La méthode axiomatique durant la crise des fondements

Mathieu Bélanger
Université de Montréal

Résumé

Ce texte examine la méthode axiomatique durant la période de l'histoire des mathématiques correspondant à la crise des fondements. Il a pour objectif de montrer que la méthode axiomatique changea, mais aussi de comprendre la nature de ces changements. À cette fin, les conceptions de Frege, Hilbert et Noether sont analysées.

L'objectif du présent texte est de montrer que la méthode axiomatique changea durant la crise des fondements, c'est-à-dire durant cette période de l'histoire des mathématiques comprise entre 1885 et 1930 et, ce faisant, de mettre en évidence la nature de cette évolution.

Il importe de préciser qu'il n'a pas la prétention de faire une histoire exhaustive de la méthode axiomatique durant la crise des fondements, mais plutôt de se concentrer sur ce qui apparaît être des moments charnières. À cet égard, trois moments pouvant être associés à autant de mathématiciens ressortent : Gottlob Frege, David Hilbert et Emmy Noether.

L'analyse proposée se divise en quatre sections. Il sera dans un premier temps question de la méthode axiomatique chez Frege. La deuxième section se penchera quant à elle sur les *Grundlagen der Geometrie* de manière à comprendre la conception de Hilbert. Afin de bien mettre en lumière la rupture que marqua Hilbert, la suivante reviendra sur la correspondance de Frege et Hilbert en mettant l'accent sur le rôle des définitions et la vérité des axiomes. Finalement, dans la dernière section, l'utilisation novatrice que fit Noether de la méthode axiomatique sera analysée par le biais de ses travaux sur le théorème de factorisation unique.

1. Frege : les axiomes comme vérités évidentes

Dans *Die Grundlagen der Arithmetik* (Frege 1884), Frege formula la thèse selon laquelle les vérités mathématiques sont analytiques. Ce faisant, Frege s'opposait principalement à Kant selon qui les propositions arithmétiques sont synthétiques *a priori*, mais aussi à Mill qui les considérait *a posteriori*.

Avant d'aller plus loin, il semble essentiel de rappeler que, selon Frege, les notions de propositions analytiques, synthétiques, *a priori* et *a posteriori* dépendent du processus de justification.

> Now these distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern, as I see it, not the content of the judgement but the justification for making the judgement. Where there is no such justification, the possibility of drawing the distinctions vanishes. (…) When a proposition is called a posteriori or analytic in my sense, this is not a judgement about the conditions, psychological, physiological and physical, which have made it possible to form the content of the proposition in our consciousness; nor it is a judgement about the way in which some other man has come, perhaps erroneously, to believe it true; rather, it is a judgement about the ultimate ground upon which rests the justification for holding it to be true. (Frege 1884, 3)

Ainsi, déterminer le caractère analytique, synthétique, *a priori* ou *a posteriori* d'une proposition donnée revient à examiner les étapes de sa démonstration, depuis la conclusion finale jusqu'aux « vérités primitives », pour reprendre l'expression de Frege (1884, 4).

Ceci conduisit Frege (1884, 4) à adopter les définitions suivantes. Une proposition est *analytique* si sa démonstration ne repose que sur les lois de la logique et des définitions. En contrepartie, elle est *synthétique* si sa démonstration emploie des vérités qui appartiennent à une science particulière, c'est-à-dire au moins une proposition qui ne relève pas de la logique. Par ailleurs, une proposition est *a priori* si sa démonstration ne dépend que de lois générales qui n'ont elles-mêmes besoin d'aucune preuve. Elle est plutôt *a posteriori* s'il est impossible d'en construire une démonstration sans recourir à des vérités qui réfèrent à des objets particuliers.

Pour établir l'analycité des propositions arithmétiques, Frege devait donc montrer qu'elles pouvaient toutes être démontrées à partir des lois de la logique et de définitions

Frege s'attela à cette tâche dans *Grundgesetze der Arithmetik* (Frege 1964). Dans un premier temps, il formula des axiomes exprimant des vérités logiques – les célèbres lois de base –, des définitions donnant une dénotation aux concepts intervenant dans ces axiomes de même que des règles d'inférence[1]. Dans un deuxième temps, il démontra certaines propositions arithmétiques à partir des lois de base en utilisant seulement les règles d'inférence. À ce propos, si Frege croyait sa réduction de l'arithmétique à la logique sans faille – il écrit dans l'introduction que « … the only criticisms that can justly be made against the book concern not the rigor but merely the choice of the course of proof and of intermediate steps. » (1964, vi) –, le paradoxe de Russell le força, pour employer un euphémisme, à reconsidérer le succès de son projet.

Afin de bien comprendre l'évolution subséquente de la méthode axiomatique, il importe d'examiner les notions de définition et d'axiome telles que les conçoit Frege.

Premièrement, le rôle des définitions est de fournir des noms pour désigner des concepts. Dans cette optique, leur raison d'être tient à ce qu'elles permettent de désigner avec plus de brièveté : « The definitions do not really create anything, and in my opinion may not do so; they merely introduce abbreviated notations (names), which could be dispensed with were it not that lengthiness would then make for insuperable external difficulties. » (Frege 1964, vi) Qui plus est, Frege s'insurge contre l'idée qu'une définition permette d'introduire un nouveau concept ; un nom ne peut être attribué qu'à des objets dont l'existence est établie.

[1] Pour un résumé des lois de base et des règles d'inférence, voir Frege (1964, §47-48).

> It is important that we make clear at this point what definition is and what can be attained by means of it. It seems frequently credited with a creative power; but all it accomplishes is that something is marked out in sharp relief and designated by a name. Just as the geographer does not create a sea when he draws boundary lines and says: the part of the ocean's surface bounded by these lines I am going to call the Yellow Sea, so too the mathematician cannot really create anything by his defining. Nor can one by pure definition magically conjure into a thing a property that in fact it does not possess – save that of being called by the name with which one has named it. (1964, xiii)

Deuxièmement, selon Frege, les axiomes, c'est-à-dire les lois de base, sont des vérités évidentes[2]. Ceci signifie qu'ils ne requièrent aucune justification. Contrairement aux autres propositions, les axiomes sont vrais en eux-mêmes au sens où leur vérité ne dépend d'aucune autre proposition. C'est en vertu de ce statut épistémologique que les axiomes peuvent être le fondement de la vérité d'autres propositions. Ceux-ci étant vrais, toute proposition qui en sera déduite par l'entremise de règles d'inférence valides sera elle-même vraie.

Les axiomes ont donc un rôle fondationnel chez Frege. En effet, les axiomes constituent le fondement de la connaissance arithmétique dans la mesure où la vérité de toute proposition arithmétique dépend de la vérité des axiomes. Ces derniers constituent en ce sens la justification ultime des propositions arithmétiques.

2. Hilbert : la méthode axiomatique comme méthode de clarification

L'objectif de Hilbert dans *Grundlagen der Geometrie* (1956, 1971), d'abord publié en 1899, était l'identification d'un système d'axiomes minimal pour la géométrie, c'est-à-dire qu'il cherchait à formuler les axiomes les plus simples possibles à partir desquels toute proposition

[2] Pour une analyse approfondie de la notion d'évidence chez Frege, voir Jeshion (2001).

géométrique pourrait être déduite, mais aussi à résoudre la question de l'indépendance des axiomes de la géométrie, en particulier les axiomes des parallèles et d'Archimède. (Hilbert 1971, 10; Frege 1980, lettre 4, 38)

Hilbert prend pour point de départ trois types d'objets qu'il nomme respectivement « points », « droites » et « plans ». À ce stade-ci, « point », « droite » et « plan » ne sont que des termes pour désigner les objets de chaque type.

Ce que sont les points, les droites et les plans est entièrement défini par les relations qui existent entre eux et qui sont exprimées par les termes « être sur », « entre », « parallèle », « congruent » et « continu ». Ces relations sont quant à elles entièrement décrites à l'aide d'axiomes : les axiomes de la géométrie.

Hilbert organise les axiomes de la géométrie en cinq groupes qui décrivent chacun une des relations à l'œuvre en géométrie :

> 1- Axiomes d'appartenance : les axiomes d'appartenance définissent les relations d'appartenance et d'inclusion entre les points, les droites et les plans.
>
> **Exemple**. Pour toute paire de points distincts A et B, il existe une droite a passant par ces points.
>
> 2- Axiomes d'ordre : ces axiomes définissent la relation « entre », ce qui permet de déterminer l'ordre des points dans l'espace.
>
> **Exemple.** Pour toute paire de points A et C, il existe au moins un point B qui appartient à la droite AC et qui soit entre A et C.
>
> 3- Axiomes de congruence : comme le nom du groupe le suggère, ces axiomes définissent la notion de congruence.
>
> **Exemple.** Si A et B sont deux points d'une droite a et A' est un point de a ou d'une autre droite a', alors, il est toujours possible, d'un côté donné de A' de trouver un point B' tel que

le segment AB soit congruent ou égal au segment $A'B'$, ce qui s'écrit $AB \equiv A'B'$.

4- Axiome des parallèles : ce groupe ne contient en fait qu'un seul axiome, à savoir l'axiome des parallèles, lequel définit, comme son nom l'indique, la notion de parallélisme.

Exemple. Si a est une droite et A un point qui n'appartient pas à a, alors, dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe a, c'est-à-dire qui est parallèle à a.

5- Axiomes de continuité : ce groupe contient l'axiome d'Archimède qui permet d'introduire la continuité et l'axiome de complétude qui affirme la complétude du système.

Exemple. Si AB et CD sont deux segments quelconques, alors il existe un nombre entier n tel que le segment CD répété n fois à partir du point A sur la demi-droite déterminée par B mène à un point situé au-delà de B.

D'après Hilbert, ces axiomes ont pour source l'intuition, l'intuition spatiale pour être plus précis. À cet égard, la formulation des cinq groupes d'axiomes est précédée de l'affirmation suivante : « chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition. » (1971, 11) Les axiomes et leur organisation en ces cinq groupes expriment et systématisent certaines intuitions de base à propos de l'espace. Il faut toutefois insister sur le fait que Hilbert ne dit pas que ces axiomes sont vrais en soi. Contrairement à Frege, bien qu'ils aient pour source l'intuition, les axiomes de la géométrie ne sont pas des vérités évidentes.

Sur la seule base de ces axiomes, Hilbert est en mesure de récupérer toutes les propositions de la géométrie euclidienne. L'omission de certains groupes d'axiomes lui permet également d'obtenir certains théorèmes valides dans des géométries non euclidiennes. De plus, Hilbert obtient des résultats qui relèvent de la géométrie projective en ce qu'il démontre, dans les cinquième et sixième chapitres respectivement, les théorèmes de Desargues et de Pascal sans recourir aux axiomes de continuité.

Dans le deuxième chapitre, Hilbert s'attaque à la cohérence et à l'indépendance des axiomes de la géométrie. Il construit d'abord un corps de nombres algébriques et montre à l'aide de celui-ci la cohérence relative des axiomes de la géométrie et de l'arithmétique des nombres réels. Ceci signifie que la cohérence des axiomes géométriques est équivalente à celle de l'arithmétique des nombres réels et donc que toute contradiction dans l'une se manifesterait dans l'autre.

Dans un deuxième temps, Hilbert démontre que les groupes d'axiomes, mais aussi que les axiomes d'un même groupe sont indépendants. L'approche de Hilbert consiste à construire, pour chaque axiome A, un modèle d'une théorie géométrique qui satisfait tous les axiomes sauf A.

Comme le souligne Corry (1996), dans *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert utilise donc la méthode axiomatique pour dévoiler la structure logique de la géométrie et, ce faisant, clarifier cette théorie mathématique. Premièrement, la définition des concepts géométriques – c'est-à-dire ce qu'est un point, une droite, un plan, etc. – dérive de la structure logique de la théorie. Les mots « point », « droite », « plan », etc. n'ont un sens qu'en vertu de leur participation à cette structure. Deuxièmement, l'approche axiomatique de Hilbert met en lumière les relations de dépendance entre les propositions géométriques et les divers axiomes des cinq groupes. En d'autres termes, les démonstrations permettent de comprendre de quels axiomes une proposition donnée dépend. Finalement, l'analyse des propriétés logiques des axiomes de la géométrie contribue à la connaissance des propriétés métalogiques des diverses théories géométriques. Par exemple, Hilbert (1971, 57) affirme que la cohérence de la géométrie non euclidienne est une conséquence de la cohérence de la géométrie euclidienne.

Par le fait même, Hilbert ne voit pas la méthode axiomatique comme un outil de création de nouvelles théories mathématiques par la simple formulation d'axiomes arbitraires. Corry écrit à ce propos :

> Hilbert's own conception of axiomatics did not convey or encourage the formulation of abstract axiomatic systems:

> his work was instead directly motivated by the need to better define and understand existing mathematical and scientific theories. In Hilbert's view, the definition of systems of abstract axioms and their analysis following the above described guidelines, were meant to be conducted for established and elaborated mathematical entities. Hilbert saw natural science – and in particular geometry within it – as an organic entity, growing simultaneously in various directions. In this view, the development of science involved both an expansion in scope and an ongoing clarification of the logical structure of its existing parts. (1996, 162)

Chez Hilbert, les axiomes jouent donc un rôle de clarification de théories mathématiques déjà existantes. En cela, sa conception s'opposait à celle de Frege qui, tel que vu précédemment, attribuait plutôt aux axiomes un rôle fondationnel. Or, ce point de divergence n'était pas le seul.

3. La correspondance de Frege et Hilbert

Historiquement, *Grundlagen der Geometrie* fut à l'origine d'une brève correspondance entre Frege et Hilbert. Dans celle-ci, Frege s'inscrit en faux avec la conception des axiomes et des définitions mise de l'avant par Hilbert. En fait, ses objections permettent de prendre conscience de la transformation radicale que fit subir Hilbert à la méthode axiomatique et, du coup, du fossé séparant les conceptions frégéenne et hilbertienne. Comme l'écrit l'éditeur dans l'introduction de la section consacrée à la correspondance de Frege et Hilbert :

> Although Frege's logical objections were well taken, and although a correct understanding of the axiomatic method must begin with Frege, the dominant view, especially among mathematicians, is still the view expressed recently by H. Scholz: '… no one doubts nowadays that while Frege himself created much that was radically new on the basis of the classical conception of science, he was no longer able to grasp Hilbert's radical transformation of this conception of science, with the result that his critical

> remarks, though very acute in themselves and still worth reading today, must nevertheless be regarded as essentially beside the point.' (Gabriel et al. 1980, 31)

Dans sa lettre du 27 décembre 1899, Frege reproche à Hilbert de confondre axiomes et définitions. Tel que vu à la section 2, Frege considère que les axiomes expriment des vérités intuitives alors que les définitions ne font que fixer la dénotation des concepts.

> The explanations of sects 1 and 3 are apparently of a very different kind, for here the meanings of the words 'point', 'line', 'between' are not given, but are assumed to be known in advance. At least it seems so. But it is also left unclear what you call a point. One first thinks of points in the sense of Euclidean geometry, a thought reinforced by the proposition that the axioms express fundamental facts of our intuition. But afterwards you think of a pair of numbers as a point (…) Here the axioms are made to carry a burden that belongs to definitions. To me this seems to obliterate the dividing line between definitions and axioms in a dubious manner (…) (Frege 1980, 35).

Du point de vue de Frege, les concepts de « point », « ligne », etc. ne peuvent pas être définis par les axiomes puisqu'un axiome ne peut être formulé s'il fait référence à des concepts qui n'ont pas encore été définis, c'est-à-dire des termes dont la dénotation n'a pas été au préalable fixée. En effet, un axiome exprimant une vérité, comment pourrait-il être vrai s'il réfère à des concepts inconnus ?

> I should like to divide up the totality of mathematical propositions into definitions and all the remaining propositions (axioms, fundamental laws[3], theorems). Every definition contains a sign (an expression, a word) which had no meaning before and which is first given a meaning by the definition. Once this has been done the definition can be turned into a self-evident proposition which can be

[3] Étrangement, Frege ne semble guère faire de différence entre un axiome et une loi fondamentale dans *Grundgesetze der Arithmetik*. Cf. Frege (1964, 3).

> used like an axiom. But we must not lose sight of the fact that a definition does not assert anything but lays down something. Thus we must never present as a definition something that is in need of proof or of some other confirmation of its truth. (…) It is very essential for the strictness of mathematical investigations that the difference between definitions and all other propositions be observed in all strictness. The other propositions (axioms, fundamemtal laws and theorems) must not contain a word or sign whose sense and meaning, or whose contribution to the expression of a thought, was not already completely laid down, so that there is no doubt about the sense of the proposition and the thought it expresses. The only question can be whether this thought is true and what its truth rests on. Thus axioms and theorems can never try to lay down the meaning of a sign or word that occurs in them, but it must already be laid down. (Frege 1980, 36)

Qui plus est, dans une lettre subséquente datée du 16 septembre 1900, Frege affirme qu'il ne peut y avoir de relations entre concepts qu'une fois ceux-ci définis. Bref, définir ce que sont les points, les droites et les plans par le biais des relations qu'ils entretiennent est impossible. Selon Frege, ces relations sont déterminées par ce que les points, droites et plans sont : « There can be talk about relations between concepts – e.g. the subordination of one concept to another – only after these concepts have been given sharp limits, but not while they are being defined. » (1980, 49)

Dans sa réponse du 22 septembre, Hilbert réitère qu'une définition axiomatique est au contraire la seule façon de ne rien présupposer et d'être parfaitement rigoureux, non sans laisser poindre une certaine irritation cette fois...

> In my opinion, a concept can be fixed logically only by its relations to other concepts. These relations, formulated in certain statements, I call axioms, thus arriving at the view that axioms (perhaps together with propositions assigning names to concepts) are the definitions of the concepts. I did not think up this view because I had nothing better to

> do, but I found myself forced into it by the requirements of strictness in logical inference and in the logical construction of a theory. (Frege 1980, 51)

Au-delà du rôle des définitions, Frege et Hilbert ne s'entendent pas sur la question de la vérité des axiomes et de leur cohérence. Toujours dans sa lettre du 27 décembre 1899, l'auteur de *Grundgesetze der Arithmetik* rappelle que les axiomes, en ce qu'ils expriment des vérités évidentes, sont nécessairement vrais et que leur cohérence est une conséquence triviale de ce statut épistémologique.

> I call axioms propositions that are true but are not proved because our knowledge of them flows from a source very different from the logical source, a source which might be called spatial intuition. From the truth of the axioms it follows that they do not contradict one another. There is therefore no need for a further proof. (1980, 37)

Dans sa réponse du 29 décembre, Hilbert maintient au contraire que la cohérence est le critère de vérité des axiomes. Il va même plus loin en faisant de la cohérence des axiomes le critère d'existence des objets mathématiques qu'ils définissent.

> I found it very interesting to read this very sentence in your letter, for as long as I have been thinking, writing and lecturing on these things, I have been saying the exact reverse: if the arbitrary given axioms do not contradict one another with all their consequences, then they are true and the things defined by the axioms exist. This is for me the criterion of truth and existence. (Frege 1980. 39)

Historiquement, si la conception hilbertienne des axiomes s'imposa, la méthode axiomatique elle-même en vint à jouer un nouveau rôle dans le contexte de l'algèbre abstraite au cours des années 1920.

4. Noether : la méthode axiomatique comme outil de travail

Une transformation profonde de la méthode axiomatique survint avec les travaux d'Emmy Noether en algèbre. Cette transformation tient à ce que, chez Noether, la méthode axiomatique est un outil pour le travail mathématique : elle permet de démontrer directement des résultats inédits et non triviaux abstraitement.

Cette utilisation inédite est parfaitement illustrée par les travaux de Noether sur le théorème de factorisation unique. Ce théorème est une extension du théorème fondamental de l'arithmétique qui affirme que tout nombre naturel peut être décomposé de manière unique en un produit de puissances de nombres premiers. Par exemple, $12 = 2^2 \times 3$ et $100 = 2^2 \times 5^2$.

Avant que Noether n'entre en scène, deux types de généralisations du théorème fondamental de l'arithmétique étaient connus.

Premièrement, l'étude des extensions de l'arithmétique élémentaire avait conduit les mathématiciens à vouloir y transposer les propriétés des nombres naturels. Par exemple, Gauss, à qui la démonstration du théorème fondamental de l'arithmétique est habituellement attribuée, démontra un théorème de factorisation pour les entiers complexes[4] alors que Kummer en fit autant pour les entiers cyclotomiques[5]. Ces diverses généralisations avaient toutefois l'inconvénient de ne pas être valides pour certains domaines de nombres. La solution générale vint de la théorie des idéaux telle que formulée par Dedekind. Brièvement, étant donné un corps de nombres, Dedekind montra que tout idéal de l'anneau des entiers algébriques[6] qui appartiennent à ce corps peut être représenté de manière unique comme un multiple de puissances d'idéaux premiers[7].

Deuxièmement, au début du XX^e^ siècle, les concepts et méthodes développés par Dedekind furent transposés à la théorie des polynômes. Une théorie des idéaux de polynômes vit donc le jour et

---

[4] Un *entier complexe* est un nombre de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{N}$.

[5] Un *entier cyclotomique* est un nombre de la forme $a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + \ldots + a_n\theta^n$ où θ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

[6] Un entier est *algébrique* s'il est la racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers.

[7] Pour une présentation plus détaillée, voir Corry (1996, chapitre 2).

déboucha, principalement grâce aux travaux de Lasker et Macaulay, sur un théorème de factorisation unique pour les polynômes[8].

Au cours des années 1920, Noether unifia toutes les questions de factorisation au sein d'une théorie abstraite. À vrai dire, historiquement, elle proposa deux versions de cette théorie unifiée : la première dans l'article « *Idealtheorie in Ringbereichen* » de 1921 et la seconde, qui peut être considérée comme définitive, dans l'article « *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie* » de 1926.

Noether annonce on ne peut plus clairement son projet d'unification dès le début de « *Idealtheorie in Ringbereichen* » : « Le présent travail consiste en une *transposition des théorèmes de factorisation pour les entiers rationnels et pour les idéaux de corps de nombres algébriques aux idéaux d'anneaux d'intégrité arbitraires et d'anneaux généraux*[9]. » (1921, 25)

La pierre de touche de cette unification fut le concept d'anneau. À cet égard, Noether considère des anneaux abstraits, notion qui avait été définie – axiomatiquement – pour la première fois par Fraenkel[10]. En effet, elle vit un lien entre la théorie des anneaux et le théorème de factorisation unique que ses prédécesseurs n'avaient pas vu.

Cela étant dit, à la lumière de l'objectif de la présente section qui n'est pas de comprendre le théorème de factorisation unique dans sa forme générale, seul le premier lemme que démontre Noether dans « *Idealtheorie in Ringbereichen* » sera examiné dans la mesure où il illustre parfaitement son utilisation novatrice de la méthode axiomatique.

Noether commence par définir la notion d'anneau commutatif et précise que sa définition se veut abstraite, c'est-à-dire que la nature des éléments n'est pas spécifiée. Un *anneau commutatif* est un ensemble Σ d'éléments a, b, c,… muni d'une relation d'égalité et de deux opérations, appelées addition et multiplication, qui, à toute paire d'éléments a et b, associent respectivement la somme $a + b$ et le produit $a \cdot b$ telles que les propriétés suivantes sont satisfaites :

---

[8] À ce sujet, voir Corry (1996, §4.7).

[9] Den Inhalt der vorliegenden Arbeit bildet die *Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideal in algebraischen Zahlkörpern auf Ideale in beleibigen Integritäts-, allgemeiner Ringbereichen.*

[10] À propos de l'axiomatisation du concept d'anneau par Fraenkel, voir Corry (1996, §4.4 et 4.5).

1. associativité de l'addition : pour tous a, b et c, $(a+b)+c=a+(b+c)$;
2. commutativité de l'addition : pour tous a et b, $a+b=b+a$;
3. associativité de la multiplication : pour tous a, b et c, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;
4. commutativité de la multiplication : pour tous a et b, $a\cdot b=b\cdot a$;
5. distributivité de la multiplication sur l'addition : pour tous a, b et c, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$;
6. unicité de la soustraction : pour tous éléments a et b, il existe un unique élément x tel que $a+x=b$, c'est-à-dire $x=b-a$.

Noether se tourne ensuite vers les idéaux. Elle définit tout d'abord un *idéal* M de Σ comme une collection d'éléments de Σ telle que

1. si f est un élément de M et a est un élément de Σ, alors M contient $a\cdot f$.
2. si f et g sont des éléments de M, alors M contient la différence $f-g$. De plus, pour tout entier n, M contient nf .

Diverses notions relatives aux idéaux sont par la suite présentées, à commencer par celles d'union et d'intersection d'idéaux[11]. Soient M et N deux idéaux. L'union (M,N) de M et N est l'ensemble des éléments $a+b$ où a est dans M et b est dans N. L'*intersection* $[M,N]$ de M et N est l'ensemble des éléments $a\cdot b$ où a est dans M et b est dans N.

Par ailleurs, un idéal M a une *base finie* s'il existe un nombre fini d'éléments f_1, f_2,…, f_n tels que $M=(f_1,\ldots,f_n)$, c'est-à-dire que pour tout f dans M, $f=a_1f_1+\ldots+a_nf_n$ où $a_1,\ldots,a_n$ sont des éléments de Σ. Un anneau Σ satisfait la *condition de finitude* si tout idéal de Σ possède une base finie.

[11] Noether parle en fait du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple. Plus généralement, elle n'utilise pas la terminologie et la notation ensembliste. Par exemple, elle dit que l'élément f divise l'idéal M pour affirmer que f appartient à l'idéal M et écrit $f\equiv 0\,(M)$ au lieu de $f\in M$. À ce sujet, voir Corry (1996, 230).

Noether précise alors qu'elle se restreindra aux anneaux ayant une base finie. Elle traite donc cette condition comme un axiome supplémentaire que les anneaux considérés devront satisfaire. Immédiatement après avoir fait cette remarque, elle démontre l'équivalence de la condition de base finie et de la condition de chaîne ascendante. La condition de chaîne ascendante stipule que, étant donnée une suite croissante d'idéaux $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, il existe un n tel que $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \ldots$. Dans la terminologie contemporaine, Noether travaille donc avec des anneaux *noetheriens*[12].

Une représentation $M = [B_1, \ldots, B_k]$ est une *représentation réduite* si (i) aucun des idéaux B_i de la représentation ne contient l'intersection d'autres idéaux de la représentation et (ii) si aucun idéal B_i ne peut être remplacé par un autre idéal le contenant proprement[13].

Noether est alors en mesure de démontrer le lemme 1 (*Hilfsatz I*), lequel affirme que si un idéal peut être représenté comme l'intersection d'un nombre fini d'idéaux, alors il existe au moins une représentation réduite de cet idéal[14].

Soient M un idéal et $M = [B_1, \ldots, B_n]$ une représentation de M en tant qu'intersection des idéaux $B_1, \ldots, B_n$. Noether considère, pour un i donné, l'idéal U_i formé de l'intersection de tous les idéaux de la représentation qui sont distincts de B_i. Autrement dit, $U_i = [B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n]$. Trivialement, $M = [U_i, B_i]$ est une représentation de M.

Deux cas se présentent. D'une part, s'il n'existe aucun idéal contenant proprement B_i qui puisse remplacer B_i dans la représentation $M = [U_i, B_i]$, alors la représentation $M = [U_i, B_i] = [B_1, \ldots, B_n]$ est par définition réduite.

D'autre part, s'il existe un idéal $B_i^{(1)}$ qui contient proprement B_i et qui peut le remplacer dans la représentation de M, alors le même raisonnement peut être appliqué à cet idéal $B_i^{(1)}$. Ainsi, s'il n'existe

---

12 Dans l'article de 1926, Noether imposera quatre axiomes supplémentaires, ceux qui définissent la notion d'anneau de Dedekind. Voir Noether (1927, 26-27).

13 Un idéal M *contient proprement* un idéal N si M contient tous les éléments de N et s'il existe au moins un élément de M qui n'est pas dans N.

14 La formulation de la démonstration qui suit s'inspire de celle de Corry (1996, 230-231).

aucun idéal contenant proprement $B_i^{(1)}$ qui peut le remplacer dans la chaîne, alors celle-ci est réduite. Sinon, il existe un idéal $B_i^{(2)}$ qui contient $B_i^{(1)}$ qui peut le remplacer dans la chaîne.

L'application répétée de ce raisonnement générera une représentation réduite ou une chaîne infinie d'idéaux $B_i, B_i^{(1)}, \ldots$ telle que, pour tout k, $B_i^{(k)}$ est contenu proprement dans $B_i^{(k+1)}$. Or, l'existence d'une telle chaîne infinie contredit la condition de chaîne ascendante. Le lemme est donc démontré.

Cette démonstration a comme particularité de n'utiliser que les propriétés d'inclusion de la collection des idéaux. En effet, Noether n'utilise que le langage de la théorie des anneaux – principalement la condition de chaîne ascendante – et fait totalement abstraction de la nature des éléments et des propriétés de ceux-ci. Contrairement au théorème de factorisation des polynômes par exemple, le lemme 1 n'est pas dérivé de résultats connus sur les nombres.

Cette particularité de la démonstration tient à ce que Noether travaille directement avec les axiomes. Ce faisant, elle établit que la portée de la méthode axiomatique ne se restreint pas à la dimension logique des théories mathématiques. À titre de comparaison, chez Frege, la méthode axiomatique offrait une réponse à la question de la justification des propositions arithmétiques. Quant à Hilbert, il voyait dans la méthode axiomatique un outil de clarification de théories mathématiques. Or, cette clarification est essentiellement logique dans la mesure où, en plus de la question de la justification des propositions géométriques, elle permet de traiter celles de l'indépendance et de la cohérence des axiomes[15].

En utilisant la condition de chaîne ascendante, Noether parvient dans la suite de « *Idealtheorie in Ringbereichen* » à démontrer d'autres propriétés de factorisation. Par exemple, le théorème XIII affirme que, pour toute représentation réduite d'un idéal en tant qu'intersection d'idéaux irréductibles, les idéaux irréductibles associés aux idéaux premiers isolés sont uniquement déterminés. Ce théorème est important puisqu'il constitue bien plus qu'une généralisation de résultats connus pour les nombres ou encore les polynômes. Il s'agit

[15] Pour un traitement du rôle de la méthode axiomatique dans le développement de théories mathématiques, voir Schlimm (2006, 2008, 2011).

effectivement d'un théorème totalement nouveau que l'étude des nombres ou des polynômes n'aurait pas permis de dévoiler. Pour citer Corry,

> This result is one of the important innovations of Noether's article. In fact, neither the invariance of the associated prime ideals nor that of the isolated factors had appeared in the works of Lasker. Macaulay, on the other hand, had introduced the isolated ideals but as a concept built on properties of the spread of a variety. Noether's result is therefore not only a generalized formulation of the known theorem on polynomials, but in fact a new result which could not have been attained in the particular case of polynomial rings. (1996, 234)

Comme l'illustrent les considérations ci-dessus, Noether conféra à la méthode axiomatique un rôle nouveau par rapport à Hilbert : celui d'outil mathématique permettant de démontrer abstraitement des résultats.

Conclusion

La méthode axiomatique subit des changements fondamentaux durant la période de l'histoire des mathématiques que couvre la crise des fondements.

Chez Frege, les axiomes étaient conçus comme des vérités ne requérant aucune justification et dont la vérité a pour origine l'intuition spatiale. Ils constituent pour cette raison le fondement de la vérité d'autres propositions.

Avec *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert s'éloigna de la conception frégéenne. Hilbert utilise plutôt la méthode axiomatique comme outil de clarification des théories mathématiques dans la mesure où elle permet de dévoiler leur structure logique.

Dans leur correspondance de 1899-1900, Frege s'opposera à cette conception de la méthode axiomatique. Premièrement, selon Frege, un axiome ne peut être formulé et avoir un sens que si les concepts auxquels il réfère sont clairement définis. Hilbert considère plutôt que ce sont les relations entre concepts qu'expriment les axiomes qui définissent les concepts en question. Deuxièmement, Frege considère que la cohérence est une conséquence triviale de la vérité des axiomes. Chez Hilbert, la cohérence du système d'axiomes est plutôt le critère de leur vérité, mais aussi de l'existence des objets mathématiques qu'ils définissent.

La méthode axiomatique sera utilisée d'une toute autre façon par Emmy Noether dans le cadre de ses travaux sur le théorème de factorisation unique. Comme l'illustre la condition de chaîne ascendante, les axiomes permettent de démontrer abstraitement des résultats inédits et non triviaux.

En terminant, la conception noetherienne de la méthode axiomatique apparaît comme un précédent important dans l'histoire des mathématiques. En effet, une analyse des travaux d'Alexandre Grothendieck sur les catégories abéliennes révèlerait de profondes similarités.

Bibliographie

CORRY, L., 1996. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures.* Basel : Birkhäuser Verlag. coll. « Science Networks Historical Studies ». no 17.

FREGE, G., 1884. *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*. traduit par J.L. Austin. New York : Philosophical Library.

— 1964. *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*. traduit par Montgomery Furth, Berkeley et Los Angeles : University of California Press.

— 1969. *Les fondements de l'arithmétique*. traduit par Claude Imbert, Paris : Éditions du Seuil, coll. « L'ordre philosophique ».

— 1980. *Philosophical and Mathematical Correspondence*, sous la dir. de Gottfried Gabriel et al. traduit par Hans Kaal. Chicago : The University of Chicago Press.

GABRIEL, G. et al., 1980. Introduction to « Frege–Hilbert » In *Philosophical and Mathemaical Correspondence*. sous la dir. de Gottfried Gabriel et al. traduit par Hans Kaal.. Chicago : The University of Chicago Press, pp. 31-32.

HILBERT, D., 1956. *Grundlagen der Geometrie.* 8e édition, Stuttgart : B. G. Teubner.

— 1971. *Les fondements de la géométrie*. traduit par Paul Rossier, Paris : Dunod.

JESHION, R., 2001. « Frege's Notions of Self-Evidence. » *Mind.* 110, pp. 937-976.

NOETHER, E., 1921. « Idealtheorie in Ringbereichen. » *Mathematische Annalen*. 83, pp. 24-66.

— 1927. « Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern. » *Mathematische Annalen*. 96, pp. 26-61.

SCHLIMM, D., 2006. « Axiomatics and Progress in the Light of 20th Century Philosophy of Science and Mathematics. » In *Foundations of the Formal Sciences IV: The History of the Concept of Formal Science*, sous la dir. de Volker Peckhaus Löwe Benedikt et Thoralf Rasch. 233-253. London : College Publications, coll. « Studies in Logic Series », no 3.

— 2008. « Bridging Theories with Axioms: Boole, Stone, and Tarski. » In *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics, Brussels, Belgium, 26–28 March 2007*, sous la dir. de Bart van Kerkhove. World Scientific, pp. 222-235.

— 2011. « On the Creative Role of Axiomatics: The Discovery of Lattices by Schröder, Dedekind, Birkhoff and others. » *Synthese*. 183, pp. 47-68.