COL	ben **c'est proportionnel mais pas directement proportionnel**	2
			j'ai écrit qu'**il augmente proportionnellement**	3
	6	COL	Parce que **plus le volume augmente, plus le niveau d'eau va moyennement augmenter**	4
			S'ils sont pas proportionnels l'un à l'autre, ça ne va pas faire une droite	5
			Mais ça va **être quelque chose qui augmente, mais juste pas une droite**	6
			c'est parce que **ça augmente pas proportionnellement**	7
S3	6	SEC5	Fabrice : au début la **distance du haut va être plus petite et à la fin elle va devenir plus grande** Charles : donc **ça ressemble à une racine… pas une racine carrée mais**… Justin : **proportionnelle avec une fin**	8
			Fabrice : plus que tu augmentes la distance du bas, plus que la distance du haut va augmenter Justin : **ça va être un petit peu proportionnel**	9
	7	COL	Élise : OK on doit décrire le comportement maintenant… On doit décrire comment… Plus la distance du bas augmente, plus que le… Bruno : **ça varie exponentiellement**	10

4.4.4.4 Les codes particuliers de U3b

Comme pour U3a, nous avons codés certains segments à l'aide de codes particuliers montrant des déclinaisons de la sous-unité U3b (voir Tableau 38). Un segment concerne la qualification de l'augmentation du volume alors que le niveau augmente (U3b(f)$^{-1}$). Les élèves du collégial abordent cette fonction en étant conscients que ce n'est pas exactement celle étudiée (ils indiquent « **si** c'est le volume en fonction du niveau (…) »). Il est intéressant de voir toutefois que, pour eux, la réciproque de la fonction étudiée peut être une fonction constante alors que celle étudiée ne le peut pas.

Tableau 38 Segments codés U3b(f)*, U3b(f)$^{-1}$ et U3b'

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# segment
			U3b(f)$^{-1}$	
S1	6	COL	Si c'est le volume en fonction du niveau, ça va être une droite constante	
			U3b(f)*	
S1	1 et 2	SEC4	j'ai écrit que ça dépendait, tsé le niveau du pichet, **dépendamment de la forme où est ce que l'eau est rendue, comme ici au début, le niveau va augmenter plus lentement, mais ici rendu dans la bulle c'est le volume qui va augmenter plus rapidement que le niveau**	1
			fait que rendu ici c'est clair que **l'eau va augmenter plus rapidement, le niveau va augmenter plus rapidement que le volume, mais pas ici**	2
			au départ c'est sûr que **le niveau de l'eau augmente plus rapidement que le volume, mais par la suite**	3
	8	SEC4	Mais si ok admettons on met dans le pichet l'eau petit par petit peu… le volume… **là c'est le volume qui augmente plus rapidement que le niveau de l'eau**	4
			U3b'	
S1	1 et 2	SEC4	Plus le **diamètre** est grand moins ça augmente rapidement	i
			Mais à certains moments, **quand le contour est plus gros ou plus petit**, ça augmente plus vite ou moins vite	ii
		COL	**plus la largeur est petite**, plus ça va augmenter rapidement	iii
	3	SEC4	**plus ça va prendre d'espace** moins le niveau de l'eau augmente rapidement	iv
		COL	c'est **proportionnel au rayon et à la hauteur**	v
	6	COL	le **volume** d'eau augmente **proportionnellement**	vi
S2B	1	SEC4	selon le temps qui passe quand **le diamètre** change ça va plus ou moins vite, puis on peut préciser **quand le diamètre est plus grand ça va moins vite**	vii

Dans les segments codés U3b(f)*, les élèves de quatrième secondaire qualifient l'augmentation du niveau alors que le volume augmente mais d'une manière particulière. En effet, ils comparent l'augmentation des deux grandeurs et déterminent que, selon l'endroit où l’eau est rendue dans le pichet, soit le niveau augmente plus rapidement que le volume, soit que c’est le volume qui augmente plus rapidement que le niveau. Cette comparaison tout en étant inattendue peut être due à l’interprétation suivante de la question : « le niveau varie-t-il toujours de la même façon **que** le volume? ». Comme on peut le voir dans le Tableau 38, cinq segments sur ce sujet ont été repérés à différents moments du travail sur S1, nous avons donc tenté de mieux saisir la logique sous-jacente.

Afin de bien saisir de quels endroits du pichet parlent les élèves, il faut tenir compte de leurs gestes. Lorsque Julie dit « le niveau du pichet, dépendamment de la forme où est ce que l'eau est rendue, **comme ici au début**, le niveau va augmenter plus rapidement » (#1), elle montre le bas du pichet. Pour elle, le « début » du pichet correspond à sa base comme elle le montre sur sa feuille de travail individuel (Figure 27). Puis, quand elle dit « mais **ici rendu dans la bulle** c'est le volume qui va augmenter plus rapidement que le niveau » (#1), elle fait référence à la seconde partie du pichet soit le ballon au complet. Sur le schéma, apparait aussi une troisième partie au début du goulot où elle détermine que le niveau augmente plus rapidement que le volume.

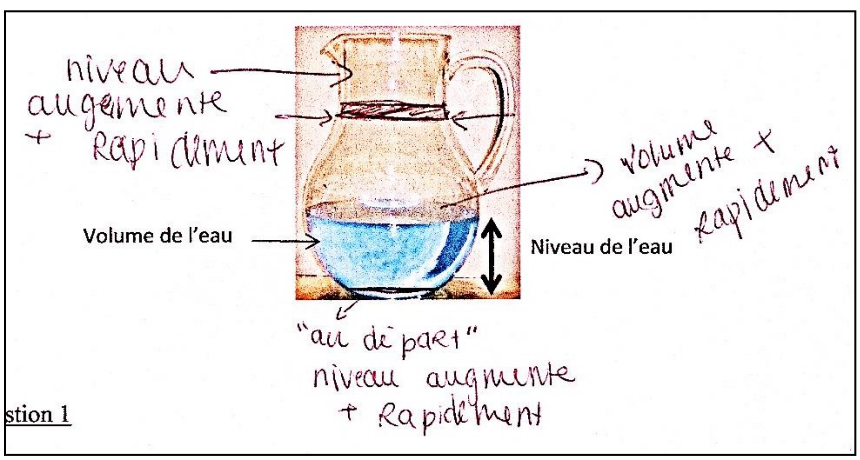


Figure 27 Les différentes parties du pichet sur la production écrite individuelle de Julie (Sec4)

Ainsi, lorsque le pichet est étroit, le niveau augmente plus rapidement que le volume alors que lorsqu’il est large c’est le contraire. Lorsqu’un certain volume est ajouté dans le pichet, la largeur du pichet influence l’augmentation du niveau : l’eau s’étale plus dans une partie qui est large.

Le fait que le volume et le niveau augmentent et qu'on puisse comparer leurs augmentations en utilisant la notion de vitesse (lentement et rapidement) nous porte à penser que les élèves considèrent implicitement deux fonctions du temps pour lesquelles le niveau et le volume sont les grandeurs dépendantes : le niveau en fonction du temps et le volume en fonction du temps. Toutefois, pour pouvoir comparer les variations de ces deux fonctions il faut, premièrement, fixer la variation de l'une (c'est le même problème qu'avec l'étude des accroissements concomitants). La familiarité du contexte de remplissage à l'aide d'un robinet mène naturellement à l'augmentation constante du volume. Deuxièmement, il faut trouver un moyen de comparer une augmentation de volume à une augmentation de niveau. Ce pourrait être une situation de référence dans laquelle on établit que les deux grandeurs augmentent à la même vitesse, par exemple, un pichet cylindrique dont la base est un peu plus large que celle du pichet qu'on étudie mais moins large que la partie la plus large de ce même pichet (voir Figure 28).

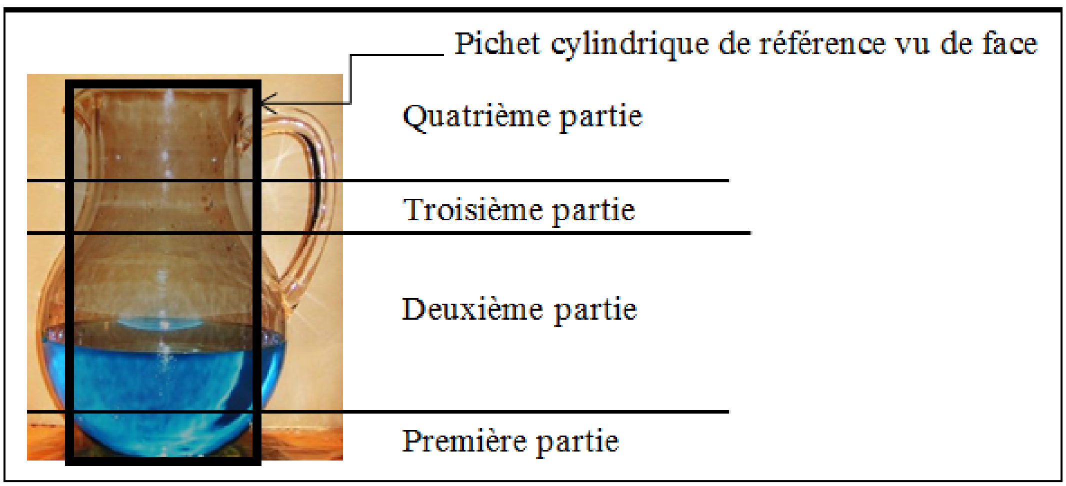


Figure 28 Les parties du pichet selon l'analyse des élèves de quatrième secondaire et vue de face du pichet cylindrique possiblement pris pour référence

Il est aussi possible, mais peu probable selon nous, que les élèves envisagent déjà les accroissements concomitants du volume et du niveau et qu'ils considèrent les accroissements constants du volume. En prenant un pichet cylindrique de référence pour lequel on considère que les accroissements des deux grandeurs sont « équivalents », on arrive alors au même résultat : dans les parties où le pichet est moins large que celui de référence, les accroissements du niveau sont plus grands que ceux du volume, et dans les parties où le pichet est plus large que celui de référence, les accroissements du volume sont plus grands que ceux du niveau. Il faut dans ce cas être en mesure de faire le lien entre la vitesse et les accroissements pour en arriver à une verbalisation du type « le niveau augmente plus rapidement que le volume », et alors le temps serait forcément à considérer.

Finalement, il nous est impossible de savoir exactement à quoi pensaient les élèves lorsqu'ils ont comparé les variations des deux grandeurs. Toutefois, nous avons trouvé une manière de donner un sens à cette démarche qui nous a menée à lever le voile sur un élément important influençant la mobilisation de la sous-unité U3a lors de l'étude du phénomène du pichet : il est possible que les élèves s'appuient sur une situation de référence dans laquelle le niveau augmente de façon constante et sur le temps comme grandeur implicite.

Les segments codés U3b' concernent la mobilisation de U3b, mais sur des fonctions autres que celles étudiées. Trois cas de figure apparaissent.

Premièrement, dans les segments i, ii, iii et vii les élèves parlent de la relation entre le contour, la largeur ou le diamètre du pichet et le niveau de l'eau. Nous avions noté cette tendance à rechercher une grandeur intermédiaire ou de rechange au volume à la section 4.3.5.3. Les élèves du collégial établissent, par exemple, que « **plus la largeur est petite**, plus ça va augmenter rapidement » et ceux de quatrième secondaire indiquent que « selon le temps qui passe quand **le diamètre** change ça va plus ou moins vite, puis on peut préciser quand le diamètre est plus grand ça va moins vite ». La qualification de l'augmentation du niveau en fonction de l'augmentation ou de la diminution du diamètre confirme que les élèves donnent une importance forte à cette grandeur indépendante de rechange qui leur donne la possibilité de contrôle sur le phénomène. Deuxièmement, dans le segment iv, les élèves de quatrième secondaire expliquent pourquoi le niveau augmente moins rapidement lorsque le pichet est plus large : « plus ça va prendre d'espace moins le niveau de l'eau augmente rapidement ». Troisièmement, les élèves du collégial parlent une fois de plus de proportionnalité. Au segment v, ils font référence au sens commun puisque le terme proportionnel est utilisé pour indiquer qu'il y a un lien de dépendance entre plusieurs grandeurs : « c'est (le niveau) proportionnel au rayon et à la hauteur ». Cependant, au segment vi, ils font référence au sens mathématique établissant une augmentation constante du volume probablement selon le nombre de verres versés : « le volume d'eau augmente proportionnellement ».

4.4.5 L’articulation des sous-unités U3a(*g’*) et U3b(*g*)

Les liens étroits entre les fonctions *g* et *g’* sont pris en compte, selon nous, dans le raisonnement des élèves. Les similitudes entre les verbalisations de U3a(*g’*) et U3b(*g*) nous amènent à regarder de plus près l’articulation de ces deux sous-unités.

Lors du passage de la fonction *g* à la fonction *g*’, il est attendu des élèves qu’ils fassent le lien entre le comportement de l’augmentation de la fonction *g* et le comportement de la fonction *g*’. Nous avons repéré un extrait de conversation illustrant l’articulation entre U3a(*g*’) et U3b(*g*). Cet extrait, présenté ci-dessous, provient de la transcription des échanges entre les élèves du groupe de quatrième secondaire lors du travail sur la S2B (question 1).

<table>
<tr><th>Texte (segments codés en gras)</th><th>Code</th><th>Idée exprimée</th><th>Transition</th></tr>
<tr><td>(14 :55) Simon : la partie B…ok là on parle de la vitesse
KARINE : Elle est lente puis après elle augmente
JULIE : Quoi?
(15 :15) KARINE : Elle est lente puis après elle augmente
SIMON : ben en fait lente rapide, lent rapide
JULIE : Non je pense pas
SIMON : Le temps passe, ici une seconde, c'est plus rapide, ça devient plus lent, plus lent, plus lent, une seconde, plus rapide, plus rapide, plus rapide</td><td>U3a(g’)</td><td>Au cours du temps, la vitesse est lente puis elle augmente.</td><td>La vitesse est lente puisque le niveau augmente lentement.</td></tr>
<tr><td>ÉMILIE : Le temps passe mais ça diminue un peu? Le temps passe pendant que le niveau de l'eau diminue?
(15 :41) JULIE : Ben y augmente mais moins rapidement que rendu ici</td><td>U3b(g)</td><td>Au cours du temps le niveau augmente moins rapidement à certains endroits du pichet.</td><td rowspan="2">Comme le niveau augmente parfois rapidement et parfois lentement, on ne peut pas dire que la vitesse augmente toujours.</td></tr>
<tr><td>SIMON : Le temps augmente tout le temps, je parlais de la vitesse, mais en fait la vitesse faut pas dire qu'elle augmente, faut dire qu'elle varie parce que….
JULIE : Ouais</td><td>U3a(g’)</td><td>On parle de la vitesse. Au cours du temps cette vitesse varie mais n’augmente pas toujours.</td></tr>
</table>

La transition de *g* à *g*’ s’effectue apparemment à l’aide d’un raisonnement déductif à double sens :

le niveau augmente lentement ↔ la vitesse du niveau est lente
le niveau augmente rapidement ↔ la vitesse du niveau est rapide

Les élèves semblent en effet passer de l'une à l'autre de ces propositions autant dans un sens que dans l'autre. La tâche suggérée a donc permis aux élèves de quatrième secondaire, comme nous l'avions anticipé, de coordonner le comportement de l'augmentation de la fonction *g* et celui de la fonction *g*'. Nous développons davantage cette idée à la section suivante.

4.4.6 Description de l'unité U4 *(décrire le comportement de la fonction dérivée)*

Initialement, l'unité de raisonnement U4 avait été associée à l'action de « Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante » (voir Tableau 39)

Tableau 39 Description de l'unité de raisonnement U4 dans les grilles initiale et finale

Unité	**Description de la grille initiale**	**Description de la grille finale**
U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Décrire le comportement de la fonction dérivée
		a) Considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante
		b) Considérer des accroissements de la grandeur dépendante
		c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs
		d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants
		e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente

Il y a donc un saut important entre U3 et U4. En effet, l'unité U3 est plus facilement accessible puisqu'elle correspond à une description globale d'un phénomène dynamique qu'il est possible de simuler concrètement ou mentalement, alors que U4 implique une étude fine et locale des accroissements concomitants de deux grandeurs mises en relation dans le phénomène. Cette étude repose non seulement sur la notion d'accroissement, mais aussi sur l'observation de la relation de récurrence qu'entretiennent les accroissements successifs de la grandeur dépendante lorsque ceux de la grandeur indépendante sont fixes. Ainsi, différentes composantes de l'unité U4 ont émergé lors du codage des transcriptions.

D'abord, nous avons établi deux sous-unités (U4a et U4b) portant sur la considération des accroissements de chaque grandeur, puis une sous-unité (U4c) correspondant à l'action de lier ces accroissements et, donc, de considérer la concomitance des accroissements des deux grandeurs. Il est effectivement apparu qu'avant de mettre en lien les accroissements concomitants de deux grandeurs, il faut être en mesure de percevoir les accroissements de chacune de ces grandeurs.

Ensuite, nous avons défini une sous-unité spécifique (U4d) pour la description du changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante, lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants, ce qui correspondait en fait à l'unité U4 de la grille initiale.

Finalement, la généralisation de la relation entretenue par les accroissements de la grandeur dépendante mène à décrire le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U4e). Rappelons que nous utilisons volontairement le terme « augmentation » pour parler *l'augmentation globale et continue* en contraste avec le terme « accroissement » qui concerne *l'accroissement local et discret*. La mobilisation de cette dernière sous-unité, qui implique un retour à une vision globale de la fonction dérivée de celle étudiée, est le but de la démarche. C'est pourquoi nous avons défini l'unité U4 englobant toutes ces sous-unités comme l'activité de « décrire le comportement de la fonction dérivée ».

Symboliquement, l'idée de U4 est de décrire le comportement de la fonction f' à partir de données (numérique ou non) disponibles sur f. La démarche d'étude covariationnelle suggère de passer par l'étude des accroissements concomitants des deux grandeurs. La notion d'accroissement peut être associée au symbole Δ qui correspond habituellement à une différence. Si par exemple on étudie la fonction $y = f(x)$, la sous-unité U4a correspond au fait de considérer les Δx constants, la sous-unité U4b correspond au fait de considérer l'existence des Δy et la sous-unité U4c consiste à établir qu'à chaque Δx il correspond un Δy (voir Figure 29).

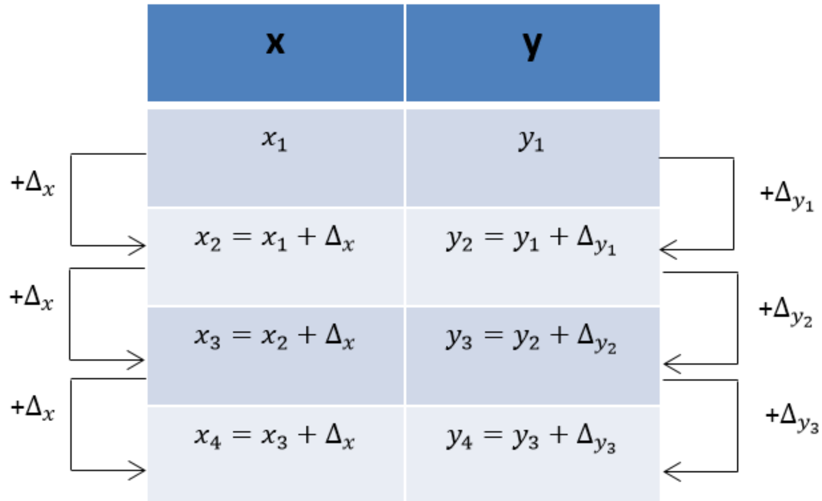


Figure 29 Symbolisme mathématique correspond à l'unité de raisonnement U4

La sous-unité U4d focalise sur les Δy_n successifs alors que Δx est constante. Il s'agit alors de décrire le comportement de Δy en indiquant de façon globale si les Δy_n sont de plus en plus grands, de plus en plus petits, constants ou autrement. La perspective adoptée est qualitative.

La sous-unité U4e implique une généralisation du comportement de Δy sur certains intervalles du domaine. Si par exemple, les Δy_n sont toujours de plus en plus grands sur $\left[x_m;\ x_p\right]$ alors on peut dire que $f'(x)$ est croissante sur cet intervalle. Cette généralisation est en partie intuitive puisqu'on ne pourrait rigoureusement généraliser que dans la mesure où on étudierait le comportement des Δy_n pour un Δx si petit qu'on pourrait le considérer nul. L'idée est alors de faire tendre Δx vers 0 ($\Delta x \to 0$) et donc d'opérer un passage à la limite. Alors que l'approche de U4d est discrète (on regarde les Δx et Δy et, comme $\Delta x = constante$, le comportement de Δy est le même que celui de $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$), celle de U4e est continue (on généralise le comportement de $\frac{\Delta_y}{\Delta_x}$ pour $\Delta x = constante$ à celui de $\frac{d_y}{d_x}$).

L'unité U4 est le cœur du raisonnement covariationnel. Pour nous, les élèves déploient un raisonnement covariationnel lorsqu'à un moment ou à un autre ils mobilisent U4. Ainsi, pour solliciter la mobilisation de U4, nous avons posé des questions directement sur les accroissements. Les élèves ont donc été amenés à regarder les accroissements concomitants des deux grandeurs observées pour chaque fonction étudiée. Dans notre analyse nous nous intéressons à voir comment les élèves ont réussi à intégrer U4 à l'ensemble de leur raisonnement.

4.4.7 Résultats globaux du repérage de l'unité U4

Le Tableau 40 présente une synthèse de l'apparition des sous-unités associées à U4. En général, les sous-unités U4a (considérer les accroissements de la grandeur indépendante) et U4b (considérer les accroissements de la grandeur dépendante) n'apparaissent pas systématiquement en réponse à un certain questionnement. Dès S1, les élèves semblent davantage mettre en lien les accroissements concomitants (U4c) qu'aborder les accroissements d'une seule des deux grandeurs à la fois. Par exemple, à la troisième question de S1, portant sur le comportement des accroissements, les élèves des trois groupes mobilisent U4c, les élèves de cinquième secondaire mobilisent de plus U4d et les élèves du collégial mobilisent de plus U4d et U4e. Force est de constater que le questionnement direct sur le comportement des accroissements (sont-ils de plus en plus grands, de plus en plus petits, constants ou autrement?) a effectivement mené les élèves à considérer les accroissements concomitants. La mobilisation de U4c, U4d ou U4e est toutefois variable selon les groupes. L'évolution des élèves ne se fait pas systématiquement de U4c vers U4e puisqu'il y a régulièrement des retours en arrière. Néanmoins, il semble que l'ensemble des groupes ait davantage mobilisé U4e en S3 qu'en S1. La mobilisation de U4e semble apparaître de plus en plus souvent lorsqu'ils avancent dans le travail de S1 à S4.

Tableau 40 Apparition des sous-unités de raisonnement associées à U4 par groupe, par situation et par question

		U4a (accroissements constants de la grandeur indépendante)			U4b (accroissements de la grandeur dépendante)			U4c (concomitance entre des accroissements)			U4d (décrire le changement des accroissements successifs)			U4e (décrire le comportement global de l'augmentation)		
	Question \ Groupe	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col	Sec 4	Sec 5	Col
S1	1 et 2								X	X						
	3	X		X			X	X	X	X		X	X			
	4		X						X							
	5															
	6							X	X			X	X			
	7															
	8											X				
	9															
	10															
S2 A	1								X	X						
	2		X						X	X	X	X				
	3															
	4							X	X						X	
S2 B	1	X														
	2															
	3														X	
	4														X	
	5															
S3	1 et 2	X		X	X		X	X		X				X		
	3						X	X		X	X	X		X	X	X
	4		X													
	5													X		
	6		X							X				X		
	7															
	8											X				
	9														X	
	10														X	X
S4 A	1															X
	2	X							X		X	X	X			
	3															
	4		X											X		
S4 B	1				X			X								
	2															

4.4.8 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4

Afin de faciliter le repérage des sous-unités de raisonnement, et donc le codage des segments au sein des transcriptions écrites des conversations entre les élèves, nous avons intégré à la grille d'analyse des verbalisations types ainsi que les éléments clés caractérisant chaque sous-unité de raisonnement associée à U4 (voir Tableau 41). On peut ainsi voir, par exemple, qu'une verbalisation de U4a met l'accent sur l'ajout ou l'accroissement constant de la grandeur indépendante ce qui dans le contexte du pichet peut ressembler à « Chaque fois qu'on ajoute un verre, le volume augmente de la même quantité. ». Ces balises nous ont donc permis d'identifier plusieurs segments pour chaque sous-unité de raisonnement que nous présentons dans les sections suivantes.

Tableau 41 Verbalisations types et éléments clés pour le repérage de U4

Description des unités et sous-unités de raisonnement		**Verbalisation(s) type(s)**	**Éléments clés**
U4 Décrire le comportement de la fonction dérivée			
	a) Considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante	Chaque fois qu'on **ajoute** un verre, le volume **augmente de la même quantité**.	ajout, accroissement de la grandeur indépendante
	b) Considérer des accroissements de la grandeur dépendante	Pour chaque verre ajouté, **le niveau augmente d'une certaine longueur**.	ajout, accroissement de la grandeur dépendante
	c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs	Chaque **accroissement** du volume **entraîne** un **accroissement** du niveau. Pour chaque verre ajouté, le volume augmente d'une certaine quantité et le niveau augmente d'une certaine longueur.	concomitance des accroissements des deux grandeurs
	d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants	Lorsque les accroissements du volume sont constants, les **accroissements** du niveau sont **de plus en plus petits**.	description du comportement des accroissements de la grandeur dépendante sur au moins un intervalle du domaine
	e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	Dans la première partie du pichet, lorsque **le volume augmente, le niveau augmente de moins en moins**. **Plus la distance du bas augmente plus l'augmentation de la distance du haut augmente**.	description du comportement de la fonction dérivée sur au moins un intervalle du domaine

Pour certaines sous-unités de raisonnement associées à U4 (U4a, U4c(*f*) et U4e), la quantité et la variété des segments nous ont forcée à établir diverses classifications. Chacune d'entre elles a émergé de l'observation, l'interprétation et la comparaison des segments. Des classifications différentes ont été dégagées pour chaque sous-unité. Nous avons de plus, à plusieurs reprises, distingué temporairement l'analyse du vocabulaire utilisé de l'interprétation des idées communiquées par les élèves. Ces deux dimensions, en mettant chacune en relief des éléments différents mais complémentaires, permettent une analyse approfondie du raisonnement covariationnel déployé par les élèves.

4.4.8.1 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4a

Tous les segments codés U4a sont répertoriés dans le Tableau 42. Ils sont classés selon la fonction concernée (voir Tableau 13 à la section 4.1.2 pour le rappel des fonctions et des grandeurs observées dans chaque situation).

Tableau 42 Segments codés U4a(*f*), U4a(*g*) et U4a(*g*')

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)	# segment
U4a(*f*)				
S1	3	SEC4	Ben c'est ça, mais ils disent à mesure, fait que ça veut dire **étape par étape** dans le fond mais…	1
			mais moi je le ferais en **étapes**	2
			c'est pas avec le volume d'eau total, c'est juste vraiment par **petites couches** si on veut	3
		COL	Si le rayon ici augmente, la hauteur va diminuer pour que **le volume ici soit constant**, puis si le rayon diminue ici la hauteur va augmenter et le **volume sera constant**	4
			Oui, oui je sais **tu rajoutes toujours du B, tu rajoutes toujours du A**	5
			On **rajoute la même quantité d'eau à chaque fois**.	6
			On écrit que **le volume d'eau est supposé rester constant**, mais le fait que le rayon devient plus grand, la hauteur devrait être plus petite pour compenser	7
			Ça va toujours être **le même volume que tu rajoutes**	8
			On est rendu ici, là **je rajoute le même volume**	9
	4	SEC5	Non mais **le volume est toujours pareil** vu que c'est…	10
S3	1 et 2	SEC4	L'affaire c'est que si admettons **tu tasses de ça**, on fait une marque… Mais si admettons on est à ce point-là et **qu'on recule encore de un**…	11
		COL	OK… **prend la même distance en bas**	12
		COL	Moi j'ai dit que oui, **pour chaque centimètre que la distance du bas augmente**	13
	4	SEC5	**les pas de Sarah sont de la même longueur** mais ils sont plus petits que ceux de Michel, **par exemple il fait des pas de un mètre, ben elle, elle va faire des pas juste de 50 cm exemple**	14
	6	SEC5	Mathieu : exemple il y a des **écarts** (il trace des traits à égale distance sur l'axe des abscisses) Fabrice : il faut vraiment des écarts? Mathieu : il faut **qu'ils soient tous égal**	15
U4a(*g*)				
S2A	2	SEC5	pour **des intervalles de temps constants** c'est genre **à chaque cinq secondes** exemple	16
			Par **intervalles** chaque fois **qu'on ajoute la même quantité** genre	17
			si c'est **un intervalle constant**, ouais je comprends ce que tu veux dire… Si c'est un intervalle constant c'est le même volume que tu vas rajouter à chaque fois, parce que si, exemple tu pars **à chaque cinq secondes**	18
S4A	2	SEC4	pour **des accroissements de temps constants**… Je ne sais pas comment dire parce que dans le fond… Plus le nombre d'intervalles est grand dans le fond…	19
	4	SEC5	il faut que ce soient **des intervalles de temps constants**	20
U4a(*g*')				
S2B	1	SEC4	quand tu fais un graphique par exemple faut que **tu gradues tout le temps la même affaire** puis… mais **le temps c'est une seconde, une seconde, ça va toujours être une seconde**	21

Lorsque les élèves s'expriment sur les accroissements de la grandeur indépendante, différents types de verbalisations apparaissent. Nous les avons regroupées sous 6 catégories numérotées de A à E (voir Tableau 43), un même segment pouvant être associé à plusieurs catégories.

Tableau 43 Catégories de verbalisations pour U4a

	Catégorie faisant référence à :	**Verbalisations utilisées**		**Segments concernés**
		Contexte du pichet	**Contexte de l'échelle**	
Registre de la situation	A. Une simulation mentale	le même volume, le volume est toujours pareil, le volume est constant	la même distance, intervalles de temps constants (donné dans l'énoncé)	#4, #7, #12, #13, #18, #20
	B. Une perception séquentielle	étape par étape, petites couches	accroissements de temps constants	#1, #2, #3, #19
	C. Une manipulation	on rajoute toujours le même volume	on tasse, on recule l'échelle	#5, #6, #8, #9, #11, #17
	D. Un exemple numérique		• pour chaque cm que la distance du bas augmente • si Michel fait des pas de 1 mètre, Sarah fait des pas de 50 cm	#13, #14, #16, #18, #21
Registre graphique	E. Un graphique	graduations égales (une seconde)	écarts égaux (distance du bas)	#15, #21

Dans la catégorie A, nous regroupons les verbalisations dans lesquelles les élèves utilisent les mots « volume » et « distance » pour parler de l'accroissement de volume ou de distance. Tenant compte de la logique de leur raisonnement, il apparait effectivement impossible que les élèves considèrent un volume constant. Ils ont en effet décrit globalement les phénomènes à plusieurs reprises en indiquant que le volume et la distance du bas augmentent. Il semble donc que les élèves aient de la difficulté à parler de l'accroissement de la grandeur et que, par conséquent, lorsque le travail porte sur celui-ci, ils ont tendance à parler de la grandeur comme si les deux se confondaient. Dans cette catégorie de verbalisations, les élèves semblent faire référence à la **simulation mentale** du phénomène car ils parlent des accroissements comme s'ils les voyaient mais sans s'appuyer sur une manipulation concrète.

Dans la catégorie B apparaissent des verbalisations dans lesquelles les élèves semblent faire référence à l'impact de l'accroissement du volume sur la **perception séquentielle** qu'ils ont du phénomène. Chaque fois qu'il y a un ajout de volume, une couche d'eau vient s'ajouter à l'eau présente dans le pichet. Les élèves de quatrième secondaire imaginent ainsi les différentes couches se superposer successivement dans le pichet. Ils décrivent donc l'accroissement du volume comme une couche d'eau et les accroissements successifs comme des petites couches qui se superposent les unes aux autres. Rappelons, que dans l'énoncé des questions 3 dans S1 et S3, le terme « accroissement » est utilisé. Par la suite, en S2 et S4, on parle d' « intervalles de temps ». Les élèves devaient donc par eux-mêmes faire le lien entre l'idée d'accroissement et celle d'intervalle. À certains moments, ils font explicitement ces liens. Par exemple, les élèves de quatrième secondaire parlent d'accroissements de temps constants même si dans l'énoncé il est question d'intervalles de temps constants (#19).

Plusieurs verbalisations font référence à une **manipulation** lors de la simulation concrète du phénomène (catégorie C). Elles apparaissent donc en S1 et S3. Les accroissements de la grandeur indépendante sont alors exprimés à l'aide d'expressions faisant référence aux actions posées : *ajouter toujours la même quantité d'eau dans le pichet* ou *déplacer le bas de l'échelle toujours de la même distance*. Cette verbalisation faisant référence à des actions concrètes montre, selon nous, que les élèves s'approprient la notion d'accroissement en lui donnant un sens en contexte.

L'appropriation de la notion d'accroissement apparaît aussi à l'aide d'un exemple numérique qui leur permet de reformuler l'énoncé de la question (catégorie D.). C'est le cas, par exemple, des élèves de cinquième secondaire qui indiquent : « les pas de Sarah sont de la même longueur mais ils sont plus petits que ceux de Michel, **par exemple il fait des pas de un mètre, ben elle, elle va faire des pas juste de 50 cm exemple** » (#14).

Les verbalisations de la catégorie E. montrent que le terme « écart » (#15) et l'expression « graduations égales » (#21) sont aussi utilisés pour parler des accroissements dans le cas où les élèves font référence dans leur discours à ce qui se passe graphiquement.

En plus de ces cinq catégories, nous remarquons que dans deux segments codés, les élèves de cinquième secondaire font le lien entre les fonctions *f* et *g*. Ils interprètent l'intervalle de temps constant en termes de « même quantité d'eau » ou « de volume ajouté ». Par exemple, ils indiquent : « Si c'est **un intervalle constant c'est le même volume** que tu vas rajouter à chaque fois » (#18). En fait, ils font ce lien dans la mesure où le débit du robinet remplissant le pichet est constant. Nous développons à propos de ce raisonnement à la section 4.4.8.3.5 (paragraphe C.) lors de l'analyse de U4c'.

4.4.8.2 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4b

Le repérage de la sous-unité de raisonnement U4b s'est avéré peu évident dans la mesure où, la plupart du temps, lorsque les élèves ont considéré les accroissements de la grandeur dépendante, ils l'ont fait soit pour établir la concomitance des accroissements des deux grandeurs (U4c), soit pour décrire le comportement des accroissements de la grandeur dépendante (U4d). Nous avons néanmoins retenu quelques segments de texte dans lesquels les propos des élèves semblent dirigés particulièrement vers la considération de l'accroissement de la grandeur dépendante (voir Tableau 44).

Tableau 44 Segments codés U4b(*f*) et U4b(*g'*)

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
U4b(*f*)				
S1	3	COL	t'as juste à faire deux essais ici et tu fais la **différence** entre les deux, ça va être plus petit	1
S3	1 et 2	SEC4	pis ça dans le fond ça varie…la **différence**…à un certain moment ça peut augmenter plus puis moins	2
		COL	non mais, ici, check **ça augmente** plus beaucoup là en bas, mais ici ça augmente quand même beaucoup	3
	3	COL	non mais check, c'est pas la même chose, **ça a augmenté**	4
U4b(*g'*)				
S4B	1	SEC4	parce que proportionnel il faudrait que ça reste **toujours la même augmentation**	5

Pour parler de l'accroissement de la grandeur dépendante (niveau et distance du haut), les élèves de quatrième secondaire et du collégial utilisent le terme « différence ». Ce terme apparait dans le contexte de la manipulation du matériel en vue de collecter des données (qui ne sont pas forcément numériques) comme l'indique le segment suivant : « t'as juste à faire deux essais ici et tu fais la **différence** entre les deux, ça va être plus petit » (#1). Ainsi, l'idée d'accroissement est associée à celle de différence entre deux valeurs que prend la grandeur dépendante. Comme l'accroissement de la grandeur indépendante était fixé et qu'il n'était pas obtenu à la suite d'une collecte de données, on peut comprendre pourquoi cette idée n'était pas apparue dans les verbalisations de U4a.

Le segment #5 codé U4b(*g'*) concerne le modèle proportionnel que les élèves semblent prendre comme référence. Les élèves du collégial indiquent en effet que si la vitesse du haut de l'échelle augmentait de manière proportionnelle alors l'augmentation de la vitesse serait toujours la même. L'accroissement est donc associé à l'augmentation et l'augmentation

constante au modèle proportionnel dans le sens d'implication suivant : « **si** on a une situation proportionnelle **alors** l'augmentation est constante ».
De plus, nous notons que dans toutes les verbalisations les élèves se prononcent sur la grandeur d'un accroissement en indiquant qu'il est plus ou moins grand ou qu'il est plus petit ou plus grand qu'un autre accroissement. Ils sont alors en processus de construction des sous-unités de raisonnements U4c et U4d.

4.4.8.3 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4c

La sous-unité de raisonnement U4c est centrale dans le déploiement du raisonnement covariationnel. La mise en relation des accroissements concomitants des deux grandeurs est effectivement la base du raisonnement covariationnel et elle constitue l'élément clé de la sous-unité U4c (voir Tableau 45).

Tableau 45 Verbalisations types et éléments clés pour le repérage de U4c

Description des unités et sous-unités de raisonnement		**Verbalisation(s) type(s)**	**Élément clé**
U4 Décrire le comportement de la fonction dérivée			
	c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs	Chaque **accroissement** du volume **entraîne** un **accroissement** du niveau. Pour chaque verre ajouté, le volume augmente d'une certaine quantité et le niveau augmente d'une certaine longueur.	concomitance des accroissements des deux grandeurs

La quantité et la diversité des segments identifiés nous amènent à suggérer différentes classifications des types de verbalisations afin de répondre à deux objectifs : identifier et caractériser le vocabulaire utilisé et synthétiser les idées exprimées par les élèves. Une première classification fait appel aux registres de représentation, à l'image de ce que nous avons observé lors de l'analyse des verbalisations de U4a, et nous permet de regarder de plus près le vocabulaire utilisé selon le registre sur lequel les élèves prennent appui. Une seconde classification est ensuite proposée pour tenter de dégager les différentes idées exprimées par les élèves.

Il est important de noter que tous les segments codés U4c concernent la fonction f (sauf dans un cas particulier abordé à la section 4.4.8.3.5). Nous avons regroupé tous les segments codés U4c(f) dans le contexte du pichet (Tableau 46) puis dans le contexte de l'échelle (Tableau 47).

En un premier temps, dans le but de faciliter l'analyse du vocabulaire utilisé par les élèves, nous avons identifié les registres dans lesquels les verbalisations étaient situées, soient le registre de la **situation concrète** et le registre **verbal**. Nous avons aussi précisé les cas où les élèves prennent appui sur le numérique.

Dans les deux sections qui suivent (4.4.8.3.1 et 4.4.8.3.2), nous analysons le vocabulaire utilisé par les élèves, premièrement, lorsque les verbalisations se situent dans le registre de la situation concrète avec ou sans appui sur le numérique et, deuxièmement, lorsqu'elles se situent dans le registre verbal avec ou sans appui sur le numérique. Dans la troisième section (4.4.8.3.3), nous procédons à l'analyse du contenu des segments en suggérant une traduction et une interprétation des idées communiquées par les élèves.

Tableau 46 Segments codés U4c(*f*) en S1 et S2

Situation	Question	Groupe	Texte (segments codés)	Registre	# du segment
S1	3	SEC4	admettons que la première fois tu le mets ça augmente de 5 cm, est-ce que la deuxième fois ça va augmenter de 5 cm	Verbal (avec appui numérique)	1
		SEC5	Mettons tu verses le verre A, t'es rendu à un niveau, si t'en verse un autre tu vas-tu être rendu… JUSTIN : Au même niveau ou plus haut…	Situation	2
		COL	Ok ils demandent pour le même volume, genre pour le même volume, est-ce que c'est le même niveau?	Verbal	3
			C'est juste la même quantité d'eau à chaque fois, c'est pas le même niveau.	Verbal	4
	6	SEC4	Un verre de plus SIMON : En théorie ça devrait augmenter de la même affaire	Situation	5
		SEC5	c'est-à-dire que pour le même volume d'eau ton niveau d'eau va être plus bas que pour admettons ton deuxième ici, ton niveau d'eau va être plus haut, mais pour ton troisième tu vas en avoir… pour le même tu vas augmenter ton niveau encore plus	Verbal	6
S2A	2	SEC5	Mathieu : on rajoute la même quantité mais est-ce que l'accroissement est constant? Justin : ouais… L'accroissement n'est pas constant	Verbal	7
	4	SEC4	dès que tu rajoutes de l'eau le niveau de l'eau augmente	Situation	8

Tableau 47 Segments codés U4c(*f*) en S3 et S4

Situation	Question	Groupe	Texte (segments codés)	Registre	# segment
S3	1 et 2	SEC4	Tsé au début c'est que ça augmente…tsé quand t'es ici là…tsé là je l'augmente de même ça va augmenter un tout petit peu tandis que si je le bouge de la même distance par là-bas ça descend ben plus	Situation	9
			tsé mettons ici pour un ça va être augmenté de un à un certain moment si ça augmente de un, là ça augmente de deux	Situation (avec appui numérique)	10
			Si mettons tu le tiens, si mettons tu le tires de 1 cm par là Julie : hum hum Simon : ben lui, il ne va pas nécessairement augmenter toujours de la même mesure pour 1 cm comme ça	Situation (avec appui numérique)	11
			Mais c'est ça regarde c'est comme ça, admettons que tu l'augmentes de un, ça augmente quasiment de rien… Mais si tu prends la même taille et que tu avances de un, là ça va descendre pas mal plus	Situation (avec appui numérique)	12
			tu veux dire que mettons si tu ajoutes un d'un bord ça va toujours augmenter de un l'autre bord	Situation (avec appui numérique)	13
			les intervalles de la distance du haut par rapport à une augmentation de la distance du bas fixe genre, elles changent	Verbal	14
			moi, j'ai écrit « non, les intervalles d'augmentation de la distance du haut par rapport à des augmentations de la distance du bas égal ou constants changent » euh peuvent changer ouais	Verbal	15
		COL	Bruno : si j'avance-elle de 1 cm, OK? Martin : ouais Bruno : la distance à diminuer de ça Martin : ouais Bruno : si je ré-avance de 1 cm Martin : ouais Bruno : est-ce que la distance sera diminuée de la même chose? Martin : non, pas nécessairement	Situation (avec appui numérique)	16
	3	SEC4	et lui va augmenter de 1, 1, 1, mettons l'autre va augmenter… Inaudible… Mettons la première fois c'est lui augmente de un ben après ça des fois lui augmente de 1,5, après ça il augmenterait de… Une autre fois et demie	Verbal (avec appui numérique)	17
	6	COL	la distance du bas varie de façon constante, contrairement à la distance du haut	Verbal	18
			OK, mais quand lui augmente par exemple jusqu'à deux, lui va augmenter de combien? De un peu, non? Ça va être exponentiel	Verbal (avec appui numérique)	19
S4B	1	SEC4	parce que ici au début et peut augmenter de un et ça va augmenter de un, après ça, lui il va augmenter de un et lui va augmenter de un et demi, après il va augmenter de un et il va augmenter de 2,25	Verbal (avec appui numérique)	20

4.4.8.3.1 Le vocabulaire utilisé et les caractéristiques des verbalisations lors de la mobilisation de U4c(f) dans les registres de la situation concrète (avec et sans appui numérique)

Comme pour la sous-unité U4a, le vocabulaire utilisé pour parler de l'accroissement de la grandeur indépendante dans le registre de la situation concrète sans appui numérique (segments #2, #5, #8 et #9) fait référence aux actions posées : « verser un verre », « ajouter de l'eau » et « bouger l'échelle » (voir Tableau 48).

Tableau 48 Segments codés U4c associés au registre de représentation de la situation concrète

Registre	# segment	Texte (segments codés)	Groupe	Situation/ Question
Situation concrète (sans appui numérique)	2	Mettons **tu verses le verre A**, t'es rendu à un niveau, **si t'en verse un autre** tu vas-tu être rendu… JUSTIN : Au même niveau ou plus haut…	SEC5	S1/Q3
	5	**Un verre de plus** SIMON : En théorie ça devrait augmenter de la même affaire	SEC4	S1/Q6
	8	dès que **tu rajoutes de l'eau** le niveau de l'eau augmente	SEC4	S2A/Q4
	9	Tsé au début c'est que ça augmente…tsé quand t'es ici là…tsé là je l'augmente de même ça va augmenter un tout petit peu tandis que **si je le bouge de la même distance par là-bas ça descend** ben plus	SEC4	S3/Q1-Q2
Situation concrète (avec appui numérique)	10	tsé mettons ici pour un ça va être augmenté de un à un certain moment **si ça augmente de un**, là **ça augmente de deux**	SEC4	S3/Q1-Q2
	11	Si mettons tu le tiens, si mettons **tu le tires de 1 cm par là** Julie : hum hum Simon : ben lui, il ne va pas nécessairement **augmenter toujours de la même mesure pour 1 cm** comme ça	SEC4	S3/Q1-Q2
	12	Mais c'est ça regarde c'est comme ça, admettons que tu l'augmentes de un, ça augmente quasiment de rien… Mais **si tu prends la même taille et que tu avances de un**, là **ça va descendre pas mal plus**	SEC4	S3/Q1-Q2
	13	tu veux dire que mettons **si tu ajoutes un d'un bord** ça va toujours **augmenter de un l'autre bord**	SEC4	S3/Q1-Q2
	16	Bruno : **si j'avance elle de 1 cm**, OK? Martin : ouais Bruno : **la distance a diminué de ça** Martin : ouais Bruno : **si je ré-avance de 1 cm** Martin : ouais Bruno : **est-ce que la distance sera diminuée de la même chose**? Martin : non, pas nécessairement	COL	S3/Q1-Q2

L'accroissement de la grandeur dépendante est exprimé de manière assez floue et pas forcément contextuelle : « ça augmente de la même affaire », « ça descend ben plus », « on est rendu au même niveau ou plus haut » et « le niveau de l'eau augmente ». L'expression de la concomitance des accroissements est quant à elle implicite, elle n'apparait pas clairement dans la verbalisation mais on la perçoit du fait de la succession de la considération des accroissements de chaque grandeur.

Le cas de figure dans lequel les élèves s'expriment en s'appuyant sur des nombres apparait uniquement en S3 lors du travail sur les questions 1 et 2 par les élèves de quatrième secondaire et du collégial; les verbalisations sont alors semblables aux précédentes. La quantification numérique exprimée est celle de l'accroissement de la grandeur indépendante et elle correspond à une unité (ou un centimètre). Néanmoins, le raisonnement mis en place à propos de l'accroissement de la grandeur dépendante est général (sauf pour le segment #10). Par exemple, les élèves de quatrième secondaire indiquent : « Mais **si tu prends la même taille et que tu avances de un**, là **ça va descendre pas mal plus** » (#12), ils n'ont donc pas vraiment besoin de donner une valeur à l'accroissement de la distance du bas puisqu'ils établissent qu'il est toujours de la même taille et qu'ils parlent qualitativement de l'accroissement de la distance du haut. La tendance à la quantification unitaire de l'accroissement de la distance du bas peut soit être due au contexte, soit au fait qu'en S1 les élèves aient été amenés à travailler de cette manière[34].

4.4.8.3.2 Le vocabulaire utilisé et les caractéristiques des verbalisations lors de la mobilisation de U4c(f) dans le registre verbal (avec ou sans appui numérique)

Pour exprimer l'accroissement constant de la grandeur indépendante dans le contexte du pichet, les élèves du collégial et de cinquième secondaire utilisent les expressions : « la même quantité », « le même volume » et « le même niveau » (voir Tableau 49).

[34] Rappel : à la question 8 de S1, on demandait aux élèves d'imaginer que le pichet était rempli avec un doseur de 1 ml et de décrire alors quel serait le comportement de l'augmentation du niveau de l'eau à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet.

Tableau 49 Segments codés U4c associés au registre de représentation verbal

Registre	# segment	Texte (segments codés)	Groupe	Situation/ Question
Verbal (sans appui numérique)	3	Ok ils demandent **pour le même volume**, genre pour le même volume, est-ce que **c'est le même niveau?**	COL	S1/Q3
	4	C'est juste **la même quantité d'eau à chaque fois**, c'est **pas le même niveau.**	COL	S1/Q3
	14	les **intervalles de la distance du haut par rapport à une augmentation de la distance du bas fixe genre, elles changent**	SEC4	S3/Q1-Q2
	15	moi, j'ai écrit « non, **les intervalles d'augmentation de la distance du haut par rapport à des augmentations de la distance du bas égal ou constants changent** » euh peuvent changer ouais	SEC4	S3/Q1-Q2
	6	c'est-à-dire que pour **le même volume d'eau ton niveau d'eau va être plus bas** que pour admettons ton deuxième ici, **ton niveau d'eau va être plus haut**, mais pour ton troisième tu vas en avoir… **pour le même tu vas augmenter ton niveau encore plus**	SEC5	S1/Q6
	7	Mathieu : **on rajoute la même quantité** mais est-ce que **l'accroissement est constant**? Justin : ouais… **L'accroissement n'est pas constant**	SEC5	S2A/Q2
	18	**la distance du bas varie de façon constante, contrairement à la distance du haut**	COL	S3/Q6
Verbal (avec appui numérique)	1	admettons que la première fois tu le mets **ça augmente de 5 cm**, est-ce que la deuxième fois **ça va augmenter de 5 cm**	SEC4	S1/Q3
	17	et lui va augmenter de 1, 1, 1, mettons l'autre va augmenter… Inaudible… **Mettons la première fois c'est lui augmente de un ben après ça des fois lui augmente de 1,5, après ça il augmenterait de… Une autre fois et demie**	SEC4	S3/Q3
	19	OK, mais quand **lui augmente par exemple jusqu'à deux**, lui va augmenter **de combien**? De un peu, non? Ça va être exponentiel	COL	S3/Q6
	20	parce que ici au début **il peut augmenter de un et ça va augmenter de un**, après ça, **lui il va augmenter de un et lui va augmenter de un et demi**, après **il va augmenter de un et il va augmenter de 2,25**	SEC4	S4B/Q1

Dans le contexte de l'échelle, les élèves de quatrième secondaire parlent d' « intervalles de distance » et d'« augmentations de distance ». La concomitance, quant à elle, apparait encore une fois le plus souvent implicitement. Le seul vocabulaire explicite utilisé est le mot « pour » (#3) et l'expression « par rapport à » (#15).

Dans les segments #1 et #19, le recours à une quantification numérique est semblable à celui décrit précédemment, il est accessoire et le nombre prend le sens de *nombre général*. Cependant, dans les segments #17 et #20 la quantification joue un rôle particulier puisqu'elle remplace la description de la grandeur de l'accroissement. Au lieu de dire que l'accroissement est plus grand d'une fois à l'autre, les élèves de quatrième secondaire établissent des valeurs de l'accroissement de plus en plus grandes. Ces valeurs parlent alors d'elles-mêmes, on comprend que les accroissements sont de plus en plus grands. La concomitance des accroissements apparait alors dans la désignation de chacun par « lui » accompagnée d'un geste. Ces dernières verbalisations mettent l'accent sur la correspondance entre les accroissements des deux grandeurs d'où leur association à U4c. Cependant, la succession exprimée à l'aide de « au début » et « après » montre que les élèves cherchent à établir le comportement des accroissements de la grandeur dépendante ce qui constitue une caractéristique de U4d.

4.4.8.3.3 Traduction et classification des idées exprimées dans les verbalisations associées à U4c(f)

Comme nous venons de le montrer, les verbalisations sont variées dans la mesure où elles mobilisent un vocabulaire diversifié. Cette diversité montre que les élèves sont capables de trouver différents moyens pour exprimer leurs idées.

Nous constatons, par ailleurs, que les idées communiquées sont plus riches que celle attendue. En effet, seule la verbalisation #8 semble référer uniquement à **l'existence de la concomitance** des accroissements : « dès que tu rajoutes de l'eau le niveau de l'eau augmente ». C'est cette idée simple qui constitue, selon nos attentes, la sous-unité U4c(*f*).

Ainsi, dans le but de dégager le raisonnement des élèves à propos de la concomitance des accroissements, laquelle joue un rôle clé au sein du raisonnement covariationnel déployé, il nous semble nécessaire de condenser et de réduire la diversité des verbalisations en dégageant, si possible, *ce qui est pareil dans la différence*.

Dans un premier temps, nous avons *traduit* chaque segment dans un registre symbolique (le symbolisme choisi est présenté à la Figure 30). Ce procédé nous a permis de rendre plus concise l'information communiquée, d'uniformiser le langage (à ce stade, le vocabulaire utilisé n'est pas l'objet étudié) et, par conséquent, de faciliter la classification des segments. Ensuite, nous avons classé les segments selon trois éléments de classification : la stratégie utilisée pour **établir la concomitance** des accroissements des deux grandeurs, le **type de concomitance** établie et **l'information communiquée à propos des accroissements de la grandeur dépendante** (voir Tableau 50).

Pour l’établissement de la concomitance, nous avons considéré deux éléments de stratégie : le nombre de « couples » d’accroissements observés et comparés, et la successivité de ces accroissements le cas échéant (lorsqu’il y en a plus d’un). Ces stratégies sont en lien avec le type de concomitance établie qui est soit locale (elle est établie pour un ou deux couples d’accroissements), soit globale (elle est généralisée pour tout couple d’accroissements).

En ce qui concerne l’information communiquée sur les accroissements de la grandeur dépendante, nous avons identifié cinq catégories : 1) un questionnement sur comment sont les accroissements?, 2) les accroissements sont égaux, 3) les accroissements ne sont pas égaux, 4) les accroissements peuvent être égaux ou non et, 5) un accroissement est plus grand (ou plus petit) qu’un autre.

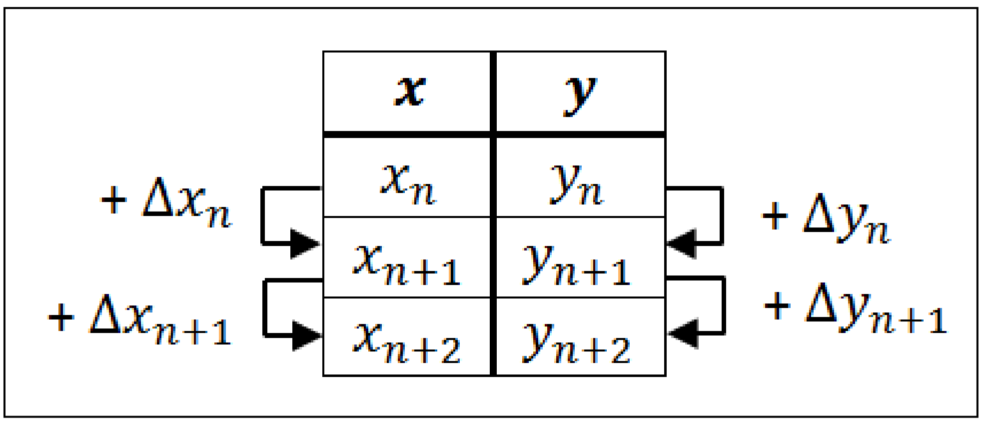


Figure 30 Symbolisme utilisé pour traduire les segments codés U4c(*f*)

Tableau 50 Classification et interprétation symbolique des segments codés U4c(*f*)

Information communiquée sur les accroissements de la grandeur dépendante	# du segment	Interprétation symbolique	Nombre d'accroissements	Accroissements successifs?	Type de concomitance établie
1) comment sont les accroissements?	19	Combien vaut Δy_n si $x_{n+1} = 2$?	1	-	locale
	1	Si $\Delta x_0 = \Delta x_1$ et $\Delta y_0 = 5$, est-ce que $\Delta y_1 = 5$?	2	oui	locale
	2	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1}$ est-ce que $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$ ou $\Delta y_{n+1} > \Delta y_n$?	2	oui	locale
	3	Si $\Delta x = constante$ est-ce que $\Delta y = constante$?	-	-	globale
2) les accroissements sont égaux	5	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1}$ alors $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$.	2	oui	locale
	13	Si $\Delta x = 1$ alors $\Delta y = 1$.	-	-	globale
	18	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	-	-	globale
3) les accroissements ne sont pas égaux	10	Il existe un $\Delta x_n = 1$ tel que $\Delta y_n = 1$ et un $\Delta x_m = 1$ tel que $x_m > x_n$ et $\Delta y_m = 2$.	2	-	locale
	4 7 14 15	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	-	-	globale
4) les accroissements peuvent être égaux ou non	16	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = 1$ alors $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$ ou $\Delta y_{n+1} \neq \Delta y_n$.	2	oui	locale
	11	Si $\Delta x = 1$ alors $\Delta y \neq constante$.	-	-	globale
5) un accroissement est plus grand (ou plus petit) qu'un autre	6	Si $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2$ alors $\Delta y_2 > \Delta y_1 > \Delta y_0$.	3	oui	locale
	12	Si $\Delta x_m = \Delta x_n = 1$ alors $\Delta y_m > \Delta y_n$.	2	non	locale
	9	Si $\Delta x_m = \Delta x_n$ alors $\Delta y_m > \Delta y_n$.	2	non	locale
	17	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = 1$ et $\Delta y_n = 1$ alors $\Delta y_{n+1} = 1{,}5 \cdot \Delta y_n = 1{,}5$.	2	oui	locale
	20	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = \Delta x_{n+2} = 1$ alors $\Delta y_n = 1$; $\Delta y_{n+1} = 1{,}5$ et $\Delta y_{n+2} = 2{,}25$.	3	oui	locale

Dans un deuxième temps, nous avons de nouveau *traduit* les énoncés symboliques dans le registre verbal en utilisant un vocabulaire uniformisé (celui utilisé dans la grille d'analyse). Cette traduction explicite d'ailleurs notre interprétation des propos des élèves dans chacun des segments. Les énoncés obtenus sont classés selon le nombre de « couples » d'accroissements considérés et leur successivité dans les encadrés A., B. et C.

A. Verbalisation qui porte sur un seul « couple » d'accroissements

#19 Si après un certain accroissement de la grandeur indépendante on arrive à 2, combien vaut l'accroissement de la grandeur dépendante correspondant?

B. Verbalisations qui portent sur 2 ou 3 « couples » d'accroissements successifs

- **À partir du « début »**

#1 Pour un premier accroissement de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est 5. Est-ce que pour un second accroissement égal au premier de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est aussi 5?

#6 Pour les trois premiers accroissements successifs égaux de la grandeur indépendante, les accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont tels que le second est plus grand que le premier et le troisième est plus grand que le second.

- **À un endroit quelconque**

SI…	**ALORS…**	# du segment
deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux**	est-ce que les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont égaux ou est-ce que le second est plus grand que le premier?	#2
	les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont égaux.	#5
deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux à 1**	les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante ne sont pas forcément égaux.	#16
	les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont tels que le second égal 1,5 fois le premier.	#17
trois accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux à 1**	les trois accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont tels que le premier égal 1, le second égal 1,5 et le troisième égal 2,25.	#20
Il existe un endroit où pour un accroissement de un de la grandeur indépendante, l'accroissement de la grandeur dépendante est égal à un	Il existe aussi un endroit où pour un accroissement de un de la grandeur indépendante, l'accroissement de la grandeur dépendante est égal à deux.	#10

C. Verbalisations qui portent sur 2 « couples » d'accroissements non-successifs

#12 À un certain endroit, pour un accroissement de 1 de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est plus grand qu'un autre accroissement de la grandeur dépendante obtenu précédemment pour un même accroissement de 1 de la grandeur indépendante.

#9 À un certain endroit, pour un accroissement quelconque de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est plus grand qu'un autre accroissement de la grandeur dépendante obtenu précédemment pour un même accroissement de la grandeur indépendante.

Cas des verbalisations qui généralisent la concomitance des accroissements

SI…	**ALORS…**	# du segment
l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **égal à 1**	l'accroissement de la grandeur dépendante est aussi toujours égal à 1.	#13
	l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.	#11
l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant**	l'accroissement de la grandeur dépendante est-il constant?	#3
	l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.	#18 #4 #7 #14 #15

De manière globale, nous remarquons que les élèves ont eu tendance à regarder plusieurs couples d'accroissements, successifs ou non, et que, dans ce dernier cas, cela leur a permis de généraliser la concomitance des accroissements.

En synthèse, notre démarche de traduction et de classification des segments codés U4c(*f*) nous a permis de mieux comprendre les idées communiquées par les élèves. Malgré la réduction de la diversité au niveau de la forme, les raisonnements à propos des accroissements concomitants sont variés. Pour les décrire plus précisément, nous suggérons d'identifier la trajectoire du raisonnement pour chaque groupe d'élève à la section suivante.

4.4.8.3.4 Analyse de la trajectoire du raisonnement lors de la mobilisation de U4c(f)

La classification des segments par situation et par groupe selon les critères précédemment identifiés est présentée dans le Tableau 51. Cette synthèse donne une vue d'ensemble de la trajectoire du raisonnement des élèves à travers les différents types de verbalisations. On peut observer par exemple que la concomitance globale est davantage établie en S3 qu'en S1. Néanmoins, nous constatons que chaque groupe d'élèves a sa propre trajectoire, ce qui nous amène à faire trois études de cas.

Tableau 51 Classification des segments codés U4c(*f*) par situation et par groupe selon l'information communiquée, la stratégie pour établir la concomitance et le type de concomitance établie

Type de concomitance	**Locale**					**Globale**		
Stratégie utilisée pour établir la concomitance	**Regarder un « couple » d'accrois-sements**	**Comparer 2 ou 3 « couples » d'accroissements successifs**			**Comparer 2 « couples » d'accrois-sements non-successifs**			
Situation	*S3*	*S1*	*S3*	*S4B*	*S3*	*S1*	*S2A*	*S3*
1) Comment sont les accroissements?	#19-COL	#1-SEC4 #2-SEC5				#3-COL		
2) les accroissements sont égaux		#5-SEC4						#13-SEC4 #18-COL
3) les accroissements ne sont pas égaux					#10-SEC4	#4-COL	#7-SEC5	#14-SEC4 #15-SEC4
4) les accroissements peuvent être égaux ou non			#16-COL					#11-SEC4
5) un accroissement est plus grand (ou plus petit) qu'un autre		#6-SEC5	#17-SEC4	#20-SEC4	#9-SEC4 #12-SEC4			

A. Cas des élèves de quatrième secondaire

Tableau 52 Segments codés U4c(*f*) en S1 en ordre d'apparition et leurs traductions pour les élèves de 4[e] secondaire

Question	Segment codé	Traduction symbolique	Traduction verbale
Q3	(#1) admettons que la première fois tu le mets ça augmente de 5 cm, est-ce que la deuxième fois ça va augmenter de 5 cm	Si $\Delta x_0 = \Delta x_1$ et $\Delta y_0 = 5$, est-ce que $\Delta y_1 = 5$?	Pour un premier accroissement de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est 5. Est-ce que pour un second accroissement égal au premier de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est aussi 5?
Q6	(#5) Un verre de plus SIMON : En théorie ça devrait augmenter de la même affaire	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1}$ alors $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$.	**SI** deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux, ALORS** les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont égaux.

En S1, les élèves de quatrième secondaire, qui étudient alors le niveau en fonction du temps dans le contexte du pichet, mobilisent U4c(*f*) en faisant référence uniquement à deux ou trois accroissements successifs (voir Tableau 52). Le segment #1 a été identifié lors du travail sur la question 3 (on demande de déterminer en premier lieu si les accroissements du niveau sont de plus en plus petits, de plus en plus grands, constants ou autrement), alors que le segment #5 a été identifié lors du travail sur la question 6 (on demande de tracer le graphique représentant la relation entre le volume et le niveau). La verbalisation du segment #1 apparait dans le contexte de l'appropriation du questionnement. C'est alors la première fois que les élèves rencontrent ce type de questionnement visant explicitement le travail sur les accroissements concomitants. Comme on peut le voir dans l'extrait de conversation ci-dessous, Émilie tente d'abord de donner un sens à « l'accroissement du niveau », elle l'associe alors à la hauteur de l'eau dans le pichet (ligne 1). Elle reformule ensuite la question posée dans l'énoncé par « **elle** (la hauteur) va tu être **la même à chaque fois que tu vas ajouter un verre d'eau** » (ligne 4). Simon rectifie alors en précisant qu'on se demande si **l'augmentation** va être la même et il poursuit en reformulant la question en prenant appui sur une valeur numérique pour représenter l'accroissement du niveau (lignes 5 et 6). Sa verbalisation est alors fortement liée à la situation concrète puisqu'elle fait référence à deux expériences de remplissage du pichet à l'aide du verre qui semblent se suivre.

ÉMILIE : **L'accroissement du niveau de l'eau dans le sens de la hauteur là**?
JULIE : Ouais
KARINE : J'veux juste voir
ÉMILIE : **elle va tu être la même à chaque fois que tu vas ajouter un verre d'eau**
(16 :50) SIMON : Non mais **est-ce que l'augmentation va être la même**? Tsé là **admettons que la première fois tu le mets ça augmente de 5 cm, est-ce que la deuxième fois ça va augmenter de 5 cm**

Dans cet extrait de conversation, on voit que les élèves de quatrième secondaire tentent de donner un sens au questionnement sur les accroissements concomitants. Ils établissent simultanément le lien entre « accroissement », « niveau » et « augmentation du niveau » et la possible égalité entre les accroissements du niveau. La mise en relation explicite des accroissements concomitants apparait à la fin (segment #1) et prend la forme d'un questionnement sur l'égalité de deux accroissements successifs.
Lors de l'apparition du segment #5, les élèves sont en cours de manipulation du matériel et de collecte de données. Afin de construire le plus exactement possible le graphique, ils ont choisi un étalon (la largeur du rouleau de papier collant) et ils mesurent le niveau après chaque verre ajouté. Ils obtiennent alors des valeurs numériques et placent des points dans le plan cartésien. Vers la fin du remplissage, alors qu'ils arrivent dans la partie cylindrique du pichet, ils hésitent à ajouter un verre de plus de peur de faire déborder le pichet. Julie insiste pour ajouter un dernier verre et c'est à ce moment que Simon indique « en théorie ça devrait augmenter de la même affaire ». Il prévoit donc que l'accroissement du niveau sera égal au précédent. Les autres élèves sont d'accord et anticipent la valeur qu'ils vont obtenir. À plusieurs reprises toutefois, ils indiquent que cette prévision est « théorique » et ils tiennent à mener à terme l'expérience. L'ensemble des échanges nous laisse penser que le bec verseur du pichet est l'élément qui les fait douter de la validité du modèle théorique et que la représentation exacte de la situation réelle est importante pour eux.

En S3, toujours pour le groupe de quatrième secondaire, sept segments ont été identifiés lors du travail sur les questions 1 et 2 et un segment lors du travail sur la question 3 (Tableau 53).

Tableau 53 Segments codés U4c(*f*) en S3 en ordre d'apparition et leurs traductions pour les élèves de 4e secondaire

Question	Segment codé	Traduction symbolique	Traduction verbale
Q1-Q2	(#9) Tsé au début c'est que ça augmente…tsé quand t'es ici là…tsé là je l'augmente de même ça va augmenter un tout petit peu tandis que si je le bouge de la même distance par là-bas ça descend ben plus	Si $\Delta x_m = \Delta x_n$ alors $\Delta y_m > \Delta y_n$.	À un certain endroit, pour un accroissement quelconque de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est plus grand qu'un autre accroissement de la grandeur dépendante obtenu précédemment pour un même accroissement de la grandeur indépendante.
	(#10) tsé mettons ici pour un ça va être augmenté de un pis à un certain moment si ça augmente de un, là ça augmente de deux	Il existe un $\Delta x_n = 1$ tel que $\Delta y_n = 1$ et un $\Delta x_m = 1$ tel que $x_m > x_n$ et $\Delta y_m = 2$.	**S**'il existe un endroit où pour un accroissement de un de la grandeur indépendante, l'accroissement de la grandeur dépendante est égal à un, **ALORS** il existe aussi un endroit où pour un accroissement de un de la grandeur indépendante, l'accroissement de la grandeur dépendante est égal à deux.
	(#11) Si mettons tu le tiens, si mettons tu le tires de 1 cm par là Julie : hum hum Simon : ben lui, il ne va pas nécessairement augmenter toujours de la même mesure pour 1 cm comme ça	Si $\Delta x = 1$ alors $\Delta y \neq constante$.	**SI** l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **égal à 1, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.
	(#12) Mais c'est ça regarde c'est comme ça, admettons que tu l'augmentes de un, ça augmente quasiment de rien… Mais si tu prends la même taille et que tu avances de un, là ça va descendre pas mal plus	Si $\Delta x_m = \Delta x_n = 1$ alors $\Delta y_m > \Delta y_n$.	À un certain endroit, pour un accroissement de 1 de la grandeur indépendante, l'accroissement correspondant de la grandeur dépendante est plus grand qu'un autre accroissement de la grandeur dépendante obtenu précédemment pour un même accroissement de 1 de la grandeur indépendante.
	(#13) tu veux dire que mettons si tu ajoutes un d'un bord ça va toujours augmenter de un l'autre bord	Si $\Delta x = 1$ alors $\Delta y = 1$.	**SI** l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **égal à 1, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante est aussi toujours égal à 1.
	(#14) les intervalles de la distance du haut par rapport à une augmentation de la distance du bas fixe genre, elles changent	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	**SI** l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.
	(#15) moi, j'ai écrit « non, les intervalles d'augmentation de la distance du haut par rapport à des augmentations de la distance du bas égal ou constants changent » euh peuvent changer ouais	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	**SI** l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.
Q3	(#17) et lui va augmenter de 1, 1, 1, mettons l'autre va augmenter… Inaudible… Mettons la première fois c'est lui augmente de un ben après ça des fois lui augmente de 1,5, après ça il augmenterait de… Une autre fois et demie	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = 1$ et $\Delta y_n = 1$ alors $\Delta y_{n+1} = 1{,}5 \cdot \Delta y_n = 1{,}5$.	**SI** deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux à 1, ALORS** les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont tels que le second égal 1,5 fois le premier.

Il est important de noter en premier lieu que ces deux questions ne demandaient pas explicitement de travailler sur les accroissements. Ainsi, les élèves ont spontanément eu recours à cette stratégie pour établir la façon de varier de la distance du haut alors que la distance du bas augmente. Comme le segment #15 est apparu après le segment #9 dans la discussion, nous pouvons décrire l'évolution de U4c(*f*) à l'intérieur du travail spécifique sur les questions 1 et 2 en S3.

Tableau 54 Classification des segments codés U4c(*f*) pour le groupe de 4e secondaire lors du travail sur les questions 1 et 2 de S3

Type de concomitance établi	**Stratégie pour établir la concomitance**	**1er segment**	**2e segment**	**3e segment**	**4e segment**	**5e segment**	**6e segment**	**7e segment**
Locale	Comparer 2 « couples » d'accroissements non-successifs	#9	#10		#12			
Globale	-			#11		#13	#14	#15

Dans les deux premiers segments identifiés, les élèves comparent deux accroissements de la distance du bas pour un même accroissement de la distance du haut mais à deux endroits différents. Dans le segment #9, ils font référence à deux endroits sur le mur où le haut de l'échelle est posé (ici et par là-bas) et établissent qu'au second endroit (plus bas sur le mur) l'accroissement de la distance du haut est plus grand (« ça descend ben plus »). Dans le segment #10, ils indiquent qu'à un certain endroit, un accroissement d'une unité de distance du bas entraine un accroissement d'une unité de la distance du haut et ils prévoient qu'il existe un autre endroit plus loin où un accroissement de la distance du bas d'une unité impliquera un l'accroissement de la distance du haut de 2 unités. Ils regardent donc la concomitance d'accroissements non-successifs afin d'étudier le comportement des accroissements de la distance du haut.

Dans le troisième segment (#11), les élèves continuent d'asseoir leur raisonnement sur l'accroissement d'une unité de la distance du bas. L'unité de mesure est toutefois précisée, il s'agit d'un centimètre, et ils amorcent une généralisation du comportement de l'accroissement de la distance du haut en indiquant qu'elle « ne va pas nécessairement **augmenter toujours de la même mesure pour 1 cm** comme ça ». La considération des accroissements est donc globale puisqu'ils ne s'accrochent pas sur deux couples spécifiques d'accroissements. La concomitance des accroissements étant établie, ils commencent l'étude du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements d'une unité de la grandeur indépendante.

Au segment #11, les élèves reviennent à la considération de deux couples d'accroissements non-successifs de manière semblable au segment #9.

Au segment #13, les élèves évaluent la possibilité que pour un accroissement de « un d'un bord ça va toujours augmenter de un l'autre bord ». Il semble curieux que cette idée soit envisagée à ce moment de l'échange vue que précédemment, il a été établi que les accroissements de la distance du haut n'étaient pas constants. L'extrait de conversation suivant permet de mieux comprendre le contexte :

Julie : mais là c'est normal c'est à des intervalles différents mais en général? **Est-ce que ça varie de la même façon**, oui!

Simon : **tu veux dire que mettons si tu ajoutes un d'un bord ça va toujours augmenter de un l'autre bord**

Julie : ben moi je te parlais juste de… Plus… oh pis marque ce que tu veux

Simon : non mais arrête, dans le sens que, je veux dire que si ça augmente… **Si ça augmente de un là ça va toujours augmenter de un l'autre bord**

Julie : ben c'est, est-ce que ça varie toujours de la même façon, mais moi de la façon que je le vois c'est que de la même façon, c'est que **quand ça augmente en haut ça augmente en bas et quand ça diminue en haut, ça diminue en bas**

Simon : oui mais est-ce que ça augmente toujours de la même taille par rapport aux deux?

Julie : ben c'est pas ça qui est demandé

Simon : ben c'est demandé « de la même façon? »… Ben de la même façon, oui, quand il y en a un qui augmente l'autre augmente, ça c'est sûr

Julie : ben moi **je pense que oui c'est la même distance**… On a la même distance… Moi je pense que oui… Et toi c'est ce que tu penses aussi?

Karine : oui

On voit dès la ligne 1 que la discussion porte sur l'interprétation du « varier de la même façon ». Simon pense que pour « varier de la même façon » signifie que « **si tu ajoutes un d'un bord ça va toujours augmenter de un l'autre bord** » (lignes 2 et 4). Julie corrige car elle veut dire que « **quand ça augmente en haut ça augmente en bas et quand ça diminue en haut, ça diminue en bas** » (lignes 6 et 7). Simon lui demande alors de préciser : « est-ce que **ça augmente toujours de la même taille par rapport aux deux?** ». Dans la réponse de Julie qui suit, on ne peut pas savoir si elle pense que les accroissements de la distance du haut sont toujours les mêmes ($\Delta y = constante$) ou si elle pense que les accroissements de la distance du bas et du haut sont toujours égaux entre eux ($\Delta x = \Delta y$). Il est à noter que ces deux interprétations du « varier de la même façon » apparaissent plus loin dans la conversation. Elles ont déjà été analysées à la section 4.3.5.4 (extrait **SEC4_M11 (S3-Q1/Q2**).

De plus, la verbalisation de l'égalité des accroissements des deux grandeurs est associée à U4c(*f*)*, elle sera donc analysée de nouveau à la section 4.4.8.3.5 (paragraphe B.). Ici, dans le segment codé #13, nous avons considéré que Simon envisageait uniquement la constance des accroissements de la distance du haut. Ainsi, même si précédemment les élèves avaient commencé à s'engager dans l'étude du comportement des accroissements de la distance du haut, ils reviennent à l'interprétation de l'énoncé de la question, ce qui laisse penser que, pour eux, plusieurs questions se posent sur la façon de varier et que de regarder comment changent les accroissements de la distance du haut est l'une de ces questions.
Finalement, nous avons donné la même traduction pour les segments #14 et #15 (voir Tableau 53). Dans ces segments les élèves généralisent la concomitance des accroissements des deux grandeurs. Ils évaluent que, même si l'augmentation de la distance du bas est fixe, celle de la distance du haut ne l'est pas. Aux questions 1 et 2 de S3, les élèves finissent donc par séparer les « intervalles d'augmentation » de chacune des deux grandeurs tout en maintenant le lien entre eux.

À la question 3 de S3, les élèves de quatrième secondaire tentent d'aller plus loin. Ils regardent la succession des accroissements de la distance du haut quantifié non-numériquement (ils ont fait des traits sur la boite représentant le mur et ils voient la distance entre chaque trait). Ils cherchent alors à déterminer le rapport entre les accroissements successifs. À partir de l'observation des trois premiers accroissements successifs, ils émettent l'hypothèse selon laquelle le rapport entre les accroissements est 1,5.

L'évolution de la sous-unité de raisonnement U4c(*f*) chez les élèves de quatrième secondaire n'a donc pas été linéaire. Ils ne sont en effet pas passé de la considération d'un accroissement puis de plusieurs à une considération globale de la concomitance sans que des retours en arrière ne soient nécessaires. Ils sont aussi passés par la recherche d'une relation de récurrence entretenue par les accroissements de la grandeur dépendante.

B. Cas des élèves de cinquième secondaire

De la même manière que précédemment, les segments concernant le groupe de cinquième secondaire sont regroupés dans le Tableau 55.

Tableau 55 Segments codés U4c(*f*) en ordre d'apparition et leur interprétation selon les situations pour les élèves de 5e secondaire

	Segment codé	**Interprétation symbolique**	**Interprétation verbale**
S1-Q3	(#2) Mettons tu verses le verre A, t'es rendu à un niveau, si t'en verse un autre tu vas-tu être rendu… JUSTIN : Au même niveau ou plus haut…	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1}$ est-ce que $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$ ou $\Delta y_{n+1} > \Delta y_n$?	**SI** deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont égaux, **ALORS** est-ce que les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont égaux ou est-ce que le second est plus grand que le premier?
S1-Q6	(#6) c'est-à-dire que pour le même volume d'eau ton niveau d'eau va être plus bas que pour admettons ton deuxième ici, ton niveau d'eau va être plus haut, mais pour ton troisième tu vas en avoir… pour le même tu vas augmenter ton niveau encore plus	Si $\Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x_2$ alors $\Delta y_2 > \Delta y_1 > \Delta y_0$.	Pour les trois premiers accroissements successifs égaux de la grandeur indépendante, les accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante sont tels que le second est plus grand que le premier et le troisième est plus grand que le second.
S2A-Q2	(#7) Mathieu : on rajoute la même quantité mais est-ce que l'accroissement est constant? Justin : ouais… L'accroissement n'est pas constant	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	**SI** l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours constant, **ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.

Nous avons identifié trois segments pour la sous-unité de raisonnement U4c(*f*) mobilisée par les élèves de cinquième secondaire. Les deux premiers segments apparaissent en S1.

Lorsque le segment #2 apparait dans la discussion, les élèves viennent de lire la troisième question et ils tentent de lui donner un sens. Ils anticipent donc qu'en versant successivement deux verres, l'accroissement du niveau ne sera pas le même. Ils parlent toutefois du « niveau » au lieu de « l'accroissement du niveau ». Mais comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment, leur compréhension du phénomène explicitée lors du travail sur les questions 1 et 2 nous porte à croire qu'il est impossible qu'ils envisagent que le niveau puisse ne pas changer. Ils poursuivent d'ailleurs avec cette verbalisation ambiguë tout au long du travail en S1. On le voit dans le segment #6 apparu à la question 6 lorsqu'ils tentent de tracer l'allure du graphique. Ils parlent de plusieurs niveaux successifs en faisant référence à trois accroissements successifs du niveau de manière à établir que chacun est plus grand que le précédent et ce pour un même accroissement de volume. La verbalisation particulièrement maladroite des élèves de ce groupe découle selon nous de la transition difficile qu'ils doivent opérer : la transition de U4c(f)$^{-1}$ à U4c(f). En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, ce groupe d'élèves a davantage travaillé sur la fonction réciproque de la fonction f que sur la fonction f elle-même dans le contexte du pichet.

En S2A, les élèves font un saut vers la considération globale de la concomitance des accroissements pour la fonction f même si c'est la fonction g qui est à l'étude et vers une verbalisation en termes d'accroissements. L'extrait de conversation suivant montre que le segment #7 (lignes 3 et 4) apparait dans le contexte où les élèves font le lien entre les fonctions f et g (lignes 2 et 6).

1	Charles : OK fait que le débit d'eau est toujours constant
2	Justin : **donc à chaque fois on rajoute la même quantité, c'est la même affaire que ça (il montre le**
3	**travail de la séance un)**
4	Mathieu : **on rajoute la même quantité mais est-ce que l'accroissement est constant?**
5	Justin : **ouais… L'accroissement n'est pas constant**
6	Mathieu : il n'est pas constant, ben c'est ça… exemple, t'augmentes…
7	Justin : **c'est la même affaire que cette question-là en fait**
8	Charles : **le niveau de l'eau…ben l'accroissement du niveau de l'eau** ici, il est de plus en plus grand,
9	de plus en plus petit et ici il est constant? On s'entend sur ça?

Le débit constant de l'eau provenant du robinet semble donc les avoir aidés à parler d'accroissement du niveau, on voit même Charles qui se reprend à la ligne 7. C'est probablement aussi ce contexte de remplissage continu qui les a menés à une considération plus globale de la concomitance des accroissements, puisqu'ils se détachent de la manipulation.

C. Cas des élèves du collégial

L'ensemble des segments concernant le groupe du collégial apparait dans le Tableau 56.

Tableau 56 Segments codés U4c(*f*) en ordre d'apparition et leur interprétation selon les situations pour les élèves du collégial

	Segment codé	Interprétation symbolique	Interprétation verbale
S1	(#3) Ok ils demandent pour le même volume, genre pour le même volume, est-ce que c'est le même niveau?	Si $\Delta x = constante$ est-ce que $\Delta y = constante$?	SI l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante est-il constant?
	(#4) C'est juste la même quantité d'eau à chaque fois, c'est pas le même niveau.	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	SI l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.
S3	(#16) Bruno : si j'avance elle de 1 cm, OK? Martin : ouais Bruno : la distance a diminué de ça Martin : ouais Bruno : si je ré-avance de 1 cm Martin : ouais Bruno : est-ce que la distance sera diminuée de la même chose? Martin : non, pas nécessairement	Si $\Delta x_n = \Delta x_{n+1} = 1$ alors $\Delta y_{n+1} = \Delta y_n$ ou $\Delta y_{n+1} \neq \Delta y_n$.	SI deux accroissements successifs de la grandeur indépendante sont **égaux à 1, ALORS** les deux accroissements successifs correspondants de la grandeur dépendante ne sont pas forcément égaux.
	(#18) la distance du bas varie de façon constante, contrairement à la distance du haut	$\Delta x = constante$ mais $\Delta y \neq constante$.	SI l'accroissement de la grandeur indépendante est toujours **constant, ALORS** l'accroissement de la grandeur dépendante n'est pas constant.
	(#19) OK, mais quand lui augmente par exemple jusqu'à deux, lui va augmenter de combien? De un peu, non? Ça va être exponentiel	Combien vaut Δy_n si $x_{n+1} = 2$?	Si après un certain accroissement de la grandeur indépendante on arrive à 2, combien vaut l'accroissement de la grandeur dépendante correspondant?

En S1, les élèves du collégial abordent dès la troisième question la concomitance des accroissements de manière globale. Au segment #3, ils se posent la question quant à la constance de l'accroissement du niveau (même s'ils parlent eux aussi du « niveau » au lieu de « l'accroissement de niveau ») puis au segment #4, ils établissent que l'accroissement du niveau n'est pas toujours le même.

En S3, lors du travail sur les questions 1 et 2, ils ont recours aux accroissements pour analyser la façon de varier de la distance du haut. Ils fixent alors l'accroissement de la distance du bas à un centimètre puis ils comparent deux accroissements successifs de la distance du haut. Ils établissent que ces accroissements ne sont pas nécessairement égaux. Par la suite, à la question 6, ils cherchent d'abord à généraliser le comportement de l'accroissement de la distance du haut en le comparant à celui de l'accroissement de la distance du bas laquelle varie de façon constante (#18). Ils séparent, comme l'ont fait les élèves de quatrième secondaire, la distance du bas et la distance du haut comme s'il s'agissait de deux grandeurs dépendant d'une troisième. On sent tout de même que les variations des deux sont liées. Puis, ils cherchent un modèle connu auquel associer la façon de varier de la fonction *f* afin de tracer le graphique (#19). Dans cette optique, ils cherchent à déterminer comment change l'accroissement de la distance du haut lorsque la distance du bas passe à deux. Ce retour au travail sur un seul accroissement semble être provoqué par la tâche de traçage du graphique lors d'un repérage point par point.

4.4.8.3.5 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer les déclinaisons particulières de U4c

Trois déclinaisons particulières de U4c ont été utilisées lors du codage des données. D'abord, lors du travail sur les fonctions *f* et *g* nous avons repéré plusieurs segments dans lesquels les élèves établissent la concomitance des accroissements des deux grandeurs, mais en s'appuyant sur des accroissements constants de la grandeur dépendante (U4c(f)$^{-1}$ et U4c(g)$^{-1}$). Par exemple, pour la fonction *f* dans le contexte du pichet, ils regardent les accroissements du volume pour accroissements constants du niveau. Ensuite, une considération particulière des accroissements concomitants est apparue lors du travail sur S3 (U4c(*f*)*). Et finalement, quelques segments concernent la mise en relation d'accroissements concomitants mais pour des fonctions différentes de celles étudiées (U4c').

A. Les verbalisations exprimant U4c(f)$^{-1}$ et U4c(g)$^{-1}$

La similitude des segments U4c(f)$^{-1}$ et U4c(g)$^{-1}$ nous porte à analyser les deux types de segments simultanément.

Tableau 57 Segments codés

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
U4c(f)$^{-1}$			
S1	1 et 2	SEC5	pas toujours de la même façon parce que le..le pichet y'est pas uniforme, il courbe à un certain endroit donc **va falloir moins d'eau pour qu'il puisse … que le niveau augmente**
		COL	au début **ça prend plus d'eau pour faire monter le niveau** que à la fin à cause que c'est plus étroit
		COL	J'ai écrit non le niveau de l'eau ne varie pas toujours de la même façon à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet. Au début le pichet est plus large et **prendra donc plus de volume d'eau pour faire augmenter le niveau d'eau.**
	4	SEC5	si admettons on prend le verre B, rempli jusqu'ici, admettons 3cm…bah je sais pas combien je suis rendu là mais… puis il monte jusqu'ici à 6 cm, **t'as doublé ton niveau d'eau, t'as pas monté ton…ton volume est pas pareil** mais…
	6	SEC5	Mais à la fin, **il te faut moins de volume pour augmenter le niveau de l'eau**
		SEC5	ton niveau d'eau là, faut que tu l'augmentes tranquillement, mais **va te falloir plus de volume pour que ton niveau augmente**
U4c(g)$^{-1}$			
S2A	1	SEC5	moi j'ai dit ici que ça allait être plus long, et **que ici ça allait prendre moins de temps, parce que ça rapetisse… pour monter… le niveau**
	2	COL	Bruno : ouais… Ben en fait pour remplir la même quantité que pour un autre endroit dans le… Martin : **si tu veux augmenter de la même hauteur**… Élise : ouais Martin :… **Ça prendra plus de temps**
		COL	Martin :… pour augmenter d'une même hauteur, là on est en train de parler de hauteur on n'est plus en train de parler de volume Élise : ouais… Plus la… **Ça prendra plus de temps pour augmenter de la même hauteur**

Lors du travail sur les questions 1 et 2 de S1, afin de décrire la façon de varier du niveau lorsque le volume augmente, les élèves des groupes de cinquième secondaire et du collégial comparent différentes sections du pichet. Ils établissent que lorsque le pichet est étroit ça prend moins d'eau que lorsqu'il est large pour faire augmenter le niveau de la même hauteur. Le groupe du collégial indique par exemple que « au début **ça prend plus d'eau pour faire monter le niveau** que à la fin à cause que c'est plus étroit ». Or, ce raisonnement pourrait être verbalisé ainsi : « pour un même accroissement du niveau, l'accroissement du volume est plus petit lorsque le pichet est étroit que lorsqu'il est large ». Ainsi, avant même qu'un travail sur les accroissements ne soit proposé, ces élèves semblent comparer différents accroissements du volume pour un même accroissement du niveau. Ils établissent alors la concomitance des accroissements des deux grandeurs mais en s'appuyant sur la grandeur dépendante d'après l'énoncé.

Nous notons toutefois que, dans les verbalisations des élèves, le vocabulaire référant explicitement à l'accroissement n'apparaît pas. En effet, ils vont parler de la « quantité d'eau » ou du « volume d'eau » nécessaire pour faire augmenter le niveau d'eau. Pour nous, il est clair que dans ces verbalisations il est question de l'augmentation du volume et de l'augmentation du niveau puisque, comme nous l'avons indiqué précédemment, il nous semble impossible que les élèves envisagent que le niveau puisse diminuer. De plus, dans une verbalisation telle que : « va falloir moins d'eau pour (…) que le niveau augmente » les élèves parlent de changement du niveau, or les élèves ont établi clairement que ce changement est la conséquence du changement du volume, ils ne parlent donc pas du volume total dans le pichet mais bien du volume ajouté.

On voit que la tendance à considérer l'accroissement constant de la grandeur dépendante au lieu de la grandeur indépendante persiste tout au long du travail sur le contexte du pichet puisque U4c(f)$^{-1}$ et U4c(g)$^{-1}$ ont été repérés aux questions 4 et 6 de S1 et 1 de S2A pour les élèves de cinquième secondaire et à la question 2 de S2A pour les élèves du collégial. En S2A, les élèves transposent leur raisonnement même si on observe le niveau en fonction du temps et non le niveau en fonction du volume. La phrase suivante illustre bien ce raisonnement : « ça prendra plus de temps pour faire augmenter le niveau de la même hauteur ».

Il est intéressant de constater que l'interversion des grandeurs est apparue uniquement dans le contexte du pichet, par les élèves de cinquième secondaire et du collégial, et lors de l'établissement d'une concomitance entre les accroissements des deux grandeurs. Le rôle de chacune des grandeurs étant clairement établi par l'énoncé, ce sont les élèves qui ont choisi d'aborder la fonction réciproque certainement parce que le raisonnement associé était celui qui leur permettait de donner un sens au phénomène. En effet, les changements dans la façon de varier sont dus aux changements de la forme du pichet et spontanément si le pichet est large on sait qu'il faudra plus d'eau pour le remplir.

Nous avons constaté que les élèves du collégial ont pris conscience de la distinction entre la fonction f et sa réciproque f^{1} lors du travail sur le traçage du graphique (S1\Q6). Ils indiquent alors « **si** c'était le volume en fonction du niveau **alors** ce serait une droite constante ». Bien que ce raisonnement soit erroné, il montre que ces élèves sont conscients que la fonction à l'étude est f et que f^{1} est une autre fonction. Pour les élèves de cinquième secondaire, l'articulation de f et f^{1} s'est avérée fastidieuse. Ils ont, par conséquent, rencontré des difficultés lors du traçage du graphique de la fonction f (S1/Q6). Nous mettons en évidence certaines de ces difficultés à partir de l'interprétation de l'extrait de conversation suivant.

FABRICE : la variable indépendante c'est le volume
(18 :16) JUSTIN : C'est ça le problème, on n'a aucune donnée, on n'a aucun chiffre et on doit faire un graphique
CHARLES : Ouais ben c'est ça c'est…
JUSTIN : Le plus exactement possible?
(18 :45) JUSTIN : Moi je dirais que au début ça fait…
MATHIEU : Ça serait croissant
FABRICE : Au début t'as besoin de plus de volume
CHARLES : Mais c'est sûr que faut que ça revienne à la même place, tsé comme, tu commences comme ça, tu montes, tu redescends (il mime une *courbe normale*)
(19 :06) JUSTIN : Ouais mais faut que l'affaire et le niveau soient au maximum, ça finit genre ici, puis nous on commence là… fait qu'il faut se rendre là admettons. On peut pas faire quelque chose, on peut pas le faire à moins qu'on vide le pichet, j'pense pas qu'on peut pas…
(19 :30) MATHIEU : Ça serait comme un cycle dans le fond
JUSTIN : Non faut pas que ça soit un cycle, faut que ça soit juste un graphique
(19 :41) CHARLES : Mais c'est sûr que ça va être comme ça là, on s'entend que ici ça monte de plus en plus, fait que ça monte de plus en plus…
(19 :41) MATHIEU : on s'entend que ça va partir tranquillement puis il va avoir… c'est sûr qu'il va y avoir un sommet à quelque part parce que le sommet il va être là
CHARLES : y a un pic puis quand tu vas arriver ici t'es à la même place que….
CHARLES : Quand t'arrives ici, t'arrives ici
(19 :59) JUSTIN : *Lit la question*
(20 :08) JUSTIN : C'est pas une question que je comprends trop, parce que la relation, ça peut pouvoir plusieurs affaires
MATHIEU : La relation entre le niveau de l'eau et le volume
FABRICE : Ben c'est juste la relation entre les deux, plus que tu augmentes le volume d'eau, plus que le volume d'eau va être
JUSTIN : Certes, mais le problème c'est que…
(20 :24) MATHIEU : Mais à la fin, il te faut moins de volume pour augmenter le niveau de l'eau

Aux lignes 6 à 8, Mathieu détermine qu'au départ le graphique est croissant. Fabrice ramène le raisonnement sur les accroissements selon lequel il faudra plus de volume pour faire augmenter le niveau de la même hauteur. Charles poursuit donc en anticipant une allure en cloche du graphique (lignes 9 et 10). Cette allure convient selon lui car il faut que ça revienne à la même place. Cette image correspond au comportement des accroissements du volume pour des accroissements constants du niveau : ils augmentent puis diminuent de manière symétrique dans le ballon du pichet. Ainsi, d'une part, ces élèves confondent *les accroissements de la grandeur dépendante* avec l*a grandeur dépendante* et, d'autre part, ils inversent les grandeurs indépendante et dépendante.

Aux lignes 11 à 13, Justin semble considérer la variation du niveau au cours du temps puisque pour lui la courbe décrite implique qu'on se rende à un maximum (pichet plein) puis qu'on vide ensuite le pichet. Il remet ainsi en question la décroissance de la courbe en indiquant qu'il faudrait vider le pichet. Ce raisonnement est effectivement valable lorsque le niveau est observé au cours du temps. Cela amène Mathieu à penser à un phénomène cyclique correspondant probablement à plusieurs successions de remplissage et vidage du pichet (ligne 14).

Après l'explication de Mathieu sur l'existence d'un sommet (lorsque l'eau est rendue au milieu du ballon du pichet), Justin ramène le groupe à la question posée et conclut que plusieurs interprétations sont possibles (lignes 23 et 24). Pour Mathieu, la relation entre le niveau et le volume d'eau passe toujours par le volume ajouté nécessaire pour faire augmenter le niveau d'une certaine hauteur (ligne 29).

Même après de longues discussions et de multiples reformulations des idées exprimées dans cet extrait, le groupe d'élèves n'est pas arrivé à se détacher de ce raisonnement. Ils ont fini par « inventer » des données numériques en cohérence avec leur raisonnement et par placer des points sur le graphique. Peu convaincus de la validité de leur démarche, ils ont tracé une droite croissante proche de ces points comme on le voit à la Figure 31.

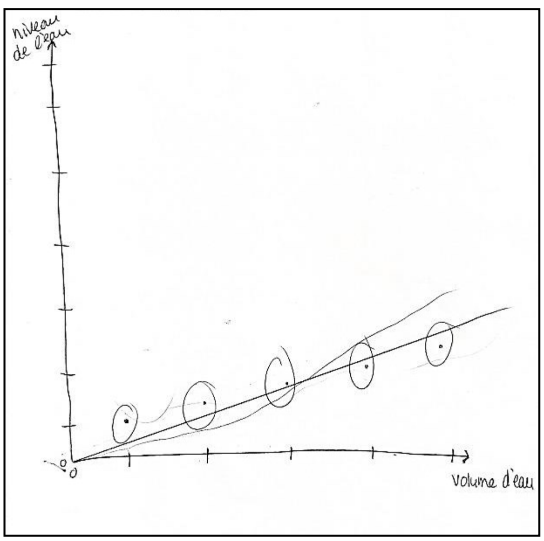


Figure 31 Production écrite à la question 6 de S1 par les élèves de cinquième secondaire

B. Analyse des verbalisations exprimant U4c(*f*)*

Lors du travail sur S3, les élèves de quatrième secondaire et du collégial regardent les accroissements concomitants de la distance du haut et de la distance du bas d'une manière assez particulière. En fait, ils comparent les accroissements des deux grandeurs (voir segments au Tableau 58). Par exemple, les élèves du collégial indiquent qu'ils doivent vérifier si « le pas en bas **c'est le même** que le pas en haut ». Nous avions déjà identifié la tendance à comparer les deux grandeurs lors de l'analyse des sous-unités de raisonnement U3a(*f*)* et U3b(*f*)* (voir sections 4.4.3.4 et 4.4.4.4). Cette fois, il s'agit de la comparaison des accroissements concomitants des deux grandeurs qui apparait uniquement dans le contexte de l'échelle.

Tableau 58 Segments codés U4c(*f*)*

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
U4c(*f*)*			
S3	1 et 2	SEC4	c'est ça que je voulais dire, tu as vu ça augmente… Mettons que la tu fais les mêmes espacements, **sauf qu'en haut, ça augmente plus**
		SEC4	c'est que oui quand le bas augmente, le haut augmente **sauf que pas de la même taille**
		SEC4	parce que quand ça augmente, ça augmente, que quand ça diminue, ça diminue… **Mais ça ne diminue pas de la même taille**
	3	COL	**il faut checker si le pas en bas c'est le même que le pas en haut**

C. Analyse des verbalisations exprimant U4c'

Nous avons repéré plusieurs segments témoignant de la mobilisation de la sous unité U4c pour des fonctions n'étant pas exactement à l'étude (voir Tableau 59).

Le premier segment, identifié chez les élèves du collégial lors du travail sur la fonction *g* dans le contexte du pichet, est en lien avec l'introduction d'une grandeur intermédiaire décrite à la section 4.3.5.3. Nous avions en effet montré que les élèves ont eu tendance à introduire une autre grandeur comme le rayon ou le diamètre du pichet afin de pouvoir décrire le phénomène. Ce segment apparaît donc à la suite de l'extrait de conversation associée au troisième *moment* de retour aux unités de raisonnement U1 et U2 chez les élèves du collégial (voir le deuxième extrait présenté à la section 4.3.5.3).

Tableau 59 Segments codés U4c'

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S2A	1	COL	si le **rayon** augmente **la hauteur du niveau de l'eau que t'as rajouté** genre ça va diminuer
		COL	**le volume déversé à chaque seconde**, ouais, il reste constant
		COL	comme c'est **un volume constant par unité de temps** le **volume d'eau dans le pichet augmente…de manière euh…proportionnelle**?
	2	SEC5	mais les intervalles de temps constants admettons si on allume le robinet cinq secondes et que plus tard on le rallume cinq secondes, **il aura déversé à chaque fois la même quantité**
	4	SEC5	**qu'à chaque intervalle de temps ça va être le même volume que tu vas rajouter pareil parce que le débit est constant**
S4A	2	SEC5	Justin : c'est juste que mettons que **à chaque seconde ça avance de un mètre**, c'est ça je pense Fabrice : ouais… Selon moi Mathieu : parce que le… le mobile, on disait qu'il se déplaçait à vitesse constante
		SEC5	Justin : mais admettons que tu pars de là et à chaque seconde tu fais genre ça, ça, ça (il déplace l'échelle en s'arrêtant à différentes positions de telle sorte que les accroissements de la distance du bas sont constants) tu l'arrêtes à chaque seconde genre… Mathieu : mais on s'entend-tu que **à chaque seconde tu vas faire la même distance avec la distance du bas**
		SEC5	Mathieu : si c'est à vitesse constante et que **les intervalles de temps sont constants** Fabrice et Mathieu : alors **les intervalles de distance sont constants**

Ils établissent une concomitance entre l'augmentation du rayon et l'accroissement du niveau de l'eau : lorsque le rayon augmente l'accroissement du niveau diminue. Évidemment, comme le rayon du pichet à un endroit donné ne change pas puisque la forme du pichet est fixe, nous supposons que lorsque les élèves parlent de *l'augmentation du rayon* c'est qu'ils considèrent que le rayon du pichet à l'endroit où l'eau est rendue change lorsque le volume d'eau dans le pichet change. Comme en S2A le pichet se remplit de manière continue (à l'aide d'un robinet à débit constant), on peut imaginer que les élèves considèrent que le rayon du pichet à l'endroit où l'eau est rendue change constamment dans le ballon du pichet. Ce segment aurait donc pu être codé U4e'. Mais comme la continuité s'impose d'elle-même dans ce contexte, nous avons choisi d'y voir l'emphase sur la concomitance des accroissements du rayon et du niveau de l'eau.

Tous les autres segments codés concernent une fonction qui, même si elle n'est pas à l'étude explicitement, joue un rôle majeur lors du passage de la fonction *f* à la fonction *g*. En effet, en S2A le débit de l'eau est fixé alors qu'en S4A c'est la vitesse du bas de l'échelle. Il existe donc une fonction constante h qui, dans le contexte du pichet, correspond au volume en fonction du temps et, dans le contexte de l'échelle, à la distance du bas en fonction du temps.

Le passage de *f* à *g* impliquait donc de faire la composition des fonctions *f* et h (voir schéma à la Figure 32). Dans notre analyse *a priori* (Annexe 6) nous avions sous-estimé l'importance de cette composition car dans la mesure où la fonction h est une fonction à variation constante, les fonctions *f* et *g* sont équivalentes à un facteur près (voir le raisonnement à la Figure 33).

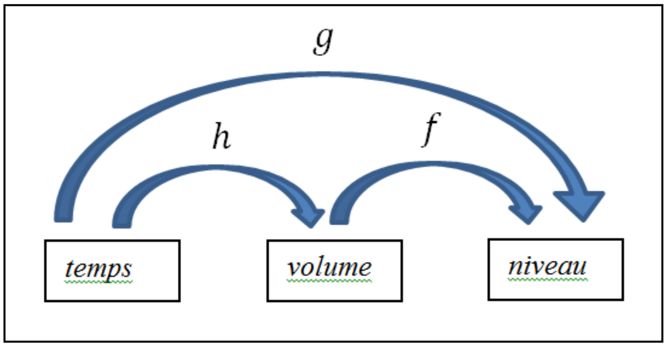


Figure 32 Schéma montrant le lien entre les fonctions *f*, *g* et h

$$h(x) = ax \text{ et } g = f \circ h$$

$$donc\ g(x) = f\big(h(x)\big) \rightarrow g(x) = f(ax)$$

Les images de x par la fonction g sont égales aux images de ax par la fonction f.

Si $a = 0$, *c'est que le débit de l'eau et la vitesse du bas de l'échelle sont nuls. Le pichet reste vide et l'échelle en position collée sur le mur, dans les deux cas* $g(x) = 0$.

- *Si* $a = 1$ *alors les graphiques de* f *et* g *sont identiques.*
- *Si* $a > 1$ *le graphique de g est le même que celui de* f *qui a subi un rétrécissement horizontal.*
- *Si* $0 > a > 1$ *le graphique de g est le même que celui de* f *qui a subi un allongement horizontal.*

Figure 33 Justification de l'équivalence des comportements des fonctions *f* et g

Ce qui est intéressant, c'est de voir que les élèves de cinquième secondaire et du collégial ont spontanément verbalisé la concomitance des accroissements pour cette fonction h, qui n'était pas officiellement à l'étude, dans le contexte du pichet et que les élèves de cinquième secondaire l'ont aussi fait dans le contexte de l'échelle. Par exemple, dans le contexte du pichet, ils indiquent qu' « à **chaque intervalle de temps** ça va être **le même volume que tu vas rajouter** pareil parce que le débit est constant » et, dans celui de l'échelle, « si c'est à vitesse constante et que **les intervalles de temps sont constants** alors **les intervalles de distance sont constants** ».

4.4.8.4 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4d

Comme le rappelle le Tableau 60, pour identifier la mobilisation de U4d, nous avons cherché à retrouver dans les verbalisations des élèves la description du changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants. Alors que l'élément clé de U4c était la concomitance des accroissements des deux grandeurs, celui de U4d est la description du comportement des accroissements de la grandeur dépendante sur au moins un intervalle du domaine.

Tableau 60 Verbalisation(s) type(s) et élément clé associés à U4d dans la grille d'analyse

Description des unités et sous-unités de raisonnement		Verbalisation(s) type(s)	Élément clé
U4 Décrire le comportement de la fonction dérivée			
	d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants	Lorsque les accroissements du volume sont constants, les **accroissements** du niveau sont **de plus en plus petits**.	description du comportement des accroissements de la grandeur dépendante sur au moins un intervalle du domaine

Dans les segments codés U4d(*f*) (voir Tableau 61) et U4d(*g*) (voir Tableau 62), on voit que la verbalisation type en termes d'accroissements *de plus en plus grands*, *de plus en plus petits* ou *constants* (texte en gras) a été utilisée par les élèves de tous les groupes.

Nous remarquons toutefois que les formulations des élèves présentent deux particularités.

La première est engendrée par la forme du questionnement. En effet, à la question 3 de S1 et S3 ainsi qu'à la question 2 de S2A et S4A, il était demandé aux élèves de déterminer si « pour des accroissements constants » de la grandeur indépendante, les accroissements de la grandeur dépendante étaient de plus en plus petits, de plus en plus grands, constants ou autrement. Il n'était donc pas nécessaire pour répondre à la question de construire une phrase complète comme celle de la verbalisation type du Tableau 60. Par conséquent, les élèves ont eu tendance à ne pas parler des accroissements constants de la grandeur indépendante et à désigner par « ça » (ou c') la grandeur dépendante comme l'illustre le segment suivant : « c'est de plus en plus petit et après c'est plus grand » (#1).

La seconde concerne les segments identifiés à la question 6 de S1 demandant de tracer le graphique de la fonction *f*. Les élèves du collégial cherchent alors à anticiper l'allure de la courbe lorsqu'ils indiquent : « À un moment donné **on va sentir que c'est presque constant ici, puis là après ça va recommencer à augmenter** » (#5). Nous pensons alors qu'ils parlent du comportement des accroissements du niveau puisque ce qui devient presque constant au milieu du ballon du pichet puis qui se met à augmenter après, ce sont les accroissements du niveau, le niveau lui ne fait qu'augmenter.

Tableau 61 Segments codés U4d(f)

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
S1	3	COL	C'est **de plus en plus petit** et après **c'est plus grand**	1
		COL	C'est comment? Est-ce que c'est la même différence? Non **ça devient de plus en plus petit.**	2
		COL	ben **c'est plus grand**, après **ça va du plus grand au plus petit**, puis **au plus grand**	3
	6	COL	Ok premièrement on va dire qu'on a ajouté, on va dire que ça c'est un millilitre, on a ajouté un millilitre, le volume était là, ça a augmenté jusqu'au niveau ici, **ça a augmenté beaucoup**. Puis là après on va ajouter deux, ça va se rapprocher, ça va être ici, **ça va être plus petit, puis là ça va rapeticir encore et ça va rapeticir encore…**	4
		COL	Et là ça va **re-augmenter** Élise : À un moment donné **on va sentir que c'est presque constant ici, puis là après ça va recommencer à augmenter**	5
S3	3	SEC4	on l'a vu ici, j'ai fait des marques… Oui **c'est de plus en plus grand**	6
		SEC4	on pourrait marquer **les accroissements de la distance du mur sont de plus en plus grandes** Simon : les accroissements de la distance du haut Julie : du haut ouais, sont **de plus en plus grandes** Simon : elles **augmentent**	7
		SEC5	ben **c'est constant aussi parce que les pas du bas sont constants eux aussi**	8
		SEC5	Ici mettons t'es comme ça tsé, genre mettons ici t'ouvres de même, t'ouvres de même, tsé ça descend pas beaucoup mais rendu genre comme ça ici, tsé tu fais juste ouvrir de même, tu viens de descendre déjà de plus Charles : hum hum Justin : **donc de plus en plus grands**	9
	8	SEC5	Mathieu : décrivez quel serait le comportement de la distance du haut à mesure que la distance du bas augmente Charles : **c'est la même chose, c'est de plus en plus grand**	10

Tableau 62 Segments codés U4d(g)

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
S2A	2	SEC4	au début **c'est de plus en plus petit**, puis après **c'est de plus en plus grand**	11
		SEC4	Ouais on peut marquer « autrement » c'est-à-dire… SIMON : Ouais JULIE : ...**de plus en plus petits** parce que les accroissements ici sont plus petits que là	12
		SEC5	Ici c'est **de plus en plus petit**, les accroissements… là c'est **de plus en plus grand et après ça c'est constant**	13
		SEC5	le niveau de l'eau…ben **l'accroissement du niveau de l'eau ici, il est de plus en plus grand, de plus en plus petit et ici il est constant**	14
		SEC5	**de plus en plus petit, de plus en plus grand, et constant**	15
S4A	2	SEC4	Nous autres la dernière fois, on avait regardé, on disait que plus qu'il est éloigné, plus… Attends c'était quoi déjà… **Il y avait des plus grosses augmentations donc c'est de plus en plus grand**	16
		SEC4	au fur et à mesure que le nombre d'intervalles augmente… **Les accroissements de la distance du haut sont de plus en plus grands**	17
		SEC5	oui mais les accroissements **sont de plus en plus grands**	18
		SEC5	ouais c'est ça, mais si elle s'éloigne du mur, **c'est de plus en plus grand** et si elle se rapproche du mur, **c'est de plus en plus petit**	19
		SEC5	dis que si elle s'éloigne du mur, **ça va être de plus en plus grand**, et si elle s'approche du mur **ça va de plus en plus petit**	20
		COL	ben, moi je dis que, **pour intervalles de temps constants, les accroissements vont être de plus en plus grands** parce que ça s'approche plus vers le sol	21

En ce qui concerne l'information transmise dans les verbalisations des élèves, elle varie selon le contexte.

Dans le contexte du pichet, tous les segments identifiés en S1 (on étudie le niveau en fonction du volume) concernent les élèves du collégial qui semblent distinguer différentes parties du pichet mais sans que des phases précises n'apparaissent. Ils parlent autant du comportement des accroissements dans une certaine partie que dans deux ou trois parties distinctes. En S2A, alors que la fonction étudiée est *g* (niveau en fonction du temps), les verbalisations des élèves de quatrième secondaire sont semblables à celles des élèves du collégial en S1. Les élèves de cinquième secondaire, quant à eux, utilisent des verbalisations qui mettent en évidence trois phases de variation, par exemple : « Ici c'est **de plus en plus petit**, les accroissements… là c'est **de plus en plus grand et après ça c'est constant ».** Évidemment, les « ici » et « là » sont accompagnés de geste désignant des parties du pichet de manière assez vague. Nous verrons plus amplement lors de l'analyse de U5 (section 4.5.1) comment les élèves ont procédé pour distinguer les différentes parties du pichet.

Dans le contexte de l'échelle, la distinction de phases n'est pas nécessaire puisque le comportement des accroissements de la distance du haut est le même sur l'ensemble du domaine. Ainsi, dans l'ensemble, les élèves des trois groupes ont été en mesure de dire à un moment ou à un autre que ***les accroissements de la distance du haut sont de plus en plus grands*** que ce soit lors de l'étude de f (en fonction de la distance du bas) ou de g (en fonction du temps). Deux segments retiennent toutefois notre attention :

1) Segment #8 (S3/Q3 – SEC5) : « ben **c'est constant aussi parce que les pas du bas sont constants eux aussi** ». Ce segment apparait au début du travail sur le contexte de l'échelle. La première intuition de tous les groupes d'élèves, que cela apparaisse ou pas dans les segments codés, a été de penser que les accroissements de la distance du haut étaient constants. Nous avions en effet anticipé que les élèves auraient spontanément cette intuition car le phénomène n'est pas facile à saisir sans simulation. Ici, le raisonnement des élèves de cinquième secondaire est que « SI les accroissements de la distance du bas sont constants ALORS les accroissements de la distance du haut le sont aussi ».
2) Segment #19 (S4A/Q2 – SEC5) : « ouais c'est ça, mais **si elle s'éloigne du mur**, **c'est de plus en plus grand** et **si elle se rapproche du mur**, **c'est de plus en plus petit ».** Ce segment montre que les élèves de cinquième secondaire considèrent deux cas de figure, celui où le bas de l'échelle s'éloigne du mur et celui où il se rapproche. En fait, en S3 cette distinction n'avait pas lieu d'être puisque les grandeurs considérées ne dépendaient pas de comment se déplaçait l'échelle, leur relation était indépendante du phénomène qu'on observe habituellement dans le temps quand on procède à une simulation continue. En S4A, l'observation de la variation de la distance du haut au cours du temps amène effectivement deux considérations que nous avions sous-estimées : quelle est la position de l'échelle au départ (quand t=0) et dans quel sens se déplace-t-elle?

De plus, nous avons identifié quelques segments associés à U4d(f)$^{-1}$ (voir Tableau 63).

Tableau 63 Segments codés U4d(f)-1

Situation	Question	Groupe	Texte
S1	3	SEC5	C'est comme ici y est croissant, ici décroissant mais ici y est constant
		SEC5	fait que là ça va être croissant, décroissant, pis ici c'est constant
		SEC5	Au début c'est croissant pis après ça c'est de plus en plus petit
	6	SEC5	**Ton volume** là il va augmenter tranquillement, tranquillement, parce qu'il en faut **de plus en plus**
		SEC5	c'est droit, c'est pas une courbe, **ça prend à chaque fois le même nombre de volume pour augmenter de tel niveau d'eau à la fin, c'est constant**
		SEC5	Là t'es en train de dire que à la fin il n'y a pas de constant, ça voudrait dire que **ça rapetisse de plus en plus**
	8	SEC5	Ben c'est parce que 1 ml j'pense même pas que ça va faire monter le niveau là MATHIEU : Ça va faire…. JUSTIN : Ça va le monter au début très très très lentement

Comme nous l'avions noté précédemment, lors du travail sur S1, les élèves de cinquième secondaire ont travaillé sur la fonction réciproque de *f* (f^{1}). Ainsi, même lors du travail explicite sur les accroissements à la troisième question, ils ont décrit comment se comportaient les accroissements du volume pour des accroissements constants du niveau. C'est en fait ce que nous avons interprété dans une verbalisation telle que « fait que là ça va être croissant, décroissant, pis ici c'est constant » alors que la question demandait de regarder les accroissements des deux grandeurs. Cette interprétation semble la plus cohérente avec l'ensemble de la démarche de ce groupe d'élèves qui exprime la même idée à plusieurs reprises sans remettre en question sa validité. Lors du traçage du graphique, nous avions déjà fait remarquer qu'ils avaient rencontré des difficultés à articuler la fonction *f* et sa réciproque (voir paragraphe A. de la section 4.4.8.3.5) et les verbalisations montrent qu'ils continuent de raisonner sur les accroissements du volume pour avoir un accroissement constant du niveau. Ils indiquent, par exemple, que le « volume (…) va augmenter tranquillement, tranquillement, parce qu'il en faut **de plus en plus** ». Ce qui signifie que les accroissements du volume doivent être de plus en plus grands si on veut des accroissements de niveau constants. Même dans le goulot du pichet où les accroissements sont constants, ils disent que « ça prend à chaque fois **le même nombre de volume** pour augmenter de **tel niveau d'eau** à la fin, **c'est constant »** c'est-à-dire que pour avoir un accroissement de niveau fixe, ça prend un même accroissement de volume.

Comme la sous-question c) de la troisième question de S1 et S3, demandaient aux élèves de décrire comment **l'augmentation de la grandeur dépendante** se comporte à mesure que la grandeur indépendante augmente, les segments codés U4e viennent compléter ceux codés U4d.

4.4.8.5 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4e(*f*)

En S1 et S3, à partir de la sous-question c) de la question 3, on sollicite directement la mobilisation de U4e. On demandait en effet aux élèves de décrire comment **l'augmentation de la grandeur dépendante** se comporte à mesure que la grandeur indépendante augmente alors que le pichet est rempli avec des verres de plus en plus petits et que l'échelle est déplacée par des gens qui font des pas de plus en plus petits. Nous avions choisi à partir de ce moment d'utiliser le terme « augmentation » pour signifier la différence avec « l'accroissement ». En effet, en un premier temps, le travail sur les accroissements impliquait une discrétisation dans le but d'analyser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante. En un second temps, on demande aux élèves de se prononcer sur le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente et donc de généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour une variation continue de la grandeur indépendante. Le passage de U4d à U4e implique donc le passage du discret au continu, mais, dans notre démarche, nous avons seulement voulu recueillir les intuitions des élèves sur ce passage, intuitions que nous pensions développer par le travail sur les accroissements. Ainsi, même si sous ce passage se cache un raisonnement important (nous l'explicitons plus loin), nous ne nous attendions pas à ce que les élèves en prennent conscience et l'explicitent.

L'élément clé de U4e est donc une description globale du comportement de la fonction dérivée (l'augmentation de la grandeur dépendante en fonction de la grandeur indépendante) sur au moins un intervalle du domaine. Ce comportement étant directement en lien avec celui des accroissements, il n'est pas évident de distinguer les verbalisations exprimant U4d de celles exprimant U4e. Dans le Tableau 64, nous présentons les verbalisations types pour les deux sous-unités de raisonnement afin de montrer en quoi elles se distinguent. On voit donc que pour U4d, nous avons cherché à repérer des expressions du type « les **accroissements** du niveau sont **de plus en plus petits »,** alors que pour U4e, nous avons sélectionné les verbalisations qui qualifient l'augmentation de la grandeur dépendante de deux manières : 1) il est précisé que la grandeur dépendante augmente d'une certaine façon comme dans « le niveau **augmente de moins en moins** » ou 2) il est question de la variation de l'augmentation comme dans « l'**augmentation** de la distance du haut **augmente** ».

Tableau 64 Verbalisation(s) type(s) et élément clé associés à U4d et U4e dans la grille d'analyse

Description des unités et sous-unités de raisonnement		**Verbalisation(s) type(s)**	**Élément clé**
U4 Décrire le comportement de la fonction dérivée			
	d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants	Lorsque les accroissements du volume sont constants, les **accroissements** du niveau sont **de plus en plus petits**.	description du comportement des accroissements de la grandeur dépendante sur au moins un intervalle du domaine
	e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	Dans la première partie du pichet, lorsque **le volume augmente, le niveau augmente de moins en moins**. **Plus la distance du bas augmente plus l'augmentation de la distance du haut augmente**.	description du comportement de la fonction dérivée sur au moins un intervalle du domaine

D'abord, nous avons identifié deux segments U4e(*f*)- en S3 chez le groupe de quatrième secondaire (voir Tableau 65) Ces segments témoignent d'une amorce de mobilisation de U4e(*f*). Dans les deux, les élèves abordent l'augmentation de la distance du haut mais ils ne déterminent pas encore si celle-ci augmente ou diminue, ils indiquent qu'elle change. Dans le segment #2, ils précisent même que « l'augmentation de la distance du haut **va toujours changer de la même façon** ». Ils n'en sont cependant pas encore à dire que l'augmentation augmente.

Tableau 65 Segments codés U4e(f)

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
U4e(*f*)-				
S3	1 et 2	SEC4	les intervalles d'augmentation euh… Les intervalles de… **L'augmentation de la distance du haut par rapport à la distance du bas change**	1
	5	SEC4	**l'augmentation de la distance du haut va toujours changer de la même façon, va toujours se comporter de la même façon**	2
U4e(*f*)				
S3	3	SEC4	Julie : c'est ça, la distance entre chaque barre est plus grand Karine : **la distance augmente… de plus en plus**	3
		SEC4	de plus en plus grands en raison de…Virgule le… **Les augmentations du haut euh augmentent de plus en plus**	4
		SEC4	je pense que **ça augmente de une fois et demie à chaque fois**	5
		SEC4	C'est l'augmentation donc **plus la distance du bas augmente**, **plus l'augmentation de la distance du haut est grande**…	6
		SEC4	ben en fait pas plus l'augmentation de la distance… Parce que la distance du bas, il ne parle pas d'augmentation, il parle, c'est pour une affaire constante donc **plus la distance du bas augmente plus les augmentations de la distance du haut vont être, sont augmentées**	7
		SEC5	Mathieu : c'est parce qu'au début ça… La distance du haut augmente euh… Justin : **elle augmente de plus en plus**	8
		SEC5	dans le fond **l'augmentation est croissante**	9
		COL	j'ai dit, **l'augmentation est de plus en plus grande lorsque la distance du bas augmente**, n'est pas constant, **la distance du haut augmente de plus en plus**	10
	5	SEC4	l'affaire c'est que oui ils sont plus petits, mais la… **l'augmentation de la distance en général va toujours être la même** tsé… Proportionnellement, c'est juste que	11
		SEC4	**elle augmente à chaque fois mais de à chaque fois plus**	12
	6	SEC4	dans le fond **chaque augmentation va augmenter de 1,5**	13
	9	SEC5	moi je dirais plus 0,8 parce que tu vois que **plus ça l'avance plus les distances augmentent**	14
		SEC5	ben non, c'est pas proportionnel parce que, genre **la hauteur elle commence de plus en plus à monter**, genre ici tu as 2 et ici tu as 0,5	15
	10	SEC5	Justin : étant donné tout ce que vous venez de faire, décrivez comment se comporte la distance du haut à mesure que la distance du bas augmente… **La distance du haut augmente de plus en plus** Mathieu : **par rapport à la distance du bas qui augmente doucement**	16
		SEC5	mais la **distance du haut augmente**… Elle va augmenter mais pas pareil à l'autre, l'autre elle va être, exemple **tu augmentes constamment, l'autre elle ne va pas être constante, ça va être de plus en plus grand**	17
		SEC5	Mathieu : euh la distance du haut… Fabrice : va augmenter de plus en plus tandis que la distance du bas… Mathieu : **elle va augmenter de plus en plus si la distance du bas augmente constamment**	18
		COL	**L'augmentation du haut est de plus en plus grande par une variation constante du bas**	19
		COL	on va dire **l'augmentation de la distance du haut est de plus en plus grande**	20

Ensuite, comme nous l'avions fait remarquer au début de la section sur U4, tous les segments codés U4e(*f*) ont été identifiés en S3. Ainsi, il semble qu'en S3 les élèves aient été en mesure de qualifier l'augmentation de la distance du haut alors qu'ils n'avaient pas été en mesure de le faire en S1 avec l'augmentation du niveau de l'eau. La plupart des verbalisations des élèves ressemblent fortement aux verbalisations types. Par exemples, les élèves de quatrième secondaire indiquent que « **plus la distance du bas augmente plus les augmentations de la distance du haut** (…) sont **augmentées** » (#7) et ceux de cinquième secondaire et du collégial disent que la distance du haut « **augmente de plus en plus** » (#8 et #10). D'autres verbalisations sont néanmoins quelque peu différentes, les élèves de cinquième secondaire, par exemple, disent que « l'augmentation est croissante » au lieu de dire que l'augmentation augmente. Quant aux élèves de quatrième secondaire, ils cherchent, comme nous l'avons dit précédemment, à établir un facteur d'augmentation de la distance du haut. Ils généralisent leur observation sur les accroissements successifs en indiquant d'abord que « elle (l'augmentation) augmente à chaque fois **mais de à chaque fois plus** » (#12) puis que « chaque augmentation **va augmenter de 1,5** » (#13).

Finalement, dans tous les segments codés U4e(*f*), les élèves décrivent comment varie l'augmentation de la grandeur dépendante. Mais, ils ne parlent pas forcément de la variation de la grandeur indépendante et, quand ils le font, ils donnent parfois encore de l'importance à la variation constante. Or, la nuance est importante puisqu'elle est en lien avec le passage du discret au continu. Nous avons donc distingué trois types de verbalisations : 1) celles dans lesquelles la considération de la variation de la grandeur indépendante n'apparait pas, 2) celles dans lesquelles il est indiqué que la grandeur indépendante augmente et, 3) celles dans lesquelles il est précisé que la variation de la grandeur indépendante est constante (voir Tableau 66).

Tableau 66 Classification des verbalisations associées à U4e(*f*) identifiées en S3 selon le groupe, la question et le type de verbalisation

Groupe	**SEC4**			**SEC5**			**COL**	
Question	**Q3**	**Q5**	**Q6**	**Q3**	**Q9**	**Q10**	**Q3**	**Q10**
Variation de la grandeur indépendante non précisée	#3 #4 #5	#11 #12	#13	#8 #9	#15			#20
Augmentation de la grandeur indépendante	#6 #7				#14		#10	
Augmentation constante de la grandeur indépendante						#16 #17 #18		#19

Dans la plupart des segments (10 sur 18), les élèves ne parlent pas de la grandeur indépendante, il est donc difficile de savoir comment ils voient la variation de la grandeur indépendante. Dans quatre segments, ils indiquant clairement que la distance du bas (grandeur indépendante) augmente. Par exemple, les élèves de quatrième secondaire indiquent : « **plus la distance du bas augmente**, plus l'augmentation de la distance du haut est grande » (#6). Dans les quatre autres segments, la qualification de la variation de la distance du haut montre que les élèves donnent encore de l'importance aux accroissements constants de la distance du bas. Or, comme ils viennent de faire l'étude locale des accroissements de la grandeur dépendante s'appuyant sur les accroissements constants de la grandeur indépendante, il est normal qu'ils continuent de penser que la variation constante des accroissements de la grandeur indépendante ait un rôle à jouer. Pourtant, ce n'est pas le cas. En fait, le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante est celui du taux de variation instantané que l'on associe à celui du taux de variation moyen pour des accroissements très petits de la grandeur indépendante. Et comme ces derniers sont constants, le comportement du taux de variation moyen est le même que celui des accroissements de la grandeur dépendante (voir le raisonnement dans l'encadré ci-dessous).

Comment se comporte globalement le taux de variation instantané ($\frac{dy}{dx}$) ?

ÉTANT DONNÉ

QUE le **taux de variation instantané** se comporte comme le **taux de variation moyen** lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont très petits

$$\left(\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

ET

QUE le **taux de variation moyen** se comporte comme les **accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants**

$$(par\ exemple, si\ \Delta x_n = \Delta x_{n+1}\ et\ \Delta y_{n+1} > \Delta y_n\ alors\ \frac{\Delta y_{n+1}}{\Delta x_{n+1}} > \frac{\Delta y_n}{\Delta x_n})$$

ALORS

le **taux de variation instantané** se comporte comme les **accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont constants.**

Le segment #18 dans le groupe de cinquième secondaire lors du travail sur la question 10 illustre l'importance que les élèves donnent au comportement de la distance du bas : « Mathieu : euh la distance du haut… Fabrice : va augmenter de plus en plus **tandis que la distance du bas**… Mathieu : elle va augmenter de plus en plus **si la distance du bas augmente constamment** ». On sent que l'augmentation constante de la distance du bas reste à la base du raisonnement. Dans cette description, c'est comme si les élèves considéraient que la variation de la distance du bas dépendait d'une autre grandeur. Cette autre grandeur pourrait être le temps ou le nombre de pas effectués par Michel, Sarah ou Rémi, mais rien dans les propos des élèves ne permet de le déterminer.

Nous remarquons, dans l'ensemble, que même si les élèves ne mettent pas en place un raisonnement comme celui de l'encadré, ils sont en mesure de généraliser le comportement des accroissements de la distance du haut à celui de l'augmentation de cette distance lorsque la distance du bas augmente. Cette généralisation apparait donc intuitive dans le contexte suggéré.

4.4.8.6 Analyse des verbalisations des élèves pour exprimer U4e(*g*) et U4e(*g*')

Sur les quatre segments codés U4e(*g*) (voir Tableau 67), le premier est apparu dans le contexte du pichet (travail sur S2A). Le groupe de cinquième secondaire établit que le niveau augmente de moins en moins rapidement dans une certaine partie du pichet. Il généralise toutefois ce comportement en indiquant que « le niveau va monter de moins en moins rapide **même si on prend certains intervalles** » (#1). Nous comprenons dans cette dernière précision que le comportement reste le même peu importe la longueur des intervalles de temps et donc des accroissements de la grandeur indépendante. Cette indication montre que les élèves se préoccupent des accroissements de la grandeur indépendante comme ils le font avec la fonction f dans le contexte du pichet (voir paragraphe précédent).

Tableau 67 Segments codés U4e(g) et U4e(g')

Situation	Question	Groupe	Texte (segments codés)	# segment
U4e(*g*)				
2A	4	SEC5	mais avec le temps… avec le temps ici il va être de plus, de moins en moins rapide fait que **le niveau va monter de moins en moins rapide même si on prend certains intervalles**… Fait que c'est pas une ligne droite là	1
4A	1	COL	**à mesure que le temps passe, la distance du haut ça va augmenter mais plus que ça s'approche du sol, ça va augmenter de plus en plus, la distance**	2
	4	SEC4	mais **elle va augmenter de plus en plus vite** par contre	3
		SEC4	Karine : **plus le temps passe plus elle devient grande, puis en même temps elle devient grande de plus**… Simon : **elle devient de plus en plus grande, elle devient de plus en plus rapidement grande** Karine : plus rapidement c'est ça	4
U4e(*g'*)				
2B	3	SEC5	ouais mais oubliez pas **la vitesse décroît de plus en plus** donc la vitesse à deux secondes n'est pas la même que la vitesse à 2,5 secondes	5
	4	SEC5	Fabrice : en gros là **au début la vitesse est grande, elle ralentit, elle ralentit, elle ralentit… Justin : oui, elle ralentit de plus en plus**	6
3	10	SEC5	donc **la vitesse du bas va être constante tandis que la vitesse du haut va être de plus en plus rapide**	7
		SEC5	alors que **la vitesse du bas est constante la vitesse du haut est de plus en plus augmentée**	8

Les trois autres segments ont été identifiés dans les conversations des élèves de quatrième secondaire et du collégial en S4A, c'est-à-dire lors de l'étude de la distance du haut en fonction du temps dans le contexte de l'échelle. Dès la première question, les élèves du collégial mobilisent clairement U4e(*g*) : « **à mesure que le temps passe**, la distance du haut ça va augmenter mais plus que ça s'approche du sol, **ça va augmenter de plus en plus** » (#2). Leur verbalisation est d'ailleurs semblable à une des verbalisations types qui pourrait être, pour cette fonction : « à mesure que le temps passe, la distance du haut augmente de plus en plus ». Les élèves précisent toutefois que la distance du haut augmente de plus en plus, *plus que l'échelle s'approche du sol*. C'est comme si, pour eux, il n'était pas si clair qu'au début, lorsque le haut de l'échelle est proche du haut du mur, la distance du haut augmentait de plus en plus. Il est vrai que lors de la collecte de données, les premiers accroissements de la distance du haut étaient si petits qu'il était difficile de déterminer s'ils augmentaient ou pas. Par la suite par contre, les accroissements de la distance du haut augmentent beaucoup (voir les traces laissées par les élèves sur la boite faisant office de mur lors de la manipulation à la Figure 34).

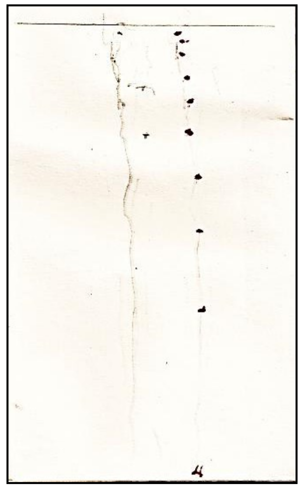


Figure 34 Traces laissées sur le mur (boîte en carton) par les élèves de cinquième secondaire (S3)

Les élèves de quatrième secondaire quant à eux s'expriment sur l'augmentation de la distance du haut lors du travail sur la question 4 (traçage du graphique de *g*). Ils indiquent d'abord que la distance du haut « **va augmenter de plus en plus vite** » (#3) puis que « plus le temps passe plus (…) elle (la distance du haut) **devient de plus en plus rapidement grande** » (#4). Il est intéressant de voir que les élèves ont adapté leurs verbalisations à propos de l'augmentation de la distance en incluant des références au temps : « vite » et « rapidement ». Cette adaptation s'avère pertinente dans la mesure où la grandeur indépendante est effectivement le temps pour la fonction *g*. Ces qualificatifs faisant aussi référence à la vitesse, le passage à l'étude de *g*' (vitesse du haut de l'échelle en fonction du temps) est facilité. Cependant, la sous-unité de raisonnement U4e(*g*') implique de considérer le comportement de l'augmentation de la vitesse, c'est-à-dire de l'accélération. Or, les élèves de quatrième secondaire n'ont pas été en mesure de parler de cette notion puisqu'aucun segment à ce propos n'a été identifié dans leurs conversations.

Le groupe de cinquième secondaire est le seul dans lequel nous avons repéré des verbalisations décrivant comment augmente ou diminue la vitesse. Lors du travail sur la fonction *g*' dans le contexte du pichet, ils indiquent que « la vitesse **décroît de plus en plus** » (#5) puis que « au début la vitesse est grande, elle ralentit, elle ralentit, elle ralentit (…) **elle ralentit de plus en plus** » (#6). Ainsi, ils indiquent comment, selon eux, la vitesse diminue. Dans le contexte de l'échelle, ils parlent déjà de la vitesse du haut de l'échelle et donc de la fonction *g*' alors que la fonction étudiée est *f*. Ils anticipent donc, à partir du travail sur les accroissements de la distance du haut pour des accroissements constants de la distance du bas, que « **la vitesse du bas va être constante tandis que la vitesse du haut va être de plus en plus rapide** » (#7). Nous notons toutefois que cette dernière formulation est ambiguë puisque dire qu'une vitesse est de plus en plus rapide est-ce que cela signifie que la vitesse augmente ou qu'elle augmente de plus en plus? Dans le premier cas, on parle du comportement de la vitesse en fonction du temps (fonction *g*') alors que dans le second on parle du comportement de l'augmentation de la vitesse en fonction du temps (fonction *g*''). Il est aussi important de considérer que, dans les deux contextes, les élèves se sont exprimés sur l'accélération de manière intuitive. Ils n'ont en effet, à aucun moment, cherché à quantifier (numériquement ou non) **les accroissements des accroissements** du niveau ou de la distance du haut. Or, comme le niveau et la distance du haut étaient les seules grandeurs « mesurables » par expérimentation avec le matériel fourni, le seul moyen d'étudier le comportement de l'augmentation de la vitesse de l'eau (ou du haut de l'échelle) était d'étudier **l'augmentation de l'augmentation** du niveau de l'eau (ou de la distance du haut).

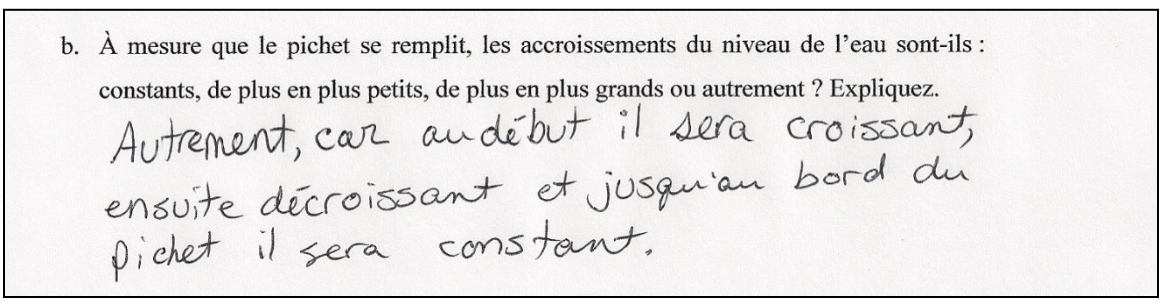
4.4.9 L'articulation des unités U3 et U4

Comme nous avions noté précédemment, la sous-unité U3b joue un rôle important au niveau du passage de U3 à U4. En effet, lors de la mobilisation de U3b les élèves expriment leurs intuitions quant au comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante. Cela montre d'une part que cette précision leur apparait nécessaire ou du moins peut s'avérer pertinente et, d'autre part, qu'ils ont déjà une idée sur laquelle ils pourront s'appuyer lors de l'analyse plus fine suggérée par le travail sur les accroissements. Des éléments informant sur comment les élèves articulent les unités U3 et U4 apparaissent donc particulièrement à partir du travail sur la troisième question de S1 dans laquelle on demande de déterminer comment se comportent les accroissements du niveau pour des accroissements constants du volume.

L'articulation de U3 et U4 ne s'actualise pas de la même façon dans chacun des groupes. Nous présentons donc les trois cas de figure : l'absence d'articulation chez les élèves de cinquième secondaire, l'articulation implicite chez les élèves du collégial et l'articulation explicite chez les élèves de quatrième secondaire.

Cas des élèves de cinquième secondaire

Les élèves de cinquième secondaire mobilisent U3b(*f*) à plusieurs reprises lors du travail sur les questions 1, 2 et 3 (voir section 4.4.4.1). Aux questions 1 et 2, par exemple, ils comparent deux endroits du pichet et indiquent que **le niveau va monter plus vite** à un endroit qu'à un autre. Puis, par la suite, à la question 3, ils indiquent que le niveau monte **lentement** puis **rapidement**. Mais lorsqu'ils amorcent le travail sur les accroissements, ils ont tendance à regarder la fonction réciproque de *f* et donc à étudier le comportement des accroissements du volume pour des accroissements constants du niveau (voir les détails à la section 4.4.8.3.5). Cette stratégie les amène à des réponses erronées aux sous-questions b) et c) de la troisième question de S1. Par exemple, ils indiquent que l'accroissement du niveau est d'abord croissant puis décroissant alors que c'est le contraire, les accroissements sont de plus en plus petits puis de plus en plus grands (voir Figure 35). À la section4.4.8.3.5, nous avons aussi montré les obstacles rencontrés lors du traçage du graphique.


b. À mesure que le pichet se remplit, les accroissements du niveau de l'eau sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement ? Expliquez.

Autrement, car au début il sera croissant, ensuite décroissant et jusqu'au bord du pichet il sera constant.

Figure 35 Production écrite à la question 3b. de S1 par les élèves de cinquième secondaire

Par conséquent, les élèves de cinquième secondaire ne parviennent pas à articuler clairement U3 et U4 lors du travail sur le contexte du pichet. En S3, lors du travail sur le contexte de l'échelle, ils ne rencontrent plus les mêmes difficultés. Ils travaillent comme demandé sur la fonction *f* même lors de l'analyse des accroissements concomitants. À ce moment toutefois, ils embarquent directement dans le travail sur les accroissements sans passer par l'anticipation intuitive du comportement de l'augmentation la distance du haut, il n'y a donc toujours pas de traces de l'articulation de U3 et U4.

Cas des élèves du collégial

Dès la troisième question de S1, les élèves du collégial manipulent le matériel afin de comparer les accroissements du niveau obtenus après chaque ajout d'un verre d'eau. Ils articulent alors U3 et U4 en les utilisant conjointement mais sans expliciter le lien entre les deux comme on le voit dans l'extrait suivant.

(10 :30) Élise : C'est comment? Est-ce que c'est la même différence? **Non ça devient de plus en plus petit.**

Martin : j'le rempli encore

Élise : ouais

Chloé : rempli jusqu'à temps qu'on soit genre ici

Martin : s'il y a encore de l'eau

Manipulations

Martin : Donc comme on euh…comme nous pouvons le constater, ça n'arrive pas de la même façon.

Bruno : Ouais mais **c'est vraiment plus petit là**

(10 :37) Chloé : Ouais c'est plus petit mais rendu ici ça va augmenter plus rapidement

Bruno : ok moi je dis qu'on *skip* des verres jusqu'à ce qu'on arrive ici, mais dans le fond ça va fausser notre…

(10 :47) Chloé : Hey faut prendre son temps quand tu fais une expérience

Bruno : Non, t'as juste à faire deux essais ici et tu fais la différence entre les deux, ça va être plus petit

Au départ, les élèves parlent des accroissements du niveau qui sont de plus en plus petits, puis, à la ligne 10, Chloé indique qu'à partir d'un certain endroit, le niveau va augmenter plus rapidement. Si on suppose que son intervention sert à identifier l'endroit à partir duquel les accroissements commencent à être de plus en plus grands, alors cela signifie qu'elle associe l'augmentation plus rapide à l'augmentation de la longueur des accroissements. Anticipant le temps nécessaire pour effectuer toutes les manipulations (ajouts de verres) afin d'atteindre la partie du pichet dont parle Chloé, Bruno suggère de verser rapidement une certaine quantité d'eau sans utiliser le verre et sans mesurer. Cette suggestion montre que la distinction entre la grandeur (le niveau) et l'augmentation de la grandeur (l'augmentation du niveau) est claire pour Bruno. Comme il le dit aux lignes 14 et 15, il suffit de comparer deux accroissements successifs et de déterminer que le second est plus petit que le premier. Les interventions de Chloé et Bruno montrent, selon nous, que les élèves de ce groupe articulent naturellement U3 et U4. En effet, ils semblent bien gérer à la fois leur perception globale, intuitive et temporelle du phénomène, et l'étude spécifique des accroissements.

En S3, il n’y a pas de traces permettant de mieux comprendre leur processus d’articulation de U3 et U4.

<u>Cas des élèves de quatrième secondaire</u>

En S1, les élèves de quatrième secondaire font aussi un lien implicite entre U3 et U4. Dans l’extrait suivant, on voit qu’ils mobilisent les deux unités mais sans expliciter comment elles s’articulent.

(18 :20) SIMON : Ce qu'ils demandent c'est euh, si au fur et à mesure que le pichet augmente, est ce que les accroissements sont plus grands, plus petits ou autres?
ÉMILIE : **Ben là plus petits** *(elle montre le milieu de la partie arrondie)*
SIMON : Vu qu'il est irrégulier moi je dirais que c'est autrement, parce que tsé, **au début ici, là ici admettons ça va être plus rapide qu'ici**
ÉMILIE : C'est sûr ouais
SIMON : **Et ensuite ça va être plus lent, pis on peut dire qu'un peu en haut, c'est petit mais c'est plus rapide, ben plus rapide ici et un peu plus lent en haut là, minime**. Fait que je dirais plus autrement. Dans le sens plus rapide au début, ensuite plus lent, plus rapide.
JULIE : Ouais
ÉMILIE : Ok
(19 :13) JULIE : Donc plus petit euh…
ÉMILIE : plus rapidement
JULIE : **plus rapidement, moins rapidement puis plus rapidement**… Mais ici (elle montre le haut du pichet) encore plus rapidement qu'au début (elle montre le bas du pichet), dans le sens qu'ici (elle montre le haut du pichet) ça augmente plus rapidement que là (elle montre le bas du pichet) mais…

Aux lignes 1 à 3, on voit que les élèves ont compris de quoi il en retournait. Émilie indique facilement qu’au milieu de la partie arrondie du pichet les accroissements du niveau sont plus petits. Par la suite toutefois, ils ne parlent plus des accroissements et reviennent à une description globale et intuitive du comportement de l’augmentation du niveau. Ils indiquent, par exemple, que le niveau augmente plus rapidement puis moins rapidement puis plus rapidement. Ils reviennent donc à leurs intuitions et laissent de côté les accroissements. En fait, il semble que leur manière de décrire le comportement de l’augmentation du niveau les satisfasse.

Cependant, en S3, des éléments intéressants sur l’articulation de U3 et U4 apparaissent dès le travail sur les questions 1 et 2.

Simon : ben premièrement, **plus la distance du bas augmente plus la distance du haut augmente**

Julie : hum hum

Simon : ben mettons c'est ici mettons…une affaire tsé au début que j'avais pensé écrire c'est que j'me suis dit une fois que ici ce serait rendu à 45°…ça tomberait d'un coup…mais finalement non dans le fond ça tomberait pas d'un coup mais…ok ça varie pas toujours de la même façon dans le fond

Julie : moi je dis que oui là

Karine : ben moi j'ai dit que ça dépend aussi toujours de ça…que comme ça varie…que ça pis ça, ça varie en même temps tout le temps genre c'est comme le même rapport je dirais…mais, mais elle, elle varie pas toujours de la même façon, ça dépend toujours de elle

Simon : *inaudible*…**de là à là elle va peut-être augmenter plus vite que de là à là**…tsé ce que j'veux dire…si mettons…

Karine : c'est que…**on parle pas de temps**, on parle de…

Simon : c'est que quand ça augmente, ça ça …*inaudible*…

Inaudible…ils manipulent du matériel

Simon : on va prendre ça de même...ok, comme ça…tsé au début c'est que ça augmente…tsé quand t'es ici là…tsé là **je l'augmente de même ça va augmenter un tout petit peu tandis que si je le bouge de la même distance par là-bas ça descend ben plus**…comprends-tu?

Julie : ouais j'comprends

En premier lieu, Simon statue sur la concomitance des variations des deux grandeurs : « **plus la distance du bas augmente plus la distance du haut augmente** », il mobilise alors U3a (ligne 1). Plus loin, il tente de préciser comment augmente la distance du haut en indiquant qu'à un certain endroit elle va peut-être **augmenter plus vite**, il mobilise alors U3b (ligne 10). La remarque subséquente de Karine joue alors un rôle important (ligne 12). En effet, en faisant remarquer à Simon que le temps n'est pas la grandeur sur laquelle on s'appuie, elle le force à exprimer autrement l'idée selon laquelle la distance du haut va augmenter plus vite. Finalement, en réponse à Karine, Simon adapte son explication et utilise la comparaison de deux accroissements non successifs de la distance du haut pour un même accroissement de la distance du bas.

Dans l'ensemble, nous remarquons que le travail spontané sur la fonction réciproque chez les élèves de cinquième secondaire a fait obstacle à l'articulation entre U3 et U4. Les élèves du collégial quant à eux ont semblé gérer cette articulation en établissant un lien direct entre le comportement des accroissements de la grandeur dépendante et la description intuitive et temporelle du comportement de l'augmentation de cette grandeur. Leurs propos permettent toutefois difficilement de comprendre le raisonnement sous-jacent à ce lien. Dans le cas des élèves de quatrième secondaire, certains éléments nous apparaissent très parlants. En effet, en un premier temps (en S1), ces élèves ne font pas de lien explicite entre U3 et U4 et ils se contentent d'une verbalisation associée à U3 pour décrire le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante. Mais, en un deuxième temps (en S3), ils dépassent U3 pour répondre à un besoin précis : décrire précisément le comportement de la grandeur dépendante **sans faire référence au temps**. Il semble donc que les élèves de quatrième secondaire aient pris conscience d'une part, du caractère temporel des termes utilisés dans leur description (celle que nous associons à U3b) et, d'autre part, du caractère intemporel d'une description en termes d'accroissements concomitants (celle que nous associons à U4c). Ils ont aussi certainement pris conscience de la pertinence de cette dernière afin de décrire précisément le phénomène puisqu'ils y viennent spontanément.

4.5 Unités de raisonnement *branches*

Nous avons qualifié les unités de raisonnement U5 à U7 d'unités *branches*. D'un côté, ces unités s'appuient sur les unités *troncs* et d'un autre, elles en permettent l'approfondissement. De manière générale, l'unité U5 concerne l'identification des changements de comportement de la fonction dérivée, l'unité U6 cible la généralisation du comportement d'une fonction par l'intermédiaire d'accroissements de plus en plus petits et l'unité U7 consiste en l'association intuitive entre l'augmentation de la grandeur dépendante et la notion de taux de variation plus ou moins nommé lorsque c'est possible (vitesse ou accélération).
Dans un premier temps, de manière semblable aux unités *racines* et *troncs*, nous regardons comment les descriptions de ces unités ont évolué entre la grille initiale et la grille finale et quels résultats peuvent être tirés du repérage global de ces unités dans le discours des élèves. Dans un deuxième temps, une analyse détaillée de chaque unité est suggérée. Encore une fois, nous tentons de dégager des catégories de verbalisations afin de mieux rendre compte du raisonnement des élèves. Pour l'unité U5, ces catégories prennent la forme de quatre niveaux de mobilisation décrit à partir des éléments considérés pour identifier le ou les changements de comportement de la fonction dérivée. Pour l'unité U6, la considération d'accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante amène les élèves à comparer ce qui change et ce qui ne change pas lorsque les accroissements sont plus petits. Nous constatons notamment que les invariants identifiés par les élèves informent sur leur manière de concevoir et surtout de faire usage des notions de *fonction* et de *relation de proportionnalité* dans le contexte des situations proposées. Par ailleurs, leurs conceptions des notions de *taux de variation*, de la

vitesse et de l'*accélération* sont, quant à elles, scrutées à travers l'analyse des segments codés U7.

4.5.1 Description des unités U5, U6 et U7

Premièrement, dans la grille initiale, nous avions associé l'unité de raisonnement U5 à l'activité de détermination des différentes phases de variation de la fonction étudiée (voir Tableau 68). Dans notre analyse *a priori* (voir Annexe 6), nous avions distingué trois phases dans le contexte du pichet et une seule dans le contexte de l'échelle. Nous avions décrit une phase comme étant un intervalle du domaine sur lequel la « façon de varier » est la même – la « façon de varier » étant associée au comportement de l'augmentation de la fonction et donc de la fonction dérivée. Cette distinction de phases nous apparaissait particulièrement importante dans le contexte du pichet car elle permettait, selon nous, de décrire précisément comment se comportait le niveau en fonction du volume (fonction *f*) ou en fonction du temps (fonction *g*). L'analyse des données collectées nous a toutefois amenée à élargir l'unité U5 à toute préoccupation pour le changement de comportement de la fonction dérivée. En fait, comme nous allons le montrer dans l'analyse qui suit, les élèves n'ont pas procédé à une distinction systématique de phases de variation comme nous l'avions anticipé. Ainsi, le repérage des segments de texte associés à U5 s'est avéré complexe. Après plusieurs tentatives, nous avons choisi de distinguer deux déclinaisons : 1) U5- qui concerne les éléments préalables à la distinction de phases, et 2) U5 qui montre une l'identification d'une ou plusieurs phases.

Deuxièmement, l'unité U6 concernait initialement la qualification du changement de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de plus en plus petits de la grandeur indépendante (voir Tableau 68). Afin de solliciter cette unité nous avons posé des questions imposant explicitement de considérer des accroissements plus petits de la grandeur indépendante afin d'en évaluer l'effet sur le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante. Par exemple, dans le contexte du pichet en S1, la quatrième question était : « Le verre B, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet. Décrivez comment l'augmentation du niveau de l'eau se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet. » Le verre B était évidemment fourni aux élèves et ils pouvaient facilement constater qu'il contenait moins d'eau que le verre A utilisé pour remplir le pichet à la question précédente. Par la suite, à la cinquième question, l'idée de prendre un accroissement plus petit du volume était poussée : « Supposons que le pichet est rempli avec un verre C qui contient **moins d'eau que le verre B**. Décrivez comment l'augmentation du niveau de l'eau se comporterait à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet. » Ainsi, d'une question à l'autre les élèves devaient prendre conscience que les accroissements de la grandeur indépendante étaient de plus en plus petits et se questionner sur le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante. Comme nous allons le montrer à la section 4.5.4, en réponse à ces questions, les élèves ont souvent généralisé le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante intuitivement. Nous avons donc établi que cette généralisation intuitive **induite par le questionnement** correspondait à une première déclinaison de U6, soit U6a. Par opposition, nous avons défini une seconde déclinaison, U6b, associée au recours **spontané** par les élèves à un ou plusieurs accroissements plus petits de la grandeur indépendante afin d'observer le ou les accroissements correspondants de la grandeur dépendante. Même si cette dernière sous-unité n'a finalement pas été observée de manière suffisamment explicite pour en rendre compte, nous avons décidé de la conserver dans la grille d'analyse finale car elle nous apparait nécessaire pour faire le pont entre U6a et U6c. Une troisième et dernière déclinaison, U6c, a été effectivement définie afin de distinguer le **recours spontané** à des accroissements **infiniment petits** de la grandeur indépendante.

Troisièmement, l'unité de raisonnement U7 est décrite de la même façon dans les grilles initiale et finale. Elle consiste en l'association intuitive entre l'augmentation de la grandeur dépendante et la notion de taux de variation plus ou moins contextualisée (vitesse et accélération). Selon nous, cette association, même si elle est intuitive, favorise le passage de *g* à *g*'.

Tableau 68 Description des unités de raisonnement U5 à U7 dans les grilles initiale et finale

Unité	Description de la grille initiale	Description de la grille finale
U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)	Considérer les changements de comportement de la fonction dérivée
U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante	Considérer le comportement d'une fonction continue et monotone sur un intervalle (ou une phase) de plus en plus petit du domaine
		a) Généraliser intuitivement le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits (le passage à des accroissements plus petits est induit par la question)
		b) Prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante et observer le comportement des accroissements de la grandeur dépendante (le passage à des accroissements plus petits est spontané)
		c) Généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont infiniment petits (passage à la limite)
U7	Associer l'augmentation de la grandeur dépendante et la notion de taux de variation en nommant la grandeur associée selon le contexte (vitesse ou accélération)	Associer l'augmentation de la grandeur dépendante et la notion de taux de variation en nommant la grandeur associée selon le contexte (vitesse ou accélération)

4.5.2 Résultats globaux du repérage des unités U5, U6 et U7

Rappelons d'abord que dans le contexte du pichet, nous avions identifié trois à quatre phases de variation (voir Annexe 6). La forme irrégulière du pichet incitait particulièrement à envisager différentes manières de varier du niveau en fonction du volume. Alors que dans la situation de l'échelle, nous n'avons pas distingué de phases puisque les fonctions *f*, *g* et *g*' sont strictement croissantes. Il n'est donc pas surprenant de constater que l'unité U5 a majoritairement été mobilisée par les élèves dans le contexte du pichet (voir sections de S1 et S2 dans le Tableau 69). Il semble toutefois que la préoccupation des élèves à considérer les changements de comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante soit apparue dans le cadre de certaines tâches uniquement. L'unité U5 a effectivement été mobilisée par tous les élèves aux deux premières questions de S1 et à la première question de S2 (cases grises). Ces questions portaient toutes sur la description de *comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente* dans le contexte du pichet. En S1 et S2A, ils ont aussi continué à se préoccuper des changements dans la « façon de varier » de la grandeur dépendante lorsque les questions portaient sur l'étude des accroissements (question 3 de S1 et question 2 de S2A : X en gras sur fond blanc dans le Tableau 69). Par ailleurs, les élèves de quatrième secondaire et du collégial ont mobilisé U5 en S3. Ce fait surprenant sera analysé à la section suivante.

Pour la mobilisation globale de U6, il faut se rappeler que certaines questions induisaient le recours à des accroissements plus petits de la grandeur indépendante lors d'un travail qualitatif (questions 4 et 5 de S1 et S3, question 3 de S2A et S4A) et lors d'un travail quantitatif (question 8 de S1 et S3). On peut voir que ces questions sont exactement celles qui ont incité la mobilisation de U6 (cases lignées dans le Tableau 69). Ces résultats laissent entendre que les élèves n'ont pas spontanément mobilisé U6. Cependant, le questionnement suggérait le recours à des accroissements plus petits mais pas infiniment petits, par conséquent, nous verrons dans l'analyse détaillée que la mobilisation de U6c par les élèves du collégial témoignent d'une initiative non négligeable en ce qui concerne la mobilisation de U6.
En ce qui concerne la mobilisation de U7, elle apparait de façon sporadique tout au long des situations. Les élèves de quatrième secondaire expriment toutefois U7 dans plus de questions que les autres groupes d'élèves.

Rappelons que les unités *branches,* de par leur nature, ne peuvent apparaitre seules. Elles sont forcément en interaction avec une unité *tronc* qu'elles permettent de préciser, de prolonger ou d'approfondir. Dans l'analyse détaillée qui suit nous tentons tout de même d'isoler l'actualisation de ces unités dans le discours afin de dégager, notamment, leur rôle au sein du déploiement du raisonnement covariationnel par les élèves.

Tableau 69 Apparition des unités de raisonnement U5, U6 et U7 par groupe, par situation et par question

		U5 (considérer les changements de comportement)			**U6** (considérer le comportement sur un intervalle de plus en plus petit)			**U7** (associer l'augmentation au taux de variation)		
	Question \ Groupe	**Sec4**	**Sec5**	**Col**	**Sec4**	**Sec5**	**Col**	**Sec4**	**Sec5**	**Col**
Situation 1	**1 et 2**	X	X	X						
	3	**X**	**X**	**X**						
	4				**X**	**X**				
	5									
	6			X						
	7									
	8				**X**		**X**			
	9									
	10		X							
S2 A	**1**	X	X					X		
	2	**X**	**X**	**X**						
	3			X			**X**			
	4									
S2 B	**1**	X	X	X					X	
	2							X		
	3									
	4									
	5									
Situation 3	**1 et 2**	X		X				X		
	3									
	4					**X**	**X**			
	5				**X**		**X**	X		
	6									
	7									
	8					**X**	**X**			
	9									
	10									
S4 A	**1**									
	2									
	3						**X**			
	4									
S4 B	**1**									
	2									X

4.5.3 Analyse des verbalisations associées à l'unité de raisonnement U5

Lors de l'observation des segments codés U5- et U5 nous avons constaté que les éléments considérés par les élèves pour établir l'existence de changements de comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante étaient variées. Après plusieurs tentatives, nous avons choisi de décrire quatre niveaux de mobilisation de cette unité de raisonnement ainsi que des verbalisations types associées (voir Tableau 70) à la fois pour U5- et pour U5. Il est à noter que ces verbalisations-types ont été induites par les verbalisations des élèves dont nous proposons une analyse détaillée dans les sections qui suivent à travers la description de chaque niveau de mobilisation.

Tableau 70 Niveaux de mobilisation de U5- et U5 et verbalisations types associées

Niveau	Éléments considérés	Verbalisation type pour U5-	Verbalisation type pour U5
N1	Établissement du lien entre **la forme** du pichet et **la façon de varier** du niveau	La façon de varier dépend de où se trouve le niveau dans le pichet.	
		La façon de varier dépend de la forme du pichet (ou des contours).	
N2	Caractérisation du lien entre **la forme** du pichet et **le comportement du niveau**	Le niveau augmente rapidement quand le pichet est étroit et lentement lorsqu'il est large.	Le niveau augmente rapidement, lentement puis rapidement.
N3	Caractérisation du lien entre **la forme** du pichet et **le comportement des accroissements du niveau**	L'accroissement du niveau est plus petit lorsque le pichet est large que lorsqu'il est étroit (et inversement).	Les accroissements du niveau sont de plus en plus petits, puis de plus en plus grands, puis constants.
N4	Découpage du pichet par **sections**	Le pichet est composé de trois parties.	Le pichet est composé de trois parties : une première pour laquelle le niveau augmente de moins en moins, une seconde pour laquelle le niveau augmente de plus en plus et une troisième pour laquelle l'augmentation du niveau est constante.

4.5.3.1 Premier niveau de mobilisation de U5 (N1)

Au premier niveau (N1), les élèves abordent l'influence de la forme du pichet sur la façon de varier du niveau de l'eau (voir segments codés au Tableau 71). Soit ils indiquent que « ça (la façon de varier) dépend de la forme » (#N1.2 et #N1.5), soit ils l'insinuent en disant que « ça (la façon de varier) dépend de où que ça (le niveau) se situe » (#N1.1, #N1.4, #N1.7). Ils sont donc conscients que la façon de varier du niveau ne sera pas la même pour tout le pichet puisque sa forme est irrégulière. À ce propos, les élèves du collégial répondent « non » à la question *le niveau varie-t-il toujours de la même façon à mesure que le niveau d'eau augmente dans le pichet?* et justifient que c'est parce que le pichet n'a pas « une forme uniforme » (#N1.6). On comprend donc que, si la forme était uniforme, la façon de varier serait toujours la même. Cela met en évidence encore une fois l'importance d'une situation de référence dans laquelle le pichet aurait une forme régulière (cylindre par exemple, voir section 4.4.4.4). La considération de ces éléments témoigne, pour nous, de la mobilisation de U5-. En fait, ils constituent les prémisses à la distinction de phases de variation puisque si on ne voit pas la forme irrégulière et son impact sur la variation du niveau, on ne peut pas s'engager sur cette voie.

Tableau 71 Segments codés au niveau N1 de mobilisation de U5-

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
S1	1 et 2	SEC4	Ça dépend de **où ce que ça se situe**	N1.1
			Ça dépend de la **forme** aussi	N1.2
			Ça dépend aussi des **contours**	N1.3
			non mais dépendamment de **où ça se situe**	N1.4
			Ça dépend aussi de la **forme**	N1.5
		COL	j'ai dit non puisque le pichet n'a pas **une forme uniforme**	N1.6
S2A	1	SEC4	Ouais tout dépendant **où ce qu'on se situe**	N1.7
			Où tu te situes dans le pichet parce que… étant donné qu'on a parlé du **diamètre** la dernière fois, ben ça a comme un impact sur euh…	N1.8
	2	COL	Élise : OK j'écris, au début **le pichet est plus large** Bruno : parce que plus ça…**plus petit au début** Élise : hein Martin et Bruno : au début **le pichet est plus petit**	N1.9

4.5.3.2 Deuxième et troisième niveaux de mobilisation de U5 (N2 et N3)

Aux niveaux 2 et 3, les élèves considèrent toujours l'influence de la forme du pichet sur la variation du niveau, mais ils caractérisent, de plus, le lien entre la forme et le comportement du niveau (N2) ou entre la forme et le comportement des accroissements du niveau (N3). Dans la caractérisation de ces liens, l'une des unités *tronc* apparait forcément. En N2, U5 apparait de pair avec U3 (description du comportement de la fonction), alors qu'en N3 elle apparait de pair avec U4 (description du comportement de la fonction dérivée). Les élèves ont donc implicitement considéré différentes phases de variation dès qu'ils ont établi des changements dans le comportement du niveau ou des accroissements du niveau (voir Tableau 72, Tableau 73, Tableau 74).

D'une part, nous associons les verbalisations qui décrivent de façon générale la forme et la façon de varier du niveau à U5- (voir Tableau 72 et Tableau 74). Par exemple, les élèves de quatrième secondaire expliquent, en parlant de la fonction *g* (niveau en fonction du temps), que « plus c'est bombé plus c'est lent » (#N2.12). Ils partent donc de la forme du pichet pour qualifier intuitivement la vitesse à laquelle le niveau monte. Ils mobilisent donc simultanément U3 et U5- (N2). En indiquant que « dans une **section plus petite** le niveau va être **plus grand que dans une section plus large** » (#N3.2), les élèves du collégial décrivent quant à eux le lien entre la forme du pichet et la grandeur de l'accroissement – encore une fois ils utilisent le terme « niveau » pour parler de l'accroissement du niveau. Ils mobilisent alors U4 en même temps que U5- (N3).

Tableau 72 Segments codés au niveau de mobilisation N2 de U5-

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
S1	1 et 2	SEC4	le niveau de l'eau ici, **vu que c'est plus gros ça va augmenter moins vite**	N2.1
			Mais à certains moments, **quand le contour est plus gros ou plus petit, ça augmente plus vite ou moins vite**	N2.2
		SEC5	Le **niveau il va monter plus vite là que là**	N2.3
	3	SEC4	Là étant donné que **c'est plus petit** et qu'il y a moins de diamètre, là (elle montre le bas du pichet) **le volume va augmenter plus rapidement que là** (elle montre le milieu de la partie arrondie)	N2.4
			Vu qu'il est irrégulier moi je dirais que c'est autrement, parce que tsé, **au début ici, là ici admettons ça va être plus rapide qu'ici**	N2.5
			là par contre ça fonctionne pas parce que **c'est pas régulier** tsé, ici admettons **ça va commencer à augmenter plus vite, puis ici ça devient plus constant**	N2.6
		SEC5	**Ici c'est lent… c'est aussi rapide que quand on remplit le bord**…le bout en bas parce que le bout en bas est aussi gros que le bout en haut	N2.7
		COL	les accroissements du niveau de l'eau sont autrement, la forme…est ce que je dis : **la forme et la largeur du pichet ne sont pas uniformes**?	N2.8
S2A	2	COL	Élise : OK j'écris, **au début le pichet est plus large** Bruno : parce que plus ça…plus petit au début Élise : hein Martin et Bruno : **au début le pichet est plus petit**	N2.9
S2B	1	SEC4	On pourrait tout simplement dire que **rendu à la partie plus grosse** ben ça augmente puis… ben **ça ralentit** je veux dire	N2.10
			On pourrait juste dire que **à partir de la partie bombée ça commence à être lent**, puis à l'autre partie c'est juste	N2.11
			Plus c'est bombé plus c'est lent	N2.12

Tableau 73 Segments codés au niveau de mobilisation N2 de U5

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
S1	1 et 2	SEC4	ben par étapes là, au début le niveau de l'eau il monte..tsé ici **plus rapidement**, **ici** c'est le volume de l'eau qui monte plus rapidement puis **à partir d'ici c'est le niveau de l'eau qui monte plus rapidement**	N2.13
	3	SEC4	Dans le sens **plus rapide au début, ensuite plus lent, plus rapide.**	N2.14
			plus rapidement, moins rapidement puis plus rapidement	N2.15
		SEC5	**C'est lent, puis ici c'est plus rapide, puis ici ben c'est encore constant**	N2.16
			le niveau monte lentement je dirais, ensuite rapidement puis il continue à être rapidement… de plus en plus rapidement	N2.17
	6	COL	Ok non, parce **qu'au début** c'est petit donc **ça augmente rapidement, après ça ralenti, puis là ça recommence rapidement**	N2.18
S2A	1	SEC5	j'ai dit que c'était **de moins en moins rapide, de plus en plus rapide, puis constant**	N2.19
			au début c'est de moins en moins rapide, ensuite de plus en plus rapide et après c'est constant	N2.20
S2B	1	SEC4	Le temps passe, **ici une seconde, c'est plus rapide, ça devient plus lent, plus lent, plus lent, une seconde, plus rapide, plus rapide, plus rapide**	N2.21
		SEC5	**ça va être de plus en plus lent, de plus en plus rapide, constant**	N2.22
			la vitesse va décroître, accélérer, puis rester constante	N2.23
		COL	**Ça va être rapide au début pis là ça va commencer à diminuer la vitesse,** pis là à un moment donné ça va refaire…	N2.24
			puis après **elle diminue, elle diminue, elle diminue puis elle remonte**	N2.25
			j'ai écrit la **vitesse** à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet est **rapide au début à cause de la petite largeur du pichet**, et va **ensuite ralentir dans la partie la plus large**, enfin ça va **ré-augmenter dans la partie moins large**	N2.26

Tableau 74 Segments codés au niveau de mobilisation N3 de U5- et U5

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
N3/U5-				
S1	1 et 2	COL	j'ai dit que à cause que le pichet n'a pas une forme uniforme, **au début ça prend plus d'eau pour faire monter le niveau que à la fin à cause que c'est plus étroit**	N3.1
S2A	3	COL	**dans une section plus petite le niveau va être plus grand que dans une section plus large**	N3.2
N3/U5				
S1	3	SEC5	C'est comme ici **il est croissant, ici décroissant mais ici il est constant**	N3.3
			ici ça va t'en prendre moins que là, puis après ça **tu reviens que ça t'en reprend moins**	N3.4
		COL	C'est **de plus en plus petit et après c'est plus grand**	N3.5
			ben **c'est plus grand, après ça va du plus grand au plus petit, puis au plus grand**	N3.6
	10	SEC5	Au début **c'est décroissant, à partir de la moitié il augmente de façon constante**, parce que la moitié là… est ici	N3.7
S2A	2	SEC4	**au début c'est de plus en plus petit, puis après c'est de plus en plus grand**	N3.8
		SEC5	**Ici c'est de plus en plus petit, les accroissements… là c'est de plus en plus grand et après ça c'est constant**	N3.9
			l'accroissement du niveau de l'eau ici, il est de plus en plus grand, de plus en plus petit et ici il est constant	N3.10
			de plus en plus petit, de plus en plus grand, et constant	N3.11

D'autre part, les verbalisations qui décrivent une succession de comportements différents du niveau ou de l'accroissement du niveau sont associées à U5 (voir Tableau 73 et Tableau 74). En effet, même si des parties du pichet ne sont pas clairement délimitées, la succession de comportements différents indique que les élèves voient ces parties. Par exemple, lorsque les élèves de cinquième secondaire indiquent que « le niveau monte lentement (…) ensuite rapidement puis il continue à être rapidement… de plus en plus rapidement » (#N2.17), il nous apparait évident qu'ils voient différentes parties du pichet qui se succèdent. De plus, dans plusieurs verbalisations, on retrouve des indications permettant de préciser à quel endroit du pichet on se trouve. Par exemple, lorsque les élèves de quatrième secondaire disent que « ben **par étapes** là, **au début** le niveau de l'eau il monte...tsé **ici** plus rapidement, **ici** c'est le volume de l'eau qui monte plus rapidement puis **à partir d'ici** c'est le niveau de l'eau qui monte plus rapidement » (#N2.13), ils indiquent qu'il y a plusieurs « étapes » qu'ils distinguent ensuite à l'aide d'indicateurs de lieu et de temps : « au début », « ici » et « à partir d'ici ».

4.5.3.3 Quatrième niveau de mobilisation de U5 (N4)

Au niveau N4, les verbalisations témoignent d'une préoccupation à déterminer exactement le nombre de phases et à quels endroits du pichet elles commencent et terminent. Les seules verbalisations associées à N4 concernent les élèves de quatrième secondaire (voir les segments codés au Tableau 75). Un premier segment a été repéré en S1 lors du travail sur les questions 1 et 2 (#N4.1). À ce moment, Julie suggère de séparer le pichet en trois parties comme elle l'a fait pour répondre individuellement à ces questions (voir Figure 27 à la section 4.4.4.4). Son raisonnement sur les variations concomitantes des deux grandeurs est alors celui que nous avons associé à U3b(*f*)* et qui consiste en une comparaison de la variation de ces deux grandeurs (le volume augmente plus vite que le niveau ou le niveau augmente plus vite que le volume). Il est à noter que, parmi tous les élèves de tous les groupes, Julie est à la fois la seule à avoir mobilisé ce type de raisonnement lors du travail individuel et la seule à avoir travaillé sur l'image du pichet afin de distinguer différentes phases de variation. Par la suite, deux segments ont été repérés lors du travail sur S2B (fonction *g*' : vitesse du niveau en fonction du temps).

Tableau 75 Segments codés au niveau de mobilisation N4 de U5- et U5

Situation	Question	Groupe	Texte	# segment
N4/U5-				
S1	1 et 2	SEC4	tsé pour comment à la première question, au départ départ départ on pourrait comme les séparer sur le dessin, marquer 1, 2, 3 pis là un…	N4.1
N4/U5				
S2B	1	SEC4	SIMON : Ouais mais ça admettons tu peux séparer, t'es pas obligé de séparer…. Ça ici puis ça tu peux les séparer à peu près ici parce que ici tu vois que c'est pas droit pentoute là, t'as quand même une grosse variation puis ensuite t'en a une autre ici KARINE : Une centrale… y a comme 4 parties SIMON : Ici c'est constant, ici c'est constant puis t'as l'augmentation puis la diminution (16 :16) JULIE : Moi j'en verrais plus 3 là	N4.2
			Non mais t'as trois… t'as deux grosses parties au final mais… t'as le point de départ puis t'as la fin fait que dans le fond c'est pas mal quasiment 4 mais dans le sens c'est peut-être une augmentation et une diminution, des variations dans le fond	N4.3

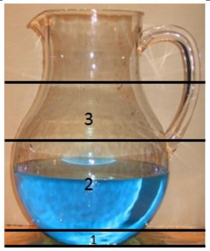
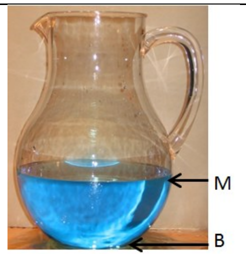
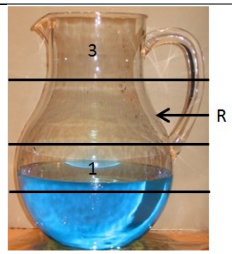
L'extrait de conversation dans lequel ces segments apparaissent est présenté au Tableau 76. Afin de bien comprendre les verbalisations des élèves, il est ici nécessaire de prendre en compte leurs gestes puisqu'ils pointent des endroits ou délimitent des parties sur le pichet en utilisant toujours les mêmes mots : « ici », « là » etc. Nous décrivons donc les gestes des élèves en référant à une légende sur l'image du pichet à chaque fois que cela s'avère nécessaire pour comprendre le propos.

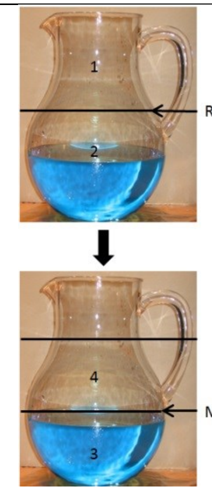
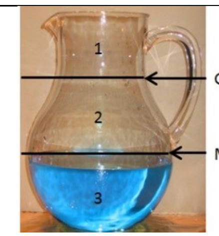
Dans cet extrait, on voit que la discussion porte exactement sur l'identification des parties du pichet en lien avec la délimitation de phases de variation de la vitesse du niveau de l'eau au cours du temps. Cette identification n'apparait pas si évidente dans la mesure où les élèves se demandent s'ils doivent prendre en compte les deux éléments suivants :

- À la base, il y a une petite partie pour laquelle la vitesse est lente. Cette partie a un diamètre quasi égal au goulot.
- Au milieu du ballon, il y a une partie pour laquelle la vitesse est presque constante, elle ne varie presque pas.

Ils en arrivent donc à distinguer au moins trois parties et au plus cinq parties. À la fin, Simon indique que le plus important est de mettre en évidence les deux parties pour lesquelles la variation de la vitesse est grande (lignes 27 à 30). La première, en-dessous du milieu du ballon, pour laquelle la vitesse diminue et la seconde, au-dessus du milieu du ballon pour laquelle la vitesse augmente. Ils ne statuent finalement pas sur le nombre de phases et choisissent d'esquiver cette difficulté en décrivant globalement que la vitesse augmente puis diminue (ligne 31-plus loin Simon corrigera : « diminue puis augmente »). La stratégie de délimitation des phases est associée par Karine à une démarche « par étapes » (ligne 32). Les phases sont donc vues comme différentes étapes successives dans le phénomène. La distinction de ces étapes n'apparait toutefois pas pour eux l'approche la plus simple.

Tableau 76 Analyse de l'extrait de conversation dans lequel les élèves de quatrième secondaire mobilisent U5 au niveau N4

#	Transcription de la conversation	Description des gestes	Endroits pointés et parties délimitées
1 2 3 4 5	SIMON : Le temps passe, **ici** une seconde, c'est plus rapide, ça devient **plus lent, plus lent, plus lent**, une seconde, **plus rapide, plus rapide, plus rapide** ÉMILIE : Le temps passe mais ça diminue un peu? Le temps passe pendant que le niveau de l'eau diminue?	Simon pointe avec la règle la base du pichet (1) puis il la déplace le long des parois. Il indique que c'est plus lent à partir d'environ 1 cm du bas jusqu'à un cm au-dessus du milieu du ballon du pichet (2). Ensuite, il indique que c'est plus rapide jusqu'au début du goulot (3).	
6 7 8 9 10 11 12 13	(15 :41) JULIE : Ben il augmente mais moins rapidement que rendu **ici** SIMON : Le temps augmente tout le temps, je parlais de la vitesse, mais en fait la vitesse faut pas dire qu'elle augmente, faut dire qu'elle varie parce que…. JULIE : Ouais SIMON : elle va nécessairement augmenter, mais tsé mettons **ici** c'est plus rapide que **là** fait que dans le fond	Julie montre vaguement le haut du pichet. Simon pointe la base (B) puis le milieu du ballon (M) du pichet.	
14 15 16	ÉMILIE : Ouais mais on s'entend que ça va te prendre plus de temps remplir **la partie du milieu** que **ça** JULIE : **Ça ici** que **ça ici**	Émilie montre la partie du milieu du pichet (1) avec deux doigts (elle délimite un intervalle), puis elle pointe la partie où le diamètre du pichet rapetisse (R). Julie montre avec deux doigts la partie du milieu (1) puis le goulot du pichet (3).	

17 18 19 20	(15 :58) SIMON : Ouais mais **ça** admettons tu peux séparer, t'es pas obligé de séparer…. **Ça ici** puis **ça** tu peux les séparer à peu près **ici** parce que **ici** tu vois que c'est pas droit *pentoute* là, t'as quand même une grosse variation puis ensuite t'en a une autre **ici**	D'abord, Simon pointe la borne R qui délimite deux parties : celle du haut incluant le goulot (1) et celle du bas incluant le ballon (2). Ensuite, il suggère de prendre le milieu du ballon (M) comme borne en justifiant que la partie en-dessous (3) est très arrondie, elle n'est pas du tout droite. Finalement, il indique que dans cette dernière partie (3), la variation est grande tout comme dans la partie au-dessus du milieu du ballon (4).	
21 22 23 24 25 26	KARINE : Une centrale… y a comme **4 parties** SIMON : Ici c'est constant, ici c'est constant puis t'as l'augmentation puis la diminution (16 :16) JULIE : Moi j'en verrais plus **3** là ÉMILIE : Moi aussi JULIE : **Ici, ici**, puis…	Karine délimite avec deux doigts la partie centrale (1) puis les deux parties arrondies au-dessus et au-dessous (2 et 3) et finalement le goulot (4). Julie pointe le milieu du ballon (M) et le début du goulot (G). Elle délimite ensuite avec deux doigts les trois parties obtenues (1, 2 et 3).	
27 28 29 30 31 32	SIMON : Non mais t'as trois… t'as **deux grosses parties au final** mais… t'as **le point de départ** puis t'as **la fin** fait que dans le fond c'est pas mal quasiment **4** mais dans le sens c'est peut-être une augmentation et une diminution, des variations dans le fond KARINE : On peut faire ça simple, augmente puis diminue, ou faire ça par étapes	Simon pointe avec la règle la base puis le haut du pichet. Il la déplace ensuite le long des parois du ballon du pichet en faisant un arrêt au milieu.	

La mobilisation de U5 au niveau N4 par les élèves de quatrième secondaire montre, d'une part, un déplacement du regard sur le pichet à celui sur la variation de la vitesse. En effet, aux niveaux N2 et N3, les élèves avaient tendance à partir de l'observation de la forme du pichet pour déduire le comportement du niveau (ou de la vitesse du niveau) ou des accroissements du niveau, alors qu'en N4, les élèves semblent partir de la façon de varier de la vitesse du niveau de l'eau pour délimiter des parties du pichet (voir par exemple les lignes 18 à 20). La variation de la vitesse du niveau de l'eau au cours du temps devient donc, apparemment, un élément sur lequel les élèves sont en mesure de s'appuyer.

Par ailleurs, la considération de deux zones particulières (la base et le milieu du ballon) montre que les élèves cherchent à identifier des endroits où la variation du niveau est quasi constante. Cette démarche est particulièrement intéressante en ce qui a trait à la modélisation graphique. En ce qui concerne la zone centrale du ballon du pichet, le fait que la vitesse soit presque constante permet de prévoir que le changement de variation au moment où la vitesse arrête de diminuer et se met à augmenter n'est pas drastique. Cela exclu par conséquent une allure en « pic » formée soit par deux segments de droite, soit par deux courbes ouvertes vers le bas. Bien que ce raisonnement n'ait pas été verbalisé par les élèves, nous pensons qu'il les a influencés puisqu'ils en sont arrivés à tracer le graphique à la Figure 36. Quant à la zone à la base du pichet, elle a été le sujet de la conversation qui a suivi celle de l'extrait du Tableau 76. D'abord, les élèves ont émis l'hypothèse selon laquelle le diamètre de la base est le même que celui du goulot. Cela les a amenés à dire que la vitesse à la base du pichet serait la même que celle dans le goulot. Ensuite, ils ont comparé les diamètres de la base et du goulot et ont déterminé que la base était moins large. Ils ont conclu que la vitesse à la base était plus grande que celle dans le goulot. Dans leur graphique, la vitesse au départ n'est pas plus grande que celle à la fin, il semble donc qu'ils aient laissé de côté cet élément. Pourtant, le fait que la vitesse au départ (au temps t=0) soit « grande » n'est pas trivial. En effet, imaginer que la vitesse du niveau est grande en partant (alors que le pichet vide commence à se remplir) et par conséquent qu'elle ne part pas de 0 pour ensuite augmenter nous semble une difficulté non négligeable puisqu'elle implique la notion de vitesse instantanée.

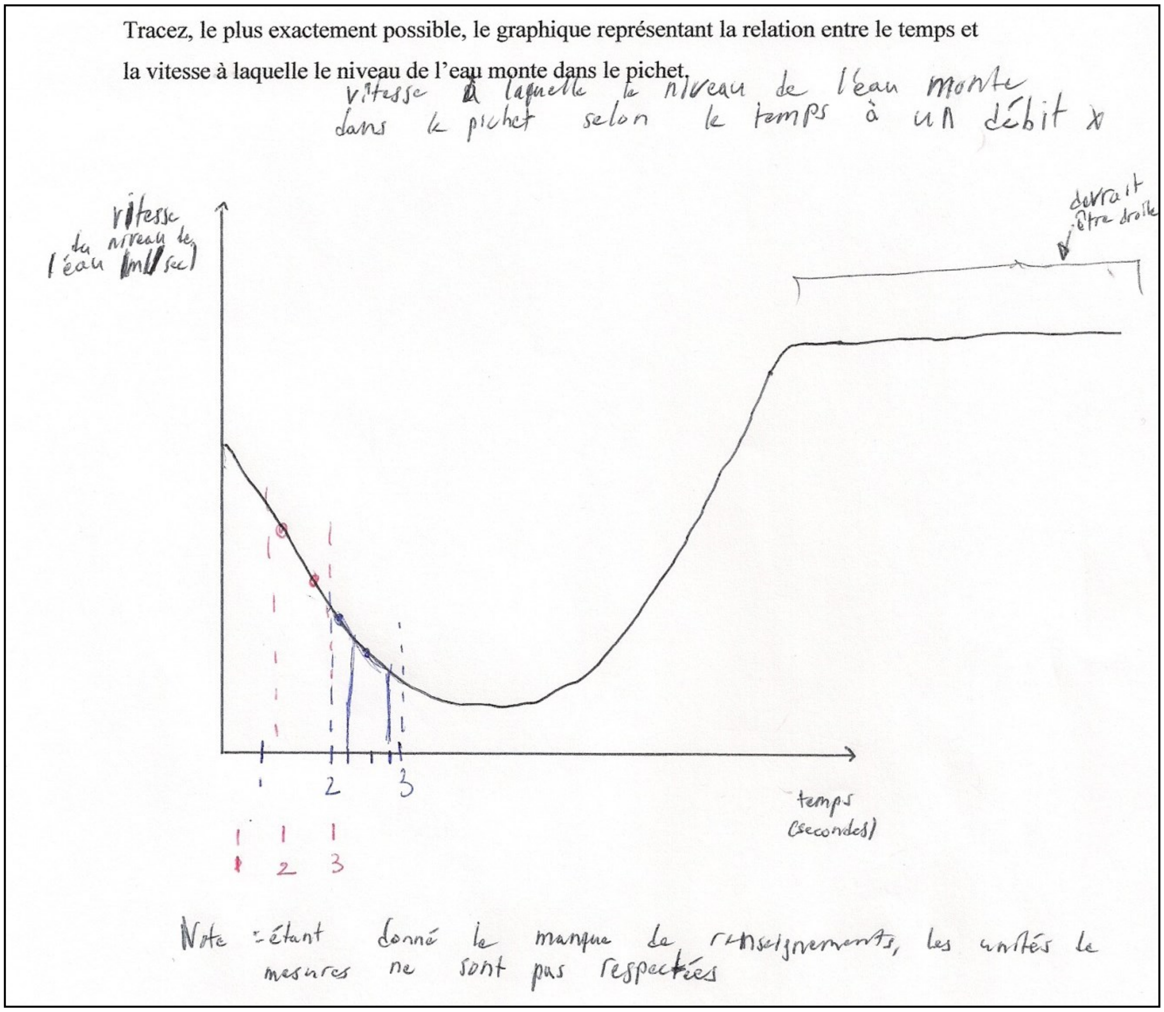


Figure 36 Graphique de la vitesse du niveau en fonction du temps tracé par les élèves de quatrième secondaire (Q5 de S2B)

On voit dans le graphique de la Figure 36 que *la vitesse est grande au départ*, qu'elle diminue de moins en moins pour *presque stabiliser* à une valeur minimale, qu'elle augmente ensuite de plus en plus pour terminer constante. L'allure de la courbe est donc cohérente avec le découpage du pichet par les élèves : trois phases de variation apparaissent clairement et les deux zones particulières influencent l'allure de la courbe (grandeur de l'ordonnée à l'origine et ouverture de la courbe).

La variété des niveaux de mobilisation de U5- et U5 et la richesse d'une analyse détaillée du chemin du raisonnement tel que décrit précédemment nous amènent à investiguer les trajectoires du raisonnement pour chaque groupe d'élèves.

4.5.3.4 Analyse de la trajectoire du raisonnement lors de la mobilisation de U5 dans le contexte du pichet

Afin de mettre en évidence la trajectoire du raisonnement des élèves lors de la mobilisation de U5 dans le contexte du pichet, nous avons pris en compte la succession des segments présentés dans les tableaux 71 à 75 pour chaque groupe d'élèves. Cela nous a menée à mettre en évidence l'évolution des verbalisations de chaque groupe d'élèves à travers les différents niveaux de mobilisation de U5 (représenté par un +) et U5- (représentée par un -) selon les situations (S1, S2A et S2B) et les questions (voir Tableau 77, Tableau 78 et Tableau 79).

Nous constatons que, pour l'ensemble des groupes, la mobilisation de U5 apparait particulièrement à la troisième question de S1 qui porte directement sur les accroissements du niveau à mesure que le pichet est rempli avec un verre qui contient toujours la même quantité d'eau puis à la première question de S2B (« Décrivez comment se comporte la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet à mesure que le temps passe »).

Tableau 77 Évolution de la mobilisation de U5 (+) et U5- (-) par situation et par question pour le groupe de **quatrième secondaire**

Situation	**S1**															**S2A**			**S2B**					
Questions / Niveau	**Q1-Q2**									**Q3**					**Q1**		**Q2**	**Q1**					
N1	-			-	-	-		-							-	-							
N2		-	+						-	-	-	+	+	+				+			-	-	-
N3																	+						
N4							-												+	+			

Tableau 78 Évolution de la mobilisation de U5 (+) et U5- (-) par situation et par question pour le groupe de **cinquième secondaire**

Situation	**S1**							**S2A**					**S2B**	
Questions / Niveau	**Q1-Q2**	**Q3**					**Q10**	**Q1**		**Q2**			**Q1**	
N1														
N2				+	-	+		+	+				+	+
N3	-	+	+				+			+	+	+		
N4														

Tableau 79 Évolution de la mobilisation de U5 (+) et U5- (-) par situation et par question pour le groupe du **collégial**

Situation	**S1**						**S2A**		**S2B**		
Questions / Niveau	**Q1 et Q2**		**Q3**			**Q6**	**Q2**	**Q3**	**Q1**		
N1		-									
N2				-		+	-		+	+	+
N3	-		+		+			-			
N4											

À la troisième question de S1, les élèves de cinquième secondaire et du collégial sont en mesure de distinguer implicitement des phases à partir de l'identification du changement de comportement des accroissements du niveau pour des accroissements constants du volume (U5 au niveau N3). Les élèves de quatrième secondaire, quant à eux, distinguent aussi implicitement des phases mais à partir du changement de comportement du niveau qualifié intuitivement (il augmente plus lentement, plus rapidement etc.) (U5 au niveau N2).

À la question 1 de S2B, les élèves de cinquième secondaire et du collégial reviennent à une distinction implicite de phases à partir du changement de comportement de la vitesse établie intuitivement, ils ne regardent pas les accroissements de la vitesse (U5 au niveau N2). C'est à cette question que les élèves de quatrième secondaire font le saut vers une distinction explicite des phases de variation associées à différentes parties du pichet (U5 au niveau N4). Ainsi, il semble que le passage à l'étude de la grandeur « vitesse » en fonction du temps leur ait permis d'envisager le découpage en phases afin de préciser les changements dans la façon de varier de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente. Il est à noter toutefois que pour eux cette démarche n'est pas simple. Elle pose le problème de détermination du nombre exact de phases et des bornes de chacune (voir la conversation du Tableau 76). C'est pourquoi ils décident finalement de revenir à une description plus globale de la façon de varier à un niveau de mobilisation N2.

4.5.3.5 Mobilisation de U5 dans le contexte de l'échelle

Dans le contexte de l'échelle pour lequel l'identification de phases de variation ne nous apparaissait pas *a priori* pertinente, les élèves de quatrième secondaire et du collégial se sont questionnés sur la possibilité qu'il y ait deux phases de variation (voir segments dans le

Tableau 80). Cette possibilité est apparue lors de la comparaison de la façon de varier de la distance du haut en haut du mur et en bas du mur. En effet, la simulation du phénomène à l'aide du matériel fourni porte à croire qu'en haut du mur les accroissements sont presque égaux, alors qu'ensuite, ils sont de plus en plus grands. On voit même que vers le milieu du mur, les accroissements deviennent très grands. Les élèves associent alors cette façon de varier au modèle de variation exponentiel puisque *ça grandit soudain très vite*.

Tableau 80 Segments codés au niveau de mobilisation N2 de U5- dans le contexte de l'échelle

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
S3	1 et 2	SEC4	**de là à là elle va peut-être augmenter plus vite que de là à là**
		COL	non mais, ici, check **ça augmente plus beaucoup là en bas, mais ici ça augmente quand même beaucoup**

4.5.4 Analyse des verbalisations associées à l'unité de raisonnement U6

Il est d'abord important de rappeler que les élèves se sont exprimés sur le comportement des accroissements de la grandeur dépendante uniquement dans le cadre des questions portant directement sur le sujet (voir section 4.5.2). Par exemple, la quatrième question de S1 demandait de décrire *comment l'augmentation du niveau de l'eau se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet*, alors que le pichet était rempli avec un verre B contenant **moins d'eau** que le verre A utilisé à la question précédente. Ainsi, dans chaque situation, la considération d'accroissements plus petits de la grandeur indépendante par les élèves a été induite par le questionnement. Cela explique en partie pourquoi la sous-unité U6b relative à un recours spontané aux accroissements plus petits n'a pas été observée.

En général, dans les segments codés U6a (voir Tableau 81), on voit que l'arrivée d'une nouvelle situation dans laquelle l'accroissement de la grandeur indépendante est plus petit suscite l'identification, d'une part, de l'invariant, soit de ce qui était pareil dans les deux situations et, d'une autre part, côté du variant, soit de ce qui était différent dans les deux situations.

Tableau 81 Segments codés U6a et U6c

Situation	Question	Groupe	Texte (segment codé)
			U6a
S1	4	SEC4	parce que y'en a moins qu'en A, mais **ça varie de la même façon**
		SEC5	Même si le volume d'eau dans les verres est différent **ça va être environ la même affaire**
	8	SEC4	Ben tu sais que tu mettes une goutte de un millilitre ou que tu mettes une affaire qui met 250ml à la fois, le volume d'eau augmente, **le niveau de l'eau augmente avec la même relation**
		COL	Élise : Non mais ici ils ne demandent pas le graphique, ils demandent quel serait le comportement de l'augmentation du niveau d'eau Bruno : **C'est exactement la même chose** Chloé : C'est la même chose *mais beaucoup plus précis*
S2A	3	COL	peu importe l'intervalle de temps qu'on prend, qu'il soit petit ou grand, **ça va être la même chose**… La même variation
S3	4	SEC5	**c'est la même affaire** c'est juste que là c'est plus long
			fait juste dire mettons que *la différence de distance est plus petite* vu que les pas sont plus petits, mais quand même, c'est comme tu dis *il y aurait plus de données dans un graphique*
		COL	**c'est exactement la même chose**, mais *les variations sont plus petites*
	5	SEC4	l'affaire c'est que oui ils sont plus petits, mais la… **l'augmentation de la distance en général va toujours être la même** tsé… **Proportionnellement**, c'est juste que
	8	SEC5	Justin : ça avance à pas d'escargots Fabrice : on va le voir, genre mais *à plus petite échelle* Justin : ouais, *ça va être au millimètre près*
		COL	j'ai dit le comportement serait le même qu'à la question précédente mais *le niveau de variation sera plus petit* mais **la tendance que l'accroissement augmente est toujours présente**
S4A	3	COL	Chloé : pour des intervalles d'une seconde… Martin : **c'est la même chose**, c'est juste que *les variations ne vont pas être les mêmes*
			U6c
S2A	3	COL	Martin : ouais c'est un plus petit volume à chaque fois Chloé : c'est comme si on faisait delta Y tend vers zéro
S3	5	COL	Bruno : imagine-toi que les pas sont tellement petits que… Inaudible Martin : là tu rentres, tu deviens dans la dérivée Bruno : la limite, quand le pas tend vers zéro

Premièrement, l'invariant identifié dans la plupart des segments codés U6a est la généralisation du comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements plus petits de la grandeur indépendante (voir texte en gras dans le Tableau 81). Cette généralisation intuitive a été exprimée de plusieurs façons. La verbalisation privilégiée en est une qui indique tout simplement que le comportement est le même que celui identifié précédemment (« c'est la même affaire », « c'est la même chose », « ça varie de la même façon »). Certaines verbalisations apportent toutefois des précisions sur ce que signifie pour les élèves que le comportement soit le même.

Les élèves du collégial parlent, à la huitième question de S3 d'une **tendance** qui se maintient. Cette idée est aussi exprimée par les élèves de quatrième secondaire qui indiquent à la huitième question de S1 que « le niveau de l'eau augmente **avec la même relation** ». Nous pensons toutefois que, pour ces élèves, l'existence d'une seule relation est sans doute associée à l'existence d'une seule règle pour la fonction *f* (le niveau en fonction du volume) et qu'il va de soi que cette relation est la même sur l'ensemble du domaine de cette fonction. Par la suite, à la cinquième question de S3, ils indiquent que « l'augmentation de la distance en général va toujours être la même (…) **proportionnellement** ». Ici, ils tentent d'exprimer une certaine constance dans le le comportement de l'augmentation, mais comme l'augmentation de la distance augmente et qu'elle n'est donc pas la même, ils utilisent le terme « proportionnellement ». L'idée de proportionnalité a été évoquée à quelques reprises par tous les groupes d'élèves (voir sections 4.4.4.3 et 4.4.4.4), mais l'utilisation qui en est faite ici est quelque peu différente. Au-delà de l'idée de proportionnalité utilisée pour établir l'existence un lien de dépendance entre deux grandeurs (ou l'idée de « ça bouge ensemble »), les élèves parlent de proportionnalité pour signifier qu'une relation est maintenue. Ainsi, ils utilisent la notion de proportionnalité non seulement pour indiquer que les variations des grandeurs sont liées mais aussi qu'il existe une et une seule relation qui détermine leurs variations concomitantes.

Dans le cas des élèves de cinquième secondaire, aucun élément de précision n'apparait dans les segments repérés. Pourtant pour ces élèves, à la quatrième question de S1, la démarche menant à la généralisation du comportement des accroissements a été particulièrement intéressante. D'abord, à la question précédente, ils avaient répondu intuitivement à la question sans faire de manipulation (voir leur réponse écrite à la Figure 37).

Question 3

Le verre A, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet.

a. Pour chaque verre ajouté, l'accroissement du niveau de l'eau est-il le même ?

Non

b. À mesure que le pichet se remplit, les accroissements du niveau de l'eau sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement ? Expliquez.

Autrement, car au début il sera croissant, ensuite décroissant et jusqu'au bord du pichet il sera constant.

c. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.

Au début, le niveau augmentera lentement et ensuite, il augmentera plus rapidement et gardera la même vitesse jusqu'au bord.

Figure 37 Production écrite des élèves de cinquième secondaire à la question 3 de S1

L'arrivée d'une seconde question du même type les ébranle et les amène à douter de leur réponse à la première question. Ils décident alors d'effectuer la manipulation avec le verre B pour vérifier comme ils le disent leur « hypothèse ». Cette manipulation déclenche chez Charles un questionnement intéressant sur l'influence de la grandeur de l'accroissement de volume, la conversation suivante s'ensuit.

(15 :15) CHARLES : **Je suis en train de me demander si le A il monte jusque-là, le centre de là, puis il remonte jusque-là, y a doublé, y a augmenté de la même façon, non?**
FABRICE : Je sais pas
(15 :27) CHARLES : Si le A augmente l'eau jusque dans le centre, tu mets un verre de A, du A, **il va peut-être augmenter jusque-là fait que t'as doublé ton niveau d'eau pareil**
FABRICE : C'est vrai
CHARLES : Ça a pas bougé là, prends donc le verre A puis essaies-le
FABRICE : on devrait remettre l'eau dans celui-là
CHARLES : Mets l'eau dans le verre A à la place
(15 :57) CHARLES : Ouais, je penserais pas que ça se rende jusqu'au milieu
JUSTIN : Ça se rend pas jusqu'au milieu

Charles pense à une possibilité importante : *et si en versant une première fois le verre A, on remplissait la première moitié du ballon du pichet?* Dans ce cas, il indique, à juste titre, qu'en ajoutant un second verre on remplirait la seconde moitié du ballon et qu'alors les deux accroissements de niveaux seraient identiques. Or, si le niveau double c'est qu'il a « **augmenté de la même façon** » (ligne 2). Ce questionnement justifie la nécessité de faire l'expérience. Ils manipulent ainsi le matériel pour voir jusqu'où se rend le niveau de l'eau après avoir versé une première fois le verre A. Ils constatent alors que ce n'est pas le cas et par conséquent ils en reviennent à leur hypothèse initiale (les accroissements ne sont pas les mêmes).

Deuxièmement, les élèves identifient principalement un élément qui diffère (le *variant*) lorsqu'on prend des accroissements plus petits de la grandeur indépendante (voir texte en *italique* dans le Tableau 81). Ils déduisent en effet que si les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits, alors les accroissements de la grandeur dépendante le sont aussi. Ils se préoccupent donc de la grandeur de l'accroissement. Puis, ils en viennent à établir que la précision dépend du nombre de coordonnées qu'on obtient. Les élèves de cinquième secondaire précisent d'ailleurs le lien avec le graphique : « il y aurait plus de données dans un graphique ». Ils ajoutent aussi, à la quatrième question de S3, que le temps total pour que le haut de l'échelle arrive en bas du mur sera plus long lorsque les pas sont plus petits. Comme le temps n'est pas ici la grandeur indépendante, cette affirmation n'est pas forcément vraie, cela dépend du rythme auquel les pas sont effectués. Mais pour ces élèves, il semble aller de soi que le rythme est le même.

En ce qui concerne U6c, les élèves du collégial, dans chacun des deux contextes (le pichet et l'échelle), ont imaginé la poursuite de la démarche consistant à prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante (voir segments codés U6c dans le Tableau 81). Ils ont reconnu ici l'idée du passage à la limite lorsque les accroissements deviennent si petits qu'ils tendent vers 0. Dans le cas de l'échelle, ils expriment même que ce passage est celui vers la dérivée.

4.5.5 Analyse des verbalisations associées à l'unité de raisonnement U7

L'unité de raisonnement U7 concerne globalement l'association entre l'augmentation de la grandeur dépendante et l'idée de taux de variation. Les segments codés U87 sont regroupés dans le Tableau 82.

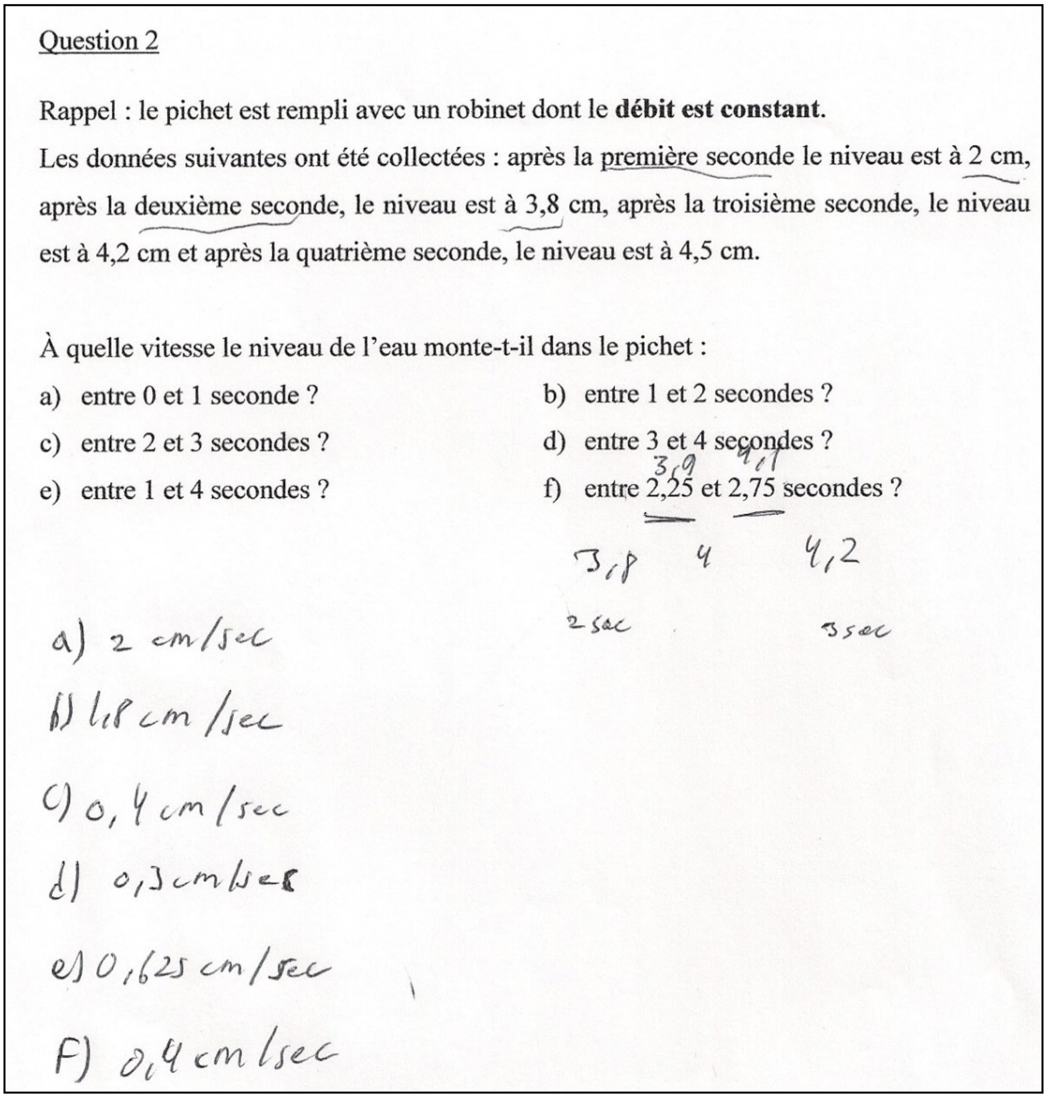
Nous constatons, premièrement, que dans trois segments les élèves parlent explicitement du taux de variation (#3, #8, #10) et dans quatre cette notion est abordée implicitement (#5, #6, #7 et #9). Les différentes verbalisations et les conversations dans lesquelles elles apparaissent dévoilent une forte association entre la notion de taux de variation et l'idée d'existence d'une relation entre deux grandeurs chez les élèves de quatrième secondaire. Chez les élèves du collégial, la notion de taux de variation est injectée lors du calcul de vitesses moyennes. Deuxièmement, dans deux segments les élèves de quatrième secondaire parlent de la vitesse alors que celle-ci ne correspond pas forcément au taux de variation dans la situation donnée (#1 et #4) et, dans un segment, les élèves de cinquième secondaire abordent la notion d'accélération en l'associant correctement à l'augmentation de la vitesse (#2). La prise en compte des contextes dans lesquels apparaissent ces segments permet de mieux cerner le rôle de ces trois notions (taux de variation, vitesse et accélération) injectées par ces élèves lors du déploiement d'un raisonnement covariationnel.

Tableau 82 Segments codés U7

<table>
<tr><th>Situation</th><th>Question</th><th>Groupe</th><th>Texte</th><th># segment</th></tr>
<tr><td>S2A</td><td>1</td><td>SEC4</td><td>mais là je sais qu'il est pas question de vitesse mais j'ai juste marqué que entre parenthèses c'est sûr que la vitesse joue là</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">S2B</td><td>1</td><td>SEC5</td><td>l'accélération, elle va être constante</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>SEC4</td><td>on peut se faire un tableau de données puis trouver le taux de variation… entre zéro et une seconde</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="6">S3</td><td rowspan="4">1 et 2</td><td rowspan="4">SEC4</td><td>ben la distance dans le fond, on peut parler aussi de la vitesse</td><td>4</td></tr>
<tr><td>ben pas la vitesse mais l'augm…le rapport</td><td>5</td></tr>
<tr><td>à un moment donné, le ratio, c'est le rapport qui ne change pas</td><td>6</td></tr>
<tr><td>ce qui va changer par contre, ça va être le… Ben… La proportion on va dire de changement</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">SEC4</td><td>l'augmentation va toujours rester la même parce que c'est ça en fait c'est le taux de variation</td><td>8</td></tr>
<tr><td>L'augmentation tsé c'est vraiment toujours un rapport donc il n'y a rien qui peut changer</td><td>9</td></tr>
<tr><td>S4B</td><td>2</td><td>COL</td><td>Élise : à quelle vitesse le haut de l'échelle se déplace-t-il entre sept et huit secondes?…ben, non il faut que je fasse ça moins ça…
Chloé : taux de variation</td><td>10</td></tr>
</table>

4.5.5.1 La mobilisation de U7 : les références à la notion de « taux de variation »

Le segment #3 apparait chez les élèves de quatrième secondaire alors qu'ils cherchent à calculer la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet (voir leur production écrite à la Figure 38).



Question 2

Rappel : le pichet est rempli avec un robinet dont le **débit est constant**.

Les données suivantes ont été collectées : après la première seconde le niveau est à 2 cm, après la deuxième seconde, le niveau est à 3,8 cm, après la troisième seconde, le niveau est à 4,2 cm et après la quatrième seconde, le niveau est à 4,5 cm.

À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il dans le pichet :

a) entre 0 et 1 seconde ?
b) entre 1 et 2 secondes ?
c) entre 2 et 3 secondes ?
d) entre 3 et 4 secondes ?
e) entre 1 et 4 secondes ?
f) entre 2,25 et 2,75 secondes ?

3,9 4,1

3,8 4 4,2

2 sec 3 sec

a) 2 cm/sec

b) 1,8 cm/sec

c) 0,4 cm/sec

d) 0,3 cm/sec

e) 0,625 cm/sec

F) 0,4 cm/sec

Figure 38 Production écrite du groupe de quatrième secondaire à la question 2 de S2B

Dès le départ, ils ont l'idée de construire un tableau de données et de calculer le taux de variation entre 0 et 1 seconde pour répondre à la sous-question a). Ils associent donc sans difficulté la vitesse du niveau de l'eau à la notion de taux de variation comme calcul (voir à ce sujet la section 1.2.1 de la problématique). Par la suite, ils calculent facilement chaque vitesse lorsque l'accroissement de temps est d'une seconde. Par exemple, dans l'extrait de conversation suivant, on voit que la vitesse de 2 cm/s entre 0 et 1 seconde est obtenue rapidement car le niveau augmente de 2 centimètres durant cette seconde (lignes 4 et 5).

SIMON : mettons pour a), c'est de 2 centimètres à la seconde
JULIE : Ouais
ÉMILIE : Euh attends wow
JULIE : Parce que, durant la première seconde…ouais c'est ça**… le niveau de l'eau y'a augmenté à 2 centimètres, fait que c'est 2 centimètres par seconde**, sauf que là après**, pour passer à la deuxième seconde, le niveau de l'eau a augmenté de 1,8**
(26 :33) SIMON : Donc ça veut dire **1,8 par seconde**
JULIE : Ouais, ouais dans le fond… ensuite **la troisième seconde, 4,2, on ferait 4,2 – 3,8**

Le raisonnement est le même pour le passage de 1 à 2 secondes (lignes 5 et 6) puis entre 2 et 3 secondes, lorsque la différence entre les deux niveaux est moins évidente, Julie indique quel est le calcul à faire (ligne 8). Cependant, lorsque l'accroissement de temps est différent de un, à la sous-question e), ils se trompent en divisant l'accroissement de niveau par 4 au lieu de 3. À ce moment, ils n'explicitent pas leur raisonnement. On ne peut donc pas savoir s'ils voient la vitesse et le taux de variation comme le rapport entre l'accroissement de niveau **et l'accroissement de temps**.

Par la suite, les élèves de quatrième secondaire font encore référence au « taux de variation » lors du travail dans le contexte de l'échelle (question 5 de S3). L'extrait de conversation duquel le segment #8 est tiré n'informe pas sur le sens qui est donné au terme « taux de variation » au-delà de ce qui est dit soit que l'augmentation correspond au taux de variation. Plus loin, néanmoins, apparaît le segment #9 dans lequel les élèves précisent que pour eux l'augmentation c'est un **rapport** et que ce rapport ne change pas lorsque l'accroissement de la distance du bas est plus petit. Cette idée avait déjà été amenée lors du travail sur les questions 1 et 2 de S3. Dans les segments #4 à #7 apparaissent différentes tentatives de verbalisation pour exprimer comment varie la distance du haut. À ce moment toutefois, les élèves sont dans une situation de tension car ils cherchent à donner un sens au fait de « varier de la même façon » (voir section 4.3.5.4). Ils oscillent entre la comparaison des accroissements concomitants (est-ce que les accroissements des deux distances sont égaux?), la comparaison des accroissements successifs de la distance du haut pour des accroissements constants de la distance du bas (est-ce qu'ils sont toujours de plus en plus grands?) et la simple considération du sens de variation de la fonction (lorsqu'une distance augmente l'autre augmente). Entre les segments #6 et #7, ces trois points de vue sont discutés. Au départ (#6), ils établissent qu'il y a un rapport qui ne change pas puis à la fin que « la proportion de changement » change. Pourtant, les élèves ne semblent pas changer d'avis mais plutôt tenter d'exprimer une dualité. En effet, ils veulent à la fois mettre en évidence la stabilité de l'existence d'une relation entre les grandeurs et l'irrégularité de cette relation.

Par la suite, lors du travail sur les questions 3 et 4, les élèves établissent que les accroissements de la distance du haut sont de plus en plus grands et, ce, même pour des accroissements plus petits de la distance du bas (voir leur réponse à la question 4 à la Figure 39). C'est pourquoi, nous ne pensons pas que la constance d'un rapport ou du taux de variation envisagée dans le segment #8 puisse être associée à une erreur classique de linéarisation de la relation entre les grandeurs. Nous pensons plutôt que les élèves tentent d'exprimer le maintien du comportement des accroissements ou, comme indiqué à la section précédente (voir section 4.5.4), *une certaine constance dans le phénomène due à l'existence d'une relation précise entre les grandeurs*. Dans le contexte de l'échelle, il est vrai qu'il existe une et une seule règle mettant en relation les deux grandeurs et valable sur l'ensemble du domaine étudié. À l'instar de la notion de proportionnalité, la notion de taux de variation est injectée ici afin d'établir l'existence de cette relation entretenue par les deux grandeurs. Ce qui semble avoir poussé ces élèves à chercher des moyens d'exprimer le maintien d'une même relation c'est la constatation suivante : « des accroissements plus petits de la distance du bas entrainent des accroissements plus petits de la distance du haut ». En effet, l'identification du variant entre les situations des questions 3, 4 et 5, soit la différence de grandeur des accroissements de la distance du bas lorsque les accroissements de la distance du haut sont plus petits (voir l'explication de cet élément à la section 0), a amené les élèves à tenter de préciser davantage ce qui était invariant. Pour eux, il est clair que le comportement de l'augmentation de la distance du haut est le même lorsque les accroissements de la distance du bas sont plus petits. Ils associent cette idée de « même comportement » à celle de « taux de variation constant » probablement parce que cette association est vraie pour les fonctions affines et que leur expérience d'étude des fonctions concerne principalement cette famille de fonctions.

Question 4

Sarah déplace le bas de l'échelle d'un pas puis d'un autre etc. éloignant ainsi le bas de l'échelle du mur mais en gardant le haut de l'échelle appuyée sur le mur. Les pas de Sarah sont tous de la même longueur ET ils sont plus petits que ceux de Michel.

Décrivez comment **l'augmentation de la distance du haut** se comporte à mesure que la distance du bas augmente.

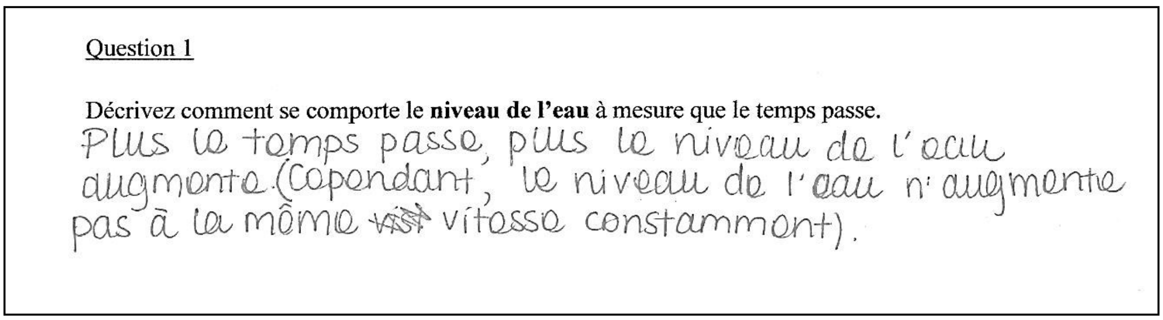
Exactement comme Michel mais le nombre de pas que Sarah devra faire pour arriver àun point x sera plus grand.

Figure 39 Production écrite des élèves de quatrième secondaire à la question 4 de S3

Dans le segment #10 apparait aussi le terme « taux de variation ». Il est utilisé cette fois pas les élèves du collégial lors du travail sur la fonction *g*' dans le contexte du pichet (la vitesse du haut de l'échelle en fonction du temps). La question posée est la même que celle de la Figure 38 mais avec l'échelle. Des valeurs de la distance du haut sont donc données à des instants précis et on leur demande de calculer les vitesses entre plusieurs instants. Dès le début, Chloé associe le calcul de la vitesse à celui du taux de variation. Elle ne précise toutefois pas, et les autres élèves non plus par la suite, qu'il s'agit de la vitesse moyenne même si cette notion leur est très familière. C'est seulement à la question suivante, alors qu'on demande de déterminer la vitesse en un instant précis, qu'ils parleront de taux de variation instantané.

4.5.5.2 La mobilisation de U7 : les références aux notions de « vitesse » et d'« accélération »

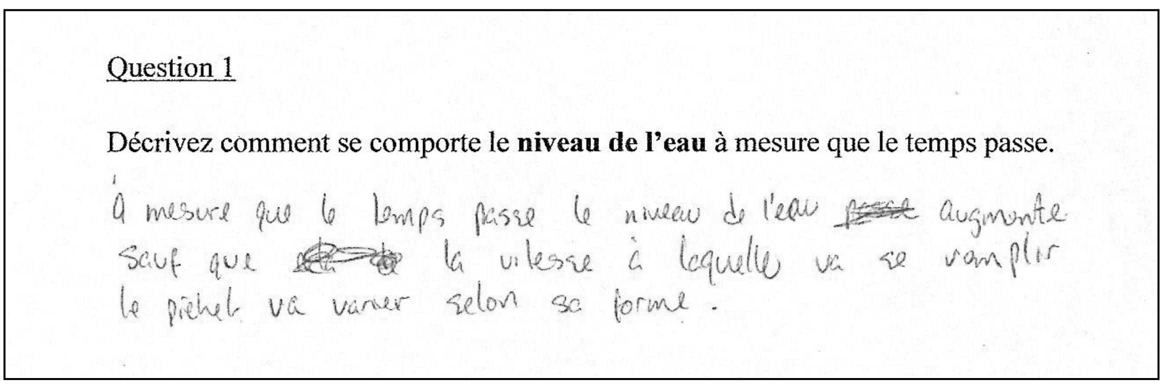
Dans les segments #1 et #4, les élèves de quatrième secondaire parlent de « vitesse ». Dans le premier cas (#1), la fonction étudiée est *g* (niveau de l'eau en fonction du temps), par conséquent, la vitesse correspond au taux de variation de la fonction. Émilie, dès le début du travail en équipe sur S2A partage sa réponse individuelle (voir Figure 40). Elle ajoute à l'oral qu'elle est consciente qu'il n'est pas question de vitesse dans l'énoncé de la question mais qu'il est certain que la vitesse joue un rôle. Pour elle, préciser que la vitesse change permet de nuancer son affirmation « plus le temps passe, plus le niveau augmente ». Cette nuance est faite en terme de ce que ne fait pas la vitesse : « le niveau de l'eau n'augmentera pas à la même vitesse constamment ». Ainsi, il semble que pour elle, la vitesse n'est pas constante puisque le niveau de l'eau n'augmente pas de façon constante. Karine ajoute qu'elle a écrit la même chose (voir Figure 41). Pour elle, la vitesse permet aussi de nuancer le propos, mais elle aborde la variation de la vitesse selon la forme du pichet. Ainsi, elle voit le lien entre la forme du pichet et la variation de la vitesse.


Question 1

Décrivez comment se comporte le **niveau de l'eau** à mesure que le temps passe.

Plus le temps passe, plus le niveau de l'eau augmente (Cependant, le niveau de l'eau n'augmente pas à la même ~~vit~~ vitesse constamment).

Figure 40 Production écrite individuelle d'Émilie (SEC4) à la question 1 de S2A

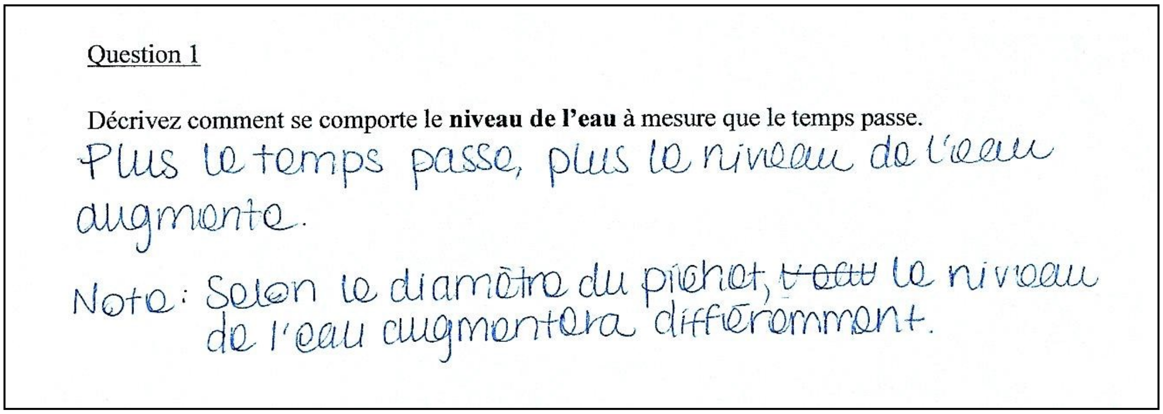

Question 1

Décrivez comment se comporte le **niveau de l'eau** à mesure que le temps passe.

à mesure que le temps passe le niveau de l'eau ~~passe~~ augmente sauf que la vitesse à laquelle va se remplir le pichet va varier selon sa forme.

Figure 41 Production écrite individuelle de Karine (SEC4) à la question 1 de S2A

De cette considération de la vitesse qui change, les élèves transposent facilement le comportement de f (niveau en fonction du volume) à celui de g (niveau en fonction du temps). Ils parlent finalement de l'augmentation du niveau en indiquant que « le niveau augmentera différemment » (voir Figure 42). Le lien entre comment le niveau augmente et la vitesse du niveau au cours du temps est donc spontanément établi.


Question 1

Décrivez comment se comporte le **niveau de l'eau** à mesure que le temps passe.

Plus le temps passe, plus le niveau de l'eau augmente.

Note : Selon le diamètre du pichet, ~~l'eau~~ le niveau de l'eau augmentera différemment.

Figure 42 Production écrite collective (SEC4) à la question 1 de S2A

Dans le second cas (#4), la fonction étudiée est *f* (distance du haut en fonction de distance du bas) et alors la vitesse ne correspond pas au taux de variation de la fonction. D'ailleurs, les élèves s'en rendent vite compte et reviennent sur cette verbalisation en utilisant l'idée de rapport (segment #5). La vitesse est donc associée à cette idée de rapport mais il y a une nuance que les élèves n'explicitent pas. On voit quand même que, dans ce contexte, la vitesse n'est pas LE rapport dont il est question.

Dans le segment #2, les élèves de cinquième secondaire parlent de l'accélération. Ils étudient alors la vitesse du niveau de l'eau en fonction du temps. Dans l'extrait suivant, on voit que la discussion tourne autour du comportement de la vitesse et que la notion d'accélération est utilisée pour parler de l'augmentation de la vitesse (lignes 1 et 3). Le raisonnement des élèves est probablement le suivant : « si le niveau augmente de plus en plus rapidement c'est qu'il y a accélération ». En outre, à la ligne 5 (segment #2), Mathieu précise que l'accélération est constante alors qu'aucun élément ne permet de déterminer cette constance. En fait, pour établir comment se comporte l'accélération, il aurait fallu mettre d'abord en évidence les accroissements des accroissements du niveau, ce que les élèves ne font pas (voir aussi à ce sujet la section 0). L'idée d'une accélération constante semble venir du parallèle que font ces élèves avec la chute des corps en physique (voir notre analyse de ce même extrait à la section 0). Il semble que pour eux, la notion d'accélération soit forcément associée à une accélération constante puisque c'est le cas dans la seule situation dans laquelle ils ont rencontré cette notion à l'école.

1	Mathieu : ici ça va être lent… C'est sûr que ça va **accélérer** parce qu'il en faut moins
2	Fabrice : ici ça va être plus rapide
3	Justin : ça va **accélérer** puis…
4	Fabrice : ça va être de plus en plus lent, de plus en plus rapide, constant
5	Mathieu : **l'accélération, elle va être constante**
6	Fabrice : **une accélération de 9,8**
7	*Rires*

4.6 Les unités de raisonnement liées à l'étude quantitative des accroissements concomitants

Les descriptions initiales des unités U8 à U13 sont restées inchangées dans la grille d'analyse finale (voir Tableau 83).

Tableau 83 Descriptions des unités U8 à U13 dans les grilles initiale et finale

U8	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement précis de la grandeur indépendante
U9	Quantifier un accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement unitaire de la grandeur indépendante
U10	Quantifier le rapport entre l'accroissement correspondant (taux moyen) à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier
U11	Quantifier le rapport entre les accroissements correspondants (taux de variation moyen) à des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante et ces derniers
U12	Déterminer une valeur de la grandeur indépendante pour laquelle on connait la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)
U13	Déterminer, pour une valeur de la grandeur indépendante donnée, la limite du rapport entre l'accroissement correspondant à un accroissement précis de la grandeur indépendante et ce dernier, lorsque l'accroissement de la grandeur indépendante tend vers 0 (taux de variation instantané)

En fait, nous avons constaté que même si le questionnement visait la sollicitation de ces unités de raisonnement, il était difficile de les identifier dans les propos des élèves. La mobilisation d'unités de raisonnement liées à l'étude covariationnelle quantitative de la fonction a effectivement donné davantage lieu à des calculs numériques qu'à des verbalisations des unités de raisonnement sous-jacents à ces calculs. Les calculs ont ainsi occulté l'explicitation du raisonnement.

Nous avons tout de même repéré quelques segments permettant de dire en général que les élèves des trois groupes ont été en mesure de mobiliser les unités U8 à U10 lors du travail sur les questions sollicitant directement ces unités. Aucune trace de mobilisation de U11 n'est apparue et U12 et U13 ont été mobilisées uniquement par les élèves du collégial. Pour ces deux dernières unités, le taux de variation instantané et la vitesse instantanée ont été associées à la pente de la tangente. Les élèves ont donc tenté soit de déterminer la pente de la tangente à la courbe (U13), soit de déterminer l'abscisse du point de tangence d'une tangente dont on connait la pente. Les stratégies des élèves à ce sujet mériteraient une analyse plus approfondie qui permettrait de mettre en évidence leur compréhension de la notion de dérivée dans ce contexte particulier. Nous ne proposons pas cette analyse ici puisqu'elle nous éloignerait trop de nos questions de recherche.

4.7 Synthèse et réponses aux questions spécifiques de la recherche

Dans l'optique d'explorer les caractéristiques d'une approche covariationnelle de la fonction comme moyen de favoriser le passage de la fonction à la dérivée, nous nous sommes demandée comment s'actualise le déploiement d'un raisonnement covariationnel en situation chez des élèves de 15 à 18 ans et, plus précisément, nous avons posé les questions suivantes :

1) Quelles unités de raisonnement sont mobilisées par ces élèves, comment s'actualisent-elles et en réponse à quelles questions?
2) Comment s'articulent ces unités dans la dynamique du raisonnement déployé par ces élèves et comment les situations influencent-elles cette articulation?

Les tableaux de mouvement du raisonnement (voir Annexe 12), construits grâce au codage des discussions transcrites et montrant la succession des unités mobilisées par les élèves, permettent de répondre globalement à ces questions. Ils montrent, d'une part, que les groupes d'élèves interrogés mobilisent, dans les situations proposées, toutes les unités de raisonnement associées dans la grille initiale d'analyse à l'étude globale de la fonction et à l'étude locale qualitative des accroissements concomitants (U1 à U7). Ce résultat en lui-même est crucial puisqu'il montre que les situations ont effectivement sollicité le déploiement d'un raisonnement covariationnel chez des élèves n'ayant pas reçu d'enseignement spécifique sur la covariation. D'autre part, il apparait clairement que la trajectoire suivie par le raisonnement à travers les diverses unités dans ces situations n'a pas été linéaire. En fait, la plupart du temps, au sein du travail sur une même question, les élèves ont effectué un va-et-vient entre plusieurs unités de raisonnement. Comme chaque question avait été pensée pour solliciter certaines unités en particulier, ce constat nous semble révélateur puisqu'il met de l'avant le fossé entre la trajectoire linéaire du raisonnement attendu et la trajectoire aux allures d'un électrocardiogramme du raisonnement effectivement déployé. Ainsi, même si les unités sollicitées ont effectivement été mobilisées, elles ne l'ont pas été isolément. L'interaction constante entre les différentes unités dans la dynamique du raisonnement nous a menée, d'une part, à décrire leurs rôles respectifs à l'aide de la métaphore d'un arbre : les unités *racines* sont à la base du raisonnement, les unités *troncs* sont le cœur du raisonnement et les unités *branches* sont les prolongements des unités *troncs* (voir section 4.2). D'autre part, cette interaction a débouché sur une analyse détaillée permettant d'examiner de plus près le raisonnement des élèves (voir sections 4.3, 4.4 et 4.5).

L'analyse détaillée de l'actualisation des unités de raisonnement et de leur articulation par les élèves nous a permis de mettre en évidence la richesse et la complexité du raisonnement. Nous pensons ainsi avoir réussi à montrer comment une analyse limitée au repérage d'unités identifiées théoriquement ne permet pas de comprendre réellement le raisonnement covariationnel déployé par les élèves. En effet, l'actualisation des unités de raisonnement dans le discours des élèves a permis de préciser les descriptions de ces unités et de mettre en relief certaines spécificités inattendues de ces unités informant, notamment, sur la compréhension des situations par les élèves.

La densité, la variété et la nature des informations dégagées dans l'analyse détaillée ne peuvent se condenser en une synthèse qui décrirait simplement le raisonnement covariationnel déployé par les élèves. En fait, la métaphore de l'arbre, rappelée précédemment, montre comment, au sein du déploiement d'un raisonnement covariationnel, les unités de raisonnement mobilisées sont inter-reliées, interdépendantes, voire indissociables. L'articulation de ces unités dans la dynamique du raisonnement s'opère globalement à l'image de l'arbre qui croît. Cette vision organique du déploiement d'un raisonnement covariationnel s'oppose fondamentalement à la linéarité qu'impose la rédaction d'une synthèse. Nous pensons cependant qu'il est possible de dégager de ce tout des informations dont l'interprétation apporte des éléments de réponse pertinents aux questions rappelées précédemment. Nous les présentons ci-après en nous attardant, d'abord, à la première question. Quelques faits intéressants à propos de l'actualisation de chaque type d'unités (*racine, tronc et branche*) et le questionnement l'ayant suscitée sont relevés. Les *questions posées aux élèves* dans les situations sont alors ré-envisagées afin d'identifier les *questions qui se sont posées aux élèves* dans ces mêmes situations. Dans un deuxième temps, nous présentons des éléments de réponses à la seconde question, en mettant particulièrement l'accent sur les découvertes que nous avons faites à propos de l'influence de certaines variables didactiques sur le déploiement d'un raisonnement covariationnel.

4.7.1 À propos de l'actualisation des unités de raisonnement et des questions auxquelles répond leur mobilisation

Comme nous venons de le mentionner, toutes les unités de raisonnement principalement investiguées (U1 à U7) ont été mobilisées par tous les groupes d'élèves. Afin d'organiser l'analyse détaillée de la mobilisation de ces unités de raisonnement par les élèves, nous les avons catégorisées selon le rôle qu'elles ont semblé jouer au sein du raisonnement déployé : les unités U1 et U2 sont des unités *racine*s, les unités U3 et U4 sont des unités *troncs* et les unités U5 à U7 sont des unités *branches*. Nous reprenons ici quelques éléments dégagés lors de l'analyse à propos de l'actualisation de ces différentes catégories d'unités dans le discours des élèves et de la mise en évidence du questionnement auquel répond la mobilisation de ces unités.

4.7.1.1 Les unités *racines*

Les unités de raisonnement U1 et U2, qui concernent une étude globale du comportement de la fonction, ont été mobilisées dans différents contextes par les élèves (voir section 4.3.5).
Comme nous l'avions anticipé, les tâches de traçage d'un graphique ont suscité l'identification des deux grandeurs étudiées (U1a) ainsi que la distinction entre la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (U1b). Le passage à une situation différente dans laquelle l'une des grandeurs a été remplacée a aussi sollicité U1a. Dans ce dernier contexte, les élèves ont comparé les différentes situations afin d'identifier ce qui était *pareil* et ce qui a était *différent*. Ils ont alors établi des liens entre les différentes fonctions étudiées. Dans le cas où la nouvelle fonction est la dérivée de celle précédemment étudiée, même si cela n'a pas été explicité comme tel dans les énoncés des situations, les comportements de la fonction et de sa dérivée ont été mis en lien par les élèves. L'idée que la vitesse en fonction du temps est une fonction

qui entretient des liens étroits avec la distance en fonction du temps a ainsi été perçue et exploitée par les élèves.

En outre, de manière imprévue, les élèves ont tenté *de structurer et simplifier la situation du pichet* même si nous avions fait en sorte d'économiser cette étape du processus de modélisation en imposant la fonction étudiée et donc les grandeurs observées. Dans ce contexte, d'autres grandeurs ont été « introduites » par les élèves afin d'analyser le phénomène et de comprendre comment les grandeurs sont liées. De nouvelles fonctions ont donc été étudiées et mises en lien, parfois difficilement, avec celles imposées. Ces observations montrent que lorsque la question sur *comment bouge une grandeur lorsque l'autre change* se pose aux élèves, elle s'accompagne d'un questionnement sur le lien qui unit ces grandeurs : Ces grandeurs sont-elles liées? Comment sont-elles liées? Comment fonctionne le phénomène? Quelles autres grandeurs entrent en jeu? Les réponses apportées par les élèves à ces questions montrent que pour comprendre le phénomène ils envisagent l'influence d'autres variables que nous avions, *a priori*, mises de côté. Ainsi, la structuration et la simplification de la situation qu'ils opèrent est différente de celle sur laquelle repose notre questionnement. Il est important de noter que ce décalage n'est pas dû à une incompréhension ou à une incapacité des élèves à lire et comprendre les questions posées. Au contraire, ils comprennent très bien ce qui est demandé et ils tentent d'y donner un sens dans la situation réelle présentée.

Par ailleurs, la question *la grandeur dépendante varie-t-elle* ***toujours de la même façon*** *à mesure que la grandeur indépendante augmente?* a suscité la mobilisation de l'unité de raisonnement U2c (établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs). Toutefois, l'analyse détaillée du raisonnement déployé a révélé que la question qui s'est d'abord posée aux élèves a été *que signifie « varier de la même façon »?* Comme ce questionnement a aussi suscité la mobilisation des unités *troncs*, nous suggérons une synthèse des diverses interprétations de cette expression par les élèves à la section suivante.

4.7.1.2 Les unités *troncs*

Toutes les questions demandant de décrire *comment se comporte la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente* ont sollicité l'unité U3, particulièrement U3a qui correspondait, dans les contextes donnés, à établir que la grandeur dépendante augmente. En

S1 et S3, la question qui suivait demandait alors si la « façon de varier » de la grandeur dépendante était toujours la même. Cette question visait à amener les élèves à préciser le comportement de la fonction et donc de décrire *comment la grandeur dépendante augmente*. Ce questionnement a particulièrement engendré la mobilisation de U3b. Pour exprimer U3b, consistant en la qualification de l'augmentation ou de la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale, les termes « lentement » et « rapidement » ont été largement utilisés, comme nous l'avions anticipé (voir section 4.4.4). Or, dans le cas où la grandeur indépendante n'est pas le temps, nous considérons que cette utilisation est un abus de langage. Par exemple, les élèves indiquent que *le niveau augmente lentement* dans une certaine partie du pichet alors qu'ils observent le niveau en fonction du volume. L'omniprésence du temps dans la compréhension du phénomène a ainsi semblé mener naturellement les élèves à parler implicitement de la vitesse pour décrire comment se comporte l'augmentation du niveau. Bien que cette tendance nous soit apparue *a priori* problématique (en référence notamment à l'obstacle épistémologique que l'omniprésence du temps peut représenter dans la compréhension de la fonction), nous avons réalisé, d'une part, qu'elle avait favorisé la mise en place de liens entre les différentes fonctions étudiées. En effet, dans l'exemple du contexte du pichet, lorsque les élèves ont eu à étudier le niveau en fonction du temps, ils ont rapidement établi que le comportement de cette fonction était le même que celui du niveau en fonction du volume. Puis, quand ils ont étudié la vitesse du niveau en fonction du temps, ils ont confirmé leurs intuitions sur le comportement de la vitesse. D'autre part, un groupe d'élèves a remis en question la verbalisation temporelle à l'aide des qualificatifs « lentement » ou « rapidement » dans le contexte de l'échelle réalisant que, lors de l'étude de la distance du haut en fonction de la distance du bas, le temps n'était pas la grandeur sur laquelle on s'appuyait (voir le cas des élèves de quatrième secondaire à la section 4.4.9). Ainsi, la comparaison des trois fonctions étudiées dans le contexte du pichet semble avoir permis aux élèves de distinguer les grandeurs (volume, niveau, temps et vitesse) et les liens entre ces différentes grandeurs, et de réaliser qu'une fonction n'est pas forcément une fonction du temps. Le travail sur les accroissements a probablement aussi contribué au rejet de la verbalisation temporelle en offrant une verbalisation de rechange (par exemple, *le niveau augmente de plus en plus* au lieu de *le niveau augmente rapidement*).

En outre, une verbalisation singulière est apparue dans le groupe de quatrième secondaire lors du travail sur le pichet (voir les analyse de U3a(*f*)* et U3b(*f*)* aux sections 4.4.3.4 et 4.4.4.4). Les élèves ont eu l'air de comprendre la question sur la « façon de varier » de la sorte : *est-ce que les deux grandeurs varient de la même façon?* Cela les a donc menés à comparer les variations des deux grandeurs (le volume et le niveau) en fonction, probablement, du temps. Nous avons alors considéré que les élèves avaient en tête un pichet de référence dont la forme est régulière et qui permet de comparer la variation de deux grandeurs de nature différente, soit le volume et le niveau. Cela nous a permis de donner du sens à une verbalisation telle que « dans cette partie du pichet, le niveau augmente *plus vite* que le volume ».

L'unité U4 a particulièrement été mobilisée dans les questions demandant *d'étudier le comportement des accroissements concomitants*. Les questions dirigeaient effectivement les élèves en leur suggérant de comparer les différents accroissements successifs de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante (sont-ils constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement?). Dans le contexte de l'échelle, ce questionnement en a engendré un nouveau chez les élèves qui se sont demandé si *l'accroissement de la distance du haut était égal à celui de la distance du bas* et *quel pourrait être le rapport entre deux accroissements successifs* (relation de récurrence).
En général, si nous nous étions limitée au repérage du vocabulaire des verbalisations types anticipées, nous aurions obtenu peu d'indications sur la mobilisation de l'unité U4. En effet, dans les verbalisations des élèves, on retrouve un vocabulaire particulièrement varié qui diffère de celui attendu (voir section 4.4.8). Cela nous apparait plutôt normal dans la mesure où le travail sur les accroissements était nouveau pour les élèves. Leurs verbalisations informent alors beaucoup sur leur manière de concevoir la notion d'accroissement et l'idée de concomitance des accroissements de deux grandeurs. Nous avons remarqué, d'une part, que le vocabulaire pour parler d'accroissement semble dépendre, notamment, du registre dans lequel les élèves tentent de donner un sens à cette notion. D'autre part, nous avons identifié différentes stratégies utilisées par les élèves pour établir la concomitance des accroissements des deux grandeurs observées. Nous avons montré que, dans certains contextes spécifiques à chaque groupe d'élèves, un passage s'effectuait d'une concomitance locale établie en

observant quelques couples d'accroissements successifs à une concomitance globale généralisée à tout couple d'accroissements.

Concernant U4d et U4e, l'analyse du raisonnement des élèves a permis de cerner les enjeux du passage de la description du comportement des accroissements de la grandeur dépendante, alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants (U4d), à la description du comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente (U4e) (voir section 4.4.8.5). La variation constante de la grandeur indépendante imposée par la discrétisation du travail sur les accroissements concomitants (les accroissements de la grandeur indépendante sont constants) est devenue une préoccupation pour les élèves. Ils ont donc été en mesure de généraliser le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante en autant que **l'augmentation de la grandeur indépendante soit régulière.** Le sens de l'expression « la grandeur indépendante augmente » a donc soudain été questionné, *que se cache-t-il sous le terme « augmente »*? Nous y avions vu la continuité et la densité des nombres, les élèves y ont vu un rythme, une régularité. Le passage du discret au continu dans ce contexte nous semble correspondre au passage de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ à $\frac{dy}{dx}$ lequel pose des difficultés en calcul différentiel. L'amorce d'une réflexion à ce sujet nous apparait donc prometteuse.

Par ailleurs, l'analyse des verbalisations pour exprimer U3 et U4 a permis de mettre en évidence la difficulté à analyser le raisonnement à travers le discours. D'une part, le fait que des supports matériel et visuel soient disponibles réduit ou change la nature de l'information communiquée. Par exemple, les élèves ont eu tendance à utiliser un vocabulaire référant à la grandeur pour parler à la fois de cette **grandeur** et de **l'accroissement de cette grandeur**. Pourtant, ils ont, en général, semblé se comprendre entre eux probablement grâce aux gestes (par exemple, l'élève dit « niveau » mais avec ses doigts il montre un accroissement de niveau) et au fait que le visuel parle de lui-même (par exemple, on voit que le pichet est plus large à certains endroits, il n'est pas nécessaire de le dire).

D'autre part, il est difficile de savoir quel raisonnement se cache sous certaines formulations. Par exemple, dans une phrase comme « le niveau augmente de plus en plus » parle-t-on du comportement du niveau (le niveau augmente de plus en plus) ou du comportement de l'augmentation du niveau (l'augmentation augmente)? Même si les deux façons d'interpréter cette phrase sont cohérentes l'une avec l'autre, la première description peut être **intuitive**, surtout quand il s'agit d'une vitesse (la vitesse du niveau augmente), alors que la seconde implique une considération des **accroissements** du niveau. Ainsi, le raisonnement sous-jacent n'est pas le même. Dans le cas où la grandeur observée est la vitesse, la verbalisation est encore plus ambiguë. Par exemple, lorsqu'on dit *la vitesse est de plus en plus rapide*, veut-on dire que *la vitesse augmente* (l'accélération est positive) ou que *la vitesse augmente de plus en plus* (l'accélération augmente)?

4.7.1.3 Les unités *branches*

L'unité U5 telle que décrite dans la grille initiale (déterminer les différentes phases de variation) est très peu apparue dans le raisonnement des élèves. Nous envisageons deux hypothèses pouvant expliquer ce décalage : 1) la présence physique du pichet évacue la nécessité de distinguer les phases puisqu'on voit les différentes parties du pichet et 2) la distinction de différentes phases implique qu'il y a plusieurs façons de varier et donc qu'une même fonction est composée de plusieurs parties ce qui n'est pas envisagé comme une possibilité par les élèves.

Cependant, lors du questionnement sur le *comportement des accroissements*, nous avons repéré la mobilisation de l'unité U5 sous une forme différente de celle attendue. En effet, les élèves n'ont pas délimité des phases de variation, ils ont plutôt considéré la forme du pichet comme une variable influençant la variation du niveau de l'eau. Ils se sont donc demandé *comment prendre en compte cette variable pour établir la relation entretenue entre les deux grandeurs*. Ils ont alors eu tendance à chercher *comment établir* ***une et une seule même relation*** *sur l'ensemble du domaine*.

En outre, nous avons dégagé différents niveaux de mobilisation de l'unité U5 (voir section 4.5.3). Cela nous a menée à réaliser que les élèves s'appuyaient avant tout sur la forme du pichet pour prévoir le comportement des fonctions étudiées. Mais, par la suite, certains élèves ont semblé être en mesure de déduire la forme de la section du pichet où l'eau est rendue à partir d'un certain comportement de l'une des fonctions étudiées. À un niveau plus analytique, les élèves de quatrième secondaire se sont engagés dans une démarche proche de celle attendue lors du travail sur la question : *comment se comporte la vitesse en fonction du temps?*

L'étude de cette fonction les a menés à découper le pichet de différentes manières distinguant alors entre trois et cinq parties. Une analyse approfondie des différentes possibilités envisagées par les élèves nous a permis de découvrir qu'en plus des trois phases de variation anticipées, il existait deux zones particulières (la base du pichet et la partie centrale du ballon du pichet) permettant de mieux comprendre le comportement de la vitesse en fonction du temps. Nous avons ainsi réalisé que notre propre raisonnement menant au traçage du graphique comportait des implicites que l'interprétation du raisonnement des élèves nous a permis d'expliciter.

La mobilisation de l'unité U6a (généraliser intuitivement le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits) est apparue lorsque le questionnement suscitait directement *la considération d'accroissements plus petits de la grandeur indépendante*. L'unité U6b, semblable à U6a mais mobilisée de manière spontanée, n'a, quant à elle, pas été observée (voir section 4.5.4). Nous pensons que notre questionnement n'a pas offert la possibilité aux élèves d'avoir spontanément recours à l'idée de prendre des accroissements de plus en plus petits de la grandeur indépendante afin d'évaluer le comportement de la grandeur dépendante. Il est possible que la généralisation du comportement des accroissements soit tellement évidente que les élèves ne voient pas la nécessité d'aller prendre des accroissements plus petits ou qu'ils n'aient pas conscience de la nécessité d'une telle démarche. À ce dernier propos, la remarque d'un élève a permis de montrer qu'il était possible de mettre en évidence cette nécessité en prenant au départ de grands accroissements de la grandeur indépendante de manière à ce que le comportement anticipé des accroissements de la grandeur dépendante ne reflète pas le phénomène réel (par exemple : si avec un premier verre on remplissait la première moitié du ballon du pichet, avec un deuxième verre on remplirait la deuxième moitié et on pourrait déduire que les accroissements du niveau sont constants!).

Le questionnement sur *ce qui se passe lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits* a suscité, chez les élèves, l'identification d'invariants. Les élèves ont effectivement ressenti la nécessité d'expliquer ce qui faisait que le comportement des accroissements de la grandeur dépendante ne changeait pas. Ils ont alors tenté d'exprimer la stabilité de la relation entretenue par les deux grandeurs et donc l'existence d'un lien fonctionnel en parlant d'une tendance qui se maintenait ou de la présence d'une relation de *proportionnalité*. L'idée de proportionnalité, injectée à plusieurs reprises par les élèves, exprime ici une certaine constance dans le phénomène due à l'existence d'une relation fonctionnelle entre les grandeurs. Nous avons identifié cette volonté de formuler l'existence de la relation entre les grandeurs lors de l'analyse de U7.

L'unité U7, qui consiste à interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et à nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.), a aussi été observée lorsque le questionnement suggérait de *prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante* et que les élèves se sont alors questionnés sur l'existence d'un invariant (voir section 4.5.5). De la même manière, lorsque les élèves se sont interrogés sur la signification de l'expression « varier de la même façon », ils ont cherché des moyens de distinguer l'existence d'une relation et le type de relation entretenue par les deux grandeurs. La notion de *taux de variation* est alors utilisée pour exprimer un *rapport* (ou *une proportion de changement*) qui ne change pas.

Lors de l'étude du comportement du niveau (contexte du pichet) ou de la distance du haut (contexte de de l'échelle) en fonction du temps, les élèves ont eu recours à une notion intuitive de vitesse qu'ils ont parfois nommée. Ils n'ont toutefois pas semblé faire le lien entre cette vitesse et le rapport des accroissements sauf lors du calcul de vitesses moyennes alors associées au taux de variation comme calcul.

Les élèves de cinquième secondaire et du collégial ont fait référence à la notion d'accélération lorsque le questionnement leur demandait de *décrire le comportement de la vitesse du niveau de l'eau en fonction du temps* (contexte du pichet). Pour les élèves de cinquième secondaire cependant, l'accélération est forcément constante puisqu'ils l'associent à la constante gravitationnelle qu'ils ont étudiée dans leur cours de physique.

4.7.2 À propos de l'articulation des unités de raisonnement et de l'influence de certaines variables didactiques

Globalement, les tableaux de mouvement montrent comment s'articulent les unités de raisonnement par chaque groupe d'élèves dans chaque situation (voir Annexe 12). De manière plus spécifique, nous avons examiné les passages de U2 à U3 et de U3 à U4. Comme pour la mobilisation des différentes unités de raisonnement, il est apparu que, par moment, ce sont les questions que se sont posées les élèves qui ont orienté le raisonnement et donc l'articulation des unités. Il faut néanmoins considérer que ces dernières ont émergé de leur compréhension des situations et du questionnement posé. Par conséquent, l'articulation des unités de raisonnement est directement en lien avec les caractéristiques des situations.

Lors de la conception des situations, nous avions identifié quatre variables didactiques associées au choix du contexte, des grandeurs, des registres de représentation et du matériel disponible pour simuler le phénomène. Nous avons recueilli peu d'information à propos de ces deux dernières variables. Nous présentons donc des éléments dégagés à propos de l'influence du contexte et des grandeurs observées.

4.7.2.1 Les particularités de la situation du pichet

D'abord, nous avons constaté que le phénomène de remplissage du pichet impliquait différentes grandeurs perçues par les élèves. La variation du niveau de l'eau est apparue davantage liée à la variation de la forme, et donc du diamètre du pichet où l'eau est rendue, qu'à la variation du volume. Pour les élèves de quatrième secondaire, la prise en compte de la forme du pichet s'est avérée tellement cruciale qu'ils ont choisi d'évacuer le volume au profit du diamètre comme grandeur indépendante. Le lien de causalité sur lequel nous avions misé n'a donc pas été perçu par ces élèves qui en ont identifié un autre. Ce constat nous amène à deux réflexions. Premièrement, il est important de ne pas sous-estimer l'importance de l'activité de structuration et de simplification de la situation lors du déploiement d'un raisonnement pouvant être mis à contribution dans un processus de modélisation. En effet, la structuration et la simplification de la situation par les élèves s'est avérée différente de celle imposée, ce qui, sans aucun doute, a influencé leur raisonnement. Deuxièmement, les grandeurs observées par les élèves les ont menés à étudier une fonction différente mais liée à celle devant être étudiée d'après l'énoncé. Pour étudier cette dernière c'est comme si les élèves avaient effectué la composition de deux fonctions. Ce contexte nous semble donc propice à donner du sens à la composition de fonction.

Ensuite, la forme irrégulière du pichet a engendré la mobilisation de plusieurs unités de raisonnement peu observées dans le contexte de l'échelle. Par exemple, comme nous l'avons indiqué précédemment, l'observation des différentes parties du pichet a amené les élèves à chercher un moyen de distinguer les différents comportements du niveau et de la vitesse du niveau de l'eau. Les élèves de quatrième secondaire en sont arrivés à identifier des zones particulières informant sur l'allure du graphique de la vitesse en fonction du temps. Par exemple, ils établissent que la vitesse au départ n'est pas nulle. Le graphique qu'ils obtiennent reflète alors particulièrement bien la relation entretenue par les deux grandeurs. Le fait qu'il y ait différentes phases de variation leur a aussi permis de mettre en évidence la nécessité de prendre des accroissements de la grandeur indépendante plus petits pour mieux comprendre ce qui se passe à l'intérieur d'un accroissement plus grand.

Finalement, les élèves ont une bonne intuition du comportement de la vitesse du niveau de l'eau au cours du temps. Ils arrivent donc à articuler et distinguer les comportements de la fonction selon laquelle le niveau dépend du temps et de la fonction selon laquelle la vitesse du niveau de l'eau dépend du temps. Le fait que le niveau augmente alors que la vitesse diminue, puis augmente, puis reste constante leur a effectivement permis de distinguer facilement les deux fonctions.

4.7.2.2 Les particularités de la situation de l'échelle

Dans le contexte de l'échelle, la première intuition des élèves est de penser que la distance du haut augmente de façon constante lorsque la distance du bas augmente. Deux interprétations de la question *la distance du haut varie-t-elle toujours de la même façon?* apparaissent : 1) cela signifie qu'on se demande si les accroissements de la distance du haut sont égaux aux accroissements de la distance du bas, 2) cela signifie qu'on se demande si la distance du haut varie de façon constante. La possibilité de manipuler du matériel pour simuler le glissement de l'échelle le long du mur a permis, à ce moment, aux élèves de remettre en question leur intuition initiale. Ils se rendent vite compte que le haut de l'échelle se déplace de plus en plus vite.

Comme la distance du haut en fonction du temps augmente et que la vitesse du haut de l'échelle en fonction du temps augmente aussi, les élèves ont eu tendance à confondre ces deux fonctions. La distinction d'une fonction et de sa dérivée ne semble donc pas propice dans un contexte dans lequel les comportements de ces deux fonctions sont semblables.

4.7.2.3 Le jeu sur les grandeurs

Nous n'avons pas repéré de différences dans le déploiement du raisonnement qui auraient découlé de l'influence de la nature des grandeurs observées dans chacun des contextes. Toutefois, le jeu sur les grandeurs proposées lors du passage d'une fonction à une autre (f, g et g') est apparu particulièrement riche.

Lors du passage de f à g, les élèves ont pris en considération la fonction à variation constante engendrée par le débit constant du robinet ou par le déplacement à vitesse constante du bas de l'échelle (le volume en fonction du temps et la distance du bas en fonction du temps). Ainsi, ils ont, encore une fois, effectué une composition de deux fonctions pour étudier le comportement d'une troisième. Par exemple, ils ont établi le comportement du niveau en fonction du temps en regardant le niveau en fonction du volume et le volume en fonction du temps. La comparaison des fonctions f et g a aussi mené les élèves à réaliser que la fonction f n'est pas une fonction du temps même si le temps semble omniprésent.

Lors du passage de g à g', l'intuition du comportement de la vitesse a été mise à profit. En effet, pour décrire la variation du niveau de l'eau ou de la distance du haut en fonction du temps, les élèves ont eu tendance à utiliser des verbalisations associées à la vitesse (par exemple, le niveau augmente de plus en plus vite). Le passage à l'étude de la vitesse en fonction du temps ne leur a donc pas semblé difficile vu qu'ils en avaient déjà développé une intuition.

En général, l'idée de ne remplacer qu'une grandeur à la fois nous apparaît prometteuse. Elle amène les élèves à comparer différentes fonctions, à établir des liens entre les comportements de fonctions qui sont liées et à se questionner, chaque fois, sur quelles sont les grandeurs observées et quel est le lien qui les unit. De plus, l'étude de la première fonction (f) offre la possibilité d'une simulation permettant de comprendre le phénomène, alors que l'étude des deux autres (g et g') permet une articulation des notions de fonction et de fonction dérivée.

CHAPITRE V : CONCLUSIONS

Notre préoccupation pour le passage, à l'école, de la fonction à la dérivée nous a menée à explorer les enjeux didactique, historique et épistémologique d'un tel passage. Nous en sommes arrivée à dégager l'importance d'un travail sur la covariation afin de développer une compréhension de la fonction en adéquation avec l'introduction au calcul différentiel. Dans cette optique, nous avons décrit une approche covariationnelle de la fonction comme une manière de travailler la fonction par l'intermédiaire de l'étude des accroissements concomitants des deux grandeurs mises en relation par cette fonction et nous nous sommes questionnée sur les caractéristiques d'une telle approche. Par la suite, considérant différentes recherches sur l'idée de covariation en didactique des mathématiques, il nous est apparu important de prendre en compte les situations associées à une approche covariationnelle de la fonction ainsi que le raisonnement covariationnel déployé par les élèves dans de telles situations. Ainsi, nous avons choisi d'investiguer une **approche covariationnelle de la fonction** à travers une analyse du **raisonnement covariationnel** déployé par les élèves en **situation**. En nous appuyant sur le cadre d'analyse du raisonnement covariationnel de Carlson, nous avons construit une grille d'analyse du raisonnement covariationnel adaptée au contexte de l'étude des fonctions via la modélisation de situations réelles préparant le passage à la dérivée. Nous avons donc remplacé les actions mentales et les niveaux de développement du raisonnement covariationnel, suggérées par Carlson pour rendre compte d'un état de connaissance atteint par des élèves de niveaux collégial et universitaire à un moment donné, par une **articulation d'unités de processus de modélisation (ou unités de raisonnement)** mobilisées pour répondre à un questionnement spécifique et révélant la dynamique du raisonnement covariationnel pouvant *a priori* être déployé en situation par des élèves de 15 à 18 ans. Dans l'optique de confronter cet *a priori* et de mieux comprendre le processus de déploiement du raisonnement covariationnel, nous avons réalisé une expérimentation auprès d'élèves de cette tranche d'âge pour apporter des réponses aux questions suivantes : 1) Quelles unités de raisonnement sont mobilisées par ces élèves, comment s'actualisent-elles et en réponse à quelles questions? et 2) Comment s'articulent ces unités dans la dynamique du raisonnement déployé par ces élèves et comment les situations influencent-elles cette articulation?

L'analyse qualitative, réalisée sur des données collectées lors d'une étude clinique impliquant des élèves de quatrième et cinquième secondaire ainsi que du collégial, a mis en évidence la dynamique du raisonnement covariationnel déployé par ces élèves. La mobilisation d'unités de raisonnement sollicitée par un questionnement organisé a été repérée et l'articulation des différentes unités mobilisées a été examinée. Une analyse fine du discours a aussi permis d'évaluer comment le raisonnement covariationnel s'actualise dans l'action discursive des élèves interrogés. Ainsi, nous avons tenté de donner un sens aux verbalisations des élèves de manière à découvrir ou reconstruire la logique sous-jacente au raisonnement déployé. Cela nous a mené à préciser les unités de raisonnement suggérés dans la grille d'analyse initiale mais aussi à envisager les processus d'articulation de ces unités dans l'action en fonction des situations.

La grille finale d'analyse du raisonnement covariationnel constitue donc le principal résultat de cette recherche. D'une part, cette grille présente des descriptions précises de sept unités de raisonnement liées à une étude qualitative des accroissements concomitants de deux grandeurs. D'autre part, elle suggère de caractériser ces unités selon les rôles qu'elles jouent dans la dynamique du raisonnement. Ainsi, les unités *troncs* qui constituent le cœur du raisonnement covariationnel s'appuient sur des unités *racines* et se prolongent avec des unités *branches*. Nous avons observé que les unités troncs n'apparaissaient dans le raisonnement des élèves qu'en interaction avec les autres types unités apparemment secondaires (unités *racines* et *branches*). L'approfondissement du raisonnement semble donc impliquer une croissance concomitante de chacune des parties de l'arbre et donc la mobilisation concomitante de chacune des catégories d'unités. Les rôles des unités de raisonnement révèlent ainsi l'aspect dynamique et organique du raisonnement covariationnel déployé en situation. Ce déploiement, à l'image d'un arbre qui grandit, va à l'encontre de la vision linéaire qu'on a du raisonnement en mathématiques en général et montre la nécessité de préciser ce qui se cache en arrière de l'aspect dynamique du raisonnement.

Par ailleurs, notre analyse fine du raisonnement covariationnel a montré que la mobilisation et l'articulation des unités de raisonnement ne suivent pas le chemin préétabli par le questionnement. En fait, ce sont les questions qui se posent aux élèves qui orientent le chemin suivi. Ces questions émergent à la fois du questionnement posé dans les situations et du potentiel inhérent à ces dernières à susciter un questionnement.

L'analyse théorique du raisonnement covariationnel a servi d'ancrage pour la construction des situations et le repérage des unités de raisonnement. Nos résultats montrent cependant que cette analyse ne reflète pas le raisonnement effectivement déployé par les élèves et que la perspective d'analyse du raisonnement par cette seule voie est insuffisante. De la même manière, l'analyse *a priori* des situations s'est avérée un bon point de départ pour comprendre le raisonnement des élèves. Toutefois, les élèves ont une expérience différente de la nôtre et c'est en questionnant ce qu'ils font que l'on découvre réellement le potentiel des situations. Notre analyse des interactions entre élèves et les situations nous a permis de mieux comprendre les enjeux mêmes de ces situations et la nature du raisonnement covariationnel qu'elles sollicitent.

Pour terminer, cette recherche a démontré qu'une approche covariationnelle de la fonction par des situations qui sollicitent l'engagement dans un processus de modélisation de situations réelles peut permettre, chez les élèves, de développer une intuition de la fonction dérivée et la mise en place de liens qualitatifs entre les comportements d'une fonction et de sa dérivée.

L'exploration d'une approche covariationnelle suggérée dans cette recherche ne constitue qu'une amorce d'un travail qui devrait se poursuivre. En effet, nous avons suggéré de décrire cette approche à partir du travail sur les accroissements concomitants de deux grandeurs et donc à partir des situations qui sollicitent ce type de travail. L'étude des accroissements peut cependant conduire à des questionnements différents de ceux que nous avons suggérés dans les situations construites. Il serait, notamment, important d'explorer davantage le type de questionnement permettant la mise en rapport des accroissements concomitants et donc le passage au taux de variation. Les unités de raisonnement U8 à U13, concernant l'étude quantitative du rapport des accroissements concomitants, mériteraient effectivement d'être mieux examinées de manière à envisager l'articulation du travail qualitatif sur les accroissements et du travail quantitatif sur le rapport entre ces accroissements. Le passage concret à la dérivée pourrait ainsi être investigué.

Par ailleurs, nous pensons qu'avant d'envisager l'introduction d'une approche covariationnelle de la fonction dans l'enseignement au secondaire, différentes questions devraient être explorées : Comment articuler ce type de travail avec celui habituellement proposé? Comment adapter le travail collectif de modélisation de situations réelles dans un contexte de classe? Ce travail devrait-il déboucher sur une institutionnalisation et, si oui, laquelle?

Bibliographie

Artigue, M., et Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie*, (76), 69‑88. http://doi.org/10.2307/41162649

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinski, E., et Schwingendorf, K. E. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 399‑431.

Aspinwall, L., Shaw, K. L., et Presmeg, N. (1997). Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301‑317.

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosités*. [France]: Éditions du Seuil.

Bednarz, N., Kieran, C., et Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publisher.

Beichner, R. J. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of physics*, *62*, 750‑762.

Berry, J. S., et Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, (22), 481‑497.

Biehler, R. (2005). Reconstruction of meaning as a didactical task: the concept of function as an example. In *Meaning in Mathematics Education* (Springer, Vol. 37, p. 61‑81). USA: Jeremy Kilpatrick, Celia Hoyles, Ole Skovsmose.

Blais, M., et Martineau, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, *26*(2), 1‑18.

Blanché, R. (1973). *Le raisonnement*. Paris: Presses universitaires de France.

Bloch, I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, (58), 25‑46.

Bloch, I., et Ghedamsi, I. (2005). Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x*, (69), 7‑30.

Blum, W., et al. (2002). ICMI Stydy 14: Application and modelling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1), 149‑171.

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover publications.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., et Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247‑285.

Brousseau, G. (1998). *Théorie Des Situations Didactiques: Didactique Des Mathématiques 1970-1990*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Cabana, M. (1996). *La notion de fonction vue sous l'angle de l'étude de la variation* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. In *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol. 7). American Mathematical Society.

Carlson, M. (2002). Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships. In *Representations and mathematics visualization*. Cinvestav-IPN, Mexico: North American Chapter of IGPME.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., et Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events : A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352‑378.

Carlson, M., Larsen, S., et Jacobs, S. (2001). An investigation of covariationnal reasoning and its role in learning the concepts of limit and accumulation. In *Proceedings of the 23rd annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, p. 145‑153). Snowbird, UT: R. Speiser, C, Maher et C. Walter.

Caron, F. (2008). Pour une réelle intégration de la modélisation mathématique au secondaire. In *Interdisciplinarité et enseignement scientifique et technologique* (Éditions du CRP, p. 131‑145). Sherbrooke: Hasni A., Lebeaume, J.

Charbonneau, L. (1987a, mai). Chronique : l'histoire des mathématiques. Première partie : fonction : du statisme grec au dynamisme du début du XVIIIème siècle. *Bulletin de l'AMQ*, 5‑10.

Charbonneau, L. (1987b, octobre). Chronique : l'histoire des mathématiques. Deuxième partie : fonction : un personnage en quête d'auteur, le XVIIIème siècle. *Bulletin de l'AMQ*, 5‑8.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique: Du Savoir Savant Au Savoir Enseigné Suivie De* (2e éd). Grenoble: Éd. La Pensée sauvage.

Chorlay, R. (2007). La multiplicité des points de vue en Analyse élémentaire comme construit historique. In *Histoire et enseignement des mathématiques-Rigueurs, erreurs, raisonnements* (p. 203‑227). France: Evelyne Barbin et Dominique Bénard.

Collette, J.-P. (1973). Évolution du concept de dérivée. *Bulletin de l'AMQ*, (Janvier 1973), 4‑12.

Comin, E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*, (67), 33‑61.

Confrey, J., et Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 135‑164.

Confrey, J., et Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(1), 66‑86.

Coppé, S., Dorier, J.-L., et Yavuz, I. (2007). De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement. De la notion de fonction en France en seconde. *Recherches en didactique des mathématiques*, *27*(2), 151‑186.

Dubinsky, E., et Mcdonald, M. A. (2002). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, et A. Schoenfeld (éd.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (p. 275‑282). Springer Netherlands.

Dufour, S. (2011). *L'utilisation des représentations par deux enseignantes du collégial pour l'introduction de la dérivée* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Montréal.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 1). IREM de Strasbourg.

Eisenberg, T. (1992). On the devlelopment of a sens for function. In *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (Vol. 25, p. 153‑174). Washington, DC: E. Dubinsky and G. Harel.

Fikrat, L. (1994). *La notion de fonction et ses représentations* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.

Gantois, J.-Y. (2012). *Un milieu graphico-cinématique pour l'apprentissage des dérivées dans une praxéologie « modélisation » : potentialités et limites* (Thèse de doctorat). Université de Liège, Liège.

Gantois, J.-Y., et Schneider, M. (2009). Introduire les dérivées par les vitesses. Pour qui? Pourquoi? et Comment? *Petit x*, (79), 5‑21.

Grabiner, J. (1983). The changing concept on change: The derivative from Fermat to Weierstrass, *56*(4), 195‑206.

Gray, S. S., Loud, B. J., et Sokolowski, C. P. (2009). Calculus Students' Use and Interpretation of Variables: Algebraic vs. Arithmetic Thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *9*(2), 59‑72.

Haguel, M.-J., et Lemoine, C. (1993). *Variable et fonction: influence de la modélisation et de la programmation fonctionnelle* (Recherche) (p. 289). Sherbrooke: Département de mathématiques-Collège de Sherbrooke.

Harel, G., et Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. In *MAA notes* (Vol. 25, p. 85‑106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Herbert, S., et Pierce, R. (2012). Revealing educationally critical aspects of rate. *Educational Studies in Mathematics*, *81*, 85‑101.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), 123‑134.

Hitt, F., Gonzales-Martin, A. S., et Morasse, C. (2008). Visualization and students' functional representations in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of co-variation as a prelude of the concept of function. In *Proceedings of the ICME-11*. Monterrey, N. L., Mexico.

Hitt, F., et Morasse, C. (2009). Advanced numerical-algebraic thinking : constructing the concept of covariation as a prelude to the concept of function. *Electronic journal of research in educational psychology*, *7(1)*(17), 244‑260.

Janvier, B., et Pelletier, F. (2003). Didactique de la variable et des fonctions-MAT3225. Université du Québec à Montréal.

Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. In *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*. Université de Caen: C.E.R.S.E.

Jeannotte, D. (2012). L'interprétation de la lettre en algèbre par des élèves du secondaire au Québec. *CJNSE/RCJCÉ*, *4*(1). Consulté à l'adresse http://www.cjnse-rcjce.ca/ojs2/index.php/cjnse/article/view/181

Julin, A. (1935). De quelques méthodes de détermination de la covariation. *Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute*, *3*(3), 251‑277. http://doi.org/10.2307/1400794

Kidron, I., et Tall, D. (2015). The role of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, *88*, 183‑199.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal*, *20*(4), 282‑300. http://doi.org/10.2307/2686848

Krysinska, M., et Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels*. Belgique: Les Editions de l'Université de Liège.

Llyod, G. M., et Wilson, M. (1998). Supporting innovation: the impact of a teacher's conceptions of functions on his implementation of a reform curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 248‑274.

Mcdonald, M. A., Mathews, D. M., et Strobel, K. H. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Two Objects. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 77‑102.

Ministère de l'éducation, du loisir et du sport. (2007). Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire 2er cycle, Domaine de la mathématique. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'éducation, du loisir et du sport. (2010). Programme d'étude préuniversitaire. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'éducation, du loisir et du sport. (2011). Conditions d'admission, Programmes d'études conduisant au diplôme d'études collégiales. Gouvernement du Québec. Consulté à l'adresse http://www.mels.gouv.qc.ca/sections/publications/publications/Ens_Sup/Affaires_universitaires_collegiales/Ens_collegial/ConditionsAdmission_ProgEtudesCondDEC_2011.pdf

Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. In *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (Vol. 25, p. 175‑194). E. Dubinsky and G. Harel.

Monna, A. F. (1972). The concept of function in the 19th and 20th centuries, in particular with regard to the discussion between Baire, Borel and Lebesgue. *Archive for history of exact sciences*, (9), 57‑84.

Noble, T., Nemirovski, R., Wright, T., et Tierney, C. (2001). Experiencing Change: The Mathematics of Change in multiple Environments. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(1), 85‑108.

Oehrtman, M., Carlson, M., et Thompson, P. W. (2008). Foundational Reasoning Abilities that Promote Coherence in Students' function Understanding. In *Making the connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (Mathematical Association of America, p. 27‑42). Washington, DC: M.P. Carlson et C. Rasmussen.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235‑250.

Orton, A. (1984). Understanding rate of change. *Mathematics in School*, *13*(5), 23‑26.

Passaro, V. (2007). *Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal, Canada.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., et Bang, V. (1968). *Epistemology and psychology of functions* (Presses universitaires de France). Paris.

René de Cotret, S. (1987). La notion de fonction à travers les représentations graphiques du mouvement. Une expérimentation suggérée par l'histoire. In *Actes du onzième congrès international* (Vol. III, p. 155‑161). Montréal: Jacques C. Bergeron, Nicolas Herscovics, Carolyn Kieran.

René de Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, (17), 5‑27.

René de Cotret, S. (2009). Des domaines d'expérience au sens commun? Des ingénieries du quotidien? In *En amont et en aval des ingénieries didactiques. Cours de la XVe école d'été de didactique des mathématiques.* (Vol. 1). Clermont-Ferrand.

Sajka, M. (2003). A Secondary School Student's Understanding of the Concept of Function: A Case Study. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 229‑254.

Salahattin, A. (2005). *L'approche qualitative des équations différentielles en classe de terminale S : Est-elle viable? Quels sont les enjeux et les conséquences?* Université Joseph-Fourier-Grenoble I, France.

Saldanha, L. A., et Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In *Proceedings of the 20th annual meeting of the north american chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, p. 298‑303). Raleigh, North Carolina, USA: S. B. Berensen, K. R. Dawkins, M. Blanton, W. N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood & L. Stiff.

Schneider, M. (1992). À propos de l'apprentissage du taux de variation instantané. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(4), 317‑350.

Selden, J., Mason, A., et Selden, A. (1989). Can average calculus students solve nonroutine problems? *Journal of Mathematical Behavior*, *8*(1), 45‑50.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (Vol. 25, p. 59‑84). Washington, DC: E. Dubinsky and G. Harel.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy.* (Vol. 25, p. 25‑58). E. Dubinsky and G. Harel.

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., et Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, (30), 131‑148.

Stölting, P. (2008). *La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans – analyses comparatives et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne*. Universität Regenburg-Université Paris Diderot (Paris 7), Allemagne-France.

Tall, D. (1986). A graphical approach of integration and the fondamental theorem of calculus. *Mathematics teaching*, (113), 48‑51.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 495‑511). Mc Millan publishing company-Douglas A. Grouws (eds.).

Thompson, P. W. (1994a). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 229‑274.

Thompson, P. W. (1994b). The Development of the Concept of Speed and Its Relationship to Concepts of Rate. In *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (SUNY Press, p. 181‑234). Albany, NY: G. Harel et J. Confrey.

Vanderbrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 16, p. 149‑185). IREM de Strasbourg.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133‑170.

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*. Paris: ESF.

Viennot, L. (1992). Le raisonnement à plusieurs variables : tendances à la pensée commune. In *Raisonner en sciences* (p. 127‑141). INRP.

Viennot, L. (1993). Temps et causalité dans les raisonnements des étudiants en physique. *Didaskalia*, (1), 13‑27.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematic Education, Science and Technology*, *14*(3), 293‑305.

Vinner, S., et Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356‑366.

Vollrath, H.-J. (1986). Search Strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 387‑400.

Weber, E., et Dorko, A. (2014). Students' and experts' schemes for rate of change and its representation. *The Journal of Mathematical Behavior*, (34), 14‑32.

White, P., et Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(1), 79‑95.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, (41), 7‑68.

Zandieh, M. J. (1997). *The Evolution of Student Understanding of the Concept of Derivative*. Oregon State University.

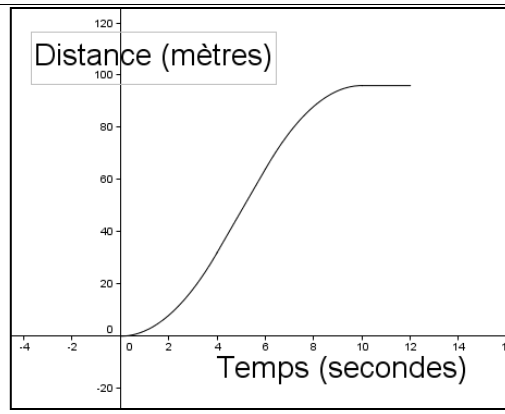
Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *8*, 103‑127.

Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (p. 127‑137). Washington, DC: Mathematical Association of America: W. Zimmermann and S. Cunningham.

ANNEXE 1 : DÉMARCHE DE RÉSOLUTION VERBALISÉE ET RAISONNÉE DU PROBLÈME DE LA VOITURE

PROBLÈME DE LA VOITURE:

Le graphique ci-contre présente la distance parcourue par une automobile en fonction du temps.



La fonction f qui exprime la distance parcourue par la voiture en fonction du temps est présentée sur l'intervalle $[0,12]$ on peut donc voir comment évolue la distance parcourue dans un intervalle de 12 secondes.

Afin d'étudier le phénomène présenté, nous allons répondre à plusieurs questions :

1) Comment varie la distance lorsque le temps augmente?
2) Est-ce que la façon de varier est la même entre 2 et 4 secondes, et entre 4 et 6 secondes?
3) Quelle est la vitesse maximale atteinte par la voiture?
4) À quel moment la voiture roule-t-elle exactement à 15 m/s?
5) Quelle est la vitesse exacte de la voiture 2 secondes après le début de l'observation?

DÉMARCHE DE RÉSOLUTION VERBALISÉE ET RAISONNÉE:

1) Comment varie la distance lorsque le temps augmente?

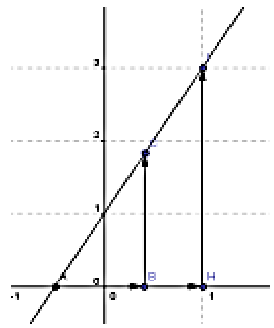
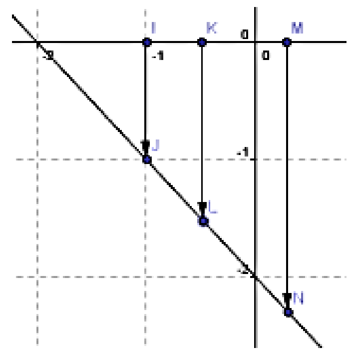
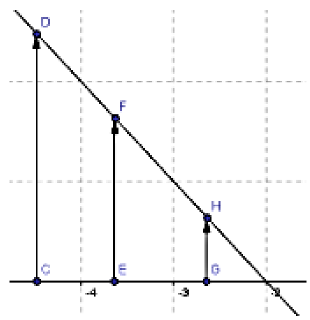
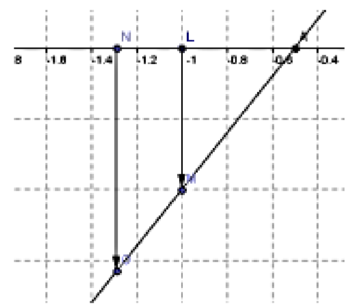
Cette question porte en fait sur la propriété de variation (croissance ou décroissance) de la fonction. Traditionnellement, le sens de variation d'une fonction est déterminé en comparant deux valeurs de la variable dépendante correspondant à deux valeurs de la variable indépendante. On peut lire par exemple, dans Baruk (1995), qu'une fonction est strictement croissante sur l'intervalle I si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1<x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$.

Néanmoins, si on dispose du graphique, on détermine plutôt si la courbe monte ou descend lorsqu'on la regarde de gauche à droite. Cette idée de monter ou descendre relate un certain point de vue dynamique puisqu'on imagine le mouvement ascendant ou descendant. Mais, l'emphase étant mise sur le dessin de la courbe, on n'a pas conscience de la relation entre les grandeurs, on n'étudie pas la variation, on la réduit à l'observation de l'allure de la courbe. Or, si on considère cette relation de dépendance, la variation de la variable dépendante est entraînée par la variation de la variable indépendante.

Au Chapitre I (section 1.2.3.4), nous avions distingué les approches de correspondance et de covariation selon les propos de Confrey et Smith (1994) et Monk (1992). Cette distinction était illustrée dans le registre tableau de valeurs. Nous proposons de la mettre en évidence dans le registre graphique puisque le problème posé nécessite de travailler à partir de ce registre.

L'approche de la correspondance suggère de comparer différentes valeurs de la variable dépendante correspondant à des valeurs de la variable indépendante de plus en plus grande comme le propose Baruk (1995) dans le registre symbolique (voir ci-dessus). Graphiquement, on peut comparer de la gauche vers la droite la longueur des segments orientés verticaux représentant des valeurs de la variable dépendante. Selon l'orientation et la longueur de ces segments, plusieurs cas sont possibles (voir Tableau 1-A).

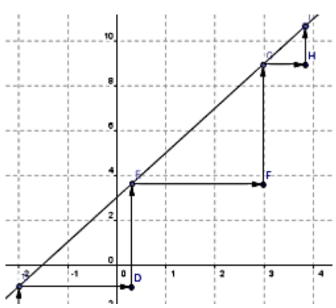
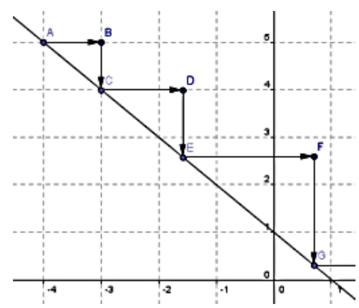
Tableau 1-A Correspondance : différents cas possibles lors de la comparaison des segments orientés verticaux

Orientation des segments / Longueur des segments	**Vers le haut**	**Vers le bas**
Augmentation de la longueur	Fonction croissante 	Fonction décroissante 
Diminution de la longueur	Fonction décroissante 	Fonction croissante 

L'approche de la covariation consiste à considérer les écarts entre deux valeurs de la variable. Pour répondre à la question, « comment varie la distance lorsque le temps augmente? », on regarde donc si les écarts de la variable dépendante sont des accroissements ou des décroissements. Graphiquement, lorsqu'on regarde de gauche à droite, dès que les segments verticaux représentant les écarts sont orientés vers le haut, il y a accroissement et la fonction est croissante, et dès qu'ils sont orientés vers le bas, il y a décroissement et la fonction est décroissante (voir Tableau 1-B).

Nous voyons principalement deux différences entre les deux démarches. Premièrement, pour tracer des segments verticaux par l'approche de la correspondance, il suffit de partir de l'axe horizontal et de se rendre à la courbe alors que par l'approche de la covariation il faut partir de la courbe, tracer un segment horizontal puis se rendre de nouveau à la courbe. Dans le premier cas, on ne regarde que les segments verticaux représentant différentes valeurs que prend la grandeur indépendante. Dans le second cas, on doit forcément considérer les deux grandeurs. Deuxièmement, avec l'approche de la correspondance, l'orientation des segments dépend du signe de la fonction. En effet, dès que la courbe croise l'axe horizontal, les segments changent d'orientation et c'est pourquoi on se retrouve avec quatre cas de figure. De plus, comme on ne peut comparer que des segments ayant la même orientation, on doit considérer des intervalles sur lesquels la fonction garde le même signe. Avec l'approche de covariation, il y a seulement deux cas possibles puisque l'orientation des segments suffit à déterminer la croissance de la fonction.

Tableau 1-B Covariation : différents cas possibles lors de la comparaison des segments orientés verticaux

Orientation des segments	
Vers le haut	Vers le bas
Fonction croissante 	Fonction décroissante 

Afin de de répondre à la question posée, soit « comment varie la distance lorsque le temps augmente? », nous considérons l'approche par les accroissements ou de la covariation. Dans l'exemple de la voiture, les segments verticaux correspondants aux écarts sont orientés vers le haut entre 0 et 10 secondes. Par la suite, on ne voit plus de segments verticaux puisque la courbe est une droite horizontale. Les écarts sont nuls, il n'y a ni accroissement, ni décroissement, la fonction est constante. Néanmoins, comme il n'y a pas décroissement, on peut dire que la fonction est croissante sur l'ensemble de son domaine, on ne peut simplement pas dire qu'elle est strictement croissante.

2) ***Est-ce que la façon de varier est la même entre 2 et 4 secondes, et entre 4 et 6 secondes?***

La seconde question : « est-ce que la façon de varier est la même entre 2 et 4 secondes, et entre 4 et 6 secondes? » peut sembler un peu nébuleuse dans la mesure où il faut savoir ce que signifie « la façon de varier ». À première vue on pourrait répondre que oui, entre 2 et 4 secondes et entre 4 et 6 secondes la distance parcourue augmente, la fonction est croissante. Ce sur quoi on veut attirer l'attention c'est sur le fait que la courbe n'a pas la même allure sur ces deux intervalles. Sur le premier, c'est une courbe ouverte vers le haut et sur le second c'est un segment de droite. Bien que dans les deux cas la distance augmente, elle n'augmente pas de la même façon. Selon nous, le seul moyen d'explorer cette façon de varier est de regarder les écarts donc ici les accroissements de la distance parcourue. Pour comparer ces accroissements sans avoir à tenir compte de la valeur de l'accroissement de temps, il suffit que ces derniers soient constants.

Regardons donc de plus près les accroissements de la distance pour un accroissement constant de deux secondes (Figure 1-A).

Les flèches verticales (ou segments orientés verticaux) représentent les accroissements de la distance. On voit que ces accroissements augmentent puis diminuent de manière apparemment symétrique entre 0 et 10 secondes. Entre 10 et 12 secondes, la distance est stable, elle n'augmente ni ne diminue. On pourrait donc dire que la distance augmente de plus en plus puis de moins en moins pour finalement se stabiliser. Toutefois, entre 4 et 6 secondes, la courbe a l'allure d'un segment de droite. Si on regarde de plus près, en prenant par exemple des accroissements de temps d'une seconde, on constate qu'effectivement, entre 4 et 6 secondes, les accroissements de la distance sont toujours les mêmes et par conséquent, la distance augmente de manière constante. De cette analyse se dégagent quatre phases : A, B, C et D (Figure 1-B) sur chacune desquelles la façon de varier semble être la même. Pour s'en assurer, on pourrait raffiner notre étude en prenant des accroissements plus petits du temps. Même si théoriquement ce processus n'a pas de fin puisqu'il existe toujours un accroissement encore plus petit, il est difficile dans la réalité de tracer des accroissements plus petits qu'une demie seconde.

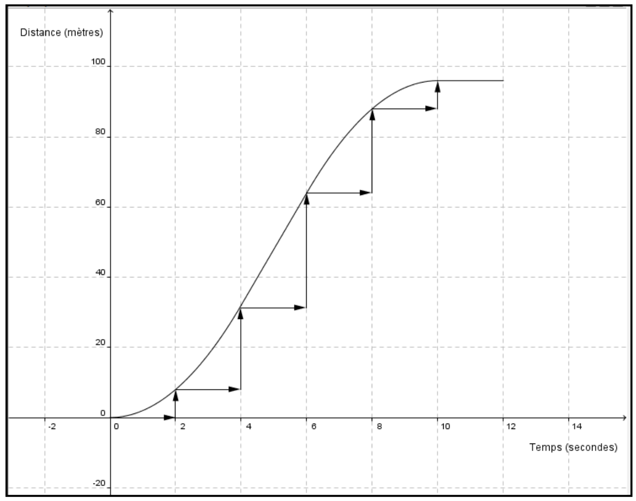


Figure 1-A Marches/contremarches pour des accroissements de temps de 2 secondes

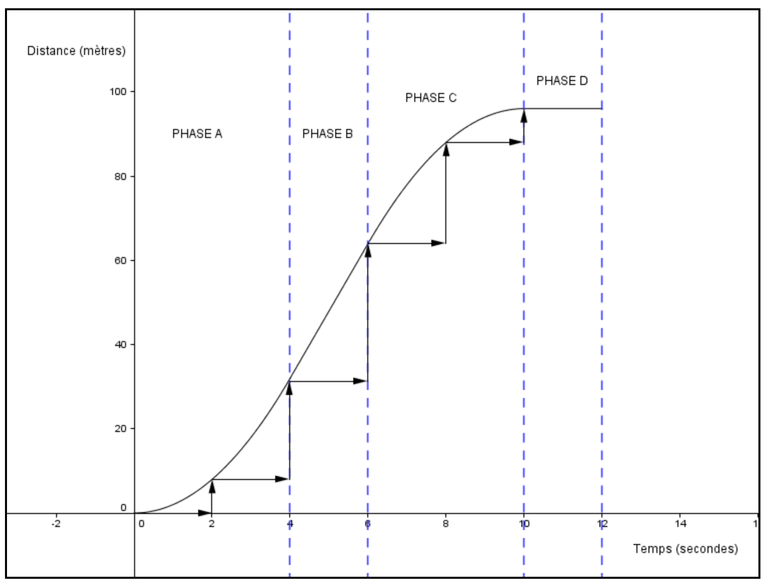


Figure 1-B Identification des différentes phases de variation

Ainsi, en prenant des accroissements de temps d'une seconde (voir Figure 1-C pour exemple avec la phase A), nous pouvons dire que :

- Sur la phase A, les accroissements de la distance sont de plus en plus grands.
- Sur la phase B, les accroissements de la distance sont constants.
- Sur la phase C, les accroissements de la distance sont de plus en plus petits.
- Sur la phase D, les accroissements de la distance sont nuls.

Comme la courbe garde toujours la même allure sur l'ensemble d'une phase nous supposons que cette observation est généralisable peu importe l'accroissement de temps constant choisi. Nous pouvons alors répondre à la question posée : entre 2 et 4 secondes la distance parcourue augmente de plus en plus alors qu'entre 4 et 6 secondes la distance parcourue augmente de façon constante, la façon de varier n'est donc pas la même.

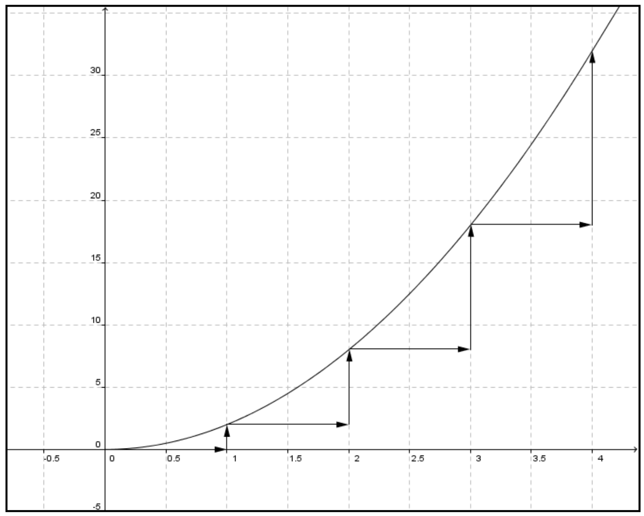


Figure 1-C Accroissements de la distance pour des accroissements de temps de 1 seconde sur la phase A

Dans le contexte donné, nous avons quantifié les accroissements de la grandeur indépendante. La mesure de cette quantification n'a néanmoins joué aucun rôle dans le raisonnement puisque l'essentiel était de prendre des accroissements constants. Nous considérons donc que l'étude des accroissements présentée est de nature qualitative. Cette étude s'avère intéressante car en plus de permettre de répondre à la question sur la comparaison des « façons de varier » sur deux intervalles donnés, elle permet de mieux comprendre ce qui se passe contextuellement. En effet, cette étude, combinée à notre expérience du phénomène, nous permettent d'interpréter certaines informations fournies par le graphique :

- Entre 0 et 4 secondes (phase A), la distance augmente de plus en plus, ce qui signifie que la vitesse de l'automobile augmente et donc qu'elle accélère.
- Entre 4 et 6 secondes (phase B), la distance augmente de façon constante, l'automobile roule toujours à la même vitesse.
- Entre 6 et 10 secondes (phase C), la distance augmente de moins en moins, la vitesse diminue, la voiture décélère.

- Entre 10 et 12 secondes (phase D), la distance n'augmente plus, la voiture est à l'arrêt, sa vitesse est nulle.

3) ***Quelle est la vitesse maximale atteinte par la voiture?***

La troisième question porte sur la détermination de la vitesse maximale de la voiture. Dans la situation étudiée, on s'intéresse à deux grandeurs : la distance et le temps. Ce qui est particulier avec l'étude du mouvement au cours du temps c'est qu'il existe deux autres grandeurs implicitement présentes : la vitesse et l'accélération. Effectivement, lors de notre analyse du phénomène, nous sommes passée facilement de « les accroissements de la distance augmentent » à « la vitesse augmente » puis à « la voiture accélère ». Ce passage s'est fait en contexte car celui-ci nous est familier, il n'était alors pas nécessairement issu d'un traitement mathématique ou physique des grandeurs. Cependant, lorsque la question « quelle est la vitesse maximale atteinte par la voiture? » est posée, il y a lieu de se demander comment déterminer la vitesse lorsqu'on connait la distance et le temps. À ce moment, on peut se référer à la définition de la grandeur « vitesse ». En physique, on dit que la vitesse est le rapport de la distance parcourue au temps mis à la parcourir. La distance parcourue entre deux instants correspond à l'accroissement de la distance pour l'accroissement de temps égal à la différence entre ces instants. Par conséquent, la vitesse entre deux instants donnés est le rapport entre l'accroissement de distance et l'accroissement de temps qui lui correspond.

L'analyse qualitative des accroissements nous a permis de déterminer que d'abord la vitesse augmentait (phase A) puis se stabilisait (phase B) pour ensuite diminuer (phase C) jusqu'à devenir nulle (phase D). On en déduit que la vitesse maximale est atteinte à la fin de la phase A et maintenue tout au long de la phase B. Comme la vitesse est constante sur la phase B, il suffit de prendre n'importe quel intervalle de temps et de faire le rapport entre les accroissements de distance et de temps. Par exemple, prenons un accroissement de 1 seconde entre 4,5 et 5,5 secondes. On lit que l'accroissement de distance correspondant est de 56-40=16 mètres (voir Figure 1-D), alors la vitesse maximale est de 16 m/s.

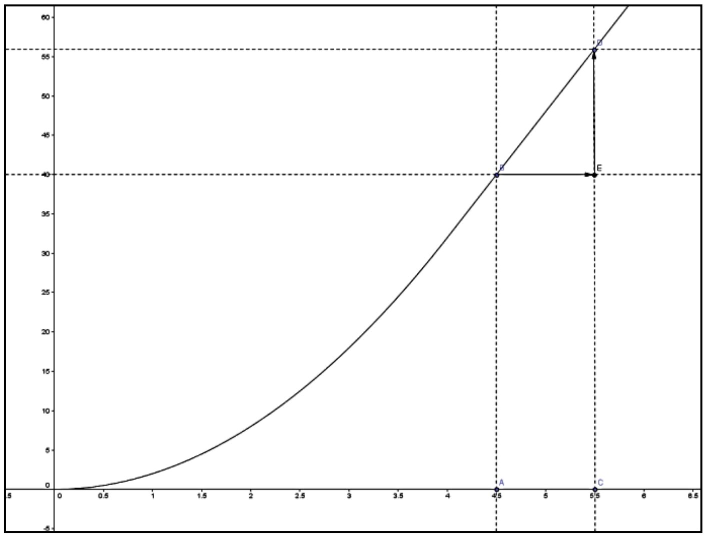


Figure 1-D Lecture graphique de l’accroissement de distance entre 4,5 et 5,5 secondes

Pour cette question, la quantification des accroissements était nécessaire puisqu’il s’agissait de déterminer le taux de variation de la fonction sur la phase B.

*4) **À quel moment la voiture roule-t-elle exactement à 15 m/s?***

L’analyse des accroissements et les interprétations contextuelles effectuées précédemment nous permettent de faire une première estimation du moment où la vitesse de la voiture est exactement de 15 m/s. En effet, si la voiture est à l’arrêt au départ, qu’elle atteint la vitesse maximale de 16m/s à la fin de phase A, qu’elle la maintient jusqu’au début de la phase C, puis qu’elle s’arrête à la phase D, alors elle roule forcément à 15m/s à un moment donné sur la phase A et à un moment donné sur la phase C. Nous proposons de trouver le moment cherché sur la phase A sachant qu’il faudrait procéder de la même manière pour la phase C. Procédons donc d’abord graphiquement en partant de ce rapport connu entre les accroissements de distance et de temps.

a. Encadrement graphique de l’instant cherché

À première vue, il faudrait trouver un intervalle de temps pour lequel le rapport entre l’accroissement de distance et l’accroissement de temps est 15. On peut commencer par prendre une marche de 1 et une contremarche de 15 et les déplacer de manière à les ajuster au graphique (voir Figure 1-E). On voit alors qu'entre 3,25 et 4,25[35] secondes approximativement, la vitesse est de 15m/s.

Le problème c'est que sur cette phase, la vitesse n'est pas constante. En effet, l'étude covariationnelle qualitative de la fonction a mis en évidence que pour des accroissements constants du temps, les accroissements de la distance augmentaient continuellement, il y a donc lieu de distinguer la vitesse exacte à un instant donné de la vitesse moyenne entre deux instants.

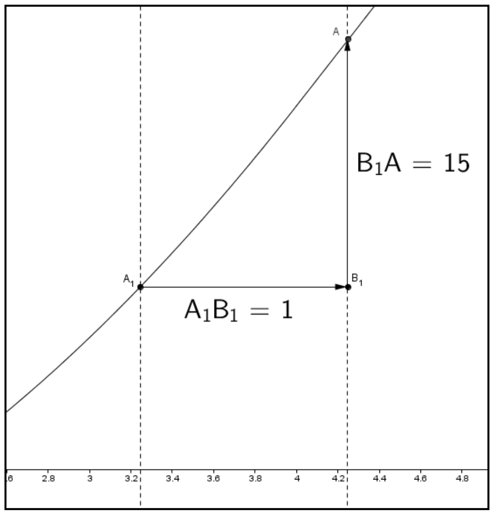


Figure 1-E Ajustement au graphique de la marche/contremarche représentant les accroissements de 1 seconde pour le temps et de 15 mètres pour la distance

En effet, la voiture ne roule pas réellement à 15 m/s entre 3,25 et 4,25 secondes. Dire que sa vitesse moyenne est de 15 m/s entre 3,25 et 4,25 secondes revient à dire que si elle roulait effectivement toujours à 15 m/s sur cet intervalle de temps alors elle parcourrait la même distance. Nous avons donc trouvé deux instants entre lesquels la vitesse moyenne est de 15 m/s et on pourrait raffiner cet intervalle. On peut en effet prendre une marche de 0,5 et une contremarche de 7,5, le rapport de la distance parcourue sur le temps mis pour la parcourir sera toujours de 15 m/s. On trouve alors, encore une fois approximativement, qu'entre 3,5 et 4 secondes la vitesse moyenne est de 15 m/s (voir Figure 1-F). On pourrait continuer de cette façon et trouver des intervalles de plus en plus petits (voir Figure 1-G). Si on accepte que ce

[35] Il est à noter qu'à 4,25 secondes on se trouve dans la phase B et que la façon de varier a changé. Comme on sort de l'intervalle étudié ([0,4]), on pourrait exclure cette marche/contremarche.

processus ait une limite, alors les intervalles se resserrent autour de l'instant auquel la vitesse est exactement de 15m/s. Évidemment, plus les mesures sont petites, plus la démarche graphique est approximative.

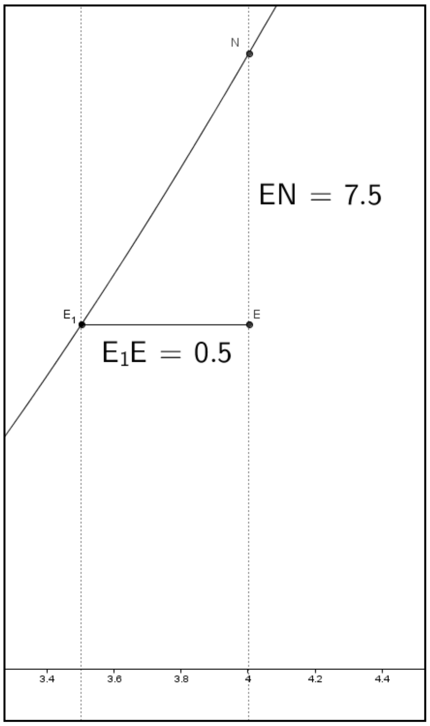


Figure 1-F Ajustement au graphique de la marche/contremarche représentant les accroissements de 0,5 pour le temps et de 7,5 pour la distance

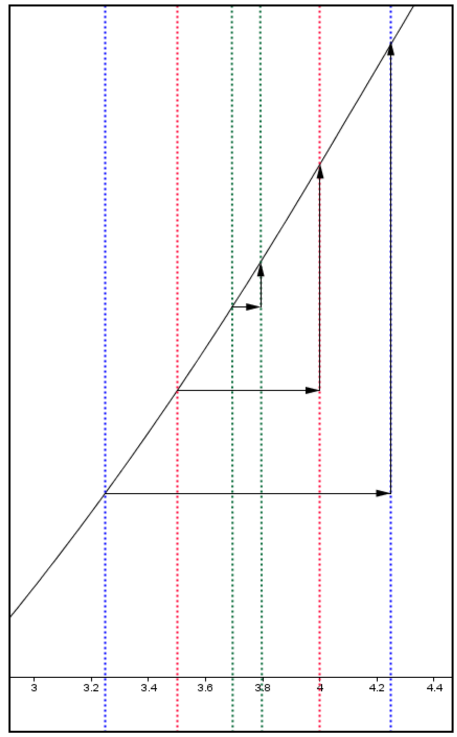


Figure 1-G Encadrements successifs de l'instant cherché

Pour pouvoir obtenir des valeurs plus précises, nous proposons de trouver un modèle mathématique auquel associer la courbe de la fonction *f* sur la phase A. Autrement dit, nous cherchons à déterminer la règle de *f* sur $[0,4]$ de manière à pouvoir calculer les valeurs de la variable indépendante déterminant les intervalles de plus en plus petits auxquels appartient l'instant cherché.

b. Modélisation du mouvement sur la phase A

Lors de l'étude qualitative des accroissements, nous avons vu que sur la phase A la distance augmentait de plus en plus et que les accroissements de la distance augmentaient eux aussi. Nous proposons de regarder à présent les accroissements des accroissements de la distance pour savoir comment varient les accroissements. En fait, cette manière de varier peut nous informer sur la famille de fonctions à laquelle appartient cette partie de courbe.

En partant d'un accroissement constant du temps de 1 seconde, on regarde les accroissements de la distance. La comparaison de chaque accroissement de distance avec l'accroissement de distance précédent (voir Figure 1-H) met en évidence les accroissements des accroissements (en rouge). Une régularité semble se dégager puisque chaque accroissement est toujours exactement égal à l'accroissement précédent augmenté de 4 (voir Figure 1-I). On a donc $a_n = a_{n-1} + constante$ où a_{n-1} et a_n sont deux accroissements consécutifs. Dans le contexte de l'observation du déplacement rectiligne d'un mobile (ici la voiture) au cours du temps, cette relation de récurrence entre les accroissements est caractéristique du **mouvement uniformément accéléré**. Ce type de mouvement étant associé aux fonctions polynômiales du second degré (ou fonctions quadratiques), ce modèle semble donc permettre une analyse mathématique représentative du phénomène. Graphiquement, sur la phase A, la courbe décrit donc très probablement un morceau de parabole dont le sommet est (0,0). On sait, de plus, que la courbe passe par le point (4,32) d'après la lecture graphique. La règle de la fonction f selon laquelle la distance parcourue dépend du temps sur l'intervalle [0,4] est donc $d = f(t) = 2t^2$ (voir détails dans l'encadré I à la fin de la présente annexe). Il reste maintenant à trouver l'instant auquel la vitesse est de 15 m/s à l'aide de cette règle.

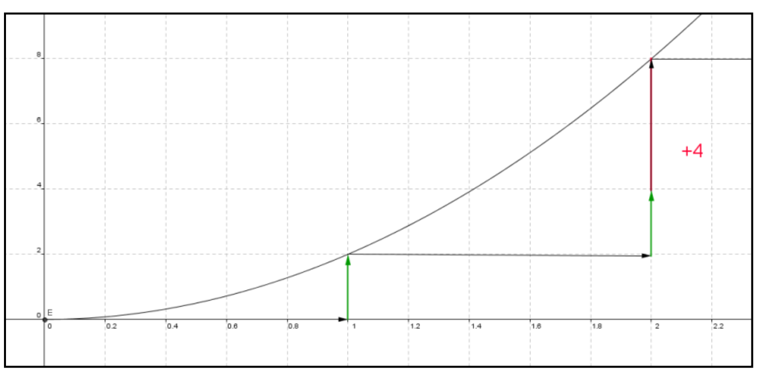


Figure 1-H Comparaison de deux accroissements de distance consécutifs

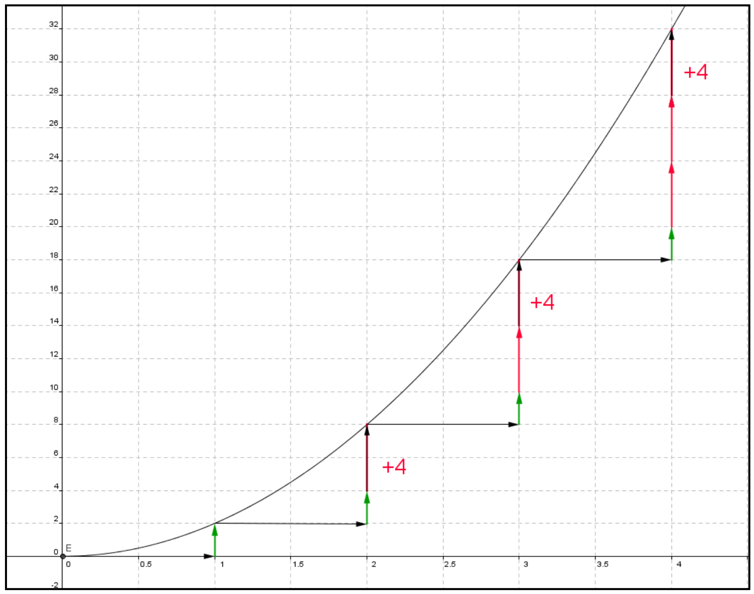


Figure 1-I Mise en évidence de l'accroissement des accroissements de distance

c. Calcul de l'instant cherché à partir de la règle

Reprenons la stratégie de l'intervalle utilisée précédemment. Nous avions pris d'abord un accroissement de temps de 1 seconde et l'accroissement correspondant de distance de 15 mètres. Lorsque nous avons ajusté ce couple marche/contremarche à la courbe nous avons en fait cherché deux points $A(t_a, d_a)$ et $B(t_b, d_b)$ appartenant à la courbe de f et tels que $t_b - t_a = 1$ et $d_b - d_a = 15$. Sachant que $d_b = 2{t_b}^2$ et $d_a = 2{t_a}^2$, on arrive à trouver (voir détails dans l'encadré II à la fin de la présente annexe) que $t_a = 3{,}25$ et $t_b = 4{,}25$, ce qui correspond à nos lectures graphiques. Comme la borne supérieure sort de l'intervalle sur lequel la règle de la fonction est valable (4,25 > 4), la valeur trouvée n'est pas exacte. En effet, à partir de 4 secondes, la règle change. Par contre, en procédant de la même manière pour des intervalles plus petits, on reste à l'intérieur de l'intervalle $[0{,}4]$ et on peut encadrer la valeur cherchée. On se rend compte que la démarche est généralisable et que pour un accroissement de temps de α, la vitesse moyenne de la voiture est de 15 m/s entre les instants $t_a = \frac{15-2\alpha}{2}$ et $t_b = \frac{15+2\alpha}{2}$ (voir détails dans l'encadré III à la fin de la présente annexe).

Plus α est petit, plus on se rapproche de la valeur cherchée. Pour obtenir cette valeur, il s'agit de déterminer la limite du processus donc de poser $\alpha = 0$. Dans ce cas, on obtient que

$t_a = t_b = 3{,}75$, ce qui signifie que 3,75 secondes après le début de l'observation, la vitesse de la voiture est exactement de 15m/s. Dans l'équation proposée, le fait de poser $\alpha = 0$ n'est pas gênant. Néanmoins, si on repense au fait que α dans la situation correspond à un intervalle de temps, on pourrait se dire que si aucun temps ne s'écoule alors la voiture ne bouge pas. La vitesse instantanée ne se définit donc pas comme le rapport entre une parcourue distance et le temps mis pour la parcourir, mais plutôt comme la limite des vitesses moyennes. On associe cette limite à la notion de dérivée. Ainsi, notre travail nous a menée à retrouver la valeur du temps pour laquelle la valeur de la dérivée de la fonction *f* est 15.

5) Quelle est la vitesse exacte de la voiture 2 secondes après le début de l'observation?

Cette fois, nous cherchons la vitesse pour un instant donné. Nous pouvons reprendre la stratégie de l'intervalle en regardant ce qui se passe autour de 2 secondes. On peut soit procéder à des lectures graphiques, soit effectuer les calculs à partir de la règle trouvée précédemment puisque l'instant appartient à l'intervalle sur lequel cette règle est valide. Par calcul, la vitesse moyenne entre 1,5 et 2,5 secondes est de $v_{moy} = \frac{f(2{,}5)-f(1{,}5)}{2{,}5-1{,}5} = 8\ m/s$. De manière semblable, on peut trouver la vitesse moyenne entre 1,75 et 2,25 secondes, puis entre 1,9 et 2,1 secondes etc. On constate qu'on arrive toujours à 8 m/s, il n'est donc pas difficile de trouver la limite du processus! En effet, on peut trouver facilement[36] que la vitesse moyenne de la voiture sur un intervalle $[t-\alpha, t+\alpha]$ sur la phase A est toujours $4t$. Comme elle ne dépend pas de la valeur de α, lorsque α tend vers 0, la limite du rapport de l'accroissement de distance sur l'accroissement de temps est 4t. On a ainsi trouvé la fonction qui à partir d'un temps donné t permet d'obtenir la vitesse instantanée de la voiture : $v_i = f'(t) = 4t$ pour t appartenant à $[0{,}4]$.

[36] $v_{moy} = \frac{f(t+\alpha)-f(t-\alpha)}{2\alpha} = \frac{2(t+\alpha)^2-2(t-\alpha)^2}{2\alpha} = \frac{2t^2+4\alpha t+2\alpha^2-2t^2+4\alpha t-2\alpha^2}{2\alpha} = \frac{8\alpha t}{2\alpha} = 4t$

ENCADRÉ I

Le modèle mathématique que nous avons associé à la fonction f est quadratique. La règle de f, sous sa forme canonique, correspond à $d = f(t) = a(t-h)^2 + k$ où (h, k) sont les coordonnées du sommet de la parabole décrite par f.
La courbe de f correspond à un morceau de parabole dont le sommet est (0,0), la règle de f est donc de la forme $d = f(t) = a(t-0)^2 + 0 = at^2$
De plus, elle passe par (4,32) donc :

$$32 = f(4) = a \cdot 4^2 = 16a$$
$$16a = 32$$
$$a = 2$$

La règle de f, définie sur $[0,12]$, est $d = f(t) = 2t^2$.
NB : Comme nous avions déterminé graphiquement que l'accroissement de l'accroissement de la distance est toujours de 4 mètres pour un accroissement de 1 seconde, nous pouvions déduire directement que la valeur du paramètre *a* est égale à la moitié de 4. En effet, pour toute fonction quadratique, l'accroissement de l'accroissement de la grandeur dépendante pour un accroissement de 1 de la grandeur indépendante est toujours égal à *2a*. On peut facilement dégager cette caractéristique de variation **très utile** de l'étude des accroissements et de l'influence des paramètres pour toute fonction

ENCADRÉ II

$A(t_a, d_a)$ et $B(t_b, d_b)$ sont deux points de la courbe de la fonction f sur la phase A.
Sur cette phase, la règle de la fonction f est $d = f(t) = 2t^2$. On cherche donc les coordonnées des deux points tels que :

$t_b - t_a = 1$ (1)

$d_b - d_a = 15$ (2)

$d_b = 2t_b^2$ (3)

$d_a = 2t_a^2$ (4)

(1)$\Leftrightarrow t_b = t_a + 1$ (5)

(2), (3) et (4) $\Leftrightarrow 2t_b^2 - 2t_a^2 = 15$ (6)

(5) et (6) $\Leftrightarrow 2(t_a + 1)^2 - 2t_a^2 = 15$

$\Leftrightarrow 2(t_a)^2 + 2(2t_a) + 2(1)^2 - 2t_a^2 = 15$

$\Leftrightarrow \cancel{2(t_a)^2} + 4t_a + 2 \cancel{- 2t_a^2} = 15$

$\Leftrightarrow 4t_a = 13$

$\Leftrightarrow t_a = \frac{13}{4} = 3{,}25$ (7)

ENCADRÉ III

$A(t_a, d_a)$ et $B(t_b, d_b)$ sont deux points de la courbe de la fonction f sur la phase A.
Sur cette phase, la règle de la fonction f est $d = f(t) = 2t^2$. On cherche à établir une relation entre les coordonnées des deux points telle que $\frac{d_b - d_a}{t_b - t_a} = 15$.

Si on pose que $t_b - t_a = \alpha$ alors $d_b - d_a = 15\alpha$.

$t_b - t_a = \alpha$ (1)

$d_b - d_a = 15\alpha$ (2)

$d_b = 2{t_b}^2$ (3)

$d_a = 2{t_a}^2$ (4)

(1)$\Leftrightarrow t_b = t_a + \alpha$ (5)

(2), (3) et (4) $\Leftrightarrow 2{t_b}^2 - 2{t_a}^2 = 15\alpha$ (6)

(5) et (6) $\Leftrightarrow 2(t_a + \alpha)^2 - 2{t_a}^2 = 15\alpha$

$\Leftrightarrow 2(t_a)^2 + 2(2t_a\alpha) + 2(\alpha)^2 - 2{t_a}^2 = 15\alpha$

$\Leftrightarrow \cancel{2(t_a)^2} + 4t_a\alpha + 2\alpha^2 \cancel{- 2{t_a}^2} = 15\alpha$

$\Leftrightarrow \frac{4t_a\alpha + 2\alpha^2}{\alpha} = 15$

$\Leftrightarrow 4t_a + 2\alpha \quad = 15$

$\Leftrightarrow 4t_a = 15 - 2\alpha$

$\Leftrightarrow t_a = \frac{15 - 2\alpha}{4}$

ANNEXE 2 : CALCUL DE LA VITESSE DE LA VOITURE À L'INSTANT T=2 SECONDES EN PARTANT DE CET INSTANT

On cherche la vitesse à laquelle roule la voiture à l'instant t=2 secondes.

Sur la phase A à laquelle appartient l'instant t=2, la règle de la fonction f est $d = f(t) = 2t^2$.

1) **Calculons la vitesse moyenne entre 2 et 3 secondes.**

$$\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{2(3)^2 - 2(2)^2}{1} = 18 - 8 = 10$$

Entre 2 et 3 secondes, la vitesse moyenne de la voiture est de 10 m/s.

2) **Calculons la vitesse moyenne entre 2 et 2,5 secondes**

$$\frac{f(2{,}5) - f(2)}{2{,}5 - 2} = \frac{2(2{,}5)^2 - 2(2)^2}{0{,}5} = \frac{12{,}5 - 8}{0{,}5} = 9$$

Entre 2 et 2,5 secondes, la vitesse moyenne de la voiture est de 9 m/s.

3) **Calculons la vitesse moyenne entre 2 et $\boldsymbol{2 + \beta}$ secondes.**

$$\frac{f(2 + \beta) - f(2)}{2 + \beta - 2} = \frac{2(2^2 + 2 \cdot 2\beta + \beta^2) - 2(2)^2}{\beta} = \frac{8 + 8\beta + 2\beta^2 - 8}{\beta} = 8 + 2\beta$$

Entre 2 et $2 + \beta$ secondes, la vitesse moyenne est de $8 + 2\beta$ m/s.

Si on veut la vitesse instantanée de la voiture à 2 secondes, il faut trouver la limite de $8 + 2\beta$ lorsque β tend vers 0 :

$$f(2) = \lim_{\beta \to 0} (8 + 2\beta) = 8$$

La vitesse de la voiture exactement 2 secondes après le début de l'observation est de 8 m/s.

ANNEXE 3 : TABLEAUX D'ANALYSE DES CARACTÉRISTIQUES DES SITUATIONS UTILISÉES DANS LES RECHERCHES ANTÉRIEURES SUR LA COVARIATION

Tableau 3-A Caractéristiques des énoncés des situations proposées pour travailler la covariation dans les recherches antérieures

Recherche	**Âges et/ou niveaux des sujets visés**	**Contexte(s)**	**Modèle réduit disponible**	**Registres de représentation fournis**	**Grandeurs étudiées**
Piaget, 1968	6 à 12 ans	Rectangle qui change de dimensions mais qui conserve le même périmètre	Oui	Verbal	Longueurs
Vollrath, 1986	4 à 15 ans	Boule qui roule sur un plan incliné	Oui	Verbal	Positions de l'objet
Monk, 1992	Collégial	**Échelle qui glisse le long d'un mur**[37]	Oui	Verbal	Longueurs puis vitesses
Saldanha et Thompson, 1998	8ème année (13-14 ans)	Voiture qui se déplace sur une route se rapprochant et s'éloignant de deux villes situées de part et d'autre de la route	Non	Verbal, figural et modèle sur ordinateur	Distances
Carlson, Larsen et Jacobs, 2001	Collégial	1) Construction d'une boîte avec un volume maximal 2) Déplacement d'une personne 3) Relation physique?[38] 4) **Échelle qui glisse le long d'un mur** 5) **Vase qui se remplit**	Non	1) Verbal 2) graphiques 3) ND 4) Verbal et figural 5) Verbal et figural	1) volume et longueur 2) distance et temps 3) ND 4) vitesse et ? 5) hauteur et volume
Carlson et al. 2002	Collégial	1) **Bouteille qui se remplit** 2) Variation de la température au cours du temps 3) **Échelle qui glisse le long d'un mur**	Non	1) Verbal et figural 2) Verbal et graphique 3) Verbal	1) hauteur et volume 2)variation de température et temps 3) vitesse et?
Passaro, 2007	Deuxième secondaire (13-14 ans)	Randonneur qui marche sur une piste	Non	Verbal et figural	Distances
Hitt et Morasse, 2009	Troisième secondaire (14-15 ans)	1) Photographe qui se déplace sur le trottoir et qui photographie une statue 2) Randonneur qui marche sur une piste 3) Jacuzzi qu'on recouvre d'une toile 4) Carrés mouvants 5) L'ombre d'une personne qui marche dans la rue sous un lampadaire	1), 3), 4) et 5) : Non 2) du matériel est disponible	Verbal et figural	1) Distances 2) Distances 3) longueur et aire 4) angle et aire 5) distance/longueur

[37] Nous avons mis en gras les contextes que nous avons retenus pour la construction de nos situations.
[38] Nous avons exclu cette situation lors de notre synthèse puisque les informations données dans l'article ne nous permettent pas de déterminer les caractéristiques que nous avons ciblées.

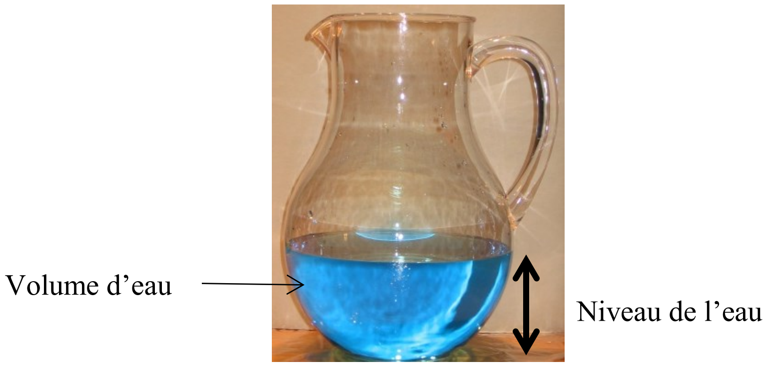
Tableau 3-B Caractéristiques du questionnement des situations proposées dans les recherches antérieures

Recherche	Âges et/ou niveaux des sujets visés	Tâche	Étude qualitative ou quantitative	Registres de représentations attendus
Piaget, 1968	6 à 12 ans	• Généraliser la relation entre les grandeurs • Découvrir la règle	Qualitative	Verbal et algébrique
Vollrath, 1986	4 à 15 ans	• Contrôler le phénomène : faire varier la position initiale en anticipant la position finale • Trouver une position initiale précise selon une position finale donnée	Qualitative	Verbal
Monk, 1992	Collégial	• Décrire la variation de la distance parcourue par le haut de l'échelle puis de la vitesse du haut de l'échelle • Comparer les vitesses du haut et du bas de l'échelle	Qualitative	Verbal puis graphique
Saldanha et Thompson, 1998	8ème année (13-14 ans)	Décrire les variations concomitantes des distances entre deux villes lorsque la voiture se déplace sur la route	Qualitative	Verbal
Carlson, Larsen et Jacobs, 2001	Collégial	1) Trouver la règle permettant d'exprimer le volume en fonction de la mesure du côté des carrés enlevés et déterminer le volume maximal de la boîte 2) Reproduire un graphique en effectuant le mouvement correspondant 3) ND 4) Décrire la variation de la vitesse du haut de l'échelle 5) Construire le graphique présentant la relation entre le volume et la hauteur de l'eau dans le vase	1) quantitative 2) qualitative 3) ND 4) ND 5) qualitative	1) Algébrique et verbal 2) Phénomène concret et verbal 3)? 4) Verbal 5) Graphique
Carlson et al. 2002	Collégial	1) Construire l'esquisse du graphique représentant la hauteur de l'eau dans le vase en fonction du volume 2) Construire l'esquisse du graphique de la température en fonction du temps 3) Décrire la vitesse du haut de l'échelle lorsque le bas de l'échelle glisse sur le sol	Qualitative	1) Graphique 2) Graphique 3) Verbal
Passaro, 2007	Deuxième secondaire (13-14 ans)	• Décrire la variation de la distance entre le poste de secours et le randonneur lorsque la distance parcourue par le randonneur augmente • Représenter visuellement les variations concomitantes des deux grandeurs	Qualitative	Verbal puis figural/graphique
Hitt et Morasse, 2009	Troisième secondaire (14-15 ans)	1) Représenter visuellement la variation de la distance entre le photographe et la statue lorsque le photographe se déplace sur le trottoir 2) Représenter graphiquement la variation de la distance entre le poste de secours et le randonneur lorsque la distance parcourue par le randonneur augmente 3) Construction le graphique, la table de valeurs et la règle de la fonction exprimant le lien entre l'aire recouverte et l'angle formant la toile dans un coin du jacuzzi 4) Construction le graphique et la règle de la fonction exprimant le lien entre l'aire totale de deux carrés mouvants dont la somme des côtés est constante 5) Construction le graphique et la règle de la fonction exprimant le lien entre la longueur de l'ombre de la personne et la distance séparant cette personne du lampadaire	Qualitative/ quantitative	Tous les registres successivement

ANNEXE 4 : LES SITUATIONS EXPÉRIMENTÉES

<u>Le pichet (situation 1)</u>

On s'intéresse au niveau de l'eau et au volume d'eau dans **le pichet suivant :**



<u>Question 1</u>

Décrivez comment réagit **le niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.

<u>Question 2</u>

Le niveau de l'eau varie-t-il toujours de la même façon à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet?

<u>Question 3</u>

Le verre A, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet.

a. Pour chaque verre ajouté, l'accroissement du niveau de l'eau est-il le même?
b. À mesure que le pichet se remplit, les accroissements du niveau de l'eau sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.
c. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.

Question 4

Le verre B, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet.

Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.

Question 5

Supposons que le pichet est rempli avec un verre C qui contient moins d'eau que le verre B. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporterait à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet.

Question 6

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le volume d'eau et le niveau de l'eau dans le pichet.

Question 7

Lorsqu'ils sont remplis jusqu'à la marque, le verre A contient 300 ml d'eau et le verre B contient 150 ml d'eau.

Remplissez le pichet avec le verre de votre choix et prenez en note les mesures nécessaires pour pouvoir décrire le comportement de **l'augmentation du niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.

Question 8

Supposons que le pichet est rempli à l'aide d'un doseur qui contient 1 ml.

Décrivez quel serait le comportement de **l'augmentation du niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet.

Question 9

En utilisant uniquement les mesures que vous avez déjà prises, trouvez la meilleure approximation possible du niveau de l'eau lorsque le volume d'eau dans le pichet est de 1 litre.

Question 10

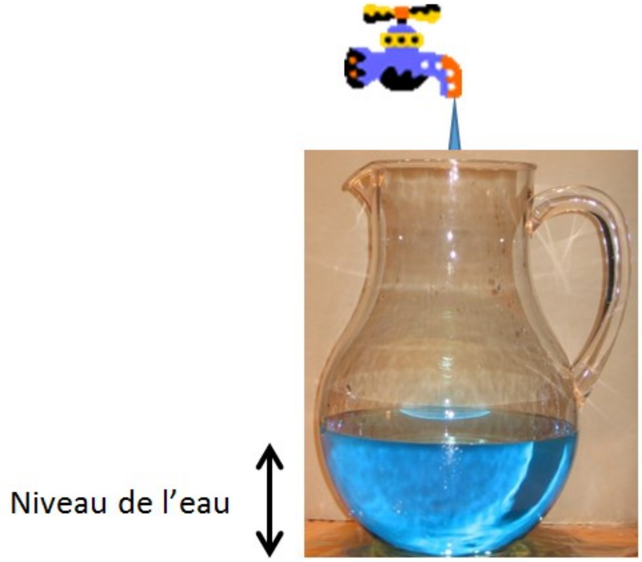
Étant donné ce que vous venez de faire, décrivez comment se comporte **le niveau de l'eau** dans le pichet à mesure que le volume d'eau augmente.

<u>Le pichet (situation 2)</u>

Le pichet suivant est rempli à l'aide d'un robinet dont le **débit d'eau est constant**.

PARTIE A

On s'intéresse au niveau de l'eau dans le pichet et au temps qui passe.



<u>Question 1</u>

Décrivez comment se comporte le **niveau de l'eau** à mesure que le temps passe.

<u>Question 2</u>

Pour des intervalles de temps constants, **les accroissements du niveau de l'eau** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

<u>Question 3</u>

Pour des intervalles de temps d'une seconde**, les accroissements du niveau de l'eau** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

<u>Question 4</u>

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et le niveau de l'eau dans le pichet.

PARTIE B

On s'intéresse à la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet et au temps qui passe.

Question 1

Décrivez comment se comporte **la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet** à mesure que le temps passe.

Question 2

Rappel : le pichet est rempli avec un robinet dont le **débit est constant**.

Les données suivantes ont été collectées : après la première seconde le niveau est à 2 cm, après la deuxième seconde, le niveau est à 3,8 cm, après la troisième seconde, le niveau est à 4,2 cm et après la quatrième seconde, le niveau est à 4,5 cm.

À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il dans le pichet :

a) entre 0 et 1 seconde?

b) entre 1 et 2 secondes?

c) entre 2 et 3 secondes?

d) entre 3 et 4 secondes?

e) entre 1 et 4 secondes?

f) entre 2,25 et 2,75 secondes?

Question 3

Est-il possible, selon vous, de déterminer la vitesse du niveau de l'eau dans le pichet à 3 secondes? à 2,5 secondes?

Si oui, donnez la meilleure approximation possible de ces vitesses en détaillant votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi.

Question 4

Est-il possible, selon vous, de déterminer l'instant auquel la vitesse du niveau de l'eau dans le pichet est de 1,5 cm/seconde.

Si oui, donnez la meilleure approximation possible de cet instant en détaillant votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi.

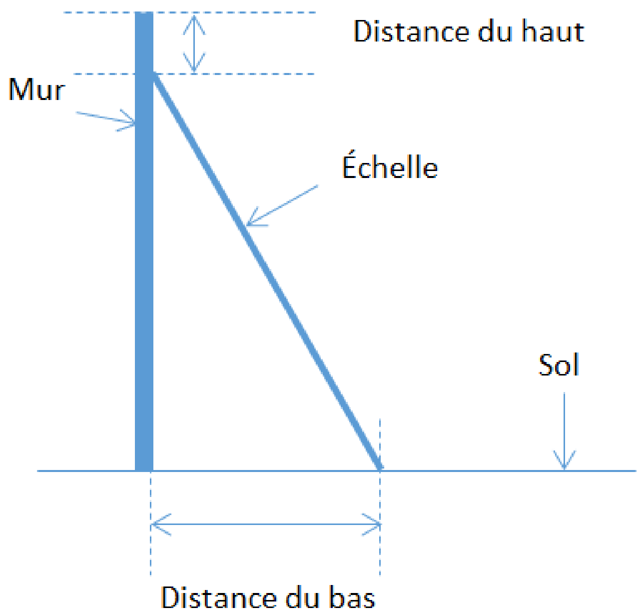
Question 5

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse à laquelle le niveau de l'eau monte dans le pichet.

L’échelle (situation 3)

Une échelle est appuyée contre un mur dont la hauteur est égale à la longueur de l’échelle.

On s’intéresse à la distance entre le haut de l’échelle et le haut du mur (distance du haut) et à la distance entre le bas de l’échelle et le bas du mur (distance du bas).



Question 1

Décrivez comment réagit **la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.

Question 2

La distance du haut varie-t-elle toujours de la même façon à mesure que la distance du bas augmente?

Question 3

Michel déplace le bas de l’échelle d’un pas puis d’un autre etc. éloignant ainsi le bas de l’échelle du mur mais en gardant le haut de l’échelle appuyée sur le mur. Les pas de Michel sont tous de la même longueur.

a. Pour chaque pas, l’accroissement de la distance du haut est-il le même?

b. À mesure que Michel s’éloigne du mur, les accroissements de la distance du haut sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

c. Décrivez comment **l’augmentation de la distance du haut** se comporte à mesure que la distance du bas augmente.

Question 4

Sarah déplace le bas de l’échelle d’un pas puis d’un autre etc. éloignant ainsi le bas de l’échelle du mur mais en gardant le haut de l’échelle appuyée sur le mur. Les pas de Sarah sont tous de la même longueur ET ils sont plus petits que ceux de Michel.

Décrivez comment **l’augmentation de la distance du haut** se comporte à mesure que la distance du bas augmente.

Question 5

Supposons que Rémi déplace le bas de l’échelle d’un pas à chaque fois et que ses pas sont **plus petits** que ceux de Sarah. Décrivez comment **l’augmentation de la distance du haut** se comporterait à mesure que la distance du bas augmenterait.

Question 6

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre la distance du bas et la distance du haut.

Question 7

Sur le modèle réduit de la situation, l’échelle et le mur mesurent 17 cm, les pas de Michel mesurent 3,4 cm et les pas de Sarah mesurent 1,7 cm.

Déplacez le bas de l’échelle en effectuant les pas de Michel **ou** de Sarah et prenez en note les mesures nécessaires pour pouvoir décrire le comportement de **l’augmentation de la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.

Question 8

Supposons que le bas de l’échelle est déplacé millimètre par millimètre.

Décrivez quel serait le comportement de **l’augmentation de la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.

Question 9

En utilisant uniquement les mesures que vous avez déjà prises, trouvez la meilleure approximation possible de la distance du haut lorsque la distance du bas est de 4,25 cm (sur le modèle réduit).

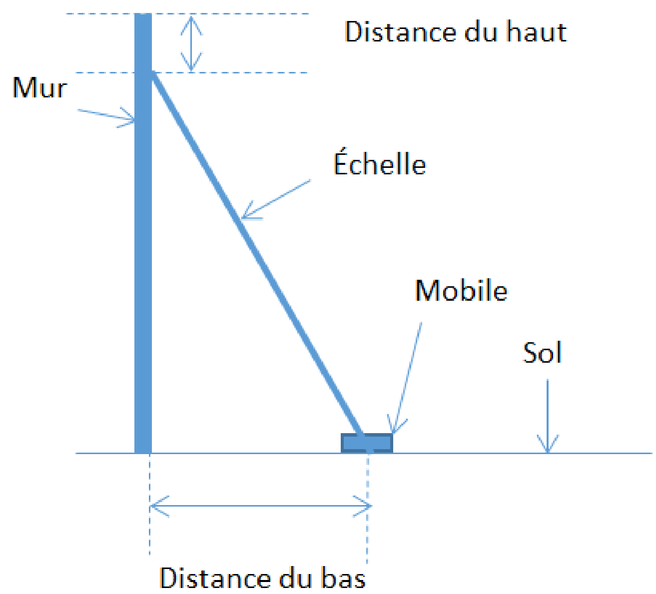
Question 10

Étant donné ce que vous venez de faire, décrivez comment se comporte **la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.

<u>L'échelle (situation 4)</u>

Une échelle est appuyée contre un mur dont la hauteur est égale à la longueur de l'échelle.

Le bas de l'échelle est fixé sur un mobile qui se déplace à **vitesse constante**.



PARTIE A

On s'intéresse à la distance entre le haut de l'échelle et le haut du mur (distance du haut) et au temps qui passe.

<u>Question 1</u>

Décrivez comment se comporte la **distance du haut** à mesure que le temps passe.

<u>Question 2</u>

Pour des intervalles de temps constants, **les accroissements de la distance du haut** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

<u>Question 3</u>

Pour des intervalles de temps d'une seconde**, les accroissements de la distance du haut** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

<u>Question 4</u>

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la distance du haut.

PARTIE B

On s'intéresse à la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle et au temps qui passe.

Question 1

Décrivez comment se comporte **la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle** à mesure que le temps passe.

Question 2

Rappel : le bas de l'échelle se déplace à **vitesse constante**.

Les données suivantes ont été collectées : après la septième seconde la distance du haut est de 1,5 cm, après la huitième seconde, la distance du haut est 2 cm, après la neuvième seconde, la distance du haut est 2,6 cm, après la dixième seconde, la distance du haut est 3,25 cm et après la onzième seconde, la distance du haut est 4 cm.

À quelle vitesse le haut de l'échelle se déplace-t-il :

a) entre 7 et 8 secondes?

b) entre 8 et 9 secondes?

c) entre 9 et 10 secondes?

d) entre 10 et 11 secondes?

e) entre 8 et 11 secondes?

f) entre 9,25 et 9,75 secondes?

Question 3

Est-il possible, selon vous, de déterminer la vitesse du haut de l'échelle à 10 secondes? à 9,5 secondes?

Si oui, donnez la meilleure approximation possible de ces vitesses en détaillant votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi.

Question 4

Est-il possible, selon vous, de déterminer l'instant auquel la vitesse du haut de l'échelle est de 1 cm/seconde.

Si oui, donnez la meilleure approximation possible de cet instant en détaillant votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi.

Question 5

Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse à laquelle se déplace le haut de l'échelle.

ANNEXE 5 : OBJECTIFS ET CONTENU DU QUESTIONNEMENT DANS LES SITUATIONS PRÉSENTÉES AUX ÉLÈVES

Tableau 5-A Objectifs et contenu du questionnement pour les situations 1 et 3 (S1 et S3)

Question	Contenu	Intentions didactiques	Unités sollicitées
1	On demande de dire comment réagit la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente.	Nous voulons voir si les élèves sont capables de voir qu'il y a des variations concomitantes et de décrire la variation de la grandeur dépendante quand la grandeur indépendante varie.	U1 U2 U3
2	On demande si la *façon de varier* de la grandeur dépendante est toujours la même lorsque la grandeur indépendante augmente.	Nous amenons les élèves à se questionner sur **comment** augmente la grandeur dépendante. La *façon de varier* fait donc appel à une étude plus approfondie de comment varie la grandeur dépendante. La question est volontairement fermée puisque l'objectif est d'amener les élèves à se questionner et non à fournir une justification. En effet, les questions qui suivent donneront aux élèves des outils pour justifier leur réponse à cette question.	Vers U4 à U6
3	On propose de prendre des accroissements constants de la grandeur indépendante décrivant l'ensemble du domaine de manière discrète. a. On demande si l'augmentation de la grandeur dépendante est la même pour chaque accroissement de la grandeur indépendante. b. On demande si les accroissements de la grandeur dépendante sont : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement. c. On demande de décrire comment l'augmentation de la grandeur dépendante se comporte lorsque la grandeur indépendante augmente.	L'énoncé de la question suggère une manipulation. Néanmoins, les élèves peuvent répondre sans y avoir recours s'ils sont capables de visualiser mentalement le phénomène. Dans S1 (le pichet) le matériel apporte des informations qui ne sont pas spécifiées dans l'énoncé : la forme du pichet en 3 dimensions et l'ordre de grandeur de l'accroissement donné par la marque sur le verre. Dans la S3 (l'échelle), le matériel n'apporte aucune information nouvelle, il permet juste de simuler le phénomène. a. Cette première sous-question fermée amène les élèves à comparer au moins deux accroissements de la grandeur dépendante. b. Cette sous-question propose aux élèves une manière de verbaliser la comparaison des accroissements successifs de la grandeur dépendante. Elle peut soit être redondante et inutile, soit permettre aux élèves de mieux exprimer leurs idées. c. Cette troisième sous-question amène les élèves à généraliser la comparaison des accroissements successifs de la grandeur dépendante. Ces sous-questions ont été conçues pour amener les élèves à observer puis généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante. La sous-question b. suggère aussi un vocabulaire et nous voulons voir si celui-ci jouera un rôle dans la mobilisation des unités de raisonnement ou dans la façon de les exprimer.	U4 U5 (cette unité est nécessaire lors de la généralisation de la comparaison des accroissements sur l'ensemble du domaine)

4	Même question qu'en 3c. mais pour des accroissements plus petits de la grandeur indépendante.	Nous voulons amener les élèves à généraliser davantage ou à confirmer la généralisation faite à la question précédente. Le processus de réduction des accroissements sera à la base du passage du taux de variation moyen au taux de variation instantané, nous l'initions donc ici lors de l'étude qualitative des accroissements.	U6 U5 (il est possible que ce raisonnement apparaisse ici puisque les accrois-sements plus petits permettent de mieux distinguer les phases de variation)
5	On demande de décrire le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante dans le cas où les accroissements de la grandeur indépendante seraient plus petits que ceux utilisés à la question 4.	Nous voulons voir si les élèves peuvent anticiper ce qui se passerait si on prenait des accroissements encore plus petits de la grandeur indépendante. Évidemment, cela les mène vers la notion de limite sur laquelle repose la notion de dérivée.	U6
6	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre les deux grandeurs.	Cette question vise la synthèse de l'étude qualitative des accroissements. Nous voulons voir comment les élèves utiliseront le travail sur les accroissements effectué précédemment pour produire un graphique. Le retour à un regard global sur les variations concomitantes des deux grandeurs amène les élèves à prendre du recul par rapport au travail local des accroissements en vue de représenter globalement la relation entre les grandeurs. La question ne rappelle pas, volontairement, quelle grandeur dépend de l'autre dans la présente situation. Nous pourrons ainsi voir si tout au long du travail sur les accroissements les élèves sont capables de garder en tête quelle grandeur dépend de l'autre.	U1 à U7
7	On donne les valeurs numériques des accroissements de la grandeur indépendante utilisés aux questions 3 et 4. On demande de choisir un des accroissements et de collecter les données nécessaires à la production de la description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante.	Le but de la question est le même que pour la troisième question. Cependant, on donne ici la possibilité de quantifier les accroissements de la grandeur dépendante. Nous voulons donc voir si cette quantification influencera le raisonnement des élèves et, si oui, comment. Nous voulons aussi voir quel accroissement (le plus petit ou le plus grand) les élèves choisiront et pourquoi. L'étude quantitative des accroissements suivie de la description qualitative du comportement de ces accroissements amène les élèves à faire le lien entre ces deux approches.	U8 en lien avec U4

8	On demande de produire la description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante pour des accroissements unitaires plus petits que ceux utilisés à la question 7.	Le but de la question est le même que pour la cinquième question, mais cette fois on donne la valeur de l'accroissement unitaire relativement petit. Nous voulons donc encore une fois que les élèves anticipent ce qui se passera pour des accroissements plus petits de la grandeur dépendante. L'accroissement est trop petit pour que les élèves puissent manipuler, ce qui les amène à se détacher du matériel et à visualiser mentalement ce qui se passe. Ce pas vers l'abstraction constitue une transition vers la situation suivante dans laquelle la manipulation ne sera plus possible. L'augmentation unitaire nous semble intéressante dans la mesure où numériquement, l'accroissement de la grandeur dépendante est égal au rapport de l'accroissement de la grandeur dépendante sur celui de la grandeur indépendante. Nous voulons donc voir si cette particularité amènera les élèves à parler du taux de variation.	U8 en lien avec U4
9	On demande de trouver la meilleure approximation possible de la grandeur dépendante pour une valeur donnée de la grandeur indépendante, et ce, en utilisant uniquement les mesures déjà prises. (la valeur donnée ne fait pas partie de celles collectées)	Cette question a pour but de vérifier si les élèves tiennent compte du comportement de la grandeur dépendante décrit pour effectuer leur estimation. Nous voulons ainsi voir s'ils sont capables d'exploiter les unités de raisonnement précédemment mobilisées pour répondre à une question ponctuelle, c'est pourquoi nous ne voulons pas qu'ils mesurent de nouveau.	U4 à U9
10	On demande aux élèves de décrire si possible de manière plus précise qu'à la question 1, comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente, et ce, en tenant compte de tout ce qu'ils viennent de faire.	Nous incitons ici les élèves à faire le lien entre l'étude des accroissements effectuée dans les questions 3 à 9 et la question initiale sur « comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente ». En fait, l'étude des accroissements concomitants permet de répondre de manière plus précise à cette question et nous voulons voir si les élèves en prennent conscience. Cette question boucle le travail sur S1 et S3 en tentant de favoriser la mise en place de liens entre les différentes unités de raisonnement mobilisées.	Synthèse de U3 à U10

Tableau 5-B Objectifs et contenu du questionnement pour les situations 2 et 4 (S2 et S4)

Question	Contenu	Intentions didactiques	Unités sollicitées
Partie A			
1	On demande de décrire de manière précise comment varie la grandeur dépendante à mesure que le temps passe et d'expliquer la démarche suivie.	Cette question est semblable à la première question de la situation précédente mais la grandeur indépendante a changé. Cependant comme les deux grandeurs indépendantes sont liées par une fonction à variation constante (les deux grandeurs sont proportionnelles), le comportement de la grandeur dépendante est globalement le même. Nous voulons donc voir si les élèves vont exploiter le travail qu'ils ont effectué dans S1 ou S3 et, si oui, comment.	U2 U3
2	On propose de prendre des accroissements constants du temps (on ne donne pas de valeur numérique). On demande si les accroissements de la grandeur dépendante sont : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement, et d'expliquer.	L'étude des accroissements est de nouveau proposée de manière à rappeler ce qui a été fait dans S1 ou S3 pour pouvoir décrire précisément la variation de la grandeur dépendante. Il est possible que cette question soit redondante si les élèves ont utilisé cette stratégie pour répondre à la question précédente. Nous voulons voir si les élèves vont faire le lien avec S1 ou S3 et réaliser que la variation de la grandeur dépendante est la même.	U4 U5 U6
3	Même question que la précédente mais pour des accroissements d'une seconde.	Nous voulons amener les élèves à généraliser la description faite à la question précédente. L'accroissement unitaire guide les élèves vers le taux de variation. De plus, l'observation d'une longueur au cours du temps permet d'obtenir un taux de variation qui porte un nom : la vitesse. Nous voulons donc voir si les élèves feront le lien entre le comportement de l'accroissement de la grandeur dépendante et celui de la vitesse.	U4 U5 U6 U7
4	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la grandeur dépendante.	Encore une fois cette question a pour but de ramener les élèves à la vision globale de la relation entre les grandeurs suite à l'étude locale proposée. Ce graphique pourrait être utilisé dans la partie B.	U1 à U7
Partie B			
1	On demande de décrire comment se comporte la vitesse à mesure que le temps passe.	Cette question amène les élèves d'une part à expliciter leur compréhension de ce qu'est la vitesse et, d'autre part, à trouver un moyen d'y avoir accès dans le contexte proposé. Nous voulons voir si les élèves feront le lien avec le travail qu'ils ont effectué à la partie A et, par conséquent, s'ils envisageront la vitesse comme le rapport de l'accroissement de la grandeur dépendante sur l'accroissement de la grandeur indépendante.	U2 U3 U7

2	On indique qu'une prise de données à chaque seconde a été effectuée. On donne une série de valeurs obtenues successivement[39] (instants t_1 à t_5) pour la longueur correspondant à la grandeur dépendante de la partie A. On demande alors plusieurs fois de déterminer la vitesse entre deux instants : a) t_1 et t_2 b) t_2 et t_3 c) t_3 et t_4 d) t_4 et t_5 e) t_2 et t_5 f) t_3+0,25 et t_4-0,25	Le comportement global de la vitesse étant connu, nous proposons de revenir à une étude quantitative locale. Les valeurs de la vitesse à déterminer correspondent en fait aux valeurs des accroissements de la longueur. Nous voulons voir si les élèves utiliseront les accroissements pour déterminer les vitesses. Les différents instants ont été choisis de la sorte car nous voulons que : 1) les élèves observent numériquement que la vitesse moyenne change constamment entre des instants successifs, 2) il est possible de calculer une infinité de vitesses moyennes, 3) il existe toujours un intervalle plus petit inclus dans un intervalle donné (on le voit avec e), c) et f)). Les intervalles proposés en e), c) et f) pourront être utilisés pour la question suivante. Les données fournies ne permettent pas de répondre à la sous-question f). Nous voulons voir comment les élèves vont envisager répondre à la question. Leur démarche permettra en effet de voir s'ils ont compris que la vitesse changeait constamment et s'ils tiennent compte de comment elle change, ce qu'ils ont en fait déterminé à la question précédente.	U10 U11
3	On demande s'il est possible de déterminer la valeur de la vitesse à deux instants donnés : t_4 pour lequel on connait la valeur de la longueur et $\left(\frac{t_3+t_4}{2}\right)$ qui correspond à l'instant milieu de t_3 et t_4. Si oui, alors on demande de donner la meilleure approximation de la vitesse à ces instants. Si non, alors il faut expliquer pourquoi.	Cette question vise à faire réfléchir les élèves sur l'existence d'une vitesse instantanée. Évidemment, ce questionnement est possible à condition de réaliser qu'à un instant précis on ne peut pas déterminer les accroissements des deux grandeurs (longueur et temps) et en faire le rapport. Nous voulons voir si les élèves distingueront les deux types de vitesse. Nous avons donc volontairement parlé dans les deux questions de « vitesse » de manière vague pour voir comment les élèves allaient gérer l'ambigüité. Dans le cas où les élèves pensent qu'il est possible de déterminer les vitesses cherchées, nous voulons voir comment ils procéderont pour les estimer. Leur démarche permettra de vérifier s'ils distinguent bien les deux types de vitesse et s'ils prennent en compte le comportement de la vitesse décrit précédemment.	U13

[39] Dans la situation 2, seulement quatre valeurs sont données pour les instants 1, 2, 3 et 4. Les calculs impliquent la longueur 0 correspondant à l'instant 0. Dans la situation 4, cinq valeurs sont données aux instants 7 à 11.

4	On demande s'il est possible de déterminer la valeur de l'instant pour lequel la vitesse est donnée (on donne une valeur précise de la vitesse). Si oui, alors on demande de donner la meilleure approximation de l'instant auquel la vitesse est donnée. Si non, alors il faut expliquer pourquoi.	De la même manière que la question précédente, cette question vise à faire réfléchir les élèves sur l'existence d'une vitesse instantanée et sur la distinction entre vitesse moyenne et vitesse instantanée. Nous voulons toutefois voir si, comme le décrit Schneider (1992), les élèves envisagerons davantage l'existence de la vitesse instantanée dans le cas où celle-ci est donnée.	U12
5	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse.	Cette question a pour objectif de voir comment les élèves utiliseront l'étude locale qu'ils viennent de faire pour représenter globalement la relation entre les deux grandeurs. Encore une fois, la dernière question amène les élèves à prendre du recul et à faire une synthèse de leur travail. Comme nous ne demandons pas explicitement de prendre en compte tout ce qui a été fait, nous pourrons voir ce que les élèves retiennent pour le passage à une représentation graphique. De plus, ce graphique est en lien avec celui construit dans la partie A, nous voulons donc voir si les élèves l'utiliseront.	U1 à U13

ANNEXE 6 : ANALYSE *A PRIORI* DES SITUATIONS

Les caractéristiques des situations ainsi que le questionnement ont été choisis de manière à favoriser la mobilisation de raisonnements et la mise en place de liens entre ces raisonnements. Afin d'identifier ces éléments, nous analyserons les productions écrites et orales ainsi que les gestes des élèves. Nous nous attendons donc à entendre et lire certaines verbalisations et à observer certaines manipulations du matériel, du schéma et éventuellement de d'autres représentations. Pour chaque question, nous commençons donc par présenter le matériel fourni aux élèves. Ensuite, nous présentons une solution type adéquate en expliquant quels sont les raisonnements sous-jacents. Nous proposons aussi, s'il y a lieu, d'autres solutions associées à des raisonnements plus ou moins inadéquats. Ces derniers sont mis en lien avec des difficultés attendues par rapport à la réalisation spécifique de chaque tâche. Finalement, quelques éléments supplémentaires à prendre en compte dans l'analyse a priori des données qui seront recueillies sont présentés.

Il est à noter que le contenu de cette section est issu de notre expérience du sujet à divers niveaux : la recherche (Carlson et al., 2002, 2001; Confrey et Smith, 1995; Hitt et Morasse, 2009; Passaro, 2007; Saldanha et Thompson, 1998; Thompson, 1994b), l'enseignement (au secondaire et à la formation des enseignants), la réflexion présentée dans le Chapitre II et la pré-expérimentation. Nous rappelons aussi que les situations 1 et 3 (S1 et S3) portent sur le contexte du pichet et que les situations 2 et 4 (S2 et S4) concernent le contexte de l'échelle.

1) Situations 1 et 3 : questions 1 et 2

Ces premières questions sont d'abord traitées individuellement puis collectivement. Pour la partie individuelle, les élèves ont le matériel sous leurs yeux mais ne peuvent utiliser que le stylo rouge. Ils sont toutefois invités à planifier, s'ils le désirent, une manipulation de matériel qui pourrait les aider à mieux répondre à la question (voir les consignes globales à l'Annexe 11). Ensuite, lors du partage des solutions individuelles et de la construction d'une solution d'équipe, les élèves peuvent utiliser le reste du matériel fourni.

A. Le matériel

Pour S1, les élèves disposent de : 4 stylos rouges, 1 stylo bleu, deux crayons à mine, une règle non-graduée, du papier-cache adhésif, de l'eau colorée, un pichet vide, deux verres marqués et non-gradués, une boîte recouverte de papier blanc, un bloc de papier blanc, des feuilles blanches, des languettes de papier blanches et une paire de ciseaux. Sur le questionnaire (voir Annexe 4), une photo du pichet contenant de l'eau est donnée de manière à montrer où regarder le niveau de l'eau dans le pichet (grandeur dépendante). Dans les consignes globales données aux élèves (voir Annexe 11), on indique quand utiliser les différentes couleurs de stylo. Ainsi, lors du travail individuel, ils doivent utiliser le stylo rouge et lors du travail d'équipe sur les questions 1 et 2, ils doivent utiliser le stylo bleu. De cette manière, si les élèves veulent poursuivre un travail entamé sur une feuille rose lors du travail d'équipe, nous pourrons distinguer le travail individuel (stylo rouge), du travail collectif (stylo bleu). La photo suivante (Figure 6-A) montre l'ensemble du matériel disponible pour cette question.

Figure 6-A Matériel disponible pour S1

Pour S3, les élèves disposent du même matériel sauf qu'au lieu de l'eau et du pichet, on leur fournit une échelle miniature construite à l'aide de crayons à mine taillés aux deux extrémités, et deux feutres de couleur attachés en sens contraire par des élastiques (voir

Figure 6-B). Sur le questionnaire (voir Annexe 4), un schéma de l'échelle posée sur le mur est donnée de manière à montrer où regarder la distance entre le bas du mur et le bas de l'échelle appelée distance du bas (grandeur indépendante) et la distance entre le haut du mur et le haut de l'échelle, appelée distance du haut (grandeur dépendante).

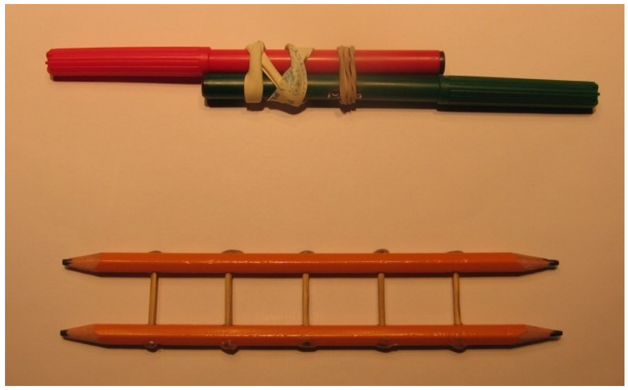


Figure 6-B Matériel supplémentaire pour la situation 3

B. Une solution type adéquate

Les questions posées sont « Décrivez comment réagit le niveau de l'eau à mesure que le volume d'eau augmente » et « Le niveau de l'eau varie-t-il toujours de la même façon à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet? » pour S1 et « Décrivez comment réagit la distance du haut à mesure que la distance du bas augmente? » et « La distance du haut varie-t-elle toujours de la même façon à mesure que la distance du bas augmente? » pour S3.

La première question suppose qu'on fait varier la grandeur indépendante. Lorsque le volume d'eau dans le pichet augmente cela signifie que l'eau monte puisque le pichet est un contenant qui a une forme fermée (sauf sur le dessus) et, donc, que le niveau de l'eau augmente. De même lorsque la distance du bas (distance entre le bas du mur et le bas de l'échelle) augmente cela signifie que le bas de l'échelle s'éloigne du mur et donc que le haut de l'échelle descend puisque la longueur de l'échelle ne change pas et, donc, que la distance du haut augmente aussi. Pour répondre à ces questions une visualisation mentale du phénomène dynamique (le pichet qui se remplit et l'échelle qui glisse contre le mur) est utile. Néanmoins, ces sont des phénomènes simples et relativement familiers, c'est pourquoi les réponses peuvent apparaître évidentes.

La seconde question porte sur la « façon de varier » et, dans notre intention, cible la précision de la variation de la grandeur dépendante. À la question 1, on établit facilement que la grandeur dépendante (niveau de l'eau ou distance entre le haut du mur et le haut de l'échelle) augmente, et cette fois on se demande si elle augmente toujours de la même façon, c'est-à-dire, si elle augmente de manière constante, de plus en plus ou de moins en moins. Évidemment, comme la variation de la grandeur dépendante dépend de la grandeur indépendante, il faut tenir compte de l'augmentation de la grandeur indépendante.

Dans le cas du pichet, il faut analyser sa forme pour pouvoir le décomposer en plusieurs parties. Ainsi, en excluant la partie supérieure où apparaît le bec verseur, trois parties se dégagent facilement (A, B et C, voir Figure 6-C).

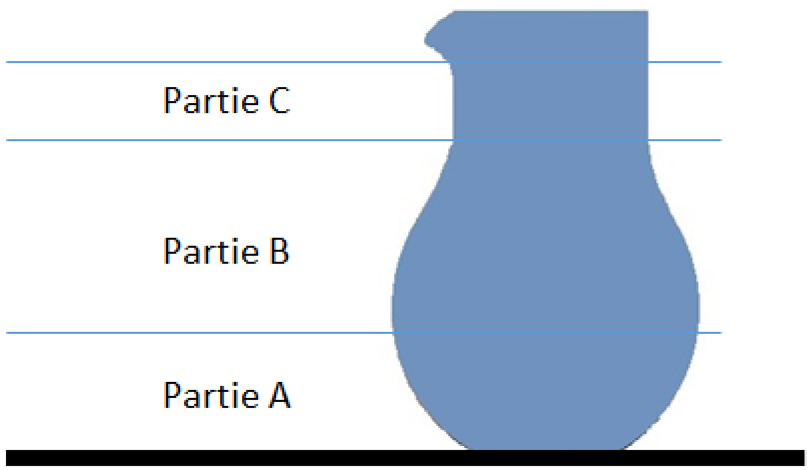


Figure 6-C Découpage du pichet en trois parties

On peut dire que si l'augmentation de la grandeur indépendante est constante alors un même volume d'eau ajouté dans la partie A ou dans la partie C ne provoquera pas des augmentations égales du niveau de l'eau, il augmentera effectivement beaucoup moins dans la partie A que dans la partie C. Par contre, si l'augmentation de la grandeur indépendante varie alors on ne peut pas se prononcer sur la variation de la grandeur dépendante qui dépendra de la variation de celle-ci. Individuellement, les élèves ne peuvent pas manipuler le matériel, ils doivent donc soit visualiser le phénomène, soit travailler sur la photo fournie. Sur cette dernière, il est possible de repérer les trois phases de variation comme nous l'avons montré sur la Figure 6-C. Collectivement, il est possible de manipuler le matériel illustrant ainsi les propos précédents. En prenant une quantité constante d'eau à l'aide d'un verre marqué, on peut comparer les augmentations du niveau de l'eau. C'est d'ailleurs ce vers quoi mènent les questions suivantes. Il est à noter toutefois qu'idéalement, la partie B devrait être séparée en deux sous-parties (B_1 et B_2) car la forme du pichet change. D'abord, il est arrondi formant presque une boule, mais avant de compléter la boule il redevient légèrement évasé avant d'être cylindrique. La jonction entre la boule et le cylindre est en fait estompée pour donner une forme harmonieuse (voirFigure 6-D).

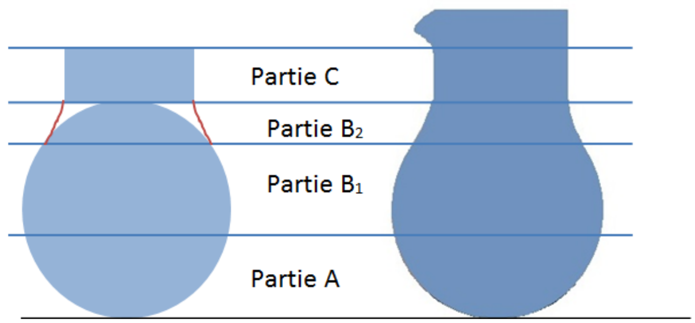


Figure 6-D Découpage du pichet en quatre parties

Dans le cas de l'échelle, il y a une seule phase de variation, c'est-à-dire que la distance du haut augmente de plus en plus au fur et à mesure que la distance du bas augmente. La « façon de varier » de la distance du haut est donc toujours la même.

C. D'autres solutions et des difficultés attendues

Pour les élèves visés par l'étude, la première question peut poser problème dans la mesure où elle est simple et concrète. Il est possible que les élèves n'aient pas l'habitude de ce type de situation et que cela les déstabilise. Néanmoins, lors du travail d'équipe, ils arriveront certainement rapidement à une bonne réponse. Il est même probable que certains élèves parlent du fait que la fonction étudiée est croissante. Pour représenter cette croissance une esquisse d'une droite ou d'une courbe croissante sera peut-être utilisée pour accompagner le discours explicatif. Dans S3, la grandeur dépendante imposée risque d'être moins naturellement perçue. En effet, lorsque l'échelle glisse, il nous apparait plus naturel d'observer la distance entre le haut de l'échelle et le sol diminuer. Il est donc possible que certains élèves se trompent de grandeur dépendante, ce qui les mènerait à dire que cette dernière diminue lorsque la distance entre le bas de l'échelle et le bas du mur augmente.

À la seconde question, nous nous attendons, premièrement, à ce que les élèves ne tiennent pas compte de la variation de la grandeur indépendante en la considérant, implicitement, constante. Dans ce cas, ils répondront simplement que pour S1, comme la forme du pichet change (évasée arrondie dans le bas et régulière étroite dans le haut), le niveau de l'eau n'augmente pas toujours de la manière (la réponse à la question 2 est donc « non «), alors que pour S3 c'est le cas (la réponse à la question 2 est donc « oui »). Pour cette dernière réponse, il est difficile de justifier pourquoi et il est possible que les élèves tentent de chercher des explications. Cela peut alors mener certains élèves à une modélisation formelle. En effet, il est possible de trouver facilement la règle reliant les grandeurs observées[40]. Cette règle, valable sur l'ensemble du domaine (soit $[0,17]$), caractérise la variation de la grandeur dépendante ce qui peut mener à dire que la façon de varier est toujours la même.

Deuxièmement, il est aussi probable que les élèves ne comprennent pas tous la question de la même façon. Certains peuvent s'accrocher à l'idée que si la grandeur dépendante augmente c'est qu'elle varie toujours de la même façon (elle augmente!) alors que d'autres verront que la façon d'augmenter peut changer.

Troisièmement, nous sommes consciente que l'expression « la façon de varier est toujours la même » peut être interprétée comme « la façon de varier est constante ». Or, l'idée de variation constante réfère, pour les élèves, à la famille des fonctions affines pour laquelle le taux de variation est constant. Ainsi, ils pourraient croire que la question signifie « est-ce une fonction affine? ». Dans ce cas, seule la partie C du pichet, dans S1, peut être associée à une fonction affine.

Quatrièmement, dans la description de comment la grandeur dépendante augmente, un vocabulaire temporel sera probablement utilisé. En effet, les manuels scolaires utilisent ce type de description. Pour S1, par exemple, nous nous attendons à des descriptions du type « au début le niveau augmente *lentement* car le pichet est large, vers la fin, le niveau

---

[40] Si *d=distance du bas*, *D=distance du haut* et *h=hauteur du mur et de l'échelle (constante)* alors *D* dépend de *d* selon la règle suivante : $D = h - \sqrt{h^2 - d^2}$ (cette règle s'obtient facilement en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle formé par le sol, le mur et l'échelle).

augmente *rapidement* car le pichet est étroit ». Même si le temps n'est pas l'une des variables étudiées, c'est une variable implicite lorsqu'on imagine le pichet se remplir ou l'échelle glisser. Spontanément, il nous semble que la visualisation des phénomènes se passe « à travers le temps », d'où l'utilisation des termes « lentement » et « rapidement ». Il est à noter que dans les manuels scolaires, la grandeur indépendante est souvent le temps d'où la pertinence d'utiliser ces termes. Néanmoins, aucun vocabulaire, selon notre analyse rapide des manuels, n'est fourni pour qualifier l'augmentation ou la diminution d'une grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante n'est pas le temps.

2) Situations 1 et 3 : questions 3, 4 et 5

Ces trois questions (reprises dans le Tableau 6-A) sont abordées collectivement par les élèves.

Tableau 6-A Situations 1 et 3 : questions 3, 4 et 5

Question	S1	S3
3	Le verre A, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet. a. Pour chaque verre ajouté, l'accroissement du niveau de l'eau est-il le même? b. À mesure que le pichet se remplit, les accroissements du niveau de l'eau sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez. c. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.	Michel déplace le bas de l'échelle d'un pas puis d'un autre etc. éloignant ainsi le bas de l'échelle du mur mais en gardant le haut de l'échelle appuyée sur le mur. Les pas de Michel sont tous de la même longueur. a. Pour chaque pas, l'accroissement de la distance du haut est-elle la même? b. À mesure que Michel s'éloigne du mur, les accroissements de la distance du haut sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez. c. Décrivez comment **l'augmentation de la distance du haut** se comporte à mesure que la distance du bas augmente.
4	Le verre B, rempli jusqu'à la marque, est utilisé pour remplir le pichet. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporte à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.	Sarah déplace le bas de l'échelle d'un pas puis d'un autre etc. éloignant ainsi le bas de l'échelle du mur mais en gardant le haut de l'échelle appuyée sur le mur. Les pas de Sarah sont tous de la même longueur ET ils sont plus petits que ceux de Michel. Décrivez comment **l'augmentation de la distance du haut** se comporte à mesure que la distance du bas augmente.
5	Supposons que le pichet est rempli avec un verre C qui contient moins d'eau que le verre B. Décrivez comment **l'augmentation du niveau de l'eau** se comporterait à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet.	Supposons que Rémi déplace le bas de l'échelle d'un pas à chaque fois et que ses pas sont **plus petits** que ceux de Sarah. Décrivez comment **l'augmentation de la distance du haut** se comporterait à mesure que la distance du bas augmenterait.

Nous les abordons ensemble car elles proposent toutes de procéder à une étude des accroissements concomitants des deux grandeurs de manière à identifier et décrire comment la grandeur dépendante augmente. À la troisième question, on suggère un certain accroissement de la grandeur indépendante. Puis, à la question suivante, l'accroissement de la grandeur indépendante est plus petit (dans le cas du pichet, il est possible de déterminer que la quantité d'eau du verre B est exactement deux fois plus petite que celle du verre A mais ce n'est pas précisé dans l'énoncé). À la dernière question, l'accroissement de la grandeur indépendante est encore plus petit que le précédent. À chaque fois, l'objectif est de décrire comment l'augmentation de la grandeur dépendante se comporte.

A. Le matériel

Le matériel fourni est le même que celui pour les questions 1 et 2, sauf que les stylos rouges sont retirés et le stylo bleu est remplacé par un stylo noir. Ainsi, nous saurons que tout travail effectué à partir de ce moment sera écrit en noir même s'il apparaît sur une feuille rose ou bleu.

B. Une solution type adéquate

Dans les énoncés, l'accroissement de la grandeur indépendante est fixé à l'aide d'une mesure étalon non-conventionnelle (un verre et un pas).

En premier lieu, pour répondre à la première sous-question de la question 3, il faut comparer au moins deux accroissements de la grandeur dépendante. Pour ce faire, il suffit d'effectuer concrètement des accroissements de la grandeur indépendante avec la mesure étalon et de comparer les accroissements de la grandeur dépendante obtenus.

Dans S1, la manipulation consiste d'abord à mettre un premier verre d'eau (verre A ou B rempli jusqu'à la marque) dans le pichet et à « mesurer » le niveau de l'eau. Comme on ne dispose pas de règle graduée pour quantifier le niveau qui est une longueur, on peut le représenter à l'aide d'un segment. On peut effectivement comparer ensuite la longueur des différents segments obtenus en les superposant ou à l'œil si la différence est évidente. Plusieurs utilisations du matériel sont possibles pour obtenir le premier segment. Par exemple, on peut tracer un trait sur une feuille collée sur la boîte à la hauteur à laquelle arrive l'eau (les extrémités du segment sont alors un point sur ce trait et sa projection orthogonale sur le côté inférieur de la boîte). Ensuite, on met un second verre d'eau dans le pichet et on trace de nouveau un trait sur la boîte à la hauteur de l'eau. Le segment qui nous intéresse est alors celui qui relie en ligne droite l'extrémité supérieure du segment précédent et sa projection orthogonale sur le nouveau trait. Si la comparaison de la longueur de ces deux segments ne se fait pas à l'œil, on peut décoller la feuille et la plier de manière à superposer les deux segments (voir Figure 6-E).

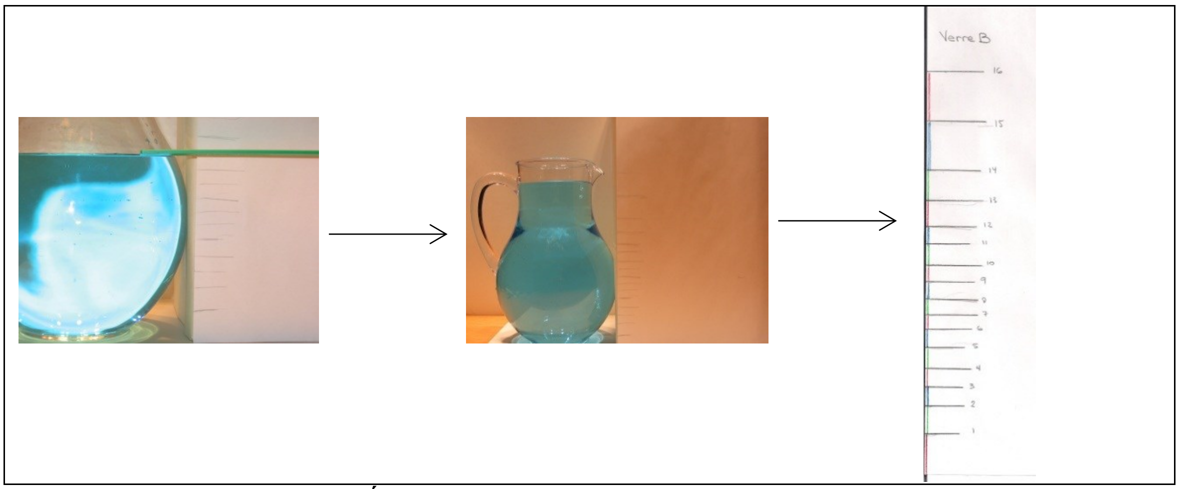


Figure 6-E Étapes de la prise de données pour la situation 1

Dans S3, l'idée est la même. Cette fois, cependant, la mesure étalon correspondant aux *pas* n'est pas donnée. Il faut donc prendre une longueur aléatoire pour les pas de chaque individu. De manière réaliste, l'échelle est plus grande qu'une personne et les pas de cette personne sont au moins deux fois plus petits qu'elle. Ainsi, on pourrait supposer, par exemple, que les pas de cette personne sont au moins trois fois plus petits que l'échelle et prendre l'écart entre les « pattes » de l'échelle comme mesure étalon pour les pas de Michel (question 3). En reportant plusieurs fois la mesure sur une feuille placée au pied de la boîte, on peut ensuite déplacer le bas de l'échelle du pied de la boîte jusqu'à la première marque puis jusqu'à la suivante, en prenant soin de tracer des traits sur la boîte pour garder la trace d'où se trouve le haut de l'échelle à chaque fois. Comme pour S1, on peut comparer les segments obtenus.

La comparaison de deux accroissements successifs suffit pour répondre à question 3a). Néanmoins, si le résultat n'est pas convaincant (par exemple, les segments sont très petits), on peut comparer plusieurs segments obtenus pour des accroissements successifs de la grandeur indépendante. Dans les deux situations, les réponses attendues sont les mêmes : « non, pour chaque verre ajouté, l’accroissement du niveau de l’eau n’est pas le même » et « non, pour chaque pas, l’accroissement de la distance entre le haut du mur et le haut de l’échelle n’est pas le même ». Dans le cas du pichet, cependant, l’accroissement du niveau sera le même lorsqu’on arrivera dans la partie C du pichet.

En second lieu, pour répondre à la deuxième sous-question de la question 3, il faut comparer deux à deux successivement plusieurs accroissements de la grandeur dépendante. Autrement dit, la manipulation effectuée précédemment doit être répétée jusqu’à ce que le pichet soit plein ou jusqu’à ce que le haut de l’échelle touche le sol. Il est à noter, qu’en S1, la capacité du verre A ne permet pas de distinguer clairement des phases de variation. Par contre, la capacité du verre B étant plus petite, on peut raffiner l’observation et arriver à une description du type : « pour des accroissements constants du volume, les accroissements du niveau de l’eau sont de plus en plus petits dans la partie A du pichet, puis ils sont de plus en plus grands dans la partie B et sont finalement constants dans la partie C » (voirFigure 6-F). En S3, la distinction de différentes phases n’est pas nécessaire et on arrive à dire que « pour des accroissements constants de la distance du bas, les accroissements de la distance du haut sont de plus en plus grands » (voir Figure 6-G).

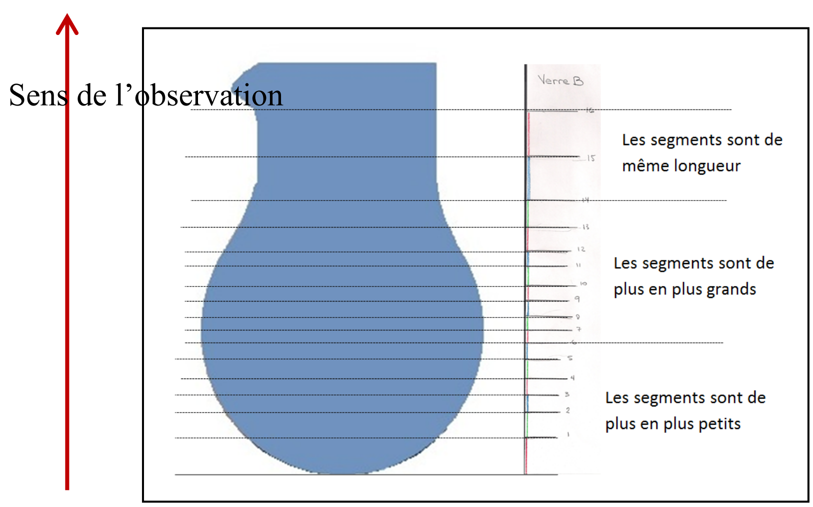


Figure 6-F Comparaison des segments correspondants aux accroissements du niveau de l’eau pour des accroissements constants du volume d’eau dans le pichet (S1 - verre B)

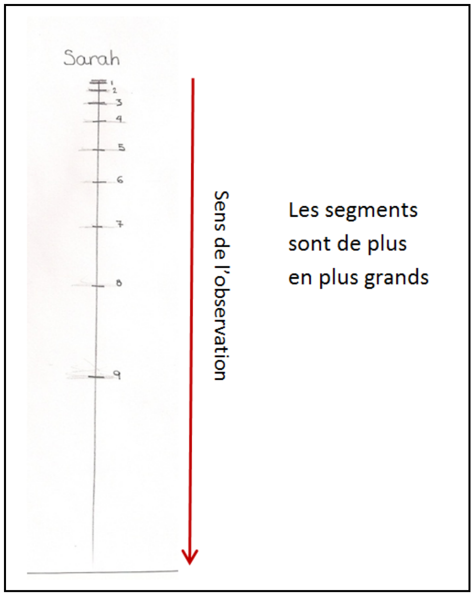


Figure 6-G Comparaison des segments correspondants aux accroissements de la distance du haut pour des accroissements constants de la distance du bas (S3- pas de Sarah)

En troisième lieu, la sous-question c. de la question 3 propose un vocabulaire différent (on parle d' « augmentation » au lieu d' « accroissement ») qui nous semble susciter une généralisation du comportement des accroissements de la grandeur dépendante qui va de pair avec le passage du discret au continu. Nous nous attendons donc à des verbalisations du type : « lorsque le volume augmente de manière constante, l'augmentation du niveau de l'eau diminue dans la partie A du pichet, puis elle augmente dans la partie B et est finalement constante dans la partie C » et « lorsque la distance du bas augmente de manière constante, l'augmentation de la distance augmente ».

En quatrième lieu, la quatrième question suggère de généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements plus petits de la grandeur indépendante. La question porte alors sur le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente. Nous nous attendons à ce que les élèves généralisent facilement leurs observations et trouvent même la question redondante. Pourtant, dans le contexte du pichet, le verre B permet de mieux cerner les phases de variation. Il est possible que les élèves recommencent la manipulation afin de voir l'impact de la grandeur de l'accroissement de la grandeur indépendante sur le comportement de la grandeur dépendante.

En dernier lieu, la question 5 suggère d'imaginer ce qui pourrait se passer avec un accroissement très petit de la grandeur indépendante. Ainsi, les élèves doivent être en mesure de voir, par exemple, que, peu importe la grosseur du verre, aussi petite soit-elle, l'augmentation du niveau de l'eau se comporte de la même manière que décrit précédemment. Toutefois, cette réponse est basée sur l'expérience, la connaissance du phénomène et l'intuition car la démarche expérimentale ne permet de justifier mathématiquement que cette généralisation soit valable.

C. D'autres solutions et des difficultés attendues

Premièrement, l'énoncé de la situation ne fournit aucune donnée numérique et le matériel ne permet pas de mesurer à l'aide des unités conventionnelles (millilitres et centimètres par exemple). Ainsi, certains élèves pourraient dire qu'il est impossible de répondre à la question n'envisageant pas le recours à une mesure non-conventionnelle. Nous pensons, néanmoins, qu'au moins un élève par équipe trouvera un moyen de comparer les longueurs sans avoir recours à des nombres. Mais, nous sommes convaincus que l'absence de données numériques troublera la plupart des élèves car les mathématiques sont souvent associées à la manipulation de nombres.

Deuxièmement, l'étude du comportement des accroissements suggérée force le passage de l'analyse locale à l'analyse globale de la fonction. Il est donc possible que les élèves restent au niveau de l'analyse locale sans être capables de prendre du recul et de généraliser le comportement de la grandeur dépendante. Une réponse à la sous-question c. tout en étant formulée de manière globale pourrait donc être basée sur la comparaison unique de deux accroissements. Dans S1, ce type de démarche est facilement détectable dans la mesure où il mène à une description dans laquelle les différentes parties du pichet ne sont pas distinguées. Par exemple : « l'augmentation du niveau de l'eau diminue ». Néanmoins, cette simple description ne permet pas de savoir si les élèves parlent de la comparaison de deux accroissements ou s'ils généralisent le comportement de la grandeur dépendante à partir de cette comparaison. C'est pourquoi la démarche doit être finement analysée. Évidemment, la question 5, qui porte sur une anticipation de ce qui se passerait pour des accroissements plus petits de la grandeur indépendante, peut aussi permettre de détecter la difficulté à généraliser le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante. On peut imaginer que des élèves ayant de la difficulté à généraliser ne seront pas capables de répondre à la question.

Troisièmement, la comparaison attendue est celle des accroissements successifs de la grandeur dépendante pour un accroissement fixé de la grandeur indépendante. Nous pensons toutefois que certains élèves pourraient, comparer les accroissements de la grandeur dépendante pour les deux accroissements donnés et différents (questions 3 et 4) de la grandeur indépendante. Par exemple, dans S3, on commence par observer les accroissements de la distance du haut pour des pas effectués par Michel. Ensuite, on observe encore les accroissements de la distance du haut mais pour des pas plus petits (ceux de Sarah). On pourrait donc dire que les accroissements de la distance du haut dans le deuxième cas sont plus petits que ceux dans le premier cas. Bien que cette affirmation ne soit pas fausse, elle ne décrit pas le comportement de la distance du haut pour des accroissements constants de la distance du bas. Cette considération peut aussi mener les élèves à décrire ledit comportement de la distance du haut de la manière suivante : « les accroissements de la distance du haut avec les pas de Sarah sont plus petits que ceux avec les pas de Michel, ils augmentent donc aussi mais moins rapidement ». Or, cette référence au temps nuit en quelque sorte à la généralisation du phénomène puisqu'elle implique que plus les accroissements de la distance du bas sont petits plus les accroissements de la distance du haut augmentent lentement et alors quand les accroissements de la distance du bas sont très petits il y a presque immobilité. En fait, il est vrai que si on déplace le bas de l'échelle d'une distance très petite à chaque fois pour mesurer l'accroissement de la distance du haut, ce sera très long. Mais lorsqu'on considère la variation de la distance du haut en fonction de la variation de la distance du bas, le temps n'est pas supposé intervenir. Ainsi, la difficulté pour les élèves est de garder en tête quelles sont les grandeurs observées.

Quatrièmement, la difficulté majeure qui nous apparaît est le fait qu'on s'intéresse à la fois à la variation de la grandeur dépendante et à la variation de **l'augmentation** de la grandeur dépendante. La seconde permet de préciser la première, mais, dans l'action il est facile de perdre de vue ce qu'on est en train de faire. Par exemple, lorsqu'il est demandé de décrire le comportement de l'augmentation du niveau de l'eau dans le pichet, il est possible que certains élèves décrivent le comportement du niveau de l'eau soit en répétant simplement que « lorsque le volume augmente le niveau augmente », soit en tenant compte de la variation de l'augmentation du niveau en disant que « lorsque le volume augmente, le niveau augmente de moins en moins, puis de plus en plus, puis de manière constante ». Le problème ne se situe donc pas, selon nous, dans la compréhension du phénomène mais plus dans l'identification de ce sur quoi porte la question et dans la capacité à décrire de manière analytique le phénomène. En outre, le questionnement vise la mise en place de liens entre ces deux variations et c'est ce que nous abordons avec la question suivante.

3) Situations 1 et 3 : question 6

La sixième question demande aux élèves de tracer le plus exactement possible le graphique représentant la relation entre les deux grandeurs observées. Il est donc dit : « Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le volume de l'eau et le niveau de l'eau dans le pichet. » dans S1 et « Tracez, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre la distance du bas et la distance du haut. » dans S3. Le matériel disponible est le même que pour les questions précédentes.

A. Une solution type adéquate

À partir des segments obtenus lors de la manipulation à la question 3 (ou à la question 4 le cas échéant), il est possible d'obtenir un graphique assez précis. En effet, chaque segment peut être reporté dans le graphique afin d'obtenir des points de la courbe. Le report des segments peut être fait, par exemple, à l'aide des languettes de papier et le traçage se fait alors en trois étapes :

- Étape 1 : Tracer les axes et les identifier (grandeur indépendante sur l'axe des abscisses et grandeur dépendante sur l'axe des ordonnées).
- Étape 2 : Reporter un accroissement de la grandeur indépendante à l'horizontale vers la droite à partir de l'origine. Reporter le premier segment représentant l'accroissement de la grandeur dépendante obtenu après le premier accroissement de la grandeur indépendante à la verticale vers le haut. Répéter l'opération pour tous les

accroissements relevés lors de la manipulation. On obtient une série de couples de segments orientés.

- Étape 3 : Les extrémités des segments orientés verticaux sont les points de la courbe. Relier ces points en tentant de respecter l'allure de la courbe c'est-à-dire en supposant qu'entre chaque point la « façon de varier » est la toujours la même.

Pour S1, il faut choisir un segment étalon pour représenter l'accroissement du volume d'eau. On obtient ensuite un graphique qui ressemble à celui présenté à la Figure 6-H. Pour cette situation, les trois phases de variation correspondant aux trois parties du pichet apparaissent sur le graphique. On suppose que la façon de varier entre les points est la même sur chaque phase. On obtient donc, sur la phase A, une courbe ouverte vers le bas, sur la phase B, une courbe ouverte vers le haut, et sur la phase C, un segment de droite.
Pour S3, le graphique est présenté à la Figure 6-I. Dans cette situation, la façon de varier est la même pour toute l'observation, on obtient une courbe ouverte vers le haut.

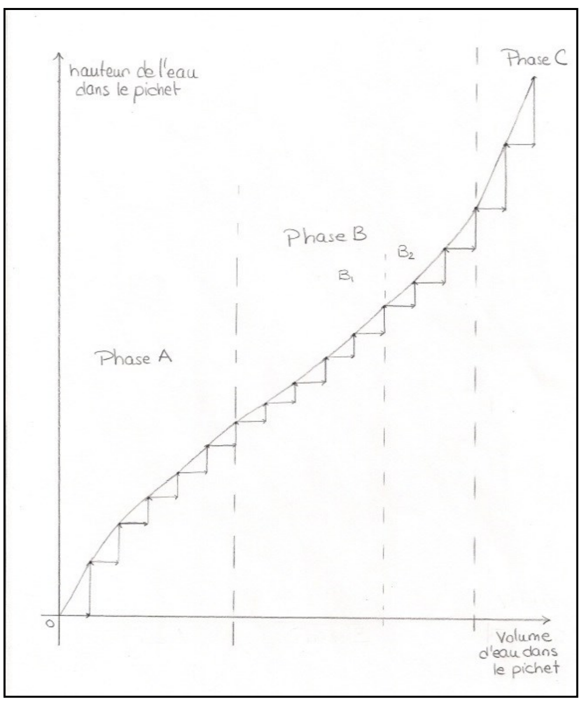


Figure 6-H Graphique de S1 (niveau de l'eau en fonction du volume de l'eau dans le pichet)

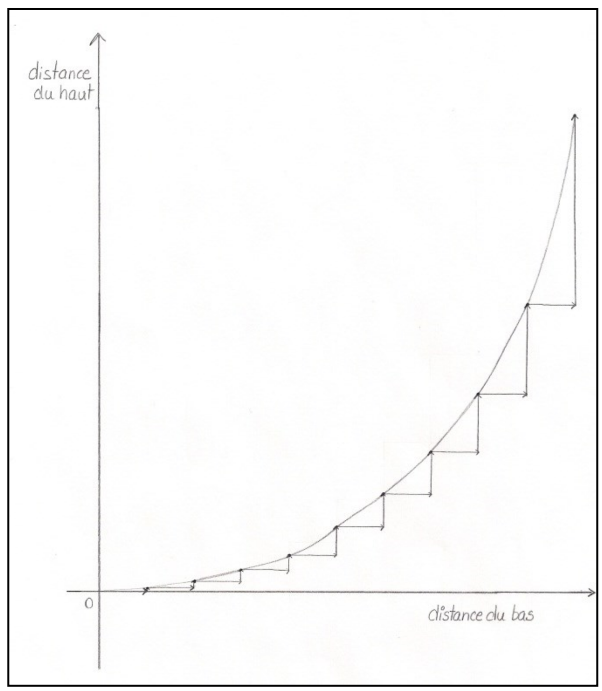


Figure 6-I Graphique de S3 (distance du haut de l'échelle en fonction de la distance du bas de l'échelle)

Cette solution a l'avantage de mener à une représentation graphique assez exacte. Néanmoins, elle ne permet pas de mettre en évidence le lien entre le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante et le comportement de la grandeur dépendante, ce qui doit être fait si on envisage une autre démarche que nous explorons à la section suivante.

B. D'autres solutions et des difficultés attendues

D'une part, nous nous attendons à ce que les élèves tracent l'allure du graphique à main levée sans reporter les segments. En effet, le report de segments sans mesure n'est pas une procédure communément enseignée pour tracer des graphiques. Par contre, il leur est certainement arrivé de tracer des esquisses de graphiques afin d'avoir une idée de l'allure de la courbe.

Le traçage d'une esquisse du graphique nécessite de voir le comportement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente. Or, dans les questions précédentes, il était question du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante. Ainsi, les élèves doivent faire les déductions suivantes :

- Si l'augmentation de la grandeur dépendante augmente alors on peut dire que la grandeur dépendante augmente de plus en plus.
- Si l'augmentation de la grandeur dépendante diminue alors on peut dire que la grandeur dépendante augmente de moins en moins.
- Si l'augmentation de la grandeur dépendante est constante alors on peut dire que la grandeur dépendante augmente de façon constante.

Ensuite, il faut traduire graphiquement le fait que la grandeur dépendante augmente de plus en plus, de moins en moins ou de façon constante. Il est possible à ce moment que les élèves réfèrent à leur connaissance sur le sujet et associent respectivement à ces affirmations une courbe ouverte vers le haut, une courbe ouverte vers le bas et une droite. Sinon, ils doivent trouver un moyen de faire la traduction entre les registres verbal et graphique.

D'autre part, il est possible que les élèves intervertissent les grandeurs indépendante et dépendante car l'énoncé ne rappelle pas cette information. Dans ce cas, ils auront probablement de la difficulté à utiliser leur analyse du comportement des accroissements pour tracer le graphique. En effet, il leur faudrait établir des liens entre le comportement de l'augmentation d'une fonction et de l'augmentation de sa réciproque, ce qui ne s'avère pas évident.

C. Situations 1 et 3 : questions 7 et 8

Les questions 7 et 8 proposent une étude quantitative des accroissements menant aux mêmes descriptions qu'aux questions précédentes (voir Tableau 6-B). Ainsi, le travail à effectuer est exactement le même que dans les questions 3 à 5, sauf que des données numériques sont fournies et la possibilité de mesurer à l'aide des unités conventionnelles aussi.

Tableau 6-B Situations 1 et 3 : questions 7 et 8

Question	S1	S3
7	Lorsqu'ils sont remplis jusqu'à la marque, le verre A contient 300 ml d'eau et le verre B contient 150 ml d'eau. Remplissez le pichet avec le verre de votre choix et prenez en note les mesures nécessaires pour pouvoir décrire le comportement de **l'augmentation du niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmente dans le pichet.	Sur le modèle réduit de la situation, l'échelle et le mur mesurent 17 cm, les pas de Michel mesurent 3,4 cm et les pas de Sarah mesurent 1,7 cm. Déplacez le bas de l'échelle en effectuant les pas de Michel **ou** de Sarah et prenez en note les mesures nécessaires pour pouvoir décrire le comportement de **l'augmentation de la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.
8	Supposons que le pichet est rempli à l'aide d'un doseur qui contient 1 ml. Décrivez quel serait le comportement de **l'augmentation du niveau de l'eau** à mesure que le volume d'eau augmenterait dans le pichet.	Supposons que le bas de l'échelle est déplacé millimètre par millimètre. Décrivez quel serait le comportement de **l'augmentation de la distance du haut** à mesure que la distance du bas augmente.

En plus du matériel fourni précédemment, nous ajoutons une règle graduée et une calculette (calculatrice de base).

D. Une solution type adéquate

L'énoncé de la question 7 impose une collecte de données expérimentales. Ainsi, en premier lieu, il faut procéder à la simulation du phénomène et mesurer, à l'aide de la règle graduée, les longueurs correspondant soit au niveau de l'eau, soit à la distance du haut de l'échelle. Évidemment, si on effectué correctement et complétement la manipulation pour répondre à l'une des questions précédentes, on peut reprendre les feuilles sur lesquelles apparaissent les segments et les mesurer.

La question ne précise pas quelles mesures prendre, il y a donc deux possibilités. Dans S1, par exemple, on peut mesurer le niveau de l'eau à chaque fois à partir du bas du pichet ou mesurer seulement l'augmentation du niveau de l'eau après chaque verre ajouté. Par contre, la question porte sur le comportement de l'augmentation du niveau donc si la première option est choisie, il faut calculer les écarts entre les différentes valeurs afin d'obtenir les augmentations du niveau de l'eau (voir Tableau 6-C).

La description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante est la même que celle produite pour répondre aux questions 3 à 5. Néanmoins, il est indiqué de tenir compte des mesures relevées afin de produire la description. Ainsi, il faut observer les valeurs des augmentations pour déterminer si elles sont de plus en plus grandes, de plus en plus petites ou constantes.

Tableau 6-C Prise de données dans S1 avec le verre A (300 ml) : mise en évidence des augmentations du niveau de l'eau

Nombre de verre	**Niveau de l'eau dans le pichet**	
1	3,5	
2	5,6	+2,1
3	7,5	+1,9
4	8,5	+1
5	10	+1,5
6	13	+3
7	17,3	+4,3
8	22,5	+5,2

E. D'autres solutions et des difficultés attendues

D'un côté, l'ajout de données quantitatives peut amener les élèves à enrichir leurs descriptions du comportement de la grandeur dépendante. En fait, il est possible que l'observation et la comparaison des nombres soient plus faciles pour certains élèves que la comparaison des segments. Il est aussi possible que les élèves se sentent plus à l'aise à manipuler des données numériques car ils en ont l'habitude.

D'un autre côté, si ces données numériques ne sont pas organisées, elles sont difficiles à gérer. Ainsi, il est possible que les élèves n'utilisent pas la représentation tabulaire et s'emmêlent avec les différentes mesures obtenues. De plus, le but de la question est encore de produire une description verbale. Le va-et-vient entre quantitatif et qualitatif ajoute une difficulté pour les élèves qui ne doivent pas perdre de vue l'objectif de la question.

Dans l'ensemble, la tâche est répétitive, nous pensons donc éventuellement perdre l'intérêt de certains élèves. Les deux questions qui suivent proposent néanmoins des tâches différentes.

4) Situations 1 et 3 : question 9

La question 9 rappelée dans le Tableau 6-D, nécessite l'utilisation des données recueillies pour déterminer une valeur de la grandeur dépendante pour une valeur donnée de la grandeur indépendante. Aucun nouveau matériel n'est fourni.

Tableau 6-D Situations 1 et 3 : question 10

Question	S1	S3
9	En utilisant uniquement les mesures que vous avez déjà prises, trouvez la meilleure approximation possible du niveau de l'eau lorsque le volume d'eau dans le pichet est de 1 litre.	En utilisant uniquement les mesures que vous avez déjà prises, trouvez la meilleure approximation possible de la distance du haut lorsque la distance du bas est de 4,25 cm (sur le modèle réduit).

A. Une solution type adéquate

Pour répondre à cette question, les données recueillies à la question 7 sont très utiles. Pour S3, nous utilisons donc la table de valeurs obtenue avec les pas de Sarah. Pour déterminer la distance du haut lorsque la distance du bas est de 4,25 cm, il faut d'abord convertir le nombre de pas en distance en centimètres. Ainsi, comme les pas de Sarah mesurent 1,7 cm, après 2 pas, la distance du bas est de 3,4 cm et après 3 pas, elle est de 5,1 cm. La distance du haut cherchée est donc comprise entre 0,5 et 1 cm (voir Tableau 6-E).

Tableau 6-E Table de valeurs obtenue à la question 7 de la situation 3 (pas de Sarah)

Nombre de pas	Distance du bas (cm) = nombre de pas x 1,7	Distance du haut (cm)
1	1,7	0,1
2	**3,4**	**0,5**
3	**5,1**	**1**
4	6,8	1,6
5	8,5	2,6
6	10,2	3,7
7	11,9	5,2
8	13,6	7,1
9	15,3	10,4
10	17	17

Distance du bas de 4,25 cm

Distance du haut comprise entre 0,5 et 1 cm

La distance du bas de 4,25 cm est au milieu de l'intervalle trouvé puisque 4,25-3,4 = 0,85 et 5,1-4,25 = 0,85. Par contre, la distance du haut n'est pas au milieu de l'intervalle trouvé puisque le taux de variation n'est pas constant. En fait, comme nous avons déterminé que la distance du haut augmente de plus en plus, on peut approximer la valeur cherchée en respectant cette caractéristique. Ainsi, on pourrait séparer l'accroissement de 0,5 cm de la distance du haut, lorsque la distance du bas passe de 3,4 et 5,1 cm, en deux accroissements de 0,2 et 0,3 cm. Entre 3,4 et 4,25 cm, l'accroissement est donc approximativement de 0,2 cm et, par conséquent, la distance du haut est approximativement de 0,7 cm (voir Tableau 6-F).

Tableau 6-F Démarche d'approximation de la distance du haut correspondant à une distance du bas de 4,25 cm (S3 - question 8)

	Distance du bas (cm)	Distance du haut (cm)		
	3,4	0,5	+ 0,2	+ 0,5
+ 0,85	4,25	0,7	+ 0,3	
+ 0,85	5,1	1		

Pour S1, nous utilisons la table de valeurs obtenue avec le verre B. La démarche est semblable à celle présentée pour S3. On détermine donc que la valeur cherchée du niveau de l'eau est comprise entre 7,5 et 8,1 cm (voir Tableau 6-G).

Tableau 6-G Table de valeurs obtenue à la question 7 de S1 (verre B)

Volume de 1 litre

Nombre de verres	Volume (ml) = nombre de verres x 150	Niveau de l'eau (cm)
1	150	2,1
2	300	3,5
3	450	4,7
4	600	5,6
5	750	6,5
6	**900**	**7,5**
7	**1050**	**8,1**
8	1200	8,5
9	1350	9
10	1500	10
11	1650	11,2
12	1800	13
13	1950	15
14	2100	17,3
15	2250	19,9
16	2400	22,5

Niveau compris entre 7,5 et 8,1 cm

Par contre, cette fois, le volume donné n'est pas au milieu d'un intervalle connu, il est deux fois plus près de la borne inférieure.

Entre 6 et 7 verres, on se trouve au tout début de la phase B du graphique (cf Figure 6-C) donc au début de la partie B du pichet, là où il est le plus large. Nous avons déterminé (dès la question 3) que les accroissements de la hauteur sont de plus en plus grands dans cette partie du pichet. On pourrait donc séparer l'accroissement de 0,6 cm en trois accroissements de 0,1; 0,2 et 0,3. On obtient alors une approximation de 7,8 cm pour la hauteur cherchée (voir Tableau 6-H).

Tableau 6-H Approximation de la hauteur de l'eau dans le pichet quand celui-ci contient 1 litre d'eau (S1-question 9)

	Volume (ml)	Hauteur (cm)		
	900	7,5		
+ 50	950	7,6	+ 0,1	
+ 50	**1000**	**7,8**	+ 0,2	+ 0,6
+ 50	1050	8,1	+ 0,3	

Les solutions proposées prennent donc en compte le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante déterminée dans les questions précédentes.

B. D'autres solutions et des difficultés attendues

Pour S3, la modélisation formelle est accessible aux élèves (voir la note de bas de page 6), il est donc possible qu'ils trouvent la formule exprimant la distance du haut (d_h) en fonction de la distance du bas (d_b): $d_h = 17 - \sqrt{289 - {d_b}^2}$ (formule trouvée à l'aide du théorème de Pythagore et de la mesure donnée pour l'échelle et le mur, soit 17 cm). À partir de là, il suffit de calculer la valeur de d_h lorsque d_b=4,25. La valeur exacte cherchée est donc $d_h = 17 - \sqrt{289 - 4{,}25^2}$. Nous nous attendons cependant à ce que les élèves essaient d'effectuer l'opération ce qui peut les mener à une multitude de réponses erronées car l'utilisation de la calculatrice de base fournie est fastidieuse pour ce type de calcul. Ils disposent néanmoins des valeurs collectées dans les questions précédentes pour vérifier l'ordre de grandeur de la valeur cherchée. On obtient une valeur approximative de 0,54 cm ce qui est bien compris entre 0,5 et 1 cm (cf Tableau 6-F).

Pour S1 et S3, il est possible que des élèves effectuent une lecture graphique à partir de leur réponse à la question 6. Nous nous attendons néanmoins à ce que ces élèves soient ceux qui ont construit un graphique relativement précis à l'aide d'un report de segments (voir Figure 6-H et Figure 6-I). Cette démarche implique de compléter le graphique en graduant correctement les axes suite aux informations données dans les questions 7 et 8.

En ce qui concerne la démarche que nous avons présentée à la section précédente (approximation par interpolation), nous nous attendons à ce qu'une erreur fréquente apparaisse lors de la dernière étape. En effet, après avoir déterminé l'intervalle auquel appartient la valeur cherchée, il est facile de prendre le milieu de l'intervalle comme approximation de cette valeur. Bien qu'effectivement cette valeur soit relativement proche de celle cherchée, la démarche utilisée pour la déterminer témoigne d'une non-généralisation de comment varie la grandeur dépendante. Ainsi, dans le cas de S3 pour laquelle le volume donné est au milieu d'un intervalle connu, prendre le milieu de l'intervalle correspondant de la hauteur signifie la linéarisation du phénomène. Or, on sait que, vue la forme du pichet à cet endroit, il est impossible que le taux de variation de la fonction entre les valeurs considérées soit constant.

5) Situations 1 et 3 : question 10

La dernière question pour ces situations demande aux élèves de décrire si possible de manière plus précise qu'à la question 1, comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente, et ce, en tenant compte de tout ce qui vient d'être fait. Aucun nouveau matériel n'est fourni.

Une solution adéquate à cette question est une reprise de la solution fournie à la question 1 à laquelle des éléments sont ajoutés. Par exemple, si la description à la question 1 de la S1 était : « lorsque le volume d'eau dans le pichet augmente, la hauteur de l'eau augmente ». Les éléments ajoutés concerneraient la distinction de plusieurs parties du pichet pour lesquelles l'augmentation se comporte différemment et la description du comportement **de la hauteur de l'eau** dans le pichet pour chaque partie : « lorsque le volume augmente de manière constante : 1) pour la partie A du pichet, la hauteur augmente de moins en moins; 2) pour la partie B, la hauteur augmente de plus en plus; 3) pour la partie C, la hauteur augmente de manière constante ». Ainsi, la solution à cette question est « équivalente » à celle de la question 6, mais dans un registre différent. Le graphique construit à cette dernière question devrait effectivement montrer comment se comporte, de manière précise, la hauteur lorsque le volume augmente. On peut donc voir cette question comme consistant en la conversion du comportement de la grandeur dépendante du registre graphique au registre verbal. Il est néanmoins possible que les élèves reprennent leur travail sans tenir compte du graphique.

Nous nous attendons à ce que cette question semble redondante pour les élèves. Pourtant, la description demandée ne devrait jamais avoir été écrite auparavant, à moins que dès la question 2 les élèves aient été capables de distinguer les phases de variation et de décrire précisément la variation de grandeur dépendante. Selon nous, cette situation ne se présentera pas à S1, mais pourrait se présenter dans S3 car d'une part les élèves ont déjà fait un travail similaire dans S1 et d'autre part, dans le contexte de l'échelle, il n'y a qu'une seule phase de variation.

Cette question, qui se veut un moyen d'amener les élèves à effectuer une synthèse de ce qu'ils ont fait, sera, selon nous, mal réussie par ceux qui ont de la difficulté soit à généraliser le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante, soit à faire le lien entre ce dernier et le comportement de ladite grandeur. La répétition de la description proposée à la question 1 peut alors être une réponse fournie par ces élèves.

Toutefois, la répétition de la description proposée à la question 1 peut aussi être le résultat d'une incompréhension de ce que signifie « décrire de manière plus précise ». Nous sommes consciente que cette consigne peut paraître plutôt vague, mais si les élèves comprennent que le travail effectué tout au long du passage à travers le questionnaire forme un tout cohérent, alors il nous semble que la seule interprétation possible est celle que nous visons.

Cette question, qui clôt le travail proposé dans S1 et S3, sera reprise dans S2 et S4, mais avec des grandeurs différentes.

6) Situations 2 et 4 : partie A, question 1

Les contextes de S2 et S4 sont respectivement les mêmes que ceux de S1 et S3 sauf que les grandeurs auxquelles on s'intéresse sont différentes. Dans la partie A, la grandeur indépendante est le temps et la grandeur dépendante est la même que dans S1 ou S3 (hauteur de l'eau et distance du haut de l'échelle). Outre l'indication des grandeurs observées, l'énoncé apporte deux informations cruciales portant sur la mise en place d'un dispositif permettant l'augmentation constante et continue de la grandeur indépendante. Dans le cas de S2, le débit de l'eau qui remplit le pichet est donc constant. Dans le cas de S4, la vitesse du bas de l'échelle est constante grâce à un mobile sur lequel il est fixé.

La question 1 demande donc, dans S2, de « décrire comment se comporte le niveau de l'eau à mesure que le temps passe » et dans S4, « décrire comment se comporte la distance du haut à mesure que le temps passe ». Comme dans S2 et S4, le travail est d'abord individuel puis collectif.

A. Le matériel

Pour S2, les élèves disposent de : 4 stylos rouges, 1 stylo bleu, un pichet vide et des feuilles blanches. On leur donne aussi une copie du document écrit qu'ils ont remis à la séance précédente (S1 ou S3) présentant les solutions qu'ils ont données collectivement aux questions. De la même manière que pour S1 et S3, le stylo rouge est utilisé pour les réponses individuelles et le stylo bleu pour les réponses collectives. Sur le questionnaire (voir Annexe 4), une photo du pichet contenant de l'eau est donnée de manière à montrer où regarder le niveau de l'eau dans le pichet (grandeur dépendante).

Pour S3, les élèves disposent du même matériel sauf qu'au lieu du pichet, on leur fournit une échelle miniature construite à l'aide de crayons à mine taillés aux deux extrémités. Sur le questionnaire (voir Annexe 4), un schéma de l'échelle posée sur le mur est donnée de manière à montrer où se trouve le mobile et où regarder la distance entre le haut du mur et le haut de l'échelle, appelée distance du haut (grandeur dépendante).

B. Une solution type adéquate

Comme l'augmentation de la grandeur indépendante est constante et continue, la relation entre les grandeurs est semblable à celle étudiée en S1 et S3.

Par exemple, dans S2, le débit de l'eau est constant, donc le volume d'eau augmente de manière constante lorsque le temps s'écoule. Or, dans S1, on a simulé une augmentation constante du volume pour observer l'augmentation de la hauteur de l'eau. Le comportement de cette dernière est donc le même ici et il est facile de répondre à la question en reprenant une description du type : « lorsque le temps augmente de manière constante, la hauteur de l'eau augmente de moins en moins dans la partie A du pichet, de plus en plus dans la partie B et de manière constante dans la partie C ». Comme les élèves disposent de copies de leurs réponses à S1, ils n'ont pas à réétudier le phénomène. Le raisonnement s'appuie sur le parallèle avec la situation précédente (S1 ou S3).

C. D'autres solutions et des difficultés attendues

Premièrement, les notions de vitesse et de débit peuvent poser problème aux élèves car ce sont des taux et, par conséquent, des grandeurs intensives qu'on ne peut pas mesurer en les comparant à un taux-étalon mais qu'on calcule à partir de mesures d'une autre espèce

(Schneider, 1992). Les élèves doivent donc savoir que la vitesse est liée aux grandeurs distance et temps alors que le débit est lié aux grandeurs volume et temps.

Pour pouvoir faire le lien entre S1 et S2, et, entre S3 et S4, il faut voir que le débit constant implique une augmentation constante du volume pour une augmentation constante du temps et que la vitesse constante implique une augmentation constante de la distance pour une augmentation constante du temps. Si les élèves ne font pas ce lien, ils traiteront ces situations comme de nouveaux phénomènes à étudier. Dans ce cas, ils penseront peut-être à les simuler. Or, ils ne disposent pas du matériel permettant cette simulation (pas de robinet, pas de mobile, pas de chronomètre). Ils répondront donc certainement en utilisant leur intuition et leur connaissance du phénomène.

Deuxièmement, une différence majeure avec la situation précédente apparaît : la première situation propose une analyse discrète du phénomène alors que la seconde impose une analyse continue. Par exemple, dans S3, on propose d'abord des accroissements représenté par les pas des individus, ensuite on convertit ces pas en centimètres. Par la suite, le plus petit accroissement considéré est de 1 mm. Bien que notre approche vise la réduction de la grandeur de l'accroissement, la simulation proposée discrétise le domaine de définition de la fonction. On ne sait donc pas vraiment ce qui se passe « à l'intérieur » de chaque accroissement. L'ajout d'un mobile au pied de l'échelle permet d'envisager un mouvement continu et donc une augmentation continue de la distance entre le bas du mur et le bas de l'échelle. Il est possible que ce passage du discret au continu pose problème aux élèves qui pourraient noter, avec raison, que le travail effectué dans S3 ne permet pas de dire exactement quel est le comportement de la distance du haut lorsque l'augmentation de la distance du bas est constante ET continue.

Troisièmement, nous nous attendons à ce que certains élèves fournissent une description globale comme à la première question de la situation précédente (lorsque la grandeur indépendante augmente, la grandeur dépendante augmente aussi) au lieu d'envisager la qualification plus précise de la façon de varier (exemple, la distance du haut augmente de la plus en plus au fur et à mesure que le temps passe).

7) Situations 2 et 4 : partie A, questions 2 et 3

Les questions 2 et 3 ramènent l'étude des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante. D'abord, on impose des accroissements de temps constants, mais implicitement quelconques (question 2). Puis, on fixe cet accroissement à une seconde (question 3) (voirTableau 6-I). Dans les deux cas, on demande si les accroissements de la grandeur dépendante sont constants, de plus en plus grands, de plus en plus petits ou autrement. Le matériel fourni est le même que pour la question précédente.

Tableau 6-I Situations 2 et 4 : partie A, questions 2 et 3

Question	S2	S4
2	Pour des intervalles de temps constants, **les accroissements du niveau de l'eau** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.	Pour des intervalles de temps constants, **les accroissements de la distance du haut** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.
3	Pour des intervalles de temps d'une seconde**, les accroissements du niveau de l'eau** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.	Pour des intervalles de temps d'une seconde**, les accroissements de la distance du haut** sont-ils : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement? Expliquez.

Comme expliqué à la question précédente, le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante est le même que dans S1 ou S3. Ainsi, il suffit de reprendre la description de ce comportement établi aux questions 3 à 5 de ces situations. Il est à noter que la solution de la question 1 de la présente situation est issue de cette étude du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante, il est donc possible que ce dernier ait déjà été décrit. Dans ce cas, ces questions sont moins intéressantes. Nous nous attendons donc à ce que les élèves qui ont, dès la question 1, fait le parallèle avec la situation précédente trouvent ces questions redondantes.

Toutefois, si des élèves ont eu de la difficulté à établir ledit parallèle du fait du passage de l'analyse discrète à l'analyse continue, ces questions peuvent les aider. En effet, l'étude des accroissements discrétise de nouveau le domaine de la fonction et le rapetissement de l'accroissement de temps est un pas vers la continuité. Le dispositif utilisé pour collecter les données n'est cependant pas spécifié et les élèves doivent imaginer comment arrêter le temps (prendre une photo ou suspendre le chronométrage par exemple).

À la troisième question, la description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante est toujours la même. Néanmoins, on se retrouve avec un accroissement unitaire du temps (1 seconde) et il est possible que les élèves fassent remarquer que l'accroissement de la grandeur dépendante (qui est la hauteur de l'eau ou la distance du haut de l'échelle) correspond à une autre grandeur : la vitesse. Évidemment, cette constatation est plus facile à faire dans S4 car on sait que le bas de l'échelle bouge avec une certaine vitesse et on s'attend à ce que le haut de l'échelle en fasse autant. Les deux vitesses ne sont, par contre, pas égales. Alors que la vitesse du bas de l'échelle est constante, celle du haut de l'échelle change constamment. Il est probable cependant que certains élèves pensent que ces deux vitesses sont identiques, et ce, malgré le travail sur les accroissements effectué.

Ainsi, même si la question 3 semble encore redondante, elle offre la possibilité de découvrir une grandeur implicitement travaillée : la vitesse. Cette grandeur sera justement la grandeur dépendante étudiée au cours du temps dans la partie B.

8) Situations 2 et 4 : partie A, question 4

La quatrième et dernière question de la partie A porte sur le traçage d'un graphique. Évidemment, le comportement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente étant le même que S1 ou S3, l'allure du graphique est aussi la même. Les élèves ne disposent toujours pas d'instruments gradués, mais ils ont le graphique qu'ils ont construit à la question 6 de la situation précédente.

Comme le débit de l'eau (S2) et la vitesse du mobile (S4) ne sont pas connus, il est impossible de savoir comment exactement modifier la courbe. Cependant, le paramètre atteint est celui qui multiplie la variable indépendante, l'effet est donc un étirement ou un rétrécissement horizontal de la courbe. Par exemple, dans S4, si la vitesse du mobile est de 1,7 cm/s alors il suffit de reprendre le graphique tracé à la question 6 de S3, de changer l'identification de l'axe des abscisses et de graduer en secondes (voir Figure 6-J). Par contre, si la vitesse du mobile est de 0,85 cm/s, alors le graphique subit un étirement horizontal par un facteur 2 puisque le mobile va deux fois moins vite (voir Figure 6-K).

Figure 6-J Graphique de S4, partie A-question 4 : cas où la vitesse du mobile est 1,7 cm/s

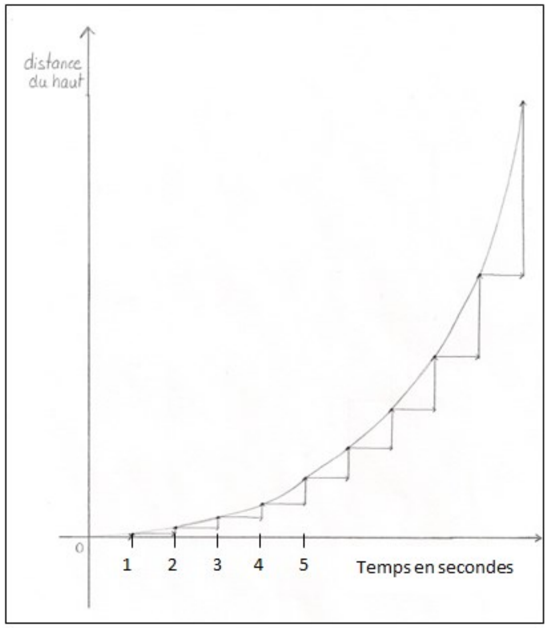
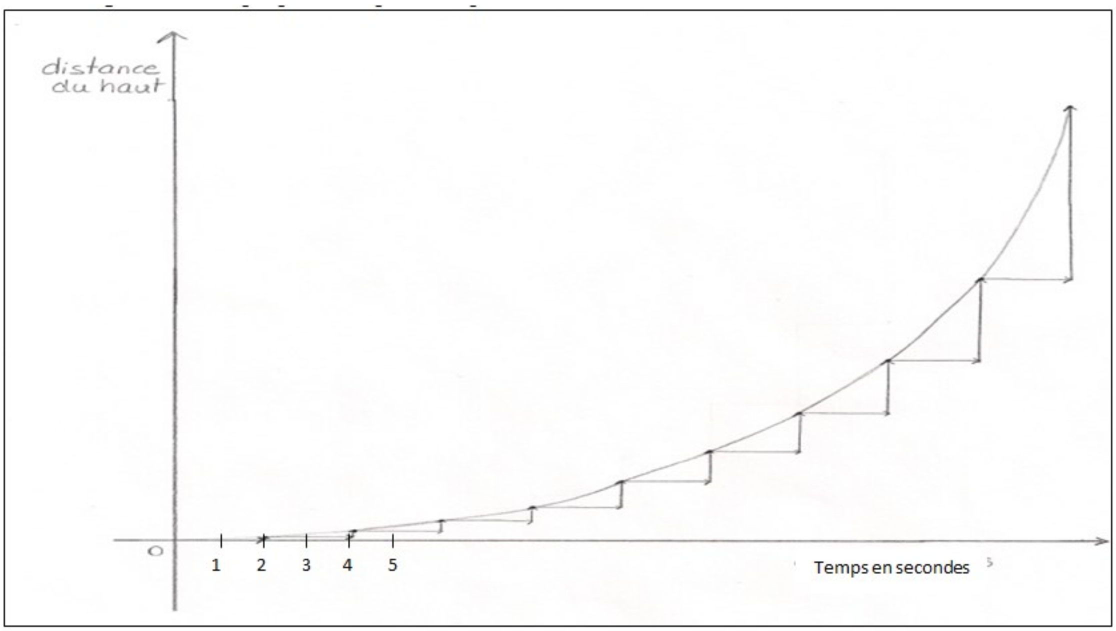


Figure 6-K Graphique de S4, partie A-question 4 : cas où la vitesse du mobile est 0,85 cm/s



En réponse à cette question nous nous attendons à ce que les élèves tracent rapidement une esquisse du graphique en s'inspirant de celui construit à la situation précédente. Il est possible que certains fassent remarquer que, selon le débit de l'eau ou la vitesse du mobile, le graphique se transforme mais qu'il garde tout de même la même allure. Sans graduer les axes, on peut effectivement montrer cette allure qui est la même peu importe le débit de l'eau ou la vitesse du mobile.

9) Situations 2 et 4 : partie B, question 1

Dans la partie B, la grandeur dépendante devient une vitesse alors que la grandeur indépendante reste le temps. Dans le cas de S2, la vitesse est celle de l'eau qui monte dans le pichet et dans celui de S4, c'est celle du haut de l'échelle. La première question porte donc encore une fois sur la variation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente. La formulation de cette question est la même que celle de la première question de la partie A. Le matériel disponible est aussi toujours le même ET on ajoute la calculette pour toute la partie B.

Pour fournir une solution appropriée à cette question, il faut faire le lien entre la fonction étudiée dans cette partie (*g*') et celle étudiée dans la partie A (*g*). En fait, il faut comprendre que la vitesse, qui est la grandeur dépendante de la fonction *g*', correspond au taux de variation de la fonction *g*. Pour faire ce lien, une considération de la vitesse comme une distance parcourue en un certain temps suffit. Ainsi, lorsqu'on a étudié le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante de la fonction *g*, on s'intéressait en fait à comment varie le taux de variation de cette fonction. Cette variation est donc aussi celle de la grandeur dépendante de la fonction *g*' soit la vitesse.

Pour S2, par exemple, on a déterminé que lorsque le temps augmente de manière constante, les accroissements de la hauteur de l'eau sont de plus en plus petits pour la partie A du pichet, puis de plus en plus grands pour la partie B et finalement constants pour la partie C. Sur la partie A, pour un même accroissement de temps, les accroissements de la hauteur de l'eau diminuent ce qui signifie que l'eau monte de plus en plus lentement dans le pichet. Par conséquent, la vitesse de l'eau qui monte dans le pichet diminue. On arrive donc à dire que la vitesse à laquelle monte l'eau dans le pichet : diminue sur la partie A, augmente sur la partie B et est constante sur la partie C.

La description de la variation de la vitesse est globale, elle indique si cette dernière augmente, diminue ou reste constante. Il est possible que certains élèves veuillent préciser cette description comme ils l'ont fait précédemment dans la partie A. Pour cela, ils doivent faire l'étude des accroissements pour la fonction *g*' (et donc étudier la dérivée seconde de *g*). Comme ils ne peuvent pas effectuer de collecte de données (ils n'ont, entre autres, pas le matériel nécessaire pour mesurer la vitesse), ils peuvent exploiter les données collectées dans S1 ou S3. Il leur suffit alors d'étudier le comportement des accroissements des accroissements de la grandeur dépendante. Dans le cas de S4, la règle de la fonction exprimant la relation entre la distance du haut et la distance du bas de l'échelle pourrait être exploitée. En effet, on peut considérer le cas où cette règle est aussi celle de la fonction g (distance du haut en fonction du temps) quand la vitesse du mobile est 1cm/seconde (alors t = d_b) : $f(t) = d_h = 17 - \sqrt{289 - t^2}$. Alors, on peut obtenir la règle de la fonction *g*' en trouvant la fonction dérivée de *g* : $g'(t) = v \quad = \frac{t}{\sqrt{289-t^2}}$. Pour cela, il faut évidemment connaître et appliquer correctement les règles de dérivation. Il est donc évident que cette solution n'est accessible qu'aux étudiants du collégial. À partir de la fonction dérivée, on peut calculer différentes valeurs et différents accroissements afin de décrire leur comportement. Ces calculs ne sont pas vraiment faciles à faire avec la calculatrice de base c'est pourquoi, selon nous, les élèves ne mèneront pas à terme ce travail s'ils l'amorcent.

Évidemment, si les élèves ne peuvent pas donner le sens attendu à la notion de vitesse, c'est-à-dire qu'ils ne la voient pas comme le rapport entre un accroissement de distance et l'accroissement de temps qui lui correspond, ils auront beaucoup de difficulté à poursuivre le travail de la partie B.

10) Situations 2 et 4 : partie B, question 2

La deuxième question de la partie B propose un travail calculatoire préparant le terrain pour les questions qui suivent. On rappelle d'abord que soit le débit de l'eau, soit la vitesse du mobile sont constants. On précise cette fois le dispositif permettant la saisie de données à des instants précis. Une série de données est alors fournie sous forme de texte et la question porte sur le calcul de plusieurs vitesses (voir Tableau 6-J). Le matériel disponible est le même qu'à la situation précédente.

Tableau 6-J Situation 2 et 4 : question 2 – partie B

Question	S2	S4
2	Rappel : le pichet est rempli avec un robinet dont le **débit est constant**. Les données suivantes ont été collectées : après la première seconde le niveau est à 2 cm, après la deuxième seconde, le niveau est à 3,8 cm, après la troisième seconde, le niveau est à 4,2 cm et après la quatrième seconde, le niveau est à 4,5 cm. À quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il dans le pichet : a) entre 0 et 1 seconde? b) entre 1 et 2 secondes? c) entre 2 et 3 secondes? d) entre 3 et 4 secondes? e) entre 1 et 4 secondes? f) entre 2,25 et 2,75 secondes?	Rappel : le bas de l'échelle se déplace à **vitesse constante**. Les données suivantes ont été collectées : après la septième seconde la distance du haut est de 1,5 cm, après la huitième seconde, la distance du haut est 2 cm, après la neuvième seconde, la distance du haut est 2,6 cm, après la dixième seconde, la distance du haut est 3,25 cm et après la onzième seconde, la distance du haut est 4 cm. À quelle vitesse le haut de l'échelle se déplace-t-il : a) entre 7 et 8 secondes? b) entre 8 et 9 secondes? c) entre 9 et 10 secondes? d) entre 10 et 11 secondes? e) entre 8 et 11 secondes? f) entre 9,25 et 9,75 secondes?

A. Une solution type adéquate

La solution à cette question est relativement simple si, précédemment, on a vu la vitesse comme le rapport entre un accroissement de distance et l'accroissement de temps qui lui correspond. Même si ce n'est pas précisé, les vitesses cherchées sont des vitesses moyennes. Avec ou sans la calculette, on peut faire les calculs en utilisant les données fournies pour les sous-questions a) à d) (voir Tableau 6-K).

Tableau 6-K Solutions des sous-questions a) à d) de la question 2 – partie B

Sous-question	S2	Sous-question	S4
a) entre 0 et 1 seconde?	$\frac{2-0}{1-0} = 2\ cm/sec$	a) entre 7 et 8 secondes?	$\frac{2-1{,}5}{8-7} = 0{,}5\ cm/sec$
b) entre 1 et 2 secondes?	$\frac{3{,}8-2}{2-1} = 1{,}8\ cm/sec$	b) entre 8 et 9 secondes?	$\frac{2{,}6-2}{9-8} = 0{,}6\ cm/sec$
c) entre 2 et 3 secondes?	$\frac{4{,}2-3{,}8}{3-2} = 0{,}4\ cm/sec$	c) entre 9 et 10 secondes?	$\frac{3{,}25-2{,}6}{10-9} = 0{,}65\ cm/sec$
d) entre 3 et 4 secondes?	$\frac{4{,}5-4{,}2}{4-3} = 0{,}3\ cm/sec$	d) entre 10 et 11 secondes?	$\frac{4-3{,}25}{11-10} = 0{,}75\ cm/sec$
e) entre 1 et 4 secondes?	$\frac{4{,}5-2}{4-1} = 0{,}8\overline{3}\ cm/sec$	e) entre 8 et 11 secondes?	$\frac{4-2}{11-8} = 0{,}\overline{6}\ cm/sec$

Pour la sous-question f), la tâche est un peu plus complexe. En fait, les données fournies ne permettent pas de déterminer exactement la vitesse moyenne entre les instants donnés. On peut toutefois estimer cette vitesse en analysant la variation entre les instants les plus proches pour lesquels on dispose des valeurs de la distance. Par exemple, dans S2, on sait qu'entre 2 et 3 secondes, la vitesse moyenne est de 0,4 cm/s. En prenant des accroissements constants de 0,25 secondes entre ces deux instants, on peut estimer les valeurs de la hauteur de l'eau dans le pichet en respectant le comportement de cette dernière. Les valeurs de la hauteur augmentant de moins en moins entre 0 et 4 secondes lorsque l'eau monte dans la partie A du pichet. Entre 2 et 3 secondes, les accroissements de la hauteur sont donc toujours de plus en plus petits. On peut prendre des accroissements approximatifs de la hauteur qui respectent cette caractéristique, par exemple, 0,2; 0,12; 0,06 et 0,02 cm (voir Tableau 6-L). On obtient alors des valeurs approximatives de 4 cm à 2,25 secondes et 4,18 à 2,75 secondes. La vitesse moyenne est donc approximativement de $\frac{4{,}18-4}{2{,}75-2{,}25} = 0{,}36\ cm/sec$ entre 2, 25 et 2,75 secondes.

Tableau 6-L Estimation des valeurs de la hauteur de l'eau dans le pichet à 2,25 et 2,75 secondes

	Temps (secondes)	Hauteur de l'eau dans le pichet (cm)		
	2	3,8		
+0,25	2,25	*4*	*+0,2*	
+0,25	2,5	*4,12*	*+0,12*	+0,4
+0,25	2,75	*4,18*	*+0,06*	
+0,25	3	4,2	*+0,02*	

B. D'autres solutions et des difficultés attendues

D'abord, nous nous attendons à ce que, vu le niveau scolaire des élèves, la notion de vitesse soit associée au rapport distance/temps. Il est possible, par contre, qu'ils ne fassent pas le lien entre ce rapport, la notion de taux de variation et le rapport des accroissements concomitants des deux grandeurs (hauteur de l'eau et temps, ou distance du haut de l'échelle et temps) (cf les différentes conceptions du taux de variation selon Herbert et Pierce, 2012, présentées au chapitre I). Par conséquent, les élèves peuvent effectuer les mêmes calculs que proposés ci-dessus mais sans voir qu'il s'agit du rapport d'accroissements concomitants ou du taux de variation moyen. Dans tous les cas nous ne pensons pas que les élèves du secondaire parlent de vitesse **moyenne.**

Ensuite, pour la sous-question f), il est probable que certains élèves indiquent qu'ils ne peuvent pas répondre à la question puisque les données ne sont pas fournies. En outre, ceux qui s'engageront dans la démarche que nous avons présentée peuvent avoir recours à d'autres stratégies. Pour S2, par exemple, ils peuvent simplement remarquer que lorsque l'accroissement de temps diminue alors la vitesse aussi (entre 1 et 4 secondes la vitesse est de $0{,}8\overline{3}\ cm/sec$, entre 2 et 3 secondes, elle est de $0{,}4\ cm/sec$) et déduire que la vitesse entre 2,25 et 2,75 secondes est plus petite que 0,4 cm/s (ils pourraient alors donner une estimation numérique de la vitesse). Ils peuvent aussi prendre l'accroissement de 0,4 cm entre 2 et 3 secondes et le partager en quatre accroissements égaux de 0,1 cm. La vitesse alors obtenue est de 0,4 cm/s soit la même vitesse qu'entre 2 et 3 secondes. Cette réponse devrait déranger les élèves puisque la description du comportement de la vitesse obtenue à la question précédente montre qu'elle n'est pas constante. En prenant des accroissements constants de la hauteur, ils ont en fait considéré que la hauteur augmentait de manière constante.

Finalement, il est possible que l'aspect calculatoire de la tâche nuise au raisonnement des élèves. Effectivement, en entrant dans un mode « calcul », ils peuvent perdre de vue les raisonnements importants qu'ils ont construits précédemment et qui sont utiles ici. Le va-et-vient entre les approches qualitative et quantitative peut constituer, selon nous, une difficulté.

11) Situations 2 et 4 : partie B, questions 3 et 4

Les questions 3 et 4 questionnent les élèves à propos de la possibilité de déterminer une vitesse à un instant donné et de déterminer un instant pour lequel on connait la vitesse. Dans le cas où les élèves pensent qu'il est possible de déterminer la vitesse ou l'instant cherché on leur demande de l'approximer au mieux. Dans le cas contraire, on leur demande d'expliquer pourquoi. Le matériel disponible est toujours le même.

Question	S2	S4
3	Est-il possible, selon vous, de déterminer la vitesse du niveau de l'eau dans le pichet à 3 secondes? à 2,5 secondes? Si oui, donnez la meilleure approximation possible de ces vitesses en détaillant votre démarche. Si non, expliquez pourquoi.	Est-il possible, selon vous, de déterminer la vitesse du haut de l'échelle à 10 secondes? à 9,5 secondes? Si oui, donnez la meilleure approximation possible de ces vitesses en détaillant votre démarche. Si non, expliquez pourquoi.
4	Est-il possible, selon vous, de déterminer l'instant auquel la vitesse du niveau de l'eau dans le pichet est de 1,5 cm/seconde. Si oui, donnez la meilleure approximation possible de cet instant en détaillant votre démarche. Si non, expliquez pourquoi.	Est-il possible, selon vous, de déterminer Est-il possible, selon vous, de déterminer l'instant auquel la vitesse du haut de l'échelle est de 1 cm/seconde. Si oui, donnez la meilleure approximation possible de cet instant en détaillant votre démarche. Si non, expliquez pourquoi.

A. Une solution type adéquate

Ces questions portent sur la notion de vitesse instantanée. Il est donc attendu que la distinction entre la vitesse moyenne et la vitesse instantanée soit faite. Il est évidemment possible de déterminer la vitesse à un instant donné ou le contraire. La démarche suivie peut alors être semblable à celle proposée à la sous-question f) de la question précédente. On peut réduire l'accroissement du temps en tentant d'approximer au mieux les accroissements de la hauteur de l'eau ou de la distance du haut de l'échelle. Par contre, on doit, à un moment donné, fixer une valeur vers laquelle on a l'impression que la vitesse moyenne tend. Par exemple, à partir du **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, on pourrait estimer que la vitesse instantanée à 2,5 secondes est 0,3 cm/s car entre 2 et 3 secondes la vitesse moyenne est de 0,4 et entre 2,25 et 2,75 secondes elle est de 0,36 cm/s.

Pour déterminer l'instant correspondant à une vitesse donnée, il faut se rappeler comment varie la vitesse quand le temps augmente. Par exemple, toujours en S2, on sait qu'entre 0 et 4 secondes la vitesse à laquelle l'eau monte dans le pichet diminue. Cela signifie que si entre 1 et 2 secondes la vitesse moyenne est de 1,8 cm/s (comme calculé dans le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**), la vitesse instantanée est plus grande que 1,8 à 1 seconde et plus petite que 1,8 à 2 secondes. De la même manière, la vitesse instantanée est plus grande que 0,4 cm/s à 2 secondes et plus petite à 3 secondes. Sur la partie A du pichet, l'instant auquel la vitesse instantanée est de 1,5 cm/s est donc compris entre 1 et 3 secondes. On peut raffiner l'intervalle en procédant, encore une fois, comme à la sous-question f) de la question 2. On voit par exemple dans le **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** que la vitesse moyenne approximée entre 2 et 2,25 secondes est déjà plus petite que 1,5 cm/s ($\frac{0,2}{0,25} = 0,8$), on pourrait donc estimer des valeurs de la hauteur de l'eau pour des accroissements de 0,25 secondes entre 1 et 2 secondes. Évidemment, cette démarche amène une solution très approximative. Néanmoins, l'objectif de la question n'est pas de trouver une valeur exacte mais plutôt d'envisager des moyens pour déterminer la vitesse instantanée. Ces moyens en disent long sur le sens qui est donné à cette notion et sur la capacité des élèves à mobiliser les raisonnements utilisés tout au long du travail sur les accroissements.

B. D'autres solutions et des difficultés attendues

Premièrement, certains élèves peuvent ne pas être capables d'envisager la vitesse instantanée. Dans ce cas, ils peuvent soit calculer la vitesse moyenne entre 0 et l'instant donné, soit indiquer qu'il est impossible de déterminer une vitesse à un instant précis. Dans le premier cas, pour S4 par exemple, le calcul proposé serait 3,25/10=0,325 cm/s (distance du haut à 10 secondes divisé par le nombre de secondes écoulé). Dans le second cas, nous nous attendons néanmoins à des discussions car il est fort probable que certains élèves pensent à l'indicateur de vitesse d'une voiture qui donne, par exemple, une vitesse différente à chaque instant lorsqu'on accélère.

Deuxièmement, il est possible que les élèves indiquent qu'il n'est pas possible de déterminer les valeurs cherchées car ils ne disposent pas des données pour le faire. Nous espérons dans ce cas qu'ils expliqueront tout de même quels calculs ils auraient fait s'ils avaient eu accès auxdites données. Dans le même ordre d'idée, certains élèves pourraient dire que s'ils disposaient de la règle de la fonction exprimant la vitesse en fonction du temps alors ils pourraient trouver les valeurs cherchées. Nous ne pensons pas cependant qu'ils se questionnent alors sur comment trouver la règle de cette fonction.

Troisièmement, même si les questions 3 et 4 se ressemblent, elles se distinguent de par l'information qui est donnée. Gantois et Schneider (2009) indiquent que lorsque la vitesse instantanée est donnée dans l'énoncé son existence est mieux acceptée par les élèves que lorsqu'on leur demande de trouver cette vitesse à un instant donné. Ainsi, nous nous attendons à ce que les élèves qui à la question 3 ont indiqué qu'il était impossible de déterminer la vitesse à un instant donné soient troublés lorsqu'à la question 4 on leur donne une vitesse à un instant cherché. Il est possible qu'à ce moment, ils remettent en question leur réponse à la question 3 et tentent de donner un sens à cette vitesse.

Quatrièmement, selon nous, la notion de vitesse instantanée est effectivement troublante. Schneider (1992) indique que les élèves refusent le concept de vitesse instantanée car « si le temps est nul, le mobile ne bouge pas » (voir chapitre I). En effet, la notion de vitesse moyenne est construite à partir de l'idée qu'une certaine distance est parcourue en un certain temps. La transposition de ce raisonnement à la notion de vitesse instantanée ne fonctionne pas. En fait, cette dernière correspond non pas à un rapport mais à la limite d'un rapport, ce qui est bien différent. Sans la notion de limite il peut donc être difficile d'accepter celle de vitesse instantanée, à tout le moins d'un point de vue calculatoire. Nous nous attendons donc à ce que la rupture flagrante entre les deux notions ait des répercussions sur les raisonnements des élèves. Les élèves du secondaire auront certainement de la difficulté à donner un sens à la notion de vitesse à un instant précis alors que les étudiants du collégial devront mettre à l'épreuve leurs connaissances du sujet. Ils indiqueront alors certainement, dans S2 par exemple, que la vitesse instantanée est la limite du rapport entre l'accroissement de la hauteur et l'accroissement de temps lorsque ce dernier tend vers 0 et qu'avec la règle de la fonction exprimant la hauteur en fonction du temps, on pourrait calculer cette limite. Dans le cas de S4, ils tenteront peut-être d'effectuer ce calcul s'ils ont précédemment trouvé la règle de ladite fonction. Il est aussi possible que ces derniers ne fassent pas le lien entre le taux de variation instantané, la dérivée, le rapport des accroissements et la vitesse instantanée utilisée dans un contexte particulier. La question suivante permettra, entre autres, de voir si des liens sont faits entre ces notions et, si oui, lesquels.

12) Situations 2 et 4 : partie B, question 5

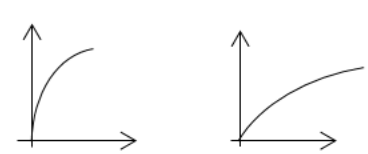
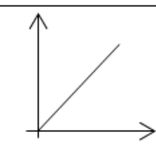
La cinquième et dernière question porte sur la construction d'un graphique. On demande aux élèves de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse à laquelle l'eau monte dans le pichet (S2) et le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse du haut de l’échelle (S4). Aucun nouveau matériel n’est fourni.

A. Une solution type adéquate

La description du comportement de la vitesse lorsque le temps augmente permet d’avoir une première idée de l’allure du graphique. Ainsi, le graphique de S2 représentant la vitesse à laquelle l’eau monte en fonction du temps est d’abord décroissant, puis croissant et finalement constant. Quant à celui de S4, représentant la vitesse du haut de l’échelle en fonction du temps est strictement croissant.

Tout le travail sur la variation effectué précédemment nous a appris qu’il était possible de préciser ces informations. Le traçage de l’esquisse du graphique requiert d’ailleurs ces précisions. Pour le graphique de S4 par exemple, il y a trois allures possibles : courbe ouverte vers le haut, courbe ouverte vers le bas ou ligne droite. En plus de ces allures globales, et excluant les transformations paramétriques, des variantes apparaissent. Par exemple, la courbe ouverte vers le haut peut être plus aplatie au début puis très abrupte vers la fin ou l’inverse (voir Tableau 6-M).

Tableau 6-M Exemples de courbes présentant l’une des trois allures possibles d’une courbe strictement croissante

Courbes ouvertes vers le haut	Courbes ouvertes vers le bas	Ligne droite
		

L’étude du comportement des accroissements est une manière de préciser l’allure de la courbe. Néanmoins, dans S2 et S4, on ne dispose pas directement de valeurs de la vitesse. Certaines valeurs peuvent être calculées à partir des données collectées à la question 8 de S1 ou S3 à propos de la hauteur de l’eau dans le pichet ou de la distance du haut de l’échelle. Évidemment, comme ces données ont été obtenues par mesurage, elles sont approximatives mais elles permettent de donner une idée de ce qui se passe. En déterminant les accroissements des accroissements de ces dernières grandeurs pour des accroissements constants du temps, on peut décrire le comportement des accroissements de la vitesse. Pour S4, par exemple, on peut reprendre le Tableau 6-E (voir Tableau 6-N). Comme la vitesse du bas de l'échelle est constante, les accroissements de temps sont constants si les accroissements de la distance le sont.

On se rend compte que les six premiers accroissements des accroissements sont presque égaux. Vu l'inexactitude de la mesure on peut effectivement se douter que ces valeurs sont proches les unes des autres. L'augmentation de la vitesse est donc lente jusqu'à environ la moitié du mur, puis elle est très rapide. Le graphique est donc non seulement une courbe ouverte vers le haut mais c'est une courbe qui se confond presque avec une droite croissante dont la pente est comprise en 0 et 1 pendant plus de la moitié du temps d'observation, puis une courbe très abrupte dans les dernières secondes d'observation (voir Figure 6-I).

Tableau 6-N Accroissements des accroissements de la distance du haut de l'échelle

Nombre de pas	Distance du haut de l'échelle (cm)		
1	0,1		
2	0,5	+0,4	
3	1	+0,5	+0,1
4	1,6	+0,6	+0,1
5	2,6	+1	+0,4
6	3,7	+1,1	+0,1
7	5,2	+1,5	+0,4
8	7,1	+1,9	+0,4
9	10,4	+3,3	+1,4
10	17	+6,6	+3,3

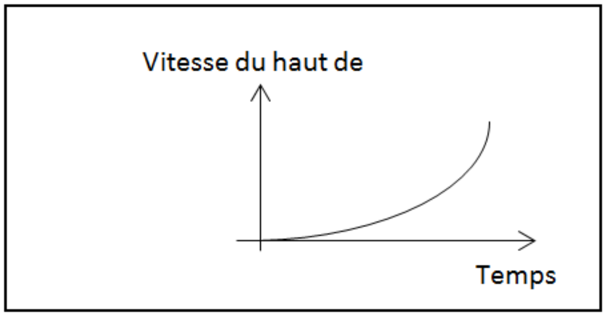


Figure 6-I Allure du graphique du graphique de la vitesse du haut de l'échelle en fonction du temps

B. D'autres solutions et des difficultés attendues

D'abord, il est possible que les élèves improvisent l'allure du graphique à partir de la description globale du comportement de la vitesse. Il est aussi possible que certains essaient, dans le cas de S4, d'utiliser la règle de la fonction qu'ils ont trouvée précédemment. Ils peuvent alors calculer des valeurs de la distance du haut de l'échelle et étudier le comportement des accroissements de cette dernière pour des accroissements constants du temps.

Ensuite, les étudiants du collégial vont probablement utiliser la règle de la dérivée ou utiliser des tangentes à la courbe obtenue à la situation précédente pour tenter d'analyser le comportement de la vitesse. Il est aussi possible qu'ils constatent que les accroissements des accroissements de la distance (hauteur de l'eau ou distance du haut de l'échelle) correspondent aux valeurs de la dérivée seconde de la fonction *g*; la fonction *g*'' exprimant l'accélération en fonction du temps.

Finalement, même chez les élèves du secondaire, nous pensons que la notion d'accélération risque d'être mentionnée dans les verbalisations qui portent sur le comportement de la vitesse en fonction du temps.

13) Quelques éléments supplémentaires à prendre en compte

D'après Viennot (1992), il existe des tendances communes de la pensée et l'une d'entre-elle est la réduction fonctionnelle qui consiste à mettre de côté certaines grandeurs de manière à en étudier moins. Cette tendance ne nous semble pas surprenante puisque dans Passaro (2007) nous avions relevé que les élèves ne considéraient qu'une grandeur à la fois. Lors du travail sur les accroissements et surtout lors de la description du comportement de la grandeur dépendante, il est donc fort possible que certains élèves oublient de considérer les accroissements de la grandeur indépendante qui jouent pourtant un rôle important. Les tâches de construction du graphique amènent alors ces élèves à ré-envisager les variations concomitantes des deux grandeurs.

Dans le même ordre d'idée, lors de la mise de côté de certaines grandeurs, Viennot (1993) a observé que le temps est une grandeur privilégiée par les étudiants. Pour elle, la variation d'une grandeur est spontanément rapportée au temps. Ainsi, les situations dans lesquelles le temps est effectivement la grandeur indépendante pourraient s'avérer plus faciles à traiter par les élèves (voir aussi à ce propos, la section 1.3.2 du chapitre I). Il est donc possible que les raisonnements des élèves soient plus poussés en S2 et S4 qu'en S1 et S3.

ANNEXE 7 : LETTRE DE PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE AUX ÉLÈVES PAR LES ENSEIGNANTS

Valériane Passaro, étudiante au doctorat en didactique des mathématiques à l'Université de Montréal, cherche des élèves volontaires pour participer à sa recherche.

L'objectif de la recherche est d'identifier les raisonnements des élèves lors du travail sur certaines activités mathématiques abordant la notion de fonction. Les résultats de cette recherche pourront mener à l'amélioration de l'apprentissage et de l'enseignement des fonctions au secondaire ET au collégial.

Les séances de travail auront lieu durant les périodes… (à préciser par l'enseignant) à raison de quatre séances durant les mois de avril et mai. L'expérimentation a lieu à l'école.

Les élèves intéressés doivent se présenter le ______________________________ à ______au local __________ pour une séance d'information qui durera environ 20 minutes.

Pour toute question au sujet de cette recherche ou de la tenue de la séance d'information, vous pouvez communiquer directement avec la chercheure à [redacted].

ANNEXE 8 : INFORMATIONS DONNÉES LORS DE LA RENCONTRE D'INFORMATION AVEC LES ÉLÈVES

1. Présentation de la chercheure

Je suis étudiante au doctorat en didactique des mathématiques à l'Université de Montréal. J'ai enseigné au secondaire et je me posais beaucoup de questions sur comment améliorer mon enseignement et comment aider mes élèves à mieux comprendre. J'ai décidé de faire de la recherche pour faire avancer les connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

2. Présentation des objectifs de la recherche

Je m'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fonction au secondaire et au collégial. Ma recherche est exploratoire. Elle a pour objectif de mieux comprendre les raisonnements des élèves de quatrième et cinquième secondaire (ou du collégial) lors d'un travail particulier sur les fonctions.

3. Explication du déroulement général de l'expérimentation

L'expérimentation se déroulera sur quatre séances de 1h30 qui auront lieu durant les périodes… (à compléter) aux dates suivantes … (à compléter). Durant ces séances quatre élèves du même niveau seront avec moi dans un local de l'école. Votre enseignant ne sera pas présent.
Après que j'aie donné quelques consignes sur le déroulement de la séance, je vais demander aux élèves de répondre à des questions sur une situation mathématique. Il y aura un peu de travail individuel mais surtout du travail en équipe de quatre. Des réponses devront être écrites sur un document, mais la plus grande partie du travail sera d'expliquer oralement les démarches suivies. Durant ce travail je n'interviendrai pas, mais à la fin de la séance je poserai quelques questions pour mieux comprendre ce que vous avez fait.
Les séances seront filmées avec deux caméras et enregistrées avec un dictaphone. Ces enregistrements me permettront de faire l'analyse des données, c'est-à-dire de prendre en note dans le détail vos démarches pour pouvoir bien les comprendre.
Après les quatre séances, une séance supplémentaire optionnelle sera offerte aux participants qui veulent poser des questions sur les activités qu'ils ont fait durant les séances.

4. Explication des principes éthiques

Si vous êtes intéressés à participer à la recherche, vous devez obtenir le consentement écrit d'un de vos parents (ou donner votre consentement écrit dans le cas des élèves majeurs). Vous devez donc bien lire le formulaire de consentement, le signer et le faire signer par un de vos parents le cas échéant. MÊME si vous (et votre parent) signez le formulaire vous pouvez vous retirer en tout temps sans avoir à vous justifier. Vous êtes libre de changer d'avis.
Dans le formulaire, j'offre trois options en ce qui concerne la diffusion des vidéos. En tant que chercheure, il se peut que je trouve intéressant de montrer des extraits vidéo lors de colloques ou dans des cours universitaires pour les enseignants. MAIS, les participants sont libres d'accepter ou non que j'utilise ces vidéos. Ils ont le choix entre ne pas accepter la diffusion du tout, accepter la diffusion mais avec le visage brouillé ou accepter la diffusion sans que le visage soit brouillé (montrer où ça se trouve dans le formulaire).

5. Avantages et inconvénients

Selon moi, la participation à cette recherche est enrichissante. Les activités qui sont proposées constituent un complément mathématique. Mais attention, ce n'est pas forcément en lien avec ce que vous faites en classe. Votre enseignant ne connait pas mes activités et moi je ne sais pas ce que vous faites en classe en ce moment. Ma recherche et votre cours de mathématiques sont deux choses séparées et c'est pour cette raison que votre participation ou votre non-participation à la recherche n'aura aucune influence sur votre dossier scolaire.
Les participants recevront une compensation à la fin des quatre séances[41].
Le seul inconvénient que je vois de participer à cette recherche est l'investissement de temps.

6. Démarche à suivre pour ceux qui sont intéressés

Premièrement, vous devez prendre une enveloppe (je les montre) dans laquelle il y a un formulaire.
Deuxièmement, vous devez bien le lire et le faire lire à l'un de vos parents. SI vous êtes toujours intéressés et que votre parent est d'accord, vous devez tous les deux signer le formulaire (montrer où).
Troisièmement, vous devez rapporter le formulaire à votre enseignant avant le … (à compléter) dans l'enveloppe cachetée. Je vous demande de le rapporter même si vous ne l'avez pas signé.
Ensuite, il y aura un tirage au sort pour déterminer qui seront les quatre participants à chaque niveau.
(Élève du secondaire) Le … (date), votre enseignant vous dira si vous participez ou non à la recherche. Si oui, il vous donnera une copie du calendrier de l'expérimentation précisant les dates, l'horaire et le lieu des séances. Une copie de ce calendrier sera envoyée à vos parents par courriel. Si non, il est possible que je vous recontacte par téléphone ou par courriel (celui donné par vos parents sur le formulaire) par la suite pour vous proposer de remplacer un participant qui s'est désisté. Vous aurez alors toujours le choix d'accepter ou pas.
(Élève du collégial) Le … (date), je vous enverrai un courriel vous indiquant si vous participez ou non à la recherche. Si oui, je vous enverrai alors le calendrier de l'expérimentation précisant les dates, l'horaire et le lieu des séances. Si non, il est possible que je vous recontacte par téléphone ou par courriel par la suite pour vous proposer de remplacer un participant qui s'est désisté. Vous aurez alors toujours le choix d'accepter ou pas.

7. Questions?

Avez-vous des questions?

---

[41] Au secondaire cette information n'a pas été donnée. À la fin de l'expérimentation, nous avons offert un certificat-cadeau de 10$ chez Renaud-Bray pour les remercier pour leur contribution à la recherche. Au collégial, nous avons offert deux options aux élèves : recevoir 50$ ou une attestation officielle de participation bénévole à une recherche. Tous les élèves ont choisi la seconde option.

ANNEXE 9 : LETTRE D'INTRODUCTION DESTINÉE AUX PARENTS DES ÉLÈVES VOLONTAIRES

Lettre d'introduction aux parents pour la participation de leur enfant à la recherche

Sujet de la recherche : Exploration des raisonnements mobilisés par des élèves de quatrième et cinquième secondaire, et, de première année du collégial, lors d'une étude covariationnelle de la fonction

Chercheure : Valériane Passaro, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal
[redacted]

Directeurs de recherche :
- Sophie René De Cotret, professeure titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal
- Louis Charbonneau (co-directeur), professeur et directeur de département, Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université du Québec à Montréal

Madame, monsieur,

En tant que doctorante en didactique des mathématiques, je mène actuellement une recherche contribuant à l'amélioration de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques au secondaire et au collégial.

Monsieur [redacted] a accepté de collaborer à cette recherche en proposant à ses élèves des foyers [redacted] d'y participer sur une base volontaire, et ce, durant des périodes d'activités quotidiennes en avril et mai. La direction du [redacted] appui cette collaboration.

Votre enfant a signifié son intérêt à participer à cette recherche en assistant à une rencontre d'information durant laquelle les modalités de l'expérimentation lui ont été présentées. Il ne pourra cependant y participer qu'avec votre consentement.

Je vous prie donc de lire le formulaire de consentement parental ci-joint et, **si vous acceptez que votre enfant participe à cette recherche**, de le signer aux endroits indiqués.

Le formulaire, signé ou pas, doit être remis à Monsieur [redacted] au plus tard le mardi 9 avril 2013 (avant 16h) dans l'enveloppe cachetée.

La participation ou la non-participation de votre enfant à cette recherche n'aura aucune influence sur son dossier scolaire.

Veuillez prendre note que, dans le cas où il y aurait plus de quatre volontaires, je procéderai à un tirage au sort pour déterminer les participants.

Monsieur [redacted] indiquera à chaque élève volontaire, ayant remis le formulaire signé en temps et lieu, s'il participe ou non à la recherche. Si votre enfant y participe, il recevra au plus tard le vendredi 12 avril 2013, une copie papier du calendrier du déroulement de l'expérimentation précisant les dates, l'horaire et le lieu des séances. Une copie électronique vous sera aussi envoyée par courriel. Dans le cas où le nom de votre enfant n'aurait pas été tiré au sort, il pourrait tout de même être contacté par la suite, par courriel ou par téléphone, pour remplacer un participant qui se serait désisté. Il sera alors toujours libre d'accepter ou non de participer à la recherche.

Tous les formulaires de consentement signés seront donc conservés jusqu'à la fin de l'expérimentation. Ensuite, les formulaires des élèves n'ayant pas du tout participé à la recherche ou ayant signifié leur désir ou celui du parent de retirer leur consentement seront détruits.

Je vous prie d'agréer, madame, monsieur, l'expression de mes sentiments les meilleurs.

Valériane Passaro

ANNEXE 10 : FORMULAIRE DE CONSENTEMENT PARENTAL

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT PARENTAL

Titre de la recherche :

Exploration des raisonnements mobilisés par des élèves de quatrième et cinquième secondaire, et, de première année du collégial, lors d'une étude covariationnelle de la fonction

Chercheure :

Valériane Passaro, étudiante au doctorat, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Directeurs de recherche :

Sophie René De Cotret, professeure titulaire, Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Montréal

Louis Charbonneau (co-directeur), professeur et directeur de département, Département de mathématiques, Faculté des sciences, Université du Québec à Montréal

Source de financement :

Ce projet reçoit l'appui financier du Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

Lieu où se déroule le projet :

[redacted] (Montréal)

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche

Les élèves du secondaire et du collégial rencontrent plusieurs difficultés lors de la réalisation de problèmes portant sur les fonctions. Or, la notion de fonction est fondamentale en mathématiques et en sciences, et c'est pour cette raison qu'elle occupe une place importante dans les programmes de formation de l'école québécoise. Dans l'enseignement actuel, certains aspects de la fonction sont travaillés, mais d'autres ont été mis de côté depuis l'introduction des mathématiques modernes. Une amélioration possible de l'enseignement serait d'inclure un travail sur ces derniers aspects. Pour mieux cerner en quoi devrait consister ce travail, des activités mathématiques sont mises à l'épreuve. Les objectifs sont donc de faire ressortir les raisonnements spontanés des élèves lors d'un travail collaboratif sur ces activités et d'identifier les caractéristiques des activités qui les ont aidés à mobiliser ces raisonnements.

2. Participation à la recherche

Votre enfant devra se présenter à quatre séances de 90 minutes qui se dérouleront dans un local de l'école en avril et mai. Les dates, l'horaire et le lieu des séances vous seront précisés dans un calendrier dont une copie papier sera remise à votre enfant par son enseignant et une copie vous sera envoyée par courriel.

Durant ces séances, quatre élèves du même niveau travailleront individuellement puis collectivement sur des activités mathématiques. Ils devront expliquer oralement leurs démarches et produire un document écrit. La chercheure n'interviendra pas ou peu durant ce travail, mais durant les quinze dernières minutes, elle posera quelques questions au groupe d'élèves afin d'obtenir des précisions sur des éléments précis de leur démarche. Les séances seront filmées et enregistrées à l'aide d'un dictaphone.

Il est à noter que les séances proposées ont lieu en dehors des heures de classe et que leur contenu **ne sera pas évalué**. L'enseignant de mathématiques de votre enfant n'assistera pas aux séances qui seront encadrées par la chercheure uniquement.

À la fin de l'expérimentation, une séance supplémentaire optionnelle sera offerte pour les élèves qui désirent poser des questions à la chercheure au sujet des activités mathématiques réalisées.

3. Confidentialité

Pour les productions écrites (réponses aux questions posées que les participants auront écrit sur un document fourni) et les transcriptions des enregistrements audio (collectés à l'aide du dictaphone) et vidéo (collecté à l'aide des caméras), chaque participant à la recherche se verra attribuer un nom fictif. Seuls la chercheure et ses directeurs auront accès à la liste des participants et des noms fictifs qui leur auront été attribués. Cette liste, ainsi que les productions écrites et les enregistrements audio originaux (non anonymisés), seront conservés dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé. Ils seront détruits 7 ans après la fin du projet. Seules les données ne permettant pas d'identifier votre enfant pourront être conservées après cette date. Ces dernières pourraient alors être utilisées dans le cadre de recherches subséquentes si vous donnez votre accord (voir section « Consentement »), et ce, en respectant les conditions de confidentialité de la recherche actuelle.

Afin de pouvoir éventuellement utiliser des extraits vidéo lors de colloques, congrès ou conférences s'adressant autant à des chercheurs qu'à des professionnels œuvrant dans le domaine de l'éducation, ainsi que dans le cadre de cours universitaires faisant partie de la formation initiale ou de la formation continue des enseignants (incluant les études supérieures), plusieurs options de diffusion vous sont offertes ainsi qu'à votre enfant à la fin du formulaire :

1) **La diffusion d'extraits vidéo sans brouillage du visage**. Dans ce cas, vous acceptez que dans les extraits vidéo utilisés dans l'un des contextes cités, votre enfant soit identifiable visuellement.
2) **La diffusion d'extraits vidéo avec brouillage du visage**. Dans ce cas, vous acceptez que des extraits vidéo dans lesquels votre enfant apparaît soient utilisés dans l'un des contextes cités, à condition que son visage soit brouillé et qu'on ne puisse par conséquent

pas l'identifier visuellement. Les vidéos originales dans lesquelles votre enfant apparaît seront alors conservées sur un support de stockage externe dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé et seront détruites 7 ans après la fin du projet.

3) **La non-diffusion d'extraits vidéo**. Dans ce cas vous n'acceptez pas que des extraits vidéo dans lesquels votre enfant apparaît visuellement soient utilisés dans l'un des contextes cités. Les vidéos dans lesquelles votre enfant apparaît seront alors conservées sur un support de stockage externe dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé et seront détruites 7 ans après la fin du projet.

Dans le cas où vous accepteriez que les données collectées soient éventuellement utilisées dans des recherches subséquentes de même nature, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations, l'option de diffusion choisie sera valable tant et aussi longtemps que vous n'aurez pas signifié votre désir de la modifier.
Il sera en effet possible de changer d'option de diffusion en tout temps en avisant la chercheure par courriel, par téléphone ou en personne. L'option de diffusion choisie en premier lieu lors de la signature de ce formulaire n'est donc pas définitive.
Ainsi, lors de l'utilisation des données recueillies dans le cadre de cette recherche, aucune information permettant d'identifier votre enfant ne sera diffusée, **sauf** si vous choisissez l'option de diffusion d'extraits vidéo sans brouillage du visage.

4. Avantages et inconvénients

La participation à cette recherche est une expérience enrichissante pour les élèves. D'une part, les activités mathématiques proposées visent l'enrichissement des connaissances de notions mathématiques qui sont abordées au secondaire et au collégial. D'autre part, c'est l'occasion de prendre contact avec le milieu de la recherche. De plus, la contribution de votre enfant permettra l'avancement de la recherche sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Le seul inconvénient considéré est l'investissement de temps.

5. Droit de retrait

La participation de votre enfant est entièrement volontaire. Il est libre de se retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier sa décision. Vous pouvez aussi en tout temps décider de retirer votre enfant de la recherche. Vous ou votre enfant pourrez alors communiquer avec la chercheure, au numéro de téléphone indiqué à la dernière page de ce document.
Si votre enfant ne peut simplement pas se présenter aux séances subséquentes, mais que vous ne retirez pas votre consentement à sa participation à la recherche, les données déjà collectées seront conservées. Par contre, si vous décidez de retirer votre consentement ou que votre enfant signifie lui-même vouloir modifier son assentiment pour sa participation à la recherche, les données vidéo et audio le concernant directement (ses paroles et actions apparaissant dans les enregistrements) ne seront pas utilisées pour des fins d'analyse et, les extraits vidéo dans lesquels il apparaît visuellement ne seront pas diffusés. Les données seront néanmoins conservées dans un classeur sous clé situé dans un bureau fermé et seront détruites 7 ans après la fin du projet.

6. Compensation

En guise de remerciement, votre enfant recevra un certificat-cadeau de 10$ de la librairie Renaud-Bray pour sa participation à l'ensemble des quatre séances. Dans le cas où il se retirerait avant la fin de l'expérimentation, il recevrait un certificat-cadeau de 5$ de la librairie Renaud-Bray.

7. Diffusion des résultats

Les résultats complets de la recherche seront présentés dans une thèse doctorale. Certains résultats seront sans doute présentés dans des articles scientifiques ou de vulgarisation. Nous vous offrons la possibilité de recevoir l'information au sujet de ces publications en nous indiquant votre courriel à la fin du document. Votre courriel restera strictement confidentiel et ne servira qu'aux fins de transmission de résultats ou d'information.
L'enseignant de votre enfant et la direction de l'établissement auront aussi la possibilité de recevoir ces informations. De plus, après l'expérimentation, l'enseignant de votre enfant pourra avoir accès aux activités qui lui auront été proposées s'il le désire et les utiliser à postériori dans son enseignement.

B) CONSENTEMENT

Vous devez lire, cocher votre choix s'il y a lieu et signer les consentements présentés en 1, 2 et 3. Votre enfant doit confirmer son assentiment à participer à la recherche au point 4. Si vous le désirez, vous pouvez donner votre courriel au point 5 afin de recevoir les informations concernant les publications des résultats de la recherche.

1. CONSENTEMENT DU PARENT POUR LA PARTICIPATION DE SON ENFANT À LA RECHERCHE

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur la participation de mon enfant à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, **je consens à ce que mon enfant participe à cette recherche**. Je sais que mon enfant peut se retirer en tout temps, sur simple avis verbal, sans aucun préjudice et sans avoir à justifier sa décision.

Signature : ______________________ Date : ______________________
Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Courriel (pour l'envoi des dates, de l'horaire et du lieu des séances) : ______________________

Téléphone (pour vous contacter dans le cas où on offrirait à votre enfant de remplacer un participant s'étant désisté) : ______________________

2. ASSENTIMENT DE L'ENFANT POUR SA PARTICIPATION À LA RECHERCHE

On m'a expliqué le projet de recherche et j'accepte d'y participer. Je sais que je peux me retirer en tout temps, sans avoir à donner de raison.

Signature : ______________________________ Date : ______________________________
Nom : ______________________________ Prénom : ______________________________

3. CONSENTEMENT DU PARENT POUR LA DIFFUSION DES EXTRAITS VIDÉO

Cochez l'option choisie (1, 2 ou 3).

☐ Option 1 : diffusion sans brouillage du visage
Je consens à ce que les données audiovisuelles (extraits vidéo) dans lesquelles apparaît mon enfant soient diffusées lors de colloques, congrès ou conférences s'adressant autant à des chercheurs qu'à des professionnels œuvrant dans le domaine de l'éducation, ainsi que dans le cadre de cours universitaires faisant partie de la formation initiale ou de la formation continue des enseignants (incluant les études supérieures).

☐ Option 2 : diffusion avec brouillage du visage
Je consens à ce que les données audiovisuelles (extraits vidéo) **anonymisées par brouillage du visage** dans lesquelles apparaît mon enfant soient diffusées lors de colloques, congrès ou conférences s'adressant autant à des chercheurs qu'à des professionnels œuvrant dans le domaine de l'éducation, ainsi que dans le cadre de cours universitaires
faisant partie de la formation initiale ou de la formation continue des enseignants (incluant les études supérieures).

☐ Option 3 : non-diffusion
Je ne consens pas à ce que les données audiovisuelles (extraits vidéo) dans lesquelles apparaît mon enfant soient diffusées lors de colloques, congrès ou conférences s'adressant autant à des chercheurs qu'à des professionnels œuvrant dans le domaine de l'éducation, ni dans le cadre de cours universitaires faisant partie de la formation initiale ou de la formation continue des enseignants (incluant les études supérieures).

Signature : ______________________________ Date : ______________________________
Nom : ______________________________ Prénom : ______________________________

4. CONSENTEMENT DU PARENT POUR L'UTILISATION DES DONNÉES DANS DES PROJETS DE RECHERCHE SUBSÉQUENTS

Je consens à ce que les données recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents de même nature, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations.	Oui	Non
	☐	☐

Signature : ________________________ Date : ________________________
Nom : ________________________ Prénom : ________________________

5. DEMANDE D'INFORMATION SUR LA PUBLICATION DES RÉSULTATS

Courriel : ________________________________

C) SIGNATURE DE LA CHERCHEURE

Je déclare avoir expliqué le but, la nature, les avantages et les inconvénients de l'étude et avoir répondu au meilleur de ma connaissance aux questions posées.

Signature de la chercheure : ________________________ Date : _____________

Nom : ________________________ Prénom : ________________________

Pour toute question relative à la recherche ou pour vous retirer du projet, vous pouvez communiquer avec Valériane Passaro, candidate au doctorat en didactique des mathématiques et chercheure, au numéro de téléphone : [redacted] ou à l'adresse courriel : [redacted].

Toute plainte relative à votre participation (ou à la participation de votre enfant) à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone [redacted] ou à l'adresse courriel suivante : [redacted] **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

Si votre enfant participe à la recherche, une copie du formulaire de consentement signé vous sera transmise par son intermédiaire.

ANNEXE 11 : CONSIGNES DONNÉES AU DÉBUT DE CHAQUE SÉANCE

- Mon objectif est de comprendre votre démarche, vous devez donc expliciter le mieux possible votre pensée **à l'oral et à l'écrit**. Ne raturez pas et n'effacez rien pour que je puisse tout lire.
- Lors du travail d'équipe, le respect est de mise. Chacun doit pouvoir s'exprimer et être écouté par les autres.
- Il s'agit d'une expérimentation, les situations sont donc conçues dans le but de collecter des données, il y a volontairement des répétitions, mais lisez bien les énoncés!
- Vous travaillerez sur une seule situation par séance. Toutes les questions portent donc sur le contexte donné au départ et elles sont reliées. Vous pouvez utiliser des éléments de vos solutions aux questions précédentes pour répondre à une nouvelle question.
- Le matériel est fourni et c'est le SEUL que vous puissiez utiliser. Ne sortez aucun matériel et n'utilisez aucun objet qui vous appartient.
- Ne vous fiez pas à l'espace laissé pour les réponses, il n'est pas lié à leur longueur. Des feuilles supplémentaires sont disponibles au besoin.
- Je ne réponds pas aux questions. Si vous n'êtes pas certains de comprendre une consigne, discutez-en entre vous et arrivez à un consensus.
- Je vous donne les questions les uns après les autres. Si je juge que vous êtes prêts à passer à la question suivante, je vous la donne.
    - Présenter le matériel.
    - Expliquer le fonctionnement :

ÉTAPE 1 (10 minutes maximum): Travail individuel, stylo rouge, pas de matériel.

ÉTAPE 2 : Partage, réponse d'équipe en bleu.

ÉTAPE 3 : Travail d'équipe, stylo noir.

ÉTAPE	**TYPE DE TRAVAIL**	**COULEUR FEUILLE**	**COULEUR STYLO**
1	INDIVIDUEL	**ROSE**	ROUGE
2	COLLECTIF	**BLEUE**, ROSE	BLEU
3	COLLECTIF	**BLANC**	NOIR

Pour les étapes 2 et 3, vous disposez de matériel que vous pouvez utiliser pour vous aider à répondre aux questions.

ANNEXE 12 : TABLEAUX-SYNTHÈSES POUR L'ANALYSE DES DONNÉES

Tableau 12-A Unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves lors de la première séance (travail sur S1)

Question	Secondaire 4	Secondaire 5	Collégial	Tous (global)
1 et 2	U1a; U1b		U1a	**U1**
	U2a; U2c			**U2**
	U3a(*f*); U3a(*g'*) U3b'; U3b(*f*)*; U3b(*f*)-	U3a(*f*) U3b(*f*)	U3a(*f*) U3b'; U3b(*f*)? U3b(*f*)-	**U3**
		U4c(*f*)$^{-1}$	U4c(*f*)$^{-1}$	**U4**
	U5-; U5	U5-	U5-	**U5**
3	U1a; U1b			**U1**
	U2a; U2c'			**U2**
	U3a' U3b'; U3b(*f*)	U3b(*f*)	U3b'; U3b(*f*)	**U3**
	U4a(*f*); U4c(*f*)	U4c(*f*); U4d(*f*)$^{-1}$	U4a(*f*); U4b(*f*); U4c(*f*); U4d(*f*)	**U4**
	U5-; U5	U5-; U5	U5-; U5	**U5**
4		U3b(*f*)		**U3**
		U4a(*f*); U4c(*f*)$^{-1}$		**U4**
	U6a	U6a		**U6**
			U9	**U9**
5	-	-	-	**-**
6	U1a; U1b	U1b	U1b	**U1**
	U2a; U2c	U2b	U2c	**U2**
	U3a(*f*)		U3b'; U3b(*f*); U3b(*f*)-; U3b(*f*)$^{-1}$	**U3**
	U4c(*f*)	U4c(*f*); U4c(*f*)$^{-1}$ U4d(*f*)$^{-1}$	U4d(*f*)	**U4**
			U5	**U5**
7	-	-	-	**-**
8	U3b(*f*)*			**U3**
		U4d(*f*)$^{-1}$		**U4**
	U6a		U6a	**U6**
9	-	-	-	
10		U3a(*f*)		**U3**
		U5		**U5**

Tableau 12-B Unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves lors de la seconde séance (travail sur S2)

	Question	Secondaire 4	Secondaire 5	Collégial	Tous (global)
Partie A	**1**	U1b		U1b’	**U1**
				U2c’	**U2**
		U3a(*g*) U3b(*g*)	U3a(*g*) U3b(*g*)	U3a’; U3a(*f*); U3a(*g*)	**U3**
			U4c(*g*) $^{-1}$	U4c’	**U4**
		U5-	U5		**U5**
		U7			**U7**
	2	U4d(*g*)	U4a(*g*); U4c(*f*); U4c’; U4d(*g*)	U4c(*g*) $^{-1}$	**U4**
		U5	U5	U5-	**U5**
	3	U1b			**U1**
				U2c’	**U2**
				U5-	**U5**
				U6a; U6c	**U6**
	4		U1b	U1b	**U1**
		U2c			**U2**
				U3a’; U3a(*g*)	**U3**
		U4c(*f*)	U4c’; U4e(*g*)		**U4**
Partie B	**1**	U1a; U1b		U1b	**U1**
		U2a; U2c’			**U2**
		U3a(*g*’); U3b’; U3b(*g*)	U3a(*g*’); U3b(*g*’)	U3a(*g*’)	**U3**
		U4a(*g*’)			**U4**
		U5-; U5	U5	U5	**U5**
			U7		**U7**
	2			U1b	**U1**
				U3a(*g*’)	**U3**
		U7			**U7**
		U8	U8		**U8**
		U9	U9	U9	**U9**
		U10	U10	U10	**U10**
	3		U4e(*g*’)		**U4**
			U8		**U8**
				U13	**U13**
	4	-	U4e(*g*’)	-	**U4**
	5	U1b			**U1**
		U3a(*g*’)			**U3**

Tableau 12-C Unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves lors de la troisième séance (travail sur la S3)

Question	**Secondaire 4**	**Secondaire 5**	**Collégial**	**Tous (global)**
1 et 2	U1b			**U1**
	U2c		U2c	**U2**
	U3a(*f*) U3b(*f*)	U3a(*f*)	U3a(*f*); U3a(*f*)* U3b(*f*); U3b(*g*')	**U3**
	U4a(*f*); U4b(*f*); U4c(*f*); U4c(*f*)*; U4e(*f*)-		U4a(*f*); U4b(*f*); U4c(*f*)	**U4**
	U5-		U5-	**U5**
	U7			**U7**
3	U3a'			**U3**
	U4c(*f*); U4d(*f*); U4e(*f*)	U4d(*f*); U4e(*f*)	U4b(*f*); U4c(*f*)*; U4e(*f*)	**U4**
4		U4a(*f*)		**U4**
		U6a	U6a	**U6**
5	U4e(*f*)-; U4e(*f*)			**U4**
	U6a		U6c	**U6**
	U7			**U7**
6	U1a		U1a; U1b	**U1**
			U2c	**U2**
		U3b(*f*)-		**U3**
	U4e(*f*)	U4a(*f*)	U4c(*f*)	**U4**
7	-	-	U3b(*f*); U3b(*f*)-	**U3**
8		U4d(*f*)		**U4**
		U6a	U6a	**U6**
9	-	-	U3b(*f*)	**U3**
		U4e(*f*)		**U4**
10		U3a(*g*')		**U3**
	-	U4e(*f*); U4e(*g*')	U4e(*f*)-	**U4**

Tableau 12-D Unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves lors de la quatrième séance (travail sur la S4)

	Question	Secondaire 4	Secondaire 5	Collégial	Tous (global)
Partie A	**1**	U3a(*g*) U3b(*g*)	U3a(*g*)	U3a(*g*'); U3a(*g*)	**U3**
				U4e(*g*)	**U4**
	2	U1b			**U1**
		U4a(*g*); U4d(*g*)	U4c'; U4d(*g*)	U4d(*g*)	**U4**
	3			U6a	**U6**
	4			U1b	**U1**
		U2b	U2b		**U2**
		U3a(*g*)		U3b(*g*)	**U3**
		U4e(*g*)	U4a(*g*)		**U4**
Partie B	**1**	U3a(*g*')	U3a(*g*')	U3a(*g*') U3b(*g*')	**U3**
		U4b(*g*'); U4c(*f*)			**U4**
	2			U7	**U7**
			U8		**U8**
			U9		**U9**
			U10		**U10**
	3			U13	**U13**
	4	-	-	U12	**U12**
	5	-	-	-	

Tableau 12-E Synthèse comparative des unités de raisonnement sollicitées par les questions en S1 et S3 et des unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves

Question	Contenu	Unités sollicitées	Unités observées	
			Pichet (S1)	Échelle (S3)
1	On demande de dire comment réagit la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente.	**U1**	**U1**	**U1**
		U2	**U2**	**U2**
		U3	**U3**	**U3**
2	On demande si la *façon de varier* de la grandeur dépendante est toujours la même lorsque la grandeur indépendante augmente.	**U4**	**U4**	**U4**
		U5	**U5**	**U5**
		U6		
				U7
3	On propose de prendre des accroissements constants de la grandeur indépendante décrivant l'ensemble du domaine de manière discrète. d. On demande si l'augmentation de la grandeur dépendante est la même pour chaque accroissement de la grandeur indépendante. e. On demande si les accroissements de la grandeur dépendante sont : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement. f. On demande de décrire comment l'augmentation de la grandeur dépendante se comporte lorsque la grandeur indépendante augmente.		**U1**	
			U2	
			U3	**U3**
		U4	**U4**	**U4**
		U5	**U5**	
4	Même question qu'en 3c. mais pour des accroissements plus petits de la grandeur indépendante.		**U3**	
			U4	**U4**
		U5		
		U6	**U6**	**U6**
			U9	
5	On demande de décrire le comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante dans le cas où les accroissements de la grandeur indépendante seraient plus petits que ceux utilisés à la question 4.			**U4**
		U6		**U6**
				U7
6	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre les deux grandeurs.	**U1**	**U1**	**U1**
		U2	**U2**	**U2**
		U3	**U3**	**U3**
		U4	**U4**	**U4**
		U5	**U5**	
		U6		
		U7		
7	On donne les valeurs numériques des accroissements de la grandeur indépendante utilisés aux questions 3 et 4. On demande de choisir un des accroissements et de collecter les données nécessaires à la production de la description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante.			**U3**
		U4		
		U8		
8	On demande de produire la description du comportement de l'augmentation de la grandeur dépendante pour des accroissements unitaires plus petits que ceux utilisés à la question 7.		**U3**	
		U4	**U4**	**U4**
			U6	**U6**
		U8		
9	On demande de trouver la meilleure approximation possible de la grandeur dépendante pour une valeur donnée de la grandeur indépendante, et ce, en utilisant uniquement les mesures déjà prises. (la valeur donnée ne fait pas partie de celles collectées)			**U3**
		U4		**U4**
		U5		
		U6		
		U7		
		U8		
		U9		
10	On demande aux élèves de décrire si possible de manière plus précise qu'à la question 1, comment varie la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente, et ce, en tenant compte de tout ce qu'ils viennent de faire.	**U3**	**U3**	**U3**
		U4		**U4**
		U5	**U5**	
		U6		
		U7		
		U8		
		U9		
		U10		

Tableau 12-F Synthèse comparative des unités de raisonnement sollicitées par les questions en S2 et S4 et des unités de raisonnement identifiées dans les transcriptions des discussions entre les élèves

Partie	Question	Contenu	Unités sollicitées	Unités observées : Pichet (S2)	Unités observées : Échelle (S4)
Partie A	1	On demande de décrire comment se comporte la grandeur dépendante lorsque le temps s'écoule.		**U1**	
			U2	**U2**	
			U3	**U3**	**U3**
				U4	**U4**
				U5	
				U7	
	2	On propose de prendre des accroissements constants du temps (on ne donne pas de valeur numérique). On demande si les accroissements de la grandeur dépendante sont : constants, de plus en plus petits, de plus en plus grands ou autrement, et d'expliquer.			**U1**
			U4	**U4**	**U4**
			U5	**U5**	
			U6		
	3	Même question que la précédente mais pour des accroissements d'une seconde.		**U1**	
				U2	
			U4		
			U5	**U5**	
			U6	**U6**	**U6**
			U7		
	4	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la grandeur dépendante.	**U1**	**U1**	**U1**
			U2	**U2**	**U2**
			U3	**U3**	**U3**
			U4	**U4**	**U4**
			U5		
			U6		
			U7		
Partie B	1	On demande de décrire comment se comporte la vitesse à mesure que le temps passe.		**U1**	
			U2	**U2**	
			U3	**U3**	**U3**
				U4	**U4**
				U5	
			U7	**U7**	
	2	On indique qu'une prise de données à chaque seconde a été effectuée. On donne une série de valeurs obtenues successivement[42] (instants t_1 à t_5) pour la longueur correspondant à la grandeur dépendante de la partie A. On demande alors plusieurs fois de déterminer la vitesse entre deux instants : a) t_1 et t_2 b) t_2 et t_3 c) t_3 et t_4 d) t_4 et t_5 e) t_2 et t_5 f) $t_3+0,25$ et $t_4-0,25$		**U1**	
				U3	
				U7	**U7**
				U8	**U8**
				U9	**U9**
			U10	**U10**	**U10**
			U11		

[42] Dans la situation 2, seulement quatre valeurs sont données pour les instants 1, 2, 3 et 4. Les calculs impliquent la longueur 0 correspondant à l'instant 0. Dans la situation 4, cinq valeurs sont données aux instants 7 à 11.

	3	On demande s'il est possible de déterminer la valeur de la vitesse à deux instants donnés : t_4 pour lequel on connait la valeur de la longueur et $\left(\frac{t_3+t_4}{2}\right)$ qui correspond à l'instant milieu de t_3 et t_4. Si oui, alors on demande de donner la meilleure approximation de la vitesse à ces instants. Si non, alors il faut expliquer pourquoi.	 **U13**	**U4** **U8** **U13**	 **U13**
	4	On demande s'il est possible de déterminer la valeur de l'instant pour lequel la vitesse est donnée (on donne une valeur précise de la vitesse). Si oui, alors on demande de donner la meilleure approximation de l'instant auquel la vitesse est donnée. Si non, alors il faut expliquer pourquoi.	 **U12**	**U4**	 **U12**
	5	On demande de tracer, le plus exactement possible, le graphique représentant la relation entre le temps et la vitesse.	**U1** **U2** **U3** **U4 à U13**	**U1** **U3**	

Tableau 12-G Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de quatrième secondaire-Situation 1-Questions 1 et 2

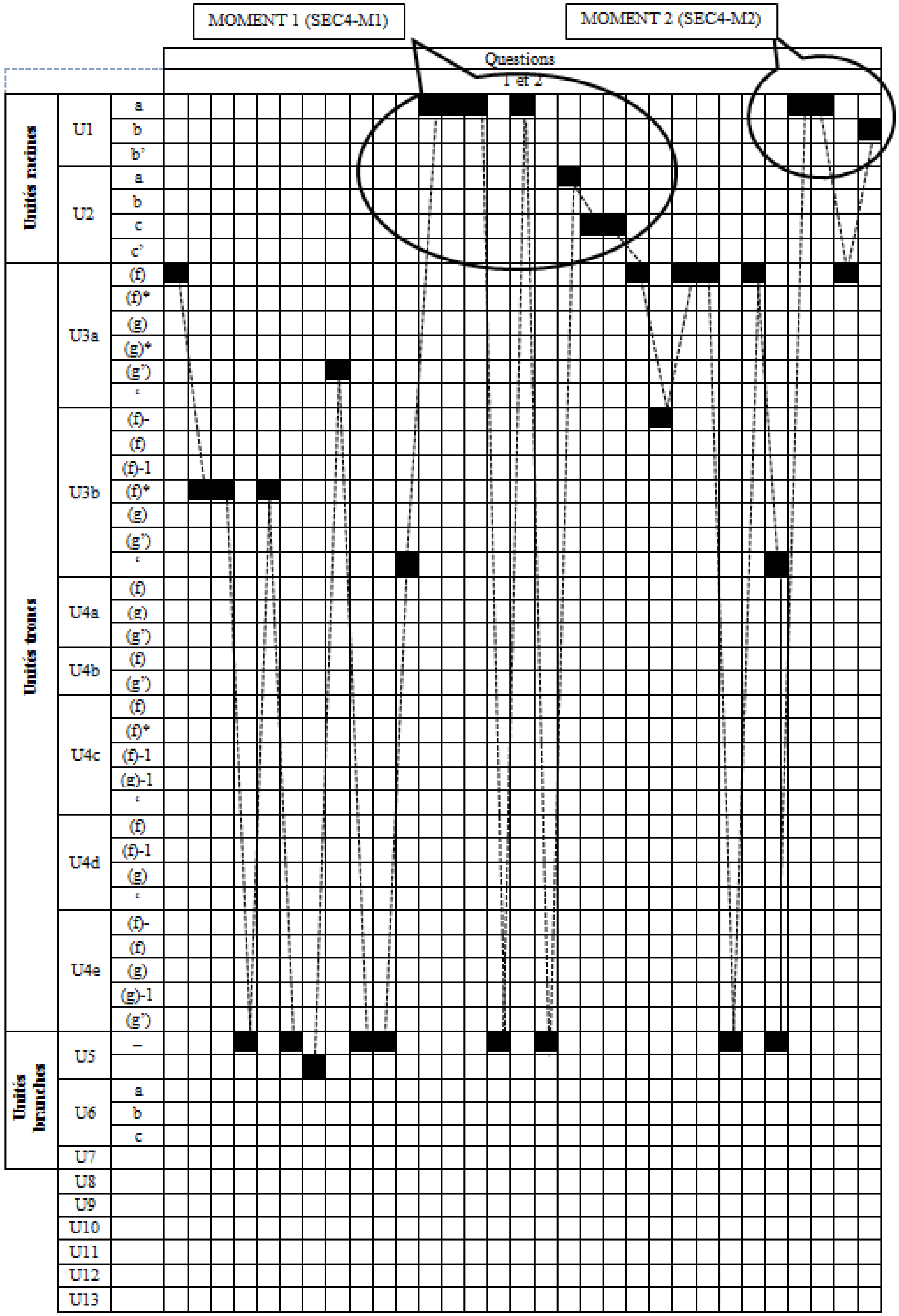


Tableau 12-H Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de quatrième secondaire-Situation 1-Questions 3 à 8

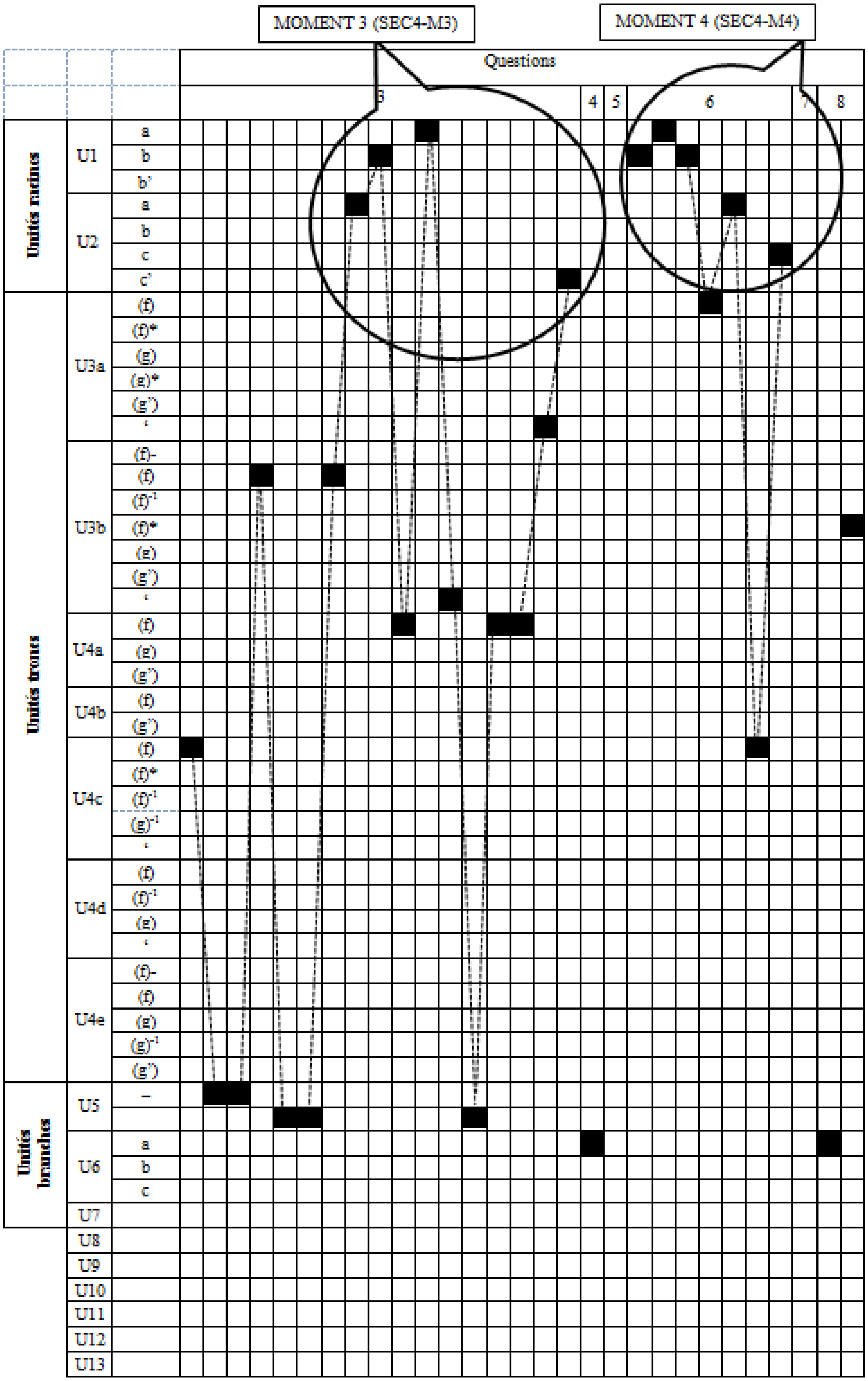


Tableau 12-I Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de quatrième secondaire-Situation 2

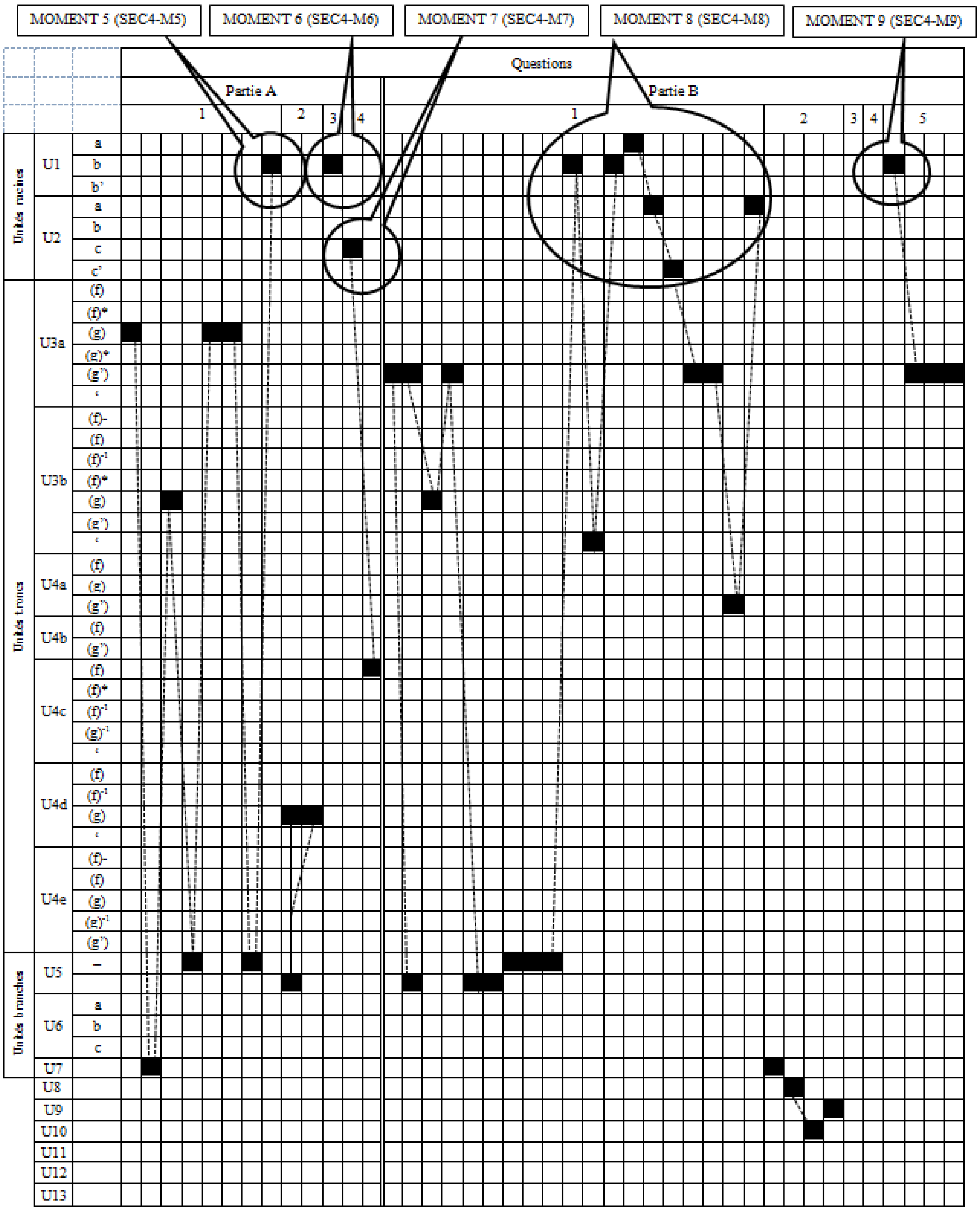


Tableau 12-J Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de quatrième secondaire-Situation 3

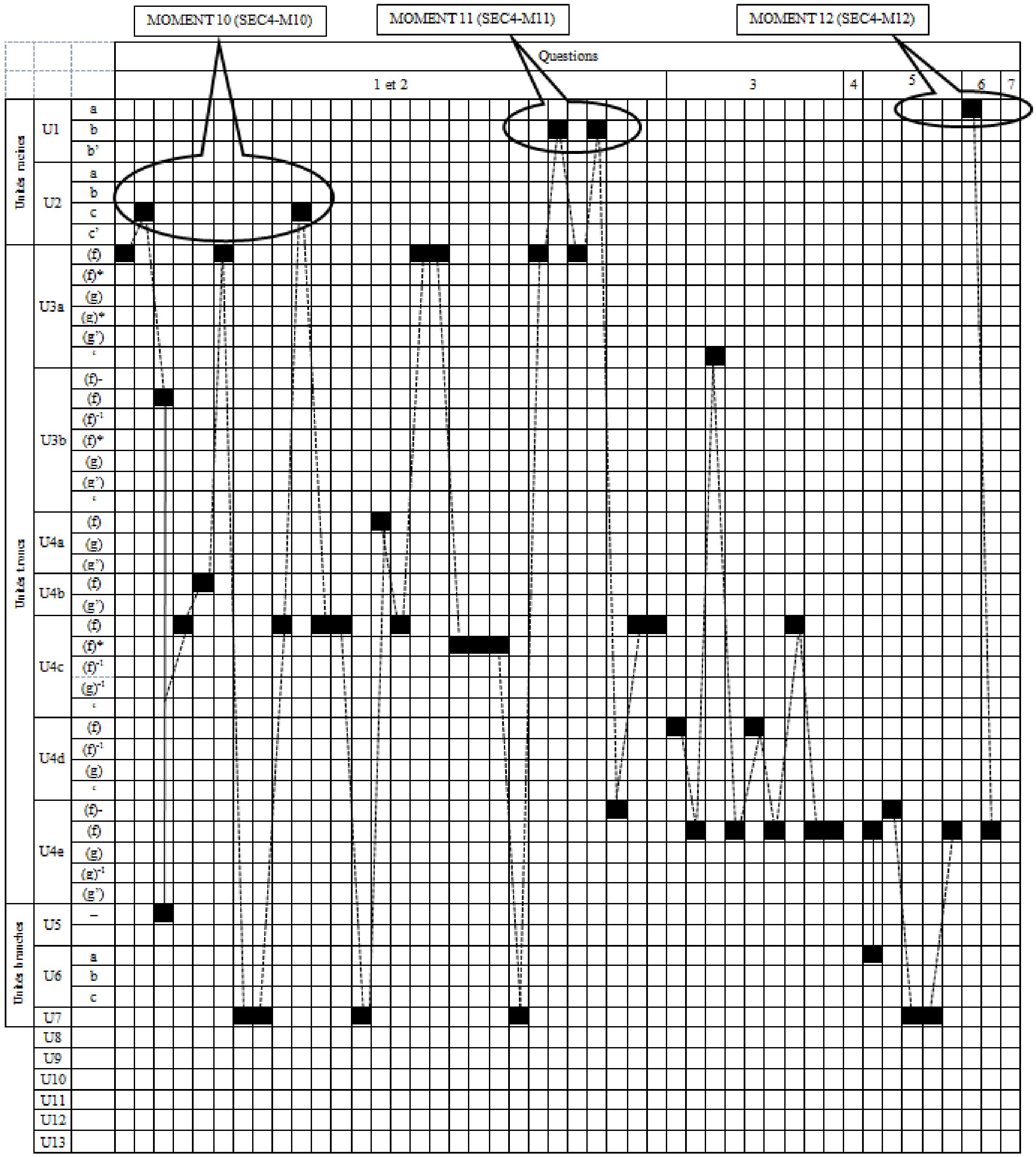


Tableau 12-K Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de quatrième secondaire-Situation 4

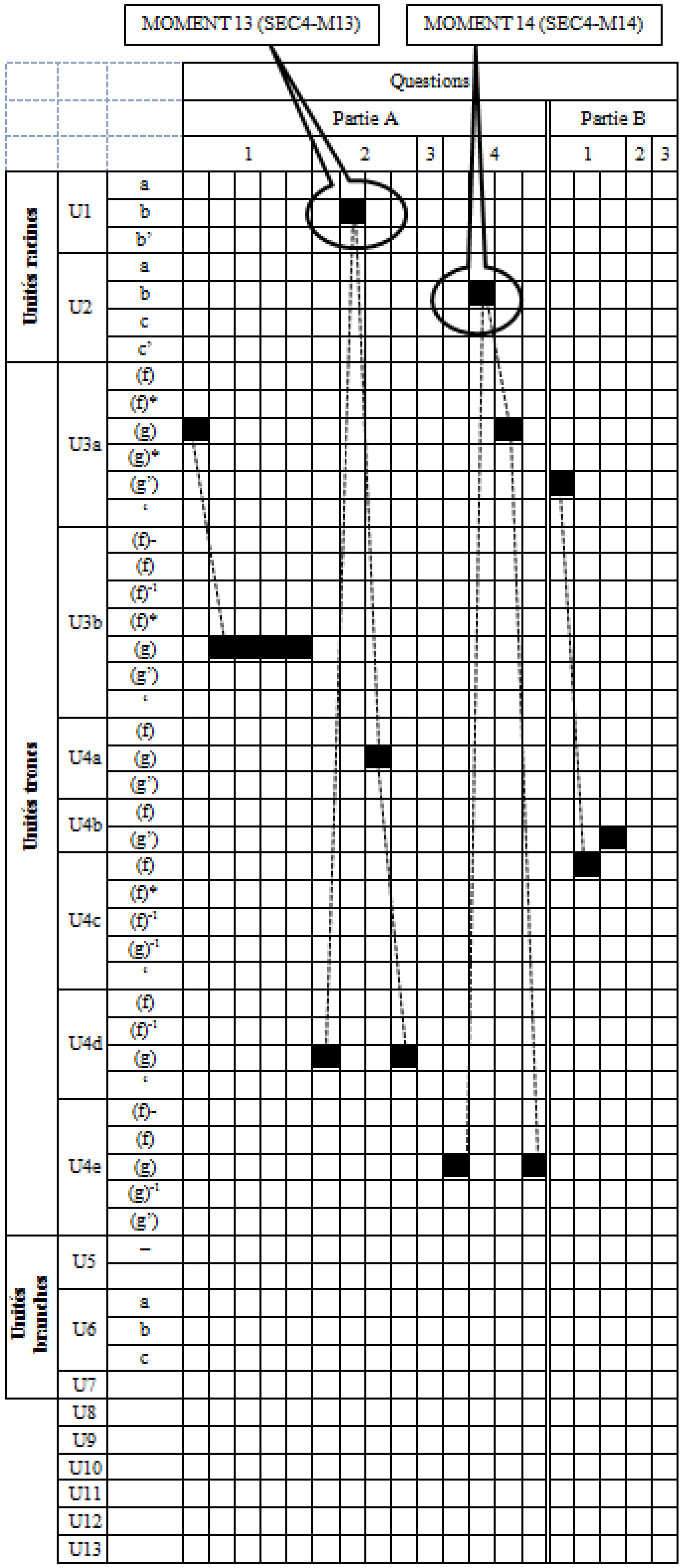


Tableau 12-L Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de cinquième secondaire-Situation 1

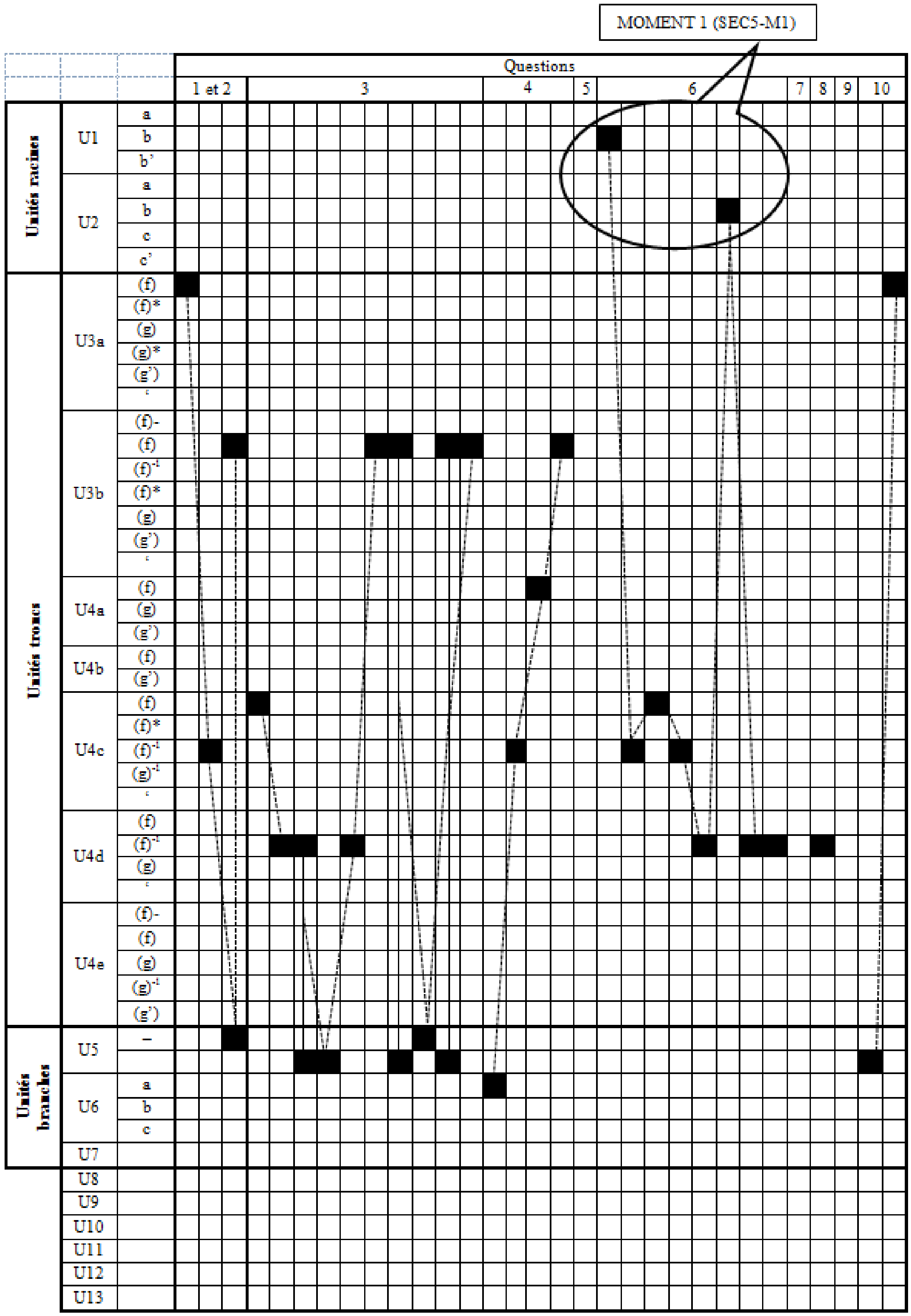


Tableau 12-M Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de cinquième secondaire-Situation 2

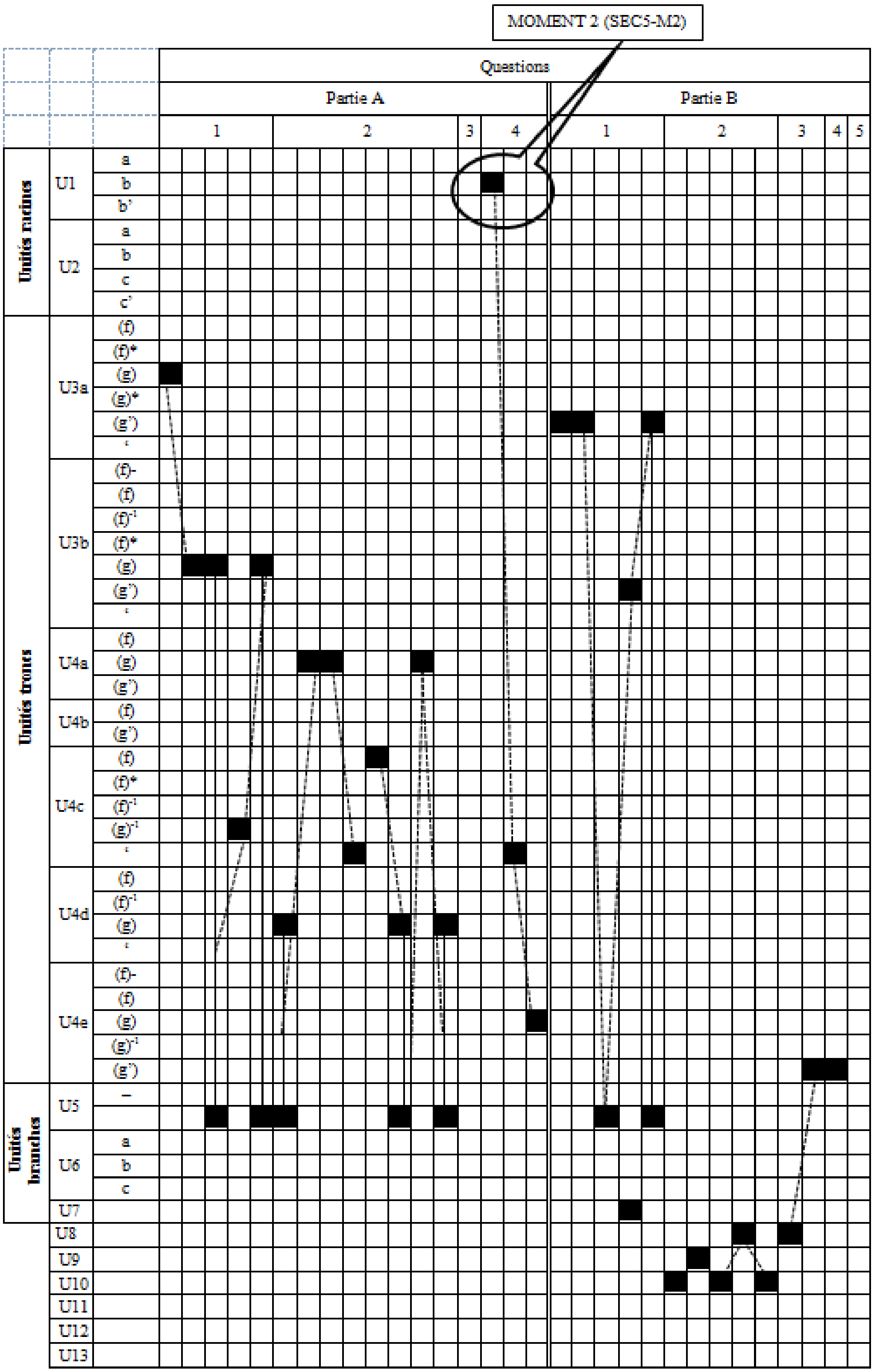


Tableau 12-N Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de cinquième secondaire-Situation 3

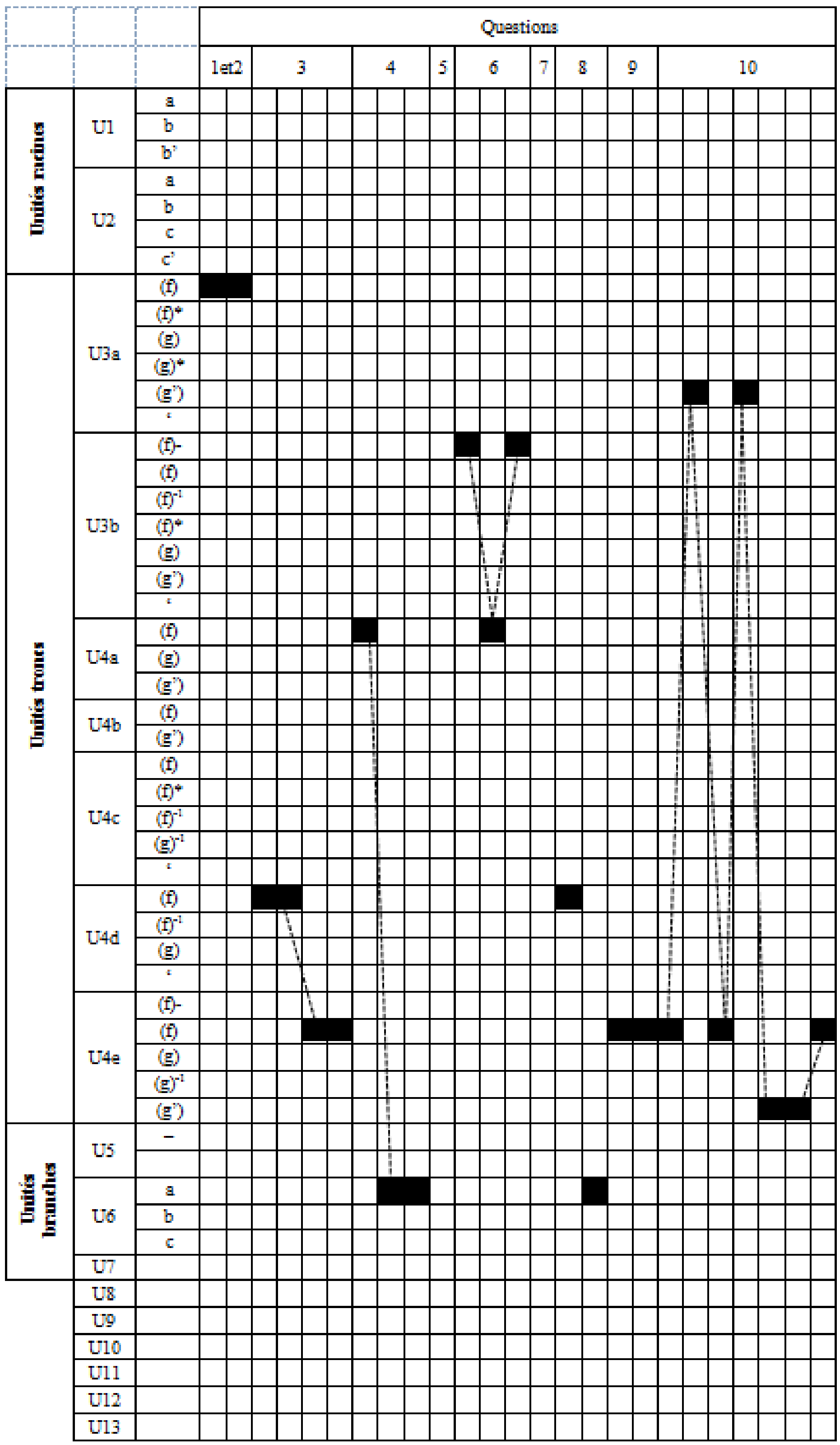


Tableau 12-O Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe de cinquième secondaire-Situation 4

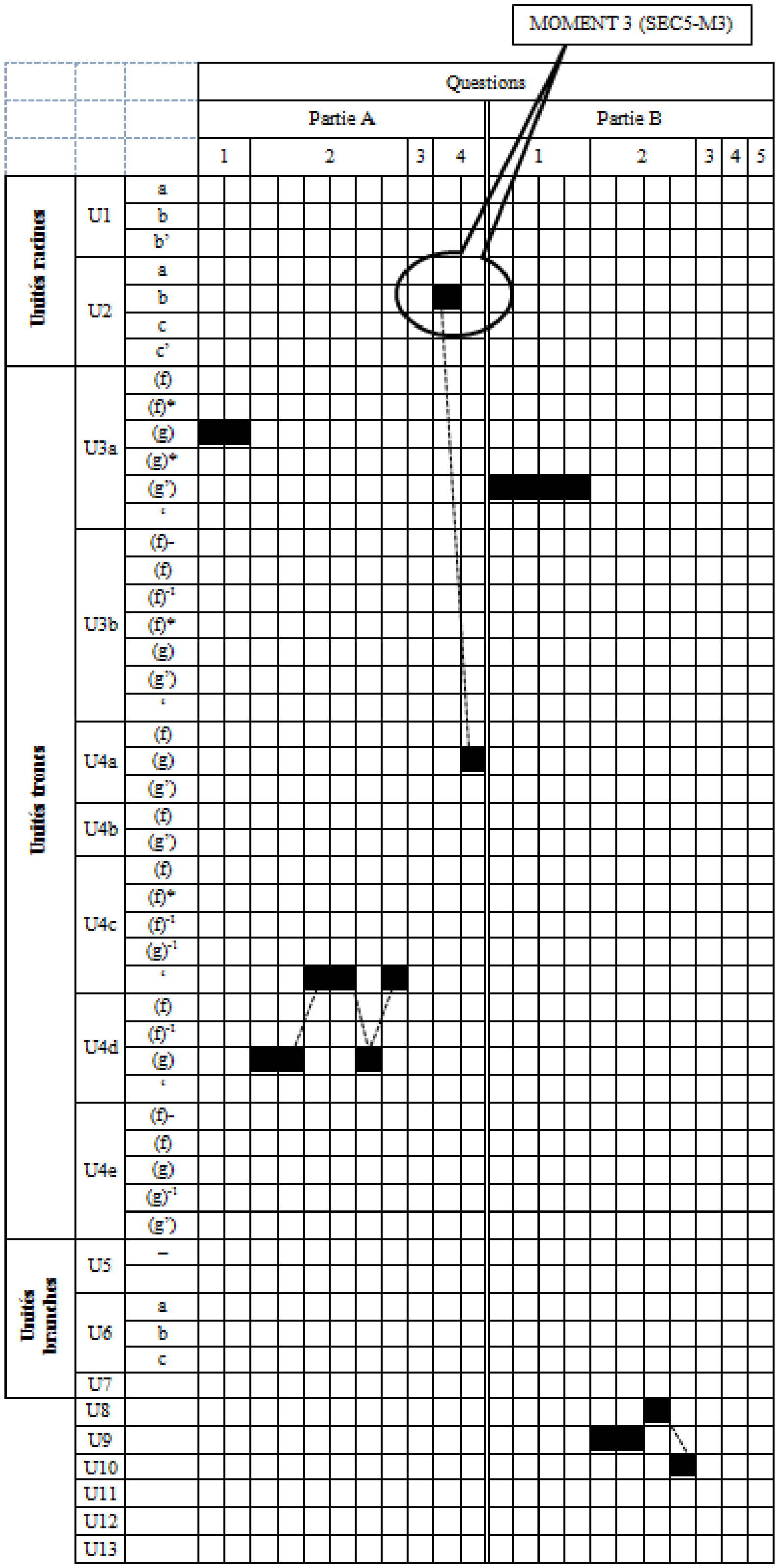


Tableau 12-P Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe du collégial-Situation 1

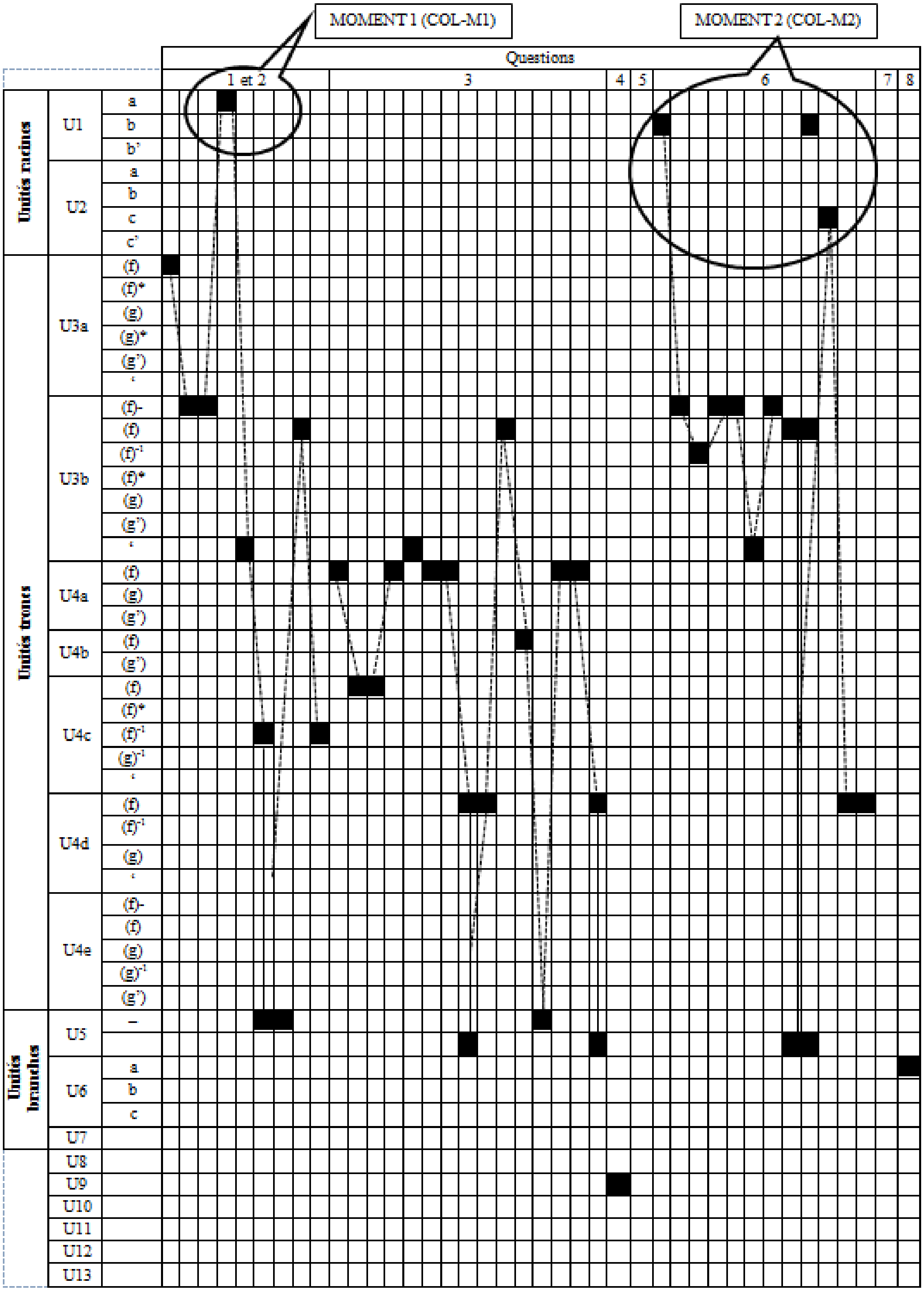


Tableau 12-Q Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe du collégial-Situation 2

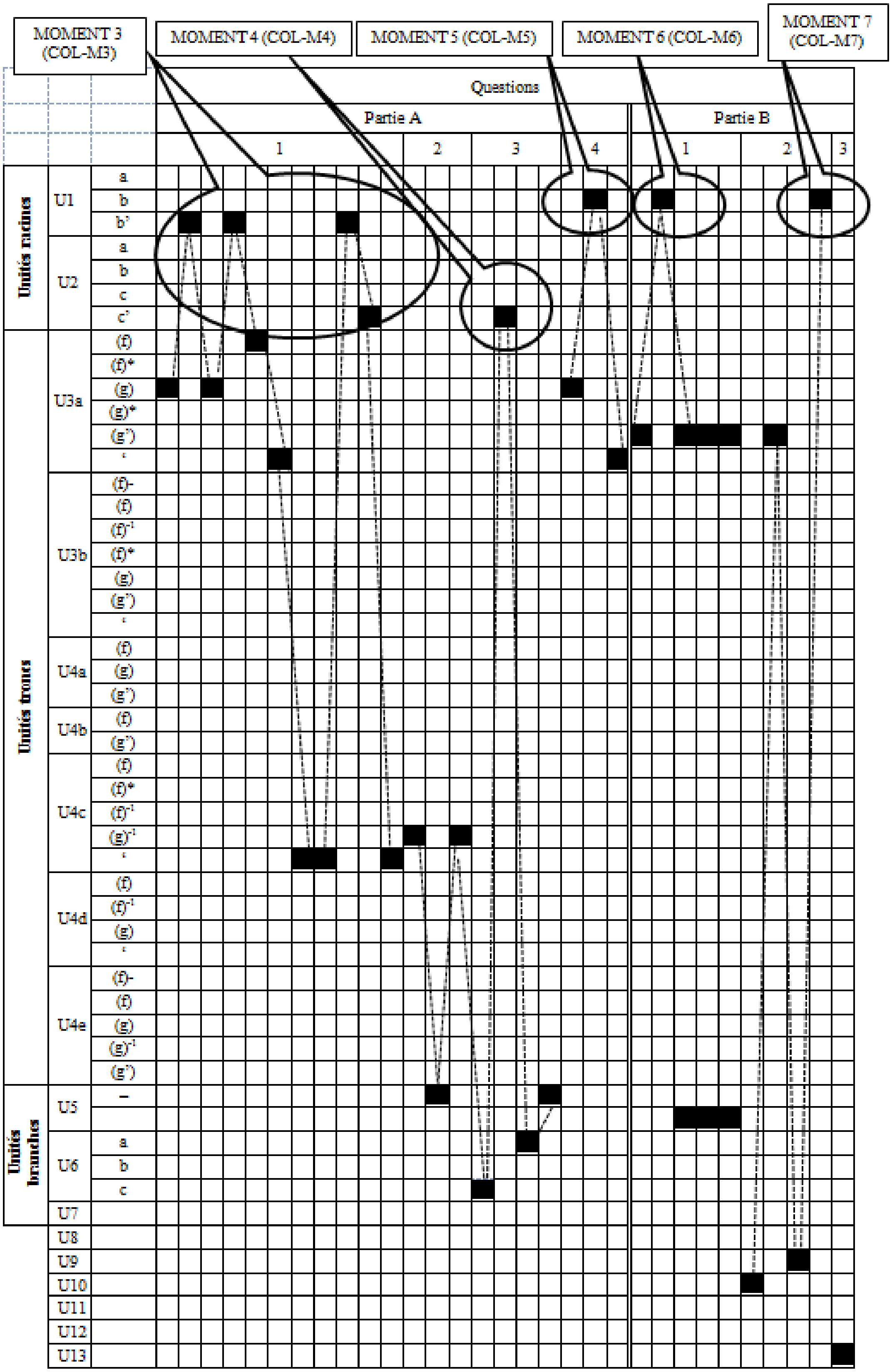


Tableau 12-R Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe du collégial-Situation 3

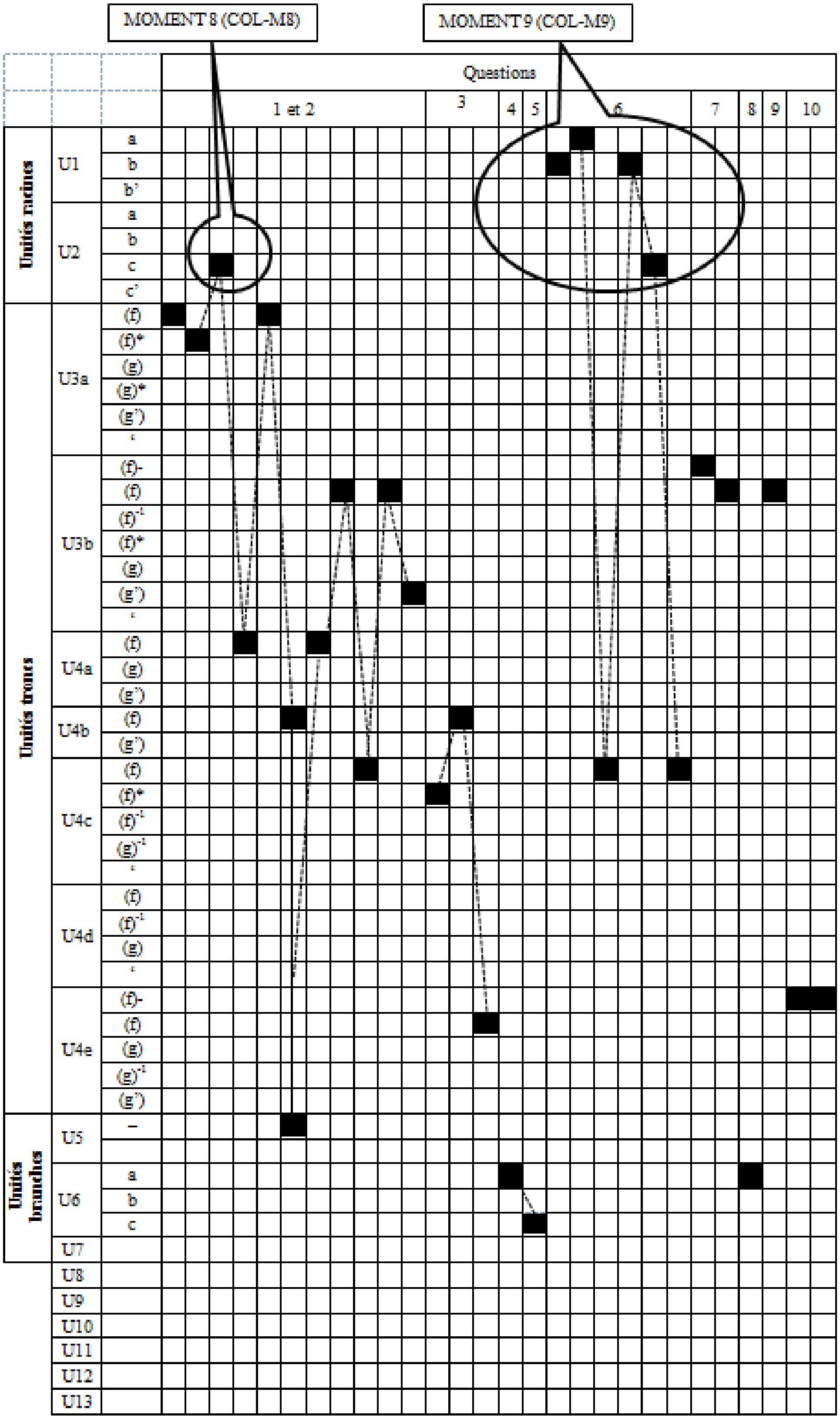
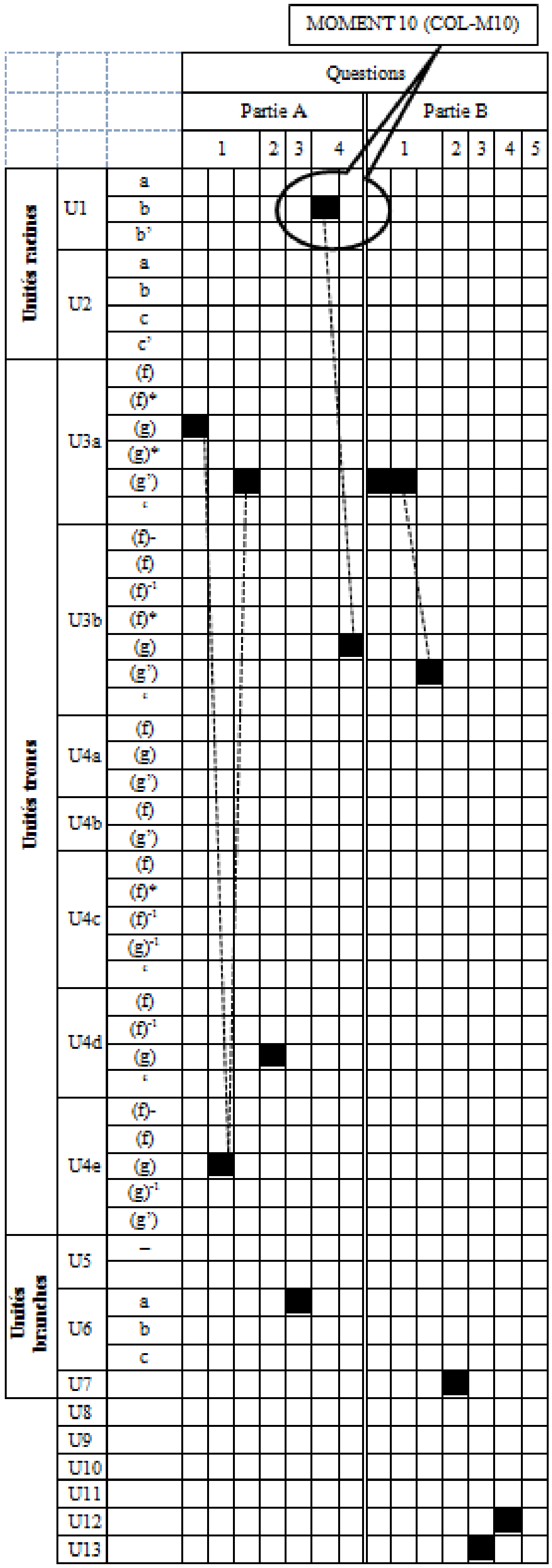


Tableau 12-S Tableau du mouvement du raisonnement-Groupe du collégial-Situation 4



ANNEXE 13 : PARALLÈLE ENTRE LES DIFFÉRENTES GRILLES D'ANALYSE POUR LES UNITÉS U1 À U7

Grille d'analyse de Carlson		Grille d'analyse initiale (*a priori*)		Grille d'analyse finale (*a posteriori*)
Action mentale	**Description des actions mentales**	**Unité**	**Description des unités de raisonnement**	**Description des unités ET sous-unités de raisonnement**
AM1	Coordonner la valeur d'une variable avec les changements de l'autre variable	U1	Identifier la grandeur indépendante et la grandeur dépendante	Identifier une relation fonctionnelle a) Identifier les deux grandeurs étudiées b) Établir la grandeur indépendante et la grandeur dépendante (existence d'une dépendance et sens de cette dépendance)
		U2	Identifier la présence de variations concomitantes de deux grandeurs	Considérer une relation fonctionnelle sous l'angle de la variation a) Établir que la grandeur indépendante est variable b) Établir que la grandeur dépendante est variable c) Établir la concomitance entre les variations des deux grandeurs
AM2	Coordonner la direction du changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U3	Qualifier le changement de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente	Décrire le comportement de la fonction a) Établir l'augmentation, la diminution ou la constance de la grandeur dépendante alors que la grandeur indépendante augmente b) Qualifier l'augmentation ou la diminution de la grandeur dépendante de manière intuitive et globale
AM3	Coordonner la « quantité » de changement d'une variable avec le changement de l'autre variable	U4	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants de la grandeur indépendante	Décrire le comportement de la fonction dérivée a) Considérer des accroissements constants de la grandeur indépendante b) Considérer des accroissements de la grandeur dépendante c) Établir la concomitance entre des accroissements des deux grandeurs d) Décrire le changement d'accroissements successifs de la grandeur dépendante alors que les accroissements de la grandeur indépendante sont constants e) Décrire le comportement global de l'augmentation de la grandeur dépendante lorsque la grandeur indépendante augmente

		U5	Déterminer les différentes phases de variation (une phase est un intervalle de la grandeur indépendante sur lequel la « façon de varier » de la grandeur dépendante est la même)	Considérer les changements de comportement de la fonction dérivée
		U6	Qualifier le changement des accroissements de la grandeur dépendante pour des accroissements constants **de plus en plus petits** de la grandeur indépendante	Considérer le comportement d'une fonction continue et monotone sur un intervalle (ou une phase) de plus en plus petit du domaine a) Généraliser intuitivement le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont plus petits (le passage à des accroissements plus petits est induit par la question) b) Prendre des accroissements plus petits de la grandeur indépendante et observer le comportement des accroissements de la grandeur indépendante (le passage à des accroissements plus petits est spontané) c) Généraliser le comportement des accroissements de la grandeur dépendante lorsque les accroissements de la grandeur indépendante sont infiniment petits (passage à la limite)
		U7	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)	Interpréter le changement des accroissements en termes de taux de variation et nommer la grandeur associée selon le contexte (vitesse, débit etc.)