La logique ordinale de Turing

Benoit Potvin[1]
Université de Montréal

Résumé

Dans Systems of logic based on ordinals *(1939), Turing explore les possibilités de minimiser les effets du théorème d'incomplétude pour l'arithmétique par le biais d'une logique ordinale. Nous rendons ici compte de cette recherche méconnue menée par Turing sur les fondements des mathématiques en replaçant ses apports dans le contexte actuel de la théorie de la calculabilité.*

Outre son article de 1936 *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* – sans doute le plus fameux – Turing écrivit un autre texte, *Systems of logic based on ordinals* (1939), où il est question d'explorer les possibilités d'échapper aux conséquences du théorème d'incomplétude de Gödel pour l'arithmétique par le biais d'une *logique ordinale*. Dans une démarche sans contredit authentique, Turing obtint un résultat partiel de complétude en plus d'introduire l'*oracle*, un concept théorique important de l'informatique. Nous rendons ici compte de cette recherche méconnue menée par Turing sur les fondements des mathématiques en replaçant ses apports dans le contexte actuel de la théorie de la calculabilité et soulignant, du même fait, le caractère innovateur d'un grand homme qui ne fut peut-être pas de son époque.

« C'est l'après-demain seulement qui m'appartient.
Certains naissent posthumes. »
F. Nietzsche, *L'Antéchrist (*Avant-propos). 1895.

---

[1] L'auteur tient à remercier le professeur Yvon Gauthier pour son aide sans contredit incalculable.

1. Mise en contexte

Présenté comme étant « a profound and difficult paper »[2] par Martin Davis, *Systems of logic based on ordinals* est la thèse que Turing rédigea à Princeton sous la direction d'Alonzo Church. Suite au théorème d'incomplétude de Gödel (1931), Church et Turing avaient tous deux donné une réponse négative à l'Entscheidungsproblem mais dans des formalismes différents des fonctions récursives, à savoir respectivement le lambda-calcul (λ-calcul) et les machines de Turing. En 1937, Turing montra dans un article intitulé *Computability and Lambda-definability* (1937) l'équivalence entre le formalisme de Church et ses machines. La notion de machine développée par Turing avait cependant le mérite d'apporter une définition intuitive de la calculabilité qui n'avait pas toute la lourdeur des autres formalismes. *Systems of logic based on ordinals* est donc le troisième écrit publié par Turing et traite autant de questions mathématiques que philosophiques. C'est en 1937 que Turing quitta Newman et le King's College pour rejoindre Church à Princeton. Dans un premier temps, Church avait voulu élaborer le λ-calcul dans l'espoir de fonder solidement les mathématiques. Ce formalisme fut cependant démontré inconsistant par Kleene et Rosser (1935), deux étudiants de Church, et par le fait même, il devint possible de rendre compte de l'indécidabilité d'une manière différente de celle du théorème de Gödel (1931) et des fonctions récursives (même si la technique de preuve utilisée est la même dans les deux cas). La thèse de Turing fait donc suite à l'échec du projet fondationnel de Church. Il est intéressant de noter que Turing coucha entièrement sa thèse dans le formalisme du λ-calcul. Ce détail technique explique en partie le peu d'attention que celle-ci reçut à l'époque. Si Emil Post (1944) se référa à *Systems of logic based on ordinals*, ce ne fut que pour introduire les « degrés de Turing » sans toutefois considérer le projet d'une logique ordinale. Cette idée ne fut reprise intégralement qu'ensuite – une vingtaine d'années plus tard – par Solomon Feferman (1958) et Georg Kreisel (1960), mais d'une manière différente de Turing. À

[2] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], p.154.

l'époque, Kleene et Rosser avaient préféré ne pas adopter le formalisme du λ-calcul dans leurs travaux, choisissant plutôt celui des fonctions récursives de Herbrand et Gödel. Il va sans dire que les recherches de Turing devenaient alors, à cause de l'utilisation du λ-calcul, beaucoup moins accessibles. Robin Gandy, unancienétudiant de Turing, écrivitdansunelettre à Max Newman (le professeur de Turing à Cambridge): « Alan considered that his paper on ordinal logics had never received the attention it deserved (he wouldn't admit that it was a stinker to read) »[3]. Toutefois, il ne faudrait pas croire que l'emploi du λ-calcul par Turing dans sa thèse ait été, de quelque façon que ce soit, contraint par Church. Tout au contraire, l'utilisation de ce formalisme était essentielle au possible succès d'une logique ordinale. Suite au théorème de Gödel, le programme de Hilbert avait été durement affecté et c'est le projet finitiste du formalisme qui était au bord du gouffre. Turing écrit : « In pre-Gödel times it was thought by some that it would be possible to carry this programme to such a point that all the intuitive judgments of mathematics could be replaced by a finite number of these rules. »[4] Le λ-calcul, de par son caractère profondément abstrait, avait la possibilité de circonscrire formellement la place nécessaire à accorder à l'intuition – notamment dans l'espoir d'identifier les formules ordinales, mais nous y reviendrons plus loin dans le texte – afin de combler les trous creusés par l'incomplétude gödelienne. On lit :

> « In consequence of the impossibility of finding a formal logic which wholly eliminates the necessity of using intuition, we naturally turn to 'non-constructive' systems of logic with which not all steps in a proof are mechanical, some being intuitive. [...]. We want it to show quite clearly when a step makes use of intuition, and when it is purely formal. The strain put on the intuition should be a minimum. »[5]

---

[3] Letter from Gandy to Max Newman, n.d. (Turing Papers, Catalogue reference A.8).
[4] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals* in [2], p. 209.
[5] *Ibid.*, p. 210.

Le projet de Turing fait donc suite au théorème de Gödel et cherche, succédant ainsi au programme de Hilbert, à reprendre et sauver l'idée du formalisme dans la quête fondationnelle des mathématiques.

2. La logique ordinale : réaction au théorème d'incomplétude

La thèse de Turing se veut une investigation sur les possibilités d'échapper à l'incomplétude des systèmes formels par le moyen d'une *logique ordinale*. Pour Turing, une *logique* est un *système formel*. Il s'agit donc d'une tentative directe de minimiser les effets du théorème d'incomplétude de Gödel dans la mesure où celui-ci concerne précisément les systèmes formels. Le premier théorème d'incomplétude (1931) énonce qu'un système formel *P*–*P* signifie que le système contient les axiomes de Peano– ne peut être en même temps consistant et négacomplet. Sans perte de généralité, il est dit que tout système formel qui permet les opérations arithmétiques de base (+, -, ^, /), soit l'addition, la soustraction, l'exponentiation et la division, est affecté par le théorème d'incomplétude. À l'époque de Turing, il y avait peu d'informations quant aux conséquences du théorème d'incomplétude, les problèmes indécidables étant rares et la hiérarchie arithmétique n'étant pas construite. Certains mathématiciens n'hésitaient pas à se demander si plusieurs problèmes auxquels ils avaient longtemps travaillé étaient effectivement solubles. Par le premier théorème d'incomplétude, Gödel stipule l'existence d'au moins une proposition arithmétique vraie de *P* qui énonce d'elle-même son indécidabilité. Plus précisément, cet énoncé à caractère autoréférentiel joue le rôle d'un point fixe pour la propriété de ne pas être démontrable dans *P*. Cette proposition indécidable qui revêtait certainement les airs d'un artifice, du moins à l'époque, semblait difficilement avoir de réelles implications pour les mathématiques. Or, ce n'est pas l'*autoréférentialité* de la proposition qui se veut être à la source de l'indécidabilité, mais bien l'application du processus de diagonalisation. L'argument diagonal consiste de manière générale à définir une relation R (a, b) – où a, b ε A – et une propriété φ des éléments de A telles que la propriété φ ne tient que dans le cas où R (a, a) ne tient pas. Turing connaissait cette méthode, que l'on retrouve certes chez Cantor et Gödel mais aussi dans le paradoxe de Russell et le paradoxe de Richard, et c'est en fonction de celle-ci qu'il établit l'indécidabilité du problème de l'arrêt dans son article de 1936, sous le paragraphe intitulé *∫8. Application of the diagonal process*[6]. Un autre problème indécidable connu et formulé par Gödel était celui de la consistance des systèmes formels, tel qu'énoncé dans le deuxième théorème d'incomplétude. À cet effet, la proposition affirmant que le système *P* est consistant (Con_p) – Con_p n'a évidemment rien d'une proposition autoréférentielle – joue, de la même manière que la proposition autoréférentielle de Gödel, le rôle d'un point fixe pour la propriété de ne pas être démontrable dans *P*. Dès lors, après avoir utilisé la méthode diagonale au profit du problème d'arrêt, Turing utilise un principe découlant directement du deuxième théorème d'incomplétude pour la construction de sa logique ordinale. Dans le premier théorème d'incomplétude, Gödel suppose la consistance de *P* : si *P* est ω-consistant (ou simplement consistant selon Rosser) alors *P* est néga-incomplet. Conséquemment, le deuxième théorème d'incomplétude énonce l'indécidabilité de la proposition arithmétique Con_p à l'intérieur de *P*, c'est-à-dire avec les seuls outils formels de *P*. Dès lors, il faut nécessairement un système au moins plus fort que *P* pour démontrer Con_p. Le principe utilisé par Turing pour sa logique ordinale, qu'il nomme *systems of logic*, est celui d'une *progression récursivement consistante*.

3. La logique ordinale : ses principes

Turing débute sa thèse ainsi :

> « The well-known theorem of Gödel shows that every system of logic is in a certain sense incomplete, but at the same time it indicates means whereby from a system L of logic a more complete system *L'* may be obtained. By repeating the process we get a sequence *L*, L_1 = *L'*, L_2 =

[6] Turing, M. Alan. 1936. On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungsproblem, in [2], p.132.

> L_1', […] each more complete than the preceding. A logic L_ω may then be constructed in which the provable theorems are the totality of theorems provable with the help of L, L_1, L_2, […]. We may then form $L_{2\omega}$ related to L_ω in the same way that L_ω was related to L. Proceeding in this way we can associate a system of logic with any constructive ordinal. »[7]

Autrement dit, il s'agit d'obtenir une progression de systèmes formels, les uns plus complets que les précédents. Cette recherche menée par Turing est pour le moins embryonnaire et s'intéresse avant tout, d'une manière générale, à la potentialité d'une telle méthode. Turing écrit : « The subject matter, roughly speaking, is constructive systems of logic, but since the purpose is directed towards choosing a particular constructive system of logic for practical use, an attempt at this stage to put our theorems into constructive form would be putting the cart before the horse »[8]. Turing signale ici qu'il cherche avant tout, par l'idée d'une logique ordinale, à construire un outil mathématique praticable. Le principe d'une logique ordinale, dans sa quête vers la complétude, nécessite cependant de procéder au-delà des ordinaux finis afin d'échapper à l'incomplétude gödelienne. Ceci dit, ω, le premier ordinal transfini de la théorie des ensembles transfinis de Cantor, étant défini de manière imprédicative est bien sûr ni constructible de manière finie, ni calculable à l'aide d'une machine de Turing. Le principe d'une progression récursivement consistante comme fondement d'une logique ordinale s'étend donc au-delà des limites du calculable et de la prédicativité – et de là ressort le résultat partiel de complétude obtenu par Turing – à savoir que la consistance de L_ω n'étant pas garantie, il devient possible, sinon nécessaire, de poursuivre vers $L_{\omega+1}$, $L_{\omega+2}$, $L_{\omega*2}$ et ce jusqu'au premier ordinal non-récursif de Church-Kleene (ω^{CK}). Ainsi, la logique ordinale de Turing, étant fondée sur l'impossibilité même d'échapper de manière constructive et finitiste au théorème d'incomplétude de Gödel, repose d'une part sur l'hypothèse de faire appel à l'intuition

---

[7] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], p. 155.
[8] *Ibid.*, p. 161.

mathématique et, d'autre part, sur la volonté de Turing à restreindre la complétude aux problèmes dits arithmétiques ou *number-theoretic problems* (*N.T.*).

4. Les théorèmes arithmétiques ou théorèmes *Numbertheoretic* (*N.T.*)

Dans son texte, Turing s'intéresse à une classe particulière de propositions arithmétiques qu'il appelle *Number-theoretic* (*N.T.*) *theorems* ou théorèmes arithmétiques et qu'il définit de la manière suivante : « […] "for each natural number *x* there exists a natural number *y* such that $\varphi(x,y)$ vanishes", where $\varphi(x,y)$ is primitive recursive. »[9]. Notons que Turing fait référence à un ensemble de fonctions bien précis qui ne correspond généralement pas dans la littérature à ce qu'on appelle les « number-theoreticfunctions » ou fonctions arithmétiques, mais à un ensemble beaucoup plus restreint, i.e. les propositions de la forme $\forall x \exists y : [\varphi(x,y) = 0]$, où $\varphi(x,y)$ est une fonction récursive. Turing écrit : « I should assert that theorems of this kind have an importance which makes it worthwhile to give them special consideration »[10]. En effet, si Turing accorde beaucoup d'importance à cette classe c'est parce qu'il présume que plusieurs problèmes de la théorie des nombres lui appartiennent, notamment l'hypothèse de Riemann et le dernier théorème de Fermat. La classe des *N.T.* théorèmes de Turing correspond aujourd'hui à un sous-ensemble de ce qu'on appelle la classe Π_2 de la hiérarchie arithmétique de Kleene. Cette hiérarchie varie en fonction de l'alternance des quantificateurs une fois la proposition mise en forme prénexe. Autrement dit, les formules du premier ordre étant toutes logiquement équivalentes à une formule de forme prénexe, il est possible d'associer chaque proposition à une classe de la hiérarchie arithmétique. Les problèmes Π_2 ont la forme générale irréductible $\forall x \exists y F(x, y)$, sans restriction précise. Or, l'hypothèse de Riemann et le dernier théorème de Fermat sont deux problèmes qui se rapportent plutôt à Π_1, c'est-à-dire aux propositions de

[9] *Ibid.*, p. 163.
[10] *Ibid.*, p. 168.

la forme $\forall x F(x)$. Cette erreur n'eut toutefois aucune répercussion négative dans la mesure où le théorème d'incomplétude concerne justement la classe Π_1, soit les propositions arithmétiques vraies mais indémontrables de la forme $\forall x f(x)$. À cet effet, dans le cas du problème indécidable de l'arrêt par exemple, le complément de la proposition Σ_1 pour énoncés existentiels (les classes de la hiérarchie sont incomparables) n'est pas récursivement énumérable. Un langage (ou ensemble) est dit récursivement énumérable s'il est reconnu (i.e. accepté mais pas nécessairement décidé) par une machine de Turing. Par ailleurs, un problème, pour être décidable, doit être récursif, ce qui signifie que le langage et son complément doivent être récursivement énumérables. Dans tous les cas, Turing s'intéressa aux théorèmes *N.T.* qui appartenaient effectivement à la classe Π_2 et, de ce fait, s'il obtenait la complétude pour Π_2, il l'obtenait aussi pour Π_1. À cet effet, dans son article de 1936, Turing avait établi l'indécidabilité en fonction des machines dites *circle-free* ou non circulaires. Une machine est dite non circulaire si elle imprime sur son ruban de sortie une infinité de '*0*' ou de '*1*'. Turing écrit :

> « The behaviour of the machine may be described roughly as follows: the machine is one for the calculation of the primitive recursive function $\theta(x)$ of the number-theoretic problem, except that the results of the calculation are first arranged in a form in which the figure '*0*' and '*1*' do not occur, and the machine is then modified so that, whenever it has found that the function vanishes for some value of the argument, then '*0*' is printed. The machine is circle free if and only if $\theta(x)$ vanishes for infinitely many values of the argument. »[11]

Bien qu'on fasse habituellement référence au problème de l'arrêt, il s'agissait plutôt pour Turing du problème du non-arrêt, i.e. qu'il était impossible de déterminer si une machine allait procéder infiniment. Il est intéressant de remarquer que le problème de déterminer si une machine *M* est non circulaire correspond, dans des

[11] *Ibid.*, p. 164.

termes actuels, au problème de savoir si une fonction *f* est totale (*TOT*). Une fonction est totale si elle est définie pour toutes les entrées, c'est-à-dire pour tout son domaine de définition. Autrement dit, une machine *M* appartient à *TOT* si et seulement si $(\forall y)$ [M_w s'arrête sur *y*] (i.e. que pour tout '*y*' il existe une machine qui s'arrête sur *y* quand on lui donne le mot *w* en entrée). On voit donc que le problème consistant à déterminer si une fonction est totale appartient àΠ_2. Or, tous les problèmes *N.T.* de Turing se réduisent à un problème de *TOT*. Turing écrit :

> « We cannot say that the question about de truth of any number-theoretic theorem is reducible to a question about whether a corresponding computable function vanishes infinitely; we should have rather to say that it is reducible to the problem of whether a certain machine is circle free and calculates an identically vanishing function. »[12]

Par conséquent, si Turing obtenait la complétude pour les problèmes *N.T.*, il décidait aussi le problème de déterminer si une fonction est totale. Or, si *TOT* devenait calculable, l'argument diagonal ne serait alors plus valide et le problème de déterminer si une machine s'arrête ou non sur une entrée n'en serait plus un. Par ailleurs, que ce soit le dixième problème de Hilbert, le problème de l'arrêt ou celui de la constante Oméga de Chaitin (malgré ce que Chaitin croit), toutes les preuves d'indécidabilité se construisent par diagonalisation. Ainsi, on peut se demander, et surtout si nous étions à l'époque de Turing, si la décidabilité de *TOT* entraine l'éradication totale de l'indécidabilité. À cet égard, Turing fit un coup de maitre.

5. L'oracle

C'est dans ses travaux sur les logiques ordinales que Turing pose les fondements de la calculabilité relative, c'est-à-dire la comparaison de la complexité des problèmes incalculables en introduisant le concept d'oracle. Dit autrement, certains problèmes sont plus

---

[12] *Idem.*

indécidables que d'autres. La réduction ou réductibilité de Turing, outil nécessaire pour établir les degrés d'indécidabilité, sera ensuite définie par Post dans un important article de 1944, *Recursively Enumerable Sets of Positive Integers and theirDecisionProblems*[13], à la suite des propos de Turing au paragraphe 4 de sa thèse *A type of problemwhichis not number-theoretic*. Après avoir établi la classe des problèmes N.T., Turing voulut obtenir un problème qui n'appartenait pas à cette classe. De cette manière, Turing fixait la limite qu'il considérait atteignable par le biais d'une logique ordinale dans la mesure où l'oracle jouait le même rôle, ni moins fort ni plus fort, que l'intuition mathématique nécessaire au projet d'une logique ordinale. Donc, au lieu d'utiliser une fois de plus l'argument diagonal, Turing introduisit un concept original, celui d'*oracle*. Il écrit :

> « Let us suppose that we are supplied with some unspecified means of solving number-theoretic problems; a kind of oracle as it were. We shall not go any further into the nature of this oracle apart from saying that it cannot be a machine. »[14]

Turing appellera *o-machine* une machine de Turing équipée d'un oracle. Intuitivement, disons que l'oracle peut répondre à toute question précise par '*oui*' ou '1' et '*non*' ou '0'. En fait, la formalisation d'une telle machine se fait exactement de la même manière qu'une machine de Turing standard (i.e. elle s'encode de manière standard), à l'exception du fait qu'elle est équipée d'une bande supplémentaire et de trois états spéciaux. Dès lors, l'oracle ne fait pas partie de la définition même de la o-machine. On peut concevoir la solution à un problème *N.T.* particulier comme un nombre réel écrit sur la bande. Toutefois, Turing montre qu'une o-machine ne peut pas décider le problème d'arrêt pour une autre o-machine tandis qu'elle peut évidemment résoudre n'importe quel problème *N.T.* particulier. On obtient donc un problème qui n'est pas *N.T.* Autrement dit, si *TOT*

---

[13] C'est dans ce même texte de 1944 que Post énonce ce qui sera fameusement appelé le problème de Post.

[14] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], pp. 166-167.

et le problème de l'arrêt étaient décidables, tous les autres problèmes ne deviendraient pas nécessairement décidables. Parmi ces problèmes au-delà de Π_2, énonçons ceux qui consistent à déterminer la complétude, la décidabilité et la consistance, pour ne mentionner que ceux-là. Bien que Turing ait cerné l'existence des différents degrés d'indécidabilité, il faudra attendre la hiérarchie arithmétique telle qu'énoncée par Kleene où, par exemple, on établit l'incomparabilité entre Σ_i et Π_i et autres corolaires. Post suggéra toutefois une façon de passer des degrés de Turing à la hiérarchie arithmétique par le théorème de Post. Pour ce faire, il faut utiliser la réduction-Turing, à savoir qu'un problème A est Turing-réductible à un problème B si, étant donné une o-machine solutionnant B, on peut aussi solutionner A. Dès lors, deux problèmes ont le même degré s'ils sont Turing-réductibles ou inter-réductibles. Les programmes indécidables varient en complexité selon le nombre de *sauts* de Turing applicables. Ceci dit, cette anticipation de Turing est pour le moins remarquable et joua un rôle dominant dans sa recherche sur la logique ordinale.

6. λ-calcul, logique ordinale et intuition.

Le λ-calcul de Church représente un moyen fort efficace pour passer de l'intuition à l'abstraction (et vice-versa), puisque les fonctions dans ce formalisme n'ont de sens que dans leur construction, i.e. leurs règles (les fonctions se construisent par *abstraction* et *application*). Ainsi, le concept fondamental du λ-calcul est que tout est fonction. Les λ-termes sont des formules bien formées (*fbf*s) du formalisme et n'ont de sens que celui que nous voulons bien leur attribuer. Évidemment, et comme le précise Turing, le sens assigné doit être invariant en fonction des conversions.[15] De ce fait, Turing assigne aux nombres entiers la signification suivante dans la formulation du calcul lambda de Church:

$$1 \rightarrow \lambda fx.f(x),\ 2 \rightarrow \lambda fx.f(f(x)),\ 3 \rightarrow \lambda fx.f(f(f(x))),\ \text{etc.}$$

[15] *Ibid.*, p. 158.

Ceci dit, définissons quelques termes utilisés par Turing et définissons plus précisément le projet d'une logique ordinale. Ce que Turing nomme une *formule logique* (ou simplement logique) a pour but de décrire un système formel particulier. Pour qu'une formule L soit une logique, L doit avoir la propriété que si L(A) conv 2 alors le λ-terme A est double. En se référant au sens donné ici-haut, on peut écrire L(A) convλfx.f(f(x)). A est double signifie que A(x) est convertible à 2 pour tous les x. Dire que A(x) est convertible à 2 signifie que pour chaque x, il existe un entier positif y tel qu'une propriété calculable θ(x, y) est vraie (ou « pour chaque nombre naturel x il existe un nombre naturel y tel que θ(x, y) s'annule »). Dès lors, tous les *N.T.T* équivalent, selon leur définition, à une proposition de type *L*(*A*) conv 2 et, inversement, toutes ces propositions correspondent à un théorème *N.T.* Une formule logique donne alors un moyen de vérifier les théorèmes *N.T.* au moyen de leurs conditions de satisfaction. Ainsi, si L est une formule logique et L(A) conv 2, alors A est double etnous savons que la proposition *N.T.* correspondante est vraie. Si *L* est une logique, on ne peut toutefois pas avoir de conditions de satisfaction pour la vérité de toutes les propositions *N.T.* Par conséquent, on détermine l'extension de L comme formant l'ensemble des propositions A pour lesquelles L(A) conv 2. Ceci dit, il est maintenant nécessaire, dans l'optique d'une logique ordinale *progressive*, de situer les formules logiques à l'aide d'une notation pour les ordinaux. Les λ-termes sont des formules ordinales dans la mesure où ils sont associés (constructivement) à des nombres ordinaux. Il n'existe pas de méthode canonique à cet effet et Turing utilise un système précis qui utilise six critères pour la détermination d'une formule ordinale[16] (il n'est pas nécessaire de les énumérer ici.). En 1938, Kleene avait justement défini une notation particulière pour les ordinaux ('O') mais Turing décida, à des fins pratiques, d'utiliser une définition quelque peu différente. À titre d'exemple, la formule ordinale Dt (ayant les caractéristiques que Dt (n, n) conv 3, Dt (n+m, n) conv 2 et Dt (n, n+m) conv 1) représente l'ordinal ω. Par conséquent, une logique ordinale est une *fbf* ⋋ telle que Λ(Ω) est une

---

[16] *Ibid.*, p. 173.

formule logique à chaque fois que Ω est une formule ordinale. Feferman résume bien cette idée dans un vocabulaire plus actuel : $\Lambda = L_a$ tel que a ε O, c'est-à-dire que si A est une proposition Π_2 vraie, alors L_a démontre A pour un a ε O. Or, le point est qu'il n'existe pas de procédure décisionnelle calculable, ou algorithmique, permettant de déterminer si un λ-terme est une formule ordinale (la situation serait évidemment la même avec l'utilisation des fonctions récursives) ou, dit autrement dans les termes de Kleene, 'O' n'est pas calculable. Turing connaissait dès le départ cette caractéristique particulière puisqu'il était aussi bien connu qu'aucune méthode générale permettait de déterminer si une formule du lambda-calcul avait ou non une forme normale[17]. Turing renvoie à Church ici : « there is (demonstrably) no process whereby it can be said of a formula whether it has a normal form. »[18] La détermination des formules ordinales est liée à celles de forme normale dans la mesure où si E représente une classe de formules ordinales et A n'importe quelle formule ordinale de cette classe, alors il n'existe aucune méthode par laquelle on peut déterminer si une *fbf* de forme normale appartient à E. Si Church met demonstrably entre parenthèses, c'est qu'il se rapporte à une autre procédure décisionnelle qui n'est toutefois pas mécanique, à savoir l'intuition. En effet, Church et Turing accordaient une grande place à l'intuition comme le démontre par exemple leur célèbre hypothèse – la thèse Church-Turing – sur le calculable (ce n'est bien-sûr pas un théorème). C'est dans cet esprit que le λ-calcul – l'opérateur λ est celui d'abstraction – est le formalisme le plus approprié aux fins d'une logique ordinale, dans la mesure où, au même titre que l'oracle, l'intuition permettrait de déterminer si une *fbf* est une formule ordinale et, par conséquent, d'obtenir la complétude pour les théorèmes *N.T.* Turing écrit :

> « Gödel's theorem shows that such system cannot be wholly mechanical; but with a complete ordinal logic we should be able to confine the non-mechanical steps

---

[17] Pour la forme normale, voir [2], pp. 158-159.
[18] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], p.159.

entirely to verification that particular formulae are ordinal formula.»[19]

7. Logique ordinale, complétude et invariance.

Turing obtint un résultat partiel de complétude pour les propositions Π_1 qui peut se résumer ainsi :

> Pour toute progression récursivement consistante et toute proposition Π_1 vraie $\emptyset$, il existe un $a \in O$ où $|a| = \omega + 1$ tel que $\emptyset$ est démontrable dans L_a.

Ce résultat est partiel en ce sens que Turing espérait obtenir la complétude pour les problèmes *N.T.* (Π_2). Il écrit : « I cannot at present give a proof of this (i.e. for *N.T.* problems), but I can give a proof that it is complete as regards a simpler type of theorem than the number-theoretic theorems, viz. those of the form $\theta(x)$ vanishes identically where $\theta(x)$ is primitive recursive. »[20] À cet égard, Turing persiste à croire qu'il est possible d'obtenir la complétude pour les théorèmes *N.T*, même s'il n'est pas en mesure de le démontrer à ce moment. Feferman montra plus tard que cela n'était pas possible. Le résultat est aussi dit partiel en fonction de l'inutilité de celui-ci, dans la mesure où le problème qui consiste à reconnaitre si une formule est une formule ordinale est, tel que démontré par Kleene en 1955, déjà plus compliqué que n'importe quel autre problème *N.T.* Comme le dit Feferman :

> « Thus the demand on "intuition" in recognizing "which formulae are ordinal formulae" is somewhat greater than Turing suggests. But even in his own terms, there is a failure to test his analysis of purpose against reality. Is it a "spontaneous judgement" without any "conscious train of

---

[19] *Ibid.*, p. 194.
[20] *Ibid.*, p. 203.

> reasoning" that leads one to recognize a complicated though computable ordering as being a well-ordering? »[21].

Turing fut d'ailleurs grandement déçu par le résultat obtenu. Précisons un point important relevé par Franzén[22] : dans le résultat de complétude de Turing, les axiomes de consistance, ajoutés les uns aux autres pour former des progressions récursivement consistantes, ne sont en aucun cas utilisés. En fait, la seule raison qui explique que $\varnothing$ soit démontrable, une fois L_ω atteint, est qu'on obtient au stade ω une définition non-standard des axiomes de L_a. Sans contredit, cela repose sur des définitions imprédicatives et est complètement inutile à des fins de calculabilité. Un autre résultat significatif est l'impossibilité d'obtenir une logique ordinale à la fois complète et invariante. Turing définit la complétude ainsi : « We say that an ordinal logic Λ is complete if corresponding to each dual formula A there is an ordinal formula Ω_A such that $\Lambda(\Omega_A, A)$ conv 2. »[23] Il s'agit donc de la complétude pour les théorèmes *N.T.* On pourrait aussi dire que la classe des formules logiques $\Lambda(\Omega)$ est complète si Ω parcourt l'ensemble des formules ordinales puisqu'on traiterait alors aussi toutes les propositions *N.T.* vraies. En plus de la complétude, il est souhaitable pour une logique ordinale d'obtenir l'invariance : « An ordinal logic is said to be invariant up to an ordinal *a* if, whenever Ω, Ω' are ordinal formulae representing the same ordinal less than *a*, the extent of $\Lambda(\Omega)$ is identical with the extent of $\Lambda(\Omega')$. An ordinal logic is *invariant* if it is invariant up to each ordinal represented by an ordinal formula.»[24] La logique Λ_p (*P* pour Peano), par laquelle Turing obtint son résultat partiel de complétude, consiste à joindre successivement des propositions arithmétiques afin de *surmonter* ainsi, toujours un peu plus à chaque niveau, les effets du théorème

---

[21] Feferman, Solomon. 1988. Turing in the Land of O(z), in The Universal Turing Machine : A Half-Century Survey, p. 130.
[22] Franzén, Torkel. 2004. Inexhaustibility : a non-exhaustive Treatment , p. 190.
[23] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], p. 192.
[24] *Ibid.*, p.194.

d'incomplétude. Celle-ci, étant complète pour Π_1, n'est toutefois pas invariante. Une autre logique, Λ_H (*H* pour Hilbert), est elle invariante et, par conséquent, aussi incomplète. C'est certes un résultat décevant pour Turing puisqu'il mine considérablement la portée *pratique* des logiques ordinales.

8. Conclusion

Le texte sur la logique ordinale de Turing est un maillon important dans l'histoire de l'informatique théorique du fait qu'il a contribué grandement à son développement. De plus, Turing initia un courant en fondements des mathématiques qui trouva écho chez Feferman et Kreisel. À cet égard, Feferman réussit à obtenir un résultat de complétude pour les propositions Π_2 en utilisant un principe de réflexivité appliqué à des extensions consistantes autonomes (une extension qui n'est pas une progression comme chez Turing). De plus, l'introduction du concept d'oracle est sans doute la notion qui a le plus grand impact du fait qu'elle est à l'origine de nombreuses avancées en calculabilité, suivant les recherches de Post, Sacks, Gandy et plusieurs autres. Il est intéressant de s'interroger sur la signification théorique du concept d'*oracle* dans le texte. En effet, Post soutient que le concept d'oracle est introduit en tant que *side-issue* ou idée marginale dans la mesure où ce concept n'est traité que dans le chapitre 4 :

> « In his paper on *ordinal logics*, Turing presents as a side issue a formulation which can immediately be restated as the general formulation of the recursive reducibility of one problem to another, and proves a result which immediately generalizes to the result that for any recursively given unsolvable problem there is another of higher degree of unsolvability.»[25]

Toutefois, le concept d'oracle correspondant dans le contexte du

[25] Post, Emil. 1944. Recursively Enumarable Sets of Positive Integers and their Decision Problems, in [2], pp. 310-311.

formalisme de Church à l'intuition du mathématicien, il s'agit sans contredit non pas d'un simple ajout ou d'une question secondaire de la part de Turing, mais plutôt d'un outil théorique original qui permet de juger de l'implication possible de l'intuition en théorie de la calculabilité et dans les mathématiques en général. Un autre apport significatif de ce texte est l'anticipation de la hiérarchie arithmétique et de la calculabilité relative et ce en ce qui concerne non seulement la calculabilité mais aussi la complexité de fonctions calculables. Turing écrit :

> « We might also expect to obtain an interesting classification of number-theoretic theorems according to "depth". A theorem which required an ordinal α to prove would be deeper than one which could be proved by the use of an ordinal β less than α. »[26].

Bref, pour toutes ces raisons, *Systems of logic based on ordinals* est un texte séminal de la littérature qu'il est important de considérer d'un point de vue historique, mais aussi philosophique et mathématique.

[26] Turing, M. Alan. 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], p. 194.

Bibliographie

COPELAND, B. J., 2004. *The Essential Turing : The ideas that gave birth to the computer age*, Oxford : Clarendon Press, pp. 125-145.

DAVIS, M., 1953. *The Undecidable : Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*, Raven Press Books Ltd.

FEFERMAN, S., 1958. *On the Strength of Ordinal Logics.* [Abstract], Journal of Symbolic Logic, March, 23(1), pp. 105-106.

FEFERMAN, S., 1958. *Ordinal Logics Re-Examined.* [Abstract] *Journal of Symbolic Logic*, March, 23(1), p. 105.

FEFERMAN, S., 1988. *Turing in the Land of O(z), in The Universal Turing Machine : A Half-Century Survey*, Oxford University Press, pp. 113-147.

FRANZÉN, T., 2004. *Inexhaustibility : a non-exhaustive Treatment*, Association for Symbolic Logic, A K Peters, pp. 153-218.

GANDY, R., 1988. *The Confluence of Ideas in 1936, in The Universal Turing Machine : A Half-Century Survey*, Oxford University Press, pp. 51-111.

GÖDEL, K., 1931. *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, I, Monatshefte für Mathematik und Physik, 38: pp. 173-198.

KLEENE, S. C. & ROSSER, J. B., 1935. *The inconsistency of certain formal logics, Annals of Mathematics*, 36 (3): pp. 630-636.

KREISEL, G., 1960. *Ordinal logics and the characterization of informal concepts of proof, Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (1958), Cambridge University Press, pp. 289-299.

POST, E., 1944. *Recursively Enumarable Sets of Positive Integers and their Decision Problems*, in [2], pp. 305-337.

SYROPOULOS, A., 2008 *Hypercomputation : Computing beyond the Church-Turing Barrier*, Springer, pp. 1-24, 45-68.

TURING, M. A., 1936. *On Computable Numbers, With an Application to the Entscheidungsproblem*, in [2], pp. 116-151.

TURING, M. A., 1939. *Systems of logic based on ordinals*, in [2], pp. 155-222.