La portée épistémique de l'axiomatisation de la physique chez Hilbert

Clayton Peterson
Université de Montréal

L'objectif du présent texte est de discuter de la portée épistémique de la méthode axiomatique. Tout d'abord, il sera question du contexte à partir duquel la méthode axiomatique a émergé, ce qui sera suivi d'une discussion des motivations du programme de Hilbert et de ses objectifs. Ensuite, nous exposerons la méthode axiomatique dans un cadre plus moderne afin de mettre en lumière son utilité et sa portée théorique. Finalement, il s'agira d'explorer l'influence de la méthode axiomatique en physique, surtout en ce qui a trait à l'application de la méthode par Hilbert. Nous discuterons de ses objectifs et de l'épistémologie qui accompagnait sa vision du 6^e^ problème, ce qui nous amènera à discuter des limites épistémiques de la méthode axiomatique et de l'entreprise scientifique en général.

1. Introduction

Les travaux des penseurs du début du 20e siècle ont grandement influencé les mathématiques, la logique et la physique moderne. Bien que plusieurs aient participé au développement des connaissances de l'époque, le programme de Hilbert a eu un impact majeur sur la conception moderne de la connaissance scientifique. La méthode axiomatique, outil central au programme de Hilbert, s'est répercutée dans différents domaines et joue maintenant un rôle épistémologique et théorique important. Ayant cela en tête, l'objectif du présent texte est d'explorer l'impact théorique et épistémologique que la méthode axiomatique a pu avoir dans le domaine de la physique.

Dans un premier temps, il s'agira d'exposer le contexte dans lequel le programme de Hilbert prend place et à partir duquel la méthode axiomatique a émergé, ce qui nous amènera à discuter du rôle de la méthode par rapport aux fondements des mathématiques. Cela fait, nous discuterons des intérêts théoriques de la méthode axiomatique à la lumière de la conception moderne de la logique. Finalement, il sera question de la répercussion de cette méthode en physique, plus précisément en ce qui a trait à l'axiomatisation de la physique chez Hilbert. Notre objectif ne sera pas d'analyser en détails le formalisme de la physique mais plutôt d'analyser les raisons qui ont pu motiver Hilbert à vouloir appliquer la méthode axiomatique à la physique. L'objectif principal sera de montrer l'intérêt et les limites épistémiques de l'application de la méthode axiomatique en physique.

2. Le programme de Hilbert

D'entrée de jeu, le programme de Hilbert est apparu en réaction à certains problèmes relatifs aux fondements des mathématiques. La connaissance mathématique, paradigme de la connaissance en vertu de sa certitude, était remise en doute à l'époque par les paradoxes de la théorie (naïve) des ensembles. Un exemple de ces paradoxes serait celui avancé par Russell, lequel s'adresse à la loi V de Frege mais plus précisément au principe naïf de la théorie des ensembles, lequel stipule que tout concept possède une extension.[1] Considérant que les paradoxes remettaient en doute la certitude de la connaissance mathématique, le programme de Hilbert s'est développé en vue de lui donner des fondements solides.[2] Croyant fermement que chaque problème mathématique possède une solution, que ce soit par une preuve directe[3] ou encore par une preuve de l'impossibilité d'obtenir une solution à partir de certaines hypothèses, l'idée de Hilbert était de

[1] Bertrand Russell, « Letter to Frege, » dans *From Frege to Gödel: A Source Book dans Mathematical Logic, 1879-1931*, éd. Jean van Heijenoort (Harvard, 1999), p. 125.

[2] David Hilbert, « The New Grounding of Mathematics, » dans *From Kant to Hilbert: A Source Book dans the Foundations of Mathematics*, éd. William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1922), p. 1119.

[3] ———, « From Mathematical Problems, » dans *From Kant to Hilbert: A Source Book dans the Foundations of Mathematics*, éd. William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1900), p. 1096.

fournir une méthode qui soit en mesure de répondre à ce présupposé.[4]

Par ailleurs, un point important à souligner est que le concept de *consistance* remplace celui d'*existence* chez Hilbert. En effet, plutôt que de définir les concepts mathématiques en fonction d'un objet mathématique qui existe (à l'instar de Frege), Hilbert est d'avis qu'un concept mathématique *existe* si et seulement si ce dernier est consistant.[5] Le concept d'existence tel qu'entendu chez Hilbert ne doit cependant pas être compris de manière métaphysique. Il suffit qu'un ensemble de concepts mathématiques ne soit pas inconsistant afin que les diverses interprétations de ce dernier puissent faire l'objet de la recherche mathématique.

Cet intérêt porté vers la consistance des concepts mathématiques se traduit chez Hilbert par un certain formalisme. Plutôt que d'insister sur l'existence des objets abstraits, Hilbert considère le *signe* comme étant l'objet mathématique.[6] Autrement dit, puisque les mathématiques se réduisent à des énoncés symboliques qui dépendent logiquement les uns des autres, il s'ensuit que la recherche mathématique se résume à l'étude des relations qui se trouvent entre ces différents symboles et énoncés.[7] En ce sens, les objets sur lesquels porte la recherche mathématique sont les symboles et les énoncés mathématiques. Cela dit, les symboles n'ont pas d'interprétation fixe. Par exemple, un symbole comme $R_1(x, y)$ peut référer à n'importe quelle relation binaire (par exemple, $x = y$, $x > y$, $x < y$, etc.). Puisque les concepts se définissent en fonction des relations qu'ils entretiennent avec d'autres concepts[8] et que les axiomes expriment ces relations, les axiomes permettent de *fixer* la référence des symboles[9]. Cependant, les axiomes ne fixent pas la référence de façon

[4] *Ibid.*, p. 1102
[5] *Ibid.*, p. 1105
[6] Hilbert (1922), *Op. cit.* note 2, p. 1121
[7] David Hilbert, « Foundations of Mathematics, » dans *From Kant to Hilbert: A Source Book dans the Foundations of Mathematics*, éd. William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1923), p. 1137.
[8] Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, éd. Gottfried Gabriel (Oxford: Basil Blackwell, 1980), p. 51.
[9] *Ibid.*, p. 40

univoque. Considérant que les axiomes expriment les propriétés des relations entre les concepts, comme la symétrie, la transitivité, la densité, etc., un axiome ou un ensemble d'axiomes détermine la classe des relations auxquelles un symbole pourra référer. Par exemple, l'axiome

(A0) $$(\forall x)(\forall y)(R_1(x,y) \supset R_1(y,x))$$

ajouté à la logique du premier ordre restreint l'interprétation de R_1 aux relations symétriques, sans pour autant déterminer de quelle relation symétrique il s'agit. À partir du moment où un système formel est consistant, les interprétations de ce dernier peuvent faire l'objet de la recherche mathématique.

Selon Hilbert, les paradoxes qui minaient les fondements de la connaissance mathématique étaient principalement dus à l'application injustifiée de la logique classique à des domaines infinis. L'objection de Brower et Weyl contre l'utilisation du tiers exclu en est un bon exemple.

$$\neg(\exists x)\neg Ax \supset (\forall x)Ax$$

Alors que la logique classique peut être utilisée de façon sécuritaire à l'intérieur d'un domaine fini, il ne faut pas assumer d'emblée que ses lois s'appliquent lorsque le domaine du discours est infini. En effet, la quantification sur un domaine infini (dénombrable ou non) pose problème. Dans le fini, il est possible d'avoir une procédure décidable, c'est-à-dire une liste d'instructions claires et précises qui permettent de d'obtenir un résultat en un nombre fini d'étapes, qui permet de vérifier que nos propositions ne sont pas contradictoires. Toutefois, rien ne nous garantit que la logique classique et le tiers exclu s'appliquent lorsque le domaine est infini puisqu'il est impossible de vérifier que les propositions fonctionnent pour tous les éléments du domaine. Ce n’est pas parce que tous les objets observés jusqu’à présent ne possèdent pas la propriété A que nécessairement tous les objets du domaine ne la possèdent pas.

Afin de justifier le passage du fini à l’infini et d'éviter l'utilisation injustifiée des lois de la logique classique, Hilbert introduit une théorie de la preuve (ce que l'on nommera le *finitisme* de Hilbert). Brièvement, l’idée était de déterminer les règles qui puissent garantir l'utilisation correcte des systèmes formels. La théorie de la preuve consiste à montrer qu'une conclusion s'obtient en un nombre fini d'étapes et à partir d'un nombre fini d'hypothèses à l'intérieur d'une théorie dont le système formel contient un nombre fini d'axiomes et de règles d'inférences.[10] Autrement dit, il s’agit de montrer par le biais d'une dérivation finie, laquelle repose fondamentalement sur la logique[11], qu'une conclusion dépend logiquement d'un ensemble fini d'hypothèses et d'un ensemble fini d'axiomes.[12] La preuve est caractérisée par le fait que chaque ligne de la dérivation est soit une hypothèse, un axiome du système formel ou une proposition obtenue par règle d'inférence à partir d'une proposition précédente qui répond elle aussi à l'une de ces trois conditions.[13] De fait, il devient possible de justifier en un nombre fini d'étapes qu'une conclusion dépend logiquement d'un nombre fini d'hypothèses à l'intérieur d'un système formel (fini) donné.

Cela dit, la théorie de la preuve s’insère dans le cadre de la méthode axiomatique. Cette méthode, qui se veut principalement l'étude des relations qui se trouvent entre les énoncés et les concepts d'une théorie, possède deux objectifs principaux, à savoir montrer la consistance interne d'une théorie et montrer que le système formel permet de prouver des choses par rapport à une interprétation donnée.[14] Les axiomes d'un système sont des propositions qui expriment des relations entre des concepts ou des énoncés. La méthode axiomatique consiste à formaliser de façon syntaxique les relations qui se trouvent entre les différents symboles et concepts d'une théorie. Un système formel comprend une syntaxe (variables propositionnelles, opérateurs, symboles, constantes), un ensemble d'énoncés bien formés, un ensemble d'axiomes, un ensemble de

[10] Hilbert (1900), *Op. cit.* note 3, p. 1099

[11] *Id.* et David Hilbert, « On the Concept of Number, » dans *From Kant to Hilbert: A Source Book dans the Foundations of Mathematics*, éd. William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1900), p. 1138.

[12] David Hilbert, « The Foundations of Mathematics, » dans *From Frege to Gödel: A Source Book dans Mathematical Logic, 1879-1931*, éd. Jean van Heijenoort (Harvard, 1928), p. 464

[13] *Ibid.*, p. 465.

[14] Hilbert, « On the Concept of Number. » dans *From Kant to Hilbert: A Source Book dans the Foundations of Mathematics*, éd. William Ewald (Oxford: Clarendon Press, 1900), pp. 1092-1093.

règles d'inférence et un ensemble de théorèmes. Les théorèmes d'une théorie étant des énoncés qui dérivent logiquement des axiomes, il s'ensuit que les axiomes sont les propositions à partir desquelles les théorèmes d'une théorie peuvent être prouvés.[15]

D'une part, la méthode axiomatique avait pour but de montrer la consistance interne d'une théorie, c'est-à-dire montrer la consistance syntaxique du système formel. Alors que l'axiomatisation fournit une procédure de décidabilité pour les théorèmes, à savoir qu'en vertu du caractère fini du système formel et de la preuve, il est possible d'avoir une liste d'instructions claires et précises qui permettent d'énumérer tous les théorèmes en fonction de leur longueur, la preuve de consistance syntaxique requiert une procédure de décidabilité pour les non théorèmes. En effet, la preuve de consistance syntaxique d'un système K nécessite que l'on montre que celui-ci ne permet pas de dériver de contradiction:

$$\nvdash_K \bot$$

Autrement dit, il faut montrer de façon purement syntaxique que les axiomes et les règles d'inférence ne permettent pas de dériver de contradiction. Néanmoins, ces preuves de consistance peuvent être relatives à la consistance d'un autre système. En effet, dans certains cas il est possible de créer un morphisme (*mapping*) d'une théorie K à une théorie Γ de façon à montrer que si K est inconsistante, alors Γ le sera aussi (ou à l'inverse, si Γ est consistante, alors K l'est aussi). Chez Hilbert, plusieurs preuves de consistance étaient relatives à celle de l'arithmétique, comme dans le cas de l'interprétation arithmétique des axiomes de la géométrie. En d'autres termes, il s'agit d'opérer une transformation d'un système à l'autre de manière à prouver la consistance des axiomes de la géométrie en fonction de celle (présupposée) de l'arithmétique.[16] Considérant que plusieurs preuves de consistance étaient relatives à la consistance de l'arithmétique, on comprend l'importance accordée par Hilbert à la preuve de consistance de l'arithmétique, qui prend la 2e place dans la liste des 23 problèmes de Hilbert.

[15] Hilbert (1922), *Op. cit.* note 2, p.1125

[16] Hilbert (1928), *Op. cit.* note 12, p.471

Outre la preuve de consistance syntaxique du système, Hilbert cherchait aussi à montrer que celui-ci est *complet*. Cette notion de *complétude*, à savoir montrer qu'un système formel est adéquat afin de prouver des choses par rapport à une interprétation donnée (par exemple, prouver toutes les propositions vraies de la géométrie), est ce que l'on nomme la complétude sémantique d'un système. La complétude sémantique consiste à dire que toutes les propositions vraies d'une interprétation sont des théorèmes du système formel. Même si à l'époque Hilbert ne possédait pas tous les outils de la logique moderne, la complétude sémantique équivaut à montrer que si une proposition A est vraie pour une interprétation M, alors A est un théorème du système formel K:

$$\vDash_M A \Rightarrow \ \vdash_K A$$

Par surcroît, l'idée était aussi de montrer que le système formel, en plus d'être consistant syntaxiquement, était aussi consistant relativement à l'interprétation que l'on en fait. En effet, un système formel n'est pas adéquat pour représenter une théorie si l'interprétation, malgré la consistance syntaxique du système formel, est incohérente (contradictoire dans le modèle). L'interprétation d'un système axiomatique consiste à donner une signification aux symboles et aux relations, c'est-à-dire qu'il s'agit de spécifier un domaine à l'intérieur duquel les relations exprimées par les axiomes sont vraies. Ce type de considération, à savoir montrer que si une proposition A est un théorème de K, alors A sera aussi vraie pour ne interprétation M, équivaut en termes modernes à la preuve d'adéquation du système (*soundness*) :

$$\vdash_K A \Rightarrow \ \vDash_M A$$

En somme, même si les termes et stratégies que l'on retrouve en logique moderne ne se retrouvaient pas chez Hilbert, il n'en demeure pas moins que la base était déjà présente. En formalisant les relations entre les concepts d'une théorie, il devient possible d'étudier sa consistance interne et de s'assurer que le système (syntaxe) représente adéquatement l'interprétation (sémantique), et vice versa.

3. Axiomatisation et logique moderne

Malgré le fait qu'il ne soit pas toujours possible de faire des preuves purement syntaxiques de consistance[17], il n'en demeure pas moins que la notion de *modèle* permet de contourner le problème. En effet, de par la construction des modèles, une théorie axiomatisée qui possède au minimum un modèle est d'emblée consistante. Un modèle $M =< U, R, a >$ est une structure $S =< U, R >$, où U est un univers du discours ($U \neq \varnothing$) et R un ensemble de relation(s) à l'intérieur de U, à laquelle on ajoute une fonction a qui assigne des valeurs de vérité aux propositions dans U. Le modèle nous assure la consistance puisque par définition si une proposition A est vraie, alors sa négation est fausse. De fait, il est impossible d'avoir une proposition A qui est à la fois vraie et fausse en même temps:

$$\vDash_M A \Leftrightarrow \nvDash_M \neg A$$

Cela dit, la notion de modèle nous amène à faire une distinction entre *vérité* et *validité*. Alors qu'une proposition A est dite *vraie* dans un modèle M si la fonction a lui assigne la valeur de vérité *vrai* (i.e. $\vDash_M A \Leftrightarrow a_M(A) = \mathrm{T}$), une proposition est dite *valide* (logiquement) si et seulement si elle est vraie pour toute interprétation M:

$$\vDash A \Leftrightarrow \forall M, \vDash_M A$$

La stratégie afin de montrer qu'un système formel K est consistant est de montrer que les règles d'inférence et que les axiomes de K préservent la validité (ou la vérité) dans M. Il s'agit là de la preuve d'adéquation du système (*soundness*), à savoir montrer que si A est une conséquence syntaxique de K, alors A est une conséquence sémantique de M:

$$\vdash_K A \Rightarrow \vDash_M A$$

Autrement dit, en montrant que les règles et les axiomes de K préservent la vérité dans une interprétation M, on en vient à montrer

[17] Cf. second théorème d'incomplétude de Kurt Gödel, « On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, » dans *From Frege to Gödel: A Source Book dans Mathematical Logic, 1879-1931*, éd. Jean van Heijenoort (Harvard, 1931).

que tous les théorèmes de K sont vrais dans M, et donc que si A est un théorème de K, alors A est vrai dans M. Cela permet de montrer la consistance de K puisque toute contradiction à l'intérieur de ce dernier se retrouverait aussi dans le modèle. En effet, puisque M est un modèle de K, il s'ensuit que si K est inconsistant, alors la contradiction se retrouvera aussi dans M:

$$\vdash_K \bot \Rightarrow \models_M \bot$$

Toutefois, par construction de M une telle situation est impossible puisqu'il est impossible d'avoir à la fois A et $\neg A$. vrais dans M. Or, puisque M est un modèle de K et que $\not\models_M \bot$ il est possible de conclure par *modus tollens* que $\nvdash_K \bot$, et donc que K est consistant.[18]

En vertu de la distinction entre *vérité* et *validité*, on retrouve trois types de propositions à l'intérieur d'un modèle, en l'occurrence les propositions tautologiques, contradictoires et *satisfaisables*, c'est-à-dire qui peuvent être vraies ou fausses relativement à une interprétation. Or, l'intérêt des propositions satisfaisables d'un point de vue formel est que l'ajout de celles-ci à certains systèmes de base permet de créer des théories axiomatisées. En effet, l'axiomatisation consiste à prendre un système initiale K_0, comme par exemple la logique du premier ordre, et à ajouter des axiomes (propositions satisfaisables) de façon à préciser l'ensemble des structures dans lesquelles le système formel pourra être interprété. Par exemple, la logique du premier ordre à laquelle on ajoute l'axiome

(A1) $$(\forall x)(R_1(x,x))$$

ne peut référer qu'à une structure à l'intérieur de laquelle se trouve une relation réflexive. De fait, en ajoutant des propositions

[18] Un point important à souligner est que même s'il est possible de statuer sur le fait que les contradictions ne sont pas des théorèmes des systèmes formels qui admettent des modèles, cela ne donne pas pour autant une procédure de décidabilité pour les non théorèmes. Autrement dit, ce n'est pas parce qu'un système possède un modèle qu'il est décidable. Le modèle permet de montrer que les contradictions ne sont pas des théorèmes, mais cela ne permet pas de décider pour toute proposition s'il s'agit d'un théorème ou non. La logique du premier ordre, par exemple, possède un modèle (plusieurs modèles) sans pour autant être décidable. Cela dit, une *théorie* de premier ordre peut néanmoins être décidable.

satisfaisables à titre d'axiomes à un système K_0 on précise l'ensemble des domaines et des relations auxquels pourront référer les symboles du système formel.

L'axiomatisation consiste à prendre un système de base, souvent construit à partir de la logique propositionnelle, qui rendra compte de certains schémas d'inférences valides. En ajoutant des énoncés satisfaisables comme axiomes à K_0, on créera des extensions du système de base, dont les théorèmes seront les conséquences des axiomes à l'intérieur du système initial. Autrement dit, si l'on construit $K_1 = K_0 \cup \Gamma$, où Γ est un ensemble d'axiomes, alors tous les théorèmes de K_1 seront des conséquences de Γ dans K_0:

$$\vdash_{K_1} A \Leftrightarrow \ \Gamma \vdash_{K_0} A$$

Par ailleurs, la relation entre K_0 et K_1 est telle que

$$K_0 \subset K_1$$

c'est-à-dire que K_1 est une extension de K_0 et donc tout théorème du système de base sera aussi un théorème de K_1. Toutefois, l'inverse n'est pas vrai puisque K_1 aura des théorèmes qui ne sont que des propositions satisfaisables pour K_0.

Outre la relation syntaxique entre les théories, on trouve aussi certaines relations sémantiques entre les modèles. Dans la plupart des cas, le système initial aura un modèle standard qui rend compte de la validité propositionnelle (de la relation de conséquence sémantique) à l'intérieur de celui-ci. Ce modèle standard ne sera toutefois pas nécessairement canonique, c'est-à-dire que tous les modèles d'une théorie ne seront pas nécessairement isomorphes. Néanmoins, considérant que le modèle standard vise à rendre compte de la validité propositionnelle d'une théorie, il est souvent possible de le modifier, c'est-à-dire de spécifier le domaine et les relations de *U* afin d'avoir une définition plus précise de la vérité dans ce modèle.

Prenons un exemple pour illustrer ce point. Dans le cas de la logique du premier ordre, il y a un modèle M_0 qui rend compte seulement de la validité propositionnelle. Puisque cette dernière est complète (au sens large), l'ensemble des théorèmes de la logique du premier ordre correspond exactement aux propositions valides dans M_0 :

(complétude) $\vdash_{K_0} A \Leftrightarrow \ \vDash_{M_0} A$

Comme nous l'avons vu, il est possible d'ajouter des axiomes à K_0, lesquels sont satisfaisables dans M_0, de façon à obtenir une extension qui exprime des relations plus précises. Dans le cas où $K_1 = K_0 \cup \Gamma$, nous avons le résultat suivant, à savoir que si A est un théorème de K_1, alors A est une conséquence sémantique de Γ dans K_0 (en vertu de la complétude du calcul des prédicats) :

$$\Gamma \vDash_{M_0} A$$

Cela dit, si K_1 est consistant, alors le système aura d'autres modèles dans lesquels ses théorèmes seront vrais. De fait, K_1 aura un modèle M_1, ce qui n'implique toutefois pas que K_1 soit complet par rapport à M_1. Tout ce qui est vrai dans M_1 sera une conséquence sémantique de Γ dans M_0 :

$$\vDash_{M_1} A \Leftrightarrow \ \Gamma \vDash_{M_0} A$$

Nous avons pris un exemple où le modèle de base conserve la validité propositionnelle. Or, les mêmes remarques s'appliquent lorsque le modèle est plus restreint, et donc nous aurions pu prendre deux modèles arbitraires M_i et M_j où l'on aurait parlé de vérité plutôt que de validité propositionnelle. À partir du moment où un modèle M_j se contruit à partir d'un modèle M_i, auquel on ajoute certaines relations ou que l'on spécifie le domaine, on obtient une relation sémantique entre les deux modèles puisque ceux-ci partagent la même structure de base. Cela se comprend en fonction du fait que les modèles partageront une partie du domaine ou des relations.

En bref, les relations entre les modèles et les systèmes formels sont tributaires du fait qu'il est possible d'avoir des extensions construites à partir d'un modèle (ou d'un système) initial plus général, ce qui rend possible les *extensions syntaxiques* et les *extensions sémantiques*. En vertu de ces extensions et dépendamment de l'adéquation et de la complétude des théories, il devient possible de faire une multitude de liens entre les conséquences du système initial et celles de l'extension. Notamment, ces extensions permettent d'étudier la dépendance entre les propositions, la dépendance entre les théories et permettent aussi de délimiter le domaine auquel peut s'appliquer une théorie.

Un point intéressant de l'axiomatisation est qu'elle permet d'étudier les relations de dépendance entre les propositions, et de façon plus générale entre les théories. En effet, à partir du moment où une théorie K_1 peut être axiomatisée dans le cadre d'un système initial K_0 (où $K_1 = K_0 \cup \Gamma$ et $\Gamma = \{A_1, \ldots, A_n\}$. un ensemble quelconque d'axiomes), il devient possible d'étudier les relations de dépendance entre les axiomes (ou de façon plus générale, les relations entre les énoncés satisfaisables dans M_0 modèle de K_0). Par exemple, en vertu des extensions sémantiques et syntaxiques, il devient possible d'étudier la relation de dépendance entre $\Gamma' = \{A_1, \ldots, A_{n-1}\}$.. et A_n à l'intérieur du système formel K_0. Puisque K_0 possède un modèle M_0, il suffit de trouver un modèle M_1 extension de M_0 qui satisfait l'énoncé $\neg(\Gamma' \supset A_n)$ (ou à l'inverse, $\neg(A_n \supset \Gamma')$). Dans une telle situation, c'est-à-dire où $\vDash_{M_1} \Gamma'$ et $\nvDash_{M_1} A_n$ (ou l'inverse), il est possible de conclure que Γ' et A_n sont indépendants dans K_0:

(adéquation) $\Gamma' \vdash_{K_0} A_n \Rightarrow \Gamma' \vDash_{M_0} A_n$

(ext. sém.) $\Gamma' \vDash_{M_0} A_n \Rightarrow \Gamma' \vDash_{M_1} A_n$.

($\vDash_{M_1}$) $\nvDash_{M_1} \Gamma'$ ou $\vDash_{M_1} A_n$.

Or, s'il est possible de trouver un modèle M_1 où à la fois Γ' est vrai et A_n est faux, il est possible de conclure par *modus tollens* que A_n n'est pas une conséquence de Γ' dans K_0, et donc que ceux-ci sont indépendants. Plus précisément, l'exemple montre que la proposition A_n est indépendante de l'ensemble de propositions Γ'. En plus de permettre d'étudier les relations entre les propositions, la méthode axiomatique permet aussi d'étudier la relation de dépendance entre les ensembles de propositions. En ce sens, si deux théories différentes sont axiomatisées à partir d'un même système formel initial, il devient possible d'étudier la dépendance entre les théories, c'est-à-dire observer si l'une est la conséquence de l'autre, ou encore voir quels axiomes doivent être ajoutés à l'une des théories afin que les deux soient équivalentes (ou que l'une soit la conséquence de l'autre). Autrement dit, l'axiomatisation permet de hiérarchiser les théories commensurables, c'est-à-dire celles qui ont une structure minimale en commun, puisqu'elle permet de montrer que certaines théories sont plus fortes, plus faibles, équivalentes ou simplement indépendantes face à d'autres théories. L'étude de la dépendance entre les propositions permet de vérifier que les axiomes d'une théorie sont indépendants (ou non) des axiomes d'une autre théorie.

D'un point de vue théorique, l'étude de la dépendance entre les propositions (ou ensembles de propositions) est fort pertinente. En effet, cela permet entre autres de répondre à la deuxième partie du présupposé de Hilbert, à savoir que tout problème possède une solution. Lorsqu'une théorie K_1 est axiomatisée, il devient possible de prouver que certaines conclusions ne peuvent pas être obtenues à partir d'un ensemble d'hypothèses dans le cadre théorique de K_1. Tel que susmentionné, il suffit de trouver un modèle de K_0 (K_1 extension de K_0) où les hypothèses sont vraies mais la conclusion fausse. De fait, la méthode axiomatique fournit un outil puissant d'un point de vue conceptuel puisqu'elle permet de montrer que certaines conclusions ne peuvent pas être obtenues dans certains cadres théoriques. Ainsi, la réorientation du problème devient possible, c'est-à-dire que l'on peut tenter de trouver d'autres hypothèses, voire d'autres théories, qui permettront d'obtenir la conclusion désirée. En ce sens, la méthode axiomatique fournit une manière d'observer avec précision la portée de nos théories en permettant de montrer que certains raisonnements nécessitent des cadres théoriques précis.

Outre les biens faits théoriques que la méthode axiomatique apporte au niveau de l'étude des relations entre les théories et relativement à l'impossibilité de certains raisonnements à l'intérieur d'un cadre théorique donné, la formalisation permet aussi de délimiter l'objet de la théorie. En effet, étudier les modèles possibles d'une théorie équivaut à délimiter le champ à l'intérieur duquel celle-ci peut être appliquée. Une fois axiomatisée, différents modèles de la théorie peuvent être construits. Or, en construisant différents modèles, on change le domaine et on fait varier l'ensemble des relations qui s'appliquent à l'intérieur de l'univers du discours. Ce faisant, il est possible de statuer quant à savoir quels sont les modèles d'une théorie et quels sont ceux qui ne le sont pas. Autrement dit, on parvient à déterminer une classe de domaines et de relations dans lesquels la théorie est consistante. En ce sens, l'étude des modèles d'un système formel permet de délimiter son objet, c'est-à-dire de préciser les interprétations que l'on peut faire du système. Considérant que les symboles n'ont pas d'interprétation fixe, il est primordial de vérifier dans quelles conditions le système formel est consistant, et par le fait même déterminer quelles sont les interprétations que l'on ne peut pas faire du système. Par exemple, le système construit à partir de la logique du premier ordre à laquelle on ajoute l'axiome (A1) ne pourrait pas être interprété dans un modèle où $R_1(x, y) = x > y$ puisque la relation *être plus grand que* n'est pas réflexive. Les modèles d'un tel système formel devront donc nécessairement mettre en jeu une relation R_1 réflexive. Bref, l'axiomatisation permet de délimiter l'objet d'une théorie dans la mesure où un ensemble d'axiomes restreint la classe des modèles à l'intérieur desquels une théorie peut s'interpréter. Cela n'implique toutefois pas que le système formel engendre sa propre interprétation. Étant donné que les axiomes expriment les propriétés des relations, il s'ensuit qu'un ensemble d'axiomes a une incidence directe sur la classe des relations auxquelles le système peut référer.

4. Axiomatisation et physique

La méthode axiomatique, qui consiste à formaliser les relations qui se trouvent entre les énoncés et les concepts d'une théorie, est apparue en vue de fournir des fondements solides à la connaissance mathématique. Comme nous l'avons vu, cette méthode détermine les schémas d'inférences valides pour une théorie donnée et ainsi assure la nécessité des raisonnements. Or, outre le fait que cette méthode ait été développée en vue d'assurer la pérennité de la connaissance mathématique, il n'en demeure pas moins que Hilbert voyait là aussi un outil pouvant être appliqué à la physique et ainsi solidifier les bases épistémiques de cette discipline. Après avoir vu brièvement l'émergence de la méthode axiomatique ainsi que ses caractérisations d'un point de vue plus moderne, il nous reste à mettre en lumière le rôle que Hilbert lui accordait en physique. En plus de mettre en évidence la conception que se faisait Hilbert de l'axiomatisation de la physique, l'objectif est de montrer son intérêt théorique mais surtout les limites épistémiques qu'elle permet de déterminer. La présente section n'abordera pas l'axiomatisation de la physique en ce qui concerne son formalisme mais portera plutôt sur l'importance accordée par Hilbert au 6^{e} problème, à savoir l'axiomatisation de toute la physique. Il s'agira de l'épistémologie sous-jacente à l'approche de Hilbert et de l'intérêt qu'il voyait dans le développement d'un tel programme.[19]

Parmi la fameuse liste des 23 problèmes de Hilbert se trouve en sixième position l'axiomatisation de toute la physique. Considérant le succès de l'application de la méthode axiomatique en géométrie, Hilbert y voyait là une possibilité d'adopter le même *point de vue axiomatique*[20], selon lequel la structure logique d'un discours peut s'exprimer par un ensemble d'axiomes, à la physique.[21] En effet, puisque, au même titre qu'en géométrie, la connaissance physique provient d'une intuition spatiale, le point de vue axiomatique, qui consiste en l'axiomatisation des relations que l'on perçoit[22], peut être appliqué en physique vu son succès en géométrie. Cela dit, l'idée derrière l'axiomatisation de la physique était la même que par rapport à la connaissance mathématique, c'est-à-dire que le but était de fournir des fondements solides à la connaissance physique.[23]

L'objectif de Hilbert en ce qui concerne l'axiomatisation de la physique était le même que pour toute application de la méthode axiomatique, à savoir trouver le plus petit ensemble (consistant) d'axiomes qui permet de dériver par règles d'inférence la totalité de la connaissance physique. On retrouve dans les travaux de Hilbert (1915,1917) sur les fondements de la physique une application directe de la méthode axiomatique. En effet, l'auteur se sert de la méthode axiomatique afin d'étudier la dépendance entre les propositions,

---

[19] Pour un examen détaillé du formalisme de Hilbert en physique, voir Leo Corry, *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)* (Kluwer, 2004).

[20] Ulrich Majer, « Hilbert's Axiomatic Approach to the Foundations of Science - a Failed Research Program? » dans *Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930*, éd. V. F. Hendricks J. Lützen, K.F. Jorgensen et S.S. Pedersen (Springer, 2006), p. 158.

[21] *Ibid.*, p. 164

[22] Dans ce cas-ci, des relations physiques que l'on perçoit dans le monde.

[23] Le succès de la méthode axiomatique en géométrie réside entre autres dans le fait que son interprétation arithmétique est consistante. Autrement dit, la géométrie est solidement fondée d'un point de vue épistémologique puisqu'il est possible d'en faire une description mathématique. L'idée sera la même pour l'axiomatisation de la physique.

comme par exemple dans le cas où il cherche à montrer que les phénomènes électrodynamiques sont l'effet de la gravitation[24] et que les équations de Maxwell sont la conséquence des équations gravitationnelles[25]. En ce sens, Hilbert voyait dans l'axiomatisation de la physique la possibilité de mettre à l'œuvre la méthode axiomatique et ainsi étudier la structure logique interne aux théories physiques. Or, outre l'intérêt par rapport aux applications susmentionnées de la méthode axiomatique, Hilbert voyait dans l'axiomatisation de la physique la possibilité d'établir l'unité de la connaissance. Effectivement, Hilbert cherchait à fournir une théorie unifiée qui, par le biais des équations du champ (*world equations*), permettrait de déduire l'ensemble de la connaissance physique. En d'autres termes, Hilbert voyait les différentes théories physiques comme étant des branches de la mécanique, à savoir que l'ensemble de la connaissance physique pouvait se réduire aux axiomes de la mécanique[26] :

> As one can see, the few simple assumptions expressed in axioms I and II [the world equations] suffice with appropriate interpretation to establish the theory: through it not only are our views of space, time, and motion fundamentally reshaped in the sense explained by Einstein, but I am also convinced that through the basic equations established here the most intimate, presently hidden processes in the interior of the atom will receive an explanation, and in particular that generally a reduction of all physical constants to mathematical constants must be possible — even as in the overall view thereby the possibility approaches that physics in principle becomes a

---

[24] David Hilbert, « The Foundations of Physics (First Communication), » dans *The Genesis of General Relativity*, éd. Jürgen Renn (Springer (2007), 1915), p. 1005.

[25] *Ibid.*, p. 1012

[26] Jürgen Renn et John Stachel, « Hilbert's Foundations of Physics: From a Theory of Everything to a Constituent of General Relativity, » dans *The Genesis of General Relativity*, éd. Jürgen Renn (Springer, 2007), p. 864.

> science of the type of geometry: surely the highest glory of the axiomatic method...[27]

Ce passage, qui conclut la première communication de Hilbert sur les fondements de la physique, est extrêmement révélateur. On y voit non seulement l'optimisme de Hilbert quant à la possibilité d'obtenir une théorie unifiée de la physique qui, à partir des équations du champ, permettrait d'expliquer jusqu'aux comportements des atomes, mais on y voit aussi des indices relativement à son attitude épistémique. L'ampleur du sixième problème y est mise en évidence dans la mesure où l'axiomatisation de la physique vise à assurer une certaine forme d'objectivité de par la description mathématique du monde, mais aussi prétend à pouvoir réduire l'ensemble de la connaissance physique à un groupe restreint de relations. Dans la première partie du passage, Hilbert mentionne que seuls deux axiomes, lorsque interprétés correctement, permettent de rendre compte de la conception einsteinienne de l'espace-temps, alors que vers la fin il est question de la possibilité de réduire toutes les constantes physiques à des constantes mathématiques. Or, ces deux passages marquent clairement l'importance épistémologique d'unifier la connaissance physique et de pouvoir l'interpréter mathématiquement de façon à pouvoir en solidifier les fondements. Cela dit, deux questions importantes méritent d'être soulevées concernant le statut de la connaissance, à savoir (1) *quelles sont les relations qui se trouvent entre le scientifique, la théorie et le monde ?* et (2) *quel est le statut de la connaissance qui résulte de l'application de la méthode axiomatique ?*

D'emblée, la méthode axiomatique ne consiste pas en une activité *a priori* à partir de laquelle il serait possible de dériver un éventail de connaissances. Au contraire, la méthode axiomatique ne sert pas à *créer* des théories mais se veut plutôt un outil qui permet d'examiner la structure logique des théories existantes.

> Hilbert conceived the axiomatization of physics not as a definite foundation that has to *precede* empirical research and theory formation, but as a *post-hoc* reflection on the results of such investigations with the aim of clarifying the

[27] Hilbert (1915), *Op. cit.* note 24, p. 1015

> logical and epistemological structure of the assumptions, definitions, etc., on which they are built.[28]

Dans le cas de la physique, l'idée était de formuler des axiomes qui soient en mesure de rendre compte de la connaissance physique actuelle.[29] Cette conception de la méthode axiomatique se comprend en fonction de la réponse que Hilbert fait à la question concernant la source de la connaissance. Même si la connaissance physique est *a priori* dans la mesure où elle provient de l'activité de la raison, il n'en demeure pas moins que la source de la connaissance est en grande partie *empirique*.[30] Or, cela n'implique pas que les théories scientifiques ou que les axiomes soient *dérivés* ou *inférés* du monde empirique. Au contraire, l'intuition spatiale fournit à la raison le matériau à partir duquel il est possible de construire la connaissance. En ce sens, la méthode axiomatique à elle seule ne peut pas produire de connaissance du monde empirique. Il s'agit plutôt d'un outil qui, une fois une théorie construite, permet d'étudier sa légitimité.

Toutefois, considérant que la source ultime de la connaissance physique est le monde empirique, ne serait-il pas juste d'affirmer que nos théories scientifiques sont conformes à la réalité ? En d'autres termes, étant donné que les axiomes expriment des relations perçues par notre intuition spatiale, ne serait-il pas juste de conclure que nos systèmes axiomatiques correspondent à la structure physique du monde ? En un mot, la réponse est *non*. Comme l'a judicieusement souligné Hempel, l'activité scientifique ne consiste pas à *inférer* des théories de l'expérience empirique mais plutôt à les inventer afin d'en rendre raison. Si les théories scientifiques étaient directement inférées du monde empirique, comment serait-il possible de se tromper ? Au même titre que l'homme de science n'a pas de lien direct avec le monde empirique, les théories et relations exprimées par les axiomes ne correspondent pas à la structure physique du monde mais plutôt à la structure de la compréhension que nous avons de celui-ci.

---

[28] Renn et Stachel (2007), *Op. cit.* note 26, p. 863
[29] *Ibid.*, pp. 864-5
[30] Ulrich Majer et Tilman Sauer, « Intuition and the Axiomatic Method dans Hilbert's Foundations of Physics, » dans *Intuition and the Axiomatic Method*, éd. E. Carson et R. Huber (Springer, 2006), p. 222.

D'une part, il y a toujours une certaine prégnance théorique au niveau de la recherche scientifique, c'est-à-dire que toute recherche scientifique est guidée par une hypothèse ou par une théorie donnée. En ce sens, l'homme de science présuppose que le monde empirique possède une certaine structure et tente par la suite de confirmer cette intuition. De fait, considérant la place de l'hypothèse dans l'activité scientifique, il n'y a pas moyen de savoir si celle-ci correspond exactement au monde empirique. Au mieux, une hypothèse ou une relation exprimée par un axiome peut être confirmée. Dans le cas où les données empiriques contredisent une hypothèse, il devient possible d'affirmer par *modus tollens* que celle-ci est fausse. Toutefois, ce n'est pas parce qu'une relation exprimée par un axiome est confirmée par l'expérience empirique que celle-ci est vraie. Il s'agirait là d'une erreur de raisonnement qui consiste à affirmer le conséquent. La relation entre la théorie scientifique et le monde ne consiste donc pas en une correspondance exacte mais plutôt en une approximation de ce que *pourrait être* la réalité.

Par ailleurs, l'homme de science n'a aucun accès direct ou privilégié aux phénomènes.[31] En effet, toute connaissance empirique est médiatisée par nos sens et par la conception que nous avons du monde. Or, nos sens sont limités et rien ne nous garantit que notre compréhension du monde serait la même si nous avions d'autres facultés sensorielles plus ou moins développées. Le point soulevé ici est que la connaissance du monde physique ne porte pas sur sa structure en tant que telle mais correspond plutôt au cadre à l'intérieur duquel nous percevons la réalité. Dès lors, il est vain de croire que les axiomes physiques, lesquels proviennent de notre intuition spatiale, expriment la structure du monde empirique. Les théories scientifiques reflètent la compréhension que nous avons de la réalité : les structures ne sont pas dans le monde mais bien dans notre conception du monde.

Du point de vue axiomatique, notre connaissance se traduit par les différents modèles et interprétations que nous construisons. Cependant, un système axiomatique possède une infinité de modèles. Or, puisque ni le monde empirique ni le système formel n'engendrent

[31] Yvon Gauthier, « The Use of the Axiomatic Method in Quantum Physics, » *Philosophy of science* 38 (1971), p. 432.

eux-mêmes leur propre interprétation, comment pourrions-nous affirmer avec certitude que, parmi l'infinité de modèles, il y a un et un seul modèle *vrai*, c'est-à-dire une seule interprétation exacte de la réalité ? Le fait est que certains modèles seront privilégiés par rapport à d'autres en vertu de la validation empirique qu'ils auront reçue. Toutefois, en aucun cas nous ne pourrons conclure qu'il s'agit *du* vrai modèle qui correspond exactement au monde empirique puisque rien logiquement ne nous permet de conclure une telle chose.

Cela dit, une telle conception de la connaissance n'implique pas que l'objectivité soit impossible en science. Au contraire, il y a certains critères d'objectivité qui permettent de justifier qu'une interprétation soit privilégiée plutôt qu'une autre. Parmi ces critères se trouvent entre autres ceux de testabilité, comme la variation des conditions d'une expérience, le nombre élevé de résultats significatifs qui confirment l'hypothèse, la possibilité de reproduire l'expérience, etc. Mais outre les critères d'objectivité relatifs aux conditions dans lesquelles sont faites les expériences, on trouve chez Hilbert le désir d'obtenir une certaine objectivité par le biais de l'application de la méthode axiomatique. En effet, dans une perspective épistémologique, la méthode axiomatique appliquée à la physique est un moyen de graduellement faire le passage de la connaissance empirique subjective à l'objective.

Pour formuler cela dans les termes de Hilbert, il est nécessaire de faire la différence entre le *caractère empirique* de la connaissance et les questions qui concernent sa *validité exacte*.[32] Le développement d'une théorie se veut la construction mentale d'un *cadre de concepts* alors que l'application de ce cadre aux phénomènes empiriques se règle par certains critères d'objectivité en science (e.g., les critères de testabilité). Le caractère empirique des axiomes provient du fait que ceux-ci peuvent être validés ou invalidés par l'expérience.[33] Toutefois, malgré que les théories scientifiques aient un caractère empirique, c'est-à-dire qu'elles soient testables et visent à expliquer certains phénomènes, il n'en demeure pas moins qu'il nous est impossible de statuer quant à savoir si les structures exprimées par nos systèmes axiomatiques correspondent exactement à celles des phénomènes. De

[32] Majer et Sauer (2006), *Op. cit.* note 30, p. 224
[33] *Ibid.*, p. 225

fait, l'activité scientifique requiert des critères d'objectivité qui permettront de justifier l'acceptation d'une théorie plutôt qu'une autre.

En plus de ces critères d'objectivité, la méthode axiomatique est un outil qui permet d'atteindre une certaine objectivité en science dans la mesure où elle permet de dégager les présupposés subjectifs implicites à nos théories scientifiques. L'épistémologie véhiculée par le programme de Hilbert est une forme d'*épistémologie récursive*, où l'évolution de la connaissance scientifique se traduit par une sorte de *purification* des modèles, c'est-à-dire par le découvrement des présupposés subjectifs et anthropomorphiques relatifs à notre perception du monde.

> As time proceeds, this part [the *a priori part*] diminishes, because in the process of logical investigations and experimental testing we reveal more and more of these tacit assumptions, in particular those *anthropomorphic* presuppositions of which we were not aware previously, but on which our theories were built. This inquiry is a *recursive* process, in which we proceed in the direction of an objective (i.e., less subjective) knowledge of nature on the basis of what we have achieved so far. It is a slow an presumably unending process.[34]

Voyons un exemple afin d'éclairer ce point. Une façon de le comprendre est de voir pourquoi Hilbert était prêt à rejeter la géométrie euclidienne.[35] Pour Hilbert, même si cette géométrie est conforme à nos intuitions spatiales, il n'en demeure pas moins que rien ne garantit sa *validité exacte*. En fait, l'axiomatisation de la physique permet de dégager le présupposé anthropomorphique euclidien :

> According to my exposition, physics is a four-dimensional pseudo-geometry, whose metric $g_{\mu\nu}$ is connected to the electromagnetic quantities, i.e. to the matter, by the basic equations (4) and (5) of my first communication. With this

[34] *Ibid.*, p. 229

[35] *Ibid.*, p. 228

> understanding, an old geometrical question becomes ripe for solution, namely whether and in what sense Euclidean geometry — about which we know from mathematics only that it is a logical structure free from contradictions — also possesses validity in the real world.[36]

Autrement dit, l'axiomatisation de la physique nous permet de nous dégager de la géométrie euclidienne, qui, provenant de notre intuition spatiale, était jusqu'à présent un présupposé anthropomorphique implicite à notre conception de la structure du monde empirique. Or, en axiomatisant la physique, il devient possible de se dégager de ce présupposé et ainsi atteindre une connaissance plus objective.

> By revoking the Euclidean geometry as a general presupposition of physics, the theory of relativity maintains instead that geometry and physics have identical character and are based as *one* science on a common foundation.[37]

En ce sens, l'axiomatisation de la physique permet d'atteindre une forme d'objectivité dans la mesure où, en se dégageant des présupposés subjectifs, il devient possible d'unifier la connaissance en montrant que la géométrie peut être dérivée des axiomes de la mécanique.[38] L'évolution de la connaissance se fait donc par le dévoilement et le rejet des présupposés subjectifs, ce qui peut se voir dans l'exemple concernant la géométrie euclidienne, afin d'en arriver à une conception plus *objective* de la physique.

---

[36] David Hilbert, « The Foundations of Physics (Second Communication), » dans *The Genesis of General Relativity*, éd. Jürgen Renn (Springer (2007), 1917), p.1025.

[37] Hilbert (1917), *Op. cit.* note 36, p. 1026

[38] Il ne s'agit pas ici de discuter de la question relative au succès ou à l'échec d'une telle entreprise. À ce jour, il n'y a pas de théorie unifiée de la physique et la question eu égard à la possibilité même d'une telle entreprise reste ouverte. Quoi qu'il en soit, l'objectif ici n'est pas de discuter de la réalisation d'un tel projet mais plutôt d'expliciter l'épistémologie qui, chez Hilbert, allait de pair avec la méthode axiomatique et l'axiomatisation de la physique.

Finalement, la méthode axiomatique permet aussi d'atteindre l'objectivité en science puisqu'elle permet la description mathématique du monde.[39] En effet, en formalisant une théorie, il devient possible d'en faire une interprétation mathématique, comme dans le cas de l'interprétation arithmétique de la géométrie, et ainsi lui fournir une justification plus solide, quoi que cela ne suffise pas à garantir son objectivité. La description mathématique du monde empirique, qui se fait par le biais de l'axiomatisation des théories physiques, est une autre facette de l'objectivité scientifique.

Évidemment, l'intérêt d'une telle méthode n'est pas pratique mais bien théorique et épistémologique. Considérant que la méthode axiomatique ne permet pas de produire de connaissances empiriques, il va de soi que les conséquences positives qu'elle peut engendrer ne seront pas d'une telle nature.[40] Néanmoins, l'axiomatisation demeure un outil puissant d'un point de vue théorique. Au niveau épistémologique, la méthode axiomatique permet de sécuriser les fondements d'une discipline en assurant que la théorie et ses postulats sont consistants. De plus, une telle entreprise permet le progrès scientifique dans la mesure où cela permet d'identifier certaines lacunes internes aux théories. L'axiomatisation permet d'améliorer notre compréhension des théories physiques puisqu'elle met en lumière les relations de dépendance et d'indépendance qui se trouvent entre les axiomes et théorèmes de celles-ci. Par l'étude de la structure logique d'une théorie, l'axiomatisation permet d'améliorer notre compréhension de cette dernière et ainsi renforcer son statut épistémique.[41]

> ... a *real* progress frequently first becomes possible if the 'hidden' logical gaps and other errors such as inner contradictions have been identified and eliminated.[42]

En ce sens, d'un point de vue théorique, les bienfaits de la méthode axiomatique sont incontestables :

[39] Majer et Sauer (2006), *Op. cit.* note 30, p. 215
[40] Majer (2006), *Op. cit.* note 20, p. 175
[41] *Ibid.*, p. 176
[42] *Id.*

> The axiomatic method is a mean of investigating the logical structure of a theory, the dependence and independence of its sentences, and its deductive completeness and consistency.[43]

En bref, même si la méthode axiomatique ne fournit pas un moyen pour *produire* des connaissances empiriques, il n'en demeure pas moins que ses bienfaits théoriques sont incontestables. L'étude de la dépendance entre les propositions et les théories est très pertinente d'un point de vue épistémologique puisqu'elle permet de délimiter clairement la portée et la force des théories. Dès lors, l'importance accordée par Hilbert au sixième problème prend toute sa signification. En voulant axiomatiser la physique, ce dernier cherchait non seulement à lui assurer une certaine pérennité en la dégageant des présupposés subjectifs implicites à nos théories, mais aussi à solidifier son statut et à unifier la connaissance.

Conclusion

Somme toute, l'application de la méthode axiomatique aux sciences empiriques reste pertinente même si celle-ci a été développée en vue de solidifier la connaissance mathématique. Le point de vue axiomatique permet de tracer certaines limites épistémiques, à savoir que les axiomes ne reflètent pas la structure du monde mais plutôt la compréhension que nous en avons. Dans cette optique, la quête de la connaissance, qu'elle soit scientifique ou autre, prend une toute autre signification. Au lieu de chercher à élucider les *mystères de la réalité*, l'activité scientifique consiste plutôt en l'élaboration d'un édifice cohérent de connaissances, qui portent non pas sur les propriétés intrinsèques du monde mais bien sur l'explication que nous avons de celui-ci. Les systèmes axiomatiques n'expriment pas les relations du monde empirique : il s'agit de la formalisation des relations que l'observateur perçoit dans le monde. Les modèles sont des interprétations du monde empirique, c'est-à-dire des façons de concevoir et de comprendre les phénomènes.

[43] Majer et Sauer (2006), *Op. cit.* note 30, p. 223

Malgré le fait que l'axiomatisation ne permette pas de *produire* des connaissances, il n'en demeure pas moins que cette méthode a une portée épistémique importante, ce qui peut se voir entre autres par le biais de l'examen des critères de scientificité. Ces critères, que l'on peut diviser en deux groupes, en l'occurrence ceux des critères théoriques et pratiques, incluent d'une part la consistance, la limitation de l'objet, l'irréductibilité et l'analyticité, et d'autre part la complétude (couvrir l'ensemble des phénomènes auxquels la théorie s'applique), l'applicabilité, la prédictivité et la falsifiabilité (la prédiction doit être vérifiable). Or, lorsque l'on examine la répercussion de la méthode axiomatique sur les critères théoriques de scientificité, il devient difficile de ne pas reconnaître son importance. D'emblée, la consistance d'une théorie est l'un des critères de rationalité des plus importants et la méthode axiomatique vise précisément à établir ce point. La consistance étant une affaire de logique[44], il est évident que la méthode axiomatique est pertinente du point de vue scientifique. Par ailleurs, l'étude des différents modèles d'un système formel permet de délimiter l'objet d'une théorie en montrant clairement quels sont les domaines auxquels une théorie axiomatisée peut s'appliquer. De plus, l'examen qui a été fait à la section 3 concernant les relations de dépendance entre les propositions et les théories fournit un moyen d'étudier l'irréductibilité d'une théorie. En effet, grâce à la méthode axiomatique, il est possible de s'assurer qu'une théorie n'est pas réductible à d'autres théories existantes. Finalement, et c'est là un des points les plus évidents, l'axiomatisation d'une théorie répond directement au critère d'analyticité, à savoir qu'une théorie scientifique doit pouvoir s'exprimer par le biais d'un système formel. Ayant cela en tête, il devient clair que la méthode axiomatique, lorsque appliquée aux sciences empiriques ou à tout autre domaine de la connaissance, est un outil puissant qui permet de solidifier l'édifice de la connaissance et d'éclairer ses limites.

[44] Yvon Gauthier, « Hilbert's Idea of a Physical Axiomatics: The Analytical Apparatus of Quantum Mechanics, » *Journal of Physical Mathemathics* 2 (2010), p. 1.

Références

CORRY, L., 2004. *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918),* Kluwer.

FREGE, G., 1980. *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Édité par Gottfried Gabriel. Oxford: Basil Blackwell.

GAUTHIER, Y., 2010. « Hilbert's Idea of a Physical Axiomatics: The Analytical Apparatus of Quantum Mechanics. » *Journal of Physical* Mathemathics 2.

——— 1971. « The Use of the Axiomatic Method in Quantum Physics. » *Philosophy of science* 38, pp. 429-37.

GÖDEL, K., 1931. « On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems. » Dans Jean van Heijenoor (ed), 2002. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931, Harvard University Press.

HILBERT, D., 1923. « Foundations of Mathematics. » Dans William Ewald (éd.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

———, 1928. « The Foundations of Mathematics. » Dans Jean van Heijenoor (éd.), 2002. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, *1879-1931*, Harvard University Press.

———, 1915. « The Foundations of Physics (First Communication) » Dans, Jürgen Renn (éd.), 2007, *The Genesis of General Relativity,* Springer.

———, 1917. « The Foundations of Physics (Second Communication) » Dans, Jürgen Renn (éd.), 2007, *The Genesis of General Relativity*, Springer.

———, 1900. « From Mathematical Problems. » Dans William Ewald (ed), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

———, 1922 « The New Grounding of Mathematics. » Dans William Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

———. 1900, « On the Concept of Number. » Dans William Ewald (ed.)*, From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics, Oxford: Clarendon Press.*

MAJER, U. « Hilbert's Axiomatic Approach to the Foundations of Science - a Failed Research Program? » Dans V. F. Hendricks, J.

Lützen, K.F. Jorgensen et S.S. Pedersen (éd.), 2006. *Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy, 1860-1930,* Springer.

MAJER, U et SAUER, T., « Intuition and the Axiomatic Method in Hilbert's Foundations of Physics. » Dans E. Carson et R. Huber (éd.), 2006. *Intuition and the Axiomatic Method*, par. Springer.

RENN, J. et STACHEL, J., 2007. « Hilbert's Foundations of Physics: From a Theory of Everything to a Constituent of General Relativity. » Dans Jürgen Renn (éd.), 2007. *The Genesis of General Relativity*, Springer.

RUSSELL, B., « Letter to Frege. » Dans Jean van Heijenoor (ed), 1999. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic*, *1879-1931*, Harvard University Press.