Université de Montréal

Enseignement de la géométrie en première secondaire et conceptions d'élèves : une oscillation entre la perception, la mesure et la théorie

par Johanne Gauthier

Département de didactique, Faculté des sciences de l'éducation

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures en vue de l'obtention du grade de Philosophiae Doctor (Ph.D.) en didactique

Février, 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

Enseignement de la géométrie en première secondaire et conceptions d'élèves : une oscillation entre la perception, la mesure et la théorie

présentée par Johanne Gauthier

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Mme France Caron

…………………………………………………………………

président-rapporteur

Mme Sophie René de Cotret

…………………………………………………………………

directrice de recherche

M. Philippe R. Richard

…………………………………………………………………

codirecteur de recherche

Mme Annette Braconne Michoux

…………………………………………………………………

membre du jury

Mme Catherine Houdement

…………………………………………………………………

examinateur externe

M. François Bowen

…………………………………………………………………

représentant du doyen de la FES

Résumé

Cette recherche, réalisée en milieu scolaire québécois, concerne l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'entrée au secondaire. Ce contexte est caractérisé par une géométrie non clairement définie d'un point de vue épistémologique, tant dans le programme d'études du premier cycle que dans les manuels scolaires. Ainsi, nous avons cherché à voir d'une part, l'activité géométrique souhaitée et actualisée par des enseignants incluant les problèmes proposés et, d'autre part, les conceptions d'élèves développées par ces problèmes. À partir de données recueillies auprès de quatre classes, nous avons déterminé cette activité géométrique et répertorié six types de problèmes dont quatre sont dominants ainsi que des conceptions d'élèves. L'activité géométrique en classe a donné lieu à des moments d'hésitation épistémologique, lesquels ne sont pas sans effet dans le développement des conceptions des élèves.

Mots-clés **:**

didactique de la géométrie, problèmes, paradigmes géométriques, conceptions des élèves

Abstract

This research was conducted in a Quebec classroom environment. It pertains to the teaching and learning of geometry at the outset of secondary school. This context is characterized by a geometry that is not clearly defined from the epistemological point of view in either the secondary cycle one program or in textbooks. We attempted to find firstly, the desired geometric activity and updated by teachers with the proposed problems and, secondly, students conceptions developed by these problems. Using data collected from four classes, we then determined this geometric activity and identified six types of problems from which four were predominant. We also observed students conceptions. The classroom activity gave birth to moments of epistemological hesitance that may have had a certain effect on the development of the students'conceptions.

Keywords :

teaching, geometry, problems, geometrical paradigms, student conceptions

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

À André Léonard, le capitaine de notre esquif.

Remerciements

Je désire exprimer ma gratitude à Mme Sophie René de Cotret pour avoir cru en mon projet de recherche ainsi que pour nos nombreuses discussions toujours animées de cet enthousiasme envers la didactique des mathématiques qui la caractérise si bien.

Je suis reconnaissante à M. Philippe R. Richard, codirecteur de recherche, pour m’avoir fait bénéficier de son intérêt à l’égard de la didactique de la géométrie.

Je remercie Mme France Caron pour ses conseils promulgués dans le cadre du cours *Problèmes de Recherche en Didactique II* ainsi qu’au moment de la correction de mon devis de recherche.

Je remercie également tous les membres du jury qui ont donné de leur temps à la lecture et à l’évaluation de mon travail de thèse.

Enfin, je désire exprimer ma reconnaissance aux enseignants et aux élèves sans la présence et la spontanéité desquels mon projet n’aurait pu voir le jour.

À vous tous, merci!

Introduction

Notre intérêt pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie provient à la fois d'une expérience personnelle et professionnelle de cette discipline.

D'un point de vue personnel, nous avions eu l'occasion d'analyser notre propre démarche d'initiation à l'argumentation en géométrie euclidienne (Gauthier, 1998). De cette analyse, nous avions dégagé différents résultats dont une typologie d'erreurs, mais nous avions découvert aussi le plaisir et la satisfaction que peut apporter un travail de compréhension d'éléments du système euclidien. Cette démarche personnelle nous était apparue essentielle à l'époque puisqu'elle visait à enrichir notre formation et à apporter un nouvel éclairage à notre travail de conseillère pédagogique. En effet, il nous semblait difficilement concevable d'aider le personnel enseignant à appliquer un programme d'études concernant la géométrie sans être nous-même plus informée de processus fins d'apprentissage de cette discipline. Tout en gardant à l'esprit que notre démarche de maîtrise s'inscrivait dans une relation du type un professeur-une étudiante, qu'elle visait l'analyse de processus d'apprentissage d'une personne adulte et non d'une élève, il nous apparaissait intéressant de poursuivre notre questionnement au regard des enseignants et des impacts de leurs actions pédagogiques sur les apprentissages des élèves.

D'un point de vue professionnel, nous avions constaté un certain retour de la géométrie euclidienne à la mise en œuvre du programme d'études 068-116 proposant que l'élève « […] acquière l'habitude d'appuyer son raisonnement sur des définitions ou sur des propriétés pertinentes. » (Gouvernement du Québec, 1993, p. 38). Toutefois, les objectifs du programme avaient suscité des questions parmi le personnel enseignant avec qui nous travaillions. Par exemple, l'objectif *Raisonner* suggérait de « Favoriser chez l'élève l'accroissement de l'habileté à émettre des hypothèses et à les vérifier par une démarche inductive ou déductive. » (Gouvernement du Québec, 1993, p. 22). Dans quelle mesure ou quel rapport devait-on traiter les démarches inductive et déductive? Pour l'objectif « Résoudre des problèmes portant sur des droites ou des angles. » (Gouvernement du Québec, 1993, p. 38), il y était dit que l'élève devait recourir à des énoncés géométriques plutôt qu'au mesurage afin de déduire une mesure d'angle ou de côté. Les problèmes choisis par le personnel enseignant favorisaient-ils vraiment chez l'élève le recours à la déduction? Et ces énoncés géométriques fournis en annexe du programme, par exemple *Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus* ou *Les angles opposés d'un parallélogramme sont congrus*, devait-on tous les démontrer à (avec) l'élève? Si non, lesquels choisir? Pour les énoncés non démontrés, les élèves parviendraient-ils à les comprendre ou simplement les retenir de mémoire? Dans ce cas, fallait-il toujours les leur fournir comme référence pour la résolution d'un problème où ils auraient eu à justifier une affirmation? Si oui, quelle était alors la rentabilité pédagogique de cette disposition?

Ces quelques questions témoignaient d'une certaine confusion entre, d'une part, la connaissance par les enseignants de la géométrie euclidienne plus classique avec son système de démonstration d'énoncés et, d'autre part, une proposition d'enseignement de la géométrie inspirée notamment des écrits Van Hiele (1986, 1960) traitant d'une structure par niveaux en géométrie; proposition énoncée dans l'extrait suivant de ce programme d'études.

> « Ces changements s'appuient sur les travaux de chercheurs en didactique qui apportent des indications selon lesquelles, d'une part, le développement de la pensée géométrique s'effectue à travers une hiérarchie d'échelons et, d'autre part, le passage d'un échelon à l'autre ne saurait se faire sans une intervention appropriée de l'enseignante ou l'enseignant. Selon cette théorie, l'élève apprend d'abord à reconnaître les formes puis à analyser les diverses propriétés de ces formes, pour ensuite établir des relations entre les propriétés et faire des déductions simples. » (Gouvernement du Québec, 1993, p. 35).

Or, dans ce contexte du programme 068-116 et pour répondre aux interrogations du personnel enseignant, nous avions convenu de consigner des productions d'élèves à partir de choix didactiques faits par une enseignante volontaire. Cette consignation ne s'inscrivait pas dans un cadre formel de recherche. De plus, elle n'a pas été menée à terme pour cause de maladie de l'enseignante. Cependant, en 2003, l'avènement d'une réécriture des programmes au secondaire a ravivé notre désir de comprendre le travail géométrique d'élèves, car ce qui présidait à notre questionnement sur la géométrie issu du programme scolaire des années 90 demeure en partie dans les programmes actuels. Nous en discuterons dans la problématique. Ce sont là les principales considérations à l'origine de notre projet de recherche doctorale. Dans ce qui suit, nous indiquons les éléments propres à chacun des chapitres de la thèse.

Au chapitre 1, nous précisons ce que nous entendons par le mot *géométrie* et fournissons quelques particularités relatives à son exercice. À partir de ces précisions, nous discutons de la géométrie en milieu scolaire. En particulier, nous présentons des difficultés susceptibles d'être rencontrées par des élèves du premier cycle du secondaire ainsi que des points de vue sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Nous exposons des aspects des programmes d'études actuels du primaire et du premier cycle du secondaire à propos de la géométrie. Nous regroupons les éléments composant la problématique dans un questionnement-synthèse.

Au chapitre 2, nous fournissons le cadre théorique sur la base duquel nous nous appuyons pour étayer et guider notre recherche. Nous ciblons des repères théoriques nous permettant d'observer le travail géométrique d'élèves en relation notamment avec des problèmes proposés par des enseignantes et enseignants. Nous terminons ce chapitre par l'exposé de nos objectifs et questions de recherche.

Au chapitre 3, nous expliquons les aspects méthodologiques de la stratégie choisie pour répondre à nos objectifs et questions de recherche. Nous justifions le choix des objets géométriques retenus et la clientèle scolaire. Nous détaillons les étapes de la recherche. Nous précisons les outils nécessaires à la cueillette des données ainsi que ceux utilisés pour les analyses. Nous finalisons ce chapitre par les précautions d'ordre éthique et méthodologique qui balisent notre expérimentation.

Au chapitre 4, nous présentons l'analyse des résultats qui compte deux sections. La première section est une analyse de problèmes géométriques provenant de manuels scolaires. La deuxième section comporte une analyse didactique de quatre classes où pour chacune nous exposons, entre autres, des choix didactiques de l'enseignant[1] ainsi que le travail géométrique d'élèves produit dans le cadre de ces choix.

---

[1] Dans la suite du texte, nous emploierons le mot *enseignant* (au singulier ou pluriel) et ferons de même pour le mot *élève* afin d'alléger la lecture et préserver l'anonymat des participants à la recherche.

Au chapitre 5, nous interprétons les résultats et présentons les limites du projet.

En conclusion, nous émettons des recommandations qui, nous l'espérons, seront éventuellement reprises par les milieux de l'enseignement et de la recherche.

Chapitre 1 Problématique

« De toutes les décisions à prendre dans le cadre d'un projet d'aménagement des programmes scolaires quant au choix des contenus, la plus controversée et la plus difficile à défendre est généralement celle qui concerne la géométrie. » (Morris, 1987).

La géométrie fait habituellement consensus lorsqu'il est question de dire qu'elle est nécessaire à la formation du citoyen et de surcroît à celle du scientifique (Audibert, 1992). Elle favorise notamment le développement de notre connaissance de l'espace physique,[2] de l'esthétique, du raisonnement déductif; elle est à tout le moins un terreau historiquement fertile, etc. Pour le scientifique, elle lui offre, entre autres, la capacité de penser géométriquement des problèmes mathématiques ou issus d'autres disciplines (Kahane, 2002; Bkouche, 1990). C'est cette capacité à se faire des figures et à s'appuyer d'une expérience de la géométrie, pour penser autrement une situation complexe ne provenant pas a priori de la géométrie, qui permet une compréhension nouvelle de ladite situation.

Bien qu'on ne remette pas en question la nécessité de l'étude de la géométrie en milieu scolaire, on s'interroge néanmoins sur son enseignement. Celui-ci est sujet à la production de rapports et à la mise en place de commissions d'études dans divers pays : par exemple Kahane (2002), The Royal Society (2001), Lismont et Rouche (1999), Mammana et Villani (1998), Morris (1987). D'ailleurs, la citation en exergue apparaît dans l'introduction du volume cinq des *Études sur l'enseignement des mathématiques : l'enseignement de la géométrie* publié par l'Organisation des Nations Unies en 1987. Mais cette citation est extraite d'un rapport sur l'enseignement de la géométrie produit au début des années 1970 par l'équipe du Comprehensive School Mathematics Project (The CSMP staff, 1971); projet concernant l'enseignement des mathématiques dans les écoles polyvalentes des États-Unis. Les questionnements à propos de l'enseignement de

---

[2]Nous considérons l'*espace physique* comme « […] une notion de lieu : notre lieu, la Terre. » (Mlodinow, 2002, p. 15). Dans cet espace, celui « […] contenant des objets, et qui nous est accessible par le biais des sens » correspond à l'*espace sensible* ainsi nommé par Chevallard et Julien (1990, p. 52).

la géométrie ne sont donc pas nouveaux. En 1741, Alexis Claude Clairaut écrivait ce qui suit en préface de son ouvrage *Éléments de géométrie* :

> « Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Éléments ordinaires. »

Les différentes interrogations et propositions relatives à l'enseignement de la géométrie peuvent concerner les contenus à faire apprendre, la nature des problèmes, les outils utilisés dont les outils informatiques ainsi que la formation des enseignants. Ces diverses réflexions sur l'enseignement de la géométrie ne sont pas étrangères à ce qu'est la géométrie et à ce qu'exige son exercice. Mais qu'est-ce donc que la géométrie? Et qu'implique sa pratique pour l'expert géomètre?[3]

1.1 La géométrie : considérations épistémologiques

Répondre à *Qu'est-ce que la géométrie?* est forcément une entreprise ambitieuse tant sur le plan historique qu'épistémologique. Pour les besoins de notre recherche, nous présentons ci-après quelques aspects susceptibles de nous aider à mieux comprendre des choix faits par l'institution scolaire au sujet de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie à l'entrée au secondaire.

Une première prise de conscience de notre environnement, de l'espace physique qui nous entoure et auquel nous appartenons, nous est rendue possible par la perception, l'action, le langage. Nous pouvons voir, prendre, déplacer, orienter des objets (ou nous-mêmes), chercher à nommer ce qui les rend semblables, différents, etc. Nos premières appréhensions tridimensionnelles des objets, bidimensionnelles ou unidimensionnelles en considérant les faces et les éléments des faces qui les composent, nous familiarisent avec la forme et la grandeur des choses. Par exemple, l'observation de la symétrie des ailes d'un papillon aide à créer un premier bagage de connaissances géométriques. Le Centre de Recherche en Enseignement des Mathématiques de Belgique (Lismont et

[3]Nous considérons l'expert géomètre comme un théoricien et non un arpenteur.

Rouche, 1999, p. 303) mentionne que ce bagage n'est pas propre à l'enfance et que des élèves plus âgés ou des adultes y ont recours lorsqu'ils cherchent « […] à construire, à comprendre ou à se représenter des situations planes ou spatiales qui posent question. ».

Mais la géométrie n'est pas réductible à une prise de conscience sensorielle de l'espace physique. La géométrie permet aussi de le saisir en pensée. Puisque nos sens sont limités, la géométrie favorise l'extension de ceux-ci par l'esprit. C'est aux Grecs du 6^e^ siècle avant J.-C. que sont attribuées ces idées de modélisation de l'espace physique à l'aide d'une théorie géométrique. Auparavant, soit trois mille ans avant J.-C., il semble que les Babyloniens et les Égyptiens faisaient des travaux de géométrie. Mais leur usage de la géométrie était avant tout pratique, utilitaire et servait principalement à résoudre des problèmes concrets de mesure notamment en astronomie, arpentage et constructions architecturales (Dahan-Dalmedico et Peiffer, 1986). D'un point de vue étymologique, la *géométrie* signifie mesure de la Terre : « […] du latin geometria, du grec geômetria, de gê, la Terre et metria, technique, science de la mesure. » (Baruk, 1992, p. 524). La géométrie n'était toutefois pas un objet de réflexion pour lui-même. Ce sont les Grecs du 6^e^ siècle avant J.-C. que l'on reconnaît comme les premiers à avoir considéré la géométrie non seulement d'un point de vue pratique pour résoudre des problèmes, mais aussi d'un point de vue théorique pour décrire et révéler des propriétés. « À partir de la simple description d'un bloc de pierre ou d'une étendue de sable, ils dégagèrent les idéaux que sont le point, la droite, le plan. » (Mlodinow, 2002, p. 15). Ces objets idéaux appartiennent à un nouvel espace, un espace géométrique, c'est-à-dire une abstraction mathématique qu'il est possible de théoriser.

Selon le Centre de Recherche en Enseignement des Mathématiques (Lismont et Rouche, 1999), l'espace physique offre un terreau propice à l'élaboration de premières observations géométriques pour démarrer la géométrie raisonnée. Celles-ci portent sur des implications de nature plus inductive. Par exemple, à chaque fois que je fais ceci, j'obtiens cela. Et le résultat est constaté à maintes reprises. Or, l'explication relative à l'observation répétée d'un même phénomène risque d'échapper momentanément ou longuement à notre esprit. Par exemple, après avoir constaté de manière empirique, par itérations successives, que la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits, deux questions demeurent : 1) Est-ce toujours vrai? 2) Si oui, comment se fait-il que cette somme soit égale à deux angles droits?

L'esprit du géomètre grec de l'Antiquité ne se satisfaisait pas de la constatation issue des premières observations, de l'expérience répétée qui donne un premier résultat. Il cherchait à apaiser son esprit, à répondre à ces deux questions par un raisonnement qui prouve hors de tout doute leur véracité, qui dégage ces premières observations de leur contrainte empirique. C'est dans cet esprit qu'a été construit le système euclidien de géométrie. Plus précisément, au 3^{e} siècle avant J.-C., Euclide organise et synthétise les connaissances géométriques grecques de son époque. Son ouvrage, les *Éléments*, n'est pas qu'une collection de postulats, de définitions, de propriétés et de théorèmes. C'est un tout cohérent, un système logique où chacun des éléments est interdépendant des autres, c'est-à-dire trouve sa place, sa valeur de vérité par un raisonnement déductif, une démonstration, le situant en amont et en aval d'autres éléments. Un système conçu comme une synthèse qui, de façon générale, dégage les objets géométriques de leur substrat empirique et offre une compréhension de ces éléments par leur position (et leur utilisation) relative par rapport aux autres.

La géométrie euclidienne favorise ce passage de l'espace physique à un espace géométrique (la théorie) et inversement du retour contrôlé à l'espace physique par la théorie. Mouvement de va et vient entre ces deux espaces, la géométrie euclidienne est une modélisation de l'espace physique. Cette modélisation est extramathématique car elle permet de rendre compte du monde physique. Elle est aussi intramathématique dans la mesure où elle est un outil de modélisation au service des mathématiques.

Le système euclidien est une théorie, mais comme le souligne Mlodinow (2002), il est aussi une fenêtre à travers laquelle les mathématiciens ont poursuivi et poursuivent encore leur quête de connaissances de l'univers tout au long de l'histoire, créant ainsi de nouvelles théories géométriques.[4] Avec les avancées scientifiques d'aujourd'hui, nous

[4] Walter (2001) mentionne que le développement de la géométrie en tant que science s'est fait autour de trois problématiques : la mesure des grandeurs géométriques avec Euclide, la représentation plane des situations spatiales avec les constructions perspectivistes du Quattrocento italien et la méthode des transformations mise en avant par Félix Klein dans son programme d'Erlangen en 1872.

ne pouvons pas parler de la géométrie sans spécifier de quelle géométrie il s'agit. Ainsi, sous le vocable *géométrie*, il existe des géométries et l'expert géomètre va œuvrer dans un environnement de travail adapté à l'une de ces géométries, c'est-à-dire en fonction d'une problématique de choix d'axiomes et de théorèmes. Pour notre part, nous sommes intéressée à la géométrie euclidienne.

L'expert géomètre saura exprimer ses idées géométriques par un contrôle et une coordination des figures géométriques,[5] des définitions et des théorèmes. Par exemple, il fera cette distinction importante entre une figure en tant que représentation d'un objet géométrique et l'objet géométrique en tant qu'objet idéalisé dans un sens ontologique. De cette distinction, il appert qu'un même objet géométrique est représenté par diverses figures. Il n'existe pas une seule figure d'un objet géométrique. De plus, les figures seront possiblement produites dans différents environnements, par exemple avec papier-crayon ou logiciel de géométrie dynamique; chacun offrant ses avantages et limites de représentation, de traitement. Il existe donc une multitude de représentations figurales et de significations des représentations avec lesquelles l'expert composera pour l'exercice de la géométrie.

L'expert géomètre sait aussi qu'une figure géométrique peut « […] s'articuler sans égard à un modèle théorique comme s'il s'agissait d'un fait donné. » (Richard, 2004, p. 232; Richard et Sierpinska, 2004). En ce sens, elle est susceptible d'incarner ou cristalliser la qualité qu'on lui reconnaît, qu'elle évoque ou suscite. L'expert géomètre comprend que ce qu'une figure donne à voir n'est pas forcément ce qui est admissible à la résolution des problèmes et qu'un emploi d'indications verbales ou symboliques, par exemple l'emploi de signes conventionnels, est souvent nécessaire pour ancrer sur une figure une ou des références à des propriétés de l'objet géométrique.

Sur le plan discursif, l'expert géomètre se sert de définitions et de théorèmes.[6] D'une certaine manière, nous disons qu'une définition est l'expression d'une condition

[5] Dans notre étude, nous employons l'expression *figure géométrique* pour désigner toute représentation graphique d'un objet géométrique entendu comme une idéalité.
[6] Les définitions et théorèmes expriment des propriétés d'autres objets mathématiques, mais nous sommes intéressée par les objets géométriques.

nécessaire et suffisante pour identifier un objet géométrique donné et qu'un théorème est une proposition démontrée pour exprimer d'autres propriétés de l'objet géométrique. De plus, lorsque des propositions sont équivalentes, si l'une d'elles est choisie pour définir un objet géométrique, alors les autres sont considérées comme des propriétés caractéristiques de cet objet géométrique. Par exemple, les propositions suivantes sont équivalentes : *le triangle ABC possède deux côtés isométriques* et *le triangle ABC possède deux angles congrus*. Selon Bouvier et George (1983), usuellement, la première proposition est retenue comme définition du triangle isocèle et la seconde devient une propriété caractéristique. Mais ce choix est « […] évidemment arbitraire et n'est motivé que pour des raisons psychologiques ou pédagogiques, non mathématiques. » (Bouvier et George, 1983, p. 100).

De plus, une définition formelle (ou un théorème) recouvre un sens général ou en d'autres mots embrasse un ensemble de cas possibles.[7] Par exemple, la bissectrice définie formellement comme une droite divisant un angle en deux parties congrues s'évoque à travers diverses situations. Être capable de voir la bissectrice d'un angle, par exemple dans un triangle, un quadrilatère, un secteur de cercle, la face d'un solide, offre un ensemble d'expériences plus large du concept de bissectrice que seulement sa vision à partir d'un angle aigu. La définition autorise tous ces cas. De ce point de vue, nous disons que comprendre une définition, un théorème, c'est lui accorder un sens général, non particulier. Pour ajouter d'autres particularités, Sfard (1991) rappelle qu'un concept est défini structurellement en tant qu'objet ou opérationnellement en tant que processus. Cette double façon de définir un concept mathématique est notée aussi par Ouvrier-Buffet (2003) qui parle de définition nominale (une énumération de caractères connus

[7] Nous pourrions qualifier l'ensemble des cas possibles de potentiellement infini. Prenons pour exemple la définition du triangle suivante : un polygone à trois côtés. Cette définition renvoie à un ensemble infini de triangles, mais nous ne pouvons en reproduire qu'une partie finie, de la même façon qu'une droite est composée d'une infinité de points dont nous ne pouvons illustrer qu'une partie qui contient elle-même une infinité de points. Nous éclairons encore notre propos par le déplacement d'un (ou plus) des trois points d'un triangle créé avec un logiciel de géométrie dynamique. Chaque déplacement produit un autre triangle, mais il s'agit toujours d'un triangle (incluant le triangle plat qui pourrait être remis en question). L'emploi du logiciel produit un vaste échantillon de triangles dont l'étendue est tributaire notamment des limites techniques du logiciel.

suffisants pour distinguer une chose parmi d'autres) et de définition réelle (qui explique la genèse d'une chose, comment la chose est faite).

Ainsi, par une articulation adéquate de figures géométriques, de définitions et de théorèmes,[8] l'expert géomètre saura contrôler les mouvements de va et vient entre les espaces physique et géométrique (la théorie) en nourrissant son activité par une bonne dose d'expérience et de raisonnement.

Or, si l'expert géomètre sait composer avec ces paramètres pour l'exercice de la géométrie, il en va souvent autrement de l'apprenti pour qui cet apprentissage ne se fait pas sans heurts. Par exemple, il est possible que l'apprenti n'éprouve pas de doute dans les observations successives d'un même phénomène géométrique et ne ressente pas le besoin de prouver quoi que ce soit. Pour l'apprenti, la relation entre l'espace physique et l'espace géométrique est un enjeu fondamental.

1.2 La géométrie en milieu scolaire

L'enseignement de la géométrie a pour principale ambition d'amener l'élève à distinguer l'espace physique de l'espace géométrique. Car, c'est seulement à partir de cette distinction en complémentarité de ces espaces que l'élève pourra comprendre des problèmes qui sont posés en géométrie et les solutions qui leurs sont associées. C'est à cet effort de construction de la pensée entre le sensible et l'intelligible pour appréhender le monde ou pour rendre raison du sensible que la géométrie convie l'élève (Bkouche, 1990; Chevallard et Julien, 1990).

1.2.1 Quelques difficultés d'élèves

Dans cet apprentissage des rapports entre les espaces physique et géométrique, des études ont déjà pointé des obstacles plus pérennes, fréquemment observés chez les élèves. Nous en présentons quelques-uns aux sections suivantes.

---

[8] Nous ajoutons l'emploi d'instruments classiques tels le compas et la règle ou technologiques comme les logiciels de géométrie dynamique.

1.2.1.1 Difficultés liées aux représentations figurales des objets géométriques

Les élèves du premier cycle du secondaire (12-14 ans) ne sont pas tous au même stade de développement de leur pensée conceptuelle géométrique. Par exemple, certains élèves sont plus fortement influencés par les figures (avec peu d'égards aux propriétés) et d'autres réfèrent surtout aux propriétés (Burton et Detheux-Jehin, 1999), bien qu'il soit possible chez un même élève de présenter des variations dans le fait de considérer ou non les propriétés (Vinner et Hershkowitz, 1983).

Pour l'observation des figures, certains élèves ne distinguent pas assez l'objet géométrique de ses représentations et n'arrivent pas à s'extraire de ce qu'elles donnent à voir pour raisonner. Par exemple, leur perception générale les empêche d'effectuer des traitements opératoires sur les figures (Duval, 2005, 1995, 1994). Leurs raisonnements sont alors guidés par l'apparence des figures (Chenu et Detheux-Jehin, 2000). Il s'agit d'un comportement où il y a prédominance du *vu* sur le *su* (Fischbein, 1993; Parszyz, 2007, 1988; Vinner et Hershkowitz, 1983).

1.2.1.2 Difficultés à hiérarchiser les propriétés des objets géométriques

Lorsque les élèves réfèrent aux propriétés, ils leur arrivent de confondre des concepts comme par exemple la médiatrice et la médiane (Chenu et Detheux-Jehin, 2000). De plus, lorsqu'ils recourent à une définition, les élèves peuvent ne tenir compte que d'un seul de ses éléments (Vinner et Hershkowitz, 1983); leur apprentissage d'une condition nécessaire et suffisante est complexe. Selon Burton et Detheux-Jehin (1999, p. 10), si la définition est une condition nécessaire et suffisante, « […] plus de 37% des élèves considèrent qu'elle ne contient pas assez d'éléments caractéristiques et qu'il conviendrait par conséquent d'en ajouter. ». Inversement, si elle possède des éléments superflus, alors 80% des élèves la jugent appropriée. Ces résultats corroborent ceux de De Villiers (1998) selon lequel les élèves préfèrent des définitions non hiérarchiques.[9] Ils ne comprennent pas toujours pourquoi leurs définitions ne sont pas aussi valables

[9] Exemple : la définition *Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés* est hiérarchisée logiquement, mais pas la définition *Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés, quatre sommets et quatre angles*.

que les définitions hiérarchisées logiquement. Des élèves fournissent des définitions qui contiennent un surplus de propriétés, mais produisent aussi des définitions trop courtes (Coutat, 2006; De Villiers, 1998), c'est-à-dire des définitions dans lesquelles des éléments caractéristiques indispensables sont absents ou insuffisants pour rendre compte de l'objet géométrique à définir. Par exemple, donner cette définition du losange : c'est un quadrilatère avec des diagonales perpendiculaires. La relation qu'ils établissent entre un objet géométrique et sa définition n'est donc pas toujours cohérente. Elle est appelée à varier selon la situation dans laquelle l'objet géométrique est sollicité et elle continue d'évoluer.

1.2.1.3 Difficultés à utiliser des propriétés pour justifier

Lorsque les élèves justifient des propositions, Chenu et Deheux-Jehin (2000) ont observé qu'ils étaient susceptibles de décrire simplement une figure géométrique, de la mesurer ou d'omettre ses données codées, entre autres. Les élèves risquaient aussi de se satisfaire d'une procédure de construction, d'une description ou de confondre ce qui est à justifier en utilisant par exemple comme point de départ des éléments de la conclusion plutôt que des hypothèses. Lorsque les élèves emploient des propriétés, ils leur arrivent de négliger celles qui sont nécessaires et suffisantes, d'en choisir une panoplie dont des propriétés inadaptées à la situation. Dans cette perspective, il n'est pas étonnant que des élèves peinent à articuler des propriétés dans un raisonnement déductif à l'aide de règles d'inférence (Burton et Detheux-Jehin, 1999).

1.2.1.4 Difficultés à exprimer des idées relatives aux objets géométriques

La justification de propositions à l'aide de propriétés sollicite particulièrement le langage discursif. Or, l'emploi d'un vocabulaire géométrique souvent imprécis et non rigoureux par les élèves est un exemple cité de façon récurrente dans diverses études (Puault, 2005; Chenu et Deheux-Jehin, 2000; Burton et Detheux-Jehin, 1999; Laborde, 1982). L'utilisation de mots tels que *barre* et *ligne* pour une droite ou un segment, de *rond* pour un cercle ou de *coin* pour un angle sont autant d'exemples d'un vocabulaire géométrique inadéquat par rapport à la terminologie mathématique. L'oubli de mots ou leur substitution sont d'autres exemples de vocabulaire non adéquat.

Un manque de vocabulaire ou un vocabulaire imprécis peut masquer une idée juste ou en voie de le devenir qui n'est pas traduite correctement par le langage ou être l'expression d'une réelle incompréhension. De plus, les énoncés géométriques produits par les élèves ne sont pas toujours décontextualisés. Leurs formulations contiennent des références au temps, au contexte et à l'action y compris l'élève acteur (Coutat, 2006; Laborde; 1982). Par exemple, la présence du sujet (l'élève) se manifeste notamment par les pronoms possessifs comme dans « Tous mes cercles se coupent […] » (Laborde, 1982, p. 113). Par conséquent, il est loisible de croire que des énoncés décontextualisés présentés aux élèves soient susceptibles d'être partiellement compris voire incompris. L'appropriation de définitions discutée précédemment en est un exemple.

Aussi, dans l'exercice de la géométrie, les élèves doivent articuler des énoncés pour décrire une situation, produire une justification, ce qui implique le développement d'une habileté rédactionnelle, un travail d'expression de la pensée par le langage écrit, plus achevé (Vygotski, 1985). Toutefois, il semble que l'écriture d'une description ou d'une argumentation soit peu familière aux élèves (Chenu et Detheux-Jehin, 2000a).

Ces constats, concernant la maîtrise des rapports entre les espaces physique et géométrique par les élèves, nous amènent à poser la question suivante : vaut-il mieux enseigner une géométrie dite de l'observation, pour ensuite s'inscrire en rupture avec une géométrie strictement déductive, ou au contraire que de l'observation on migre graduellement vers une géométrie déductive? La réponse ne semble pas évidente puisque la géométrie en milieu scolaire a fait et fait encore l'objet de plusieurs points de vue.

1.2.2 L'enseignement et l'apprentissage de la géométrie : points de vue

Mathématiciens et pédagogues ont depuis longtemps exprimé leurs opinions sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. D'entrée de jeu à la problématique, nous avons cité Clairaut qui dès 1741 interrogeait la manière d'enseigner la géométrie euclidienne. Plus précisément Clairaut dénonce, d'une part, l'enseignement d'un discours constitué de définitions, d'axiomes, de propositions, tel que présenté dans les *Éléments* d'Euclide, et, d'autre part, une justification utilitaire de la géométrie. Ces deux aspects ne lui semblent pas rendre l'apprenti suffisamment intéressé et éclairé. En effet, il est concevable qu'un discours logique ne soit pas perçu comme intéressant ou qu'un procédé utile ne soit pas de facto facile à comprendre. Dès lors, Clairaut propose d'enseigner la géométrie en fonction d'une posture épistémologique. En référence aux origines de la géométrie, il énonce ainsi sa méthode d'enseignement :

> « […] j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers Inventeurs; observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire. » (Clairaut, 1741).

Sachant que la géométrie s'est développée notamment à partir de problèmes de mesures de terrains, chez les Égyptiens et les Babyloniens par exemple, sa méthode d'enseignement prend appui sur la résolution de problèmes concernant la mesure des terrains. Mais la mesure des terrains n'est pas son objet d'étude. C'est le moyen par lequel Clairaut entend faire apprendre des concepts de la géométrie euclidienne. Ceux-ci étant introduits au fur et à mesure comme moyens pour résoudre les dits problèmes. Ainsi, sa proposition d'enseignement vise à articuler l'espace physique (problèmes de mesures de terrains) à l'espace géométrique (la théorie), mais l'articulation des espaces ne trouve pas sa cohérence a priori dans une logique de discours démonstrative comme dans le système euclidien. Elle trouve sa cohérence dans une pratique de résolution de problèmes. Pour Barbin (1991, p. 130), cette proposition doit être considérée selon le contexte historique prévalant au 18e siècle « […] siècle qui s'est attaché à augmenter les connaissances mathématiques plutôt qu'à les fonder. ».[10]

Sur la base de repères historiques, Fujita, Jones et Yamamoto (2004) rappellent également la nécessité d'une prise en compte de la relation entre les espaces physique et géométrique dans l'enseignement. Ils mentionnent que Johann Friedrich Herbart (1776-1841) réclamait le développement d'une *imagination skill* pour résoudre des problèmes géométriques. Cette habileté à imaginer, aussi traduite par une *intuition géométrique*, a influencé des réformateurs de l'enseignement des mathématiques du début du 20e siècle

[10] Il s'agit d'une volonté de donner du sens, d'éclairer qui est particulière à cette époque de l'histoire des mathématiques.

tels Peter Treutlein (1845-1912), Charles Godfrey (1876-1924) et Arthur Warry Siddons (1873-1959). Ces hommes ont proposé un enseignement de la géométrie intégrant à la fois une dimension expérimentale sur des objets de l'espace physique et théorique. Les activités visaient une articulation des espaces physique et théorique. Ces auteurs ont en commun de ne pas avoir voulu réduire l'enseignement de la géométrie, tout au moins à ses débuts, à celui d'une axiomatique développée par le raisonnement déductif, mais offrir aussi des activités de manipulation d'objets concrets, de dessin, de mesure pour développer cette *intuition géométrique* nécessaire à l'exercice de la géométrie.

Or, selon Fujita, Jones et Yamamoto (2004), l'expression *intuition géométrique* ne recouvre pas tout à fait le même sens chez ces auteurs. Pour Treutlein, le recours à l'espace physique vise à développer ce qu'il nomme une *imagination spatiale*, c'est-à-dire la capacité à imaginer des figures, des combinaisons de figures ou se les représenter mentalement. Pour Godfrey et Siddons, le recours à l'espace physique doit favoriser ce que Godfrey nomme *l'œil géométrique*, c'est-à-dire la capacité à dégager des propriétés géométriques d'une figure. Une rupture entre l'aspect expérimental et l'aspect déductif, en ne fournissant que des tâches expérimentales et par la suite des tâches de déduction, est inappropriée à l'enseignement de la géométrie selon Godfrey et Siddons. En lien avec les réflexions de ces prédécesseurs, Fujita, Jones et Yamamoto (2004) parlent du défi que pose encore aujourd'hui l'élaboration de stratégies pédagogiques et de tâches pertinentes au développement d'une *intuition géométrique* chez les élèves.

Pour Brousseau (2000), des stratégies pédagogiques et des tâches appropriées ne sont possibles que dans la mesure où l'enseignement prend en compte les connaissances spatiales et les connaissances géométriques. Les connaissances spatiales proviennent de l'espace physique et permettent à un individu, enfant ou adulte, d'agir sur cet espace afin de résoudre des problèmes spatiaux, alors que les connaissances géométriques sont issues de la théorie et servent à contrôler la consistance des énoncés sur l'espace. Selon Brousseau (2000), les moyens qu'un individu prend pour résoudre un problème spatial ne sont pas étrangers à sa taille en lien avec celle de l'espace physique. Ainsi, propose-t-il l'identification de trois types d'espace physique : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace. Le micro-espace est celui des petits objets, ceux que l'on peut prendre, déplacer, comparer par le toucher, la vue. L'individu est à l'extérieur de cet espace. La feuille de papier sur laquelle un élève travaille est un exemple de ce type d'espace. Le méso-espace est celui où un individu perçoit les objets globalement en faisant partie de cet espace. L'individu conçoit ses déplacements sur un territoire contrôlé par sa vision. La salle de classe en est un exemple. Le macro-espace est celui à l'intérieur duquel se trouve l'individu et à l'intérieur duquel les objets sont perçus partiellement par lui. La ville dans laquelle se trouve une école en est un exemple.

Selon Brousseau (2000), l'enseignement de la géométrie ne semble pas assez se préoccuper des trois types d'espace physique confinant régulièrement l'élève au micro-espace, la feuille de papier par exemple, ce qui risque ainsi de ne pas générer un besoin suffisant de modélisation et par conséquent ne pas favoriser une articulation des espaces physique et géométrique.[11]

S'appuyant des réflexions de Brousseau (2000) relatives à la distinction entre les connaissances spatiales et géométriques et à la mise en œuvre de ces connaissances dans les types d'espace physique, Berthelot et Salin (2001, 1995) considèrent l'enseignement de la géométrie en termes de problématiques. Une problématique est définie comme un type de connaissance mis en rapport avec l'espace au sein duquel la connaissance est sollicitée. Elles en identifient trois : une problématique pratique, une problématique de modélisation, aussi nommée spatio-géométrique, et une problématique géométrique.

La problématique pratique est caractérisée par des rapports qui réfèrent au sens pratique, non enseignés. Les connaissances spatiales de sens commun facilitent la résolution de problèmes spatiaux de l'espace physique souvent liés au quotidien. La vérification des résultats se fait dans l'espace physique sous le mode de l'évidence.

La problématique de modélisation est caractérisée par des rapports qui réfèrent à la résolution de problèmes nécessitant une schématisation de l'espace physique. Les

---

[11] Le point de vue de Brousseau (2000) concernant les types d'espace mérite d'être nuancé en contexte de modélisation instrumentée. Par exemple, un appareil GPS (Global Positioning System) dans la main d'un individu appartient au micro-espace. Par ailleurs, il permet de simuler les déplacements de l'individu par représentation sur une carte topographique dynamique pour résoudre un problème spatial dans un espace bien réel pouvant être associé au méso ou au macro-espace par un changement d'échelle sur le GPS.

connaissances spatiales favorisent l'entrée dans le problème, mais la solution s'élabore à l'aide de connaissances géométriques. La vérification des résultats s'effectuant dans l'espace physique ou géométrique.

La problématique géométrique est caractérisée par des rapports qui réfèrent à la résolution de problèmes dans l'espace géométrique. C'est sur la base de connaissances géométriques que s'élaborent la solution et la validation de celle-ci.

Selon Berthelot et Salin (1995, p. 199), il y a avantage à détecter la (les) problématique(s) dans laquelle (lesquelles) les élèves et les enseignants travaillent afin « […] de prévoir ou d'expliquer un certain nombre de phénomènes. ». Ainsi, ces auteurs donnent l'exemple du cas expérimenté[12] de la production de triangles à partir de divers triplets de valeurs numériques pour introduire l'inégalité triangulaire. Pour le cas limite, par exemple des valeurs de 4 cm, 5 cm et 9 cm, certains élèves produisent le tracé d'un triangle qui apparaît presque plat, mais pas tout à fait. Selon Berthelot et Salin (2001, 1995), ces élèves sont dans une problématique pratique dans la mesure où ils mettent en œuvre une connaissance spatiale qui consiste à considérer qu'un objet existe vraiment parce qu'on le voit, le distingue visuellement des autres. Les élèves n'ont aucune raison de douter de la stabilité de cette connaissance spatiale en particulier si les autres tracés de triangles, impossibles ou possibles, ont été admis comme de bonnes réponses. Le problème dans ce cas est que l'inégalité triangulaire est une connaissance géométrique dont la production de tracés est insuffisante pour en rendre mathématiquement compte.

L'exemple précédent illustre le cas d'élèves travaillant dans une problématique pratique en mettant en œuvre une connaissance spatiale relative à une figure de l'objet géométrique triangle. Selon Laborde et Capponi (1994, p. 172), l'enseignement ignore les rapports entre l'objet géométrique et la figure « […] en passant sous silence la distinction entre les deux ou en faisant comme si un lien naturel les unissait. ». Pourtant, la diversité des figures[13] utilisées dans l'enseignement de la géométrie devrait inciter à

---

[12] Voir Berté (1993) de même que Arsac, Chapiron, Colonna, Gemain, Guichard et Mante (1992).
[13] Par exemple des tracés à main levée ou à partir d'instruments géométriques avec ou sans indications symboliques de propriétés, des tracés en perspective d'un objet quelconque de l'espace physique et de ses différentes vues, etc.

plus de prise en compte de celles-ci. Selon ces auteurs, il y a souvent un écrasement des connaissances spatiales au profit des connaissances géométriques. Tout se passe comme si la lecture d'une figure se faisait de facto sous la lunette d'une lecture géométrique (théorique), ce qui est loin d'être toujours le cas pour les élèves. Pour Gobert (2007), l'enseignement se doit d'exposer clairement aux élèves les conditions d'une lecture géométrique des figures. Leur apprendre à lire des figures, sachant, entre autres, qu'il y a déjà un travail de modification qui s'opère entre la perception d'un objet de l'espace physique à sa représentation sur une feuille de papier (Parzysz, 2007, 1988). De plus, l'enseignement doit enrichir les figures de textes en offrant des problèmes pour lesquels figures et textes « […] sont indispensables tous deux et se complètent. » (Laborde, 1988, p. 356). Un travail sur les figures et les textes respectifs est nécessaire ainsi que sur leur coordination (Duval, 2005, 1995).

D'autres points de vue ont été émis pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Par exemple, Marchand (2004) a analysé et synthétisé les modèles de Piaget et Inhelder (1948), d'Hoffer (1977; voir Del Grande, 1990), de Dion, Pallascio et Papillon (1985) et de Van Hiele (1959; voir Lukenbein, 1982). Ces modèles ont en commun de se constituer au départ de l'espace physique vers l'espace géométrique et ils peuvent être associés à un ou plusieurs niveaux d'enseignement. Le modèle de Piaget est associé aux niveaux d'enseignement primaire et secondaire, celui d'Hoffer aussi, mais il semble, selon Marchand (2004), qu'il ne se rend pas aussi loin au secondaire. Les modèles de Dion, Pallascio et Papillon ainsi que de Van Hiele sont respectivement associés au niveau primaire, et du primaire à l'université. De plus, chacun des modèles aborde l'apprentissage de la géométrie en fonction d'un aspect en particulier. Le modèle de Piaget insiste sur l'action (de l'action concrète à l'action intériorisée), celui d'Hoffer sur la perception des objets et des figures, celui de Dion, Pallascio et Papillon sur les tâches mathématiques et celui de Van Hiele sur le langage verbal. Nous les présentons brièvement ci-après.

Le modèle de Piaget et Inhelder (1948) comprend essentiellement trois étapes de développement : de l'espace physique (environnement réel et action concrète) à la connaissance physique de l'espace et enfin, à la connaissance logicomathématique de l'espace (espace représentatif,[14] action intériorisée). En première étape, l'enfant explore son milieu par des activités d'observation et de manipulation. Il effectue une abstraction simple pour accéder à l'étape suivante. La connaissance spatiale à la seconde étape est de l'ordre du figuratif (perceptions, images mentales) et de l'opératoire (transformation de la réalité par l'intelligence). De la seconde à la troisième étape, l'enfant fait une abstraction réfléchissante où il est alors en mesure d'organiser des images mentales afin d'en dégager une structure (visualisation).

Le modèle d'Hoffer (1977; voir Del Grande, 1990) propose sept types de connaissances (habiletés) que l'élève doit acquérir sans a priori d'ordre hiérarchique de développement. Ce sont la coordination, la perception (avant-plan), la constance entre diverses figures, la position des figures ou des objets dans l'espace, la perception des relations, la discrimination visuelle et la visualisation.

La première habileté est la coordination des yeux avec les mouvements du corps qui s'acquiert dans la vie courante. La seconde habileté est la perception qui permet de distinguer une figure parmi d'autres qui l'entourent. Par exemple, l'usage d'un tangram exerce cette connaissance. La troisième habileté est la constance suggérant qu'un élève reconnaisse un élément caractéristique à diverses figures, par exemple un cercle jaune et un cercle bleu ont la même forme. La quatrième habileté implique qu'un élève identifie la position dans l'espace d'une figure ou un objet par rapport à lui-même. La cinquième habileté est la perception de relations entre deux objets. Marchand (2004) donne pour exemple la construction d'un assemblage de cubes à partir de sa représentation en perspective. La sixième habileté permet à l'élève de percevoir les propriétés visuelles des figures, des objets et d'être ainsi capable de les différencier ou associer. La septième habileté favorise le recours aux images mentales des figures et des objets (action intériorisée).

---

[14] Marchand (2004, p. 33) définit l'espace représentatif comme « […] un tout complexe résultant de l'évocation d'objets en leur absence, c'est-à-dire où les images mentales étendent l'espace au-delà de l'espace physique. ».

Le modèle de Dion, Pallascio et Papillon (1985), contrairement à celui d'Hoffer (1977, voir Del Grande, 1990), est hiérarchique incluant cinq actions. La visualisation est la première action. Elle consiste à mémoriser plusieurs images mentales d'objets, dans l'éventualité, entre autres, de reconnaître facilement des objets semblables. Ce premier type d'action se situe déjà au niveau de l'action intériorisée. Il implique un travail préalable de manipulations concrètes. La seconde action, nommée structuration, vise la reconstitution d'objets à partir de propriétés topologiques. Il s'agit, par exemple, de déterminer si deux objets sont équivalents. La transfiguration est l'action qui permet de décrire un objet de différentes façons, par exemple construire un objet à partir de sa description écrite ou vice versa. L'activation d'images mentales peut être nécessaire à ce niveau. La quatrième action est la détermination, c'est-à-dire une description plus poussée incluant des critères métriques. La dernière action, dite classification, facilite l'identification de classes d'objets.

Dans le quatrième modèle élaboré par Van Hiele (1959; voir Lukenbein, 1982), l'évolution de la pensée géométrique est caractérisée selon cinq niveaux. Au premier niveau (identification-visualisation), l'élève fait une reconnaissance globale et visuelle d'une figure. Au second niveau (analyse), la reconnaissance est analytique sans ordre; l'élève décrit les propriétés d'une figure sous la forme d'une litanie. Au troisième niveau (déduction informelle), la reconnaissance est analytique; l'élève ordonne les propriétés d'une figure et il comprend une définition mathématique en tant qu'énoncé économique, hiérarchique. Au quatrième niveau (déduction formelle), l'élève comprend une démonstration. Au cinquième niveau (rigueur), l'élève[15] est en mesure de comparer différentes axiomatiques.

Le modèle de Van Hiele fut nuancé par d'autres auteurs qui, sans contredire les niveaux, y ont apporté des précisions quant au degré d'acquisition d'un niveau. Par exemple, en affirmant que des élèves faisaient référence à des niveaux différents selon le problème abordé ou selon que leurs réponses correspondaient simultanément à deux

[15] Le terme *étudiant* serait plus approprié puisque la comparaison d'axiomatiques n'est pas au menu des programmes d'études du secondaire; elle relève du niveau universitaire.

niveaux dominants consécutifs (Burger et Shaughnessy, 1986). Parzysz (2001) et Braconne Michoux (2008) ont mis en relation le modèle de Van Hiele avec celui développé par Houdement et Kuzniak (1998-1999).[16] Ces derniers définissent trois géométries en fonction des liens unissant l'intuition, l'expérience et la déduction : la géométrie naturelle (GI), la géométrie axiomatique naturelle (GII) et la géométrie axiomatique formaliste (GIII). Grosso modo, dans la géométrie naturelle, il y a un lien fort avec la réalité. Cette géométrie correspondrait à l'école primaire. La géométrie axiomatique naturelle est une schématisation de la réalité et elle serait associée à l'école secondaire. Quant à la géométrie axiomatique formaliste, elle présente une coupure avec la réalité et elle relèverait de l'enseignement supérieur. Ainsi, s'appuyant de l'idée que la présence d'une axiomatique n'est pas indispensable dans une première modélisation[17] (Henry, 1999), Braconne Michoux (2008) a montré que le deuxième niveau (analyse) du modèle de Van Hiele correspondrait, selon les activités, à un intermédiaire entre les géométries GI et GII.

Les auteurs ci-dessus mentionnés offrent des points de vue sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Mais comment caractérise-t-on l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au Québec? Que proposent les programmes d'études québécois en géométrie au primaire et au premier cycle du secondaire?

1.2.3 La géométrie dans les programmes d'études

À l'analyse des programmes du primaire et du premier cycle du secondaire, il appert que l'apprentissage de la géométrie correspond à celui d'un empilement d'objets géométriques[18] pour lesquels la question du changement de valeur épistémique soit peu abordée au sujet du passage d'une géométrie pratique vers une géométrie théorique. Ce n'est que par une lecture fine des composantes des compétences des programmes qu'il est possible de trouver des indices de ce changement, sans pour autant en être beaucoup

[16] Ce modèle est un élément de notre cadre théorique. Nous l'expliquons plus en détails au chapitre 2.
[17] Même si la pensée reste orientée par un regard théorique.
[18] Les objets géométriques sont classés sous les rubriques *Savoirs essentiels* (programme du primaire) et *Concepts et processus* (programme du premier cycle du secondaire).

plus éclairé. En effet, dans la transition du programme du primaire à celui du premier cycle du secondaire, l'étude des angles, des segments, des droites, des triangles et des quadrilatères, amorcée au primaire, s'approfondit en première secondaire notamment par l'ajout ou la structuration d'éléments.[19] Mais la liste de ces éléments présente des lacunes qui n'aident pas à entrer dans une géométrie théorique dans la mesure où des objets géométriques sur lesquels s'appuyer pour prouver ou justifier dans des problèmes de première secondaire sont absents du programme du premier cycle et n'apparaissent qu'au programme du second cycle.

Cela est vrai notamment des cas de congruence des triangles qui permettraient de prouver, entre autres théorèmes inscrits au programme du premier cycle, par exemple les suivants : *Dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus*; *Dans un triangle isocèle, la médiane relative à la base est à la fois bissectrice, hauteur et médiatrice de cette base*. De ce dernier théorème, il résulte que tout triangle isocèle peut être partagé en deux triangles rectangles congrus (ou tout triangle rectangle soit considéré comme la moitié d'un triangle isocèle). Aussi, les cas de congruence des triangles rectangles (autres éléments relayés au second cycle) sont utiles pour prouver le théorème suivant : *Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes internes (et par suite correspondants) sont congrus*; théorème à partir duquel il est possible de prouver celui de la somme des angles intérieurs d'un triangle. Ajoutons que c'est par les cas de congruence des triangles que se déduit la congruence des côtés opposés du parallélogramme ou que ses diagonales se coupent en leur milieu. Et que de l'étude du parallélogramme découle celle des parallélogrammes particuliers que sont le losange, le rectangle et le carré.

D'autres éléments du programme du second cycle mériteraient d'être introduits au premier cycle. Par exemple, le théorème selon lequel *Dans tout triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse égale la moitié de l'hypoténuse* faciliterait la mise en

[19] L'annexe 1 présente les objets géométriques angles, segments (droites), triangles et quadrilatères traités dans les programmes du primaire et du premier cycle du secondaire. Nous avons considéré les angles et les segments (droites) car l'étude des triangles et des quadrilatères requiert aussi celle des relations entre leurs angles et leurs côtés.

relation du cercle avec le triangle rectangle pour des problèmes de justification et de construction.

Par ailleurs, le programme du premier cycle du secondaire se distingue de celui du primaire entre autres par des exigences différentes relatives au raisonnement et à la communication de ce raisonnement. Les programmes de mathématiques du primaire et du secondaire sont élaborés en termes de compétences. Les compétences concernent la résolution d'une situation-problème, le raisonnement et la communication à l'aide du langage mathématique. Dans les deux programmes, nous trouvons les mêmes libellés pour deux compétences : *Résoudre une situation-problème* et *Communiquer à l'aide du langage mathématique*. Par contre, la compétence du primaire *Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques* est traduite par *Déployer un raisonnement mathématique* au secondaire. La distinction entre ces libellés n'est pas que lexicale dans la mesure où le raisonnement de l'élève est censé évoluer notamment par la possibilité d'émettre des conjectures et élaborer des démonstration ou des preuves. Ces éléments sont spécifiques de la compétence à raisonner dans le programme du secondaire. De plus, l'expression du raisonnement évolue au secondaire par l'emploi d'un langage mathématique comprenant, entre autres, des définitions[20] et des énoncés (principalement des théorèmes).

---

[20] Ce qui ne veut pas dire que les définitions ne soient pas abordées dans les manuels du primaire ou par l'enseignant.

> « Les énoncés que l'on trouve à la fin de cette section sont indiqués à titre d'exemples; […] Les propriétés étudiées, sans pour autant qu'il les ait démontrées, doivent constituer des conclusions que l'élève est amené à établir à partir d'activités d'exploration qui sollicitent, entre autres, son sens spatial ainsi que sa connaissance des propriétés des transformations géométriques. Ces énoncés l'aident à justifier sa démarche lorsqu'il résout une situation-problème ou qu'il déploie un raisonnement mathématique. Afin de l'initier au raisonnement déductif, on lui montre comment déduire des propriétés à l'aide d'un raisonnement rigoureux et à partir de définitions ou de propriétés déjà établies. (Les énoncés 17, 19, 24 et 25 à la page 261 peuvent être utilisés à cette fin.) […] Afin de déterminer une mesure manquante et de justifier les étapes de sa démarche, l'élève s'appuie sur des définitions et des propriétés plutôt que sur le mesurage. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 260).

Cet extrait suggère que des énoncés, qui sont des théorèmes de géométrie plane, sont ici transformés en énoncés admis puisque l'élève n'a pas à les démontrer. Ils sont des conclusions issues d'activités d'exploration. En même temps, il est suggéré de faire (ou faire faire?) à l'élève la démonstration de quatre énoncés.[21] Cette proposition révèle une certaine position à l'égard des théorèmes transformés en énoncés admis et soulève quelques questions. Une première question porte sur la perception du caractère général d'un théorème. Combien d'explorations seront nécessaires, par exemple sur les angles opposés du parallélogramme, pour admettre leur congruence? Une deuxième question apparaît en complément de la première; ne renforce-t-on pas l'idée que quelques cas suffisent à prouver ou à se convaincre par l'utilisation stricte d'activités d'exploration? Si des énoncés sont des conclusions d'activités d'exploration et d'autres proviennent d'un processus de déduction, quel est alors leur statut aux yeux des élèves? Seront-ils tantôt des conjectures formulées par eux, des théorèmes donnés par la géométrie, des résultats d'explorations successives? *Déployer un raisonnement mathématique* est définie notamment par les composantes *Réaliser des démonstrations ou des preuves* et *Établir des conjectures*. La démonstration et la preuve étaient dans les programmes de

---

[21] Les angles opposés par le sommet sont isométriques (17). Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques (19).La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180 degrés (24). La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents (25).

quatrième (Gouvernement du Québec, 1996) et cinquième secondaire (Gouvernement du Québec, 1999) des années 90, comme en fait foi cet extrait de quatrième :

> « Le modèle proposé, depuis le début du secondaire, permet à l'élève de développer sa pensée géométrique selon une hiérarchie. De la perception globale des formes à l'analyse des propriétés relatives à ces formes, l'élève est arrivé à faire des déductions simples en établissant des relations entre ces propriétés. Elle ou il doit maintenant établir le lien entre les étapes de la résolution d'un problème et une argumentation juste et rigoureuse pour établir une preuve. Dans le but d'arriver à des démonstrations de mieux en mieux organisées, il faut mettre l'accent sur le raisonnement proprement dit. » (Gouvernement du Québec, 1996, p. 21).

Ces mêmes programmes contenaient des îlots déductifs. Il s'agissait d'énoncés géométriques pour lesquels une démonstration était attendue de l'élève, assurant ainsi un lien entre l'exigence d'un apprentissage de la preuve et les propriétés sujettes à être démontrées. Qu'en est-il du programme actuel au premier cycle du secondaire? Où sont les îlots déductifs? Sont-ce les énoncés 17, 19, 24 et 25? Les emprunts aux programmes de quatrième et cinquième secondaire des années 90 semblent introduire une confusion dans le programme en géométrie par la présence explicite des composantes *Réaliser des démonstrations ou des preuves* et *Établir des conjectures*. Dans ce contexte, quelles positions pédagogique et épistémologique faut-il adopter pour enseigner et apprendre la géométrie au premier cycle du secondaire?

1.2.4 La géométrie dans les manuels scolaires : bref contexte général

Afin d'être approuvés, les manuels scolaires sont conçus selon les prescriptions ministérielles des programmes. Ainsi, les observations que nous avons faites à l'analyse du programme du premier cycle du secondaire sont appropriées à celle des manuels. Par exemple, nous retrouvons aussi des théorèmes de la géométrie euclidienne présentés en énoncés admis, conclusions d'activités d'exploration ou de démonstration, mais dans une moindre mesure pour la démonstration. C'est le cas, entre autres, du théorème de la somme des angles intérieurs du triangle. Par ailleurs, les problèmes des manuels[22] que nous avons observés se situent pour la plupart entre une géométrie pratique et théorique. Nous en présentons l'analyse à la section 4.1.

1.3 Synthèse du questionnement

L'apprentissage de la géométrie euclidienne vise une maîtrise d'allers et retours entre les espaces physique et géométrique. Le développement de la pensée géométrique des élèves s'opère au sein de pratiques pédagogiques orientées en particulier par les prescriptions ministérielles des programmes d'études et par les éventuelles révisions, modifications et validations de manuels scolaires qu'elles engendrent.

Dans la transition des programmes d'études du primaire à celui du premier cycle du secondaire, il est attendu que les élèves approfondissent leurs réseaux conceptuels géométriques et s'expriment davantage à leurs propos notamment par des définitions et des théorèmes géométriques. En cela, les programmes suivent une certaine logique de progression. Une logique où avancer dans les apprentissages de la géométrie implique, entre autres, de pouvoir générer un discours de plus en plus formel, c'est-à-dire adhérer à une position théorique existante, celle de la géométrie euclidienne.

Par ailleurs, il est aussi attendu que les élèves progressent dans la mise en œuvre d'un raisonnement inductif ou déductif. Ce double emploi du raisonnement suggère que des énoncés, tels des définitions ou théorèmes, soient proposés à différentes fins, par exemple pour justifier les étapes de résolution d'un problème ou trouver une mesure manquante. Le programme prévoit que des énoncés soient des conclusions d'activités d'observation et d'exploration et d'autres proviennent d'un processus de déduction, tel que dit précédemment. Ces diverses propositions d'emploi des énoncés ne situent pas clairement le statut de la géométrie à enseigner et à apprendre. Certes, il ne s'agit pas d'une géométrie de l'observation, pour reprendre ici l'expression de Rauscher (1994), puisque selon le programme « […] une constatation ou des mesures à partir d'un dessin

---

[22] Nous avons analysé des problèmes des manuels suivants : *À vos maths!* manuel B; *Perspective* volume 1A; *Perspective* volume 2A; *Panor@math* manuel A volume 1; *Panor@math* manuel A volume 2.

ne prouvent pas qu'une conjecture est vraie mais peuvent toutefois servir à en formuler une. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 243). Mais il ne s'agit pas non plus d'une immersion complète dans une géométrie de la déduction. Il existe un double discours puisque le programme suggère que des énoncés géométriques soient utilisés sans avoir été démontrés par les élèves, alors que d'autres pourraient faire l'objet d'une initiation au raisonnement déductif par les élèves.

> « Les propriétés étudiées, sans pour autant qu'il les ait démontrées, doivent constituer des conclusions que l'élève est amené à établir à partir d'activités d'exploration « […] Afin de l'initier au raisonnement déductif, on lui montre comment déduire des propriétés à l'aide d'un raisonnement rigoureux et à partir de définitions ou de propriétés déjà établies. » (Gouvernement du Québec, 2003, p. 260).

Néanmoins de quelle géométrie parle-t-on? D'une géométrie de l'entre deux, de transition entre une géométrie de l'observation et celle de la déduction? Rauscher (1994, p. 292) a souligné le caractère transitoire d'une géométrie qui n'est plus une géométrie de l'observation, c'est-à-dire où « […] les observations à faire ne reposent que sur des impressions visuelles et où les figures ne sont pas porteuses d'informations clairement annoncées. », mais qui n'est pas non plus une géométrie de la déduction où « […] à partir d'informations clairement annoncées (les hypothèses) et de propriétés connues (axiomes ou théorèmes), il s'agit de prouver (démontrer) l'existence d'informations (conséquences) qui n'étaient pas annoncées au départ. » (Rauscher, 1994, p. 292). Dans cette géométrie de transition, nommée par Rauscher (1994) *géométrie de traitement*, les figures géométriques sont porteuses d'informations qui sont nécessaires à la gestion d'une situation géométrique même si cette gestion n'implique pas de règles d'inférence.

Cette position d'une géométrie de l'entre deux dans le programme serait-elle due à un problème de transposition didactique où le savoir géométrique à enseigner ne serait peut-être plus en filiation avec le savoir géométrique savant? Quoi qu'il en soit, cette position de la géométrie augmente dans une certaine mesure la responsabilité des choix et des interventions de l'enseignant. Certes, l'enseignant est toujours responsable de sa pédagogie. Mais il nous semble que l'ambivalence des prescriptions géométriques du programme appelle l'enseignant à faire preuve à encore plus de compétences d'ordre mathématique, épistémologique et didactique.

Les éléments relatifs au programme d'études décrivent un certain panorama de l'enseignement québécois de la géométrie au premier cycle du secondaire. En ce qui concerne la position de la géométrie au sein de ce programme, elle peut être déplorée par plusieurs personnes qui ont connu et profité d'un enseignement plus classique de la géométrie. Nous entendons celui s'approchant de la méthode grecque, c'est-à-dire qui permet de découvrir par un raisonnement déductif des propriétés d'objets géométriques et des relations entre eux dans un ordre logique. Or, nous faisons le choix de ne pas discuter dans l'immédiat de ce qui pourrait être, mais bien de ce qui en est actuellement. De plus, des personnes pourraient objecter que cette position sibylline de la géométrie dans le programme n'est pas importante en soi, car les prescriptions gouvernementales, bien qu'obligatoires, ne représentent souvent qu'une indication moyenne dans le milieu de pratique (Boule, 2001). D'autres personnes auraient pour argument celui de reporter l'étude de la géométrie déductive à une étape ultérieure du parcours scolaire des élèves puisque le programme du deuxième cycle du secondaire présente la même compétence de raisonnement que celle du programme de premier cycle et à laquelle est associée une composante de démonstration, de preuve. Par contre, si l'enseignement de la géométrie poursuit l'objectif de permettre aux élèves de distinguer en complémentarité l'espace physique de l'espace géométrique, alors, nonobstant la valse-hésitation du raisonnement déductif du programme (Caron et René de Cotret, 2007), la question des répercussions auprès des élèves demeure. Quelle géométrie propose-t-on effectivement aux élèves de première secondaire? Leur permet-elle d'amorcer ou faire ce passage d'une géométrie de l'observation à une géométrie de la déduction?

Le contexte décrit précédemment nous conduit à la formulation générale d'un objectif et de questions de recherche que nous enrichirons et préciserons au chapitre 2.

Objectif : Nous souhaitons dégager un portrait d'élèves de première secondaire à partir duquel voir un état de leurs connaissances[23] en géométrie dans le panorama actuel de son enseignement au Québec.

---

[23] Le mot *connaissance* réfère à « […] ce qui est connu, ce que l'on sait pour l'avoir appris. » (Robert, 2009, p. 509). Nous lui substituerons le mot *conception* après l'avoir défini au chapitre 2.

Question 1 : Quel travail géométrique les enseignants proposent-ils à des élèves de la première secondaire?

Question 2 : Quelles connaissances géométriques les élèves développent-ils au regard de ce qui leur est offert?

Chapitre 2 Cadre théorique

Afin d’analyser le travail géométrique proposé par les enseignants à leurs élèves, il faut savoir que celui-ci se traduit en diverses facettes de leur activité professorale qui consistent notamment à choisir des problèmes, en résoudre certains en classe, faire des exposés théoriques, les exemplifier, etc. Ce que les enseignants suggèrent, font, exigent, acceptent, réfutent, sont autant d’actions constitutives d’un environnement dans lequel les élèves s’exercent à la géométrie. Les connaissances géométriques qu’ils pourraient y développer, et développent effectivement, sont fonction, entre autres, de problèmes pour lesquels enseignants et élèves interagissent dans le contexte scolaire actuel. Ainsi, les éléments théoriques présentés dans ce chapitre sont choisis de manière à tenir compte à la fois de l’activité professorale déployée en géométrie dont les choix de problèmes et des connaissances géométriques mobilisées par les élèves.

2.1 Éléments pour une étude du système didactique

Considérer l’activité des enseignants et des élèves renvoie à l’étude du système didactique pour lequel Brousseau (1998) a élaboré la théorie des situations didactiques. Nous la présentons ci-après suivie de la théorie des niveaux caractéristiques de l’activité du professeur, élaborée par Margolinas (2004, 2002, 1998) en relation à la théorie de Brousseau (1998).

2.1.1 La théorie des situations didactiques de Guy Brousseau

La théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) oriente l’étude de l’enseignement et de l’apprentissage des mathématiques. Elle modélise principalement trois composantes du système didactique classique : le savoir scolaire, l’enseignant et l’élève. De façon plus fine et en se plaçant du côté de l’élève, Brousseau introduit les notions de milieu et de connaissances de l’élève. En classe de mathématiques, l’élève construira ses connaissances en s’adaptant à un milieu, source de défis, de déséquilibres, de contrariétés, de contradictions. Pour que l’élève acquière une nouvelle connaissance ou le germe d’une nouvelle connaissance, le milieu doit révéler l’insuffisance ou l’échec des connaissances que l’élève met en œuvre dans ses efforts pour résoudre un problème ou révéler les limites du domaine de validité au sein duquel il avait l'habitude de les utiliser. Les problèmes sont donc au cœur de la signification des connaissances acquises par l'élève. Les connaissances mathématiques prennent tout leur sens dans la mesure où elles favorisent la résolution des problèmes.

L'enseignant choisira des problèmes susceptibles de provoquer les adaptations souhaitées de l'élève au milieu. Les problèmes feront agir, parler et réfléchir l'élève de son gré, interagir avec le milieu défini comme le « […] système antagoniste du système enseigné. » (1998, p. 93). Brousseau qualifie le milieu d'antagoniste parce qu'il doit réagir aux propositions de l'élève dans une visée d'apprentissage.[24] Les relations entre les propositions de l'élève et le milieu déterminent la situation adidactique. Dans celle-ci, les problèmes octroient à l'élève la plus large part d'initiative possible. C'est la partie déléguée à l'élève. Brousseau parle du processus de dévolution d'un problème à l'élève.

L'élève est donc appelé à construire de nouvelles connaissances en modulant ses actions selon les rétroactions du milieu dans une situation adidactique. Mais lorsque l'enseignant délègue un problème à l'élève, il n'est pas pour autant inactif. D'une part, il s'assure de maintenir l'élève dans la situation adidactique, par exemple en répétant certaines consignes du travail prescrit et, d'autre part, il est en mesure d'observer l'élève en situation de résolution du problème proposé. Ces observations lui servent à effectuer éventuellement des rétroactions, à moduler certaines de ses interventions en fonction de ce qu'il perçoit, à apporter des correctifs à sa planification, etc. En ce sens, l'activité de l'enseignant n'est pas univoque et nous devons en tenir compte. Nous abordons cet aspect à la section 2.1.2.

L'élève en situation adidactique interagit avec un milieu. Le milieu qu'il investit est matériel.[25] Le problème à résoudre, les outils techniques ou technologiques pour le

---

[24] Cette visée de l'apprentissage s'inspire de la théorie piagétienne selon laquelle un individu apprend en s'adaptant par assimilation et accommodation à un milieu, source de contradictions et de déséquilibres.

[25] Notons que le milieu avec lequel interagit l'élève ne correspond pas nécessairement à celui proposé par l'enseignant, puisque ce que l'élève prend en considération est fonction de ses connaissances et de sa façon d'appréhender le problème en jeu. (Voir à ce sujet René de Cotret, 2013).

résoudre tels que les instruments de géométrie, la calculatrice, l'ordinateur, le matériel de manipulation sont autant d'exemples d'éléments constitutifs du milieu de l'élève. Le milieu est intellectuel si l'élève considère certaines notions mathématiques comme des outils au sens de Douady (1986).[26] Enfin, le milieu a une dimension humaine lorsque la situation adidactique nécessite que l'élève échange avec ses pairs, par exemple dans une situation de formulation.

En classe de mathématiques, l'élève réagit à un milieu en situation adidactique. De plus, il réagit aux interventions de son enseignant et aux interactions qu'il entretient avec lui et ses pairs. Ainsi, la construction des connaissances de l'élève au sein d'une situation adidactique s'insère à son tour dans la situation didactique, c'est-à-dire celle englobant l'environnement de l'élève dont l'enseignant.[27] Brousseau schématise ainsi la situation didactique.

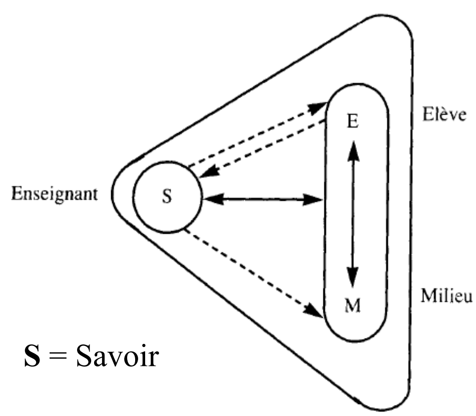


Figure 1 L'enseignant, l'élève et le milieu (Brousseau, 1998)

Sur la figure 1, la double flèche verticale indique les actions et rétroactions de l'élève avec le milieu dans la situation adidactique. La double flèche horizontale montre les actions et rétroactions de l'enseignant avec le système des interactions élève-milieu.

[26] Pour Douady (1986), une notion mathématique est à la fois un outil et un objet. Elle est un outil lorsque notre intérêt porte sur l'usage que nous en faisons pour résoudre un problème. Elle est un objet culturel dans la mesure où elle participe de la construction d'un savoir savant socialement reconnu.

[27] Kuzniak (2004, p. 25) souligne qu'aux débuts de ses travaux Brousseau s'était plus particulièrement intéressé aux situations adidactiques qu'au rôle de l'enseignant. Selon lui, trois raisons motivaient ce choix : la rareté des situations adidactiques dans un contexte privilégiant la transmission du savoir de type magistral, le courant psychopédagogique des années 70 dominé par le modèle constructiviste, la croyance qu'une situation adidactique bien conçue pouvait presque s'auto-suffire.

Pour Brousseau (1998), l'enseignant est l'organisateur des *jeux* de l'élève avec le milieu. De plus, l'enseignant agit directement sur l'élève, par exemple en le rappelant à la tâche, ou encore sur le milieu de l'élève, entre autres en choisissant les problèmes et leurs conditions de résolution. Les flèches tracées en pointillés illustrent ces dernières interventions. La lettre S correspond au mot *savoir.* À ce propos, les termes savoir et connaissance revêtent des sens différents. Le savoir est qualifié comme une construction socioculturelle qui vit dans une institution et :

> « […] qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. » (Laparra et Margolinas, 2010, p. 146).

Le savoir correspondrait à un état au sens de Sfard (1991), soit à sa dimension structurelle plutôt qu'opératoire. Cette idée peut être rapprochée de la dialectique outil-objet de Douady (1986).

Une connaissance est ce qui permet l'équilibre entre l'élève et le milieu, c'est-à-dire ce que l'élève met en œuvre quand il investit un problème en vue de sa résolution. Cette définition couvre un vaste éventail de connaissances : connaissances antérieures, mémorisées, issues du contrat didactique, etc. Des connaissances provenant du contrat didactique sont celles que l'élève juge efficientes, lui permettant d'obtenir de bonnes réponses selon les attentes qu'il perçoit de son enseignant; attentes relevant du contrat didactique. Le contrat didactique est défini par Brousseau (1998, p. 60) comme « […] la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. ».

En géométrie, il existe des distinctions entre les connaissances spatiales relatives à l'espace physique et les connaissances géométriques issues de l'espace géométrique (théorique). Marchand (2004, p. 29) définit les connaissances spatiales comme :

> « […] représentant un processus qui, partant des sensations, transforme toutes les données relatives à l'espace (forme, transformation et déformation), tirées du milieu, et les rend de plus en plus abstraites. »

Les connaissances géométriques sont associées à « […] un processus formalisant et axiomatisant les différents objets et leurs relations dans le but de créer un système cohérent les représentant […] » (Marchand, 2004, p. 29). À ce point de notre exposé, nous nous limiterons à la définition d'une connaissance de Brousseau (1998), c'est-à-dire ce qui favorise l'équilibre entre l'élève et le milieu; nous la bonifierons par l'ajout d'éléments décrits à la section 2.3.1.

L'enseignant a pour projet d'enseigner à l'élève des savoirs mathématiques. Ces savoirs furent construits au cours de l'histoire principalement à partir de connaissances issues de la recherche de solutions à des problèmes intra ou extra mathématiques. Même si l'enseignant ne prévoit pas réinvestir les problématiques historiques ayant menées au développement des savoirs, il désire néanmoins faire expérimenter à l'élève la richesse qu'ils représentent pour l'exercice de la mathématique. Mais cet exercice implique de résoudre des problèmes. Ainsi, la transmission des savoirs mathématiques doit pouvoir s'opérer par leur mise en contexte pour l'élève.

> « Enseigner un savoir suppose (quel que soit le choix pédagogique) un processus de contextualisation: ce que l'élève rencontre en situation est d'abord une connaissance. Mais les connaissances fonctionnent en premier lieu dans le régime de l'implicite, elles sont contextualisées, très dépendantes de la situation. Le processus qui fait changer de statut la connaissance en la faisant évoluer graduellement vers un régime de savoir est le processus d'institutionnalisation, qui passe par des formulations, des validations, une décontextualisation, une mémorisation, etc. » (Laparra et Margolinas, 2010, p. 146).

Savoir et connaissance sont ainsi reliés dans la théorie des situations didactiques. L'enseignant est le maître d'œuvre qui assure l'adéquation de la connaissance acquise par l'élève avec le savoir mathématique. Mais le savoir visé par l'enseignement n'est pas tributaire d'une seule situation adidactique. Selon Brousseau (1998), pour qu'il y ait adéquation entre la connaissance et le savoir visé, l'enseignant disposera de plusieurs situations adidactiques formant une situation fondamentale du savoir visé. Cependant, Margolinas (1998) affirme que les enseignants dans les classes ordinaires n'organisent pas leurs cours en une succession de situations adidactiques, même s'ils poursuivent l'objectif de faire apprendre des savoirs et choisissent des problèmes pour leurs élèves, les plongeant ainsi dans un milieu donné. Cette perspective n'interfère pas avec celle de

Brousseau (1998), mais elle en module l'aspect systématique de recherche de situations adidactiques constituantes d'un savoir donné.

Par ailleurs, tel que dit précédemment, l'activité enseignante n'est pas univoque dans la situation didactique. En effet, si la dévolution d'une situation adidactique permet à l'enseignant notamment d'observer l'élève, en retour, ses observations lui fournissent des informations à traiter en temps réel ou différé par rapport à la situation didactique. Le traitement de ses informations nous invite à considérer d'autres aspects de l'activité enseignante.

2.1.2 Les niveaux de l'activité du professeur de Claire Margolinas

Pour observer l'activité enseignante au sein de classes ordinaires, il faut disposer d'un modèle d'analyse qui rende compte du travail (une partie du moins) conduisant à la situation didactique ou à partir de la situation didactique, repérer des choix ou des motivations à l'origine des choix. Les décisions de l'enseignant relatives aux problèmes ou aux stratégies pédagogiques, par exemple, sont influencées consciemment ou non par divers facteurs. Certains facteurs relèvent de l'institution : la commission scolaire et ses politiques organisationnelles et pédagogiques, l'école, les collègues, les manuels, les outils informatiques, etc. D'autres facteurs appartiennent à la sphère plus privée de sa pratique, par exemple lorsqu'il décide de ne plus enseigner une notion de telle manière en s'appuyant sur une expérience de classe antérieure.

Pour Margolinas (2004, 2002, 1998), l'activité enseignante se traduit en niveaux caractéristiques qui ne sont pas mutuellement exclusifs et qui s'influencent l'un l'autre. Globalement, nous retrouvons les niveaux suivants :

> Le niveau 3 concerne les conceptions et les valeurs relatives à l'enseignement et à l'apprentissage en général ou plus spécifiquement aux mathématiques. Il s'agit du niveau idéologique ou noosphérien.[28]

[28] Dans le cadre de la transposition didactique (Chevallard, 1991) adaptant un savoir savant en savoir à enseigner, la noosphère est ce qui assure une compatibilité entre le système didactique et l'environnement social. Les acteurs de la noosphère sont des experts d'une discipline, des représentants de l'institution scolaire, etc. Ils ont pour mandat de légitimer les savoirs à enseigner dégagés des savoirs savants.

Le niveau 2 est celui de la formation d'un thème ou d'un chapitre en particulier, à l'intérieur duquel s'inscrivent des leçons. Ce niveau est caractérisé par un ensemble de problèmes, un cahier de théorie, une planification du thème, etc. Il s'agit du niveau de construction d'un thème.

Le niveau 1 est spécifique à la préparation d'une séance de classe : objectif visé, préparation du matériel, etc. Il s'agit du niveau de projet de leçon.

Le niveau 0 traite de l'actualisation d'une leçon en classe. Il s'agit du niveau de la situation didactique.

Le niveau -1 est celui de l'observation de l'élève avec le milieu dans la situation adidactique. Il s'agit du niveau de la dévolution.

Pour étayer son modèle, Margolinas (2004, 2002,1998) part du principe qu'un enseignant est en quelque sorte toujours sous tension entre ce qu'il désire enseigner et les réactions de ses élèves, cela est perceptible en classe et demeure lorsqu'il n'y est plus. La situation de classe dans laquelle il interagit avec ses élèves est son principal niveau d'activité. Cependant, l'enseignant agit à d'autres niveaux et pas nécessairement de façon linéaire ou préméditée. Par exemple, en observant ses élèves (niveau -1), l'enseignant prendra une décision (niveau 0) non prévue à sa planification de la leçon (niveau 1) et modifiera peut-être ladite leçon pour une autre classe (niveau 0), ce qui sera susceptible de lui faire réviser l'organisation d'un thème mathématique (niveau 2) voire sa conception d'une notion à enseigner (niveau 3).

L'activité professionnelle de l'enseignant l'oblige à une prise de décisions. En retour, celle-ci lui permet d'apprendre sur son activité professionnelle. De cette idée en lien avec la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), Margolinas (2004, 2002, 1998) conçoit l'enseignant tel un sujet qui interagit avec un milieu et se nourrit de cette interaction. Pour modéliser une structuration du milieu de l'activité enseignante, elle s'inspire du milieu de l'activité de l'élève (Brousseau, 1998). En effet, à partir du milieu matériel, ce dernier considère le milieu d'activité de l'élève en plusieurs couches comme celles d'un oignon. La métaphore de l'oignon aide à visualiser la situation d'un niveau comme le milieu de la situation de niveau supérieur.

Ainsi, selon cette optique et à partir de la situation didactique, Margolinas (2004, 2002, 1998) propose le tableau I suivant en ajoutant les niveaux relatifs aux situations de projet (+1), de construction (+2) et noosphérienne (+3). Ces niveaux sont nommés surdidactiques. Dans le tableau I, les lettres M, E, P, et S signifient respectivement, milieu, élève, professeur et situation.

Tableau I Structuration du milieu (Margolinas, 2004, 2002, 1998)

<table>
<tr><td>M+3: M de construction</td><td></td><td>P+3: P-noosphérien</td><td>S+3: Situation noosphérienne</td><td rowspan="3">Surdidactique</td></tr>
<tr><td>M +2: M de projet</td><td></td><td>P+2: P-constructeur</td><td>S+2: Situation de construction</td></tr>
<tr><td>M+1: M-didactique</td><td>E+1: E-réflexif</td><td>P+1: P-projeteur</td><td>S+1: Situation de projet</td></tr>
<tr><td>M0: M d’apprentissage</td><td>E0: Élève</td><td>P0: Professeur</td><td>S0: Situation didactique</td><td rowspan="4">Adidactique</td></tr>
<tr><td>M-1: M de référence</td><td>E-1: E-apprenant</td><td>P-1: P-observateur</td><td>S-1: Situation d’apprentissage</td></tr>
<tr><td>M-2: M-objectif</td><td>E-2: E-agissant</td><td></td><td>S-2: Situation de référence</td></tr>
<tr><td>M-3: M-matériel</td><td>E-3: E-objectif</td><td></td><td>S-3: Situation objective</td></tr>
</table>

En commençant par le bas du tableau I et en remontant, le milieu matériel (M-3) correspond aux éléments matériels de la situation. Par lui, l’élève entre dans le problème et y travaille avec ses connaissances. Dans le milieu objectif (M-2), l’élève se pose des questions et élabore des stratégies. Les rétroactions de ce milieu objectif valide-invalide ses interventions. Les stratégies mises à l’essai dans le milieu objectif deviennent à leur tour des énoncés du milieu de référence. L’élève saisit la connaissance en jeu. Celle-ci est une source de validation avec le savoir visé dans la situation didactique.

Pour compléter la présentation du modèle, soulignons que Margolinas (2004, 2002, 1998) propose deux analyses, l’une ascendante et l’autre descendante. L’analyse ascendante favorise une remontée des niveaux à partir de la situation didactique. Il est alors possible de s’interroger sur ce que l’enseignant a vécu en classe, les répercussions sur les situations de projet, de construction et noosphérienne. L’analyse descendante se concentre à identifier des valeurs et conceptions privilégiées par l’enseignant. Il s’agit de comprendre leur influence dans l’élaboration de la situation de construction. Par exemple, sur la base de quels critères l’enseignant juge-t-il un problème plus important qu'un autre pour un thème mathématique donné? Comment des choix de la situation de construction interfèrent-ils dans l'élaboration du projet de leçon? Dans quelle mesure les choix envisagés dans le projet d'une leçon se sont-ils concrétisés dans la situation didactique?

En terminant, rappelons que parmi les niveaux de l'activité enseignante, le projet de construction (niveau 2) implique notamment le choix de problèmes spécifiques d'un thème donné. Aussi, d'autres éléments théoriques s'avèrent nécessaires à leur analyse. Nous avons opté pour les points de vue anthropologique et paradigmatique détaillés aux sections suivantes.

2.2 Éléments pour une étude de problèmes géométriques

Généralement, l'enseignant offre des problèmes aux élèves qui proviennent d'un matériel pédagogique mis à sa disposition en particulier le manuel scolaire et le guide correspondant ou un matériel qu'il adapte ou conçoit. Choisir des problèmes est une partie importante de l'activité professorale dans la mesure où leur mise en œuvre auprès des élèves est constitutive de leur milieu. Dans cette perspective, des questions au sujet de la nature des problèmes, les méthodes et les éléments théoriques nécessaires à leur résolution s'avèrent pertinentes. Les réponses à ces questions font écho au modèle d'analyse praxéologique de Chevallard (1999). De plus, des interrogations quant à la géométrie travaillée par les problèmes sont susceptibles de trouver des réponses dans le modèle des paradigmes géométriques développé par Houdement et Kuzniak (2006, 1999, 1998-1999). Nous présentons les deux modèles ci-dessous.

2.2.1 La praxéologie de Yves Chevallard

Chevallard (1999) considère que toute activité humaine régulièrement accomplie est observable selon un modèle nommé praxéologie. En fait, l'activité est décomposable en types de tâches, techniques, technologies et théories. Les types de tâches sont des travaux desquels sont attendus des résolutions et des résultats. Les techniques favorisent la réalisation des types de tâches. Les technologies sont les discours qui produisent et légitiment les techniques. Les théories jouent les mêmes rôles envers les technologies que ces dernières envers les techniques. Le couple tâches-techniques peut être associé au savoir-faire et celui de technologies-théories au savoir.

Le modèle praxéologique caractérisant une activité humaine est donc fonction des individus occupant des positions déterminées dans des institutions données. Ainsi, des tâches, des techniques, des technologies et des théories naissent, disparaissent et évoluent relativement aux individus et à leurs conditions environnementales. L'activité de résolution de problèmes géométriques dans le cadre scolaire n'échappe pas à cette considération, puisqu'elle a été et est encore pratiquée par des enseignants et des élèves en des époques et des lieux différents. Il est alors approprié de considérer l'activité de résolution de problèmes géométriques sous un angle praxéologique selon divers types de tâches, différentes techniques, technologies et théories. Aussi, il existe des variations dans les techniques et les technologies-théories inhérentes à l'activité géométrique elle-même. Par exemple, si nous considérons l'activité de construction de droites parallèles, nous voyons que ce type de problème[29] n'implique pas tout à fait la même technique selon qu'il soit résolu avec une équerre et une règle ou avec un compas et une règle, ce qui se répercute sur les technologies respectives aux deux techniques. Dans le premier cas, l'outil équerre *porte en lui* la perpendiculaire nécessaire à la construction, ce qui est différent avec le compas. Détaillons notre exemple.

---

[29] Dans la suite du texte, nous emploierons l'expression *type de problème* plutôt que *type de tâche*. Nous faisons ce choix pour assurer une harmonisation du vocabulaire, sans perte de sens, avec l'ensemble des éléments du cadre théorique dont ceux issus du modèle de Balacheff et Margolinas (2006), présenté à la section 2.3.1. Ces derniers utilisent l'expression *ensemble de problèmes*.

Premier cas: Construire une parallèle à une droite donnée d_1, par un point A situé à l'extérieur de cette droite, à l'aide d'une équerre et d'une règle.

Technique: Placer l'équerre le long de la droite d_1 de façon à ce qu'un des côtés de l'angle droit soit vis-à-vis du point A. Avec la règle, tracer une droite d_2 le long de ce côté. Placer l'équerre le long de la droite d_2 de façon à ce que son angle droit coïncide avec le point A. Avec la règle, tracer la droite d_3. La figure 2 illustre la technique, du moins en partie.

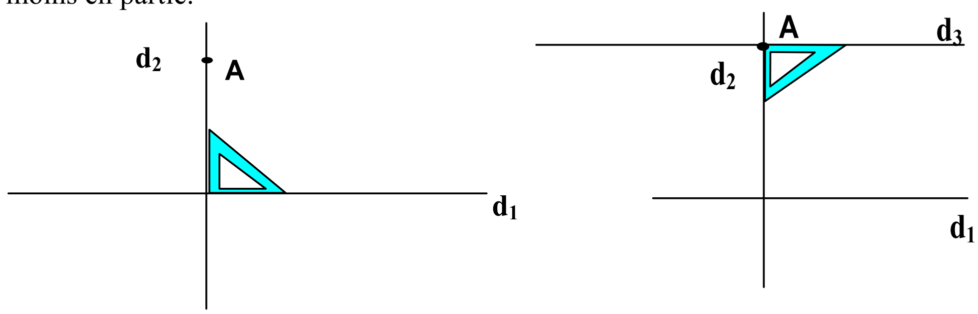


Figure 2 Construction de droites parallèles avec l'équerre

Technologie/théorie: Une droite d_2 est perpendiculaire à une droite d_1 si l'un des angles qu'elle forme avec la droite d_1 est droit. Par un point pris hors d'une droite, on peut mener une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut mener qu'une. Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles. Ces énoncés proviennent de la géométrie euclidienne.

Deuxième cas: Construire une parallèle à une droite donnée d_1, par un point A situé à l'extérieur de cette droite, à l'aide d'un compas et d'une règle.

Technique: Du point A comme centre, avec un rayon quelconque AB, tracer un arc BX. À partir du point B qui est l'intersection avec la droite d_1, avec le même rayon AB, tracer un arc de cercle AC. Avec le compas, reporter la distance CA, sur l'arc BX à partir de B. Nommer D, le point d'intersection de cette distance avec l'arc BX. Avec la règle, tracer la droite d_2 passant par les points A et D. La figure 3 illustre la technique (du moins en partie).

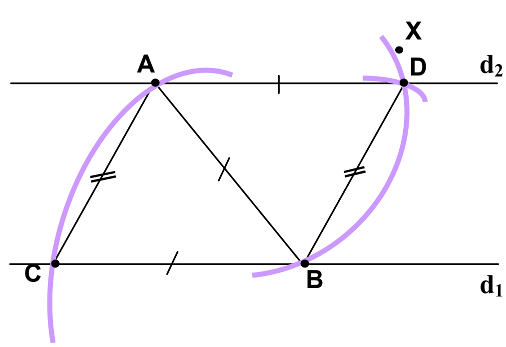


Figure 3 Construction de droites parallèles avec le compas

> **Technologie/théorie:** Tous les rayons d'un même cercle sont congrus. Un triangle isocèle a deux côtés congrus. Deux triangles sont congrus lorsqu'ils ont leurs trois côtés respectifs congrus (3e cas d'égalité des triangles- CCC). Des droites d_1 et d_2 sont parallèles, si rencontrées par une sécante, elles forment des angles alternes internes congrus. Ces énoncés sont issus de la géométrie euclidienne.

Dans l'exemple précédent, nous identifions des éléments distincts et communs. Nous pourrions dire que les activités de construction d'une droite parallèle à une autre se distinguent par le choix des outils utilisés. Cela ne doit pas être banalisé puisque cette distinction implique une variation des technologies associées. Mais nous ajoutons que les deux techniques ont en commun de nécessiter chacune une suite ordonnée d'actions, ce qui est souvent le cas de plusieurs techniques. En plus, tous les énoncés de chacune des techniques appartiennent à la même théorie, la géométrie euclidienne.

Par ailleurs, la seule observation des techniques n'offre pas le même regard sur les problèmes. Dans l'exemple des droites parallèles, le choix d'une technique plutôt qu'une autre pourrait relever principalement de considérations pratiques liées à l'usage des instruments. Par contre, un regard aux technologies nous place en position d'évaluer dans quelle mesure lesdites technologies sont à la portée des individus qui résoudront les problèmes, les élèves par exemple. La considération des technologies sous-jacentes aux problèmes est pertinente en géométrie euclidienne puisque progresser dans cette discipline implique de produire un discours à l'aide de définitions, de propriétés et de théorèmes; éléments constitutifs de cette théorie socialement reconnue. Ils sont aussi des outils si notre intérêt porte sur l'usage que nous en faisons (Douady, 1986). Or, un élève sollicite des outils de manière implicite ou explicite.

> « […] tous ces éléments interviennent comme outils implicites. Ses conceptions lui permettent d'engager une procédure dont la justification fait référence à des notions qu'il ne sait pas formuler ou qu'il exprime seulement en termes d'actions dans un contexte particulier; dans ce cas, du point de vue du sujet, G.Vergnaud parle de théorèmes en actes. Nous parlons d'outils explicites pour les notions qu'un élève met en œuvre, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi. Notons que le domaine de validité dont dispose l'élève évolue au cours de sa scolarité. » (Douady, 1986, p. 9).

Selon les problèmes géométriques et les exigences pédagogiques qui leurs seront associées, les technologies constitueront des outils implicites ou explicites.

Nous avons dit que les problèmes déterminent des techniques, des technologies et des théories spécifiques à un domaine donné au sein d'une institution donnée. En ce qui concerne notre recherche, les techniques et technologies mises en œuvre au sein des problèmes relèvent du domaine de la géométrie en milieu scolaire. À ce sujet, il existe un cadre théorique pour l'analyse de la géométrie enseignée. Nous le présentons ci-après.

2.2.2 Les paradigmes géométriques de Catherine Houdement et Alain Kuzniak

Selon Houdement et Kuzniak (2006, 1999, 1998-1999), le mot *géométrie* employé dans l'institution scolaire revêt diverses pratiques plutôt différents paradigmes. Ils émettent deux hypothèses :

> « HYP1. La première est que des paradigmes différents et cohérents sont englobés sous le terme unique de géométrie. L'existence de ces différents paradigmes explique en partie la rupture que l'on retrouve dans l'enseignement, entre école et collège, puis entre collège et lycée.[30] »
>
> « HYP2. La seconde suppose qu'étudiants (des IUFM[31]), enseignants et élèves de l'école primaire se situent implicitement dans des paradigmes différents et que ce fait est une source de malentendu pédagogique. » (Houdement et Kuzniak, 1999, p. 285).

Ils empruntent à Kuhn (1962) l'idée de paradigme et s'en inspirent en retenant particulièrement deux aspects de cette idée. D'une part, un paradigme témoigne d'un ensemble de techniques, croyances, valeurs, connaissances et théories partagées par un groupe scientifique, d'autre part, il est constitué d'exemples à suivre pour acquérir une maîtrise des pratiques par les individus œuvrant dans un domaine scientifique donné. En parallèle à ces idées, ils suggèrent de voir l'enseignement de la géométrie sous l'angle

---

[30] Le système scolaire français est composé de la maternelle (3-6 ans), de l'école élémentaire avec le CP (6-7 ans), le CE1 (7-8 ans), le CE2 (8-9 ans), le CM1 (9-10 ans) et le CM2 (10-11 ans). L'entrée au collège, correspondant au début du secondaire au Québec, comprend les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e. Après la 3^e, les élèves ont la possibilité de poursuivre leurs études au lycée et à l'université.
[31] Acronyme qui signifie Instituts Universitaires de Formation des Maîtres.

de théories de référence et d'un environnement didactique pour assurer la transmission de ces théories.

De plus, pour étayer leur modèle et tenir compte de la spécificité du travail du géomètre dans ses relations avec les espaces physique et géométrique, les auteurs se sont inspirés de l'articulation des trois modes de la pensée géométrique mentionnés par Gonseth (1945) : l'intuition, l'expérience et la déduction.

L'intuition est définie comme étant ce qui permet à un individu de considérer globalement une situation sur la base de certaines évidences, expériences antérieures, connaissances, etc. L'intuition est immédiate, directe. Par son caractère de simultanéité, l'intuition risque d'induire l'individu en erreur dans la mesure où elle favorise une certaine confusion entre les données pratiques et théoriques de la situation. L'intuition n'est pas stable et elle évolue selon les expériences et les connaissances de l'individu. Son évolution serait associée à une superposition de strates faisant oublier les premières intuitions. Certaines strates seraient communes à tous les individus et leur mise à jour relèverait du domaine psychologique. D'autres strates seraient spécifiques aux parcours scolaire et professionnel de chacun des individus.

L'expérience, contrairement à l'intuition, n'est pas immédiate; elle nécessite une action physique ou mentale pour découvrir ou valider une proposition. La nature de l'expérience géométrique dépend des objets sur lesquels elle s'exerce. Par exemple, les pliages, les découpages, les constructions règle-compas, les simulations informatiques participent de l'expérience géométrique. Une autre forme d'expérience est mentale, par exemple imaginer le déplacement d'éléments d'une figure par l'esprit, sans l'effectuer réellement.

La déduction favorise l'obtention de nouvelles informations (les conséquences) à partir de celles déjà acquises sans recourir à l'expérience ou autre source extérieure. La déduction n'est pas associée uniquement à la démonstration basée sur des axiomes, mais elle englobe ici une perspective plus large du raisonnement.

Ces éléments théoriques relatifs à Kuhn (1962) et Gonseth (1945) participent à l'élaboration du modèle de la géométrie enseignée en trois paradigmes : la géométrie I dite *géométrie naturelle*, la géométrie II appelée *géométrie axiomatique naturelle* et la géométrie III ou *géométrie axiomatique formaliste*. Nous les détaillons ci-après, mais ne retiendrons que les deux premiers paradigmes puisque le troisième n'appartient pas au niveau d'enseignement secondaire.

> *La géométrie I ou géométrie naturelle* : Cette géométrie est ainsi nommée pour révéler son lien fort avec le réel. Elle a pour source de validation la réalité, le monde sensible. La pensée s'exerce sur des objets matériels ou matérialisés, par exemple des objets physiques de l'environnement, des maquettes, des figures. Dans cette géométrie, il y a déjà un effort d'abstraction dans la mesure où la pensée pourrait retenir certains aspects des objets physiques et les traduire en représentations graphiques.
>
> L'intuition, l'expérience et la déduction s'exercent à travers des activités de perception, construction, manipulation d'instruments (gabarits, règle graduée ou non, compas, équerre, rapporteur), pliage, découpage ou leur pendant virtuel. Toutefois, la déduction se fait prioritairement à l'aide de la perception et de manipulations, par exemple déduire la somme des angles intérieurs du triangle (180º) après avoir mesuré au rapporteur les angles de quelques cas de triangles.
>
> *La géométrie II ou géométrie axiomatique naturelle* : Cette géométrie entretient encore une relation avec la réalité car elle rend possible une organisation des connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. Mais ce lien avec la réalité est amenuisé au profit d'une organisation des connaissances à partir d'un système d'axiomes le plus précis possible.[32] Il ne s'agit pas d'une géométrie de la réalité comme en GI, mais d'une schématisation. Dans cette géométrie, la validation se fonde sur des lois hypothético déductives. La pensée s'exerce sur des objets idéaux traduits par des définitions et théorèmes. Les représentations graphiques sur papier ou à l'écran de l'ordinateur ne sont pas des objets d'étude en soi, contrairement à GI. Elles ont une fonction essentiellement de support au raisonnement.
>
> L'intuition et l'expérience sont présentes, mais elles sont sous le contrôle de la déduction logique et de la démonstration. La géométrie euclidienne classique correspond à ce type de géométrie.
>
> *La géométrie III ou géométrie axiomatique formaliste* : Cette géométrie n'a pas vraiment de relation avec la réalité, ses axiomes ne reposent pas sur le sensible.

---

[32] Houdement et Kuzniak (2006, 1999, 1998-1999) affirment à la suite de Gonseth que l'axiomatisation proposée en GII est certes une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle puisque la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité.

> L'intuition est interne aux mathématiques, l'expérience logique et la déduction se fait à l'aide de démonstrations basées sur un système complet d'axiomes. Les géométries non-euclidiennes, développées au cours de l'histoire, correspondent à ce type de géométrie.

Le tableau II suivant résume des aspects spécifiques aux géométries GI, GII et GIII (Houdement et Kuzniak, 1998-1999, p. 19)[33].

Tableau II Récapitulatif des trois géométries (Houdement et Kuzniak 1998-1999)

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Type d'espace	Espace intuitif et physique	Espace physico géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, conjecturer	Outil heuristique
Aspect privilégié	Évidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

La géométrie est une activité humaine. En la considérant comme une interaction entre individus et problèmes géométriques selon une vision paradigmatique, Houdement et Kuzniak (2006) ajoutent au modèle la notion d'espace de travail géométrique (ETG), c'est-à-dire un environnement adapté au travail des personnes faisant de la géométrie. Cet espace de travail est formé des composantes suivantes : un espace local et réel, des artéfacts et un référentiel théorique.

[33] La déduction est présente dans les trois géométries GI, GII, GIII, mais pour alléger le texte de notre exposé, lorsque nous employons les expressions *géométrie déductive* ou *géométrie de la déduction*, c'est à la géométrie GII que nous référons.

L'espace local et réel est le support des objets géométriques à l'étude qui seront éventuellement matérialisés, par exemple en maquettes et objets physiques (GI) ou en figures avec indications symboliques tracées sur papier, à l'ordinateur (GII).

Les artéfacts correspondent aux outils classiques et informatiques disponibles pour résoudre des problèmes, selon Rabardel (1995). Celui-ci considère la notion d'outil construit par l'homme en artéfact et instrument. L'artéfact est l'objet matériel fabriqué par l'homme susceptible d'un usage. L'instrument est l'artéfact pris en main à partir de schèmes[34] d'utilisation. Prenons le cas du compas. C'est un artéfact puisqu'il s'agit d'un objet matériel et aussi un instrument car son usage nécessite la connaissance de schèmes tels ceux mis en œuvre dans la construction d'une médiatrice, par exemple.

Le référentiel théorique correspond à un ensemble de définitions, de propriétés et de théorèmes éventuellement constitué en un modèle théorique.

Considérées sur le plan épistémologique, ces trois composantes de l'espace de travail géométrique sont tributaires du paradigme géométrique auquel elles s'insèrent. Par ailleurs, puisque cet espace de travail est habité par les personnes qui y œuvrent, ces dernières vont mobiliser des processus cognitifs lors de la sollicitation des composantes de cet espace. Kuzniak (2011, 2010) a adapté de Duval (1995a) l'idée de trois processus cognitifs[35] pour l'exercice de la géométrie. Le premier est un processus de visualisation en lien avec la représentation de l'espace et le support matériel. Le second processus, celui de construction, est orienté par le choix des instruments et des configurations. Le troisième des processus est discursif et il est nécessaire à l'élaboration de preuves.

---

[34] Rabardel (1995) emprunte l'idée de schème à Vergnaud (1991). Pour ce dernier, un schème comprend quatre éléments : des invariants opératoires appelés connaissances en actes, des règles d'action, de prise d'information et de contrôle, des buts et sous buts (un seul), des possibilités d'anticipation et de référence. Les invariants opératoires sont les connaissances qui permettent à l'action d'un individu d'être justement opératoire. Par exemple, dans l'emploi du rapporteur d'angles, savoir où placer la ligne de foi, choisir la bonne échelle (droite vers gauche ou vice versa) etc., sont des connaissances en actes qui participent de l'élaboration du schème d'action.

[35] Ces trois processus cognitifs sont interdépendants dans l'activité géométrique, Toutefois, chacun d'eux peut faire l'objet d'une étude à lui seul. Pour notre part, nous limiterons l'emploi de l'espace de travail géométrique au plan épistémologique. Nous avons choisi d'aborder la dimension cognitive de l'activité géométrique des élèves à l'aide du modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005), expliqué à la section 2.3.1.

De plus, l'espace de travail géométrique investi par des personnes est appelé à varier en fonction de leurs connaissances. Dans l'institution scolaire, cela est utile pour distinguer notamment les espaces de travail géométrique de l'élève, de l'enseignant, des auteurs de livres scolaires voire des experts géomètres. Dans cette optique, Houdement et Kuzniak (2006) définissent des espaces de travail géométrique personnel, idoine et de référence. L'espace personnel est celui d'un élève, d'un enseignant ou de toute personne qui résout des problèmes de géométrie. L'espace idoine correspond à ce qui est mis en place par l'institution pour aménager la géométrie souhaitée sur le plan didactique. À titre d'exemples, les manuels scolaires, les planifications, les recueils de notes ainsi que les leçons sont des éléments qui caractérisent cet espace de travail géométrique idoine. La géométrie souhaitée concerne l'espace de travail géométrique de référence associé au paradigme privilégié : GI, GII ou GIII. Dans le cadre scolaire, le choix du paradigme ne dépend pas seulement des experts géomètres puisque d'autres intervenants gravitent dans la noosphère. Par exemple, il arrive que des auteurs de programmes provoquent des écarts plus ou moins grands, par un phénomène de transposition didactique, entre la géométrie à l'étude et une géométrie issue de traités mathématiques tels les *Éléments* d'Euclide.

Pour en revenir aux niveaux caractéristiques de l'activité enseignante, discutés à la section 2.1.2, nous disons qu'ils participent à l'élaboration d'un espace de travail géométrique idoine dans ce que l'enseignant met en place pour aménager une géométrie souhaitée auprès des élèves. De plus, ses choix de problèmes sont constitutifs du milieu avec lequel l'élève va interagir en situation adidactique. Mais lorsqu'il interagit avec le milieu, l'élève œuvre au sein dans son espace de travail géométrique personnel et cette interaction est source de connaissances.

2.3 Éléments pour l'étude de conceptions d'élèves

Pour approfondir la nature des éléments géométriques employés par l'élève dans la situation adidactique, nous allons considérer un dernier aspect théorique provenant du modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005).

2.3.1 Le modèle de connaissances de Nicolas Balacheff et Claire Margolinas

Le modèle de connaissances élaboré par Balacheff et Margolinas (2005) fournit un éclairage supplémentaire sur ce qui est développé par l'élève dans son interaction avec le milieu en situation adidactique. Rappelons qu'une connaissance est ce qui favorise l'équilibre entre l'élève et le milieu (Brousseau, 1998). Pour maintenir cet équilibre, « […] la connaissance du sujet peut s'actualiser en conceptions selon les caractéristiques des situations. » (Balacheff et Margolinas, 2005, p. 79). Une conception est alors identifiée comme :

> « […] une instance de la connaissance de l'apprenant, qui se distingue par la représentation et les traitements qu'elle mobilise, mais dont la portée est locale, attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier (éventuellement scolaire). » (Balacheff et Margolinas, 2005, p. 79).

Une conception a une portée locale puisqu'elle est fortement caractérisée par les problèmes. De façon plus précise, les auteurs définissent ainsi une conception[36] :

> « Une conception est caractérisée par un ensemble définitoire de problèmes pour lesquels elle apporte des outils de résolution en s'appuyant sur un (ou des) système de représentation et une structure de contrôle qui permet jugements et décisions : cette caractérisation est formalisée (i.e. mise en forme) par le quadruplet (P, R, L, Σ). » (Balacheff et Margolinas, 2005, p. 98).

[36] Cette définition origine de la définition du concept de Vergnaud (1991). Selon Balacheff (1995), elle s'en distingue par un langage différent de celui de la psychologie et une explicitation des structures de contrôle demeurant implicites dans le modèle de Vergnaud.

Les problèmes sont susceptibles de provoquer des perturbations de l'équilibre du système élève-milieu. Ceux que la conception permet de résoudre, désignés par la lettre P, seront considérés comme étant le domaine de validité ou sa sphère de pratique. Selon Balacheff et Margolinas (2005, p. 82), il existe une difficulté potentielle à identifier un ensemble de problèmes trop large ou trop spécifique. En fait, « […] on est actuellement le plus souvent ramené à une caractérisation pragmatique, fondée sur une exploration de la sphère de pratique probable de la conception à laquelle on s'intéresse. ».

Les opérateurs (lettre R) transforment les problèmes. Ils sont identifiables par des productions et des comportements de l'élève.

L'expression des problèmes et opérateurs (lettre L) se fait par un système de représentation langagier ou non.

Une structure de contrôle (lettre Σ) assure la non contradiction de la conception. Elle est faite d'indices qui légitiment des opérateurs ou statuent sur l'état de résolution des problèmes. Ils correspondent à des jugements, des décisions, des moyens du choix, des anticipations, etc. Une structure de contrôle est souvent implicite. Elle concerne une dimension plus métamathématique de l'activité de l'élève. Elle risque donc de ne pas être révélée sans la demande d'un observateur externe.

Balacheff et Margolinas (2005) proposent des distinctions supplémentaires entre les mots conception, connaissance et concept; tous trois identifiés dans leur modèle par l'appellation *ck¢*. Une connaissance correspond à un ensemble de conceptions ayant le même objet mathématique. Il ne s'agit pas de toutes les conceptions relatives à un objet mathématique plutôt un sous-ensemble, ce pourrait être, par exemple, les conceptions d'un seul élève. Quant au mot concept, il réfère à l'ensemble des connaissances, donc d'une certaine manière à l'ensemble de conceptions ayant le même objet mathématique. Néanmoins, le concept a une visée plus fortement ontologique, « […] c'est-à-dire la potentialité de définition d'un objet mathématique indépendamment de ses instances. » (Balacheff et Margolinas, 2005, p. 99), et la conception une visée plus pratique de qualification de la conduite d'un individu en résolution de problèmes.

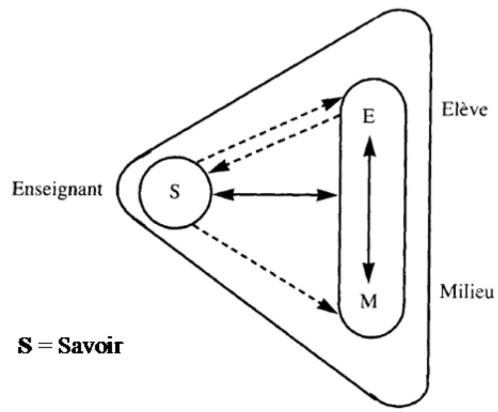
La notion de conception vient compléter la description des éléments théoriques nécessaires à notre recherche. La figure 4 suivante illustre l'articulation de ces éléments.

Espace de travail géométrique de l’enseignant (idoine)

Niveaux d’activité :

N3 : Conceptions et valeurs relatives à l’enseignement et l’apprentissage de la géométrie
N2 : Projet de construction du thème *triangles et quadrilatères*
N1 : Projet d’une leçon

N0 : Actualisation en classe d’une leçon
$N^{-}1$: Observation des élèves au cours d’une leçon



Espace de travail géométrique de l’élève ($N^{-}1$)

Conceptions de l’élève

$C = (P,R,L,\Sigma)$

(Balacheff et Margolinas, 2005)

⇓

Problèmes proposés aux élèves: Point de vue praxéologique (Chevallard,1999)

Point de vue paradigmatique (Houdement et Kuzniak, 2006, 1999, 1998-1999)

Figure 4 Synthèse des éléments théoriques

2.4 Objectifs et questions de recherche

Les éléments de discussion de la problématique et ceux du cadre théorique, présentés précédemment, nous conduisent à la formulation d'objectifs et de questions de recherche afin d'analyser d'une part, des choix didactiques effectivement retenus pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie en classe et, d'autre part, leurs effets auprès des élèves.

Notre premier objectif vise à circonscrire les problèmes géométriques choisis par des enseignants et susceptibles d'être donnés à leurs élèves.

Notre second objectif consiste à documenter ce que des élèves mettent en œuvre lorsqu'ils résolvent des problèmes géométriques. Plus spécifiquement, il s'agit de mieux connaître des conceptions développées par des élèves de première secondaire au sein de situations didactiques de classes, et à l'intérieur desquelles s'actualisent des choix de problèmes.

Ce second objectif doit pouvoir alimenter le troisième objectif qui est de rendre compte de ces conceptions d'élèves en relation avec les géométries de référence GI et GII. Nous souhaitons pouvoir faire un état des lieux et formuler des recommandations favorisant un développement conceptuel riche de la géométrie euclidienne.

Dans le but de préciser nos objectifs, nous présentons les questions de recherche suivantes :

Question 1 : Quels types de problèmes sont proposés à des élèves de première secondaire pour l'exercice de la géométrie et sur quel(s) projet(s) d'enseignement reposent-ils?

Question 2 : Quelles conceptions géométriques d'élèves de première secondaire sont développées par ces problèmes?

Question 3 : À quelle(s) géométrie(s) peut-on associer les conceptions d'élèves?

Chapitre 3 Méthodologie

Nous présentons la méthodologie utilisée. Afin de la détailler, nous justifions le choix des objets géométriques retenus et celui de la clientèle scolaire. Nous expliquons le procédé employé pour la sélection des enseignants, des classes et des élèves. Nous précisons les étapes de la cueillette des données assorties des conditions de réalisation. Nous présentons les outils utilisés pour la cueillette des données. Nous exposons la démarche et les outils nécessaires à l'analyse des données. Les outils conçus pour la cueillette des données de même que pour les analyses reposent sur les éléments du cadre théorique. Nous terminons ce chapitre par l'énumération de précautions d'ordre éthique et méthodologique.

3.1 Choix des objets géométriques et clientèle scolaire ciblée

Nous avons privilégié les objets géométriques triangles et quadrilatères. L'étude de ces objets géométriques a débuté au primaire et elle se poursuit au secondaire. Les triangles et les quadrilatères sont une partie intégrante du programme de mathématiques du premier cycle du secondaire et leur étude en est faite généralement dès la première secondaire. Ces objets, qui sont encore un peu ancrés dans le primaire et qui ne sont pas complètement nouveaux, sont pertinents pour nos analyses. N'étant pas étrangers aux élèves de première secondaire, ils représentent des avantages et des inconvénients. Des avantages dans la mesure où les élèves ayant le sentiment de bien connaître ces objets seront possiblement à l'aise pour en parler et résoudre des problèmes à leur sujet. Des inconvénients, peut-être aussi, puisque ce sentiment de déjà vu risque de freiner leur enthousiasme ou leur désir d'en savoir encore sur ces objets géométriques. Par ailleurs, la présence de nombreux problèmes de triangles et de quadrilatères dans les manuels scolaires est un autre facteur en faveur du choix de ces objets géométriques pour l'étude de conceptions d'élèves. De plus, dans l'étude des triangles et des quadrilatères entre en jeu leurs définitions et propriétés, ce qui est pertinent pour l'analyse des problèmes et des conceptions d'élèves en relation aux géométries de référence GI et GII.

Nous avons fait le choix de classes d'élèves de la première année du secondaire. Cela s'inscrit dans la foulée des préoccupations émises à la problématique concernant le passage d'une géométrie de l'observation vers une géométrie de la déduction; passage que semble suggérer le programme sans clairement l'annoncer. Nous considérons qu'un nombre de quatre classes dirigées par des enseignants distincts représente un échantillon convenable pour la réalisation de notre recherche qui est de nature qualitative.

3.2 Sélection des enseignants, des classes et des élèves

Dans ce qui suit, nous détaillons comment nous avons procédé pour la sélection des enseignants, des classes et des élèves. Nous précisons les critères à partir desquels nous avons effectué les sélections. Nous débutons par les enseignants et terminons par le choix des classes et des élèves.

3.2.1 Sélection des enseignants

Nous avons d'abord sollicité deux personnes travaillant dans notre commission scolaire. Ensuite, par l'entremise de nos réseaux en éducation, nous avons contacté deux autres personnes; la première enseigne dans une institution privée et la seconde dans une autre commission scolaire. Le critère sur la base duquel nous avons choisi les enseignants tenait à leur expression d'un intérêt pour l'innovation pédagogique voire la recherche en didactique. L'échantillon d'enseignants est composé de trois femmes et un homme. Les quatre enseignants n'ont pas travaillé ensemble y compris les deux issus de la même commission scolaire. C'est un avantage dans la mesure où il existe un certain degré d'indépendance entre les personnes relativement aux choix pédagogiques qu'ils ont effectués. Ainsi, nous disposions de quatre classes d'élèves réparties dans quatre écoles. Celles-ci appartiennent à trois organismes : deux commissions scolaires et une institution privée.

Dans un premier temps, nous avons communiqué par courrier électronique avec les enseignants afin de vérifier leur intérêt à participer au projet. Dans un second temps, nous avons tenu une rencontre individuelle avec chacun d'eux. Elle avait pour but de fournir à la personne intéressée les éléments nécessaires à une prise de décision éclairée.

Au cours de la rencontre, nous avons expliqué des objectifs poursuivis par le projet tels ceux de connaître les problèmes donnés aux élèves et des conceptions développées par ces problèmes. Nous avons discuté des obligations de l'enseignant pour son éventuelle implication dans la recherche. Un formulaire de consentement lui a été expliqué, remis en double exemplaire et un temps de réflexion raisonnable lui a été octroyé. Nous avons obtenu, pour chacun des enseignants, sa participation volontaire et éclairée attestée par une copie signée du formulaire de consentement.

De plus, nous avons rencontré chacune des directions d'école concernées, d'une part, pour leur présenter le projet et, d'autre part, pour obtenir leur approbation à notre venue dans l'école. Nous les avons assurées de notre conformité aux règles d'éthique de l'Université de Montréal (formulaire de consentement de l'enseignant à l'annexe 2, formulaire de consentement des parents et certificat d'éthique). Par la suite, nous avons fait parvenir une lettre à chaque direction pour confirmer la participation de son enseignant.

3.2.2 Sélection des classes et des élèves

Pour la sélection des classes, nous avions besoin d'une classe par enseignant. Le choix de la classe fut laissé à la discrétion de l'enseignant. Nous n'avions pas de critères de sélection particuliers pour le choix des classes sauf celui de ne pas avoir uniquement des élèves performants ou en difficultés d'apprentissage. L'échantillon comprend une classe d'élèves provenant d'une école d'éducation internationale, une classe d'élèves d'une institution privée et deux classes d'élèves d'écoles régulières. L'une des deux classes des écoles régulières était considérée comme un groupe fort. Par ailleurs, au sein de chacune des classes, nous souhaitions un échantillon de quatre élèves pour des entretiens d'explicitation. La désignation de quatre élèves par classe a été déléguée à chacun des enseignants selon le critère suivant : nous cherchions des élèves aimant faire part à autrui de leurs réflexions mathématiques. L'enseignant demeurait la meilleure personne pour juger de cette qualité auprès des élèves. Nous avons été satisfaite du choix des élèves dans la mesure où ils ont tous été loquaces. De plus, nous voulions interroger des garçons et des filles, ce que nous avons pu faire. Nous avons questionné cinq garçons et onze filles pour un total de seize entretiens.

3.3 Dispositif expérimental et questions de recherche

Dans cette section, nous décrivons le dispositif expérimental déployé en vue de répondre à nos questions recherche. Rappelons-les :

> Quels types de problèmes sont proposés à des élèves de première secondaire pour l'exercice de la géométrie et sur quel(s) projet(s) d'enseignement reposent-ils?
> Quelles conceptions géométriques d'élèves de première secondaire sont développées par ces problèmes?
> À quelle(s) géométrie(s) peut-on associer les conceptions d'élèves?

3.3.1 La question des types de problèmes proposés

Les problèmes sont constitutifs du milieu avec lequel les élèves vont interagir et développer des conceptions. Or, les problèmes sont d'abord choisis par les enseignants à partir du matériel pédagogique mis à leur disposition. Les manuels scolaires sont une référence pour les enseignants lorsque vient le moment de sélectionner des problèmes. Ils sont une source directe où puiser les problèmes ou une source d'inspiration pour la création d'un répertoire personnalisé de problèmes.[37] Pour nous préparer à l'analyse des problèmes des planifications des enseignants, nous avons préalablement procédé à une catégorisation de problèmes de manuels scolaires[38] de première secondaire traitant des triangles et des quadrilatères. Par la suite, nous avons été en mesure d'appliquer cette catégorisation aux problèmes proposés par les enseignants puisque aucun n'a nécessité la création d'une nouvelle catégorie.

Pour effectuer la catégorisation des problèmes de manuels, nous avons adopté un premier point de vue anthropologique, celui de Chevallard (1999). Rappelons que selon cet auteur toute activité humaine régulièrement accomplie est décomposable en types de tâches, techniques et technologies-théories. Les types de tâches correspondent à ce qui est demandé, c'est-à-dire des travaux déterminés pour lesquels sont attendus des

---

[37] Sans oublier que les manuels sont des témoins d'un effet de transposition didactique des choix faits par les auteurs en fonction notamment des prescriptions ministérielles et des mécanismes d'approbation.

[38] Les problèmes proviennent des manuels suivants : *À vos maths!* Manuel B; *Perspective* volume 1A; *Perspective* volume 2A; *Panoram@th* Manuel A volume 1; *Panoram@th* Manuel A volume 2.

résolutions, des résultats. Les techniques permettent d'accomplir les types de tâches et les technologies-théories sont les discours produisant et légitimant les techniques. Sur cette base, nous avons délimité six types de problèmes : *Rechercher une mesure de l'objet géométrique*, *Construire un objet géométrique*, *Reconnaître un objet géométrique*, *Justifier un résultat, une affirmation, une propriété de l'objet géométrique*, *Découvrir une propriété, un théorème géométrique* et *Produire une représentation de l'objet géométrique*.

Pour raffiner notre analyse des types de problèmes, nous avons adopté un second point de vue, celui de Houdement et Kuzniak (2006, 1999, 1998-1999) définissant des paradigmes géométriques et des espaces de travail géométrique. Ceci nous a permis de positionner les types de problèmes selon les paradigmes géométriques GI et GII ainsi que d'esquisser un espace de travail géométrique dégagé de l'analyse des problèmes de manuels scolaires.

La validation de notre typologie des problèmes de manuels a été faite par deux personnes. Nous leur avons demandé d'en faire une mise à l'essai individuellement avec trente problèmes extraits des manuels scolaires. La liste des définitions associées aux types de problèmes a été préalablement présentée et expliquée à chacune des personnes. Ensuite, nous avons procédé à une comparaison de leurs résultats de codage avec les nôtres. Nous avons obtenu un accord de 96,6%. Cette catégorisation des problèmes de manuels scolaires est présentée à la section 4.1.

Une fois ce travail de catégorisation fait, nous avons demandé aux enseignants de nous fournir leurs choix des problèmes susceptibles d'être donnés à leurs élèves pour l'étude des triangles et des quadrilatères. Nous avons reçu en version électronique ou papier, selon l'enseignant, l'ensemble des problèmes de sa planification, c'est-à-dire ceux constitutifs de son projet de construction du thème *triangles et quadrilatères*. Pour les enseignants 1, 2, 3 et 4, nous avons compté respectivement 172, 237, 304 et 259 problèmes. Notre typologie des problèmes de manuels scolaires, préalablement validée, a permis le classement de tous les problèmes proposés par les enseignants.

Or, les choix de problèmes faits par les enseignants ne sont qu'une composante de leur activité professorale et ils sont influencés, consciemment ou non, par différents facteurs dont des valeurs ou des idées relatives à l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Dans cette perspective et pour connaître les motivations derrières leurs choix de problèmes, nous avons soumis chacun d'eux à une entrevue et un questionnaire écrit (voir les sections 3.3.1.1 et 3.3.1.2). L'entrevue s'intéresse aux conceptions et aux valeurs relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de la géométrie plane, au projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* et à la planification d'une leçon sur le même thème. Ceci correspond aux niveaux d'activité 3 à 1 de l'enseignant définis par Margolinas (2004, 2002, 1998). Nous avons exigé de recevoir les problèmes ciblés par les enseignants avant l'entrevue de manière à éviter que leurs choix soient influencés par nos questions. Quant au questionnaire écrit, il vise à enrichir notre connaissance des éléments sur la base desquels les enseignants font des choix de problèmes selon les types identifiés par notre travail de catégorisation et leur tendance paradigmatique.

De plus, nous souhaitions obtenir de l'information sur le traitement en classe que font les enseignant des problèmes susceptibles d'être donnés aux élèves, sachant que ce traitement peut influencer la résolution des problèmes par les élèves. Cela est associé au niveau 0 de l'activité des enseignants. Aussi, avons-nous fait la captation vidéo de trois leçons par enseignant. Nous disposons de douze leçons d'une durée moyenne de 60 minutes chacune. Les leçons filmées ont fait l'objet d'une entente avec la chercheure. Nous voulions filmer des situations de classe favorisant des échanges entre l'enseignant et ses élèves ou entre pairs. Les leçons pouvaient prendre la forme d'exposés théoriques, de correction de devoirs, d'activités en laboratoire, etc. La seule situation de classe que nous ne souhaitions pas filmer était celle où des élèves travaillent seuls à leur place pendant toute la durée de la leçon. Les douze leçons ont été enregistrées à l'aide d'une caméra vidéo numérique fixée à un trépied. Pour chacune d'elles, nous avons positionné la caméra de telle sorte qu'il soit possible d'obtenir différentes vues sur l'enseignant ou les élèves.

3.3.1.1 Questions pour les entrevues avec les enseignants

Pour les entrevues avec les enseignants, nous avons élaboré dix questions et deux sous-questions ciblant plus particulièrement le niveau d'activité 3 du modèle de Margolinas (2004, 2002, 1998). Seules trois questions concernent les niveaux 2 et 1 puisque d'autres outils tels que la collecte des problèmes prévus à la planification et le questionnaire écrit nous renseignent à ces niveaux. L'information recueillie pour le niveau 0 provient des leçons filmées. Voici ces questions :

Q1 (niveau 3): Que signifie pour vous *faire de la géométrie plane*?
Q2 (niveau 3): Qu'est-ce qui vous plaît dans l'enseignement de la géométrie plane en première secondaire? Pourquoi?
Q3 (niveau 3): Y a-t-il quelque chose qui vous plaît moins dans l'enseignement de la géométrie plane en première secondaire? Pourquoi?
Q4 (niveau 3): Comment décririez-vous la géométrie plane apprise en première secondaire?
Q5 (niveau 3): Que désirez-vous que vos élèves apprennent ou développent en faisant de la géométrie plane?
Q6a (niveau 3): Qu'est-ce qui vous semble utile pour guider votre enseignement de la géométrie plane dans le programme de formation de l'école québécoise?
Q6b (niveau 3): Quelles modifications le rendraient plus utile?
Q7a (niveau 3): Qu'est-ce qui vous semble utile pour votre enseignement de la géométrie plane dans les manuels scolaires?
Q7b (niveau 3): Quelles modifications les rendraient plus utiles?
Q8 (niveau 2): Dans l'ensemble des cours sur les triangles et les quadrilatères que vous faites avec vos élèves, quelles propriétés des triangles et des quadrilatères jugez-vous qu'il est important que vos élèves apprennent et puissent utiliser?
Q9 (niveau 1): Comment préparez-vous la planification d'une leçon sur les triangles ou les quadrilatères?
Q10 (niveau 1): Selon votre expérience, qu'est-ce qui fonctionne bien dans la planification d'une leçon sur les triangles ou les quadrilatères?

L'entrevue de chaque enseignant s'est déroulée à son école avant ou après les heures de cours ou à une de ses périodes libres. Nous avons procédé à l'enregistrement de l'entrevue, d'une durée moyenne de vingt-cinq minutes, avec un enregistreur audio numérique.

3.3.1.2 Questionnaires écrits pour les enseignants

Chacun des questionnaires écrits contient six problèmes géométriques. Les problèmes 1 et 2 changent selon l'enseignant alors que les problèmes 3, 4, 5 et 6 sont identiques à chacun d'eux. L'annexe 3 présente les problèmes 1 et 2 accompagnés de l'intention visée pour chacun au regard du projet de construction de l'enseignant. Ils sont fournis à nouveau lors de la discussion des niveaux d'activité des enseignants, présentée à la section 4.2. Les problèmes 3 à 6 sont disponibles à l'annexe 4. Nous avons varié le type de problème et son approche vers GI ou GII. Voici un bref descriptif des six problèmes.

Problème 1, *Type variable,* vers GII, peut être dans le projet de construction
Problème 2, *Type variable*, vers GI, peut être dans le projet de construction
Problème 3, *Justifier*, vers GII, est atypique
Problème 4, *Découvrir*, vers GI, peut être dans un manuel
Problème 5, *Justifier*, vers GII, peut être dans un manuel
Problème 6, *Justifier*, vers GII, peut être dans un manuel

Pour les problèmes 3 à 6, nous avons décidé de n'en retenir qu'un seul vers GI du type *Découvrir* (P4) et trois vers GII du type *Justifier* (P3, P5, P6), puisque ces derniers sont pertinents pour favoriser l'expression des référents théoriques. Nous discutons d'abord des problèmes P3, P5, P6 et poursuivons avec le problème P4.

Nous avons procédé de manière à obtenir plus de variété dans les problèmes de justification selon les aspects suivants : figure, contextualisation et personnification du problème, longueur du texte et données superflues, éléments théoriques nécessaires à la résolution. L'idée étant de voir dans quelle mesure ces aspects seraient retenus, négligés ou discutés dans les évaluations des problèmes faites par les enseignants.

La figure du problème 3 est atypique car elle semble dessinée en perspective. De plus, elle est identifiée comme une esquisse dans l'énoncé. La figure du problème 5 est nommée figure à main levée alors que celle du problème 6 est tracée avec un logiciel de géométrie dynamique. Il n'y a pas de données numériques sur la figure du problème 3 (seulement dessous) alors que les figures des problèmes 5 et 6 montrent des données numériques entières, et décimales. Les sommets des figures, notamment, sont identifiés par des lettres majuscules. Seule la figure du problème 6 contient une marque de codage de l'angle droit, quoique les marques des angles CBA et DAE, générées par le logiciel, pourraient être interprétées, à tort, comme un indice de congruence de ces angles.

Le contexte du problème 3 réfère au pavage du plancher d'une navette spatiale en construction à l'aide de tuiles identiques où le *docteur Vavite* et le *responsable du projet* contribuent à personnifier le problème. Le problème 5 a un contexte géométrique, mais la personnification du problème se fait par *Andréanne* et *Maude*. Le problème 6 est élaboré dans un contexte géométrique, sans personnage. De plus, pour ces problèmes, les consignes rédigées sous le mode impératif, par exemple *Donnez une explication*…, *Déterminez qui a raison…*, *Justifiez chacune de vos étapes*, traduisent la présence du ou des concepteurs des problèmes qui s'adressent aux lecteurs.

Le problème 3 a le plus long texte suivi, par ordre décroissant, des problèmes 5 et 6. De plus, au problème 3, la donnée numérique *30 cm*, bien que pertinente dans le contexte de fabrication d'une tuile, est inutile pour déterminer la nature du quadrilatère. Toutefois, cette donnée numérique laisse entrevoir la possibilité que des élèves tentent de construire le quadrilatère à l'aide des instruments de géométrie. Il est peu probable qu'ils tracent des segments de 30 cm, mais ils pourraient en faire à plus petite échelle, par exemple de 3 cm ou 5 cm. Au problème 5, c'est la donnée *le segment BD mesure 8 cm* qui n'aide pas à le résoudre, c'est-à-dire argumenter à l'aide des propriétés géométriques. De même qu'au problème 3, il est possible que la donnée *8 cm*, entre autres, incite des élèves à faire une figure avec les instruments de géométrie. Le problème 6 n'a pas de données superflues. De plus, même si la valeur de l'angle CBA est de 31,4 degrés, cela n'exclut pas que des élèves utilisent le rapporteur d'angles pour trouver la valeur d'angle recherchée (angle DAE), en particulier s'ils n'ont plus en mémoire le théorème selon lequel les angles opposés par le sommet sont congrus.

La résolution du problème 3 fera intervenir plus ou moins d'éléments théoriques selon la personne qui le résout, c'est-à-dire passer en revue les propriétés des côtés et des angles des quadrilatères offerts comme choix de réponses, se limiter à la définition du trapèze ou affirmer que la construction du quadrilatère est impossible. La résolution du problème 5 implique de recourir notamment à la définition du triangle isocèle, au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle, au théorème selon lequel dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés congrus sont congrus et à celui disant que dans un parallélogramme les angles opposés sont congrus. Le problème 6 se résout en utilisant la définition de l'angle droit, le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle et celui selon lequel les angles opposés par le sommet sont congrus.

Le problème P4 du type *Découvrir* vers GI a été choisi parce qu'il induit l'idée selon laquelle des exemples numériques (au nombre de trois ici) suffisent à énoncer une propriété géométrique. Le problème présente trois figures d'un triangle ABC dont on a prolongé le côté AC en un point D, accompagnées d'un tableau. Une figure contient une marque de codage d'un angle droit et les autres figures montrent chacune une donnée numérique. La propriété dont on souhaite la formulation est : l'angle extérieur d'un triangle est congru à la somme des angles intérieurs non adjacents. Tel que rédigé, le problème n'offre pas de nuance entre des observations successives d'un phénomène géométrique, susceptibles d'être traduites en conjecture nécessitant d'être démontrée, et une propriété démontrée pour laquelle faire des applications, donner des exemples. Par ailleurs, étant donné que le problème montre des valeurs d'angles sur les figures et qu'il suggère d'en trouver d'autres, il est à prévoir que des élèves se servent du rapporteur d'angles pour le résoudre.

Pour chacun des six problèmes, il est demandé avec justifications d'indiquer s'il est jugé tel que conçu intéressant ou non, s'il pourrait être donné aux élèves tel quel ou modifié, s'il pourrait faire l'objet de modifications et, le cas échéant, les préciser. Dans l'éventualité où le problème serait proposé à ses élèves, l'enseignant doit spécifier la solution qu'il souhaiterait que ses élèves fournissent et celle qu'il pense que ses élèves vont effectivement produire. Ajoutons que la désignation du lieu pour compléter le questionnaire a été laissée à la discrétion de l'enseignant.

3.3.2 La question des conceptions des élèves

Les éléments décrits précédemment visent à circonscrire un espace de travail que les enseignants mettent en place pour aménager une géométrie souhaitée auprès des élèves et qu'il est possible de caractériser à l'aide des paradigmes GI et GII.

Les problèmes destinés aux élèves favorisent l'activation de l'espace de travail, ils participent en plus à une définition du milieu avec lequel les élèves vont interagir en situation adidactique. Lorsque les élèves interagissent avec le milieu, ils œuvrent au sein de leur espace de travail géométrique personnel et cette interaction est susceptible de favoriser le développement de conceptions.

Pour l'identification des conceptions d'élèves, nous avons collecté leur travail de résolution de problèmes géométriques donnés par leurs enseignants et avons fait des entretiens individuels. Précisément, nous avons ramassé tous les recueils de problèmes de chacun des élèves de chacune des classes, une fois le travail de résolution terminé.

Nous les avons numérisés et rendus par la suite. Les problèmes résolus par les élèves ont été consignés sur des feuilles regroupées dans un cartable ou un cahier facilement manipulable. Les problèmes ont été identifiés de même que les pages de manuels d'où ils furent extraits, lorsqu'il y avait lieu. Pour les classes 1, 2, 3 et 4, nous avons obtenu respectivement 32, 29, 32 et 29 fichiers (PDF) correspondant au nombre d'élèves pour chacune des classes.

Pour mener à bien nos entretiens auprès des élèves, nous avons élaboré un guide pour chacune des classes à partir d'une analyse a priori de problèmes. Nous cherchions à sélectionner des problèmes provenant des catégories les plus représentées dans les planifications du thème *triangles et quadrilatères*. Il s'agit des catégories suivantes, les mêmes pour les quatre enseignants : *Reconnaître un objet géométrique, Rechercher une mesure de l'objet géométrique*, *Construire un objet géométrique*, *Justifier un résultat, une affirmation, une propriété de l'objet géométrique*. Toutefois, nous avons dû déterminer des problèmes pour trois d'entre elles au regard des recueils des élèves des classes 3 et 4 dans la mesure où nous n'avons pas trouvé dans les cahiers ciblés pour les entretiens des problèmes résolus correspondants aux quatre catégories ou parce que seulement trois des catégories avaient fait concrètement l'objet d'un choix de problèmes à résoudre par tous les élèves. Le tableau III ci-dessous montre la répartition du nombre de problèmes par types et par classe utilisés pour les entretiens. Les problèmes et leurs analyses a priori sont présentés à la section 4.2; résultats de chacune des classes.

Tableau III Nombre de problèmes par types et classes pour les entretiens

	Classe 1	Classe 2	Classe 3	Classe 4	
Reconnaître	1	6	13	4	24
Rechercher une mesure	6	7	1	aucun	14
Construire	1	1	aucun	2	4
Justifier	3	1	4	1	9
Total des problèmes	11	15	18	7	51

De plus, nous avons prévu des questions dans le guide d'entretien pour obtenir et maintenir l'accord de l'élève, provoquer son évocation, débuter l'entretien spécifique aux problèmes, poursuivre son déroulement et y mettre fin. Aussi, nous avons rédigé des questions afin de contrer d'éventuelles dénégations des élèves. Nos formulations de questions n'étaient pas inductives, négatives et évitaient l'emploi du *pourquoi?* Nous avons pensé à bien observer les gestes, le rythme et la tonalité de la voix des élèves. En filmant les entretiens, nous nous sommes assurée d'une protection supplémentaire afin de détecter des informations implicites pertinentes. Ajoutons que les entretiens auprès des élèves se sont déroulés à leurs écoles respectives dans un local réservé par chacun des enseignants. La durée moyenne d'un entretien est de 25 minutes.

Nous avons employé la technique d'entretien d'explicitation de Vermersch et Maurel (1997) visant la description du déroulement de l'action antérieurement mise en œuvre dans la résolution d'une tâche, pour nous un problème géométrique. C'est un outil méthodologique complémentaire aux traces écrites obtenues par l'échantillonnage des recueils de problèmes géométriques. En effet, selon Vermersch et Maurel[39] (1997), la connaissance d'un résultat final est souvent insuffisante pour saisir la ou les causes d'une réussite ou d'un échec. La description du déroulement de l'action permet, entre autres, de mettre en évidence des raisonnements, des décisions, des raisons justifiant des choix, etc. Par exemple, obtenir auprès d'un élève des éclaircissements supplémentaires quant à ses motivations ayant mené à l'élaboration d'un calcul, d'un dessin.

Par les entretiens d'explicitation, nous voulions de l'information supplémentaire sur les résolutions de problèmes géométriques faites par les élèves afin de la traduire en composantes d'une conception (Balacheff et Margolinas, 2005) : problèmes, opérateurs, systèmes de représentation et structures de contrôle. Et, évaluer à partir des conceptions

---

[39] Les fondements théoriques employés par Vermersch et Maurel (1997) pour justifier l'entretien d'explicitation proviennent notamment de la théorie opératoire de l'intelligence de Piaget et du fait qu'il y a une distinction entre réussir une tâche et la comprendre, c'est-à-dire où la faire efficacement précède souvent l'identification des concepts qui ont contribué à son succès. Nous faisons ici un parallèle avec les opérateurs et l'aspect métamathématique des structures de contrôle d'une conception. Questionner un individu sur la description du vécu de son action augmente nos possibilités de comprendre les décisions sous-jacentes à cette action.

dégagées, la ou les géométries effectivement sollicitées par les élèves (GI, GII) dans ce qui est mis en place par leurs enseignants.

3.3.3 Précisions sur les étapes de la cueillette des données

Pour chaque enseignant et sa classe respective, nous avons appliqué les mêmes étapes de cueillette des données. Celles-ci se sont échelonnées durant l'année scolaire 2010-2011 sur une période allant de décembre 2010 à juin 2011 inclusivement. Elles ont été menées par la chercheure uniquement. Nous les résumons ci-dessous. De plus, le tableau IV de la page suivante présente leur chronologie.

D'abord, nous avons noté à l'agenda la période prévue par l'enseignant pour son enseignement du thème *triangles et quadrilatères* en vue de planifier nos interventions dans les écoles. Nous n'avons pas eu de conflit d'horaire ou d'imprévu qui aurait nuit à la planification de nos interventions, par exemple une tempête de neige nous obligeant à remettre à une date ultérieure notre venue en classe.

Ensuite, nous avons demandé à l'enseignant de nous transmettre les problèmes choisis dans sa planification du thème. Nous les avons reçus avant de l'interviewer. Après, nous lui avons distribué le questionnaire et les formulaires de consentement pour les parents. Le retour du questionnaire et des formulaires a eu lieu généralement au même moment, c'est-à-dire juste avant de procéder à la captation vidéo de la première leçon. Nous avons filmé les autres leçons. Après l'enseignement du thème, nous avons numérisé les recueils des élèves de la classe et les avons rendus par la suite. Nous avons tenu des entretiens d'explicitation avec quatre élèves de la classe et avons remis les recueils conservés pour les besoins des entretiens.

Tableau IV Chronologie des actions pour la cueillette des données

De décembre 2010 à juin 2011				
	Enseignant 1	Enseignant 2	Enseignant 3	Enseignant 4
En classe	26 avril au 6 mai	8 mars au 26 avril	29 avril au 6 juin	9 mai au 9 juin
Décembre		Remise des problèmes prévus à la planification et entrevue avec enseignant	Remise des problèmes prévus à la planification et entrevue avec enseignant	Remise des problèmes prévus à la planification (fin juin 2010) et entrevue avec enseignant
Février		Remise du questionnaire écrit et des formulaires de consentement des parents		
Mars	Remise des problèmes prévus à la planification et entrevue avec enseignant	1re, 2e et 3e leçons filmées	Remise du questionnaire écrit et des formulaires de consentement des parents	
Avril	Remise du questionnaire écrit et des formulaires de consentement des parents 1re leçon filmée		1re leçon filmée	Remise du questionnaire écrit et des formulaires de consentement des parents
Mai	2e et 3e leçons filmées Entretiens : 1, 2, 3, 4	Entretiens : 5, 6, 7, 8	2e et 3e leçons filmées	1re, 2e et 3e leçons filmées
Juin			Entretiens : 9,10,11,12	Entretiens : 13,14,15,16

3.3.4 Démarche et outils pour l'analyse des données

Avant de présenter la démarche et les outils avec lesquels nous avons effectué nos analyses, nous souhaitons émettre des commentaires au sujet des données. Celles-ci proviennent de plusieurs sources : quatre enseignants, quatre classes, quatre élèves par classe pour un total de seize élèves visés pour des entretiens d'explicitation. Chacune des sources a plus d'un type de données. Pour l'enseignant, nous avons ses réponses à l'entrevue, les problèmes de sa planification, ses réponses au questionnaire et les vidéos de trois leçons. Pour les élèves, nous disposons principalement des données issues des recueils de problèmes résolus, d'entretiens d'explicitation et dans une moindre mesure, de l'enregistrement des mêmes trois leçons.

Notre recherche est de nature qualitative et exploratoire. Dans cette optique, Van der Maren (1996) rappelle que les données se distinguent en des contenus manifestes ou latents. Nous sommes consciente que nos données pourraient être de ces deux types. Par exemple, les structures de contrôle des élèves sont souvent implicites et inaccessibles lorsque leur travail de résolution est transmis sous une forme écrite. Pour pallier cette situation et avoir accès à ces structures, nous avons choisi l'entretien d'explicitation afin de révéler des aspects plus latents des productions écrites des élèves. C'est un élément dont nous avons tenu compte au cours de nos analyses et interprétations des résultats.

Nous présentons ci-après la démarche et les outils employés pour l'analyse des niveaux de l'activité enseignante et des conceptions d'élèves.

3.3.4.1 Données relatives aux niveaux d'activité des enseignants

Dans le but de dresser un portrait des niveaux d'activité des enseignants, nous avons commencé par transcrire les entrevues enregistrées dans des dossiers numériques. Les verbatim obtenus traduisaient les réponses des enseignants aux questions visées par les niveaux 3 à 1. Un premier codage des verbatim a été effectué, individuellement, par une autre personne et nous à l'aide d'une feuille explicative des catégories GI, GII et

GI-II.[40] La comparaison des verbatim codés nous a conduite à raffiner leur segmentation en unités de sens et à préciser la feuille des catégories. Cette dernière est disponible à l'annexe 5. Nous avons procédé à un second codage pour lequel nous avons obtenu un accord de 88,29% en moyenne.

En vue d'enrichir l'analyse du niveau 2, nous avons catégorisé les problèmes géométriques proposés par les enseignants dans leurs planifications du thème *triangles et quadrilatères* à partir de la typologie préalablement élaborée et validée, tel que dit à la section 3.3.1. En complément, nous avons recensé leurs réponses aux questionnaires. Les réponses dichotomiques du type oui-non sont compilées dans un tableau disponible à l'annexe 6. Pour synthétiser et catégoriser les autres réponses, nous avons procédé par regroupements successifs d'occurrences synonymiques. À titre d'exemple, des réponses telles que « Touche plusieurs concepts. », « Mais simple, fait appel à des concepts de base sur les triangles et les angles. », « Facile, mais permet de voir si l'élève comprend certains concepts de base. » suggèrent une catégorie liée aux notions en jeu dans un problème.

Au niveau 0, nous avons produit un verbatim pour chacune des leçons filmées. Nous en avons faite l'analyse seule avec la même feuille validée des catégories GI, GII et GI-II que celle employée pour les niveaux 3 à 1 de l'entrevue.

À l'annexe 7, nous avons placé des extraits codés du discours d'un enseignant afin d'illustrer les éléments considérés et leur association aux niveaux et paradigmes. Les extraits concernant les niveaux 3, 2 et 1 sont exemplifiés à l'aide des réponses aux questions Q1, Q8 et Q9 de l'entrevue et ceux du niveau 0 le sont à partir d'une leçon.

3.3.4.2 Données relatives aux conceptions des élèves

Pour les conceptions d'élèves, nous avons analysé les entretiens d'explicitation et les productions écrites. La démarche compte trois étapes. Premièrement, nous avons produit un verbatim pour chacun des quatre entretiens d'une même classe qui a été codé

[40] La catégorie GI-II a été créée lorsque les propos, les références ou les interventions à coder étaient susceptibles d'appartenir à l'un ou l'autre des paradigmes GI ou GII.

à l'aide des codes issus de la définition d'une conception de Balacheff et Margolinas (2005) : (P) pour les types de problèmes, (R) pour les opérateurs, (L) pour les systèmes de représentation et (Σ) pour les structures de contrôle. Deuxièmement, pour un même type de problème, nous avons procédé à une comparaison des opérateurs, des systèmes de représentation et des structures de contrôle des quatre entretiens. Nous avons référé aux traces écrites des recueils des élèves concernés par les entretiens. Troisièmement, toujours pour un même type de problème, nous avons regardé les autres recueils des élèves de la classe même si nous n'en avions interviewé que quatre.

Ces opérations ont été répétées pour tous les problèmes des entretiens. De plus, pour augmenter la validité des analyses, nous avons demandé à une autre personne de coder quatre extraits des verbatim d'élèves; un extrait par classe pour un type de problème différent. Nous lui avons expliqué les codes (P, R, L, Σ). Ensuite, nous avons présenté les problèmes associés aux verbatim à coder : 1 problème *Reconnaître* (classe 1), 1 problème *Justifier* (classe 2), 1 problème *Rechercher une mesure* (classe 3), 1 problème *Construire* (classe 4)). La personne a codé les extraits. Ses résultats de codage avec les nôtres ont donné un accord de 78,8%.[41]

Le travail précédent a permis de dégager des conceptions d'élèves pour chacune des classes selon les types de problèmes dominants des planifications des enseignants. Ensuite, pour chacun des types, nous avons recensé toutes les conceptions des quatre classes. De cette manière, nous avons pu effectuer le recoupement des conceptions et parvenir à en faire une synthèse.

3.4 Précautions d'ordre éthique et méthodologique

Nous décrivons ci-dessous les actions préventives menées sur les plans éthique et méthodologique.

[41] C'est l'identification des systèmes de représentation des opérateurs qui a occasionné plus de différences dans les codages des verbatim dans la mesure où ils sont souvent implicites aux opérateurs. Par exemple, lorsqu'un élève mesure un angle avec le rapporteur, il s'agit là d'un opérateur. Mais les gestes associés à cette action constituent une part du système de représentation de l'opérateur.

3.4.1 Précautions d'ordre éthique

Au niveau éthique, nous nous sommes assurée de la participation volontaire et éclairée des enseignants, des directions d'école et des élèves en accord avec les parents. Nous avons obtenu un certificat d'éthique de la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université de Montréal (certificat numéro CPER-10-012-P4). Tous les formulaires de consentement des enseignants et des parents, produits selon les normes de l'Université, ont été signés et une copie remise à chaque participant. Nous avons en notre possession une copie des formulaires de consentement des enseignants et des parents d'élèves. De plus, après la rencontre avec chacune des directions d'école, nous leur avons envoyé une lettre résumant les informations discutées et nos coordonnées téléphoniques.

Ajoutons qu'en cours d'expérimentation, nous avons vérifié l'intérêt des sujets à participer au projet. En particulier, lors des entretiens d'explicitation auprès des élèves, nous avons vérifié leur accord à poursuivre l'entretien, à maintes reprises. Par ailleurs, nous avons respecté le choix des quelques parents qui ont refusé la participation entière ou partielle de leur enfant à notre recherche. Pour certains d'entre eux, seule la captation vidéo était interdite. Dans ces cas, nous nous sommes assurée que ces élèves ne soient pas visés par l'objectif de la caméra en leur attribuant une autre place dans la salle de classe.

Pour préserver l'anonymat des personnes, aucun nom d'élève ou d'enseignant n'a été publié lors du traitement des données et de la diffusion des résultats. Étant donné que l'échantillon d'enseignants compte trois femmes et un homme, nous avons employé les expressions : enseignant 1, enseignant 2, enseignant 3 et enseignant 4. Évidemment, l'ordre numérique ne correspond pas à la présentation ci-dessus de trois femmes et un homme. Nous avons aussi fait usage de numéros pour parler des élèves, par exemple l'élève 1, 2, 3 ou 4.

3.4.2 Précautions d'ordre méthodologique

Afin de s'assurer de la fidélité des données, nous leur avons appliqué les mêmes procédures de cueillette et d'analyse, et ce pour les quatre classes. Nous avons fait une comparaison des productions écrites et des verbatim de chacun des élèves et entre ceux-ci. De plus, nous avons tenu compte des traces écrites de tous les élèves d'une même classe pour les problèmes visés par les entretiens même si nous n'avions interviewé que quatre élèves. Nous sommes consciente que certains aspects absents dans la production écrite pouvaient se manifester dans le verbatim. Nous anticipions cela en particulier au sujet des structures de contrôle. Nous avons tenu compte de cette situation qui a justifié le recours à l'entretien d'explicitation pour enrichir les données.

En plus d'être fidèles, nos données doivent être valides. La validité théorique de notre recherche semble respectée dans la mesure où les éléments du cadre théorique ont guidé l'analyse des niveaux de l'activité enseignante dont les choix de problèmes et les conceptions d'élèves. Pour plus de validité, nous avons fait appel à quatre personnes : deux personnes pour valider la typologie des problèmes, une personne pour coder les entrevues des enseignants et une autre personne pour coder des extraits de verbatim d'élèves.

Pour plus de validité interne, nous avons consigné des commentaires dans un journal de bord. Nous y avons noté certains de nos présupposés en évitant ainsi de les divulguer aux enseignants ou élèves, ce qui aurait pu biaiser partiellement nos données. Aussi, la tenue du journal a contribué à expliciter des aspects des rencontres tenues avec les enseignants, en particulier pour une personne avec laquelle nous avions travaillé en service conseil. Il y avait un risque que la communication entre cette personne et nous soit empreinte d'implicites dans la mesure où nous avions déjà partagé certaines idées pédagogiques. Par ailleurs, en inscrivant nos choix et les raisons les justifiant, de même qu'en compilant des dates, des faits et des impressions tout au long de notre démarche, nous avons pu juger de la cohérence de la recherche et rendre compte de ses limites.

Enfin, la recherche présente un certain degré de validité externe, entre autres, par d'éventuelles retombées dans le milieu de pratique. Sans prétendre à une extrapolation des résultats, nous espérons qu'ils apportent un éclairage supplémentaire sur ce que des élèves mettent en œuvre lorsqu'ils résolvent les problèmes géométriques qui leurs sont proposés. Nous espérons aussi que ces résultats d'élèves associés à cette mise en œuvre contribuent à faire en sorte que la réflexion sur la géométrie mise en place se poursuive.

Chapitre 4 Analyse des résultats

Ce chapitre comprend deux sections. La première section présente l'analyse de problèmes provenant de manuels scolaires. La deuxième section détaille l'analyse des situations didactiques de chacune des quatre classes.

4.1 Analyse de problèmes géométriques de manuels scolaires

Tel que mentionné à la section 3.3.1, nous avons procédé à une catégorisation de problèmes de manuels scolaires québécois[42] traitant des triangles et des quadrilatères d'un point de vue anthropologique (Chevallard, 1999) et paradigmatique (Houdement et Kuzniak, 2006, 1999, 1998-1999). Ceci afin de nous préparer à l'analyse des problèmes choisis par les enseignants et susceptibles d'être donnés à leurs élèves. N'oublions pas que les manuels scolaires sont souvent une référence importante pour faire ces choix.

Rappelons qu'une activité humaine régulièrement accomplie est décomposable en types de tâches, techniques et technologies-théories (Chevallard, 1999). Les types de tâches correspondent à ce qui est demandé, c'est-à-dire des travaux pour lesquels des résolutions et résultats sont attendus. Les techniques permettent d'accomplir les types de tâches alors que les technologies-théories sont les discours produisant et légitimant les techniques. Sur cette base, nous avons dégagé six types de problèmes : *Rechercher une mesure de l'objet géométrique, Construire un objet géométrique, Reconnaître un objet géométrique, Justifier un résultat, une affirmation, une propriété de l'objet géométrique, Découvrir une propriété, un théorème géométrique, Produire une représentation de l'objet géométrique*.

Nous présentons une description de chacun des types assortie d'un exemple et de leurs techniques et technologies. Par ailleurs, sachant que pour un type de problèmes il peut exister plus d'une technique et technologie, pensons à l'exemple de construction de droites parallèles donné au chapitre 2, nous avons décidé de présenter les techniques et

[42] Voici à nouveau les noms des manuels consultés : *À vos maths!* Manuel B; *Perspective* volume 1A; *Perspective* volume 2A; *Panoram@th* Manuel A volume 1; *Panoram@th* Manuel A volume 2.

technologies sous une forme générale mais représentative. Nous terminons l'analyse en comparant les types de problèmes aux paradigmes géométriques GI et GII et faisons une esquisse d'un espace de travail géométrique se dégageant de cette étude.

4.1.1 Rechercher une mesure de l'objet géométrique

D'entrée de jeu, précisons notre adoption du sens suivant du mot *mesurer* :

> « Déterminer la valeur de (une grandeur mesurable), lui attribuer un nombre qui fixe son intensité ou son état (par rapport à une grandeur de la même espèce). Mesurer par l'observation directe, à l'aide d'instruments, par le calcul. » Robert (2009, p. 1582).

Nous regroupons tous les problèmes qui demandent de trouver la mesure d'un angle, d'un segment, du périmètre, de l'aire d'un triangle ou d'un quadrilatère. En voici un exemple.[43]

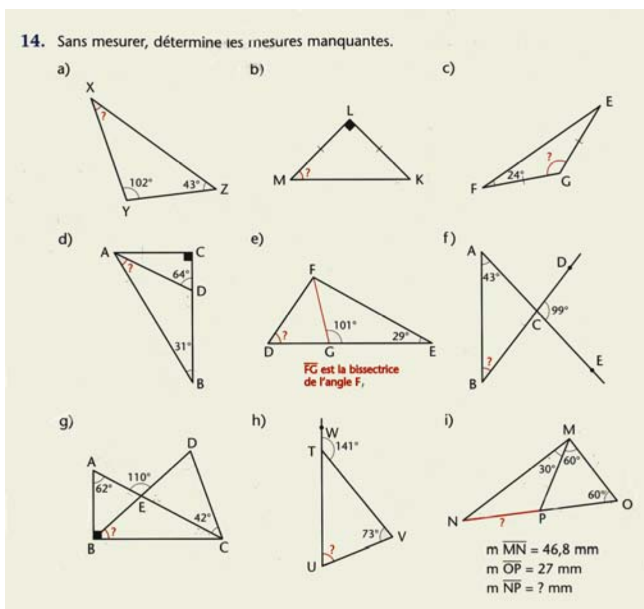


Figure 5 Exemples - Rechercher une mesure

[43] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 2, p. 171.

Les techniques sont majoritairement de nature calculatoire. Il s'agit d'effectuer mentalement ou par écrit un ou des calculs. Les problèmes proposent généralement une figure, mais pas exclusivement. La figure est susceptible de contenir des indications symboliques de propriétés et être à l'échelle pour des mesures d'angles, de côtés, fournies ou à trouver. Elle est partiellement décrite ou pas. Les techniques peuvent être instrumentées. La solution s'obtient par une application du rapporteur ou de la règle sur la figure suggérée. Cette situation se rencontre s'il n'y a aucune contre-indication à l'usage d'instruments de mesure ou si les figures sont à l'échelle.

Les technologies sollicitées sont généralement implicites; elles participent à la mise en œuvre et à la validation des techniques sans être exprimées. Les technologies concernent principalement des définitions, des propriétés et des théorèmes relatifs aux triangles et aux quadrilatères. Elles relèvent de la géométrie euclidienne, à l'exception des techniques instrumentées.

4.1.2 Construire un objet géométrique

Sous ce type sont regroupés les problèmes demandant de construire un triangle, un quadrilatère ou un de leurs éléments. En voici deux exemples.[44]

2. Construis les triangles suivants et donne, dans chaque cas, le nom du triangle.
   a) L'angle BCA mesure 62° et les deux côtés formant cet angle mesurent respectivement 4 cm et 5 cm.
   b) Les trois côtés mesurent respectivement 6 cm, 8 cm et 12 cm.
   c) Le côté DE mesure 5 cm, le côté EF mesure 2 cm et l'angle DEF mesure 90°.

Figure 6 Exemples - Construire

[44] Sources dans l'ordre de présentation : *Panoram@th*, vol. 2, p. 168 et *Perspective*, vol. 1A, p. 89.

1 À l'aide de tes instruments de géométrie, trace :

a) un parallélogramme ayant un côté de 5 cm ;

b) un losange comprenant un angle intérieur de 70° ;

c) un trapèze n'ayant que deux côtés isométriques ;

d) un parallélogramme ayant des diagonales perpendiculaires ;

e) un losange ayant des diagonales isométriques ;

f) un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires.

Figure 7 Exemples - Construire

Il faut dire que nous n'avons pas réservé le mot *construire* à l'utilisation stricte de la règle non graduée et du compas, ni à celle des outils d'un logiciel de géométrie dynamique favorisant l'invariance des propriétés d'une construction en mouvement. En géométrie, traditionnellement, le mot *construire* sous-entend les constructions à la règle et au compas. Toutefois, dans les manuels, nous avons observé que la règle graduée et le rapporteur d'angles faisaient partie des instruments sollicités pour la construction des triangles et quadrilatères. Aussi, les verbes *construire* et *tracer* étaient synonymes. Or, en géométrie, *construire* un objet géométrique au sens strict, avec la règle non graduée et le compas ou leur pendant virtuel, laisse une trace sur la feuille de papier, à l'écran de l'ordinateur. *Tracer* une figure de l'objet géométrique laisse aussi une trace, mais elle relève plutôt d'une figure à main levée (avec ou sans indications de propriétés), d'une figure obtenue par les instruments de mesure ou d'une figure déformable à l'écran, c'est-à-dire produite sans recourir aux propriétés et qui se défait en déplaçant un de ses points. Ainsi, selon ces considérations, nous avons classé les problèmes dont l'emploi des instruments de géométrie est requis indépendamment du choix du verbe *construire* ou *tracer* dans la consigne.

Les techniques nécessaires à la résolution des problèmes de ce type varient selon les instruments. Un instrument sera exigé explicitement dans la consigne comme par exemple dans *construire un triangle équilatéral avec le compas et la règle non graduée.* Un instrument sera suggéré par les contraintes de construction fournies dans l'énoncé, par exemple *construire un triangle dont deux des mesures d'angles sont de 34 et de 67 degrés*. Dans cet exemple, le rapporteur, sans être nommé, est nécessaire à la technique de résolution. Enfin, le choix des instruments peut ne pas être proposé dans la consigne, par exemple lorsqu'on demande de *construire un carré*.

Les techniques sont composées d'actions plus ou moins complexes selon l'objet géométrique et les instruments privilégiés. Pensons à un exemple quelconque tel que la construction d'un triangle isocèle à la règle et au compas. Une technique constituée des actions suivantes permettrait ladite construction :

> Tracer à la règle un segment quelconque AB;
> Avec le compas et une ouverture un peu plus grande que la moitié du segment AB, tracer un arc de cercle à partir du point A;
> Répéter l'étape 2 mais à partir du point B;
> Nommer C un point d'intersection des deux arcs de cercle;
> Avec la règle, relier les points A et B au point C.

Les problèmes de construction exigent rarement une description de la procédure de construction. Les problèmes fournissant une figure traitent surtout de la construction des hauteurs, médianes, médiatrices ou bissectrices.

Les technologies sollicitées par ce type de problèmes sont dans la plupart des cas implicites; elles participent à la mise en œuvre et à la validation des techniques sans être exprimées. Elles peuvent relever de définitions, propriétés et théorèmes de la géométrie euclidienne ou bien de la précision de tracés obtenue par la mesure. À tire d'exemple, considérons la technique suivante pour la construction d'une médiane issue du sommet A d'un triangle ABC : 1) avec la règle mesurer le segment BC et nommer D le point milieu de ce segment 2) avec la règle joindre les points A et D. Nous pourrions dire que la technologie sous-jacente relève de référents théoriques de la géométrie euclidienne, mais aussi de la mesure. D'une part, il y a mise en œuvre de la définition de la médiane (un segment joignant un sommet du triangle au milieu du côté opposé) et, d'autre part, validation obtenue par la règle pour l'identification du point milieu.

4.1.3 Reconnaître un objet géométrique

Sous ce type, nous avons compilé les problèmes pour lesquels il faut identifier un triangle, un quadrilatère, un élément de ces objets géométriques ou leurs propriétés. En voici un exemple.[45]

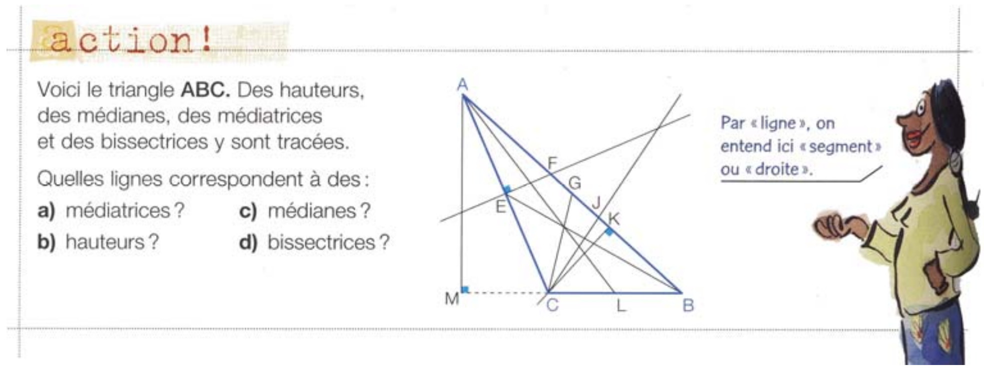


Figure 8 Exemples - Reconnaître

Les techniques nécessaires à la résolution des problèmes de ce type sont variées. Elles nécessitent de faire des calculs, prendre des mesures, repérer une figure ou des indications symboliques. Elles pourraient exiger une mise en relation de propriétés en procédant par comparaison, élimination, déduction, etc.

Les technologies réfèrent majoritairement à des définitions, des propriétés et des théorèmes de la géométrie euclidienne aussi bien sur les triangles que les quadrilatères. Les technologies sont explicites sans être élaborées puisque les problèmes demandent d'identifier les objets géométriques ou leurs propriétés. Toutefois, lorsque la technique consiste à repérer une figure qui n'est pas nommée ni codée, les technologies validant cette technique n'appartiennent pas à la géométrie euclidienne.

[45] Source : Manuel *À vos maths!* vol. B, p. 188.

4.1.4 Justifier un résultat, une affirmation, une propriété de l'objet géométrique

Sous ce type, nous retrouvons les problèmes qui posent la question *pourquoi?* Nous ajoutons les problèmes exigeant de fournir une explication ou une preuve relative à un résultat fourni ou à trouver, une affirmation, une propriété concernant les triangles et les quadrilatères. En voici un exemple.[46]

14. Dans un triangle rectangle ABD, la médiane AE issue de l'angle droit mesure la moitié du côté opposé à l'angle droit. En t'inspirant de la figure ci-dessous, explique pourquoi cette propriété est vraie.

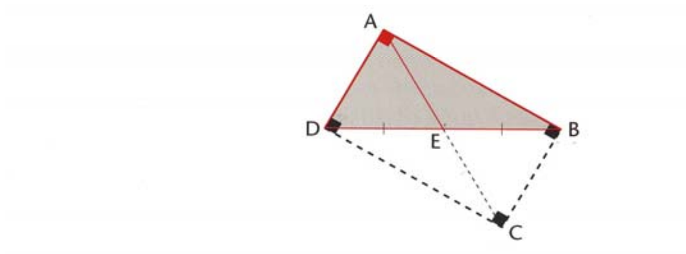


Figure 9 Exemple - Justifier

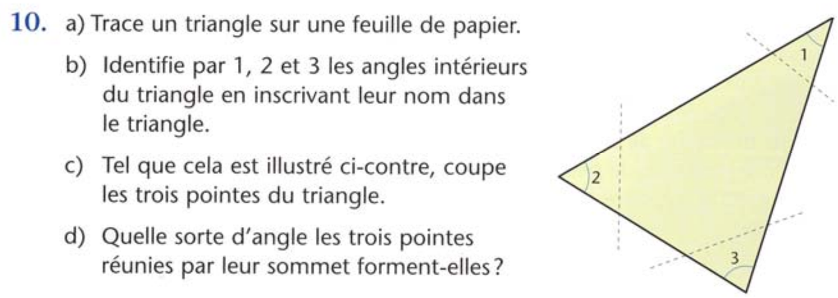
Les techniques pour résoudre ces problèmes nécessitent de faire des calculs, des manipulations d'expressions algébriques, le repérage d'indications symboliques sur une figure, la production d'exemples et contre-exemples ou la mise en relation de propriétés par comparaison, élimination, déduction, etc. Les problèmes sont accompagnés ou non d'une figure. La figure est susceptible d'être mise à l'échelle pour des mesures d'angles en particulier. Elle peut contenir des indications symboliques de propriétés et se laisser décrire partiellement.

Les technologies réfèrent à des définitions, des propriétés et des théorèmes de la géométrie euclidienne. Elles sont explicitement sollicitées bien que leur expression ne soit pas requise sous une forme déductive. Toutefois, certains problèmes fournissent déjà à l'élève des propositions se destinant à soutenir ses éventuels pas de raisonnement.

[46] Source : Manuel *Panoram@th*, vol.2, p. 196.

4.1.5 Découvrir une propriété, un théorème géométrique

Nous retrouvons ici les problèmes suggérant différentes opérations ostensibles faites sur une ou des figures pour constater voire énoncer une propriété, un théorème des objets géométriques triangles et quadrilatères. En voici un exemple.[47]


10. a) Trace un triangle sur une feuille de papier.

b) Identifie par 1, 2 et 3 les angles intérieurs du triangle en inscrivant leur nom dans le triangle.

c) Tel que cela est illustré ci-contre, coupe les trois pointes du triangle.

d) Quelle sorte d'angle les trois pointes réunies par leur sommet forment-elles ?

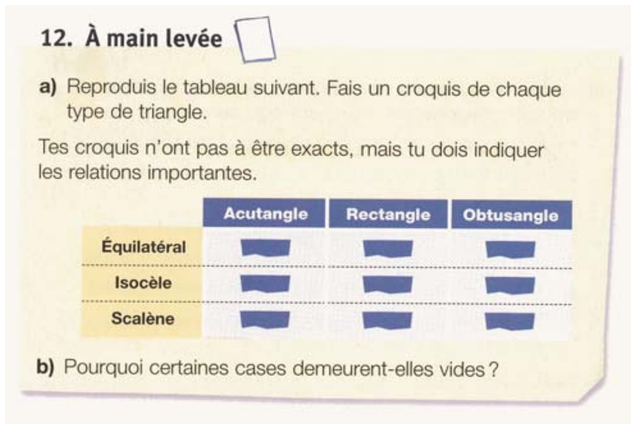
Figure 10 Exemple - Découvrir

Les techniques se composent d'actions relatives à l'observation, la mesure, le découpage, le collage. Elles induisent l'idée selon laquelle un ou quelques cas suffisent à découvrir une propriété, un théorème. Conséquemment, les technologies ne relèvent pas de la géométrie euclidienne, mais la propriété ou le théorème à découvrir, oui.

[47] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 1, p. 201.

4.1.6 Produire une représentation de l'objet géométrique

Sous ce type, nous avons regroupé les problèmes demandant de représenter les objets géométriques triangles et quadrilatères ou un de leurs éléments sans l'usage des instruments de géométrie. En voici un exemple (numéro 12a).[48]



12. À main levée

a) Reproduis le tableau suivant. Fais un croquis de chaque type de triangle.

Tes croquis n'ont pas à être exacts, mais tu dois indiquer les relations importantes.

	Acutangle	Rectangle	Obtusangle
Équilatéral			
Isocèle			
Scalène			

b) Pourquoi certaines cases demeurent-elles vides ?

Figure 11 Exemple - Produire une représentation

Les techniques consistent à faire des figures à main levée en y ajoutant, le cas échéant, des indications symboliques de propriétés. Elles peuvent nécessiter l'usage de matériaux, par exemple une ficelle, des cure-pipes.

Les technologies réfèrent aux définitions et aux propriétés des triangles et des quadrilatères, mais pas exclusivement puisque des images associées à ces objets sont susceptibles de favoriser aussi la production des représentations.

---

[48] Source : Manuel *À vos maths!* vol. B, p. 200.

4.1.7 Répartition des types de problèmes

La figure 12 fournit une illustration de la répartition des types de problèmes des manuels analysés.[49] Soulignons à nouveau que ces types de problèmes ont fait l'objet d'un codage validé par deux autres personnes.

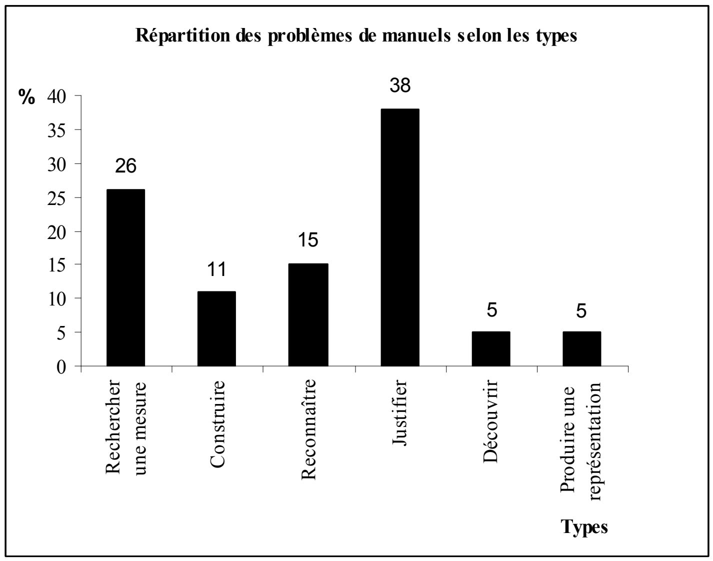


Figure 12 Répartition des problèmes de manuels

Deux types de problèmes se démarquent du diagramme à bandes. Il s'agit des types *Rechercher une mesure* (26%) et *Justifier* (38%). Ces types représentent 64% des problèmes analysés. Les types *Reconnaître* (15%) et *Construire* (11%) occupent les troisième et quatrième positions, alors que les types *Découvrir* (5%) et *Produire une représentation* (5%) se partagent ex-æquo la dernière position.

La figure 12 montre la répartition des types de problèmes de manuels scolaires. Par ailleurs, au regard des techniques et des technologies-théories sollicitées par les problèmes, il est possible de les comparer aux paradigmes géométriques, ce que nous présentons dans ce qui suit.

---

[49] Nous avons compilé le nombre de problèmes par type pour chacun des manuels. Ensuite, nous avons calculé la moyenne arithmétique de chaque type en fonction des cinq manuels. La recension compte 725 problèmes.

4.1.8 Comparaison des types de problèmes à GI et GII

Pour faire les comparaisons des types de problèmes aux paradigmes GI et GII, nous avons considéré les éléments suivants :

Un problème relève du paradigme GI lorsque :

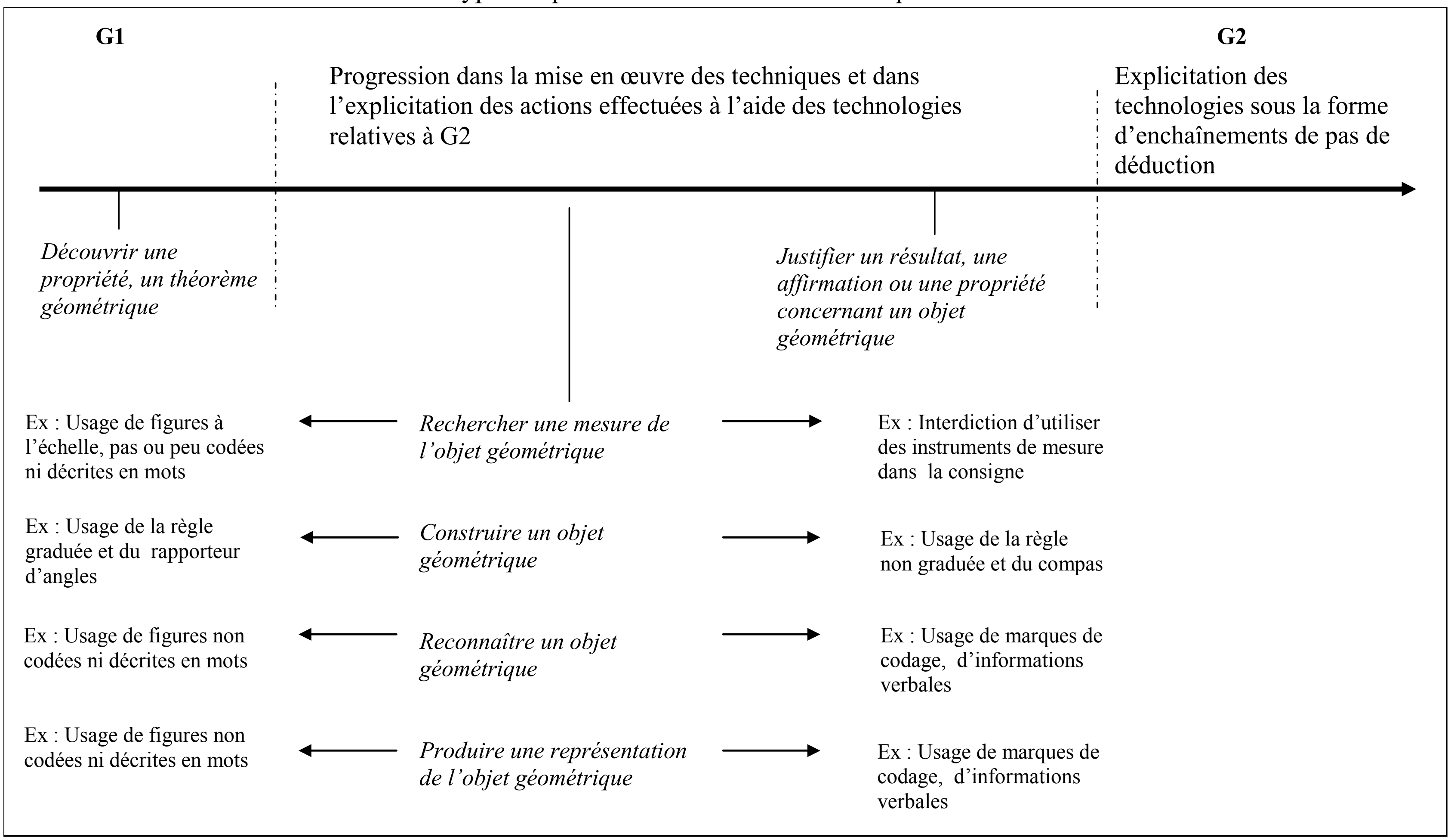
- La résolution du problème s'appuie essentiellement sur le sensible, par exemple la manipulation d'objets physiques, la perception d'une figure ou sa mesure avec un gabarit, une règle graduée ou un rapporteur d'angles.
- La validation de la solution s'effectue aussi sur le sensible (ex. c'est vrai parce que ça se juxtapose, ça se voit, ça se mesure, etc.).
- La figure associée au problème est un objet d'étude et de validation.
- Ce qui est privilégié par le problème relève de l'évidence.

Un problème relève du paradigme GII lorsque :

- La résolution du problème s'effectue à partir de notions. Elle peut s'appuyer sur le sensible, mais elle demeure subordonnée à l'aspect théorique.
- La validation de la solution se fait à l'aide de lois hypothético déductives.
- La figure associée au problème est un support au raisonnement.
- Ce qui est privilégié par le problème, ce sont les définitions, les propriétés et les théorèmes mis en relation dans l'élaboration de preuves.

De notre analyse, nous n'avons pas observé de types de problèmes qui puissent être considérés strictement en GI ou GII et satisfaisant l'ensemble des critères propres à chacun, à l'exception de problèmes du type *Découvrir* dont les techniques de résolution et de validation relèvent de GI, et certains problèmes du type *Justifier* demandant par exemple de compléter une démonstration, donc en GII. Outre ces deux cas, nous avons remarqué des types de problèmes qui se situeraient plutôt entre les paradigmes, oscillant en direction de GI ou vers GII. Le tableau V suivant illustre cette position des types de problèmes.

Tableau V Types de problèmes des manuels en comparaison de GI et GII



Les types *Rechercher une mesure et Construire* favorisent la plupart du temps la mise en œuvre des référents théoriques de la géométrie euclidienne, mais elle demeure implicite. Quant aux types *Reconnaître* et *Produire une représentation,* ils sollicitent respectivement l'expression des référents théoriques sous la forme d'un ou quelques mots ou de représentations figurales, codées ou non. Pour le type J*ustifie*r, l'expression des référents théoriques n'est pas clairement exigée sous la forme d'enchaînements de déduction lorsque possible, ce qui rapprocherait les problèmes plus près de la géométrie euclidienne.

De plus, nous parlons *d'oscillation* des types de problèmes vers GI ou GII. Par exemple, les problèmes du type *Construire* autorisant l'usage d'instruments tels que la règle graduée et le rapporteur d'angles tendent davantage vers GI que GII puisque la mesure intervient aussi comme élément de validation. Inversement, les problèmes de construction au compas et à la règle oscillent vers GII dans la mesure où ce sont des référents théoriques qui permettraient de valider le travail.

Par ailleurs, pour des problèmes du type *Rechercher une mesure*, nous avons observé que des figures à l'appui étaient à l'échelle. En soi, cela n'est pas si grave si la consigne interdisant l'emploi d'instruments de mesure est respectée. Cette interdiction a pour objectif de favoriser des techniques supportées par des référents théoriques de GII. Mais la présence de figures à l'échelle laisse la possibilité d'appliquer le rapporteur ou la règle sur l'angle ou le segment dont on cherche la valeur; technique de GI.

La nature des instruments utilisés de même que le traitement des représentations figurales en appui aux problèmes sont des facteurs susceptibles d'orienter les problèmes vers GI ou GII. En tenant compte de ces facteurs, notamment, nous avons dégagé un espace de travail géométrique de l'analyse des problèmes de manuels. Rappelons qu'un espace de travail géométrique est constitué de trois composantes : un espace local réel, des artéfacts et un référentiel théorique (Houdement et Kuzniak, 2006).

L'espace local et réel des problèmes analysés est un espace qui tend à devenir un espace physico géométrique principalement restreint à la feuille de papier. La figure est présente dans 52% des problèmes (types confondus). La figure sert surtout de support au raisonnement, mais elle peut être aussi un objet d'étude et de validation.

Les artéfacts permis pour résoudre les problèmes sont variés : règle graduée ou non, rapporteur d'angles, compas, équerre, ficelle, cure-pipes, papier pointillé, quadrillé, calque. Quelques problèmes simulent l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique.

Le référentiel théorique sollicité pour la résolution et la validation des problèmes se compose majoritairement de définitions, de propriétés et théorèmes de la géométrie euclidienne, mais pas exclusivement. C'est le cas des problèmes du type *Découvrir* dont les techniques de résolution concernent surtout des actions d'observation, de mesure, de découpage et de collage. À l'exception du type *Justifier*, les problèmes favorisent la mise en œuvre de référents théoriques de la géométrie euclidienne davantage sous leur forme opératoire que prédicative (Vergnaud, 2001). Quant à l'expression des référents théoriques des problèmes du type *Justifier,* il n'est pas nécessaire ni requis qu'elle soit sous la forme d'enchaînements de déduction.

4.2 Analyse des situations didactiques de chacune des classes

Dans cette section, nous présentons une analyse des situations didactiques des classes 1 à 4. Pour chacune d'elles, nous commençons par les niveaux caractéristiques de l'activité enseignante, lesquels nous renseignent sur la géométrie souhaitée et sur celle actualisée auprès des élèves, puis nous poursuivons par l'analyse des conceptions d'élèves. Les niveaux de l'activité enseignante ainsi que les conceptions d'élèves sont caractérisés selon les paradigmes GI et GII. À ce sujet, rappelons que nous considérons comme relevant de GI (et écrirons GI) les interventions, notamment celles de validation, les références ou les propos qui s'appuieront sur le sensible, par exemple la perception globale d'une figure ou sa mesure à l'aide d'un gabarit, d'une règle graduée ou d'un rapporteur d'angles. Lorsqu'ils seront subordonnés à l'aspect théorique et reposeront sur des définitions, des propriétés ou des théorèmes, nous les considérons comme tendant vers GII, et écrirons GII (ou vers GII). Notons que pour appartenir pleinement à GII, les interventions, les références ou les propos doivent s'inscrire dans une perspective de raisonnement hypothético déductif, ce qui a été peu observé. De plus, les interventions, références ou propos susceptibles d'appartenir à l'un ou l'autre des paradigmes GI ou GII seront identifiés par l'expression GI-II. À la fin de l'analyse de chacune des classes, nous présentons une compilation synthétique des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1), des problèmes du projet de construction (niveau 2), de l'actualisation en classe de ses intentions (niveau 0) et des conceptions d'élèves (niveau -1). Nous avons établi une catégorie spécifique pour les problèmes même s'ils font partie du niveau 2. Cela nous a semblé pertinent pour discuter d'une part, des problèmes des projets de construction et, d'autre part, des raisons évoquées par les enseignants dans leurs évaluations des problèmes des questionnaires.

Par ailleurs, soulignons à nouveau que les problèmes ciblés pour l'analyse des conceptions d'élèves appartiennent au projet de construction de l'enseignant, en plus d'avoir été résolus par les élèves. Dans la mesure du possible, nous avons choisi des problèmes en fonction des types les plus représentatifs du projet de construction. C'est aussi sur la base des problèmes ciblés que nous avons fait nos entretiens d'explicitation. Ajoutons que chacun des problèmes ciblés a fait l'objet d'une analyse a priori, ceci dans le but d'en dégager des conduites attendues ou probables en termes de techniques et de technologies. Par la suite, ce sont les conceptions d'élèves effectivement associées à la résolution des problèmes qui sont présentées. Nous employons les éléments théoriques définissant une conception à l'aide d'opérateurs (R), de systèmes de représentation pour l'expression des opérateurs (L) et structures de contrôle (∑). Nous avons inséré, lorsque nécessaire, des extraits[50] des entretiens avec les enseignants et les élèves de même que des extraits des cahiers des élèves pour appuyer nos dires.

4.2.1 Analyse de la situation didactique de la classe 1

Nous présentons l'analyse didactique de la classe 1. Celle-ci compte trente-deux élèves. Nous débutons par les niveaux caractéristiques de l'activité enseignante suivis des conceptions d'élèves, lesquelles ont été identifiées à partir de problèmes des types *Rechercher une mesure*, *Justifier*, *Reconnaître* et *Construire*. Tel que dit précédemment, nous terminons l'analyse de la classe par un tableau (voir section 4.2.1.3) présentant une synthèse des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant et leur actualisation en classe, des problèmes et des conceptions d'élèves.

4.2.1.1 Analyse des niveaux de l'activité de l'enseignant de la classe 1

Dans un premier temps, nous analysons les niveaux caractéristiques de l'activité enseignante: niveau 3, niveau 2, niveau 1 et niveau 0. Dans un second temps, nous en faisons un résumé pour discuter de la géométrie souhaitée par l'enseignant et de celle effectivement mise en place auprès des élèves.

4.2.1.1.1 Niveau 3 Conceptions[51] et valeurs

Selon l'enseignant, l'expression *faire de la géométrie plane* consiste à faire de la géométrie dans un plan. Malgré le caractère tautologique de la phrase, ce qui est relevé de cette expression est son aspect bidimensionnel, c'est-à-dire le plan en tant qu'objet géométrique plutôt que l'aspect opératoire (le verbe faire).

---

[50] Nous avons laissé les citations dans leur langage vernaculaire afin de rester fidèle aux données.
[51] Le mot *conception* est la « […] manière de concevoir une chose, d'en juger. » (Robert, 2009, p. 494).

Les points jugés favorables à l'enseignement de la géométrie concernent d'une part, les élèves « C'est quelque chose de relativement facile pour les élèves. » et, d'autre part, les applications de cette discipline au quotidien « C'est souvent des concepts plus concrets pour les élèves donc, c'est facile de faire le lien entre des choses qu'ils voient dans la vie là de tous les jours, dans la vie courante. ». L'enseignant parle de *concepts plus concrets* pour traduire cette idée de lien entre la géométrie et des éléments de la réalité. Mais l'absence de précision, dans l'explication du lien entre la géométrie et la réalité, ne permet pas de statuer s'il s'agit d'un lien fort avec celle-ci relevant de GI ou d'une modélisation de la réalité selon GII. Par ailleurs, l'enseignant ne voit rien de défavorable à l'enseignement de la géométrie et le considère comme un défi à relever pour trouver diverses façons d'enseigner certains concepts géométriques plus difficiles à comprendre par les élèves. À titre d'exemple, il nomme la formule algébrique pour le calcul de la somme des angles intérieurs d'un polygone.

L'enseignant caractérise la géométrie plane de première secondaire comme une géométrie de mise à niveau. Deux idées sous-tendent cette caractérisation. La première est que les élèves ont amorcé leurs apprentissages géométriques au primaire notamment par la manipulation d'objets physiques. La seconde est que les élèves n'ont pas tous acquis les mêmes connaissances géométriques ni la même terminologie mathématique relative à ces connaissances.

De plus, l'enseignant souhaite que ses élèves développent plus particulièrement quatre habiletés où la première relèverait de GI, la seconde de GI-II et les deux autres de GII. La première habileté est associée à la manipulation de matériel concret. Nous y reviendrons. La seconde habileté concerne l'emploi des instruments de géométrie. La troisième habileté est associée à la lecture des figures géométriques comme l'affirme l'enseignant : « Essayer de voir au-delà du dessin. Ça ne veut pas nécessairement dire que c'est quelque chose qu'on fait beaucoup. ». La quatrième habileté vise des propriétés et des théorèmes géométriques pour déduire des *choses.*

> « C’est aussi dans le but qu’ils puissent avancer […] Il y a souvent des concepts mathématiques, je vous dirais dans la géométrie, on leur donne un théorème, ensuite ils utilisent ce théorème là pour trouver d’autres valeurs. Si on prend par exemple un triangle, on leur donne, euh, deux mesures d’angles, ils doivent trouver le troisième. Donc, oui, il y a le fait de calculer avec un ensemble de géométrie, mais il y a aussi de déduire certaines choses qui à mon avis est très important pour développer ce qui s’en vient plus tard en mathématiques. »

Nous revenons sur l’emploi du matériel concret, car ce que l’enseignant en dit se situe au carrefour de sa perception de l’enseignement de la géométrie au primaire et de sa réalité d’enseignement au premier cycle du secondaire. En effet, il considère que les élèves, au primaire, avaient l’habitude de manipuler des objets en trois dimensions, alors qu’au secondaire, ils ne manipulent plus vraiment d’objets physiques puisque la pratique géométrique se fait surtout sur des feuilles de papier, à partir d’exercices puisés dans des manuels ou des guides pédagogiques. Ces manuels (ou guides) de première secondaire offrent peu d’idées relatives au matériel; d’autres suggestions d’emploi du matériel concret (objets physiques en trois dimensions) seraient perçues comme une amélioration à leur apporter. Par ailleurs, le programme d’études représente tout au plus une référence afin d’identifier les compétences à valoriser chez ses élèves.

Pour l’enseignant, le matériel concret est un élément potentiellement pertinent à utiliser auprès de certains élèves. Son emploi semble s’inscrire comme une solution aux problèmes d’apprentissage susceptibles d’être vécus par le passage de l’espace physique à l’espace géométrique, comme en témoigne l’extrait suivant.

> « Donc, c’est sûr qu’une amélioration ce serait d’être capable de manipuler des choses. Normalement, ils sont supposés à cet âge-là, douze-treize ans, là, c’est supposé être le développement de la pensée formelle, puis ils sont supposés être rendus à un autre niveau, normalement, euh, mais c’est pas nécessairement tout le monde qui est au même niveau. »

Sans référer au vocabulaire de la problématique du passage de l’espace physique à l’espace géométrique, de GI vers GII, l’enseignant en exprime ses préoccupations à nouveau dans sa réflexion relative d’une part, à sa formation initiale en géométrie et, d’autre part, à sa fonction d’enseignement. Bien que sa formation initiale lui a procuré une excellente connaissance de la géométrie euclidienne, il estime ne pas être toujours suffisamment outillé sur le plan didactique pour enseigner la géométrie auprès de ses élèves de douze et treize ans.

> « Moi, ce que j'ai vu puis ce que j'enseigne avec mes élèves. Donc, ce serait peut-être d'avoir des cours sur ce qu'on enseigne au secondaire. Ce que j'ai eu comme formation, moi, c'est de la géométrie euclidienne, tout ça, quelque chose de plus poussé. C'est vrai qu'on apprenait d'où viennent les théorèmes tout ça, mais dans le concret avec un enfant de douze-treize ans arriver à expliquer certaines choses. C'était pour ça, l'idée au niveau de l'utilisation du matériel. »

4.2.1.1.2 Niveau 2 Projet de construction

La description de son projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* tend vers GII. En effet, le projet comprend l'étude de définitions, de propriétés et de théorèmes ainsi que des problèmes favorisant leur application. Plus spécifiquement, les triangles sont présentés sous la forme d'une classification par types selon les côtés et les angles. Les quadrilatères sont analysés selon les angles, les côtés, les diagonales et les axes de symétrie. De plus, une liste à cocher comptant onze propriétés des quadrilatères convexes se trouve dans le cahier *ma théorie*, à la disposition des élèves. L'énumération des propriétés concerne : la congruence des côtés et des angles y compris les côtés et les angles opposés, la présence d'angles droits, les angles consécutifs supplémentaires, les diagonales congrues, se coupant en leur milieu, perpendiculaires ou formant des axes de symétrie, l'admission d'au moins un axe de symétrie. Le parallélisme des côtés n'est pas spécifiquement mentionné dans la liste des propriétés à cocher du cahier de théorie.

La mise en œuvre des définitions, des propriétés et des théorèmes est souhaitée par l'enseignant via la poursuite de trois principaux buts qui recoupent en partie les habiletés exprimées au niveau 3. Ainsi, l'élève doit pouvoir nommer des triangles et des quadrilatères. Il doit savoir lire des figures géométriques afin d'en déduire des mesures. L'extrait suivant montre à nouveau une tendance vers GII.

> « Donc, c'est sûr au niveau des mesures des angles, des côtés, euh, euh, qu'il soit capable de nommer certains triangles là, par exemple, isocèle, scalène, dans le but de déduire certaines choses. Comme je leur dis souvent, on te fait un dessin au tableau, c'est pas nécessairement les vraies mesures, mais on veut que tu sois capable de trouver, par exemple, les mesures sans utiliser les outils. Tu dois déduire certaines choses. »

Par ailleurs, les problèmes[52] proposés dans son projet de construction du thème sont issus de deux sources : un manuel scolaire et un logiciel.[53] Soulignons à nouveau que nous les avons analysés selon la typologie présentée à la section 4.1. Le tableau VI présente la répartition des problèmes provenant des sources sans distinction (manuel et logiciel) et le tableau VII montre la répartition des problèmes extraits du manuel.

Tableau VI Problèmes par types - classe 1 (manuel scolaire et logiciel)

Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
62%	17%	6%	13%	2%	0%	100%

Tableau VII Problèmes par types - classe 1 (manuel scolaire)

Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
18%	35%	14%	29%	4%	0%	100%

Les problèmes du type *Reconnaître* sont dominants dans le tableau VI (62%). Cela est dû à la prise en compte des problèmes fournis par le logiciel qui offre presque exclusivement des problèmes de ce type. Dans le tableau VII, ce sont les problèmes du type *Rechercher une mesure* qui sont dominants (35%) suivis du type *Justifier* (29%). Par ailleurs, nous n'avons pas observé de problème qui corresponde au type *Produire une représentation*. De l'ensemble des problèmes, il appert que certains soient orientés

---

[52] Le total compte cent soixante douze problèmes analysés.
[53] Il s'agit du manuel *Panoram@th* A volume 2 et du logiciel Netmaths (www.netmaths.net).

vers GII, par exemple des problèmes du type *Justifier* pour lesquels l'expression de référents théoriques est exigée. D'autres encore, du type *Rechercher une mesure,* ont une propension vers GII notamment parce qu'ils sont munis d'une consigne interdisant l'usage des instruments pour trouver une valeur d'angle ou de côté d'une figure. Par contre, nous avons noté la présence de problèmes principalement du type *Reconnaître* qui s'inscrivent en GI puisque leur résolution nécessite le recours à la mesure ou à la perception globale d'une figure.

Rappelons que pour mieux connaître les motivations des choix de problèmes de l'enseignant, nous lui avons administré un questionnaire contenant six problèmes dont nous avons modifié le type et des paramètres permettant d'approcher chacun en GI ou vers GII. Les deux premiers problèmes varient en fonction du projet de construction de l'enseignant et les quatre autres sont identiques pour tous les enseignants.

Voici un bref descriptif des problèmes suivi d'une illustration des deux premiers problèmes pour l'enseignant de la classe 1.[54]

> Problème 1, *Rechercher une mesure*, vers GII, peut se retrouver dans le projet de construction;
> Problème 2, *Reconnaître*, en GI, peut se retrouver dans le projet de construction;
> Problème 3, *Justifier*, vers GII, est atypique;
> Problème 4, *Découvrir*, en GI, peut se retrouver dans un manuel;
> Problème 5, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel;
> Problème 6, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel.

[54] Les problèmes 3, 4, 5, 6 sont disponibles à l'annexe 4. La compilation des réponses au questionnaire sous forme dichotomique oui-non est fournie à l'annexe 6.

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle où $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. L'angle ABC mesure 130°. De plus, $\overline{CF}$ est une médiane et $\overline{BG}$ est une hauteur issue du sommet B. La droite DE est la médiatrice du segment BC.

Sans mesurer, trouvez la valeur de l'angle GED.

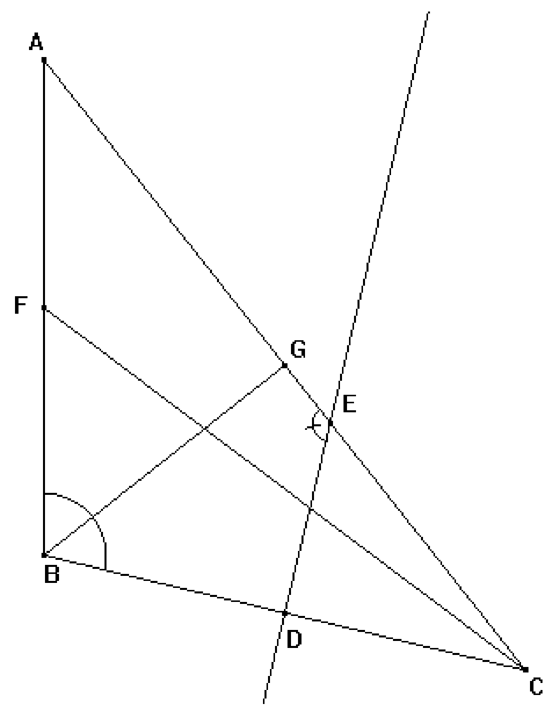


Figure 13 Problème 1 du questionnaire - enseignant 1

Problème 2

Donnez le nom de chacune des figures identifiées ci-dessous par une lettre.

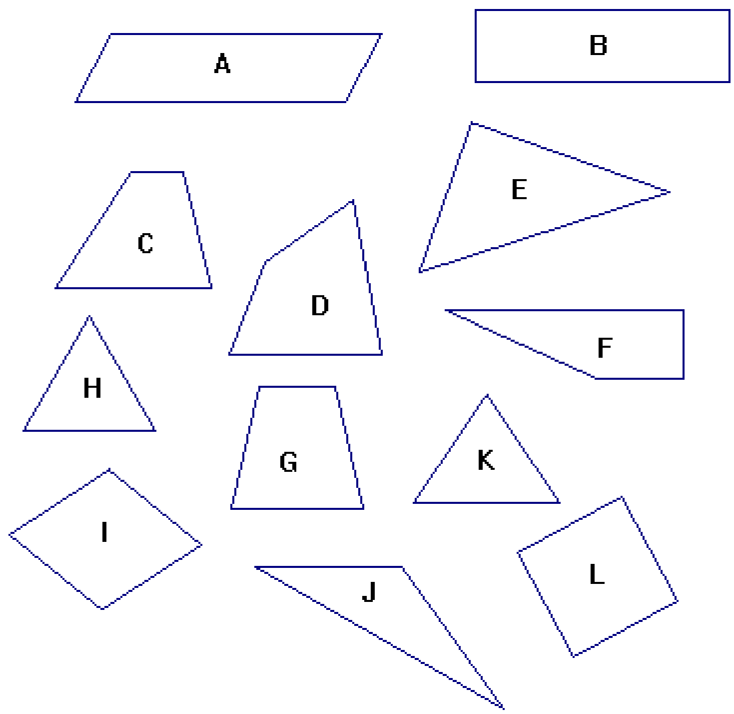


Figure 14 Problème 2 du questionnaire - enseignant 1

Des six problèmes, seul le problème 2 est dit inintéressant selon l'enseignant. Il le juge trop facile et faisant référence au primaire. Tel quel, il ne serait pas donné à ses élèves. La modification suggérée serait d'ajouter des marques de codage sur les figures pour la congruence des côtés et des angles y compris les angles droits et de proposer aux élèves d'identifier non pas les objets géométriques, mais des propriétés de ceux-ci. Par ses commentaires, l'enseignant ne souscrit pas à la tendance paradigmatique GI du problème 2, mais plutôt à GII en référant aux propriétés des objets géométriques via l'ajout de marques de codage sur les figures. La présentation des figures du problème 2 a déplu à l'enseignant. Pourtant, nous avons repéré des problèmes du type *Reconnaître* appartenant à GI dans son projet de construction où la perception générale d'une figure intervenait. Toutefois, il faut savoir que ses problèmes appartenant à GI ont été classés non seulement en fonction du recours à la perception générale d'une figure, mais aussi en fonction d'autres éléments tels que le recours à la mesure ou la dimension inductive d'un problème. Or, la mesure ou l'induction impliquées dans un problème ne semblent pas être des éléments pour lesquels l'enseignant montre la même *sensibilité* que pour la présentation des figures, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant ainsi qu'au niveau 0 de son activité.

Les cinq autres problèmes sont considérés intéressants, mais ne seraient pas tous donnés pour autant aux élèves (problèmes 3 et 5). Un problème est jugé intéressant dans la mesure où il favorise la réflexion sur les propriétés des objets géométriques et qu'il permet d'en vérifier la compréhension par les élèves. Ce souci qu'à l'enseignant pour l'apprentissage des propriétés des objets géométriques illustre à nouveau une tendance vers GII. Par ailleurs, les problèmes 3 et 5 tels quels, bien que jugés intéressants, ne seraient pas donnés aux élèves. Pour le problème 3, la raison évoquée concerne le symbolisme. Plus précisément, ce sont les parenthèses utilisées pour l'expression des segments qui gênent l'enseignant. Pour le problème 5, c'est la figure qui accompagne l'énoncé du problème qui est source d'inconfort. Bien que l'énoncé de ce problème 5 mentionne qu'il s'agisse d'une figure dessinée à main levée, l'enseignant note que « Le dessin peut les tromper, car il ressemble à un losange, peut être un défi pour les élèves forts. ». De plus, les problèmes 1 et 3 font aussi l'objet d'un commentaire concernant les figures, ce qui peut ne pas être surprenant dans le cas du problème 3 dont la figure est plutôt atypique. Ainsi, pour la figure du problème 1, l'enseignant pense que certains de ses élèves vont en faire une lecture erronée en percevant les angles ABC et DCE comme séparés chacun par une bissectrice. Pour le problème 3, l'enseignant prévoit que des élèves pour s'aider à comprendre vont produire une autre figure que celle dessinée en perspective. Par ses commentaires, il exprime à nouveau une préoccupation pour la lecture et le traitement d'une figure géométrique; préoccupation précédemment citée au niveau 3.

Le problème 4 vise, à partir de trois exemples, à faire énoncer la propriété selon laquelle un angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents. Or, il n'est pas assuré que la construction du problème favorise l'énonciation de la propriété pour quiconque ignore la dite propriété. De plus, ce problème introduit l'idée selon laquelle quelques cas suffisent à généraliser. Mais pour l'enseignant, cet aspect inductif du problème est perçu comme un moyen d'aider l'élève à comprendre la propriété à découvrir. À nouveau, c'est une préoccupation pour l'apprentissage des propriétés qui est exprimée comme raison pour évaluer la pertinence du problème 4. Quant au problème 6, il ne fait l'objet d'aucun refus ou de modification souhaitée. L'enseignant le dit intéressant puisqu'il permet de vérifier la compréhension qu'ont les élèves des objets géométriques ainsi que de vérifier s'ils peuvent déduire des mesures, ce qui témoigne à nouveau d'une propension vers GII.

4.2.1.1.3 Niveau 1 Projet d'une leçon

L'enseignant qualifie sa leçon de théorique. Elle se structure en deux temps. Un premier temps où il présente des éléments de la théorie géométrique consignés par les élèves dans un cahier nommé *ma théorie*. Un second temps où les élèves s'exercent, c'est-à-dire font des problèmes à partir de la théorie présentée, ce qui est cohérent avec la description du projet de construction (niveau 2) concernant l'étude de définitions, de propriétés et de théorèmes.

Lorsque l'enseignant prépare une leçon sur les triangles ou les quadrilatères, il compose des questions afin d'obtenir de l'information sur les connaissances antérieures de ses élèves. À partir de ce que les élèves lui expriment, il peut ainsi corriger, le cas échéant, certaines de leurs *conceptions erronées* (expression employée par l'enseignant) et les faire progresser vers les objectifs d'enseignement prévus à la leçon.

Pour l'enseignant, la préparation d'une leçon fonctionne généralement bien dans la mesure où il a constaté que la géométrie est un thème pour lequel les élèves ont un intérêt. Afin de maintenir cet intérêt, l'enseignant diversifie ce qu'il propose aux élèves. En particulier, il offre des situations-problèmes, des exercices du manuel de même que des exercices générés par un logiciel.

4.2.1.1.4 Niveau 0 Actualisation en classe de trois leçons

Nous avons filmé trois leçons planifiées par l'enseignant. Voici une description sommaire des contenus.

> Leçon 1 : a) Théorie exposée : définition du triangle (retour), classification des triangles selon les côtés et les angles, périmètre (définition + 1 exemple), médianes et centre de gravité (définition + 1 construction à la règle); b) Nouveau devoir débuté en classe.
> Leçon 2 : a) Retour sur un devoir; b) Théorie exposée : propriétés des quadrilatères; c) Nomenclature des polygones; d) Nouveau devoir débuté en classe.
> Leçon 3 : a) Travail sous la forme d'ateliers en rotation des groupes : atelier 1 (travail à l'ordinateur avec le logiciel Netmaths), atelier 2 (feuille issue du répertoire personnel de l'enseignant), atelier 3 (autocorrection des exercices du manuel); b) Nouveau devoir débuté en classe.

L'enseignant amorce la leçon 1 en étant fidèle à son projet de leçon (niveau 1). En effet, il questionne ses élèves pour vérifier leurs connaissances antérieures. À partir du tracé d'un triangle préalablement fait au tableau, il demande « c'est quoi? ». Des réponses d'élèves fusent telles « triangle, isocèle, équilatéral, scalène ». D'entrée de jeu, l'enseignant veut établir un contrat de lecture des figures en insérant l'idée de codage et en le spécifiant comme une différence par rapport à ce que les élèves ont vu au primaire. Dans l'extrait suivant, les propos tenus par l'enseignant tendent vers GII :

> « Ah oui! alors ça va être ça la différence avec ce que t'as vu au primaire. Il va y avoir des petites lignes pour identifier certaines choses…C'est ça qui fait la différence. C'est ça qui va nous guider à savoir le vrai nom du triangle qui est dessiné ici…Donc, on ne peut pas être sûr équilatéral, même s'il a peut-être l'air équilatéral. Ça va nous prendre des indices. Les indices, c'est justement des petites lignes soit au niveau des angles, soit au niveau des côtés. »

La classification des triangles donne lieu à une présentation au tableau des types de triangles auxquels sont associées des expressions en mots et des figures. Les figures des triangles équilatéral, isocèle, rectangle, équiangle et isoangle possèdent des marques de codage pour la congruence des côtés ou des angles y compris l'angle droit. La figure du triangle acutangle contient trois valeurs numériques d'angles différentes (50º, 60º, 70º). Les figures des triangles scalène et obtusangle n'ont pas de marques de codage ni de valeurs numériques. Au sujet du triangle scalène, l'enseignant ajoute :

> « Comment on va faire pour le reconnaître? On ne met pas de ligne. C'est notre façon la plus simple de le reconnaître. On pourrait aussi mesurer avec une règle. On peut toujours le faire, mais la plupart du temps, on va se fier au petit dessin. »

Ainsi, les figures des triangles ne sollicitent pas toutes le même *regard* selon la présence ou de l'absence de marques de codage ou la présence de valeurs numériques. Par ailleurs, le recours à la mesure est accepté par l'enseignant, ce qui positionne en partie sa leçon en GI. Dans l'extrait suivant, un élève demande si la mesure s'appliquant aux côtés d'un triangle peut être utilisée aussi pour ses angles :

> « Ok, tsé, là, y a des p'tites lignes qu'on peut faire pour savoir si c'est pareil ou sinon on peut, euh, comme savoir la grandeur là, tsé, si c'est 3 cm, 3 cm, 3 cm, mais est-ce qu'on pourrait aussi le faire avec l'angle? »

L'enseignant acquiesce en répondant « Oui, s'ils ont la même mesure d'angle, effectivement les mêmes mesures de côtés, ça va ensemble, bonne question. ». La mesure intervient à nouveau au cours de la leçon pour la production des médianes d'un triangle. Les élèves sont invités à prendre la règle pour mesurer les côtés d'un triangle et déterminer les points milieux. Il est suggéré aux élèves dont les mesures ne sont pas des nombres entiers de les arrondir.

La leçon 2 débute aussi selon le projet d'une leçon. Les élèves doivent répondre à une question afin de dire si un losange est un carré. Certains d'entre eux disent oui, d'autres non. Les raisons évoquées sont diverses dont certaines font référence au mouvement, par exemple un losange tourné donne un carré. D'autres élèves font référence à des propriétés, par exemple les angles du losange ne sont pas droits contrairement à ceux du carré. Les divergences d'opinions sont momentanément mises de côté pour la correction du devoir. Par la suite, elles trouvent une réponse dans la présentation des propriétés du losange.

La présentation des propriétés des quadrilatères se fait un quadrilatère à la fois. Pour chacun d'eux, les élèves cochent les propriétés concernées au fur et à mesure sur une liste préalablement fournie dans leur cahier *ma théorie*. En parallèle, sur la page droite de leur cahier, ils indiquent les noms des figures déjà dessinées en y ajoutant les diagonales (en pointillés) et des marques de codage, de façon à copier les marques des cartons modèles montrés par l'enseignant. La validation des propriétés propres à chacun des quadrilatères prend sa source à partir de l'observation des cartons modèles codés (angles et côtés). Elle prend sa source aussi à partir de la mesure notamment pour la congruence des diagonales, comme en fait foi cet extrait de l'enseignant à propos des diagonales d'un trapèze :

> « Est-ce que tout le monde est correct pour les diagonales ? On les mesure avec notre règle. Est-ce qu'on a des diagonales qui sont isométriques, qui ont la même mesure? Donc, on ne peut pas dire que mes diagonales sont isométriques. »

Ainsi, la validation des propriétés s'effectue tantôt en GI via la mesure tantôt vers GII par la prise en compte de marques de codage. Elle peut aussi se faire à partir du déplacement simulé d'un élément d'une figure. Dans l'extrait ci-dessous, l'enseignant explique pourquoi les angles consécutifs du losange sont supplémentaires lorsque qu'un élève lui dit « J'comprends pas comment on peut voir ça donne ça. » et qu'un autre élève répond « Ben, tu prends ton rapporteur d'angles. » :

> « Bon, c'est un peu plus difficile à voir ça…Regardez, oui tu peux toujours le faire avec un rapporteur d'angles, mais si j'essaie de te le montrer le plus simplement possible. Il y a des définitions que nous n'avions pas vues encore. »

Dans le même temps, l'enseignant dessine la figure 15 suivante au tableau (sans les lettres, nous les avons ajoutées pour les besoins de l'explication).

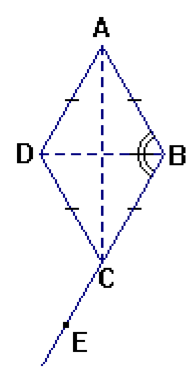


Figure 15 Losange dessiné par l'enseignant 1

L'enseignant explique ainsi la propriété :

> « Alors, cet angle-là *(ABC)*, si on le prend et qu'on le glisse ici *(DCE*), ça devrait normalement être le même, et donc mon petit que j'avais ici *(BCD),* mon angle aigu, si je l'additionne avec mon angle obtus, qui est le même que celui-là ici, je me retrouve avec un 180 degrés…C'est la façon la plus simple de le voir rapidement. »

L'exemple ci-dessus peut être signifiant pour les élèves puisqu'il exploite l'idée selon laquelle deux angles adjacents avec leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires. Toutefois, il n'utilise pas la technologie de GII relative, par exemple, au parallélisme des côtés du losange, à la sécante BE ainsi qu'à la congruence des angles correspondants ABC et DCE qui complètent la justification de la propriété.

Ainsi, à la leçon 2, l'enseignant présente les propriétés des quadrilatères selon divers procédés associés à GI ou vers GII : une mesure à la règle des diagonales tracées sur des figures dans un cahier, une observation des figures pour les axes de symétrie, un déplacement simulé d'un élément d'une figure dans une moindre mesure, une lecture de cartons modèles montrant des angles et des côtés codés.

La leçon 3 s'actualise selon la formule d'ateliers où les élèves travaillent entre pairs. Ils réinvestissent des notions mathématiques antérieurement enseignées : types de triangles et de quadrilatères, leurs propriétés ainsi que les hauteurs, les médianes et les médiatrices du triangle. Cette formule correspond à une volonté chez l'enseignant de varier ce qui est offert aux élèves; intention exprimée au niveau 1.

4.2.1.1.5 Résumé des niveaux 3 à 0 de l'activité de l'enseignant 1

Nous avons regroupé en trois catégories non exclusives les niveaux d'activité de l'enseignant : ses intentions (niveaux 3 à 1), les problèmes de son projet de construction (niveau 2), l'actualisation de ses intentions (niveau 0). Nous en discutons globalement à l'aide d'exemples. Tel que dit à la section 4.2, une compilation détaillée des catégories selon GI, GII et GI-II est produite à la fin de l'analyse de la classe après la présentation des conceptions d'élèves.

Les intentions de l'enseignant au regard de la géométrie qu'il souhaite enseigner se traduisent par des affirmations en GI ou vers GII et d'autres dont on ne peut dire si elles appartiennent à l'un ou l'autre des paradigmes (GI-GII). À titre d'exemple, lorsque l'enseignant tient des propos tels que : « Pour moi, faire de la géométrie plane, c'est faire de la géométrie dans un plan. », « C'est facile de faire le lien entre des choses qu'ils voient dans la vie là de tous les jours, dans la vie courante. », « Donc, oui il y a le fait de calculer avec un ensemble de géométrie », ces paroles ne disent pas comment l'enseignant entend faire le travail géométrique dans un plan, en relation avec la vie quotidienne ou à l'aide d'un ensemble de géométrie (les instruments). Ne pouvant discriminer, nous disons alors qu'il s'agit de GI-II. D'autres intentions s'identifient plus aisément à GI ou vers GII. Par exemple, l'usage potentiel de *matériel concret* (objets physiques en trois dimensions) s'inscrit généralement en GI même s'il peut venir d'une volonté à faire évoluer la pensée formelle d'élèves. Par ailleurs, l'enseignant émet deux attentes à l'égard de ses élèves qui les invitent à travailler une géométrie différente du primaire, en direction de GII. En effet, les élèves doivent déduire des mesures d'angles et de côtés de figures sans employer des instruments de mesure, en plus de savoir lire des figures géométriques et travailler avec elles sans égard à leur échelle. La description que fait l'enseignant de son projet de construction procède aussi d'une intention vers GII dans la mesure où il vise l'étude de définitions, de propriétés et de théorèmes. Il en va de même d'un projet d'une leçon puisque l'enseignant qualifie lui-même ses leçons de théoriques.

Les attentes de l'enseignant concernant la déduction de mesures et la lecture de figures géométriques, spécifiques de GII, trouvent un écho dans des problèmes de son projet de construction du thème. Cela se vérifie notamment par des problèmes du type *Rechercher une mesure* pour lesquels l'emploi des instruments est prohibé ou pour des problèmes du type *Justifier*. Mais parmi les problèmes proposés par l'enseignant, nous en avons observés en GI ou GI-II. En GI, nous retrouvons en particulier des problèmes du type *Construire* dont les techniques de résolution reposent sur la mesure et des problèmes du type *Reconnaître* où les techniques s'appuient, en plus, sur une perception globale des figures. Nous trouvons en GI-II, notamment d'autres problèmes du type *Construire* dont les consignes laissent la possibilité de les résoudre en GI ou vers GII. Pour les problèmes du questionnaire, les raisons données par l'enseignant pour juger de leur intérêt tendent vers GII quand il précise que ces derniers doivent favoriser une réflexion sur les propriétés des objets géométriques. À titre d'exemple, l'enseignant a rejeté le problème 2 (GI) du questionnaire. Il a suggéré de le modifier en ajoutant des marques de codage aux figures et à exiger l'identification des propriétés des objets géométriques représentés par les figures ainsi modifiées. Toutefois, il n'a pas rejeté l'autre problème (4) en GI. Il n'a pas perçu l'aspect inductif de ce problème comme un obstacle, mais plutôt comme un avantage pour faire découvrir une propriété.

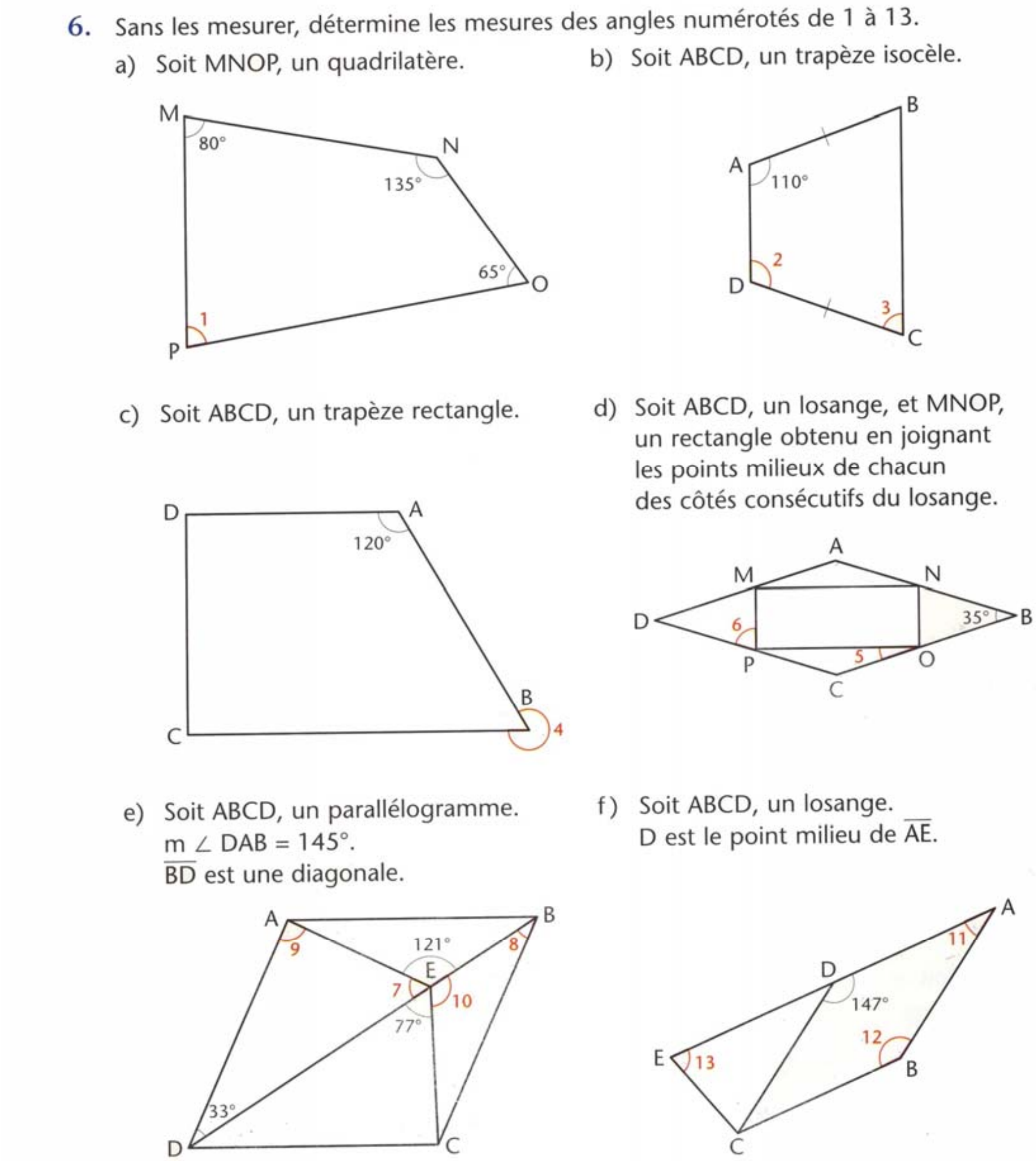
L'observation en classe des intentions de l'enseignant a montré une coexistence de procédés associés à GI ou vers GII pour la reconnaissance de figures de triangles : absence ou présence de codage, valeurs numériques, recours à la mesure. Il en va de même pour les propriétés des quadrilatères : mesure à la règle des diagonales tracées sur des figures, observation globale des figures pour déterminer des axes de symétrie, référence au déplacement simulé d'un élément d'une figure dans une moindre mesure, lecture de cartons modèles représentant des quadrilatères dont les angles et les côtés sont codés. De plus, c'est en classe qu'il nous a été donné d'observer un positionnement en GI de l'enseignant dans son emploi des instruments de géométrie, entre autres, lorsqu'il a mesuré des figures à des fins de validation. Voyons, à présent, ce qui en est des élèves en considérant le niveau -1 qui fait l'objet de la section suivante.

4.2.1.2 Analyse de conceptions des élèves de la classe 1

Nous présentons l'analyse des conceptions d'élèves à partir de problèmes des types *Rechercher une mesure, Justifier*, *Reconnaître* et *Construire*. Nous avons choisi ces types puisqu'ils sont les plus représentatifs des problèmes proposés par l'enseignant dans son projet de construction du thème *triangles et quadrilatères*.

4.2.1.2.1 Conceptions des élèves et problèmes Rechercher une mesure

Voici une question du type *Rechercher une mesure* contenant six items[55]. L'analyse a priori a permis d'identifier des éléments correspondant aux attentes de l'enseignant concernant la déduction de mesures et la lecture de figures géométriques.


6. Sans les mesurer, détermine les mesures des angles numérotés de 1 à 13.

a) Soit MNOP, un quadrilatère.

b) Soit ABCD, un trapèze isocèle.

c) Soit ABCD, un trapèze rectangle.

d) Soit ABCD, un losange, et MNOP, un rectangle obtenu en joignant les points milieux de chacun des côtés consécutifs du losange.

e) Soit ABCD, un parallélogramme. m ∠ DAB = 145°. $\overline{BD}$ est une diagonale.

f) Soit ABCD, un losange. D est le point milieu de $\overline{AE}$.

Figure 16 Problèmes - classe 1 Rechercher une mesure

[55] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 2, p. 179. Rappelons que les problèmes choisis pour l'analyse des conceptions d'élèves, faits en classe ou en devoir, proviennent du lot proposé a priori par l'enseignant.

4.2.1.2.1.1 Analyse a priori des problèmes

Dans un premier temps, nous faisons quelques commentaires généraux aux six problèmes. Ensuite, nous présentons deux exemples de l'analyse a priori[56]. Nous avons choisi de n'en présenter que deux afin de ne pas alourdir indûment le texte : le problème (6b) est associé à une figure qui ne contient pas de sous figure, alors que dans le problème (6e) la figure est composée de sous figures.

La formulation de la consigne générale, *Sans les mesurer, détermine les mesures des angles numérotés 1 à 13* paraît contradictoire. Comment déterminer des mesures d'angles sans les mesurer? La formulation contient un implicite lié à l'interdiction d'utiliser des instruments, notamment le rapporteur d'angles, au profit d'un procédé de calcul et à celui de la mise en œuvre de propriétés, ce qui est susceptible d'approcher ces problèmes vers GII dans le cas du recours aux propriétés. Mentionnons que nous avons fait l'analyse a priori en partant du principe que la consigne *Sans mesurer* soit respectée tout en conservant à l'esprit qu'il peut en être autrement lors de l'analyse des conceptions qui seront effectivement développées par les élèves. En effet, puisque des valeurs d'angles sont à l'échelle pour certaines figures, il est possible d'envisager l'usage du rapporteur d'angles comme un opérateur voire une structure de contrôle potentiellement privilégiée par les élèves, ce qui relèverait de GI. Précisons que les figures des problèmes a, b et c ont leurs valeurs d'angles à l'échelle, ce qui peut ne pas être le cas ou se vérifier plus difficilement pour les problèmes d, e et f. Le problème e se distingue des autres dans la mesure où les impressions sont nuisibles, c'est-à-dire que pour toutes les autres figures l'intuition peut être validée par des mesures, alors qu'il en va différemment au numéro e.

---

[56] L'analyse des problèmes proposés par les enseignants que nous effectuons vise, d'une part, à dégager les techniques et les technologies que ces problèmes pourraient solliciter pour leur résolution et, d'autre part, à voir si les élèves seraient à même de les mettre en œuvre. Il ne s'agit donc pas d'une analyse a priori « classique » puisqu'elle ne cherche pas à anticiper l'ensemble des stratégies, adéquates ou non, auxquelles les élèves seraient susceptibles de recourir dans le traitement de ces problèmes. Notre analyse cherche plutôt à savoir quelles techniques et quelles technologies les problèmes proposés permettent de mettre en œuvre et si elles conduisent à un traitement adéquat ou en accord avec la visée du problème.

Par ailleurs, le système de représentation pour l'expression des problèmes est verbal, numérique, symbolique et figural; chacun des problèmes est formé d'un court texte, d'une figure et de valeurs numériques. Le degré de congruence entre le texte et la figure est variable (Duval, 1995), c'est-à-dire que le texte peut fournir des informations que la figure ne donne pas à voir par codage, par exemple le triangle isocèle DEC au numéro f. Inversement, la figure peut montrer des informations non traduites par le texte en particulier des valeurs d'angles. La lecture des problèmes exige une coordination des registres verbal, numérique, symbolique et figural. Cette habileté de coordination est ici rapprochée de ce que l'enseignant aimerait voir se développer chez ses élèves, lorsqu'il a émis le souhait que ceux-ci puissent « Essayer de voir au-delà du dessin. ».

Ajoutons que chaque figure contient minimalement une valeur d'angle en degrés et a ses sommets nommés par des lettres majuscules. De plus, les descriptions au-dessus des figures des problèmes c, d et e fournissent des valeurs d'angles. Pour le problème c, les valeurs deux angles droits sont implicites au fait d'avoir un trapèze rectangle. Pour le problème d, ce sont les quatre angles droits qui sont implicitement donnés par le rectangle. Pour le problème e, c'est une valeur de 145 degrés qui est indiquée. Pour tous les autres problèmes, c'est la figure qui procure une ou des valeurs d'angles. Ajoutons encore que les figures des problèmes a, b et c n'ont pas de sous figures contrairement aux problèmes d, e et f, et que seule la figure du problème b présente des marques pour la congruence de côtés. Voyons maintenant le problème 6b suivi du problème 6e.

Le texte du problème 6b permet de considérer le quadrilatère ABCD comme un trapèze isocèle. La figure donne à voir un quadrilatère ABCD dont les côtés AB et DC sont congrus par les marques de codage, et une valeur d'angle de 110º (angle DAB).

La technique pour trouver la valeur de l'angle ADC (angle 2) s'obtient par comparaison à l'angle DAB de 110º. Elle est supportée par la technologie qui réfère à la propriété selon laquelle des angles adjacents à une même base sont congrus dans un trapèze isocèle.

Pour trouver la valeur de l'angle DCB (angle 3) deux techniques de calcul sont possibles :

La première consiste à faire 180º – 110º. La technologie réfère ici à la propriété selon laquelle les angles adjacents à un des côtés non parallèles d'un trapèze isocèle sont supplémentaires.
La seconde consiste à faire (360º – (110º x 2)) ÷ 2. La technologie réfère 1) à la propriété selon laquelle les angles adjacents à une même base d'un trapèze isocèle sont congrus et 2) au théorème disant que la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits.

Le texte du problème 6e permet de considérer le quadrilatère ABCD comme un parallélogramme avec une diagonale DB. Par ailleurs, aucune indication verbale ne confirme l'appartenance du point E à la diagonale DB. L'alignement du point E avec les points D et B de la diagonale est suggéré par la figure. La description au-dessus de la figure donne aussi une valeur de 145º pour l'angle DAB.

C'est la figure qui montre notamment les segments EA et EC favorisant la composition de sous figures. Il est possible de compter quatre triangles (DAE, AEB, BEC, CED) ou six, si nous ajoutons ceux formés par la diagonale DB (DAB, DCB). Il est encore possible de voir deux quadrilatères (EABC, DAEC). Trois mesures d'angles sont fournies par la figure : 33º pour l'angle ADB, 121º pour l'angle AEB, 77º pour l'angle DEC.

Une technique pour trouver la valeur de l'angle DBC (angle 8) s'obtient par comparaison à l'angle ADB de 33º. Elle est supportée par la technologie qui réfère au théorème des angles alternes-internes congrus lorsque formés par des droites parallèles et une sécante. Les droites parallèles et la sécante étant ici déterminées par les côtés AD et BC du parallélogramme et la diagonale DB.

Pour trouver la valeur de l'angle DAE (angle 9), il faut avoir la valeur de l'angle adjacent BAE et faire 145º – $m\angle BAE$ où 145º correspond à la valeur de l'angle DAB donnée par la description au-dessus de la figure. La valeur de l'angle BAE peut s'obtenir par la technique de calcul 180º – (121º + 2º). C'est le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle égale à deux angles droits qui légitime ce calcul. Quant à la valeur d'angle de 2º (angle EBA), celle-ci est préalablement obtenue par le calcul de 35º – 33º où 33º correspond à la valeur de l'angle DBC. La technologie permettant de considérer l'angle ABC égal à 35º est celle des angles consécutifs supplémentaires du parallélogramme. Ainsi, puisque l'angle DAB est de 145º alors l'angle consécutif ABC est de 180º - 145º = 35º. Toujours pour la valeur de 2º de l'angle EBA, celle-ci aurait pu s'obtenir par le calcul de 180º – (33 º + 145º) à partir du triangle DAB.

À noter que l'observation sur la figure de l'alignement du point E avec les points D et B permettrait une autre conduite pour trouver l'angle DAE (angle 9), c'est-à-dire dans un premier temps trouver la valeur de l'angle 7 par le calcul 180º - 121º = 59º, et ensuite faire 180º – (33º + 59º) = 88º. Cette conduite est supportée par une technologie référant respectivement aux énoncés selon lesquels 1) deux angles adjacents aux côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires, 2) la somme des angles intérieurs d'un triangle égale deux angles droits.

Après avoir trouvé la mesure de l'angle DAE (angle 9), celle de l'angle DEA (angle 7) s'obtient par le calcul 180º – (33º + 88º). La technologie réfère au théorème de la somme des angles intérieurs d'un triangle égale à deux angles droits.

Quant à la valeur de l'angle CEB (angle 10), elle sollicite deux techniques de calcul. La première consiste à faire 180º – 77º = 103º par la prise en compte figurale de l'alignement du point E avec les points D et B. La seconde technique consiste à faire 360º – (121º + 77º + 59º) = 103º. Le premier calcul réfère au théorème selon lequel deux angles adjacents ayant leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires. Le second calcul prend appui sur le fait que la somme de tous les angles que l'on peut former autour d'un même point, sur un plan, est égale à quatre angles droits.

En résumé, les problèmes correspondent à l'attente de l'enseignant concernant la déduction de mesures à l'aide de propriétés. D'entrée de jeu, cela est suggéré par la consigne générale qui demande aux élèves de ne pas mesurer. De plus, les techniques et les technologies sous-jacentes, exemplifiées aux numéros 6b et 6e, sollicitent la mise en œuvre de propriétés; autre aspect relié aux intentions de l'enseignant. Par ailleurs, la présence de figures à l'échelle pour certaines valeurs d'angles ne devrait pas être un obstacle à la déduction si la consigne générale est respectée et les élèves font une lecture appropriée des figures. Or, tel que dit précédemment, la présence de valeurs d'angles à l'échelle sur des figures nous autorise à anticiper chez les élèves l'emploi du rapporteur d'angles plus généralement la mesure. Considérons à présent les conceptions d'élèves dégagées de nos analyses.

4.2.1.2.1.2 Conceptions des élèves

Pour la résolution des problèmes a à f, nous avons identifié cinq conceptions.[57] Elles sont mobilisées de manière concomitante pour les six problèmes. Rappelons que la résolution des problèmes implique une coordination des informations fournies par les figures, les textes et les valeurs numériques. Or, il appert que trois des cinq conceptions relèvent du traitement que les élèves ont fait des figures. Les deux autres conceptions se distinguent selon les opérateurs utilisés pour trouver les valeurs d'angles demandées.

Ainsi, nous avons observé que même si les élèves obtiennent de bonnes réponses pour les valeurs d'angles demandées, il n'est pas assuré que les conceptions mobilisées pour l'identification des figures tiennent compte à la fois du texte et de la figure. En fait, elles peuvent relever d'une appréhension perceptive globale de la figure, d'une mesure de la figure ou d'une prise en compte partielle à la fois du texte et de la figure. Ceci ne les empêche pas d'employer ensuite d'autres conceptions pour la recherche des valeurs d'angles. Cette situation est particulièrement éloquente aux problèmes d à f.

Par exemple, au numéro d, aucun des élèves questionnés n'a pu mettre en lien la donnée des points milieux des côtés du losange avec le rectangle pour la formation des triangles isocèles. L'élève 2 ne réfère pas au texte. Il affirme avoir vu quatre triangles isocèles, à la suite de quoi, il a appliqué le bon opérateur de calcul. L'élève 3 dit avoir reconnu le rectangle, le losange et avoir mesuré ce dernier. Il se sert aussi du texte pour identifier les mots rectangle et losange. Lorsque nous lui demandons comment il a su que le triangle DMP était isocèle, il affirme l'avoir mesuré, mais du coup, il tente une autre explication relative aux côtés congrus du losange. Il ne mentionne pas l'hypothèse des points milieux. Ensuite, il renchérit en disant qu'il a mesuré les segments DP et DM, qu'il voit qu'ils sont de la même longueur. Il poursuit avec une explication par

[57] Les entretiens d'explicitation ont été réalisés auprès des élèves 2, 3 et 4. Nous ne disposions pas des résolutions de l'élève 1. Nous l'avons toutefois interrogé sur d'autres problèmes du même type.

rapport au côté MP du rectangle et au fait que le rectangle a des angles droits en concluant que le triangle ne peut qu'être isocèle. L'élève 4 n'utilise pas la donnée des points milieux du texte pour justifier l'égalité des angles POC et CPO. Son explication est centrée sur la figure : « J'pense que quand on mettait le rectangle, il était comme pris (pointe les points P et O sur la figure). J'pense qu'ils étaient égaux. ».

Le numéro e est particulièrement intéressant puisqu'aucune information donnée par le texte ne sert à identifier des triangles isocèles contrairement aux problèmes d et f. D'ailleurs, il n'y en a pas bien que la figure en e semble suggérer qu'il pourrait y en avoir. Or, nous avons observé dans les traces écrites que le tiers des élèves de la classe ont considéré au moins un triangle isocèle. Parmi les élèves interviewés, l'élève 2 ne réfère pas au texte, mais il considère le triangle DCE rectangle en C et le triangle DAE isocèle. Pour le premier, l'angle en C lui semblait droit alors, que pour le second il a mesuré à la règle les segments DA et DE. L'élève 3 considère le triangle BCE isocèle. Il dit du même coup qu'il ne faut pas se fier au cahier, à la figure, mais il pense que les segments CE et EB ainsi que les angles ECB et EBC sont congrus. L'élève 4 considère aussi le triangle DAE isocèle.

Pour le numéro f, l'élève 2 n'utilise pas les données du texte lorsque nous lui demandons comment il a su que le quadrilatère ABCD était un losange. Il nous répond en pointant les côtés de la figure et faisant le geste d'en tracer les diagonales. De plus, il considère l'angle ECB droit à la suite d'une mesure à partir du coin de son cahier, et le triangle EDC isocèle à partir d'une mesure à la règle des segments DC et DE du triangle EDC. L'élève 3 réfère au texte pour l'identification du mot losange et du segment AE. Pour l'identification du triangle EDC isocèle, l'élève n'utilise pas la donnée du point D milieu du segment AE. Tout comme pour le numéro d, il tente sans succès d'expliquer une mise en relation du losange et du triangle. L'élève 4 n'emploie pas la donnée du point D milieu du segment AE. Lorsqu'il réfère au texte, c'est pour identifier le losange, mais seulement après l'avoir préalablement décrit à partir de la figure :

> « J'pense si on enlève ce petit triangle-là *(pointe le triangle EDC et met sa main dessus pour le cacher)*, si on enlève, ça fait vraiment un losange…Ces deux-là *(angles CBA et CDA)* et ces deux-là *(angles DCB et DAB,* ils semblaient être de la même grandeur. Aussi, c'est écrit ça *(pointe l'énoncé),* c'est un losange…C'est ça là, ça me donnait une bonne pièce. »

Il n'est pas surprenant que des élèves recourent à la mesure ou à une perception globale de la figure puisque ces conduites proviennent de ce qu'ils ont acquis depuis le primaire. Même s'il est indiqué dans la consigne des numéros a à f de ne pas mesurer, les élèves ne mesureront pas les angles dont on cherche les valeurs par respect du contrat didactique, mais ils mesureront des côtés d'une figure par exemple. De cette manière, ils entreprennent une démarche de résolution du problème en mettant en œuvre des conduites pour la recherche de valeurs d'angles qui sied à l'identification de la figure qu'ils ont ainsi établie.

Il faut voir aussi dans quelle mesure la composition des problèmes, éléments du milieu de l'élève, contribue à maintenir ces conduites. En effet, la plupart des données numériques nécessaires aux calculs sont identifiables à partir des figures seulement. Il en est de même pour l'alignement du point E avec les points D et B de la diagonale sur la figure du problème e. Dans ce contexte, apprendre à discriminer les informations pertinentes fournies par les figures reste un défi pour les élèves.

Nous avons traduit les conduites d'élèves que nous venons d'exemplifier par trois premières conceptions en fonction du modèle théorique d'une conception (P, R, L, ∑). Ces conceptions sont susceptibles d'être mobilisées en résolution d'un problème type (P) pour lequel un texte et une figure d'un triangle ou d'un quadrilatère pouvant contenir des sous figures sont fournis.

La première conception est dite *Appréhension perceptive globale d'une figure*. L'élève voit globalement la figure d'un triangle ou d'un quadrilatère avec l'œil. C'est l'opérateur utilisé (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) est la figure elle-même en tant que représentation de l'objet géométrique triangle ou quadrilatère. La structure de contrôle (∑) correspond à la cohérence que l'élève établit entre la figure fournie par le problème et ce qu'il en perçoit ou ce qu'il en interprète.

La seconde conception est dite *Mesure d'une figure*. L'élève mesure avec un outil, par exemple une règle graduée ou un gabarit (R), un ou des éléments de la figure (côté, angle, diagonale). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) correspond aux gestes faits par l'élève pour mettre en correspondance l'outil avec l'élément de la figure à mesurer. La structure de contrôle (∑) correspond à la validation du résultat de mesure que l'élève établit en faisant une lecture juste ou approximative de l'outil de mesure.

La troisième conception est dite *Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte*. L'élève reconnaît dans le texte un mot ou une expression littérale minimale (par exemple triangle isocèle) qui identifie une figure associée au problème (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) correspond au geste de pointer dans le texte le mot ou l'expression littérale identifiant la figure. La structure de contrôle (∑) correspond à la cohérence que l'élève établit entre le mot ou l'expression littérale du texte et la figure.

À présent, nous traitons de nouveaux exemples de conduites d'élèves sur la base desquels nous avons identifié deux autres conceptions.

Par exemple, au problème 6f, il faut trouver la valeur des angles DAB (angle 11), CBA (angle 12) et DEC (angle 13) dans un quadrilatère formé d'un triangle et d'un losange. Les élèves interviewés ont débuté la résolution de ce problème en cherchant la valeur de l'angle CBA (angle 12) suivie des angles DAB (angle 11) et DEC (angle 13).

Pour la valeur de l'angle CBA (angle 12), ils ont référé au théorème selon lequel les angles opposés d'un losange sont congrus et ils ont utilisé la donnée numérique de 147 degrés de la figure. Toutefois, tel que dit avant, leur identification du losange s'est faite selon leur perception de la figure, leur appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte ou leur mesure de la figure. Par ailleurs, l'observation des traces écrites pour l'ensemble des élèves de la classe a donné lieu à une conduite principale R : $m\angle CBA = 147^o$ (trente élèves). Un seul élève a fait $360^o - (147^o + 33^o + 33^o)$ en ayant possiblement calculé au préalable la valeur de l'angle 11. L'expression de la conduite principale se partage entre les types symbolique-numérique (15 élèves) et verbal-symbolique-numérique (15 élèves). Par exemple, l'expression m∠CBA = 147º est composée de symboles et d'un nombre pour l'écriture de l'angle et de sa valeur en degrés. Nous avons aussi constaté l'insertion de mots pour l'expression de la propriété mise en jeu, correspondant ici à la structure de contrôle théorique associée au théorème selon lequel les angles opposés d'un parallélogramme (un losange) sont congrus.

Pour trouver la valeur de l'angle DAB (angle 11), les trois élèves interviewés ont effectué le même calcul : (360º - (147º x 2)) ÷ 2 = 33º. Ils ont employé le théorème selon lequel les angles opposés d'un losange sont congrus et celui selon lequel la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est de 360 degrés. Par ailleurs, l'observation des traces écrites pour l'ensemble des élèves de la classe a donné lieu à deux conduites. Une première conduite avec m∠DAB = 180º - 147º = 33º (cinq élèves) et une seconde avec m∠DAB = (360º - (147º x 2)) ÷ 2 = 33º (vingt-six élèves). L'expression de ces conduites s'est faite sous une forme symbolique-numérique. Les structures de contrôles sous-jacentes à ces techniques sont à la fois théorique et figurale. Ainsi, pour la technique m∠DAB = 180º - 147º = 33º la structure de contrôle théorique renvoie à la propriété selon laquelle les angles consécutifs d'un parallélogramme (un losange) sont supplémentaires. Pour la seconde technique m∠DAB = (360º- (147º x 2)) ÷ 2 = 33º, la structure de contrôle théorique renvoie 1) au théorème selon lequel la somme des angles intérieurs d'un quadrilatère est égale à quatre angles droits, 2) au théorème selon lequel les angles opposés du parallélogramme (donc losange) sont congrus. Les deux techniques impliquent aussi une structure de contrôle figurale car la donnée de 147º est fournie par la figure.

Pour la valeur de l'angle DEC (angle 13), les élèves interviewés ont produit des calculs différents. L'élève 2 a considéré le triangle DEC isocèle après avoir mesuré à la règle les segments DC et DE. De plus, il a déterminé l'angle ECB droit sur la base d'une autre mesure à l'aide d'un gabarit : « À cause que j'ai mis ma feu, mon manuel, ben pas mon manuel, mais la pointe de mon cahier, mon coin là. ». Ces éléments de mesure sont perceptibles dans son cahier où il a noté : m∠BCE = 90º ; 90º - 33º = 67º ;

Δ DEC = isocèle ; m$\angle$13 = 67º. L'élève 3 a fait 180º – 147º (ADC) = 33º et (180º - 33º) ÷ 2 = 73,5º. Il a fait les bons calculs, mais a donné une explication partielle quand nous avons demandé comment il savait que les côtés du triangle EDC étaient congrus :

> « C'est ça que je veux savoir euh, c'est par déduction comme dans l'autre, parce que vu que le losange y, là (pointe le contour de la figure du losange), le losange toutes ses côtés sont euh isométriques, faque si lui (pointe la figure du losange) yé isométrique, lui y va être isométrique (pointe la figure du triangle DEC). Faque, je sais pas comment j'ai fait, mais ça marché. »

Quant à l'élève 4, il a fait 90º + 33º = 123º; 180º – 123º = 57º m $\angle$DEC= 57º. Notre entretien a permis d'en savoir un peu plus sur les raisons pour lesquelles il a évalué la valeur de l'angle EDC à 90 degrés, celle de l'angle ECD à 33º et qu'il n'a pas considéré le triangle EDC isocèle. Ses raisons semblent tributaires de son observation de la figure. Ainsi, pour la valeur de 90 degrés, il a affirmé : « Parce que d'après ce que je faisais avant, pis ici, dès que c'était une ligne droite (pointe le segment AE), ben, j'me suis dit c'est un 90 degrés. ». Pourtant, la figure ne donne pas à voir un angle de 90 degrés autour des points E, D et A. Nous émettons l'hypothèse que l'élève ait utilisé 90 degrés au lieu de 180 degrés dans la situation de deux angles adjacents aux côtés extérieurs en ligne droite. Ensuite, pour la valeur de l'angle de 33 degrés, il a dit : « Pis là, ça ici, c'est comme 33 (pointe l'angle BCD), pis ça, tsé, c'est on dirait une diagonale (pointe le segment DC). ». L'élève a nommé le segment DC une diagonale et il a déterminé que les angles de part et d'autre de cette diagonale étaient congrus. Toutefois, nous ne savons pas s'il s'agit de sa définition de la diagonale ou s'il y a employé ce mot au lieu de la *bissectrice*.

En résumé pour la valeur de l'angle DEC (angle 13), nous avons observé dans les cahiers de vingt-élèves le calcul suivant : m$\angle$DEC = (180º - (180º-147)) ÷2 = 73,5º représenté sous une forme symbolique-numérique. La structure de contrôle est théorique puisqu'elle renvoie 1) au théorème selon lequel deux angles adjacents avec leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires 2) au théorème selon lequel la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits et 3) au théorème selon lequel les angles opposés aux côtés congrus sont congrus dans un triangle isocèle. Elle est aussi figurale puisque la donnée numérique de 147º, nécessaire au calcul, est fournie par la figure.

Par ailleurs, nous ne sommes pas assurée que la conception utilisée par tous les élèves pour l'identification du triangle DEC isocèle soit issue du texte et corresponde à une mise en relation transitive des côtés AD et DC du losange avec le segment DE. Parmi les vingt élèves recensés, neuf d'entre eux avaient identifié au précédent numéro 6e au moins un triangle isocèle alors qu'aucune information théorique ne le permettait. Il est possible que ces élèves aient utilisé la même conception pour identifier le triangle isocèle et qu'ils n'aient pas ou aient partiellement référé au texte ou n'aient pas fait les déductions nécessaires à partir du texte pour le conclure. Les doutes que nous émettons pour l'identification du triangle DEC isocèle à partir du texte ont trouvé un écho aussi dans les entretiens notamment auprès des élèves 2 et 3.

De plus, nous avons relevé dans les cahiers de deux autres élèves le même calcul que celui effectué par l'élève 2 qui a considéré le triangle DEC isocèle et l'angle ECB droit. Ainsi, trois élèves au total ont fait $m\angle DEC = 90º- m\angle DCB$ et l'ont exprimé de manière symbolique-numérique. La structure de contrôle qui légitime cet opérateur de calcul est théorique. Elle réfère à la définition des angles adjacents ainsi qu'au théorème selon lequel les angles opposés aux côtés congrus sont congrus dans un triangle isocèle.

Mentionnons pour terminer cet exemple de l'angle DEC (angle 13) que cinq élèves n'ont rien produit et trois élèves ont fait des calculs sans finaliser leur travail pour la recherche de la valeur de l'angle.

Les exemples de conduites d'élèves pour les valeurs des angles 11, 12 et 13 ont fait ressortir trois conceptions déjà identifiées : *Appréhension perceptive globale d'une figure*, *Mesure d'une figure* et *Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte*. Nous en ajoutons deux nouvelles.

La quatrième conception est dite *Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul*. L'élève fournit directement la valeur de l'angle recherchée (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) est symbolique et numérique ou verbal, symbolique et numérique. L'élève utilise des symboles, des nombres et des mots à l'occasion pour noter l'angle et sa valeur numérique. La structure de contrôle (Σ) est double; théorique (Σ_1) puisqu'elle renvoie à une propriété ou à un théorème et figurale (Σ_2) puisque l'élève utilise une donnée numérique de la figure, nécessaire à l'application de la propriété ou du théorème.

La cinquième conception est dite *Calculatoire*. L'élève fait un (des) calcul(s) (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) est symbolique et numérique ou verbal, symbolique, numérique. L'élève se sert de symboles, de nombres et de mots à l'occasion pour exprimer l'objet géométrique et les calculs de sa valeur numérique. La structure de contrôle (Σ) est double; théorique (Σ_1) puisqu'elle renvoie à une ou plusieurs propriétés et figurale (Σ_2) puisque les données numériques nécessaires aux calculs proviennent principalement de la figure.

Voici un schéma des conceptions dont on a pu inférer la présence à partir des productions d'élèves pour la résolution des problèmes du type *Rechercher une mesure*.

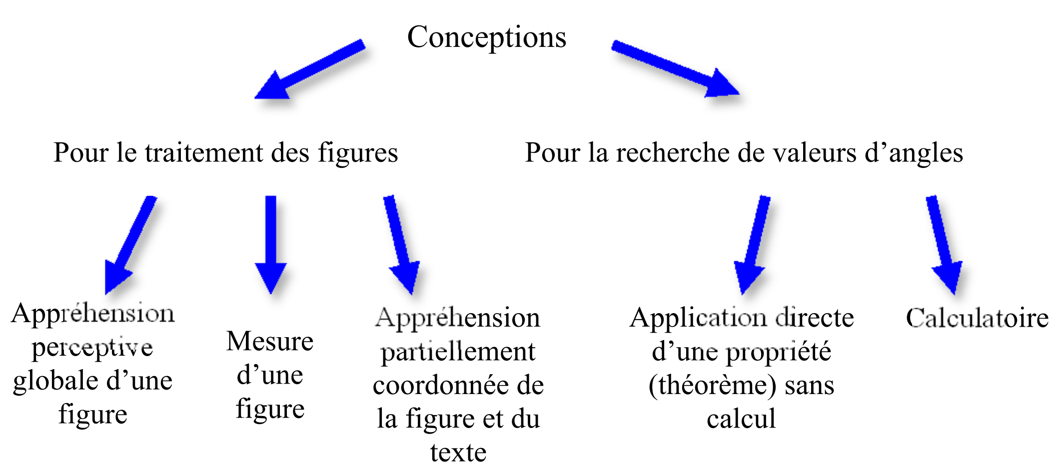


Figure 17 Conceptions mobilisées par les élèves pour le type Rechercher une mesure

4.2.1.2.2 Conceptions des élèves et problèmes Justifier

Voici les trois problèmes[58] du type *Justifier* à partir desquels nous avons dégagé des conceptions d'élèves.

4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Explique tes réponses.

a) Un carré est un rectangle dont les diagonales sont isométriques.

b) Un parallélogramme est un trapèze dont les diagonales sont isométriques.

c) Un carré est un losange dont les diagonales sont isométriques.

Au 16e siècle, le mathématicien Simon Stevin appelait *hache* ce que nous appelons aujourd'hui un trapèze. Il trouvait que la forme du trapèze ressemblait à celle d'une hache.

Figure 18 Problèmes - classe 1 Justifier

Rappelons-le, ces problèmes font partie du projet de construction de l'enseignant et ils ont été résolus par ses élèves. Ils sont du type *Justifier* dans la mesure où les élèves doivent expliquer les raisons sur la base desquelles ils valident les énoncés. Par ailleurs, il nous a semblé intéressant de les utiliser pour des entretiens puisque contrairement aux problèmes précédents du type *Rechercher une mesure*, ils ne proposent aucune figure géométrique. Cela favorisera peut-être l'émergence d'autres conceptions. Nous avons fait les entretiens auprès des élèves 1, 2, 3 et 4. Voyons l'analyse a priori des problèmes suivie des conceptions d'élèves.

4.2.1.2.2.1 Analyse a priori des problèmes

Pour chacun des problèmes, il faut déterminer la valeur de vérité d'un énoncé et expliquer pourquoi il est jugé vrai ou faux. La technique pour les résoudre consiste à mettre en relation des propriétés de quadrilatères en procédant par comparaison. Les technologies traitent notamment des diagonales de quadrilatères. Ces problèmes sont

---

[58] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 2, p. 178

cohérents avec la préoccupation de l'enseignant pour l'apprentissage des propriétés puisqu'ils en exigent une explicitation des élèves (vers GII).

Par ailleurs, chacun des énoncés est formulé de manière semblable, c'est-à-dire *un quadrilatère a est un quadrilatère b dont les diagonales sont isométriques*. Cette formulation nécessite un certain travail d'interprétation. Par exemple, le premier énoncé *Un carré est un rectangle dont les diagonales sont isométriques* peut se transformer en la question suivante : Est-ce qu'un rectangle dont les diagonales sont isométriques est un carré? La réponse serait : non pas nécessairement. Il faudrait en plus que les diagonales se coupent perpendiculairement pour satisfaire aux propriétés des diagonales du carré. Le second énoncé *Un parallélogramme est un trapèze dont les diagonales sont isométriques* serait faux. En effet, un trapèze ayant ses diagonales congrues est un trapèze isocèle. En plus, les diagonales du parallélogramme ne sont pas nécessairement congrues contrairement aux diagonales du trapèze isocèle. Il n'est pas exclu de prévoir d'autres arguments. Par exemple, un élève après avoir déterminé qu'il s'agit d'un trapèze isocèle pourrait baser sa comparaison des quadrilatères selon le parallélisme des côtés. Ainsi, l'énoncé serait jugé faux puisque le trapèze isocèle possède une paire de côtés parallèles alors que le parallélogramme en possède deux. Le troisième énoncé *Un carré est un losange dont les diagonales sont isométriques* est vrai. En effet, un losange a ses diagonales qui se croisent perpendiculairement en leur milieu. En plus, si les diagonales sont congrues, cela satisfait aux conditions des diagonales du carré.

Étant donné la formulation des énoncés, nous n'excluons pas la possibilité que des élèves fassent un autre travail d'interprétation, c'est-à-dire qu'ils valident chacun des énoncés en vérifiant si la condition des diagonales congrues se trouve satisfaite à la fois pour l'un et l'autre des quadrilatères. Si tel était le cas, alors le premier énoncé serait dit vrai puisque le carré et le rectangle ont tous deux leurs diagonales congrues. Les deuxième et troisième énoncés seraient considérés faux. Pour le deuxième énoncé, le parallélogramme ne satisferait pas nécessairement la condition, alors que pour le troisième énoncé, ce serait le losange. Voyons ce qui en des élèves.

4.2.1.2.2.2 Conceptions des élèves

Pour les trois problèmes, nous avons dégagé deux conceptions. La première est dominante et liée à la recherche de l'information sans la production d'une figure. La seconde conception sollicite la figure même si les problèmes en sont dépourvus. Les deux conceptions peuvent être mobilisées de façon concomitante chez les élèves.

Pour le premier énoncé *Un carré est un rectangle dont les diagonales sont isométriques*, nous avons observé dans les cahiers des élèves que vingt-six d'entre eux l'ont considéré vrai et six l'ont jugé faux. Douze élèves n'ont pas fourni d'explication. Le fait que vingt-six élèves sur trente-deux aient jugé ce premier énoncé vrai n'est peut-être pas étranger, croyons-nous, à la formulation de l'énoncé, tel que dit dans l'analyse a priori. D'ailleurs, les propos des élèves interviewés tendent à confirmer nos doutes. En effet, les quatre élèves interviewés ont affirmé avoir essentiellement consulté leur cahier de théorie où sont listées les propriétés des quadrilatères pour formuler leur réponse. Ils ont dit avoir vérifié si la propriété des diagonales congrues était cochée à la fois pour le rectangle et le carré. Toutefois, pour l'élève 1, la consultation de son cahier de théorie l'a contraint à utiliser une autre stratégie puisque la propriété des diagonales congrues n'était pas cochée dans son cahier pour le rectangle. Il a alors dessiné la figure d'un rectangle avec ses diagonales et a mesuré celles-ci à la règle. « J'ai mesuré dans ce temps-là, parce que quand j'ai mesuré, c'était à peu près 3 cm que ça donnait les deux. Ça voulait dire que c'était vrai là. ». Nous avons recensé deux autres cas d'élèves ayant produit des figures avec les diagonales tracées et pour lesquelles des valeurs numériques sont indiquées dans leurs cahiers : l'élève 19 a fait la figure d'un rectangle et l'élève 23 a fourni les figures d'un carré et d'un rectangle.

La majorité des explications fournies pour un énoncé vrai se traduisent par des formulations exprimant l'idée selon laquelle le carré possède toutes les propriétés dont celle des diagonales congrues. Parmi les cinq explications données pour un énoncé faux, deux sont lisibles. Un élève affirme qu'un rectangle n'est pas un carré et un autre élève mentionne qu'un rectangle n'a pas de diagonales isométriques.

Pour le second énoncé *Un parallélogramme est un trapèze dont les diagonales sont isométriques*, nous avons répertorié, à partir des traces écrites des cahiers, vingt-huit élèves qui ont déterminé l'énoncé faux et quatre élèves qui l'ont jugé vrai. Sept élèves n'ont fourni qu'un résultat. Tout comme pour l'énoncé précédent, les élèves interviewés ont dit avoir consulté leur cahier de théorie pour formuler leur réponse. L'élève 1 a fait en plus la figure d'un parallélogramme et en a mesuré les diagonales à la règle. Pour ce second énoncé, son résultat de mesure s'ajoute à la consultation de son cahier de théorie : « Quand je l'ai mesuré, ça faisait que c'étaient pas isométriques. Euh, aussi dans notre cahier de théorie, c'était écrit les diagonales étaient pas isométriques. ». Dans les cahiers, nous n'avons recensé qu'un autre élève (19) ayant tracé une figure; celle d'un trapèze et ses diagonales auxquelles sont associées deux valeurs numériques différentes.

Par ailleurs, nos entretiens avec les élèves ont révélé une certaine précarité dans l'apprentissage des propriétés suite l'usage du cahier de théorie. Par exemple, l'élève 2 a dit « […] dans les caractéristiques du trapèze les diagonales sont pas de la même longueur. Ça peut pas marcher parce que le parallélogramme sont de la même longueur.». Lorsque nous avons demandé à l'élève 4 de redire pourquoi il avait écrit faux au second énoncé, celui-ci a répondu :

> « Non, sérieusement, je serais pas capable de dire pourquoi j'ai dit faux. J'pense c'est vraiment à cause de la théorie. Après ça, ben, quand j'ai étudié pour mon examen, j'ai revu ça, j'ai tout appris c'était quoi par cœur…À l'examen, j'étais correct pour faire des choses comme ça, mais là, j'm'en rappelle plus. »

Contrairement au premier énoncé, les explications dans les cahiers des élèves sont variées au second énoncé. Certaines ne concernent que le parallélogramme ou le trapèze, par exemple « Le parallélogramme n'a aucun angle droit. » ou « Un trapèze n'a pas de diagonales isométriques. ». D'autres traitent des deux quadrilatères, par exemple « Un parallélogramme n'est pas un trapèze. » L'explication relative à la non congruence des diagonales du parallélogramme est la plus fréquente. Aucune explication ne réfère au trapèze isocèle. Parmi les quatre élèves qui ont jugé l'énoncé vrai, deux seulement en ont donné une explication. L'élève 9 estime qu'un trapèze a les mêmes caractéristiques sauf celle des diagonales isométriques; nous ne savons pas par rapport à quoi puisqu'il n'a pas complété l'expression de sa pensée dans son cahier. L'élève 21 affirme qu'un parallélogramme est un trapèze.

Le troisième énoncé *Un carré est un losange dont les diagonales sont isométriques* a été noté vrai dans les cahiers de vingt-quatre élèves. Sept élèves l'ont considéré faux et un élève n'a fourni aucun résultat. Douze élèves n'ont donné que la valeur de vérité sans explication. Les élèves interviewés ont tous dit avoir utilisé leur cahier de théorie pour formuler leurs réponses. Même l'élève 1 n'a pas jugé bon se faire une figure contrairement aux deux énoncés précédents. C'est seulement dans le cahier de l'élève 19 qu'apparaît la figure d'un cerf-volant avec ses diagonales. D'ailleurs, cet élève 19 a fait une figure pour chacun des trois énoncés.

Les explications fournies par les élèves concernent surtout le carré ou le carré et le losange. Dans le premier cas, c'est l'argument selon lequel le carré possède toutes les propriétés des quadrilatères qui ressort, dans le second cas, c'est l'argument selon lequel le carré est un losange qui est dominant.

Nous traduisons ci-après les conduites d'élèves que nous venons d'exemplifier. Celles-ci sont susceptibles d'être sollicitées lors de la résolution d'un problème type (P) où l'élève doit juger d'une (ou plusieurs) propriété(s) donnée(s) en comparant des objets géométriques.

La première conception est dite *Référence*. L'opérateur (R) utilisé par l'élève consiste essentiellement à consulter son cahier de théorie où sont listées des propriétés pour formuler sa réponse. Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) est associé aux gestes de l'élève dans sa manipulation du cahier. Le contenu du cahier de théorie est la principale structure de contrôle employée par l'élève ($\sum$).

La seconde conception est dite *Production et mesure d'une figure*. L'élève produit la figure d'un (des) objet(s) géométrique(s) et vérifie une propriété en mesurant sa figure (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) correspond aux gestes que l'élève fait pour tracer la figure et la mesurer. La structure de contrôle ($\sum$) est la validation du résultat établit par une lecture juste ou approximative de l'outil de mesure.

Voici un schéma des conceptions dont on a pu inférer la présence à partir des productions d'élèves pour la résolution des problèmes du type *Justifier*.

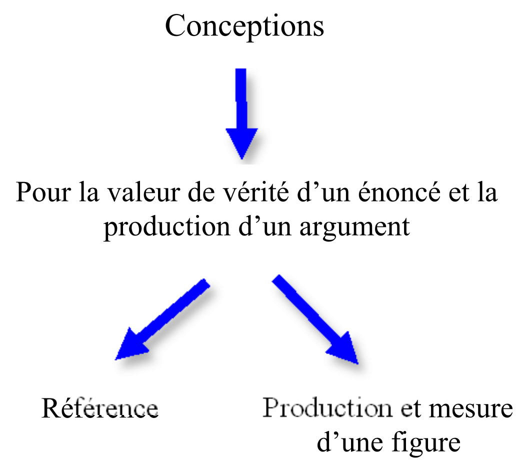


Figure 19 Conceptions mobilisées par les élèves pour le type Justifier

4.2.1.2.3 Conceptions des élèves et problème Reconnaître

Voici le problème[59] à partir duquel nous avons dégagé des conceptions d'élèves.

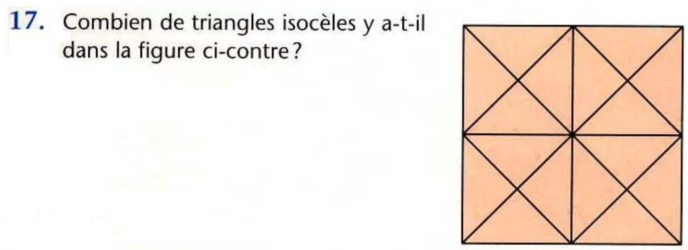


Figure 20 Problème - classe 1 Reconnaître

Ce problème provient aussi du projet de construction de l'enseignant. Il exige une identification de triangles isocèles à partir d'une figure qui n'est pas décrite en mots et ne possède aucune marque de codage, ce qui semble ne pas correspondre tout à fait à l'intention de lecture des figures géométriques exprimée par l'enseignant, c'est-à-dire se distinguer du primaire par le codage des figures. Dans cette perspective et à la suite de l'analyse a priori du problème, il nous a semblé intéressant d'interroger les élèves pour observer dans quelle mesure leurs conduites de résolution du problème s'accordent avec le fait de « […] voir au-delà du dessin. ». Nous avons questionné les élèves 1, 2, 3 et 4.

4.2.1.2.3.1 Analyse a priori du problème

Le problème comprend une question et une figure. Il s'agit de trouver le nombre de triangles isocèles contenus dans la figure. Tel que déjà dit, la figure n'est pas décrite en mots et elle ne possède aucun codage. La figure donne à voir un carré où sont tracées les diagonales, deux axes de symétrie et quatre segments reliant les points milieux des côtés consécutifs du carré. Selon la figure et l'absence de codage, aucun triangle isocèle n'est identifiable. Évidemment, nous doutons que cette réponse puisse être donnée par

[59] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 2, p. 172

les élèves d'autant que la question demande de trouver un nombre de triangles isocèles. Pour les élèves, si la question demande de déterminer un nombre de triangles isocèles, c'est qu'il doit bien y en avoir. Les élèves n'ont aucune raison d'en douter. De plus, la figure à l'échelle offre l'opportunité d'une vérification de la longueur des segments à la règle et une vérification des angles au rapporteur. En fait, le problème s'inscrit en GI.

Une technique pour résoudre ce problème consiste à dénombrer les triangles isocèles de la figure en procédant par élimination des cas pour ne pas compter deux fois les mêmes triangles ou ne pas en oublier. Ceci nécessite un travail d'observation pour la prise en compte des sous figures possibles contenues dans le carré et formant un total de quarante-quatre triangles isocèles. La technologie réfère principalement à la définition d'un triangle isocèle et à la notion de dénombrement.

4.2.1.2.3.2 Conceptions des élèves

Nous avons identifié une seule nouvelle conception associée à un opérateur de dénombrement. Par ailleurs, nous avons retrouvé l'emploi de conceptions déjà utilisées par les élèves pour le traitement des figures.

Les élèves ont produit différents résultats pour le nombre de triangles isocèles. Plus précisément, douze résultats ont été recensés dans leurs cahiers (8, 10, 16, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 38, 40, 44) parmi lesquels les nombres 32 et 40 ont les plus grandes occurrences (respectivement 6 et 8 élèves) et les nombres 8 et 44 les plus petites (un seul élève chacun).

Les quatre élèves interviewés ont employé une technique de dénombrement des triangles isocèles. Les élèves 1 et 3 ont d'abord considéré les plus grands triangles ceux formés par les diagonales, ensuite les plus petits. Les élèves 2 et 4 ont fait l'inverse en comptant d'abord les plus petits triangles, c'est-à-dire ceux appartenant à chacun des carrés formés par les deux axes de symétrie (4 triangles /carré x 4 carrés = 16 triangles). La diversité des résultats s'expliquerait par une omission plus ou moins grande des sous figures lors du dénombrement.

Nous traduisons les conduites d'élèves par une nouvelle conception nommée *Dénombrement*. Elle réfère au problème type (P) où il faut faire le compte d'un nombre précis de sous figures. L'élève compte une à une les différentes sous figures ou compte par groupements les sous figures jugées identiques (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur (L) correspond aux gestes que l'élève effectue pour repérer les sous figures (les pointer, colorier) et les dénombrer. La structure de contrôle ($\sum$) est triple. Elle est théorique dans la mesure où l'élève sait ce qu'est un triangle isocèle ($\sum_1$). Elle est figurale ($\sum_2$) car l'élève discrimine visuellement les sous figures. Elle est arithmétique ($\sum_3$) si l'élève vérifie son calcul ou refait le dénombrement à partir de la figure.

Par ailleurs, tel que dit dans l'analyse a priori, la figure n'est pas décrite en mots et elle n'est pas codée. Aussi, est-ce sans surprise que nous avons observé de la part des élèves une identification des triangles isocèles relevant de conceptions déjà notées aux problèmes du type *Rechercher une mesure.* Par exemple, lorsque nous avons demandé aux élèves comment ils avaient su qu'ils comptaient des triangles isocèles, l'élève 1 a répondu en pointant l'expression triangle isocèle dans la question et en disant qu'un triangle isocèle a deux côtés isométriques. L'élève 2 a parlé des figures en disant qu'elles avaient l'air de triangles isocèles. L'élève 3 a dit : « Ben, parce que dans la question y le disait là. Pis, aussi, j'ai vérifié que toutes les triangles isocèles euh de dans avec ma règle. ». L'élève 4 a affirmé :

> « Ben, j'pense je les avais comme mesurés. Pis aussi, lui y paraît beaucoup plus grand que la ligne, euh, la ligne du bas était beaucoup plus longue que les deux *(pointe dans le manuel une base d'un triangle et ses deux côtés)*. »

Nous reproduisons ci-après le schéma présenté à la section 4.2.1.2.1.2 auquel nous ajoutons la conception *Dénombrement*. Nous avons observé la mise en œuvre de ces conceptions dans la résolution du problème du type *Reconnaître*.

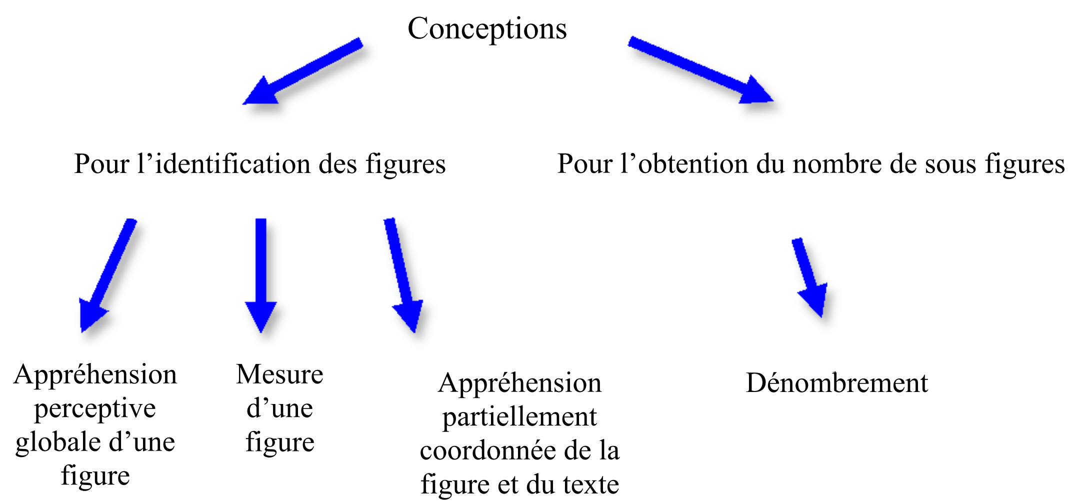


Figure 21 Conceptions mobilisées par les élèves pour le type Reconnaître

4.2.1.2.4 Conceptions des élèves et problème Construire

Nous avons utilisé le problème[60] suivant du type *Construire*. Les entretiens ont été menés auprès des élèves 1, 2, 3, 4.

13. CINÉMA MAISON Pour maximiser les effets d'un cinéma maison, les haut-parleurs et l'endroit où est assise la personne doivent former un triangle équilatéral. Reproduis cette pièce et indique l'endroit idéal où une personne devrait être assise.

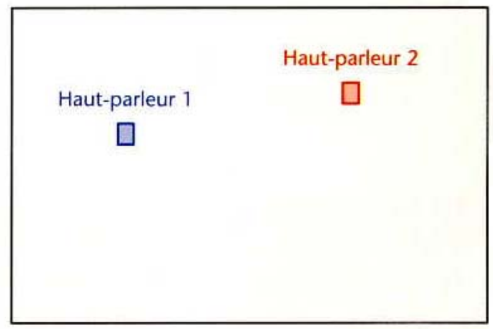


Figure 22 Problème - classe 1 Construire

Ce problème ne fournit aucune donnée numérique et ni directive quant au choix des outils à utiliser, ce qui favorise une certaine diversité des techniques susceptibles d'être employées par les élèves (GI-II). Par ailleurs, il s'inspire d'un contexte de la vie au quotidien en faisant référence à un cinéma maison. La possibilité de faire des liens entre la géométrie et la vie réelle a été mentionnée par l'enseignant comme un atout à l'enseignement de cette discipline. Ainsi, il nous a semblé intéressant d'observer dans quelle mesure cette référence au quotidien serait prise en compte par les élèves lors de la résolution du problème. Voyons à présent l'analyse a priori du problème suivie des conceptions d'élèves identifiées lors de sa résolution.

[60] Source : Manuel *Panoram@th*, vol. 2, p. 170

4.2.1.2.4.1 Analyse a priori du problème

La consigne du problème n'emploie pas le verbe construire, mais elle demande d'indiquer l'endroit idéal pour assoir une personne en fonction de la position de deux haut-parleurs. Géométriquement, le problème consiste à localiser le troisième sommet d'un triangle équilatéral à partir de deux sommets déjà identifiés. Notons que les haut-parleurs sont représentés non pas par deux points, mais par deux petits quadrilatères. Il est possible d'obtenir une légère variation de la longueur du segment reliant les deux haut-parleurs selon l'endroit où sera positionné la règle sur chacun d'eux. Par ailleurs, la consigne telle que formulée permet d'anticiper la production d'un triangle équilatéral ou du troisième sommet uniquement. La première des options est privilégiée par les auteurs du manuel puisque la solution dans le guide du maître correspond au tracé d'un triangle équilatéral sans autre indication. De plus, dans la consigne du problème, il n'y a aucune exigence quant au choix des instruments. Nous prévoyons au moins deux techniques de construction : l'une avec compas et règle, l'autre avec rapporteur et règle.

La première technique avec compas et règle nécessite les actions suivantes :

Avec la règle, joindre les points HP1 et HP2;
Avec le compas, prendre une ouverture égale au segment HP1-HP2;
À partir de HP1 (ou HP2) comme centre, tracer un arc de cercle;
À partir de HP2 (ou HP1) et avec la même ouverture de compas, tracer un arc de cercle;
Nommer P, le point d'intersection des deux arcs;
Avec la règle, joindre les points HP1 et HP2 au point P.

Cette technique est supportée par une technologie référant aux définitions du triangle équilatéral et d'un arc de cercle et à la propriété selon laquelle tous les rayons du cercle sont congrus.

La seconde technique avec rapporteur et règle comprend les actions suivantes :

Avec la règle, joindre les points HP1 et HP2;
Avec le rapporteur, à partir de HP1 (ou HP2) et en prenant appui sur le segment HP1-HP2, tracer un angle de 60º;
Avec la règle, tracer le segment HP1-X;
Avec le rapporteur, à partir de HP2 (ou HP1) et en prenant appui sur le segment HP1-HP2, tracer un angle de 60º;
Avec la règle, tracer le segment HP2-Y;
Nommer P, le point d'intersection des segments HP1-X et HP2-Y.

Cette seconde technique est supportée par une technologie correspondant à la définition du triangle équilatéral qui est aussi équiangle, de même qu'au théorème selon lequel la somme des angles intérieurs du triangle est égale à deux angles droits.

4.2.1.2.4.2 Conceptions des élèves

Lors des entretiens, les élèves 1, 3 et 4 ont dit ne pas avoir bien compris le problème, mais ils ont tout de même produit chacun une figure. Lorsque nous avons entendu leurs propos, nous avions cru que c'était précisément le contexte du cinéma maison jumelé à l'absence du verbe construire dans la consigne qui étaient à l'origine de leur incompréhension. Or, il ne s'agissait pas vraiment de ces éléments. En fait, les élèves 1 et 4 avaient compris qu'ils devaient faire un triangle équilatéral, mais l'élève 1 ne savait pas comment le faire, alors que l'élève 4 a dit ne pas s'être appliqué. L'élève 3 a dit avoir mal lu le texte et produit un triangle sans particularité. L'élève 2 n'a exprimé aucune difficulté pour ce problème.

Ces élèves ont déployé quatre conduites différentes pour résoudre le problème. L'élève 1 a utilisé une technique de type essais-erreurs avec une règle afin de produire un triangle satisfaisant à la définition du triangle équilatéral qu'il connaissait, par ailleurs. Sa figure plutôt à l'échelle montre des marques de codage pour indiquer la congruence des côtés du triangle. L'élève 2 a employé la règle et le rapporteur d'angles. Il a fait sa figure en se basant sur la congruence des angles du triangle équilatéral. La figure produite par l'élève 2 est à l'échelle, mais elle ne présente aucune marque de codage pour la congruence des angles ou des côtés. L'élève 3 n'a utilisé qu'une règle pour faire le tracé d'un triangle. Sa figure n'est pas à l'échelle et elle ne présente aucun codage. L'élève 4 a utilisé une règle et un compas. Toutefois, sa figure n'est pas tout à fait à l'échelle, mais elle contient des marques de codage pour la congruence de chacun des côtés du triangle.

À partir de nos entretiens avec les quatre élèves et de l'analyse des traces écrites de l'ensemble des trente-deux cahiers, nous avons dégagé cinq conceptions. Celles-ci sont susceptibles d'être mobilisées par les élèves pour la résolution d'un problème type (P) où il faut construire un triangle équilatéral.

De l'observation des trente-deux cahiers, nous avons noté que quinze élèves avaient produit une figure à l'échelle d'un triangle équilatéral et dix-sept autres élèves en avaient produit une plus ou moins à l'échelle. Certaines figures offrent des valeurs d'angles ou de côtés très éloignées de celles d'un triangle équilatéral, par exemple des valeurs d'angles de 50º, 60º et 70º. Nous débutons par les figures à l'échelle.

Parmi les quinze élèves ayant produit une figure à l'échelle, six d'entre eux ont utilisé un compas et une règle et neuf élèves ont utilisé un rapporteur d'angles et une règle. Les traces d'utilisation des instruments sont perceptibles dans leurs cahiers. Nous avons distingué ainsi deux premières conceptions.

La première conception est dite *Instruments compas/règle*. L'élève utilise six principaux opérateurs. Ces opérateurs correspondent à la première technique décrite dans l'analyse a priori : (R_1) l'élève relie les points HP1 et HP2 à la règle; (R_2) il considère le segment HP1-HP2 comme un segment étalon pour l'ouverture de compas; (R_3) à partir de HP1 (ou HP2) comme centre, il trace un arc de cercle; (R_4) à partir de HP2 (ou HP1) et avec la même ouverture de compas, il trace un second arc de cercle; (R_5) il identifie le point d'intersection des deux arcs; (R_6) avec la règle, il joint les points HP1 et HP2 au point d'intersection. Le système de représentation (L) pour l'expression des opérateurs correspond aux gestes que l'élève effectue pour manier le compas et la règle. Selon les élèves, le système de représentation est bonifié par l'ajout de marques de codage ou de valeurs numériques sur la figure pour indiquer la congruence des côtés ou des angles. La structure de contrôle ($\sum$) est double. Elle est théorique ($\sum_1$) puisqu'elle réfère à la définition du triangle équilatéral et implicitement à la propriété du cercle d'avoir ses rayons égaux. Elle est aussi technique ($\sum_2$) dans la mesure où l'élève s'applique à être précis dans le maniement du compas et de la règle.

La seconde conception est dite *Instruments rapporteur/règle*. Celle-ci nous a été explicitée par l'élève 2 dans son entretien. Les opérateurs qu'il a utilisés correspondent à la seconde technique décrite dans l'analyse a priori : (R_1) l'élève relie les points HP1 et HP2 à la règle; (R_2) avec le rapporteur, à partir de HP1 (ou HP2) et en prenant appui sur le segment HP1-HP2, il trace un angle de 60º; (R_3) avec la règle, il trace le segment HP1-X; (R_4) avec le rapporteur, à partir de HP2 (ou HP1) et en prenant appui sur le segment HP1-HP2, il trace un angle de 60º; (R_5) avec la règle, il trace le segment HP2-Y; (R_6) il identifie le point d'intersection des segments HP1-X et HP2-Y. Le système de représentation (L) pour l'expression des opérateurs correspond aux gestes que l'élève effectue pour manier rapporteur et règle, tout comme pour la conception précédente. Selon les élèves, le système de représentation est bonifié par l'ajout de marques de codage ou de valeurs numériques sur la figure pour indiquer la congruence des côtés ou des angles. La structure de contrôle ($\sum$) est double. Elle est théorique ($\sum_1$) dans la mesure où elle réfère à la définition du triangle équilatéral, à sa propriété d'être équiangle ou au théorème selon lequel la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux angles droits. Elle est technique ($\sum_2$) dans la mesure où l'élève s'applique à être précis dans le maniement du rapporteur et de la règle.

Parmi les dix-sept figures non à l'échelle, certaines d'entre elles (neuf) offrent de légères variations de mesure d'angles (quelques deux ou trois degrés) ou de côtés (quelques millimètres de différence entre les côtés) avec ou sans codage. Il est possible que la production de ces figures relève des deux premières conceptions préalablement définies, mais pour lesquelles la structure de contrôle technique aurait fait légèrement défaut, c'est-à-dire que l'élève se serait moins bien appliqué dans l'usage du compas, du rapporteur, de la règle. Cela nous semble plus évident lorsque des traces de l'utilisation des outils, en particulier celles associées au compas, sont laissées dans les cahiers des élèves. C'est le cas notamment pour l'élève 4. Par ailleurs, il est aussi possible que la production de figures qui soient presque à l'échelle relève d'une autre conception. Nous en discutons ci-après.

Une troisième conception nous a été révélée lors de l'entretien auprès de l'élève 1. Comme nous l'avons dit précédemment, cet l'élève avait déduit qu'il devait produire un triangle équilatéral et il en connaissait la définition. Toutefois, il ignorait ou ne se rappelait plus des procédures de construction du triangle équilatéral au compas ou au rapporteur. Il a tout de même produit une figure du triangle équilatéral dont les valeurs d'angles et de côtés sont presque à l'échelle. Ce qu'il a mis en œuvre pour résoudre le problème relève de la conception détaillée ci-dessous.

La troisième conception est dite *Instrument règle*. L'élève emploie trois opérateurs : (R_1) il trace à la règle le segment HP1-HP2; (R_2) il mesure ce segment; (R_3) à partir de HP1 et HP2, il procède successivement par essais et erreurs afin de faire coïncider les deux segments (congrus à HP1-HP2) devant former les deuxième et troisième côté du triangle équilatéral, qu'il trace (et efface) au fur et à mesure de ses essais. Le système de représentation (L) utilisé pour l'expression de ces opérateurs correspond aux gestes que l'élève effectue pour ses essais. La structure de contrôle ($\sum$) est double. Elle est théorique ($\sum_1$) puisque l'élève réfère à la définition du triangle équilatéral. Il sait que les trois côtés de sa figure doivent être congrus. Elle est technique ($\sum_2$) car l'élève se soucie d'ajuster la figure pour l'approcher le plus possible d'une figure à l'échelle.

D'autres figures non à l'échelle (huit) offrent des variations plus importantes de leurs mesures d'angles et de côtés, par exemple les triplets (50º50º80º), (50º60º70º). De plus, seulement une des figures a des marques de codage pour la congruence des côtés et des angles. Nous y reviendrons. La production de ces figures pourrait être associée dans une moindre mesure à la troisième conception où la structure de contrôle technique n'aurait pas été très active chez l'élève. Mais il se peut que la production de ces figures soit associée à une autre conception. Par exemple, l'élève 3 a dit ne pas avoir retenu de sa lecture du texte qu'il s'agissait d'un triangle équilatéral. Il a alors fait la figure d'un triangle à la règle. Ceci nous conduit à détailler une quatrième conception.

Pour cette quatrième conception dite *Production d'une figure*, l'élève utilise les opérateurs suivants : (R_1) il relie les point HP1 et HP2 avec la règle; (R_2) à partir de HP1 (ou HP2), il trace un segment HP1-X avec la règle; (R_3) à partir de HP2 (ou HP1) avec la règle, il trace un segment HP2-Y de manière à ce qu'il rencontre le segment HP1-X. Le système de représentation pour l'expression des opérateurs (L) correspond aux gestes de l'élève pour tracer les trois segments formant le triangle. La structure de contrôle est théorique ($\sum_1$) dans la mesure où l'élève réfère à la définition du triangle. Elle est figurale ($\sum_2$) puisque l'élève s'assure de produire une figure correspondant à une ligne brisée fermée de trois côtés.

Nous avons dit précédemment que parmi les huit figures offrant d'importantes variations de mesures d'angles et de côtés, une seule figure avait des marques de codage des angles et des côtés. Il s'agit de la figure 23 (élève 27) ci-dessous.

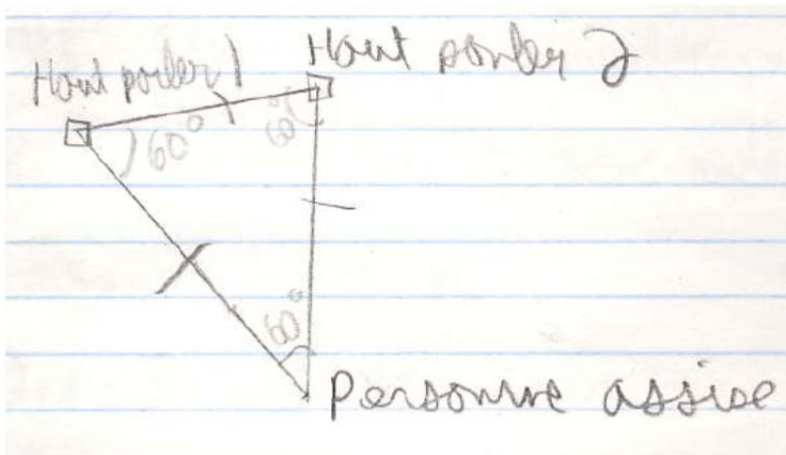


Figure 23 Production de l'élève 27 (classe 1) Construire

Cette figure 23 est intéressante. Sa vérification au rapporteur et à la règle permet d'obtenir trois valeurs d'angles et de côtés différentes. Les valeurs numériques obtenues ne correspondent pas à celles d'un triangle équilatéral. Par contre, chacun des côtés de la figure est marqué d'un petit trait et chacun des angles est pourvu de l'inscription 60º, ce qui permet d'identifier la figure en tant que triangle équilatéral.

Nous avons mentionné dans l'analyse a priori que le verbe construire n'était pas employé. L'élève 27 aurait peut-être interprété la consigne non comme une demande de construction d'un triangle équilatéral, mais plutôt comme la production d'une esquisse pour illustrer l'emplacement idéal à partir de ce qui définit un triangle équilatéral. En conséquence, nous présentons la cinquième conception : *Esquisse codée.* Elle partage les mêmes opérateurs que la quatrième conception. Toutefois, en plus d'effectuer les gestes pour tracer le triangle, l'élève privilégie l'utilisation d'un codage comme système de représentation en lien avec sa structure de contrôle théorique. Il réfère à la définition du triangle équilatéral et à la propriété du triangle équilatéral d'être aussi équiangle.

Nous présentons ci-dessous le schéma des cinq conceptions dont on a pu inférer la présence à partir des productions d'élèves pour la résolution du problème du type *Construire*.

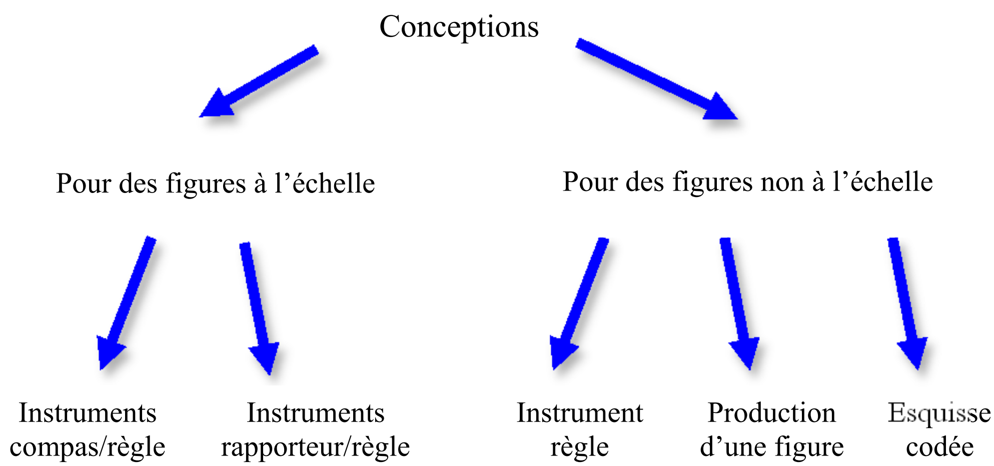


Figure 24 Conceptions mobilisées par les élèves pour le type Construire

4.2.1.3 Niveaux 3 à 0 de l'enseignant et conceptions des élèves - classe 1

Dans cette section, nous revenons sur les niveaux caractéristiques de l'activité enseignante en relation avec les conceptions d'élèves dégagées de nos analyses. Nous tenterons de montrer dans quelle mesure, ou sous quels aspects, la géométrie souhaitée et la géométrie actualisée par l'enseignant correspond ou ne correspond pas tout à fait à celle effectivement développée par ses élèves.

Le tableau VIII (page 137) présente la compilation synthétique des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1), des problèmes de son projet de construction (niveau 2), de l'actualisation en classe des intentions (niveau 0) et des conceptions d'élèves (niveau -1). Pour les intentions, les données du tableau montrent qu'elles se situent davantage en GI-II et vers GII qu'en GI. Nous avons donné des exemples de propos tenus par l'enseignant pour ces trois catégories (voir le résumé des niveaux à la section 4.2.1.1.5). Parmi celles qui tendent vers GII, il y a l'importance accordée par l'enseignant à l'apprentissage des référents théoriques des triangles et des quadrilatères. Il souhaite, entre autres, que ses élèves déduisent des mesures d'angles et de côtés de figures sans les instruments de mesure, qu'ils lisent des figures et travaillent à partir de celles-ci sans égard à leur échelle. Ces attentes vers GII sont cohérentes avec le choix de certains problèmes effectué au niveau 2 de son activité tels ceux du type *Rechercher une mesure* pour lesquels l'usage des instruments est interdit. Nous en avons présenté des exemples à l'analyse des conceptions d'élèves. Selon les données du tableau VIII, il appert que trois des quatre types de problèmes les plus représentatifs du projet de construction sont orientés majoritairement vers GII : *Reconnaître, Rechercher une mesure* et *Justifier*. Les problèmes du type *Construire* sont surtout en GI-II. Dans une moindre mesure, d'autres problèmes sont en GI tels ceux des types *Reconnaître*, *Construire* et *Justifier*. À titre d'exemple, le problème du type *Reconnaître* utilisé pour l'identification des conceptions d'élèves était susceptible de solliciter la perception globale de la figure ou la mesure puisque le texte demandait d'identifier des triangles isocèles à partir d'une figure ne possédant pas de marques de codage. Pour ce problème, les élèves n'avaient aucune raison de douter qu'il n'y ait pas de triangles isocèles à identifier puisque la consigne le demandait.

L'actualisation des intentions de l'enseignant a montré une coexistence de divers procédés pour la reconnaissance des figures associées aux types de triangles : présence ou absence de codage, valeurs numériques déjà fournies, recours à la mesure. Il en va de même pour les propriétés des quadrilatères : lecture de cartons modèles sur lesquels sont codés des angles et des côtés, mesure à la règle des diagonales tracées sur des figures, observation des figures pour déterminer des axes de symétrie et dans une moindre mesure, référence au déplacement simulé d'un élément d'une figure. La diversité des procédés observée en classe offre un espace de travail géométrique oscillant entre GI et vers GII. Cet espace de travail est encore un peu ancré en GI entre autres par le recours à l'observation globale et la mesure des figures. Toutefois, il tend à s'approcher de GII en particulier par l'emploi de marques de codage sur des figures.

Cette oscillation entre GI et vers GII s'est manifestée à travers les conceptions d'élèves. Par exemple, les problèmes des types *Rechercher une mesure* et *Reconnaître* choisis pour l'analyse des conceptions d'élèves ont en commun de montrer des figures majoritairement à l'échelle. De plus, la consigne des problèmes du type *Rechercher une mesure* interdisait l'usage des instruments. Pour les problèmes de ces deux types, les élèves, dans leur traitement des figures, ont sollicité les conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* (GI). Par contre, nous avons observé la conception de l'*Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte* qui témoigne d'une certaine distanciation de GI pour aller vers GII.

Par ailleurs, étonnamment, même lorsque des problèmes n'avaient pas de figures à l'appui, des élèves ont mobilisé des conceptions de GI s'apparentant aux conceptions précédentes. Par exemple, pour les problèmes du type *Justifier,* nous avons identifié la conception *Production et mesure d'une figure* voisine de la conception *Mesure d'une figure.* Toutes deux reposent sur une structure de contrôle associée à une lecture juste ou approximative d'un instrument de mesure. La conception *Production et mesure d'une figure* se distingue de la conception *Mesure d'une figure* par le fait que l'élève produit lui-même la figure qu'il s'apprête à mesurer.

Nous avons dit aussi que, pour les problèmes du type *Rechercher une mesure,* les élèves avaient mobilisé les conceptions de l'*Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul* et *Calculatoire.* Ils ont employé des structures de contrôle basées notamment sur des éléments théoriques favorisant cette propension vers GII. Toutefois, leur mise en œuvre pouvait être tributaire de conceptions relatives au traitement des figures et ancrées en GI comme l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* ou la *Mesure d'une figure*.

Les problèmes *Justifier* pour l'analyse des conceptions d'élèves tendaient vers GII dans la mesure où ils sollicitaient l'expression de référents théoriques. De plus, ils n'offraient aucune figure à l'appui. Pour ces problèmes, à défaut d'avoir une figure associée à chacun des énoncés et à partir de laquelle démarrer la résolution, des élèves ont produit et mesuré une figure, tel que dit précédemment. Mais les élèves ont aussi employé une stratégie de dépannage traduite par la conception *Référence*. L'expression des référents théoriques par les élèves n'est pas venue de la compréhension qu'ils en avaient, ce qui les aurait positionnés vers GII. Elle provenait du contenu du cahier de théorie qui a été leur principale structure de contrôle.

Enfin, l'observation des cinq conceptions pour l'obtention de quinze figures à l'échelle et dix-sept figures non à l'échelle au problème du type *Construire* peut être attribuée d'une part, à la formulation de la consigne et, d'autre part, aux divers rapports à la figure que des élèves entretiennent. Ainsi, les conceptions déployées par les élèves nécessitant l'emploi des instruments y compris le compas dans l'optique du report d'une mesure s'inscrivent en GI. Par ailleurs, l'ajout de marques de codage sur les figures produites par des élèves témoigne d'une préoccupation pour les propriétés. Du moins, cela est perceptible au niveau du système de représentation qu'ils utilisent, ce qui tend vers GII. Ajoutons pour terminer que la conception *Esquisse codée* tend aussi vers GII.

En résumé, nous disons que les intentions de l'enseignant sont surtout en GI-II et vers GII plutôt qu'en GI. Celles qui sont orientées vers GII trouvent un écho dans ses choix de problèmes puisqu'il y a trois types de problèmes sur quatre pour lesquels nous observons de plus hauts pourcentages vers GII. Néanmoins, le projet de construction comprend des problèmes en GI ou GI-II dans une moindre mesure. L'oscillation entre GI et vers GII fut perceptible en classe et dans les conceptions mobilisées par les élèves. Notons que les conceptions en GI telles que *l'Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* peuvent avoir des origines ontogéniques ou scolaires héritées du primaire. D'ailleurs, l'enseignant a parlé de la transition du primaire au secondaire dans l'apprentissage de la géométrie. Toutefois, il se peut que la mise en œuvre de ces conceptions de GI ait été maintenue ou renforcée par l'oscillation entre GI et vers GII observée dans les problèmes et les leçons. Nous rediscuterons de cette idée lors de l'interprétation des résultats au chapitre 5.

Tableau VIII Compilation des résultats de la classe 1 selon GI, GII et GI-II

Entrevue et leçons

Niveaux	GI	GII	GI-II	
3	12%	31%	**57%**	100%
2	0%	**60%**	40%	100%
1	0%	**80%**	20%	100%
0	29%	**66%**	5%	100%
3 à 1	8%	43%	**49%**	100%
3 et 1 sans Q8	11%	35%	**54%**	100%

Problèmes de la planification *		**Problèmes pour les entretiens**	**Conceptions des élèves (niveau -1)**
Reconnaître **(18%)** (14 problèmes)	GI: 14% GII : **86%** GI-II: 0%	1 problème GI	GI: Appréhension perceptive globale d'une figure GI: Mesure d'une figure GI: Dénombrement vers GII: Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte
Rechercher une mesure **(35%)** (27 problèmes)	GI: 0% GII:**100%** GI-II: 0%	6 problèmes GII	GI: Appréhension perceptive globale d'une figure GI: Mesure d'une figure vers GII: Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte vers GII: Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul vers GII: Calculatoire
Construire **(14%)** (11 problèmes)	GI: 27% GII: 0% GI-II:**73%**	1 problème GI-II	GI: Instruments rapporteur/règle GI: Instrument règle GI: Production d'une figure vers GII: Esquisse codée vers GII: Instruments compas/règle
Justifier **(29%)** (23 problèmes)	GI: 13% GII: **70%** GI-II:17%	3 problèmes GII	GI: Production et mesure d'une figure vers GII: Référence
Découvrir (4%) (3 problèmes)	GI: 100% GII: 0% GI-II: 0%	n/d	
Produire une représentation (0%) (0 problème)	GI: 0% GII: 0% GI-II: 0%	n/d	

*Compilation des problèmes du manuel scolaire (78)

4.2.2 Analyse de la situation didactique de la classe 2

Nous poursuivons l'analyse de la géométrie souhaitée et mise en place par les enseignants, ainsi que celle développée par leurs élèves, à l'aide des données de la classe 2. Celle-ci compte vingt-neuf élèves. Nous débutons par les niveaux d'activité de l'enseignant suivis des conceptions d'élèves. Nous terminons l'analyse de la classe par un tableau synthétisant les poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant et leur actualisation en classe, des problèmes et des conceptions d'élèves.

4.2.2.1 Analyse des niveaux de l'activité de l'enseignant de la classe 2

Dans cette section, nous analysons d'abord chacun des niveaux caractéristiques 3 à 0 de l'activité enseignante. Ensuite, nous faisons un résumé de ces niveaux.

4.2.2.1.1 Niveau 3 Conceptions et valeurs

Pour l'enseignant, *faire de la géométrie plane* consiste à travailler les droites, les angles, les triangles, les quadrilatères et plus généralement les objets géométriques représentés par des figures fermées en deux dimensions, convexes ou concaves. Les principales actions anticipées à partir de ces objets géométriques concernent notamment le calcul d'aire, de périmètre et les constructions. Tous ces éléments du discours de l'enseignant sont a priori susceptibles d'appartenir à l'un ou l'autre des paradigmes (GI-II). Il en va ainsi de la manipulation, la visualisation et l'application de la géométrie à des situations *concrètes*; aspects jugés favorables à l'enseignement de la géométrie. En effet, pour l'enseignant, la géométrie est une discipline vivante dans la mesure où elle offre l'opportunité de faire des manipulations sans préciser de quelles manipulations il s'agit. Pour la visualisation, l'enseignant la définit comme la capacité à se servir d'un support visuel pour appuyer des explications, par exemple des figures. Sa définition ne donne pas suffisamment d'information sur le traitement des figures pour statuer s'il s'effectue en GI ou vers GII. Quant à l'application de la géométrie à des situations *concrètes*, cette affirmation ne permet pas de savoir s'il s'agit d'un lien fort avec la réalité en GI ou d'une modélisation de celle-ci selon GII.

Par ailleurs, selon l'enseignant, l'usage des instruments de géométrie en classe est un aspect défavorable à l'enseignement de la géométrie. Il affirme que le compas et l'équerre présentent souvent des difficultés d'apprentissage pour les élèves. De plus, il convient qu'il est parfois difficile de bien gérer la classe, d'une part, lorsque les élèves n'ont pas tous les instruments nécessaires en leur possession et, d'autre part, quand ils demandent simultanément de l'aide pour en comprendre les techniques d'utilisation. L'enseignant affirme ne pas s'être particulièrement intéressé aux logiciels de géométrie dynamique. Toutefois, il envisage y recourir dans l'optique de pallier les difficultés des élèves à manipuler les instruments ainsi qu'à ses propres difficultés de gestion de classe nécessitant l'emploi des instruments. À nouveau, dans ses propos, nous ne pouvons pas déceler l'orientation paradigmatique à l'intérieur de laquelle l'enseignant souhaite faire usage des instruments de géométrie dont l'équerre et le compas.

L'enseignant décrit la géométrie plane apprise en première secondaire comme une géométrie de base à laquelle il associe un contenu à enseigner correspondant à ce qui est énuméré au premier paragraphe, auquel il ajoute la reconnaissance des propriétés des triangles et des quadrilatères. Cela favorise une géométrie tendant vers GII puisqu'il inclut les propriétés à l'étude des objets géométriques. La reconnaissance des propriétés est l'une des deux attentes qu'il émet à l'égard de ses élèves; la seconde est l'application des concepts géométriques. Il énonce l'exemple du calcul d'aire.

L'enseignant affirme ne pas se servir du programme d'études pour déterminer le contenu géométrique à enseigner. Il dit l'avoir consulté surtout au début de sa carrière, mais ne le fait plus vraiment à présent car il enseigne en première secondaire depuis une dizaine d'années. Aussi, il estime que le programme d'études ne donne pas toujours d'indications claires quant aux objets géométriques à enseigner ainsi que sur les limites à l'intérieur desquelles travailler ces objets, ce qui ne facilite pas son positionnement (même implicite) d'un point de vue paradigmatique.

> « Ben, c'est sûr que le comment c'est décrit, l'aspect général. On sait qu'on doit, par exemple, aborder les caractéristiques des triangles, des quadrilatères. On sait qu'on doit parler de l'aire, du périmètre, euh, mais euh, jusqu'où aller, par exemple dans la construction des différents polygones ? Euh, je trouve que y a, c'est pas précisé. Ils disent qu'on peut le faire, mais c'est pas obligé. On peut le faire, euh, à la main, mais on. Je trouvais que par rapport à justement, à la construction de triangles, quadrilatères, il y avait des nuances, ou en tous cas, c'était pas assez clair, donc, jusqu'où on doit aller. »

L'enseignant impute à ce manque de clarté du programme la constatation selon laquelle le manuel scolaire devient bien souvent dans son milieu de pratique la seule référence pour délimiter le contenu géométrique à enseigner, en précisant toutefois que ce n'est pas nécessairement son cas. Pour sa part, le contenu géométrique à enseigner relève principalement de sa longue expérience d'enseignement en première secondaire.

L'utilisation du manuel scolaire ne fait pas partie du quotidien de l'enseignant. Ce dernier affirme s'en servir occasionnellement, une à deux fois par mois. Lorsqu'il le fait, c'est pour y puiser des mises en situation qu'il nomme aussi situations-problèmes ou pour y trouver des exercices et plus rarement des projets.

De plus, l'enseignant exprime un problème de gestion des manuels scolaires dû au fait que la répartition des concepts géométriques entre la première et la deuxième année du cycle n'est pas la même d'une collection à l'autre et que ses propres choix ne correspondent pas à ceux des auteurs des manuels en usage dans son école. Il lui arrive d'utiliser une autre référence que le manuel scolaire quand le concept géométrique qu'il souhaite aborder en classe est traité dans le manuel de deuxième secondaire; manuel au service des élèves de deuxième année seulement. En conséquence, l'enseignant formule deux recommandations pour l'élaboration éventuelle de manuels scolaires. La première consisterait à regrouper en un seul tome tous les concepts géométriques prescrits pour le cycle. La seconde serait de réviser le niveau de difficulté des problèmes de façon à ce qu'il soit plus graduel; du simple vers le complexe (sans qu'il définisse les mots simple et complexe).

4.2.2.1.2 Niveau 2 Projet de construction

La description de son projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* vise l'apprentissage des propriétés des angles et des côtés des triangles et quadrilatères afin que les élèves classifient ces objets géométriques (vers GII).

Par ailleurs, l'enseignant a modifié dans sa planification annuelle le moment où il entend introduire le thème *triangles et quadrilatères*. Il prévoit l'enseigner en cours d'année plutôt qu'à la fin, comme il en avait l'habitude. Cette perspective lui semble plus avantageuse afin d'assurer une meilleure acquisition des concepts géométriques auprès de ses élèves. Les raisons évoquées pour ce changement recoupent en partie le niveau 3 en référence à sa longue expérience. En effet, durant ses années de pratique, l'enseignant croyait que les élèves possédaient déjà beaucoup de connaissances au sujet des triangles et des quadrilatères lorsqu'ils arrivaient du primaire. Il considérait que l'enseignement de ce thème en fin d'année était approprié et que cela lui permettait de composer avec le temps disponible pour cette période. Toutefois, l'enseignant dit s'être ravisé et avoir modifié son opinion notamment par un regard longitudinal au cursus scolaire de l'élève en géométrie.

> « C'est vite un peu parce qu'on prend pour acquis certaines connaissances qu'ils n'ont pas nécessairement. C'est une partie qui est très importante pour la suite. Quand t'enseignes les autres niveaux, tu te rends compte qu'il y a des acquis qui sont vraiment essentiels. »

L'enseignant n'a pas précisé les connaissances géométriques non acquises par les élèves à l'entrée du secondaire. Sa décision de devancer le moment de l'année où enseigner la géométrie se veut une réponse à la situation. Nous croyons que sa décision s'inscrit dans l'optique de favoriser le passage de GI vers GII, mais nous ne pouvons l'affirmer avec certitude sur la base de ses propos exprimés en entrevue.

Par ailleurs, le projet de construction du thème comprend aussi un ensemble de problèmes[61] à faire résoudre aux élèves. Le tableau IX montre leur répartition par types. La grande part des problèmes (67%) provient du répertoire personnel de l'enseignant et l'autre part (33%) d'un manuel et un cahier d'exercices.[62]

Tableau IX Problèmes par types - classe 2

Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
27%	46%	21%	6%	0%	0%	100%

Le tableau IX montre que les problèmes du type *Rechercher une mesure* sont dominants (46%). Ceux des types *Reconnaître* et *Construire* ont respectivement des pourcentages de 27% et 21%. Les problèmes du type *Justifier* ne comptent que pour 6% de l'ensemble des problèmes. Il n'y a pas de problèmes des types *Découvrir* et *Produire une représentation*. Pour l'ensemble des problèmes, nous en avons identifié qui relèvent de GI, par exemple des problèmes de construction faisant appel à la mesure à l'aide du rapporteur, de la règle graduée. D'autres problèmes sont susceptibles de tendre vers GII. C'est le cas de problèmes du type *Reconnaître* qui nécessitent une mise en relation de propriétés pour être résolus. Notons que le faible pourcentage des problèmes *Justifier* (6%) laisse une petite place à l'expression explicite des référents théoriques, ce qui favorise moins une tendance vers GII. Ajoutons que les problèmes du type *Découvrir* ne sont pas pour autant absents des autres niveaux de l'activité enseignante. L'enseignant a prévu des activités nommées *activités de découverte* susceptibles d'être classées dans la catégorie *Découvrir*. Nous y reviendrons au niveau 0.

Par ailleurs, les réponses au questionnaire ont permis de connaître quelques-unes des motivations de l'enseignant à l'origine de ses choix de problèmes. Voici un bref descriptif des six problèmes du questionnaire suivi des deux premiers problèmes.

---

[61] Le total compte deux cent trente-sept problèmes analysés.
[62] Il s'agit de *Panoram@th* manuel A, vol. 2 (6%) et du cahier d'exercices (27%) de la même collection.

Problème 1, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans le projet de construction
Problème 2, *Rechercher une mesure*, en GI, peut se retrouver dans le projet de construction;
Problème 3, *Justifier*, vers GII, est atypique;
Problème 4, *Découvrir*, en GI, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 5, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 6, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel.

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABKJ est un carré, BCDK est un rectangle, DGFE est un trapèze rectangle, KDGH est un trapèze isocèle et JKHI est un parallélogramme.

Sachant que l'angle JIH mesure 110°, déterminez la mesure de l'angle FGD et justifiez chacune de vos étapes.

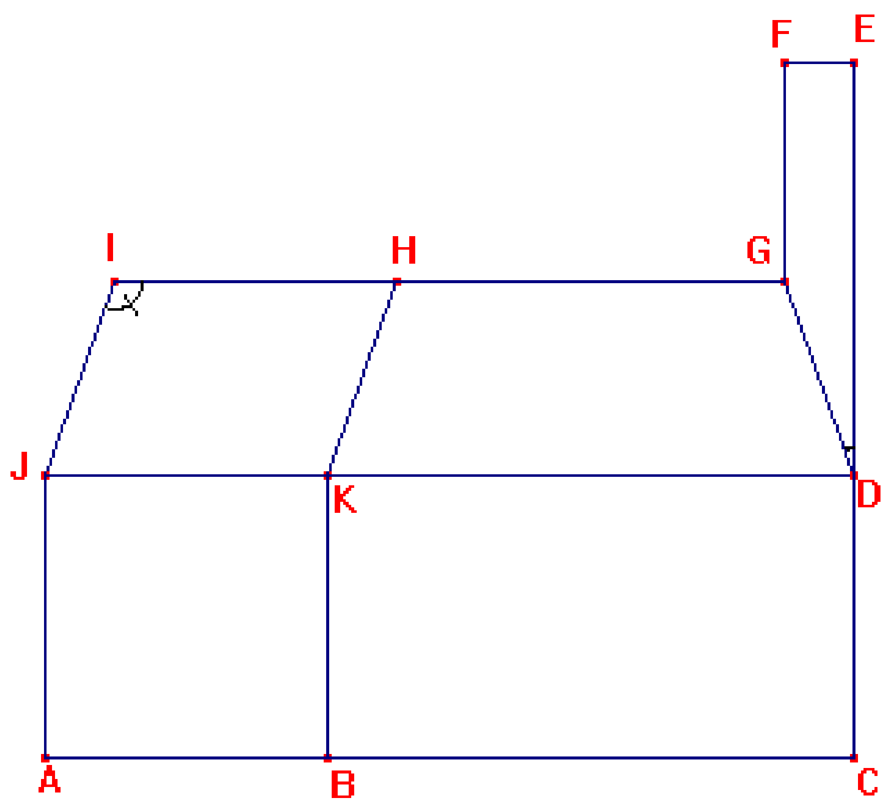


Figure 25 Problème 1 du questionnaire - enseignant 2

Problème 2

Monsieur Vanier désire recouvrir son terrain de gravier à l'exception de son champ de fraises, de son enclos et de son allée.

Quel montant devra payer Monsieur Vanier sachant que le gravier se vend 30$/m^2 ?

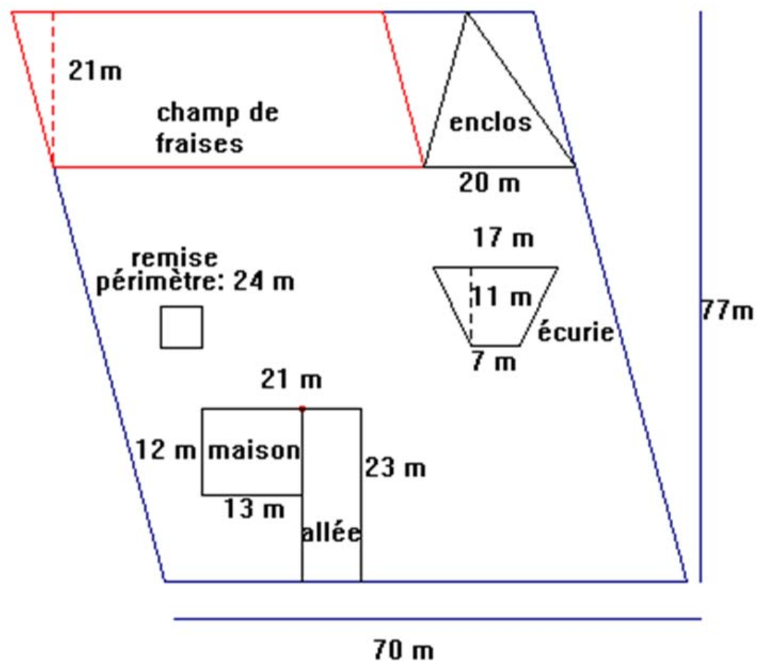


Figure 26 Problème 2 du questionnaire - enseignant 2

Tous les problèmes du questionnaire ont été jugés intéressants par l'enseignant. Trois raisons sont évoquées pour juger de l'intérêt d'un problème : il implique diverses notions, il peut être traduit dans un contexte réaliste, il favorise la réflexion de l'élève. La tendance paradigmatique GI ou GII ne semble pas avoir été un élément déterminant pour évaluer l'intérêt d'un problème. De plus, le niveau de complexité d'un problème est le principal argument à l'aide duquel l'enseignant pense donner ou non un problème à ses élèves. Nous avions déjà noté cette référence à la complexité des problèmes au niveau 3 lorsque l'enseignant avait suggéré d'améliorer le niveau de difficulté des problèmes des manuels scolaires; du simple vers le complexe sans toutefois préciser le sens de ces mots. Des six problèmes, seul le problème 3 ne serait donné qu'à certains élèves; l'enseignant le juge plus complexe que les autres. Est-ce que la complexité tient au caractère atypique de la présentation de la figure du problème? Est-ce qu'elle tient à l'analyse des propriétés des quadrilatères requise pour formuler une réponse? Il est possible que cette dernière hypothèse définisse ce que l'enseignant ait voulu dire par complexe dans le cas du problème 3 puisque qu'il a écrit que les informations données permettaient d'affirmer avec certitude qu'il s'agissait d'un trapèze, mais qu'elles étaient insuffisantes pour conclure sur la nature des autres quadrilatères. Il estime que plusieurs élèves choisiraient le carré au lieu du trapèze à partir des informations données sur la congruence des côtés et la présence d'angles droits.

Ce sont les problèmes 1 et 2 qui seraient modifiés par l'enseignant. Dans le cas du problème 1, la modification serait d'alléger les informations contenues dans le texte au profit d'un codage de la figure associée, par exemple utiliser le symbole d'un petit carré pour identifier des angles droits. Cela ne change pas la tendance paradigmatique GII du problème. Dans le cas du problème 2, les modifications suggérées ne concernent pas le codage des figures même si aucune des figures du problème n'est décrite en mots ou codée. Pour ce problème 2, l'enseignant propose de reformuler la question de façon positive et d'indiquer 3\$/m^2 plutôt que 30\$/m^2 pour le prix du gravier, afin d'obtenir une réponse plus réaliste. Sa modification est cohérente avec l'idée de proposer des contextes issus du quotidien. Par ailleurs, elle ne change pas la tendance paradigmatique GI du problème dans la mesure où les calculs nécessaires à la résolution sont basés sur une perception globale des figures.

Le problème 4, relevant de GI par son aspect inductif, n'est pas rejeté et il ne fait l'objet d'aucune modification. L'enseignant le juge facile à comprendre et à résoudre (le tableau). Néanmoins, il anticipe devoir aider ses élèves pour trouver la propriété selon laquelle « La somme des mesures de deux angles dans un triangle est supplémentaire à la mesure du troisième angle. ». Cette formulation produite par l'enseignant correspond au corollaire selon lequel chaque angle d'un triangle a pour supplément la somme des deux autres. L'enseignant anticipe aussi que certains élèves chercheraient à trouver la mesure de chaque angle individuellement.

L’enseignant associe le problème 5 (vers GII) aux compétences de raisonnement et de communication du programme d’études en affirmant qu’il est « Assez complexe, mais pas trop. ». Sans vouloir le rejeter ni le modifier, il anticipe que certains élèves produisent une réponse en se fiant à la figure ou qu’ils se satisfassent d’informations fausses pour conclure.

Les problèmes 1 et 6 (vers GII) demandent de trouver et de justifier une valeur d’angle. Ils sont jugés respectivement comme « Tout à fait accessible pour des élèves de 1re secondaire. » et « Simple. ». Néanmoins, l’enseignant anticipe que des élèves ne fournissent que des calculs sans les justifications demandées.

4.2.2.1.3 Niveau 1 Projet d’une leçon

Lorsque l’enseignant prépare une leçon, il prévoit des questions à poser à ses élèves ou élabore une activité pour réactiver leurs connaissances antérieures. Cette amorce d’une leçon est conforme à l’idée énoncée au niveau 2 selon laquelle les élèves provenant du primaire possèdent des connaissances qu’il convient de solliciter. Ensuite, il planifie une activité de découverte et occasionnellement un enseignement magistral. Cette activité comprend généralement de la manipulation. Par cette activité, l’élève est censé identifier des propriétés des triangles et des quadrilatères. L’extrait suivant traduit ces idées de découverte et de manipulation, mais sans nous donner des indices de leur traitement selon GI ou vers GII.

> « Pour les triangles, quadrilatères, je vais plus vers des activités de découverte. Y a d’autres concepts où c’est moi qui enseigne, mais dans triangles, quadrilatères, y a beaucoup de parties où c’est, euh, j’amène l’élève à découvrir justement les propriétés, euh, ou les caractéristiques des triangles, quadrilatères. Euh, c’est ça, différentes activités de manipulation, beaucoup de manipulation surtout. »

Pour réussir une leçon, l’enseignant privilégie deux principes pédagogiques. Le premier principe est l’implication de l’élève dans ses apprentissages, c’est-à-dire qu’il doit être actif de manière à ce que cette action garantisse une meilleure rétention des apprentissages. Le second principe est celui de la rétroaction que l’enseignant doit faire après une activité. Il avoue ne pas toujours respecter ce second principe faute de temps, mais demeure convaincu du bienfait de cette rétroaction en particulier pour les activités de découverte.

> « Ce que je fais pas toujours, mais dans cette partie là, étant donné que c'est beaucoup de manipulations, pis que l'élève est amené à découvrir des choses par lui-même. Aussi, il faut s'assurer à la fin que l'élève a compris le bon concept ou n'a pas mal interprété l'information qu'il a trouvée. »

4.2.2.1.4 Niveau 0 Actualisation en classe de trois leçons

Voici une description sommaire du contenu de chacune des leçons filmées.

Leçon 1 : a) Théorie exposée : définition du triangle, classification des triangles selon les côtés et les angles, énoncé de la somme des mesures des angles intérieurs du triangle (retour), énoncé selon lequel les angles opposés aux côtés congrus sont congrus dans un triangle isocèle, énoncé selon lequel chaque angle du triangle équilatéral mesure 60º, énoncé selon lequel dans un triangle rectangle isocèle, la mesure de chacun des deux autres angles que l'angle droit est de 45º; b) Remise d'une feuille sur les constructions de triangles à faire en devoir.
Leçon 2 : a) Retour sur le devoir donné à la leçon 1; b) Activité de découverte à l'aide de pailles coupées en différentes longueurs pour faire découvrir l'inégalité triangulaire.
Leçon 3 : a) Retour sur un devoir (problème du type *Justifier*); b) Activité de découverte à l'aide de figures de quadrilatères découpées dans des papiers de couleurs variées pour établir une classification des quadrilatères.

L'enseignant débute la leçon 1 en questionnant les élèves sur ce qui définit un triangle. Diverses réponses sont formulées telles que par exemple « Une figure qui a trois côtés. », « Il y a trois sommets, pas de courbe. », etc. L'enseignant statue sur la définition non hiérarchique suivante : un triangle est un polygone qui possède trois côtés et trois sommets. Il poursuit la leçon par une représentation au tableau de figures de triangles dont certaines sont codées. Les marques de codage servent principalement à l'identification de l'angle droit et à la congruence des angles et des côtés pour les triangles isocèle et équilatéral. Les triangles présentés sont les suivants : acutangle, rectangle, obtusangle, isoangle, équiangle, isocèle, équilatéral et scalène. Ils sont regroupés dans un tableau formé de trois colonnes où chacune d'elles est identifiée par les rubriques suivantes : *Caractéristiques, Nom*, *Illustration.* À titre d'exemple, au triangle acutangle apparaît sous la colonne *Caractéristiques* l'expression *trois angles* *aigus*, sous la colonne *Nom* l'expression *triangle acutangle* et sous *Illustration* la figure d'un triangle dont les angles semblent aigus.

La leçon 1 donne lieu à l'instauration de deux procédés pour la reconnaissance des figures de triangles : l'observation générale des figures et la prise en compte des marques de codage. Par exemple, l'enseignant emploie des expressions telles que « On voit que ce sont tous des angles aigus. » ou « Les trois côtés ont pas l'air égaux. » pour discuter des figures d'un triangle acutangle et d'un triangle scalène tracées au tableau. Mais du coup, il insiste aussi sur l'utilisation de signes conventionnels pour le codage de l'angle droit et la congruence des angles et des côtés pour les autres figures. De plus, il met en garde ses élèves au sujet des positions typiques des figures, c'est-à-dire qu'il vaut mieux se fier aux caractéristiques des figures plutôt qu'à leurs positions ou pouvoir les identifier sans égard à leurs positions dans le plan. Pour exemplifier cette idée, l'enseignant dessine deux figures d'un triangle rectangle dont l'angle droit est codé, mais selon deux positions différentes; une première position où les côtés de l'angle droit sont respectivement placés à l'horizontale et à la verticale et une autre position où la base opposée à l'angle droit est tracée à l'horizontale. Ces différents procédés oscillent entre GI et vers GII. C'est encore le cas dans l'exemple suivant où un retour au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle incite l'enseignant à préciser, à nouveau, un contrat de lecture des figures géométriques. L'enseignant introduit dans le même extrait le recours à la mesure à partir d'instruments (GI) ainsi que l'utilisation des propriétés sans égard à l'échelle des figures (vers GII).

> « En géométrie, souvent, les images ne sont pas faites à l'échelle. Donc, euh, si dans un problème on te dit mesure l'angle avec ton rapporteur, ben, tu vas vraiment le mesurer. Sinon, quand on te demande de trouver les informations, habituellement tu vas devoir te servir justement des caractéristiques des triangles et des différentes propriétés qu'on va voir, pour être capable de trouver les mesures qui manquent. Donc, euh, rarement, on va te demander d'utiliser ta règle et ton rapporteur d'angles pour résoudre un problème en géométrie, pour trouver des mesures. »

La leçon 1 se termine par la remise d'une feuille sur la construction de triangles en guise de devoir même si ce sujet n'a pas été abordé en classe.[63] Nous pourrions dire que le devoir a ici une fonction prospective dans la mesure où l'enseignant cherche à connaître les moyens par lesquels les élèves résoudront les problèmes de construction.

La leçon 2 commence par la correction du devoir de la leçon 1. Essentiellement, le devoir comprend trois problèmes. Le premier problème consiste à construire deux triangles à partir de deux mêmes mesures d'angles (70º et 35º) et à répondre à trois questions associées à ces constructions. Nous y reviendrons. Le second problème, comprenant quatre items, demande pour chacun de justifier si un triangle peut être construit à partir de contraintes relatives aux angles ou aux côtés. Par exemple, est-il possible de construire un triangle avec les données suivantes : 180º, 6 cm, 0º? Le troisième problème demande de construire un triangle dont un côté mesure 6 cm compris entre des angles de 40º et 25º, de trouver et justifier la mesure du troisième angle, de vérifier la construction à l'aide d'un rapporteur d'angles. Les problèmes de construction au rapporteur et à la règle graduée positionnent la leçon en GI.

Pour le premier des trois problèmes, trois questions sont posées. La question a) demande de trouver la mesure du troisième angle et de la justifier. Les questions b) et c) sont plus ambigües. La question b) demande d'expliquer si les deux triangles construits sont *identiques*. La question c) demande de se prononcer si connaissant seulement deux mesures d'angles il est possible de construire un *triangle unique*? Les expressions *triangles identiques* et *triangle unique* sont problématiques. D'une part, il n'est pas clair que l'expression *triangles identiques* fasse référence ici aux cas de congruence des triangles et, d'autre part, l'expression *triangle unique* n'a pas d'écho précis dans la théorie géométrique.

En fait, la correction du devoir débute par la construction au tableau de deux triangles à partir des deux mêmes mesures d'angles fournies (70º, 35º) et dont les mesures de côtés sont choisies légèrement différentes (18 cm, 30 cm, 31 cm ; 11 cm, 27

[63] De toutes les leçons filmées, c'est la seule où nous avons observé cette utilisation du devoir.

cm, 28 cm) à l'aide de la règle et du rapporteur d'angles. À partir de ces constructions, l'enseignant ajoute :

> « Donc, à l'œil, c'est sûr quand vous regardez de votre place, vous devez voir une image qui semble pareille, bien qu'elle soit tournée. Mais si on mesure, on voit que c'est pas exactement les mêmes mesures. Est-ce que ça se peut que t'aies fait deux fois le même triangle? Oui. Donc, si t'as décidé de tracer un segment, par exemple de 15 cm sur ta feuille, pis que t'as fait un autre 15 cm pour l'autre triangle, effectivement, tu peux te retrouver avec des triangles identiques. Mais moi, au tableau ce que j'ai, ça se ressemble, c'est très près, mais ils sont pas identiques. »

À la suite de ce commentaire, un élève ajoute :

> « Moi, j'en ai fait deux différents. J'ai dit que, euh, ils seraient identiques dans les angles parce qu'un triangle ça fait tout le temps 180º, alors, ce serait tout le temps les mêmes angles, sauf qu'ils pourraient être plus grands ou plus petits ou encore euh, ben, de d'autres sens. »

L'intervention de cet élève est intéressante dans la mesure où elle tend vers une certaine généralisation qui dépasse le cadre de la production stricte des deux triangles tracés. Même si l'enseignant acquiesce aux propos de l'élève, la mise en relation entre les angles et les côtés n'est pas retenue et la correction du premier problème se poursuit sans qu'il soit possible de savoir les conditions permettant de déterminer que deux triangles sont *identiques*. À la question c) l'enseignant demande :

> « Un triangle unique, qu'est-ce que ça veut dire? Oui, juste un qui existe…Ici, si on parle d'un triangle unique, on va parler d'un triangle unique au niveau des angles au niveau des côtés aussi. »

C'est sur ce commentaire que se termine la correction du premier problème. Il n'est pas clair si ce premier problème, par l'entremise de deux triangles construits à la règle et au rapporteur, visait à ouvrir une brèche vers la théorie des cas de congruence ou de similitude des triangles ou s'il s'agit simplement d'une coïncidence. Néanmoins, dans le cadre de cette leçon, l'exemple des deux triangles construits n'a pas été suffisant ou suffisamment exploité auprès des élèves pour leur permettre d'acquérir les éléments théoriques nécessaires à la distinction de triangles congrus, semblables ou différents. Toutefois, nous pourrions dire que l'enseignant accorde une importance à la mesure comme mode de validation subordonnant l'observation stricte des figures, ici les deux triangles construits, mais qui maintient sa leçon en GI.

Le deuxième problème qui demande de se prononcer sur l'existence de triangles en fonction de contraintes fait appel soit au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle soit à la propriété de l'inégalité triangulaire. Or, le théorème est connu des élèves, mais la propriété de l'inégalité triangulaire ne l'est pas ; elle sera précisément l'objet de l'activité de découverte proposée après la correction du devoir. Malgré leur méconnaissance de la propriété, des élèves ont fait preuve d'imagination en fournissant des arguments basés sur une visualisation de segments superposés afin d'évaluer si, par exemple, un triangle avec des côtés de 9 cm, 5 cm et 24 cm pouvait être construit.

Pour expliquer le deuxième problème dont les contraintes de construction d'un triangle présentées en GI sont de 180º, 6 cm et 0º, l'enseignant utilise une figure de deux segments mis bout à bout tracés par-dessus un troisième segment et au-dessus desquels segments est tracé un arc de cercle noté 180º. De plus, il utilise une définition du triangle pour appuyer ses dires (vers GII) qui s'avère insatisfaisante, selon lui :

> « On pourrait dire dans un cas comme ça qu'on a un triangle, mais qui est aplati. C'est sûr que c'est moins intéressant, mais dans le fond, quand on regarde la définition du triangle, c'est un polygone fermé. Ben, une figure fermée, c'est un polygone à trois côtés, trois sommets. Mais dans la définition, y a rien qui nous dit que les côtés, euh, ne peuvent pas être un par-dessus l'autre[64]. C'est sûr quand je regarde ça, on voit une ligne. On voit pas de triangles là-dedans. Mais, euh, si je considère mes deux autres côtés *(fait le geste avec ses avant-bras d'abaisser les deux autres côtés)* sont aplatis. Donc, c'est comme si j'avais un triangle et j'abaisse les côtés jusqu'à temps qu'y arrivent par-dessus le troisième côté. Ça nous fait comme un triangle complètement aplati. »

---

[64] La définition du triangle en tant que polygone à trois côtés inclue celle du polygone. Une définition du polygone consiste à dire qu'il s'agit d'une ligne brisée fermée. Et rétroactivement, une définition d'une ligne brisée fermée est : une ligne formée de plusieurs segments rectilignes de directions différentes et tels que l'extrémité de chacun d'eux soit l'origine du suivant. L'origine du premier segment et l'extrémité du dernier, qui restent libres, sont les extrémités de la ligne brisée, et les divers segments qui la composent en sont les côtés. Si les extrémités coïncident la ligne est dite fermée. Selon cette dernière définition, l'idée de directions différentes exclurait le triangle aplati dans la mesure où des segments ne pourraient pas être dans la même direction horizontale. Source : Manuel Cours de géométrie par une Réunion de Professeurs, aux Éditions Ligel : Paris, 1964.

La correction du devoir se termine par le troisième problème qui demande de construire un triangle dont un côté mesure 6 cm compris entre des angles de 40º et 25º, de trouver la valeur du troisième angle et la vérifier au rapporteur. L'enseignant exécute au tableau le triangle demandé avec la règle et le rapporteur. Il profite de ce problème pour compléter ses attentes relatives à la justification. Pendant la correction du premier problème où il s'agissait aussi de construire des triangles, trouver une troisième mesure d'angle et la justifier, l'enseignant avait affirmé ce qui suit :

> « Mais on te demandait de justifier aussi. Donc, justifier, ben, ça peut être justifier à partir de calculs. Mais si on voulait, euh, justifier en mots, qu'est-ce qu'on pourrait dire pour expliquer que notre troisième angle mesure 75º ? »

Par cet extrait, nous observons que la technique calculatoire pour l'obtention du résultat ainsi que la technologie la légitimant sont toutes les deux exprimées par le mot justifier. L'enseignant ajoute en corrigeant le troisième problème :

> « Quand je justifie, je m'assure que ce soit compréhensible. C'est sûr qu'à la place du mot triangle, je peux dessiner un petit triangle. Ça, ça me dérange pas, mais il faut que ma phrase soit complète. Donc, parce que dans un triangle la somme des mesures des angles est toujours de 180º. »

La correction se termine par une application du rapporteur sur un angle de la figure dont on cherchait la mesure. Cette action de validation à l'aide du rapporteur (GI) est subséquente à la validation théorique à partir du théorème de la somme des angles intérieurs du triangle (GII). Il y a une mise en parallèle des validations théorique et instrumentée où le maintien du recours à la validation instrumentée après celui de la validation théorique nous fait penser ici à la métaphore des petites roues attachées de chaque côté d'une bicyclette pour la maintenir en équilibre.

La leçon 2 se poursuit par l'activité de découverte de la propriété de l'inégalité triangulaire. Les élèves reçoivent chacun une enveloppe contenant sept pailles : 2 de 5 cm, 1 de 7 cm, 1 de 10 cm, 1 de 13 cm, 1 de 15 cm et 1 de 20 cm. En manipulant ces pailles, les élèves doivent trouver tous les cas de triangles qu'il soit possible de former, indiquer ceux qui ne le sont pas, et trouver une façon plus générale d'expliquer ce qui se produit au sujet des côtés pour tous les cas observés.

L'activité de découverte respecte le principe de l'élève actif émis au niveau 1 du projet de leçon, mais elle positionne les élèves en GI. Les élèves font différents essais. Certains n'utilisent que les pailles, d'autres emploient la règle graduée. D'autres encore ne font pas tous les essais requis. Par exemple, un élève affirme : « J'ai pas essayé ceux qui marchaient pas. Tous ceux que j'ai pris y marchaient. ». En réponse à cette situation, l'enseignant ajoute : « Ceux qui ont trouvé seulement les cas possibles, je vous suggère d'écrire sur votre feuille quelques cas où ça ne fonctionne pas. ». La leçon 2 se termine avec cette activité pour laquelle aucun retour sur la propriété de l'inégalité triangulaire n'a pu être fait faute de temps.

L'enseignant amorce la leçon 3 par la correction d'un problème du type *Justifier* antérieurement donné en devoir et il la poursuit à l'aide d'une activité de découverte de propriétés des quadrilatères. Nous commençons par le devoir.

Le problème du devoir consiste d'abord à trouver la valeur d'un angle à partir d'informations fournies par une figure composée de sous figures de triangles. Ensuite, il s'agit d'expliquer si le résultat numérique obtenu est plausible. Voici le problème.

Problème sur la somme des mesures des angles intérieurs du triangle

Sachant que AF est une bissectrice de l'angle BAE, trouve l'angle X. Ton résultat est-il plausible?

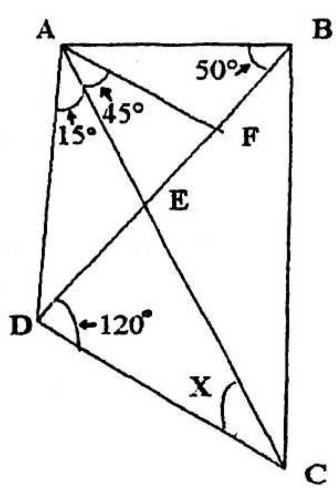


Figure 27 Problème - classe 2 Justifier (en classe)

Mentionnons que nous avons utilisé ce problème pour dégager des conceptions d'élèves. Nous présentons ici quelques éléments de son analyse a priori pour rendre la suite des propos compréhensible. Nous réservons l'analyse plus complète du problème à la section traitant des conceptions d'élèves.

La figure du problème risque de provoquer des difficultés de lecture aux élèves, par exemple une valeur d'angle de 120º est associée à un angle qui paraît aigu et deux angles adjacents de 45º chacun semblent former un angle aigu aussi. Ces exemples sont contraires aux figures employées pour classer des triangles (leçon 1) dont celles des triangles acutangle et obtusangle où la reconnaissance des angles aigu et obtus était basée sur la perception uniquement.

D'entrée de jeu, la correction du devoir offre l'occasion de discuter à nouveau du traitement des figures de façon à tendre vers GII tout en maintenant la possibilité de recourir à la mesure (GI). L'enseignant affirme ce qui suit :

> « N'oubliez pas, dans une question comme ça, quand on te propose un dessin, euh, je vous l'ai mentionné en géométrie, c'est rare qu'on va vous donner des dessins à l'échelle. Donc, ici, même si c'est indiqué 120º, 45º, c'est pas nécessairement les vraies mesures. Donc, quand on te demande de trouver une mesure d'angle, c'est toujours avec des démarches, des calculs. Donc, jamais avec votre rapporteur d'angles, sauf si c'est écrit vraiment dans la question mesure l'angle avec ton rapporteur. Donc, si y en a qui l'ont fait avec le rapporteur d'angles, probablement que vous arriverez pas aux mêmes résultats que les autres, parce que, ici, y faut vraiment déterminer la mesure à partir d'infos fournies sur l'image…Et, il y a les informations sur le dessin, mais il y a aussi des informations en haut qu'on avait besoin pour être capable de répondre à la question. »

La correction du devoir se poursuit et l'enseignant indique au tableau des calculs pour lesquels la plupart des technologies sont formulées oralement. La question de la plausibilité du résultat numérique obtenu soulève des interrogations chez des élèves, en particulier lorsque l'enseignant demande :

> « Qu'est-ce que ça veut dire plausible? Possible. Donc, est-ce que ce résultat là ? Dans le fond, quand je regarde mon image, là, j'ai trouvé 20º, on te demande si c'est possible, si ça a du sens, dans le fond, quand on se fie au reste de l'image. »

Les mots employés par l'enseignant dans l'extrait précédent sont pris au premier degré par des élèves. En réponse à la question de la plausibilité du résultat, un élève répond ce qui suit : « Non, parce que 45 + 45 ça donne 90, pis 90, c'est un angle droit. Sur le dessin, c'est un angle plus aigu. ».

L'enseignant veut parler des valeurs numériques supportées par la figure sans égard au fait que la figure ne soit pas à l'échelle. Mais l'expression qu'il emploie, c'est-à-dire celle de se fier au reste de l'image jumelée au fait que la figure comporte des difficultés de lecture, notamment une valeur d'angle de 120º associée à un angle qui paraît aigu ou deux angles adjacents chacun de 45º semblant former un angle aigu, gênent les élèves. À nouveau, l'enseignant ressent le besoin de préciser le contrat de lecture des figures à l'intérieur duquel il nuance entre la figure et les valeurs numériques supportées par celle-ci.

> « Ok, là, par exemple, comme j'ai dit tout à l'heure que les dessins ne sont pas faits à l'échelle, nécessairement. Ici, donc, l'angle a l'air, euh, semble être, euh, plus petit, surtout sur votre dessin là, il semble vraiment être plus petit que 90. Mais si on t'indique comme mesure 45, euh 90, euh, on va se fier aux chiffres qui sont là. Je pense qu'il y a quelques personnes qui ont répondu comme toi que c'était pas possible parce que, ici, ça semble pas un angle de 90. Euh, c'est vrai que sur votre feuille, ça vraiment l'air d'un angle aigu. Donc, euh, à la limite, j'pourrais dire, ok, c'est vrai que sur le dessin, c'est pas du tout un angle de 90, mais en fait, ce que je veux savoir ou si c'est possible ou non, c'est plus par rapport aux valeurs qui sont placées sur le dessin, pas nécessairement à l'allure du dessin. »

L'enseignant poursuit sa leçon 3 par une activité de découverte de propriétés des quadrilatères. D'abord, il demande aux élèves définir le mot *quadrilatère*. À partir des informations reçues, l'enseignant dessine au tableau la figure d'un quadrilatère pour laquelle il ajoute : « Est-ce que j'ai des angles aigus dans ce quadrilatère là? ». Les élèves répondent « oui » uniquement par observation de la figure, c'est-à-dire en se fiant à l'allure du dessin, ce qui était prohibé quelques instants auparavant pour la résolution du problème *Justifier*. L'enseignant demande cette fois de donner les éléments à partir desquels effectuer une classification des quadrilatères. Les éléments retenus sont : les angles droits, les angles congrus, le parallélisme et la congruence des côtés. Ensuite, les élèves reçoivent chacun une enveloppe contenant cinq[65] quadrilatères découpés dans du papier de couleurs différentes. Pour chacun d'eux, ils doivent déterminer l'existence d'angles droits, d'angles congrus, de côtés congrus et de côtés parallèles. Pendant l'activité, la plupart des élèves répondent en observant chacun des quadrilatères, alors que quelques élèves se servent d'une équerre, d'un rapporteur ou d'un coin de feuille. L'activité de découverte sollicite chez les élèves des conduites relevant de GI.

Le retour sur l'activité effectué par l'enseignant maintient sa leçon en GI. Ainsi, par observation des papiers représentant les quadrilatères, des propriétés ainsi que la présence d'angles aigus ou obtus sont notés. L'enseignant utilise des formulations qui renforcent le recours à l'observation comme mode de validation, par exemple pour le papier représentant un losange, il dit : « Quand on regarde les deux autres angles, on le voit bien que les angles sont obtus. ». L'observation des papiers comme mode de validation des propriétés du trapèze, du parallélogramme et du losange ne semble pas troubler les élèves jusqu'au moment où l'enseignant aborde le parallélisme des côtés du rectangle. Un élève ajoute : « Mais y semblait qu'un parallèle, c'est genre croche. ». L'enseignant doit à nouveau composer avec une lecture des figures que font des élèves à partir des papiers non codés qui s'inscrit en GI et les éléments théoriques vers GII qu'il souhaite faire dégager de cette lecture.

> « Ben, c'est ça justement l'idée qu'on a. Si je vous avais demandé, sans vous montrer le dessin, dessinez-moi un parallélogramme, probablement que tout le monde vous m'auriez dessiné quelque chose qui ressemble à ça. On a vraiment l'idée qu'un parallélogramme faut que ça soit croche, faut que ça soit penché…C'est pour ça que y faut un peu, euh, défaire ça, dans le sens de. Y faut vraiment travailler à reconnaître les caractéristiques. Donc, pour que ce soit un parallélogramme, il faut les côtés parallèles deux par deux. Pis, à partir du moment que tu as cette caractéristique là, tu peux dire que c'est un parallélogramme. Donc, c'est pour ça, qu'effectivement, le losange, on peut aussi l'appeler un parallélogramme, le rectangle, on peut aussi l'appeler un parallélogramme. »

[65] Les quadrilatères représentés sont le trapèze, le parallélogramme, le losange, le rectangle et le carré pour lesquels aucun codage n'est proposé.

L'enseignant termine la leçon 3 par l'écriture d'une définition non hiérarchique du quadrilatère : un polygone composé de quatre côtés et quatre sommets. Il produit aussi un tableau récapitulatif en trois colonnes pour les quadrilatères où chacune d'elles est titrée *Nom, Caractéristiques*, *Illustration,* mais sans avoir le temps de le compléter.

4.2.2.1.5 Résumé des niveaux 3 à 0 de l'activité de l'enseignant 2

Les intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1) sont principalement orientées vers GI-II et un peu vers GII. Nous n'avons pas relevé d'intentions a priori identifiables en GI. En effet, l'enseignant définit la géométrie plane en première secondaire par l'étude des droites, des angles, des triangles, des quadrilatères et plus généralement, des objets géométriques représentés par des figures fermées en deux dimensions, convexes ou concaves. L'énumération des notions ne nous renseigne pas sur le traitement (GI ou vers GII) qu'il entend faire de celles-ci en classe. Il en est de même pour ses intentions concernant la manipulation, la visualisation et les activités de découverte. Par ailleurs, certaines de ses intentions tendent vers GII lorsque l'enseignant émet le souhait que ses élèves reconnaissent les propriétés des objets géométriques à l'étude.

Les problèmes offerts aux élèves relèvent des types *Rechercher une mesure*, *Reconnaître*, *Construire* et *Justifier*. Ils sont susceptibles d'être en GI, de tendre vers GII ou d'être classés selon GI-II. Par exemple, l'enseignant choisit des problèmes de construction se résolvant à la règle graduée et au rapporteur d'angles (GI). Il propose des problèmes de reconnaissance favorisant la mise en relation de propriétés, ce qui tend vers GII. Il offre aussi des problèmes de justification susceptibles d'être résolus selon l'un ou l'autre des paradigmes (GI-II). Les éléments à partir desquels l'enseignant fait ses choix de problèmes ne semblent pas s'inscrire clairement dans une perspective paradigmatique. Par ses évaluations des problèmes du questionnaire, nous avons découvert qu'il juge un problème intéressant s'il fait appel à diverses notions, s'il favorise la réflexion de l'élève ou s'il est traduit dans un contexte réaliste. Un contexte réaliste correspond à une mise en situation faisant référence à des aspects du quotidien; l'enseignant a donné l'exemple du calcul d'aire d'un champ de forme rectangulaire. Or, le problème 2 du questionnaire présentait une mise en situation où il fallait recouvrir un terrain de gravier. L'enseignant a suggéré de le modifier afin de rendre le contexte plus réaliste, mais il n'a pas fait de commentaire sur les figures sans indication verbale ou symbolique permettant de les identifier. D'ailleurs, ce sont les leçons filmées qui ont permis de circonscrire la notion de visualisation énoncée au niveau 3 et qui concerne ici l'idée d'un support visuel y compris celui des figures.

Au cours des leçons, l'enseignant a émis des propositions de lecture des figures par ce qu'il a dit, ce qu'il a fait et par les problèmes qu'il a donnés et traités en classe. Certaines étaient spécifiques à GI et d'autres à GII. Par exemple, l'information pouvait relever d'une observation globale des figures ou de leurs marques de codage. Des figures étaient à l'échelle et d'autres non. Dans le premier cas, il fallait se fier aux valeurs numériques supportées par les figures ou bien utiliser un instrument pour les mesurer. De plus, l'enseignant a mis en garde ses élèves au sujet des figures typiques, c'est-à-dire celles que l'on reconnaît ou ne reconnaît plus lorsqu'elles sont placées dans le plan selon une position donnée, ce qui suggère une certaine distanciation par rapport aux figures observées.

Ajoutons qu'au cours des leçons filmées, nous avons observé l'intégration de la manipulation d'objets physiques par des *activités de découverte*. Pour la première de ces activités, l'utilisation de pailles coupées en différentes longueurs devait permettre aux élèves de découvrir la propriété de l'inégalité triangulaire, ce qui n'a pas été concluant pour plusieurs élèves qui ont fait quelques essais sans utiliser toutes les pailles. Pour la seconde activité, des papiers de différentes couleurs ont servi de support visuel pour l'énumération de propriétés de quadrilatères. Les élèves se sont limités à observer les papiers ou à effectuer quelques mesures. Dans ces activités, la manipulation des objets physiques a positionné les actions des élèves en GI, alors que les objectifs des activités visaient l'apprentissage de propriétés de GII. La visée des leçons préparées tendait vers GII, alors que leurs moyens au niveau 0 relevaient de GI. Aussi, les leçons ont mises en évidence le côtoiement des modes de validation perceptif, instrumenté et théorique pour une situation ou plusieurs. Par exemple, l'enseignant a mesuré un angle au rapporteur (GI) après avoir utilisé le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle pour s'assurer du résultat (GII). Notons que les calculs et les mots ont été acceptés sous le terme justification et que les technologies furent surtout formulées à l'oral. Dans cet autre exemple (leçon 3), l'enseignant a favorisé l'observation de papiers représentant des quadrilatères (GI) pour en énoncer des propriétés (GII). Voyons des conceptions d'élèves.

4.2.2.2 Analyse de conceptions des élèves de la classe 2

Nous présentons les conceptions dégagées de problèmes des types *Rechercher une mesure*, *Justifier, Reconnaître* et *Construire*. Les entretiens furent menés auprès des élèves 1, 2, 3 et 4.

4.2.2.2.1 Conceptions des élèves et problèmes Rechercher une mesure

Nous avons retenu les problèmes[66] suivants pour lesquels il faut calculer le périmètre d'une figure de triangle ou de quadrilatère. Les problèmes du type *Rechercher une mesure* sont dominants (46%) dans le projet de construction. De plus, le calcul du périmètre et de l'aire a été nommé par l'enseignant au niveau 3 de son activité.

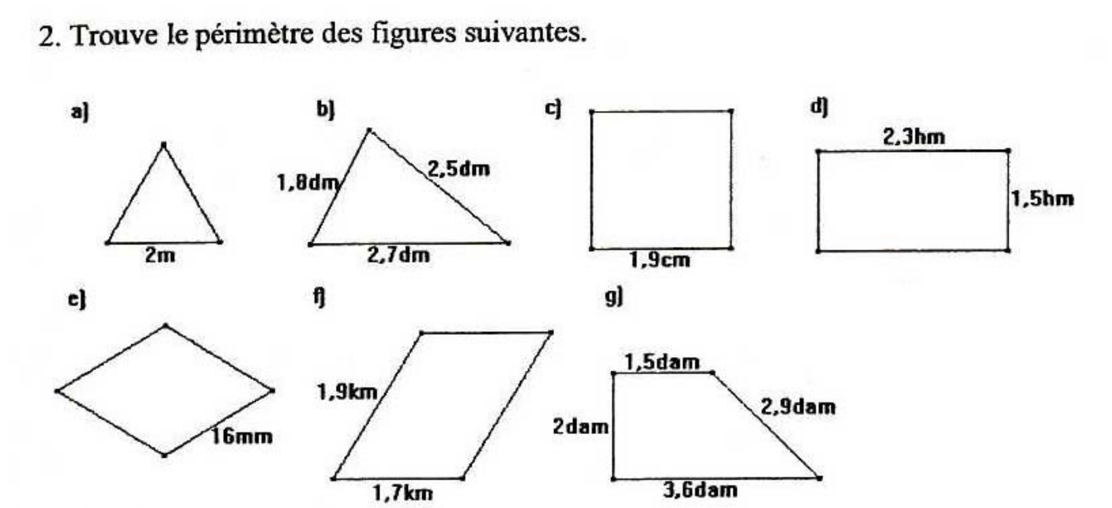


Figure 28 Problèmes - classe 2 Rechercher une mesure

[66] Ces problèmes proviennent du répertoire personnel de l'enseignant.

4.2.2.2.1.1 Analyse a priori des problèmes

Une consigne générale demande de trouver le périmètre des figures. Les figures ont en commun de ne pas être décrites en mots, de n'avoir aucun signe conventionnel de codage pour l'identification d'angles droits ou pour la congruence d'angles et de côtés, et de ne pas avoir leurs sommets identifiés par des lettres. Notons que l'absence de mots et de marques de codage sur les figures relève d'un traitement en GI.

Par ailleurs, seulement deux figures (b et g) présentent des valeurs numériques pour leurs côtés respectifs permettant d'en calculer le périmètre. Du point de vue des élèves, cette situation ne devrait pas être un obstacle. En effet, les élèves ont l'habitude de croire que si une question est posée, c'est qu'il doit bien avoir moyen d'y répondre. Nous reviendrons sur cet effet de contrat didactique. Ajoutons que les angles droits sont à l'échelle sur les figures c) d) et g). De plus, pour toutes les figures, il est possible de vérifier la congruence des côtés avec un instrument, par exemple un gabarit, une règle, un compas. Notons que la valeur numérique indiquée en mm sur le côté de la figure e) correspond à la mesure et celle indiquée en cm sur la figure c) correspond presque, alors que les valeurs numériques des autres figures ne correspondent pas.

Tel que dit précédemment, les figures des problèmes b) et g) contiennent toutes les valeurs numériques nécessaires au calcul du périmètre. Pour ces figures, la technique de résolution consiste à additionner ces valeurs. La technologie réfère essentiellement à la définition du périmètre d'un polygone. Par contre, pour les figures a) c) d) e) et f), seulement une ou deux valeurs numériques sont données; calculer le périmètre implique de rechercher les valeurs manquantes. Une conduite principale relevant du contrat didactique est ici envisagée, c'est-à-dire que si une seule valeur numérique est donnée pour un des côtés du polygone, alors c'est qu'elle se répète aux autres côtés semblant de même longueur. De plus, il est possible que la mise en œuvre de cette conduite sollicite chez des élèves une référence à l'image du concept, c'est-à-dire qu'ils déterminent les valeurs numériques manquantes parce que la figure observée ressemble à un triangle équilatéral, un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme. La vérification de la congruence des côtés pourrait aussi se faire à l'aide d'un instrument de mesure (gabarit, règle, compas). Voyons ce qu'ont fait les élèves.

4.2.2.2.1.2 Conceptions des élèves

Au cours des entretiens, les élèves 1 et 3 ont révélé le contrat didactique auquel nous faisions allusion dans l'analyse a priori, par exemple pour la figure a) l'élève 1 a dit : « Mais vu qu'on me donnait juste un côté, je me suis dit que ça devait être un triangle équilatéral, sinon j'aurais pas pu résoudre le problème. ». De fait, l'issue pour le résoudre est de conclure qu'il s'agit d'un triangle équilatéral et ainsi faire la somme des mesures des trois côtés. L'élève 3 a tenu des propos similaires à ceux de l'élève 1 pour les figures a) et c) :

> « Pis, le prof, y nous a dit que s'il y avait juste une mesure, un triangle, ça voulait dire que c'étaient les deux autres, parce que c'était un triangle équilatéral. Est-ce que vous me suivez?…Là, pour le c), ben, c'est le même principe que pour le a). Si y a juste une mesure, ça va être les mêmes mesures pour toutes. »

Par ailleurs, étant donné l'absence de description verbale et marques de codage des figures, nous n'avons pas été surprise de relever dans les propos des élèves 4 et 2 des références à la perception globale des figures et à la mesure. Par exemple, lorsque nous avons demandé à l'élève 4 comment il avait su que la figure c) était un carré, celui-ci a répondu : « Euh, bonne question! Euh, simplement à cause de sa forme. ». Lorsque nous avons réitéré notre question pour les figures d) et e), l'élève 4 a dit pour le rectangle « Hum, y était comme plus rabaissé que le carré. C'est pas mal ça, j'dirais. » et pour le losange « Euh, ben, moi, je me suis donné comme truc que un losange ça ressemble à un carré, mais penché, mais que c'est pas exactement un carré, alors moi, c'est un peu mon truc là. ».

L'élève 2 a utilisé la mesure pour identifier le triangle équilatéral, le carré et le rectangle. Par exemple, pour le triangle équilatéral, il a affirmé :

> « Ben, j'ai pris ma règle et j'ai vu, même si on s'en doute que ça, c'est pas deux mètres là, on le sait, c'est à une plus petite échelle. Ben, j'ai vu que chaque côté mesurait la même chose, donc, euh, j'ai tout de suite su que c'était un triangle équilatéral. »

Rappelons que dans l'*Appréhension perceptive globale d'une figure,* l'élève voit globalement la figure et sa structure de contrôle correspond à la cohérence qu'il établit entre la figure et ce qu'il en perçoit ou en interprète. Dans la conception *Mesure d'une* *figure*, l'élève mesure avec un outil un ou des éléments de la figure et sa structure de contrôle correspond à la validation du résultat de mesure établit par une lecture juste ou approximative de l'outil. Les figures a) c) d) e) et f) dépourvues d'indications verbales et symboliques n'offrent pas vraiment d'autres options pour leur reconnaissance que la perception globale ou la mesure, sans compter l'effet de contrat didactique exprimé par les élèves 1 et 3. En effet, la présentation des figures n'a pas été un frein à la résolution des problèmes, par exemple dans l'extrait suivant l'élève 3 s'accommode de la figure du rectangle nonobstant l'absence de marques de codage des angles droits :

> « Ben, parce que c'est un rectangle, facilement, y a, t'as les deux paires de côtés parallèles, pis, euh, ben, t'as des angles droits. Normalement, pour être vraiment sûr, faudrait qu'il y ait des petits carrés dans les angles. Quand ça se voit comme ça, on, moi, j'ai tout de suite vu que c'était un rectangle ici. »

Pour l'ensemble des cahiers, nous en avons compté vingt-trois présentant des résolutions; résultats ou traces de calculs. Les élèves ont mis en œuvre une conception de type *Calculatoire*. Ils ont fait des calculs mentalement ou par écrit (R). Le système de représentation est surtout numérique et symbolique (L), par exemple des élèves ont fourni des unités de mesure (m, cm, etc.) avec leurs résultats numériques. La structure de contrôle est double. Elle est théorique ($\sum_1$) puisqu'elle renvoie à la définition du périmètre d'un polygone. Elle peut référer à des définitions, des propriétés des côtés des triangles et quadrilatères. Elle est figurale ($\sum_2$) car les données numériques nécessaires aux calculs sont suggérées par la figure.

4.2.2.2.2 Conceptions des élèves et problème Justifier

Voici le problème[67] du type *Justifier* utilisé pour nos analyses. Nous y avons fait référence au niveau 0 de l'activité enseignante. Il a semblé pertinent de revenir sur sa résolution en entretiens, d'une part, en raison des commentaires d'élèves émis à la leçon 3 sur l'allure de la figure versus ses valeurs numériques et, d'autre part, en raison de l'idée de visualisation définie par l'enseignant comme la capacité à se servir des figures pour appuyer des explications.

Problème sur la somme des mesures des angles intérieurs du triangle

Sachant que AF est une bissectrice de l'angle BAE, trouve l'angle X. Ton résultat est-il plausible?

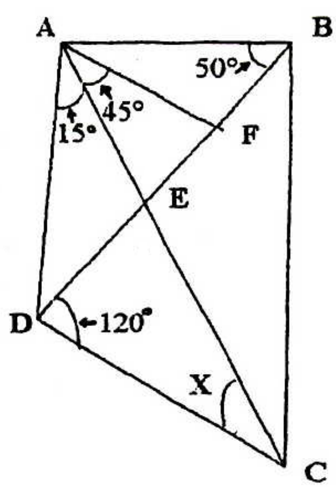


Figure 29 Problème - classe 2 Justifier

[67] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

4.2.2.2.2.1 Analyse a priori du problème

Le problème consiste à trouver une valeur d'angle et à déterminer si le résultat obtenu est plausible. Le problème a pour titre *Problème sur la somme des mesures des angles intérieurs du triangle*. N'eut été de l'obligation à se prononcer sur la plausibilité du résultat, nous aurions associé ce problème au type *Rechercher une mesure*.

Le problème comprend un texte et une figure. Le texte fait état d'une bissectrice AF d'un angle BAE et de la valeur de l'angle X à trouver (angle DCE) et évaluer la plausibilité. Le texte ne fournit pas d'informations à propos de l'alignement des points B, F, E et D et celui des points A, E et C. La figure représente un quadrilatère ABCD composé de sous figures de triangles. Des valeurs numériques sont données à différents angles. La lecture de valeurs numériques sur la figure peut laisser l'élève perplexe, par exemple la valeur 120º est associée à un angle (EDC) qui semble aigu sur la figure. De même, les deux angles adjacents de 45º obtenus par la bissectrice AF forment un angle de 90º (BAE) qui paraît aigu. De plus, l'angle ABC semble droit. Par ailleurs, la valeur de l'angle DAB correspond à 105º et celui-ci semble plus grand sur la figure que l'angle noté 120º.

Ajoutons que deux valeurs d'angles ne peuvent pas être théoriquement trouvées. Il s'agit des angles EBC et ECB. Dans ces cas, et puisque la nature a horreur du vide, il est possible que des élèves considèrent l'angle ABC droit et donnent à l'angle EBC une valeur de 40º en considérant l'angle adjacent ABE à 50º. Si tel était le cas, la valeur de l'angle ACB serait nulle dans le triangle ABC, ce qui entrerait en contradiction avec ce que donne à voir la figure. Il en serait de même si l'élève considérait le triangle EBC en calculant avec les valeurs de 40º et 140º pour les angles EBC et BEC.

Différentes procédures résolvent le problème, mais elles doivent toutes débuter par la prise en compte de la donnée du texte relative à la bissectrice. En voici trois :

Une première procédure comprend les techniques et technologies suivantes : 1) m∠BAF = 45º par définition de la bissectrice 2) dans le triangle BAE, m∠BEA = 180º– (2 x 45º) – 50º = 40º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle 3) dans le triangle DEC, m∠DEC = 40º par le théorème selon lequel des angles opposés par le sommet sont congrus et m∠DCE (angle X) = 180º – (120º + 40º) = 20º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle.

Une seconde procédure comprend les techniques et technologies suivantes : 1) m∠BAF = 45º par définition de la bissectrice 2) dans le triangle BAF, m∠BFA = 180º – 45º – 50 = 85º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle 3) dans le triangle AFE, m∠AFE = 180º – 85º = 95º par le théorème selon lequel des angles adjacents avec leurs côtés extérieurs en ligne droite sont supplémentaires et m∠FEA = 180º – 95º – 45º = 40º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle 4) dans le triangle DEC, technique identique à la première procédure.

Une troisième procédure comprend les techniques et technologies suivantes : 1) m∠BAF = 45º par définition de la bissectrice 2) dans le triangle DAB, m∠ADB = 180º – (15º + 45º + 45º) – 50º = 25º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle 3) dans le triangle ADC, m∠DCA (angle X) = 180º – (25º + 120º) – 15º = 20º par le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle.

La question de la plausibilité du résultat devrait prendre appui des technologies sous-jacentes aux techniques utilisées. C'est d'ailleurs pour cela que nous avons associé le problème au type *Justifier* (vers GII). Mais compte tenu de la figure, nous anticipons que des élèves emploient aussi des arguments de nature figurale pour discuter de la plausibilité du résultat.

4.2.2.2.2.2 Conceptions des élèves

Nous n'avons pas relevé de nouvelles conceptions. Essentiellement, les élèves[68] ont sollicité les conceptions *Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul*, *Calculatoire* et pour un cas d'élève (élève 28) *Mesure d'une figure*. À ces conceptions

[68] Vingt-cinq élèves des vingt-neuf de la classe ont fait ce problème.

s'est ajoutée, pour certains élèves, la conception *Appréhension perceptive globale d'une figure* pour juger de la plausibilité du résultat.

Pour la recherche de valeurs d'angles, quatorze élèves y compris les élèves 1, 2 et 4 ont utilisé la première procédure de résolution décrite dans l'analyse a priori. À partir de la valeur de l'angle BAF de 45º obtenue par définition de la bissectrice, ils ont trouvé des valeurs d'angles du triangle BAE puis celles du triangle DEC.

Neuf élèves y compris l'élève 3 ont utilisé la seconde procédure de résolution décrite dans l'analyse a priori. Toujours à partir de la valeur l'angle BAF de 45º obtenue par définition de la bissectrice, ils ont trouvé des valeurs d'angles des triangles ABF, AFE et ensuite du triangle DEC.

Un seul élève n'a pas développé sa procédure et a fourni les calculs suivants : 180 - 120 = 60 et 180 – 45 = 135.

L'élève 28 est le seul a avoir débuté sa procédure de résolution du problème en fournissant pour l'angle BAF une valeur de 30º. Elle s'obtient par une application du rapporteur sur la figure. Les traces montrent des calculs correspondant à la seconde procédure de résolution, c'est-à-dire des calculs d'angles des triangles ABF, AFE et DEC, en plus de calculs des angles du triangle AED.

En ce qui concerne la plausibilité du résultat, plus de la moitié des élèves (seize élèves) n'ont fourni aucun argument dans les cahiers. Parmi ceux-ci, dix élèves n'ont fait aucune mention à la plausibilité se contentant de fournir une valeur numérique pour l'angle X. Six autres élèves ont dit le résultat plausible sans expliquer pourquoi.

Neuf élèves ont déterminé la plausibilité du résultat : trois élèves le jugent non plausible, cinq élèves disent plausible et un élève le juge simultanément plausible et non plausible. Les arguments avancés par ces élèves reposent sur des calculs, par exemple l'élève 23 a écrit « Oui, selon le calcul que j'ai fait. » ou sur l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*.

La conception de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* dans le cadre de ce problème, et en fonction des difficultés de lecture relevées dans l'analyse a priori, a amené des élèves à dire non à la plausibilité du résultat et d'autres élèves à dire oui. Par exemple, l'élève 2 a affirmé ce qui suit pendant l'entretien :

> « Ben, au début, j'avais marqué non parce que je pensais. J'avais marqué non, car la forme n'est pas un triangle et les triangles à l'intérieur sont corrects, c'est confus. Ce que je voulais dire, c'est que ici (*montre l'angle EDC de 120º)*, on a, c'est marqué un angle de 120º, sauf que un angle de 120º c'est obtus, alors que celui-là *(montre le même angle)*, on le voit nettement qu'il est droit ou presque aigu donc, ça me portait à confusion des choses comme ça. Comme pareil pour, euh, l'angle BAE, qui dise que c'est un 90º, mais dans le fond, c'est un angle aigu, alors que 90º, on sait très bien que c'est un angle droit. Donc, c'est ça que j'essayais de dire, mais c'était pas très clair ma manière de l'écrire. Ensuite, euh, à la correction, ben, j'ai compris que, oui, mon résultat était plausible parce que, dans le fond, ce qu'on cherchait à savoir qui était plausible, c'est si la réponse avait de l'allure par rapport à des autres calculs. »

L'élève 3 a dit : « Ben, pourquoi ça serait plausible. Ben, moi, j'pense là que 20 c'est un angle aigu et ça (pointe l'angle identifié X), ça semble aigu. ». Quant à l'élève 1, il a mentionné que son résultat pouvait être ou non plausible, comme en témoigne l'extrait suivant :

> « Avec les informations qui m'ont été données, mon résultat est plausible, mais avec le dessin, il ne l'est pas. On dit que AF est une bissectrice de l'angle BAE et qu'un angle mesure 45º, alors l'autre aussi vu que c'est supposé être isométrique. Si on additionne 45º + 45º cela égale 90º, mais l'angle n'a pas du tout l'air d'avoir 90º, et c'est de même pour beaucoup d'autres. »

Les autres angles mentionnés par l'élève 1 sont les angles ECB, CEB et EBC du triangle EBC qui sont indiqués par des flèches sur sa figure et pour lesquels il a marqué respectivement les valeurs de 0º, 140º et 40º en considérant l'angle ABC droit.

L'élève 4 n'avait rien écrit dans son cahier au sujet de la plausibilité du résultat. Pendant l'entretien, il s'en est tenu à l'argument de l'exactitude des calculs effectués.

4.2.2.2.3 Conceptions des élèves et problèmes Reconnaître

Voici les problèmes[69] du type *Reconnaître* employés pour les entretiens. Les élèves devaient déterminer la valeur de vérité des énoncés sans nécessairement fournir d'arguments. Questionner les élèves était approprié pour connaître les arguments implicitement mis en œuvre et voir dans quelle mesure ils concernaient les propriétés des quadrilatères, sachant que l'emploi des propriétés par les élèves est un souhait de l'enseignant (niveau 3).

Vrai ou faux ?

a) Tous les parallélogrammes sont des quadrilatères.

b) Tous les quadrilatères sont des parallélogrammes.

c) Tous les carrés sont des parallélogrammes.

d) Tous les losanges sont des rectangles.

e) Tous les carrés sont des losanges.

f) Tous les trapèzes sont des parallélogrammes.

Figure 30 Problèmes - classe 2 Reconnaître

4.2.2.2.3.1 Analyse a priori des problèmes

Ces problèmes exigent une comparaison de quadrilatères. Ils sont formulés de la même manière : *Tous les… sont des…* De plus, il n'y a pas de figures. La technique de résolution consiste à établir des relations entre les propriétés des quadrilatères concernés par chacun des énoncés. Les technologies réfèrent aux propriétés des quadrilatères et à celles des implications logiques. Pour cela, nous avons considéré les problèmes comme tendant vers GII, même si les technologies ne sont pas explicitement demandées. Les énoncés a) c) et e) sont vrais et les énoncés b) d) et f) sont faux.

Par ailleurs, nous anticipons une résolution basée sur une image du concept. Par exemple, l'énoncé *Tous les carrés sont des parallélogrammes* est vrai s'il est jugé selon

[69] Source : Cahier *Panoram@th,* p. 129

les propriétés, c'est-à-dire le carré possède toutes les propriétés du parallélogramme. Mais il pourrait être dit faux si l'élève utilisait une comparaison des images typiques du carré et du parallélogramme. Ainsi, un carré ne serait pas aussi un parallélogramme.

De plus, des difficultés de lecture des énoncés sont à prévoir. Par exemple, un élève pourrait ne pas faire de différence entre les énoncés a) et b) en ne retenant que les mots parallélogrammes et quadrilatères et en affirmant ces énoncés sont vrais puisque qu'un parallélogramme a quatre côtés.

4.2.2.2.3.2 Conceptions des élèves

Nous avons identifié trois conceptions pour déterminer la valeur de vérité des énoncés à partir des entretiens auprès des élèves 1, 2, 3 et 4. Ces élèves ont tous écrit de bonnes réponses (V ou F) dans leurs cahiers. Ainsi, trois des élèves interviewés ont eu recours à la production de figures afin d'expliquer leurs résultats vrais ou faux. L'élève 1 a produit des figures pour chacun des énoncés, l'élève 2 pour quatre énoncés, l'élève 3 pour trois énoncés et l'élève 4 pour aucun d'eux. Nous reviendrons à l'élève 4. Par exemple, pour l'expression *Tous les losanges sont des rectangles*, l'élève 1 a produit les figures d'un rectangle et d'un losange. À partir de ses figures, il a conclu que l'énoncé était faux comme en témoigne l'extrait ci-dessous (suivi des figures):

> « Tous les losanges sont des carrés, euh, sont des rectangles, désolé. Les rectangles, ça doit avoir, euh, ça doit avoir quatre, euh, côtés, euh, ben, deux, ben, quatre côtés parallèles, euh, ouais, c'est ça, mais vous comprenez qu'est-ce je veux dire *(l'élève fait la figure d'un quadrilatère et met un même petit trait sur chacun des côtés*). Et, euh, les deux côtés extrémités doivent être congrus. Hum, et un losange, tandis qu'un losange *(l'élève fait la figure d'un losange et met un même petit trait sur chacun des côtés)*, les côtés congrus, sauf que y sont pas nécessairement parallèles, alors, euh, je me suis dit que c'était faux. »

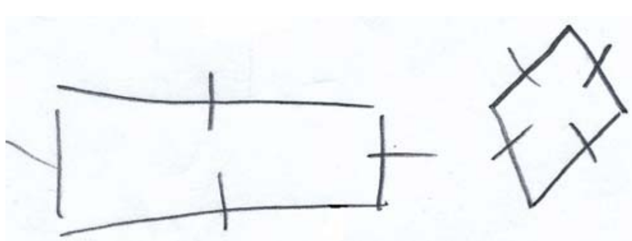


Figure 31 Production de l'élève 1 (classe 2) Reconnaître

Pour le même énoncé, l'élève 2 a tracé aussi les figures d'un rectangle et d'un losange. Comme l'élève 1, l'élève 2 conclut que l'énoncé est faux, mais avec d'autres éléments théoriques fournis dans l'extrait ci-dessous (suivi des figures) :

> « Tous les losanges sont des rectangles. Ben, c'est faux parce que la première caractéristique d'un rectangle, c'est qu'il ait quatre angles droits, alors que dans un losange, on a deux angles obtus pis deux angles aigus, au moins. Oui, peut être qu'on peut en avoir un droit sauf que, ben, deux droits plutôt là, sauf qu'on aura, on aura jamais quatre angles droits. Ça se peut pas, ça se fait pas. Donc, non les losanges ne sont pas des rectangles. »

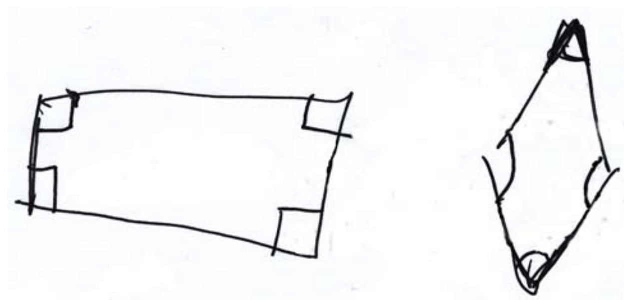


Figure 32 Productions de l'élève 2 (classe 2) Reconnaître

Les élèves 1 et 2 ont tous les deux affirmé que l'énoncé était faux. Ils ont produit des figures pour soutenir leurs argumentations respectives qui ne reposent pas sur les mêmes éléments théoriques. L'élève 1 a mentionné que les côtés du losange n'étaient pas nécessairement parallèles, ce qui est faux pour les côtés opposés. L'élève 2 a fait référence, entre autres, aux quatre angles droits pour caractériser le rectangle, mais il a ajouté qu'un losange ne peut pas avoir quatre angles droits, ce qui est faux.

Ces deux exemples correspondent à la conception nommée *Repérage à partir d'une figure codée*. L'élève fait des figures à la règle ou à main levée (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur correspond aux gestes effectués pour tracer les figures et y ajouter des marques de codage (L). La structure de contrôle est théorique ($\sum_1$) dans la mesure où l'élève se sert de propriétés des objets géométriques concernés par la comparaison, à tort ou à raison. La structure de contrôle est aussi figurale ($\sum_2$) puisque l'élève recherche une (ou des) propriété(s) sur les figures tracées.

La seconde conception, identifiée à la classe 1, est la *Référence*. Rappelons-le, pour cette conception les élèves utilisent directement leurs notes de cours ou cahiers de théorie pour résoudre et valider les problèmes. Nous l'avons observée chez les élèves 2, 3 et plus particulièrement l'élève 4. D'entrée de jeu à l'entretien, l'élève 4 a dit « […] avoir commencé par sortir mes notes de cours pour être sûr que toutes mes réponses allaient être correctes. On avait tout noté dans un tableau. ». Cet élève a été capable de donner des arguments pour seulement deux des six énoncés (b et c). Pour l'énoncé b) *Tous les quadrilatères sont des parallélogrammes*, il a affirmé que c'était faux car « Y a des quadrilatères qui ont pas tout le temps le même, euh, les mêmes angles, les mêmes sens. ». Pour l'énoncé c) *Tous les carrés sont des parallélogrammes*, il a dit que c'était vrai car « Le carré c'est quatre lignes, pis que les lignes ne se dépasseront jamais, y vont toujours monter égales, continuer égales, c'est tout le temps parallèles. ». Pour les autres énoncés, il a dit avoir consulté ses notes de cours.

L'emploi des notes comme structure de contrôle fut observé à d'autres moments des entretiens. Par exemple, les élèves 2 et 3 ont évoqué un schéma produit en classe pour catégoriser hiérarchiquement les quadrilatères. La figure 33 ci-dessous fut dessinée par l'élève 3 selon son souvenir du schéma. Observons qu'il a classé le losange dans une catégorie plus générale que celle du parallélogramme.

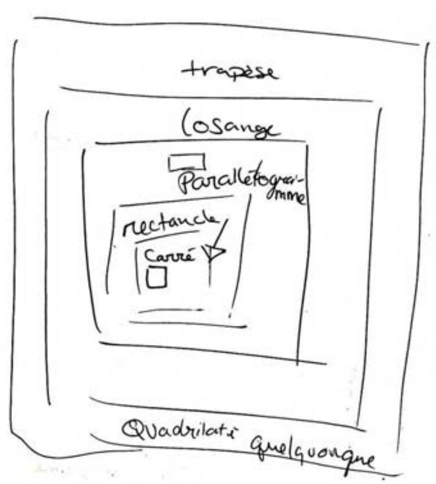


Figure 33 Production de l'élève 3 (classe 2) Reconnaître

L'exemple de la figure 33 ou la nécessaire consultation du cahier de notes pour résoudre les problèmes suggèrent un apprentissage des propriétés des quadrilatères par les élèves non stabilisé. Néanmoins, nous avons aussi observé lors des entretiens que pour certaines propriétés les élèves faisaient preuve de beaucoup plus d'autonomie et d'assurance. C'est le cas notamment pour les angles droits du rectangle, le parallélisme des côtés du parallélogramme, la congruence des côtés du losange ou les propriétés relatives aux angles et aux côtés du carré. À titre d'exemple, voici la réponse de l'élève 2 pour l'énoncé *Tous les carrés sont des parallélogrammes* :

> « Tous les carrés sont des parallélogrammes parce que, pour être un parallélogramme, faut que t'aies les caractéristiques d'un parallélogramme. Comme les parallélogrammes y ont deux paires de côtés parallèles, le carré les ont, le carré l'a, pis, euh, en fait, le parallélogramme, c'est juste ça. »

Ainsi, pour des conduites d'élèves semblables à celle de l'élève 2, nous avons identifié une troisième conception nommée *Association directe d'une propriété à l'objet géométrique*. Pour cette conception, l'élève réfère directement aux propriétés des objets géométriques sans faire de figure et sans référer à ses notes de cours (R). Le système de représentation est verbal (L). L'élève fournit une argumentation en mots. Sa structure de contrôle est théorique ($\sum$).

Nous n'avons pas relevé d'autres conceptions de nos entretiens. Pour l'ensemble des traces écrites, nous avons compté vingt-six élèves qui ont produit des réponses en indiquant vrai ou faux. Pour le numéro a), tous les élèves ont donné la bonne réponse. Seulement deux élèves sur vingt-six se sont trompés pour les numéros b) c) et d). Les numéros e) et f) ont des taux de réussite respectifs de 19/26 et 16/26 élèves.

4.2.2.2.4 Conceptions des élèves et problème Construire

Voici le problème[70] du type *Construire* employé pour les entretiens. Nous y avons fait référence à la leçon 2 où un élève a dit avoir tracé deux triangles possédant chacun des angles selon les valeurs demandées avec des côtés de longueurs différentes. La formulation du problème laisse place à interprétation. En effet, la consigne peut être comprise comme l'a fait l'élève à la leçon 2. Mais elle peut suggérer la construction de deux triangles dont l'un possède un angle de 70º et l'autre un angle de 35º. Ainsi, nous voulions savoir ce que les élèves avaient compris de la consigne et ce qu'ils avaient fait pour résoudre le problème.

Exercices sur les triangles

1. Construis deux triangles ayant pour mesure d'angles 70° et 35°.

Figure 34 Problème - classe 2 Construire

4.2.2.2.4.1 Analyse a priori du problème

Comme nous l'avons dit, la formulation du problème laisse entendre qu'il faut construire deux triangles possédant chacun des angles de 70º et 35º. Dans ce cas, des élèves pourraient avoir l'impression de construire deux fois le même triangle s'ils ne prennent en compte que les valeurs d'angles dont la somme doit égaler 180º, ce qui est possible puisque aucune donnée relative aux côtés du triangle n'est présente dans l'énoncé. D'autres élèves construiront peut-être deux triangles; un avec un angle de 70º et l'autre avec un angle de 35º. Nonobstant ces interprétations, le problème est en GI.

Une technique pour construire un triangle avec les valeurs d'angles de 70º et 35º comprend les actions suivantes : 1) avec une règle ou un gabarit, tracer un segment AB; 2) avec un rapporteur d'angles, à partir du point A (ou B), mesurer un angle de 70º (ou 35º) et tracer le segment AX; 3) avec un rapporteur d'angles, à partir du point B (ou A),

[70] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

mesurer un angle de 35º (ou 70º) et tracer le segment BY. Nommer C, le point d'intersection des segments AX et BY. Nous anticipons une variante de la technique dans la mesure où, par exemple, après les actions 1) et 2) un élève utiliserait le segment AX (ou BY) plutôt que le segment AB pour tracer le deuxième angle et terminer sa construction.

Une technique pour construire un triangle possédant soit un angle de 70º soit un angle de 35º comprend les actions suivantes :1) avec une règle ou un gabarit, tracer un segment AB; 2) avec un rapporteur d'angles et à partir du point A (ou B), mesurer un angle de 70º (ou 35º) et tracer le segment AC; 3) avec une règle ou un gabarit joindre les points B (ou A) et C.

Les technologies sous-jacentes aux techniques réfèrent à la définition du triangle ainsi qu'au théorème selon lequel la somme des angles intérieurs du triangle est de 180 degrés.

4.2.2.2.4.2 Conceptions des élèves

Parmi les élèves interviewés, l'élève 4 n'a pas résolu le problème. Les élèves 1 et 3 ont produit deux figures de triangles alors que l'élève 2 n'en a fait qu'une seule. Il a dit ne pas avoir compris pourquoi devoir en faire deux.

> « Je sais même pas pourquoi je l'ai pas compris le numéro. J'pense que dans ma tête j'ai fait, ben, pourquoi y veulent que je construise deux fois le même triangle, euh, mais maintenant avec du recul, j'ai pu comprendre que, euh, y voulaient peut être qu'on construise, euh, deux fois le même triangle, mais peut être que des fois y voulaient que ce soit plus grand ou plus petit. Donc, j'pense que c'est ça que j'ai pas compris. Je comprenais pas pourquoi y voulaient qu'on construise deux fois le même triangle. »

Les élèves 1, 2 et 3 ont dit avoir utilisé la règle et le rapporteur d'angles. L'usage qu'ils en ont fait correspond à la première technique décrite dans l'analyse a priori.

Dans l'ensemble des cahiers, nous avons compté vingt-huit élèves sur vingt-neuf ayant fait des figures. Parmi ceux-ci treize élèves (incluant les élèves 1 et 3) ont produit à l'échelle deux triangles semblables non congrus pour des valeurs d'angles de 35º, 70º et 75º. Cinq élèves (incluant l'élève 2) n'ont produit qu'un seul triangle à l'échelle pour des valeurs d'angles de 35º, 70º et 75º.

De plus, deux élèves ont fourni un premier triangle à l'échelle ayant des valeurs d'angles de 35º, 70º et 75º et un second triangle à l'échelle avec trois valeurs d'angles arbitraires, par exemple le triplet (60º, 80º, 40º). Un peu comme si une fois le triangle construit selon les valeurs de 35º et 70º, ces élèves avaient procédé à la construction d'un deuxième triangle pour satisfaire la condition de l'énoncé requérant deux triangles.

Trois élèves ont fait chacun deux triangles à l'échelle où chaque triangle avait un angle de 70º. Par exemple, pour un même élève, nous avons obtenu des triangles avec des valeurs de 70º, 70º, 40º et de 70º, 90º, 20º. Un seul élève n'a fait qu'un triangle à l'échelle avec des valeurs d'angles de 70º, 70º et 40º.

Un seul élève a fait deux triangles dont le premier arborait un angle de 70º et le second un angle de 35º.

Trois élèves ont tracé des triangles à main levée sans indications symboliques, numériques ou verbales.

Les vingt élèves sur vingt-huit qui ont fait soit un ou deux triangles à l'échelle correspondant aux valeurs de 35º, 70º et 75º ont sollicité la conception *Instruments rapporteur/règle* ou sa variante décrite dans l'analyse a priori. Les opérateurs sont les suivants : (R1) avec une règle ou un gabarit, tracer un premier segment AB; (R2) avec un rapporteur, à partir du point A (ou B), mesurer un angle de 70º (ou 35º) et tracer le segment AX; (R3) avec un rapporteur, à partir du point B (ou A), mesurer un angle de 35º (ou 70º) et tracer le segment BY. Nommer C, le point d'intersection des segments AX et BY. Le système de représentation pour l'expression de ces opérateurs (L) correspond aux gestes effectués pour tracer le ou les triangles. La structure de contrôle est théorique ($\sum_1$) puisqu'elle concerne la définition du triangle et le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle. Elle est aussi instrumentée ($\sum_2$) en fonction de la précision accordée par l'élève au maniement de la règle et du rapporteur.

Les cinq élèves sur vingt-huit qui ont produit un ou deux triangles avec une valeur d'angle à l'échelle de 70º ou de 35º se sont servis, au moins pour ces valeurs, d'un rapporteur d'angles, mais il n'est pas assuré qu'ils s'en soient servis pour terminer leur construction procédant ainsi selon la seconde technique décrite dans l'analyse a priori. Nous disons qu'ils ont partiellement sollicité la conception *Instruments* *rapporteur/règle* dans la mesure où ils n'ont utilisé que les deux premier opérateurs de la conception : (R1) avec une règle ou un gabarit, tracer un premier segment AB; (R2) avec un rapporteur, à partir du point A (ou B), mesurer un angle de 70º (ou 35º) et tracer le segment AC.

Les trois élèves qui ont fait des figures à main levée sans indication relative aux angles ou aux côtés ont mis en œuvre une conception dite *Esquisse*. L'opérateur (R) consiste à faire le tracé à main levée d'une figure. Le système de représentation (L) correspond aux gestes effectués pour dessiner la figure. La structure de contrôle (∑) est figurale dans la mesure où l'élève utilise une image du concept triangle associée à une ligne brisée fermée de trois côtés.

4.2.2.3 Niveaux 3 à 0 de l'enseignant et conceptions des élèves - classe 2

Nous terminons l'analyse de la classe 2 en revenant sur les niveaux d'activité de l'enseignant ainsi que sur les conceptions d'élèves. Le tableau X (page 180) présente la compilation synthétique des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1), des problèmes du projet de construction (niveau 2), de l'actualisation de ses intentions (niveau 0) et des conceptions d'élèves (niveau -1).

Pour les intentions, les données du tableau montrent qu'elles se situent surtout en GI-II et un peu vers GII. En effet, le discours de l'enseignant quant à la géométrie souhaitée porte notamment sur l'énumération des objets géométriques à l'étude, sur des procédés comme la visualisation, la manipulation, les activités de découverte. A priori, ces éléments ne peuvent être identifiés à l'un ou l'autre des paradigmes (GI-GII). Par ailleurs, le discours a révélé aussi, dans une moindre mesure, une préoccupation pour l'apprentissage des propriétés des objets géométriques (GII).

Les problèmes issus du projet de construction sont caractérisés par les types *Rechercher une mesure*, *Reconnaître*, *Construire* et *Justifier*. Nous en retrouvons en GI, vers GII et en GI-II. Ceux du type *Construire* s'inscrivent majoritairement en GI. Les problèmes des types *Reconnaître* et *Rechercher une mesure* ont une propension vers GII. Ceux du type *Justifier* sont susceptibles d'être résolus surtout selon l'un ou l'autre des paradigmes (GI-II).

Les intentions de l'enseignant concernant la visualisation, la manipulation et les activités de découverte se sont actualisées en direction de GI ou vers GII. En effet, les traitements des figures relevaient de GI ou tendaient vers GII. Nous y reviendrons. La manipulation et les activités de découverte furent concrétisées en activités de nature inductive (GI). Par exemple, l'enseignant a offert du matériel concret comme des pailles coupées en plusieurs longueurs ou des papiers de couleurs différentes. Les pailles ont été employées dans le but de faire découvrir la propriété de l'inégalité triangulaire. Les papiers ont servi de support visuel pour l'énumération de propriétés des quadrilatères. Néanmoins, il n'est pas assuré que ces moyens (GI) aient satisfait les attentes de l'enseignant quant à l'apprentissage de référents théoriques (GII) par les élèves. En effet, pour l'activité de l'inégalité triangulaire, plusieurs élèves ont fait quelques essais sans utiliser toutes les pailles. Pour l'activité des papiers représentant des quadrilatères, ils se sont limités à les observer ou à effectuer quelques mesures. La manipulation des objets physiques a ici positionné les actions des élèves en GI, alors que les objectifs des leçons visaient à faire apprendre des propriétés de GII.

Par ailleurs, l'enseignant a suggéré diverses lectures des figures géométriques par ce qu'il en a dit et fait en classe ou par celles qu'il a données avec les problèmes à résoudre. Dans certains cas, les informations dégagées des figures devaient s'obtenir à partir d'une observation globale de celles-ci sans égard à toute indication symbolique, numérique ou verbale, ce qui relève de GI. D'autres fois, les figures ne devaient être lues qu'en fonction des informations codées, numériques ou verbales qui leurs étaient associées, plaçant ainsi les élèves vers GII. De plus, les modes de validation perceptif, instrumenté et théorique ont été employés par l'enseignant d'une manière alternative. À titre d'exemple, rappelons la situation où l'enseignant a mesuré un angle au rapporteur (GI) après avoir utilisé le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle (GII) pour s'assurer à nouveau du résultat.

Or, les divers traitements des figures n'ont pas été sans effet sur les conceptions déployées par les élèves. Par exemple, pour certains problèmes, les figures ont induit le recours à la perception globale ou à la mesure. Dans les problèmes du type *Rechercher une mesure*, utilisés pour nos entretiens, les figures (sauf deux) avaient une seule valeur numérique identifiée. Dans ces cas, l'unique façon de calculer le périmètre d'une figure était d'attribuer la même valeur numérique aux autres côtés de la figure. Cette manière de présenter les figures, bien qu'elle provienne d'un contrat didactique, a eue pour effet de conforter les élèves dans l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et dans la *Mesure d'une figure*; conceptions de GI. Les élèves ont attribué une même valeur à chacun des côtés après avoir observé des figures ou après avoir validé la congruence des côtés des figures avec un instrument de mesure.

L'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* sont apparues aussi au problème *Justifier* lors des entretiens. Ainsi, pour la plausibilité du résultat numérique, des élèves ont fourni des réponses contraires, résultat plausible ou non, selon que leur jugement soit basé sur des calculs ou sur une observation de valeurs numériques en relation avec la figure. Ainsi, à partir d'une *Appréhension perceptive globale d'une figure*, des élèves ont déterminé qu'une valeur de 90 ou de 120 degrés ne pouvait pas correspondre à un angle qui avait l'air aigu sur la figure. D'autres élèves ont considéré qu'une valeur de 20 degrés pouvait être associée à un angle qui semblait aigu sur la même figure. De plus, la conception *Mesure d'une figure* a été mise en œuvre de manière à permettre une entrée dans ce problème du type *Justifier*.

Ajoutons pour ces problèmes des types *Rechercher une mesure* et *Justifier*, la mobilisation par les élèves des conceptions *Calculatoire* et *Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul* nécessaires à l'obtention des résultats numériques. Pendant les entretiens, les élèves ont expliqué en leurs mots les référents théoriques sous-jacents à la résolution des problèmes. Ils ont évoqué, par exemple, la définition du périmètre d'un polygone, le théorème selon lequel la somme des angles intérieurs du triangle égale deux angles droits ou celui selon lequel les angles opposés par le sommet sont congrus. Les élèves ont fait preuve ainsi d'une certaine appropriation d'éléments théoriques de GII.

Nous avons noté d'autres indices de cette appropriation d'éléments théoriques de GII notamment par l'entremise de la conception *Association directe d'une propriété à l'objet géométrique* pour les problèmes du type *Reconnaître*. Pour cette conception, il appert que certaines propriétés soient plus intégrées dans l'esprit des élèves. C'est le cas entre autres, du parallélisme des côtés du parallélogramme et des quatre angles droits du rectangle. Toutefois, l'apprentissage des propriétés n'est pas complété puisque pour ces mêmes problèmes du type *Reconnaître*, nous avons identifié les conceptions *Référence* et *Repérage à partir d'une figure codée*. Pour ces conceptions, les élèves ont cherché des réponses dans leurs cahiers de notes ou dans les figures qu'ils ont tracées, afin de faire les comparaisons de quadrilatères demandées.

Pour terminer, soulignons que la construction avait été nommée par l'enseignant, au niveau 3, comme une action à effectuer sur les objets géométriques. Le problème de construction choisi pour les entretiens est en GI puisque sa résolution requiert l'usage du rapporteur d'angles. Il a sollicité les conceptions *Instruments rapporteur/règle* et *Esquisse* dans une moindre mesure, deux conceptions de GI.

Tableau X Compilation des résultats de la classe 2 selon GI, GII et GI-II

<table>
<tr><th>Entrevue et leçons</th><th colspan="2">Problèmes de la planification *</th><th>Problèmes pour les entretiens</th><th>Conceptions des élèves (niveau -1)</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Niveaux GI GII GI-II
3 0% 18% 82% 100%
2 0% 33% 67% 100%
1 0% 25% 75% 100%
0 43% 48% 9% 100%

3 à 1 0% 22% 78% 100%
3 et 1 sans Q8 0% 19% 81% 100%

*Compilation des problèmes (237).</td><td>Reconnaître (27%)
(65 problèmes)</td><td>GI: 12%
GII : 83%
GI-II: 5%</td><td>6 problèmes GII</td><td>GII: Repérage à partir d’une figure codée
GII: Association directe d’une propriété à l’objet géométrique
GII: Référence</td></tr>
<tr><td>Rechercher une mesure (46%)
(108 problèmes)</td><td>GI: 39%
GII: 48%
GI-II: 13%</td><td>7 problèmes GI</td><td>GI: Appréhension perceptive globale d’une figure
GI: Mesure d’une figure
vers GII: Calculatoire</td></tr>
<tr><td>Construire (21%)
(50 problèmes)</td><td>GI: 80%
GII: 4%
GI-II: 16%</td><td>1 problème GI</td><td>GI: Esquisse
GI: Instruments rapporteur/règle</td></tr>
<tr><td>Justifier (6%)
(14 problèmes)</td><td>GI: 7%
GII: 43%
GI-II: 50%</td><td>1 problème GII</td><td>GI: Appréhension perceptive globale d’une figure
GI: Mesure d’une figure
vers GII: Application directe d’une propriété (théorème) sans calcul
vers GII: Calculatoire</td></tr>
<tr><td>Découvrir (0%)
(0 problème)</td><td>GI: 0%
GII: 0%
GI-II: 0%</td><td colspan="2">n/d</td></tr>
<tr><td>Produire une représentation (0%)
(0 problème)</td><td>GI: 0%
GII: 0%
GI-II: 0%</td><td colspan="2">n/d</td></tr>
</table>

4.2.3 Analyse de la situation didactique de la classe 3

La classe 3 compte trente-deux élèves. Nous présentons l'analyse des niveaux caractéristiques de l'activité enseignante suivie des conceptions d'élèves. Nous avons dégagé les conceptions à partir de problèmes des types *Rechercher une mesure, Justifier* et *Reconnaître*. Il n'a pas été possible de questionner les élèves pour le type *Construire* puisque les problèmes de construction dans les recueils des élèves avaient été majoritairement résolus en classe par l'enseignant sans que les élèves les fassent au préalable.

4.2.3.1 Analyse des niveaux de l'activité de l'enseignant de la classe 3

Nous présentons à l'aide d'exemples les niveaux 3 à 0 de l'activité enseignante suivis d'un résumé.

4.2.3.1.1 Niveau 3 Conceptions et valeurs

Pour l'enseignant, *faire de la géométrie plane* évoque une énumération d'objets géométriques selon une visée hiérarchique, c'est-à-dire un travail qui débute avec le point, le segment, la droite (demi-droite) vers les polygones, plus spécifiquement les triangles et les quadrilatères. Cette énumération d'objets géométriques ne nous informe pas sur la manière dont il entend traiter ces objets auprès des élèves (GI-II). Par contre, certaines de ses intentions s'identifient plus aisément vers GII. C'est le cas par exemple lorsque l'enseignant qualifie la géométrie plane en première secondaire de géométrie où les définitions et propriétés sont importantes puisqu'elles assurent de la rigueur, ce qu'il affirme dans l'extrait suivant :

> « Moi, c'est toujours une question de définition. C'est ça que je trouve important en première secondaire. C'est de définir les éléments parce que c'est bien beau de dire, ok, travaille avec ce triangle là, euh, travaille avec ce rectangle là, mais si j'ai pas une rigueur au niveau géométrique, ben, je pourrais donner un rectangle sans indiquer que les quatre angles sont droits, que les côtés opposés sont parallèles, que les côtés opposés sont congrus, hum, j'aurais pas une, j'aurais pas cette rigueur là qui est importante en géométrie. »

Cette importance accordée aux définitions et aux propriétés est traduite par une attente auprès des élèves; l'enseignant souhaite qu'ils puissent facilement différencier des référents théoriques de GII. Pour y parvenir, il retient la dimension constructiviste du programme d'études qu'il interprète par la nécessité de faire réfléchir les élèves, de les amener à découvrir d'eux-mêmes des définitions, des propriétés, des formules d'aire et de périmètre. Nous discuterons de l'aspect constructiviste au niveau 1 de son activité.

Par ailleurs, l'enseignant ne voit rien de défavorable dans l'enseignement de la géométrie. Il estime que la géométrie appliquée à des situations de la vie quotidienne valorise l'enseignement de cette discipline en permettant d'en montrer l'utilité: « Que ça soit en géométrie ou en arithmétique ou en algèbre, c'est de rattacher ça à la vie de tous les jours, montrer l'utilité dans le fond. ». A priori, cette idée de montrer l'utilité de la géométrie ne peut être caractérisée selon GI ou GII, car il peut s'agir d'éléments du quotidien ou d'une modélisation de situations réelles. Néanmoins, lorsque l'enseignant exemplifie l'utilité de la géométrie d'un point de vue arithmétique, comme dans l'extrait ci-dessous, il est en GI:

> « Donc, euh, j'peux pas dire, décrire ma maison en utilisant des chiffres et des nombres, c'est impossible. J'pourrais pas dire, euh, aire 23. Pis, oui, j'pourrais, j'pourrais donner les dimensions, mais en bout de ligne, j'suis entrain de parler des dimensions géométriques de ma maison. »

En ce qui a trait au programme d'études, l'enseignant le considère trop large, c'est-à-dire bâti pour les deux années du cycle plutôt que par année, ce qui, selon lui, a provoqué une disparité dans la présentation des notions à l'étude selon les auteurs de manuels scolaires. Cette présentation n'est pas toujours logique pour l'enseignement en comparaison de sa vision hiérarchique des objets géométriques énumérée au premier paragraphe. De plus, il estime que le programme n'est pas assez défini en géométrie, ce qui ouvre la porte à différentes façons d'enseigner cette discipline et crée peut-être par la même occasion des difficultés ou des erreurs chez les élèves.

L'enseignant affirme n'utiliser que très rarement les manuels scolaires. Lorsqu'il s'en sert, c'est pour y puiser des exercices, des problèmes ou des situations reliées à des contextes du quotidien. Il trouve les manuels directifs dans la mesure où les questions sont souvent présentées dans un ordre séquentiel laissant peu de place à l'initiative des élèves. Une amélioration, selon l'enseignant, serait d'offrir des manuels proposant des activités accompagnées d'intentions pédagogiques clairement identifiées en fonction d'une diversification des clientèles d'élèves : plus à risques, régulières ou fortes.

4.2.3.1.2 Niveau 2 Projet de construction

La description de son projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* contient des éléments théoriques de GII. Il s'agit principalement des définitions et de la classification des triangles et des quadrilatères, de la déduction et de la justification de mesures. L'enseignant mentionne aussi les constructions de triangles et de quadrilatères comprenant les médianes, les médiatrices et les hauteurs, en plus du calcul d'aire et de périmètre, sans toutefois dire comment il entend travailler les constructions et le calcul d'aire et de périmètre (GI-II).

La classification des triangles se fait selon les angles et les côtés. Les triangles acutangle, obtusangle, rectangle, isocèle, scalène et équilatéral sont présentés incluant les triangles isocèle-rectangle et isocèle-obtusangle.

La classification des quadrilatères s'effectue selon le parallélisme des côtés, la congruence des côtés et des côtés opposés, la congruence des angles et des angles opposés, la présence d'angles droits, d'angles consécutifs supplémentaires, la présence de diagonales congrues, se coupant en leur milieu ou perpendiculairement de même que l'admission d'au moins un axe de symétrie.

Vingt-huit énoncés sont offerts aux élèves pour la justification; huit concernent les angles, neuf les triangles et onze sont spécifiques aux quadrilatères. Certains d'entre eux seront donnés en exemples au niveau 0.

Par ailleurs, le projet de construction contient un ensemble de problèmes.[71] Ils sont classifiés dans le tableau XI ci-dessous en fonction de notre typologie.

Tableau XI Problèmes par types - classe 3

Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
43%	27%	10%	19%	0%	1%	100%

Comme l'illustre le tableau XI, ce sont les problèmes du type *Reconnaître* qui sont dominants (43%) suivis des problèmes du type *Rechercher une mesure* (27%). Les problèmes du type *Justifier* occupent la troisième position (19%). Les problèmes du type *Construire* représentent 10% des problèmes analysés. Enfin, les problèmes du type *Produire une représentation* sont peu nombreux (1%) et ceux du type *Découvrir* sont absents (0%). Pour les problèmes, nous en avons répertorié en GI, vers GII et en GI-II. Par exemple, des problèmes du type *Reconnaître* exigent une association de propriétés à des figures dont le traitement relève de GI car elles ne sont pas codées, ni décrites verbalement. Des exemples de ces problèmes sont utilisés pour l'analyse de conceptions d'élèves. D'autres problèmes, par exemple du type *Justifier*, exigent une mise en relation de propriétés pour être résolus (vers GII). D'autres problèmes encore, par exemple du type *Rechercher une mesure*, sont en GI-II puisqu'ils sont susceptibles d'être résolus en GI ou vers GII.

Compte tenu de ce qui précède et afin de formuler les deux premiers problèmes du questionnaire, nous avons choisi un problème du type *Reconnaître* (43%) en GI et un problème du type *Justifier* (19%) vers GII. Nous aurions pu prendre un problème du type *Rechercher une mesure* (27%) vers GII. Nous avons opté pour le type *Justifier* d'une part, à cause de l'importance accordée par l'enseignant aux définitions et aux propriétés et, d'autre part, parce que le problème 6 du questionnaire proposait déjà de

[71] Nous avons analysé trois cent-quatre problèmes.

rechercher une mesure avant de la justifier. Voici un bref descriptif des problèmes suivi des deux premiers problèmes du questionnaire.

Problème 1, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans le projet de construction;
Problème 2, *Reconnaître*, en GI, peut se retrouver dans le projet de construction;
Problème 3, *Justifier*, vers GII, est atypique;
Problème 4, *Découvrir*, en GI, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 5, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 6, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel.

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme. Le côté AB est prolongé en E. Le côté AD est prolongé en F. L'angle ABC mesure 70°.

De plus, $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ et $\overline{DC} \cong \overline{DF}$

Justifiez l'affirmation suivante à l'aide d'énoncés géométriques: la mesure de l'angle DCF est de 35°.

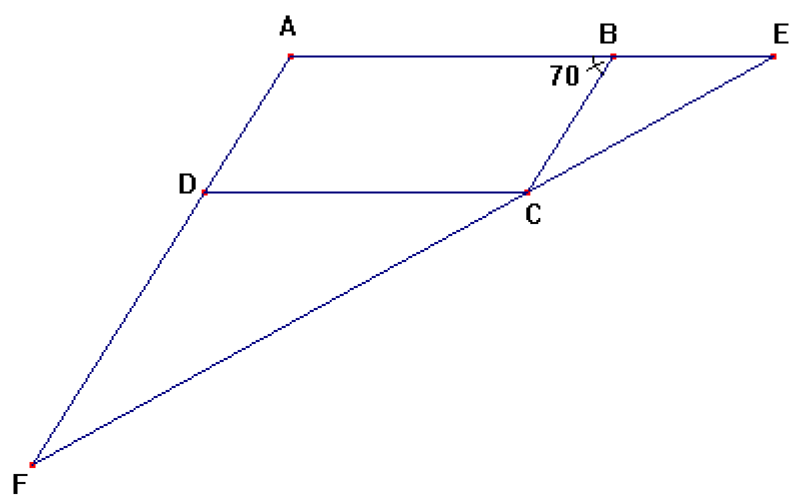


Figure 35 Problème 1 du questionnaire - enseignant 3

Problème 2

Donnez le nom de chacune des figures identifiées ci-dessous par une lettre.

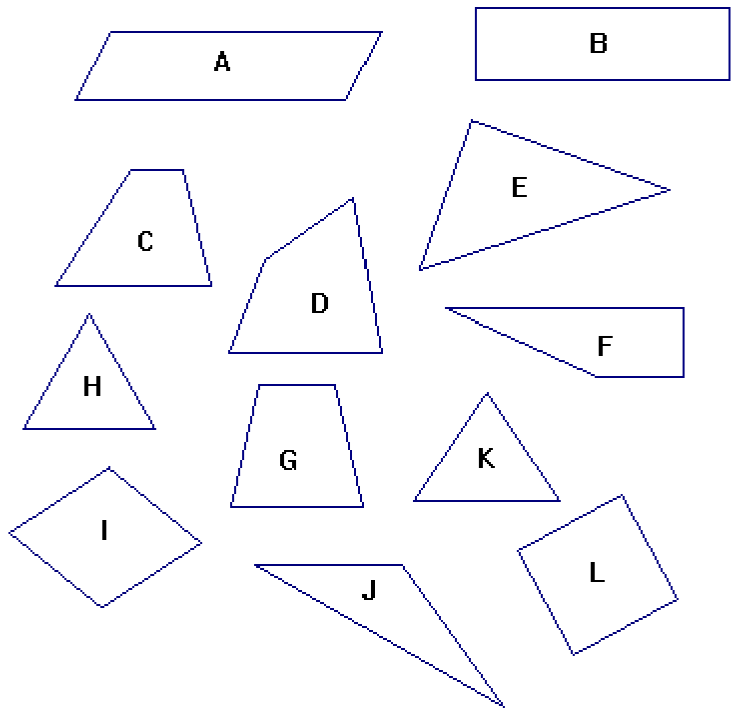


Figure 36 Problème 2 du questionnaire - enseignant 3

Tous les problèmes ont été considérés intéressants par l'enseignant à l'exception du problème 2. Nous y reviendrons. Ainsi, il appert qu'un problème est dit intéressant s'il offre plusieurs possibilités de résolution ou encore s'il favorise la mobilisation de propriétés géométriques. La référence aux propriétés géométriques est cohérente avec la notion de rigueur émise par l'enseignant au niveau 3 de son activité. De plus, les raisons qui motivent l'enseignant à donner un problème plutôt qu'un autre sont semblables à celles fournies pour juger de l'intérêt d'un problème. Il s'agit de la liberté de choix que peut avoir l'élève pour la démarche de résolution ainsi que la nécessité d'employer des propriétés. Un problème ne sera pas discrédité par l'enseignant si sa résolution exige des propriétés qui sont généralement moins utilisées, s'il nécessite plusieurs étapes ou si certaines étapes sont plus ardues que d'autres. À titre d'exemple, l'enseignant propose de complexifier le problème 6 du type *Justifier* de façon à y ajouter un pas de déduction.

Seul le problème 2 a été jugé inintéressant par l'enseignant. Ce dernier a déploré le manque de rigueur dans la présentation des figures. Il a suggéré l'ajout de marques de codage ainsi que l'emploi de propriétés pour identifier des figures. Ces modifications témoignent à nouveau de son intérêt pour l'apprentissage des propriétés, ce qui montre une tendance vers GII. Toutefois, le rejet du problème 2 paraît étonnant dans la mesure où nous avons repéré dans le projet de construction du thème des problèmes du type *Reconnaître* dont le traitement des figures est semblable à celui du problème 2, c'est-à-dire des figures sans indications symboliques et pour lesquelles associer des propriétés déjà listées se vérifiant à l'aide d'une équerre ou d'un compas. Comment expliquer cette situation a priori paradoxale? Serait-ce que les propriétés fournies avec les problèmes amenuiseraient l'effet visuel des figures non codées? Serait-ce encore que la vérification instrumentée subordonnerait l'effet visuel des figures non codées, alors que l'absence de propriétés écrites au problème 2 aurait amplifié la perception de l'enseignant au sujet des figures non codées? Ou bien est-ce simplement que le temps pris pour l'évaluation d'un problème provenant d'un questionnaire de recherche offre le recul nécessaire que ne permettrait pas le contexte scolaire?

Il demeure que ce sont les référents théoriques de GII qui guident la plupart des commentaires de l'enseignant concernant les problèmes du questionnaire. Par exemple, le problème 3 serait employé à des fins évaluatives par l'enseignant dans la mesure où il assure un transfert des propriétés. Toutefois, la présentation atypique de la figure et du symbolisme qui gêne l'enseignant serait susceptible d'être corrigée par ce dernier. Au problème 4, ce n'est pas l'aspect inductif du problème (GI) qui retient l'attention de l'enseignant, mais plutôt la possibilité de faire découvrir la propriété selon laquelle la mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des deux angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents; élément théorique de GII. Néanmoins, l'enseignant ne pense pas donner ce problème aux élèves. Il affirme avoir peu travaillé ce type de problèmes. D'ailleurs, son commentaire concorde avec notre analyse des problèmes au sein desquels nous n'en avons trouvé aucun du type *Découvrir* (0%).

Aussi, l'enseignant estime que la propriété serait difficile à verbaliser par ses élèves. Il ajoute que l'étude de la notion d'angle extérieur est réservée à la deuxième année du secondaire. Pour les problèmes 1, 5, 6 du type *Justifier*, l'enseignant formule des solutions présentées en deux colonnes afin de bien distinguer l'inscription des résultats de leurs propriétés correspondantes. Pour ces mêmes problèmes, l'enseignant anticipe que ses élèves produisent des solutions semblables aux siennes avec des formulations de propriétés moins précises, par exemple au lieu de dire que *dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés congrus sont congrus* les élèves pourraient dire que *les angles d'un triangle isocèle sont congrus.* L'enseignant prévoit que les réponses de ses élèves ressemblent aux siennes aussi pour le problème 2 bien que la présentation originale du problème lui déplaise. Par contre, pour le problème 3, l'enseignant croit que ses élèves vont faire des dessins et dire qu'il s'agit d'un carré. Pour le problème 4, l'enseignant affirme ne pas trop savoir ce que répondraient ses élèves. Cela peut s'expliquer par le fait qu'il ait peu travaillé ce type de problèmes avec les élèves.

4.2.3.1.3 Niveau 1 Projet d'une leçon

Lorsque l'enseignant parle de ce qui fonctionne bien dans la planification d'une leçon, peu d'éléments de son discours sont identifiables à GI ou vers GII. Selon lui, une bonne leçon consiste à questionner les élèves, les laisser réfléchir aux interrogations et ensuite donner des réponses pour assurer une mise à niveau des élèves. Ses intentions pédagogiques se traduisent généralement par deux orientations. D'une part, il s'agit de fournir de l'information aux élèves et, d'autre part, les placer en situation de découverte des définitions, des propriétés, des formules d'aire ou de périmètre. Dans le premier cas, l'information est transmise à l'aide d'un questionnement ouvert dirigé par l'enseignant et supporté souvent par du matériel informatique. Dans le second cas, ce sont les élèves qui sont invités à se servir du matériel informatique lors d'une séance en laboratoire au terme de laquelle l'enseignant effectue un retour.

L'enseignant utilise un logiciel de géométrie dynamique[72] pour construire des représentations de triangles et de quadrilatères qui sont nécessaires à chacune des deux orientations possibles d'une leçon. Il prévoit employer le logiciel de géométrie pour sa fonction d'illustration de l'invariance des propriétés en jeu lors des déplacements de ses constructions. Cette initiative devrait contribuer à positionner sa leçon vers GII. Ainsi, le logiciel doit permettre aux élèves de constater que les constructions ne se défont pas lorsqu'elles sont déplacées, agrandies ou réduites, car elles ont été produites à partir de propriétés. Toutefois, l'intention de faire découvrir des propriétés dans l'optique d'un apprentissage constructiviste va interférer avec cette initiative d'emploi du logiciel et faire basculer certaines de ses actions ainsi que celles de ses élèves en GI, comme nous le verrons dans ce qui suit au niveau 0 de son activité.

4.2.3.1.4 Niveau 0 Actualisation en classe de trois leçons

Voici une description sommaire du contenu des leçons filmées.

Leçon 1 : a) Court visionnement d'une animation rythmée montrant des figures de polygones et leurs noms; b) Présentation d'énoncés géométriques concernant les triangles; c) Constructions des médiatrices, hauteurs et médianes du triangle; d) Devoir; e) Projection à nouveau de l'animation rythmée pour clore la leçon.
Leçon 2 : a) Retour sur les définitions de médiatrice, hauteur et médiane; b) Correction d'un devoir (transformations d'unités de mesure); c) Temps réservé aux élèves pour la construction de médiatrices, hauteurs et médianes; d) Devoir.
Leçon 3 : a) Séance au laboratoire d'informatique pour l'étude des propriétés des quadrilatères; b) Devoir.

La leçon 1 débute par la projection d'une animation rythmée et humoristique qui montre des représentations de polygones et leurs noms. Une fois l'animation terminée, l'enseignant affiche au tableau, à l'aide d'un projecteur électronique, quatre triangles qu'il a construits avec un logiciel de géométrie dynamique. Un premier triangle ABC montre des valeurs d'angles de 42º, 49º et 89º et des valeurs de côtés respectives de 6,66 cm, 7,51 cm et 9,95 cm. Un second triangle GHI présente trois valeurs d'angles de 60º et une même valeur de 6,98 cm pour chacun des trois côtés. Un troisième triangle XYZ

[72] Il s'agit du logiciel Cabri-géomètre.

affiche des valeurs d'angles de 65,4º, 65,4º et 49,3º associées à des valeurs de côtés respectives de 6,00 cm, 6,00 cm et 5,00 cm. Nous y reviendrons. Un quatrième triangle DEF montre des valeurs d'angles de 90º, 65º et 25º et des valeurs de côtés de 10,97 cm, 9,95 cm et 4,63 cm. De plus, seul l'angle droit du triangle DEF a une marque de codage. Les triangles sont surmontés de l'inscription : *À la découverte d'énoncés géométriques*.

Ces quatre triangles seront utilisés pour effectuer un retour sur la reconnaissance des types de triangles et introduire des énoncés géométriques. Les élèves ont en main une liste trouée d'énoncés qui sera complétée au fur et à mesure de leur présentation par l'enseignant. Ainsi, l'enseignant se sert de constructions de triangles qu'il a produites à partir de propriétés (GII), mais sur lesquelles il fait afficher par le logiciel des mesures d'angles et de côtés (GI). À certaines occasions, nous verrons que cette façon de faire va le contraindre à fournir des arguments de GI pour expliquer des propriétés de GII ou référer à des propriétés de GII pour rendre compte de phénomènes de GI.

Le travail de reconnaissance des types de triangles et des énoncés géométriques conduit l'enseignant à questionner ses élèves conformément à ce qu'il avait annoncé au niveau 1 de son activité. Il le fait pour inciter les élèves à donner des définitions et pour les faire réfléchir. L'enseignant présente dans l'ordre chacun des énoncés suivants :

> La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180º.
> Dans tout triangle, la mesure d'un côté quelconque est plus petite que la somme des mesures des deux autres côtés.
> Dans tout triangle, la mesure d'un côté quelconque est plus grande que la différence des mesures des deux autres côtés.
> Dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.
> Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.
> Dans tout triangle équilatéral, les angles mesurent 60º.
> Dans tout triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.

Au premier énoncé, lorsque l'enseignant fait oralement la somme des mesures des angles intérieurs des triangles, se pose alors le cas du triangle XYZ (65,4º, 65,4º et 49,3º). L'enseignant dit : « Mais ici, y va y avoir une petite imprécision, quatre dixièmes, quatre dixièmes et trois dixièmes, qu'est-ce que ça donne? ». Les élèves ne répondent pas. L'enseignant ajoute : « Ça donne onze, ça donne un et un dixième. Ok, faque, c'est pas exact. Pourquoi c'est pas exact? Selon vous, pourquoi on n'arrive pas pile à cent quatre-vingts? ». Un élève dit : « C'est arrondi. ». L'enseignant continue :

> « Exact, le logiciel l'a arrondi. Ok, donc, probablement qu'on avait soixante-cinq virgule trente quelque chose, soixante-cinq virgule trente quelque chose, quarante-neuf virgule trente quelque chose. Le logiciel l'a arrondi. C'est pour ça qu'on arrive pas directement à cent quatre-vingts. Bien, regardez ici *(pointe le triangle DEF)*, ben, soixante-cinq plus vingt-cinq plus quatre-vingt-dix ça donne cent quatre-vingts. »

Dans le cas du triangle XYZ, l'argument de la mesure (GI), censé faire voir le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle (GII), est mis à mal puisque la somme est légèrement supérieure à 180 degrés. Néanmoins, l'enseignant maintient son argumentaire en GI justifiant l'inexactitude du résultat en fonction de l'arrondissement des valeurs fait par le logiciel. La leçon 1 se poursuit et chacun des énoncés est validé par une observation des quatre triangles. Par exemple, pour l'énoncé *Dans tout triangle, la mesure d'un côté quelconque est plus grande que la différence des mesures des deux autres côtés*, l'enseignant en fait la vérification à partir des triangles ABC et XYZ et affirme « […] donc ça marche tout le temps. ». Ainsi, quelques mesures (GI) servent à valider des propriétés (GII). La fonction du logiciel permettant d'illustrer l'invariance des propriétés n'est utilisée que pour le triangle équilatéral GHI. Il sera déplacé, c'est-à-dire agrandi, réduit, tourné montrant par la même occasion la constance des mesures des angles de 60º.

Une fois la partie des énoncés géométriques terminée, l'enseignant entreprend de montrer aux élèves à construire des médiatrices, des hauteurs et des médianes d'un triangle avec les instruments de géométrie. Pour chacun de ces objets géométriques, l'enseignant utilise la même méthode. D'abord, il demande aux élèves de définir l'objet géométrique : « Souvenez-vous c'est quoi pis ça fait quoi? ». Ensuite, il ouvre une construction de l'objet géométrique faite avec le logiciel de géométrie dynamique. Il ajoute pour chaque construction les deux autres médiatrices, hauteurs et médianes pour montrer leurs points de rencontre respectifs. Enfin, l'enseignant demande aux élèves de nommer le ou les instruments les plus appropriés pour faire ces constructions sur une feuille.

Pour terminer sa leçon 1, l'enseignant fait sur un rétroprojecteur la construction des médianes d'un triangle avec une règle graduée et ensuite celle des médiatrices avec une règle graduée et une équerre, ce qui positionne ses actions en GI. Il ajoute qu'une façon de vérifier si les médianes (ou les médiatrices et les hauteurs) sont bien tracées est d'obtenir leur point de rencontre. Or, les médianes tracées sont légèrement imprécises et ne montrent pas un point d'intersection. Un élève demande : « Euh, ben, pourquoi y a pas de point d'intersection? ». L'enseignant répond : « Euh, ben, moi, yé supposé en avoir, mais le problème là, regarde, je vais tricher un peu là *(efface un des segments et le trace plus précisément),* le problème c'est, regarde l'épaisseur de la mine de mon crayon. ». Mais voilà qu'un autre élève dit ce qui suit à propos du point d'intersection : « Ben, moi non plus j'en ai pas. ». À nouveau, l'enseignant apporte les distinctions suivantes :

> « Ben, si y a une imprécision, ça veut dire. C'est une imprécision au niveau des mesures. Regarde, c'est pas pire…C'est sûr, sûr, sûr, qu'en construction, dès qu'on parle de construction, y va y avoir de l'imprécision et ça c'est certain. Et, donc, mon logiciel, euh, me permet de ne pas avoir d'imprécision, quoique c'est déjà arrivé quand même. Ok, comme tantôt, on a parlé au niveau de l'arrondissement, bon etc., mais, euh, c'est tout à fait normal. Faque, des fois, si vous voyez qui en a une, ben, tricher là un petit peu, vous savez qu'il doit y avoir un point d'intersection. »

L'enseignant complète ses constructions en ajoutant des marques de codage pour les angles droits et la congruence des segments. La leçon se termine ainsi et les élèves seront invités à pratiquer à nouveau les constructions à la leçon suivante. Tout comme pour le cas du triangle XYZ antérieurement cité, le fait de recourir à la mesure interfère avec l'intention d'expliquer une propriété. La propriété relative au point de rencontre des médianes appartient à GII, mais sa construction à la règle graduée est une action de GI. D'ailleurs, lorsque l'enseignant dit « Ben, tricher là un petit peu, vous savez qu'il doit y avoir un point d'intersection. », c'est au point de rencontre théorique (en GII) qu'il réfère pour rendre compte du phénomène d'imprécision obtenu par sa construction à la règle graduée (GI).

La leçon 2 débute par un questionnement de l'enseignant à ses élèves portant sur les définitions de médiatrice, hauteur et médiane. Les élèves sont appelés à définir ces objets géométriques ou à les identifier à partir d'éléments de définition. En accord avec le niveau 3 de son activité, l'enseignant insiste sur les définitions puisque leur maîtrise est nécessaire d'une part, à la construction des objets géométriques et, d'autre part, à la communication à l'aide d'un langage mathématique adéquat.

La leçon 2 se poursuit par la correction d'un devoir traitant de la conversion d'unités de mesure. Le reste du temps est laissé aux élèves afin qu'ils entreprennent un travail individuel de construction de médiatrices, hauteurs et médianes. L'enseignant circule dans la classe et valide le travail des élèves. Il leur suggère l'ajout de marques de codage pour identifier les angles droits et la congruence de côtés.

La leçon 3 correspond à la seconde orientation précisée au projet d'une leçon. Il s'agit de placer les élèves en situation de découverte des propriétés des quadrilatères à partir de constructions préalablement faites par l'enseignant à l'aide du logiciel de géométrie dynamique. Les quadrilatères étudiés sont dans l'ordre : le carré, le rectangle, le parallélogramme, le losange, le trapèze isocèle, le trapèze rectangle, le trapèze scalène et le quadrilatère quelconque (expressions utilisées par l'enseignant).

La leçon 3 comprend essentiellement deux parties. Les deux premiers tiers de la leçon servent au passage en revue des quadrilatères en fonction de leurs côtés, de leurs angles et de leurs diagonales. Les élèves ont entre les mains un document dans lequel ils doivent encercler, à partir de leurs connaissances antérieures, la ou les propriétés listées correspondant à chacun des quadrilatères. Aucune figure n'accompagne les propriétés. Le travail se fait avec tous les élèves. L'enseignant les questionne sans valider leurs réponses. L'institutionnalisation est prévue à la leçon suivante où les propriétés seront consignées dans un tableau à double entrée (propriétés/quadrilatères) déjà construit dans le même document des élèves. Cette première partie de la leçon donne lieu à diverses réponses selon les élèves et les quadrilatères. Par exemple, pour les diagonales du trapèze rectangle, un élève affirme qu'elles ne sont pas isométriques et se croisent en leur milieu, alors qu'un autre élève mentionne qu'elles ne se croisent pas en leur milieu. Cette divergence d'opinion est relevée par l'enseignant qui dit : « Donc, on ne s'entend pas ici nécessairement, super, va falloir vérifier. ». La vérification a lieu dans la seconde partie de la leçon 3.

Ainsi, la seconde partie de la leçon 3 sert à valider les choix encerclés par les élèves. La validation des propriétés relève de l'autorité du logiciel dans la mesure où l'enseignant montre aux élèves les fonctions servant à vérifier le parallélisme des côtés, la mesure des angles après les avoir marqués ainsi que la mesure des côtés. Les élèves doivent cette fois-ci noircir dans leur document les propriétés qu'ils auront validées. La plupart des élèves se contentent d'une seule vérification par quadrilatère en utilisant la fonction de reconnaissance du parallélisme des côtés et en faisant apparaître les mesures d'angles, de côtés, de diagonales produites par le logiciel. L'enseignant le remarque. Il aimerait bien que ses élèves profitent de la fonction du logiciel qui permet d'illustrer l'invariance des propriétés. Il ajoute: « N'hésitez pas là, si vous voulez vérifier là, vous cliquez sur l'un des sommets de votre, euh, quadrilatère, pis vous pourrez l'agrandir. ». Certains élèves le font mais la majorité d'entre eux n'en ressentent pas le besoin. Les quadrilatères préalablement construits par l'enseignant à partir de propriétés (GII) ont été employés par les élèves surtout à l'aide de la mesure (GI).

4.2.3.1.5 Résumé des niveaux 3 à 0 de l'activité de l'enseignant 3

Globalement, les intentions de l'enseignant aux niveaux 3 à 1 de son activité se traduisent surtout par des affirmations appartenant à l'un ou l'autre des paradigmes (GI-GII). En effet, lorsqu'il énumère des objets géométriques, des constructions de triangles, quadrilatères, médianes, médiatrices et hauteurs, le calcul d'aire, de périmètre, cela ne nous dit pas comment il entend travailler ces éléments auprès des élèves. Il en est de même quand il parle de faire réfléchir les élèves, leur faire découvrir des propriétés ou établir des liens entre la géométrie et la vie quotidienne : « Que ça soit en géométrie ou en arithmétique ou en algèbre, c'est de rattacher ça à la vie de tous les jours, montrer l'utilité dans le fond. ».

Par ailleurs, certains de ses propos, moins nombreux, s'inscrivent en GI ou vers GII. En GI, nous rappelons ici son exemple des dimensions (valeurs numériques) d'une maison pour montrer l'utilité de la géométrie. Quant à ses intentions vers GII, elles sont guidées par l'intérêt attribué aux définitions et aux propriétés des objets géométriques, lesquelles procurent plus de rigueur à son enseignement de la géométrie. Il en est de même pour le codage des figures géométriques. À titre d'exemple, l'enseignant a rejeté le problème 2 (GI) du questionnaire en déplorant l'absence de marques de codage sur les figures. De plus, la possibilité de facilement distinguer des référents théoriques de GII est son attente principale à l'égard des élèves. Il croit que cet apprentissage sera pérenne si les élèves sont amenés à réfléchir et à découvrir d'eux-mêmes les référents théoriques. Pour répondre à sa visée constructiviste de l'apprentissage, il va planifier des leçons sur la base de constructions produites à partir de propriétés et d'un logiciel de géométrie dynamique. Il entend tirer profit de ses constructions en lien avec la fonction d'illustration de l'invariance des propriétés que permet le logiciel.

Par ailleurs, les problèmes offerts aux élèves sont regroupés principalement sous les types *Reconnaître*, *Rechercher une mesure*, *Construire* et *Justifier*. Ceux du type *Reconnaître* sont répartis un peu en GI et surtout vers GII. Parmi les problèmes des types *Rechercher une mesure* et *Justifier* certains sont en GI ou en GI-II, mais la plupart tendent vers GII. Les problèmes du type *Construire* sont surtout en GI-II, alors que quelques autres sont en GI ou vers GII. À l'exception du type *Construire*, ses choix de problèmes tendent plutôt vers GII. De plus, ce sont les propriétés qui ont balisé le regard de l'enseignant pour l'évaluation des problèmes du questionnaire. Néanmoins, l'idée d'introduire de l'arithmétique dans l'enseignement de la géométrie (exprimée au niveau 3), c'est-à-dire recourir à des valeurs numériques et à la mesure, expliquerait peut-être pourquoi l'enseignant a été plus sensible aux figures non codées du problème 2 du questionnaire qu'il ne le fut pour des figures non codées de problèmes *Reconnaître* de son projet de construction et pour lesquelles il était permis de mesurer des longueurs et des angles. Cela expliquerait aussi qu'il n'ait pas rejeté le problème 4 du questionnaire, celui proposant trois figures de triangles à mesurer pour dégager une propriété. De plus, l'idée d'employer des valeurs numériques en géométrie justifierait peut-être la présence de problèmes de construction à la règle graduée et au rapporteur d'angles identifiés dans son projet de construction.

Les intentions de l'enseignant se sont actualisées en direction de GII en ce qui concerne sa volonté de faire apprendre des propriétés géométriques. Toutefois, son idée d'introduire de l'arithmétique à son enseignement de la géométrie a favorisé la présence d'éléments de GI dans ses leçons. En effet, des valeurs numériques ont servi à illustrer des propriétés, faire des constructions de médianes et médiatrices sur papier et valider des propriétés de triangles et quadrilatères. Les objets géométriques construits avec le logiciel de géométrie dynamique furent exploités plutôt dans une perspective de mesure. Il y a eu cohabitation des validations théorique (vers GII) et instrumentée (GI) où l'une subordonne l'autre et vice versa. Par exemple, à la leçon 1, pour le point d'intersection des médianes d'un triangle, c'est à l'aspect théorique (vers GII) qu'a référé l'enseignant pour expliquer l'imprécision causée par la mine de crayon ou la règle graduée (GI) pour la donnée du point milieu d'un segment. À la leçon 3, ce sont des valeurs numériques (GI) transmises par le logiciel pour des constructions Cabri qui ont servi à la validation d'énoncés de propriétés de quadrilatères (GII). Le déplacement des constructions n'a pas été le moyen privilégié des élèves pour faire les validations requises. Par ailleurs, les interventions en classe suivantes ont été cohérentes avec ce que l'enseignant avait annoncé aux niveaux 3 et 1 de son activité : il a sollicité la pensée des élèves par un questionnement régulier et il les a invités à consulter les définitions (vers GII). Ce fut le cas notamment pour la construction des médianes, médiatrices et hauteurs. Voyons les conceptions d'élèves.

4.2.3.2 Analyse de conceptions des élèves de la classe 3

Nous présentons dans ce qui suit des conceptions d'élèves dégagées à partir de problèmes des types *Rechercher une mesure*, *Justifier* et *Reconnaître*. Tel que dit à la section 4.2.3, nous n'avons pas pu questionner les élèves pour des problèmes du type *Construire*. Nous les avons donc interviewés à deux reprises à partir de problèmes du type *Reconnaître* compte tenu de son importance (43%) dans le projet de construction de l'enseignant.

4.2.3.2.1 Conceptions des élèves et problème Rechercher une mesure

Voici le problème[73] du type *Rechercher une mesure* employé pour les entretiens. Sa résolution est susceptible de se faire en GI ou vers GII, comme nous le verrons dans l'analyse a priori ci-dessous.

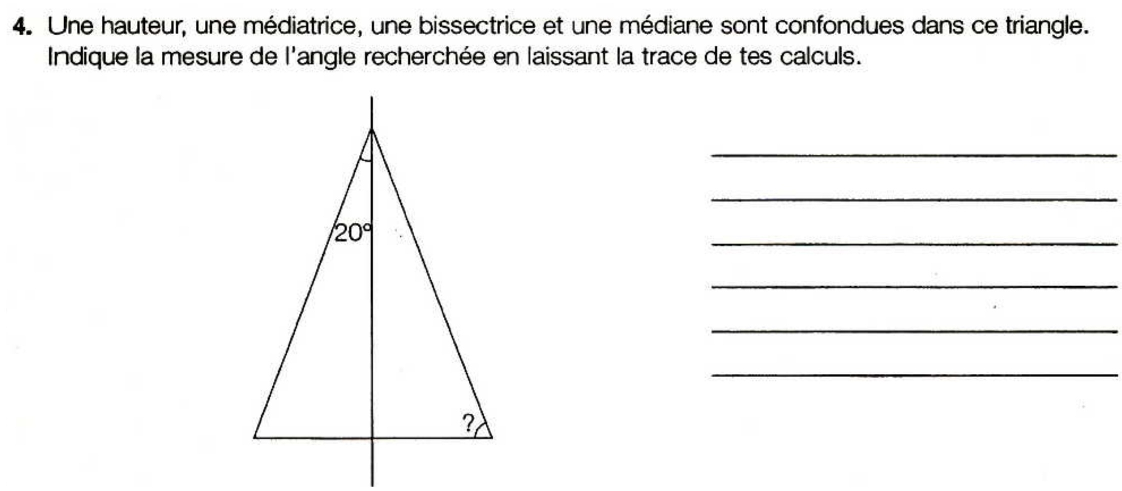


Figure 37 Problème - classe 3 Rechercher une mesure

4.2.3.2.1.1 Analyse a priori du problème

Le problème comprend un court texte et une figure. La première phrase permet de déduire la nature du triangle en référant au théorème correspondant. En effet, il s'agit d'un triangle isocèle puisqu'il y est dit qu'une hauteur, une médiatrice, une bissectrice et une médiane sont confondues. La seconde phrase indique la tâche. Il faut trouver une valeur d'angle et laisser la trace de ses calculs, non celle des énoncés sous-jacents aux calculs.

La figure n'a aucun point nommé par une lettre; sommets ou point de rencontre de la droite avec un côté. L'angle dont on cherche la valeur est identifié par un point

[73] Source : Guide B, *À vos maths!* p. 44.

d'interrogation. La figure donne à voir une valeur de 20º et une droite perpendiculaire séparant le triangle en deux sous figures (triangles). De plus, la figure est à l'échelle. Il n'y a aucune marque de codage.

La valeur de chacun des angles se vérifie au rapporteur y compris l'angle de 20 degrés (GI). Par ailleurs, la résolution se fait aussi sans égard à l'échelle de la figure, c'est-à-dire par l'emploi du théorème selon lequel si dans un triangle une bissectrice est aussi une hauteur, alors ce triangle est isocèle (vers GII). Trois techniques de résolution du problème sont envisagées.

Une première technique consiste à mesurer l'angle à l'aide du rapporteur. Pour cette technique, les calculs sont inutiles puisque le résultat s'obtient directement par une lecture de l'outil de mesure.

Une deuxième technique pour trouver la mesure de l'angle est de faire le calcul suivant : (180º - (2 x 20º)) ÷ 2. Elle est supportée par la technologie suivante : 1) définition de la bissectrice; 2) théorème de la somme des angles intérieurs du triangle; 3) théorème selon lequel, si dans un triangle une bissectrice est aussi une hauteur alors ce triangle est isocèle; 4) théorème selon lequel dans un triangle isocèle, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus.

Une troisième technique consiste à faire les calculs suivants : 20º + 90º = 110º et 180º- 110º = 70º. La technologie serait : 1) définition de la bissectrice; 2) définition d'une hauteur; 3) théorème de la somme des angles intérieurs du triangle.

Voyons ce qu'ont fait les élèves pour résoudre le problème.

4.2.3.2.1.2 Conceptions des élèves

Nos entretiens ont révélé la mise en œuvre des conceptions de *l'Appréhension perceptive globale d'une figure*, de la *Mesure d'une figure* et *Calculatoire;* conceptions déjà identifiées chez des élèves des classes 1 et 2.

Voici deux exemples extraits des entretiens des élèves 1 et 4 pour la conception *Appréhension perceptive globale d'une figure.* Rappelons pour cette conception que l’élève voit globalement la figure avec l’œil et que sa structure de contrôle correspond à la cohérence qu’il établit entre la figure et ce qu’il en perçoit ou en interprète.

L’élève 1 est le seul des élèves interviewés à avoir utilisé la deuxième technique de résolution décrite dans l’analyse a priori. Il a fait un calcul correspondant à (180º- (2 x 20º)) ÷ 2 en indiquant dans son cahier que le triangle était isocèle. Pendant l’entretien, il a ciblé la bissectrice sur la figure. Il a affirmé qu’il s’agissait bien d’une bissectrice en pointant le mot dans la phrase, mais son explication est restée tout de même centrée sur la figure. Aussi, lorsque nous avons demandé comment il avait su que c’était un triangle isocèle, celui-ci a répondu :

> « Ben, ben, sincèrement, je sais pas, ça me saute aux yeux. Ben, ici *(pointe la bissectrice sur la figure),* y a une bissectrice. Si y a une bissectrice pis que l’angle ici *(pointe l’angle indiqué 20º)* c’est 20º, ben, l’angle ici *(pointe l’autre angle à droite de la bissectrice)* ça, parce que c’est comme une, un, un, une flèche de, un axe de symétrie, or, ça coupe l’angle, ça coupe, ça coupe le triangle en deux pis les deux parties sont égales. »

Lorsque nous avons demandé à nouveau à l’élève 1 à quoi il avait su que c’était un axe de symétrie, il a répondu : « Je sais pas. ». Il n’a fourni aucune autre explication relative au théorème sollicité par le problème pour déduire le triangle isocèle.

L’élève 4 a fait des calculs correspondant à la troisième technique de résolution décrite dans l’analyse a priori : 20º + 90º = 110º et 180º- 110º = 70º. Mais il a effectué ses calculs à partir du triangle situé à gauche de la perpendiculaire en le jugeant congru à celui situé à droite de la perpendiculaire. Notons que les élèves 2 et 3 ont aussi utilisé la même technique de résolution à partir du triangle de gauche. Ainsi, en fonction de sa technique de résolution, l’élève 4 a dit: « J’me suis dit, ok, premièrement, le triangle est séparé en deux triangles congrus. ». Quand nous lui avons demandé à quoi il avait su que ces triangles étaient congrus, il a dit : « Parce que y avait, y avait, euh, une droite qui séparait les deux pis, d’après moi, ça semblait un peu, euh, congrus, alors je suis resté avec ça. ». De même, lorsque nous avons demandé comment il avait su que c’était séparé perpendiculairement, pour reprendre ses propos, il n’a pas référé à la hauteur indiquée dans l’énoncé, il a plutôt mentionné : « C’était séparé, c’était séparé congrus, alors je savais que c’était placé pour que ça soit en ligne droite. ».

Voici maintenant des extraits des entretiens auprès des élèves 2 et 3 concernant la conception *Mesure d'une figure.* Pour cette conception, l'élève mesure avec un outil un ou des éléments de la figure et sa structure de contrôle correspond à la validation du résultat de mesure établit en faisant une lecture juste ou approximative de l'outil. Par exemple, pour identifier la perpendiculaire, les élèves 2 et 3 ont mesuré la figure. Ils n'ont pas utilisé les propriétés des droites fournies dans le texte. L'élève 2 a affirmé :

> « Pis, ici *(pointe sur la figure l'angle formé par le segment à la base et la droite perpendiculaire),*quand j'ai fait avec mon rapporteur, ici, juste pour voir si c'est vraiment un angle droit, ben, c'est ça, c'était vraiment genre un angle droit. »

Quand à l'élève 3, lorsque nous avons demandé à quoi il avait su que c'était une perpendiculaire, il a dit que c'était parce qu'il y avait un angle droit. En réitérant notre question pour l'existence de l'angle droit, l'élève a répondu :

> « Euh, ben, j'ai aussi vérifié avec mon rapporteur d'angles, mais aussi, ben, j'trouve que ça se voit bien à l'œil nu, mais aussi, moi, des fois, j'prends ma règle pis j'la place parce que la règle c'est tout le temps droit. Donc, j'la place pis je vois si ça, si c'est 90º. »

Aussi, la mesure a servi d'argument à l'élève 3 pour déterminer la congruence des deux triangles. Il a affirmé :

> « Ben, j'avais mesuré ici *(pointe le segment à la base du grand triangle)* les, les. J'avais mesuré tous les côtés du triangle pis à chaque fois que je mesurais entre les deux *(pointe les deux segments à la base de part et d'autre de la perpendiculaire)*, ben, c'était congru. Pis vu que ça part du sommet que ça va en son milieu, ben, ça veut dire que les deux vont être congrus dans le fond. »

Parmi les traces des trente-deux cahiers, nous avons compté onze élèves dont les calculs correspondent à la première technique décrite dans l'analyse a priori, dix-neuf autres selon la seconde technique et deux élèves avec un résultat de 70º sans calcul. Pour ces deux élèves, il est possible qu'ils aient utilisé un rapporteur d'angle. Il n'est pas exclu aussi qu'ils aient fait leurs calculs mentalement, ne fournissant que le résultat. Ainsi, les élèves ont mobilisé une conception de type *Calculatoire* en faisant des calculs avec une structure de contrôle figurale par la prise en compte de la donnée numérique de 20 degrés et théorique. Mais pour la structure de contrôle théorique, compte tenu de la présence des conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure*, il n'est pas assuré que les élèves aient employé tous les référents théoriques visés par le problème. En effet, aucun élève questionné n'a fait référence au théorème selon lequel, si dans un triangle une bissectrice est aussi une hauteur, alors ce triangle est isocèle. Peut-être en a-t-il été de même pour d'autres élèves de la classe?

4.2.3.2.2 Conceptions des élèves et problèmes Justifier

Voici les problèmes[74] utilisés pour les entretiens.

action!

1. Un losange est-il nécessairement un rectangle ? Pourquoi ?

2. Un rectangle est-il nécessairement un carré ? Pourquoi ?

3. Un carré est-il nécessairement un trapèze ? Pourquoi ?

4. Un quadrilatère est-il nécessairement un losange ? Pourquoi ?

Figure 38 Problèmes - classe 3 Justifier

La résolution des problèmes sollicite l'expression de référents théoriques de GII, ce qui est cohérent avec l'attente de l'enseignant à l'égard des élèves. Il souhaite qu'ils réfèrent aux définitions et aux propriétés. Voyons dans ce qui suit l'analyse a priori des problèmes suivie des conceptions d'élèves.

4.2.3.2.2.1 Analyse a priori des problèmes

Les énoncés doivent être validés et expliqués. Ils sont rédigés selon la même syntaxe : *un quadrilatère a est-il nécessairement un quadrilatère b? Pourquoi?* Pour comprendre la formulation, le lecteur doit considérer les propriétés du *quadrilatère b* à l'égard de celles du *quadrilatère a*, ce qui représente une difficulté de lecture potentielle pour certains élèves. Par ailleurs, il n'y a pas de figures. C'est un avantage dans la mesure où aucune figure particulière n'est susceptible d'influencer la réflexion. C'est un

[74] Source : Manuel *À vos maths!* vol. B, p. 195.

inconvénient si la seule lecture des noms de quadrilatères empêche l'évocation d'images mentales appropriées, par exemple.

Une technique de résolution consiste à comparer les quadrilatères de chacun des énoncés et à déterminer une propriété pertinente pour les différencier. Les technologies réfèrent aux définitions et aux propriétés des quadrilatères et leurs liens logiques.

À la question *Un losange est-il nécessairement un rectangle?* la réponse serait négative et se justifierait par une prise en compte des angles du losange et du rectangle. Un losange n'a pas nécessairement ses quatre angles droits comparativement à ceux du rectangle.

À la question *Un rectangle est-il nécessairement un carré?* la réponse serait négative et se justifierait par une prise en compte de la congruence des côtés. Un rectangle n'a pas nécessairement ses quatre côtés congrus comparativement à ceux du carré.

À la question *Un carré est-il nécessairement un trapèze?* la réponse serait positive et se justifierait par une prise en compte du parallélisme des côtés opposés. Un carré a deux paires de côtés opposés parallèles, donc a fortiori il en possède au moins une paire comme le trapèze.

À la question *Un quadrilatère est-il nécessairement un losange?* la réponse serait négative et se justifierait par une prise en compte de la congruence des côtés. Un quadrilatère est un polygone à quatre côtés sans autre particularité. Par conséquent, il n'a pas nécessairement tous ses côtés congrus comme le losange.

Les éléments de justification ci-dessus correspondent aux réponses attendues dans le guide du maître. Ils sont minimalement requis pour faire les comparaisons de quadrilatères correctement. Toutefois, des élèves pourraient fournir des éléments supplémentaires basés sur les angles et les côtés, à tort ou à raison.

4.2.3.2.2.2 Conceptions des élèves

Nos entretiens n'ont révélé aucune nouvelle conception. Nous avons identifié la conception *Référence*, antérieurement observée auprès d'élèves des classes 1 et 2.

Les élèves ont lu chacun des énoncés en ciblant les quadrilatères en jeu. Ensuite, ils ont identifié une ou plusieurs propriétés sur la base desquelles ils ont formulé leurs arguments. Ils ont eu recours essentiellement à leurs notes de cours comme structure de contrôle théorique. Nous avons observé une certaine précarité dans leurs apprentissages des propriétés des quadrilatères; nous laissant ainsi entrevoir la dimension fluctuante de la conception *Référence*. À titre d'exemple, voici des propos tenus par l'élève 3 au sujet du losange (quadrilatère visé par les énoncés 1 et 4).

Au premier énoncé *Un losange est-il nécessairement un rectangle? Pourquoi?* l'élève 3 avait écrit dans son cahier « Non parce que ses 4 côtés sont isométriques. ». Il avait déterminé à juste titre que l'énoncé était faux, mais en formulant son argument sur la comparaison de la congruence des côtés du losange et du rectangle, alors que la réponse du guide, énoncée dans l'analyse a priori, visait une comparaison des angles. Dans l'extrait suivant, il a expliqué comment il a fait pour écrire son argument :

> « Euh, ben, c'est que j'ai vu, j'ai regardé toutes les propriétés, euh, de chaque quadrilatère avec, euh, avec les fiches, pis j'ai vu que, euh, le rectangle avait pas, y avait pas des propriétés qui n'avait pas que le losange avait, mais que le rectangle n'avait pas, alors, euh, ben, j'ai marqué que non. C'est, c'est un losange. C'est pas un rectangle parce que, vu que le losange a les quatre côtés isométriques, mais le rectangle non. »

Dès le premier énoncé, l'élève 3 avait affirmé avoir évalué les propriétés des quadrilatères à l'aide de fiches. Il a fait de même pour les autres énoncés. Au quatrième énoncé *Un quadrilatère est-il nécessairement un losange?* il avait écrit dans son cahier : « Non, parce qu'il peut être un carré, un rectangle, etc. ». Pour cet énoncé, comme pour le premier, l'élève avait considéré l'énoncé négatif, ce qui est exact. Toutefois, il a justifié sa réponse en nommant des quadrilatères particuliers plutôt que de référer aux propriétés ou à la définition du quadrilatère. Lorsqu'est venu le moment de discuter de son argument concernant l'énoncé 4, l'élève a donné un avis contraire à ce qu'il avait exprimé pour le losange au premier énoncé. Pendant l'entretien, il a affirmé ce qui suit :

> « Ben, j'ai vu que le losange avait pas les mêmes propriétés que le carré, le rectangle. Il avait moins de propriétés parce que le losange pis le carré. Ben, le carré y a quatre côtés isométriques, mais pas le losange. Donc, c'est pour ça que j'ai vu que c'était pas un, un losange, c'était pas un carré. Donc, ça peut pas être tous les quadrilatères. »

Dans l'extrait précédent, il a mentionné que le losange n'avait pas ses quatre côtés isométriques. Pourtant, il avait écrit le contraire pour justifier le premier énoncé en disant que le losange avait ses quatre côtés isométriques. Mais l'élève 3 nous a aussi dit avoir « […] regardé toutes les propriétés, euh, de chaque quadrilatère avec, euh, avec les fiches. ». Or, dans la mise en œuvre de la conception *Référence*, c'est le cahier de théorie, ici les fiches, qui assurent la validité théorique du contenu auquel les élèves se réfèrent pour résoudre les problèmes. Cette validité théorique du contenu n'est pas à remettre en question puisqu'elle est assurée par l'enseignant. Par contre, quand l'élève 3 par exemple, regarde toutes les propriétés des fiches, il observe une liste de propriétés dans un tableau à double entrée *Propriétés/Quadrilatères*. Nous émettons l'hypothèse selon laquelle la précarité de la conception *Référence* serait due notamment au fait que la mise en relation hiérarchique des propriétés de la liste est laissée à la charge de l'élève lorsqu'il l'observe.

Voyons maintenant ce qui ressort de l'analyse des traces écrites provenant des cahiers des élèves de la classe. Pour chacun des énoncés, vingt-deux élèves ont fourni des résultats avec ou sans argument.

Le premier énoncé *Un losange est-il nécessairement un rectangle?* a été considéré négatif, à juste titre, par tous les élèves où deux n'ont pas donné d'argument. Pour les vingt élèves qui ont justifié leur réponse, nous avons noté quatre catégories. Dans la première catégorie, quatre élèves ont donné un argument provenant d'une comparaison des côtés du losange et du rectangle, comme l'élève 3. Dans la seconde catégorie, huit élèves ont fait référence aux angles du losange en comparaison de ceux du rectangle. C'est l'argument attendu dans le guide du maître et décrit dans l'analyse a priori. Dans la troisième catégorie, trois élèves ont fait mention à la fois des côtés et des angles pour comparer le losange et le rectangle. Nous avions anticipé cette possibilité. Dans la quatrième catégorie, cinq élèves ont produit des arguments sans spécifier de propriétés, par exemple l'élève 5 avait écrit: « Non car un losange n'a pas les mêmes propriétés qu'un rectangle. ».

Le second énoncé *Un rectangle est-il nécessairement un carré?* a été correctement considéré négatif par vingt-et-un élèves et jugé positif par un seul autre. Des vingt-deux élèves, quatre n'ont pas donné d'argument y compris celui qui a jugé l'énoncé positif. Les dix-huit autres ont justifié leur réponse négative en comparant les côtés du rectangle et du carré, par exemple l'élève 8 avait écrit : « Non parce qu'un rectangle n'a pas 4 côtés isométriques. ». La majorité des élèves ont fourni un argument s'approchant de celui décrit dans l'analyse a priori. Nous employons l'expression *s'approchant* car l'absence du mot *nécessairement* dans les formulations des élèves peut laisser supposer qu'ils établissent la comparaison des côtés du rectangle et du carré de manière exclusive. Si tel est le cas, alors il n'est pas assuré que les élèves acceptent le raisonnement suivant : Lorsque nous disons qu'un rectangle n'a pas nécessairement ses quatre côtés congrus, cela signifie qu'il pourrait les avoir, auquel cas il s'agirait d'un carré.

Le troisième énoncé *Un carré est-il nécessairement un trapèze?* est celui où les élèves ont moins bien performé. Le tableau XII synthétise leurs résultats.

Tableau XII Réponses d'élèves aux problèmes Justifier - classe 3

	Réponse positive	Réponse négative	
Réponse sans argument	1 élève	5 élèves	6 élèves
Réponse avec argument	3 élèves	13 élèves	16 élèves
	4 élèves	18 élèves	22 élèves

Comme le montre le tableau XII, dix-huit élèves ont déclaré l'énoncé négatif contrairement à ce qui était attendu dans l'analyse a priori. Seulement quatre élèves l'ont dit positif. C'est l'énoncé pour lequel nous avons observé la plus grande variété d'arguments. En fait, seize élèves ont donné des justifications se répartissant en cinq catégories. Dans la première catégorie, deux élèves ont fait une comparaison du carré et du trapèze à partir de la congruence des angles et des côtés du carré (2 réponses négatives). Dans la seconde catégorie, cinq élèves ont établi leur comparaison selon la congruence des côtés des quadrilatères (4 réponses négatives et 1 réponse positive). Pour la troisième catégorie, trois élèves ont basé leur comparaison sur la congruence des angles (3 réponses négatives). Dans la quatrième catégorie, trois élèves ont référé au parallélisme des côtés (2 réponses positives et 1 négative). Le parallélisme des côtés était l'argument attendu dans l'analyse a priori. Trois élèves ont considéré l'apparence des quadrilatères (3 réponses négatives), par exemple l'élève 19 avait écrit : « Non parce que le trapèze est une forme différente. ».

Le quatrième énoncé *Un quadrilatère est-il nécessairement un losange?* a été jugé négatif, à juste titre, par tous les élèves à l'exception de l'élève 19 qui avait écrit : « Oui parce qu'il a 4 côtés ». Dix-neuf élèves ont justifié leurs réponses. Leurs arguments se répartissent en trois catégories. Dans la première catégorie, sept élèves ont donné l'argument selon lequel un quadrilatère a quatre côtés sans autre spécification, ce qui satisfait l'argument attendu dans l'analyse a priori. Dans la seconde catégorie, neuf élèves ont formulé leur argument en spécifiant qu'un quadrilatère pouvait être autre chose qu'un losange en nommant des quadrilatères, par exemple le rectangle. Dans la troisième catégorie, trois élèves ont fourni des arguments non appropriés, par exemple l'élève 18 avait écrit : « Non car un quadrilatère peut avoir des angles obtus et pas un losange. ».

4.2.3.2.3 Conceptions des élèves et problèmes Reconnaître

Voici les problèmes[75] utilisés pour les entretiens.

1. On a tracé une droite dans chacun des triangles suivants. Détermine s'il s'agit d'une bissectrice, d'une médiatrice, d'une médiane ou d'une hauteur. Il peut y avoir plusieurs réponses pour un même triangle.

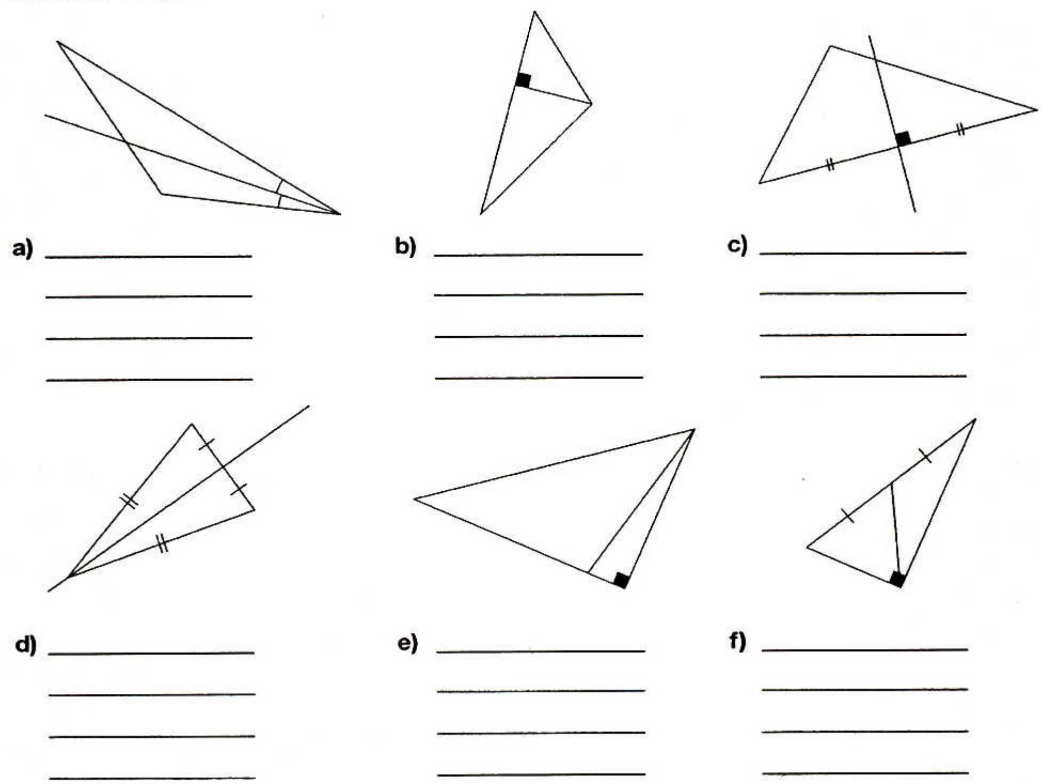


Figure 39 Problèmes - classe 3 Reconnaître

Ces problèmes, choisis par l'enseignant, sont cohérents avec l'intérêt qu'il porte aux définitions et propriétés dans la mesure où ils contiennent des figures codées. Ils sont orientés vers GII. Nous en présentons l'analyse a priori suivie des conceptions d'élèves.

[75] Source : Guide B, *À vos maths!* p. 43.

4.2.3.2.3.1 Analyse a priori des problèmes

Pour répondre à la tâche, il faut déterminer si chacune des droites correspond à une bissectrice, une médiatrice, une médiane ou une hauteur. L'énoncé mentionne la possibilité d'obtenir plusieurs réponses pour une même figure.

Les figures représentent des triangles dans diverses positions. Nous y voyons des sous figures de triangles et un quadrilatère (figure c). Aucune figure n'a de points identifiés par des lettres. Il est plus difficile d'y repérer à quelle droite l'énoncé fait référence; c'est le cas de la figure e). Sur les figures, le codage sert à identifier des angles droits et des segments congrus. Les angles droits et les segments congrus sont à l'échelle. À noter que la figure a) montre deux petits arcs. Il n'est pas certain qu'ils représentent la congruence des angles pour les élèves puisque leur emploi vise aussi dans la pratique à marquer un angle sans égard à sa valeur.

Une technique de résolution consiste à observer les figures et les marques de codage pour nommer la ou les droites tracées. Les technologies réfèrent aux définitions d'une médiane, d'une hauteur, d'une médiatrice, d'une bissectrice ainsi qu'au théorème selon lequel dans un triangle isocèle la médiane relative à la base est bissectrice, hauteur et médiatrice de cette base.

La figure a) risque d'être associée à la bissectrice même dans le cas où les élèves ne feraient pas une lecture des petits arcs congrus. Ceci est suggéré parce que les angles semblent congrus sur la figure et parce qu'il n'est pas coutumier pour les élèves de réfléchir à un problème qui n'a pas de solution. L'observation des marques de codage sur la figure b) permet d'identifier le tracé d'une hauteur. Les marques de codage sur la figure c) suggèrent le tracé d'une médiatrice. La figure d) montre un triangle isocèle. Par conséquent, la droite est à la fois une hauteur, une médiane, une médiatrice et une bissectrice. Sur la figure e), il est possible de voir une hauteur tracée à l'extérieur du triangle. Toutefois, si l'élève considère un triangle rectangle, alors le segment tracé à l'intérieur de celui-ci ne peut pas être identifié. Quant à la figure f), les marques de codage illustrent une médiane si l'on considère le segment tracé à l'intérieur du triangle rectangle. De plus, la présence d'une marque pour l'angle droit pourrait inciter des élèves à fournir la réponse hauteur.

4.2.3.2.3.2 Conceptions des élèves

Voici la compilation des réponses issues des cahiers des élèves interviewés.[76] La compilation des réponses de tous les élèves est présentée à la fin de cette section.

Tableau XIII Réponses d'élèves aux problèmes Reconnaître - classe 3

	Figure a	**Figure b**	**Figure c**	**Figure d**	**Figure e**	**Figure f**
Élève 2	Bissectrice	Hauteur Médiane	Médiatrice	Droite Médiatrice Bissectrice	Hauteur	Médiane
Élève 3	Médiatrice	Médiane Hauteur	Médiatrice Hauteur	Hauteur Médiatrice Bissectrice	Hauteur	Hauteur Médiatrice
Élève 4	Médiatrice	Médiane	Médiane	Bissectrice	Médiane	Hauteur

Le tableau XIII montre qu'aucune figure n'a donné des réponses complètement identiques. Par exemple, la figure a) est nommée bissectrice par l'élève 2 et médiatrice par les élèves 3 et 4. Pour la figure b), la médiane est choisie par les trois élèves alors que la hauteur n'est nommée que par les élèves 2 et 3, etc. Nos entretiens se sont avérés pertinents pour comprendre ce qui a présidé à ces choix. Voici, pour chacun d'eux, des exemples de conduites à partir desquelles nous avons identifié des conceptions.

L'élève 2 n'a pas mobilisé la conception *Référence*. Après avoir expliqué qu'il avait lu la consigne commune aux six problèmes, il a dit : « Ben, j'ai euh, j'ai pas pris mon document parce que je voulais savoir, euh, dans ma tête, si j'étais capable. ». L'élève a signifié qu'il voulait tester ses connaissances des droites remarquables. Nous l'avons donc questionné pour chacune des six figures.

[76] Nous ne disposions que des solutions des élèves 2, 3 et 4 pour les entretiens. L'élève 1 a été interrogé à partir d'autres problèmes du type *Reconnaître*.

À la figure a), l'élève 2 avait fait le choix de la bissectrice. Lors de l'entretien, il a formulé une définition de la bissectrice adéquate: « Ben, je sais que par exemple une bissectrice ça sépare les angles en deux parties égales. ». Quand nous avons demandé comment il avait fait pour écrire une bissectrice, il a répondu : « Parce que ici *(pointe la figure a),* y montre que ça sépare l'angle, mais en deux parties égales, sauf que y aurait juste dû mettre les deux lignes pour dire que c'était égal. ». Nous sommes revenue à la charge en demandant comment il avait su que les angles formaient deux parties égales, il a dit : « Ben, c'est pas écrit genre, mais ça l'air égal. ». En insistant et demandant comment il s'était assuré que la solution était correcte, il a dit: « Ben, ça dépend du dessin. ». Sa conduite correspond à ce que nous avons décrit dans l'analyse a priori. La bissectrice était la réponse appropriée puisque les angles paraissaient congrus selon une *Appréhension perceptive globale d'une figure*.

Pour les cinq autres figures (b à f), nous avons noté une variation du discours de l'élève 2, c'est-à-dire de ses définitions des droites remarquables en fonction du regard porté aux figures et aux marques de codage. Autrement dit, les définitions formulées par l'élève étaient correctes ou non d'un point de vue mathématique en étant susceptibles de changer. Si sur une figure il n'y avait pas une ou des marques de codage correspondant à un ou à tous les éléments de sa définition de l'objet géométrique, alors soit cet élément était passé sous silence dans son discours, soit la définition au complet était ignorée de l'élève. Par exemple, pour la hauteur, l'élève 2 en a donné une définition mathématique correcte: « Mais je savais que c'était une hauteur parce que y a un angle droit pis ça part du sommet au côté opposé. ». Nous retrouvons dans son cahier, à juste titre, le mot hauteur aux figures b) et e). Mais la hauteur n'est pas nommée par l'élève à la figure d), d'une part parce que les angles droits ne sont pas codés, et, d'autre part, parce que les marques de congruence des côtés du triangle isocèle ne lui ont pas permis d'induire le théorème selon lequel dans une triangle isocèle la médiane relative à la base est à la fois bissectrice, hauteur et médiatrice de cette base.

Pour la médiatrice, l'élève 2 a indiqué ce choix avec raison aux figures c) et d). Néanmoins, pendant l'entretien, il a modifié sa définition de la médiatrice par sa lecture des deux figures respectives. Ainsi, sa définition à partir de la figure c) est relativement juste. L'élève parle aussi du point d'intersection des trois médiatrices dans un triangle.

> Figure c : « Médiatrice, c'est que ça sépare, euh, un côté, ben, une droite j'veux dire, en deux droites, si on peut dire comme ça, égales perpendiculairement pis, mais à chacun ça doit, y doit, y avoir un point de rencontre, un point d'intersection. »

Par contre, en d), l'élève a passé sous silence la perpendicularité de la droite et il a fait intervenir le passage de la médiatrice par un sommet du triangle, correspondant ici au cas particulier du triangle isocèle. Il semble que l'élève confonde la médiatrice avec la médiane.

> Figure d : « Euh, médiatrice parce que ça part du côté opposé *(pointe un sommet du triangle sur la figure)*, euh, ben, parce que dans le fond, ouais, c'est ça, ça part du, euh, du sommet au côté opposé *(pointe la droite sur la figure en partant du sommet au côté opposé)* en deux parts, pis ça sépare en deux parties égales *(pointe les segments congrus à la base du triangle et les marques de codage)*. »

De plus, l'absence de marques pour les angles droits a aussi influencé l'élève dans le cas de la médiane. L'élève en avait une définition inadéquate d'un point de vue mathématique: « Parce que médiane, je sais que ça part du sommet jusqu'au côté opposé pis ça sépare perpendiculairement. ». Muni de cette définition, il a reconnu ces attributs sur la figure b), ce qui explique l'ajout de la médiane à celui de la hauteur. Toutefois, comme il ne voyait pas de marques pour les angles droits sur la figure d), il n'a pas retenu la médiane : « Ben, j'me suis demandé sauf que y avait pas l'angle droit. Donc, je savais pas vraiment si c'était une médiane parce que médiane ça doit aussi séparer perpendiculairement. ».

Par ailleurs, la définition de la médiane donnée par l'élève a légèrement changée lorsqu'il a regardé la figure f). Pour cette figure, l'élève 2 a dit: « La médiane, elle est partie du sommet au côté opposé, mais ça l'a pas séparé perpendiculairement, mais quand même en parties égales. ». Dans cette situation, c'est sur la base du codage des segments congrus que l'élève 2 a déterminé qu'il s'agissait d'une médiane, sacrifiant au passage l'élément angle droit de *sa* définition de cette droite.

Le codage de segments congrus a aussi été considéré par l'élève 2 pour identifier une bissectrice à la figure d), mais cette prise en compte des marques ne lui a pas permis d'énoncer le théorème justifiant ce choix. L'élève a dit :

> « Ben, y avait la droite ici pis aussi parce que ces deux côtés là (*pointe les marques de codage qui indiquent la congruence des deux côtés du triangle*) sont, euh, sont congrus. Ça veut dire que les deux angles (*pointe les angles formés par la bissectrice*) sont aussi congrus. »

Pour les figures b) à f), l'élève 2 a mobilisé la conception nommée *Appréhension des marques de codage d'une figure*. Elle réfère au problème type (P) où identifier un objet géométrique représenté par une figure à partir d'informations codées. L'opérateur (R) consiste à observer la figure et ses marques de codage. Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur est visuel. Il correspond aux mouvements des yeux pour repérer la ou les marques de codage. La structure de contrôle est double. Elle est figurale ($\sum_1$) puisque l'élève prend en compte la ou les marques de codage. Elle est théorique ($\sum_2$) car l'élève discrimine la ou les marques selon sa compréhension de la définition de l'objet géométrique représenté.

L'élève 3 a résolu les problèmes après avoir relu les définitions inscrites dans son cahier de notes : « Mais d'abord, j'ai pris mon cahier, ben, les polygones, pis j'ai relu toutes les définitions, pis, euh, ensuite, ben, j'ai fermé mon cahier pis j'ai marqué toutes les affaires que je croyais que c'était. ». Pour la figure a), l'élève a indiqué une médiatrice par une *Appréhension perceptive globale* de cette figure. Précisément, c'est le côté (gauche) du triangle qui a orienté son choix dans la mesure où il le voyait coupé en deux parties égales. Nous reviendrons sur cet élément lors de la discussion de la médiatrice.

Pour les figures b) à f), l'élève 3 a mobilisé la conception *Appréhension des marques de codage d'une figure*. Par exemple, pour la hauteur, l'élève 3 en a donné une définition correcte : « Je savais que c'était une hauteur parce ça commençait d'un sommet pis ça allait perpendiculairement. ». Dans son cahier, nous retrouvons, à juste titre, le mot hauteur aux figures b), d), e), et f) pour deux côtés du triangle rectangle. Toutefois, dans le cas de la figure d), ce ne sont pas les marques de codage du triangle isocèle (et le théorème sous-jacent) qui ont guidé l'élève 3 pour la hauteur, mais bien la mise en œuvre des conceptions *Mesure d'une figure* et *Appréhension perceptive globale d'une figure*. En effet, lorsque nous avons demandé comment il avait su que la droite était perpendiculaire sur la figure d), il a dit: « Euh, ben, j'ai pris mon rapporteur d'angles, mais aussi ça se voit à l'œil nu que c'est perpendiculaire, mais c'est mieux de vérifier avec son rapporteur d'angles. ». Par ailleurs, son indication d'une hauteur à la figure c) relève d'une erreur d'inattention : « Ah! ben, pour euh, une hauteur, c'est que j'avais pas remarqué que c'était pas d'un sommet. J'avais juste vu que c'était perpendiculaire, alors j'ai marqué vite, euh, une hauteur. C'est pour ca. ».

Pour la définition de la médiatrice, l'élève 3 avait retenu l'idée de deux segments congrus de part et d'autre de cette droite. Conséquemment, l'identification des marques de congruence des segments aux figures c), d), et f) l'a conduit à faire le choix de la médiatrice. Dans le cas de la figure a), à défaut de pouvoir observer des marques de congruence des segments, c'est sur la base d'une observation globale de la figure que l'élève a fait le choix de la médiatrice, comme nous l'avons dit précédemment.

Pour la médiane, l'élève 3 n'avait retenu que l'élément de la définition selon lequel la droite est issue d'un sommet du triangle. Sur cette base, il a nommé la figure b) une médiane. Toutefois, il s'est refusé à faire de même pour les figures dont le côté opposé au sommet, duquel était issue la droite, paraissait séparé en deux segments congrus ou était identifié comme tel par des marques de codage. À noter que la figure e) aurait pu être nommée médiane, mais l'élève ne l'a pas fait. Nous croyons que cela provient du fait que la droite représentée par une hauteur est à l'extérieur du triangle, contrairement à la figure b). Néanmoins, nous ne pouvons pas l'affirmer avec certitude puisque cette partie de l'entretien n'a pas permis d'éclaircir ce point.

Ajoutons, pour terminer avec l'élève 3, que ce sont aussi les marques de codage de la congruence des segments qui ont été ciblées pour l'identification de la bissectrice à la figure d). L'élève a dit : « Pis une bissectrice, ben, ça aussi, ça coupait au milieu. ». À la suite de ces propos, nous avons demandé : « Et quand tu as dit que ça coupait au milieu, c'était au milieu de quoi? ». En réponse à cette question, il a affirmé : « Ben, ça coupait au milieu, au milieu de la ligne oppo, euh, de non, du segment opposé. ».

L'élève 4 a consulté son cahier pour vérifier ses réponses : « Ben, comme j'ai dit, j'ai revérifié, pis, euh, j'ai regardé un peu le cahier, c'est vrai, pour trouver les, euh, réponses, euh, trouver pour, euh, les affaires, mais j'ai, à la fin quand j'les ai finis. ». À la figure a), il avait remarqué l'absence de marques de codage. Pendant l'entretien, il a dit ne pas s'être autorisé à écrire le mot *bissectrice* même s'il trouvait que la figure en suggérait une représentation. Par respect du contrat didactique, tout problème est censé se résoudre, l'élève 4 a fait le choix de la *médiatrice* au hasard, comme en témoigne l'extrait suivant :

> « J'ai, j'ai pas vu de lignes qui disaient, comme par exemple ici *(pointe les marques de codage de la figure f)*, que c'étaient congrus, mais je savais pas si c'était bissectrice vraiment, pis j'voulais pas répondre, tsé rien, alors j'ai t'allé pour deviner, alors j'ai mis médiatrice. »

Pour les figures b) à f), l'élève 4 a sollicité l'*Appréhension des marques de codage d'une figure* et aussi l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* dans le cas de la figure c).

En effet, pour la figure b), l'élève avait indiqué une médiane. Il avait repéré le codage de l'angle droit et l'avait associé à sa compréhension de la définition d'une médiane. « J'm'avais dit, ok, c'est perpendiculaire, mais c'est pas congru…J'avais pas appris les trois, mais j'avais noté, pis, euh, celui qui me convenait le plus pour le marquer, c'était la médiane. ». La même conduite l'a mené à nommer la figure e) *médiane* même si la position de la droite perpendiculaire était différente sur cette figure. Par contre, pour évaluer la figure c), l'élève l'a globalement comparée à la figure b) sans considérer les éléments codés spécifiques à chacune des figures b) et c), faisant intervenir l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*. Pendant l'entretien, il a dit de la figure c) : « J'm'avais fié un peu à l'autre au b) parce que c'était environ le même triangle. ». Nous avons demandé d'expliquer ce qu'il avait voulu dire et il a mentionné :

> « Que si, si tu le plaçais, si t'avais comme une p'tite rotation *(mime de prendre par le pouce et l'index la figure en b) pour la superposer sur la figure en c)* pis c'était un peu plus élargi, pis, euh, comme j'ai fait, j'ai pas, j'ai pas vraiment pensé à des affaires congrues, alors, euh, c'est ça qui m'a donné, euh, mettre une médiane. »

Pour la hauteur identifiée à la figure f), l'élève a référé aux marques de codage de l'angle droit ainsi qu'à celles de la congruence des segments. C'est en fonction de ces marques qu'il a déterminé son choix : « Hauteur parce que c'était droit et, euh, deux côtés congrus, j'me suis dit, ok, peut être une hauteur pour avoir deux côtés congrus. ».

Pour la bissectrice identifiée à la figure d), l'élève 4 a eu recours à l'ensemble des marques de codage afin d'expliquer la congruence des deux triangles obtenus de part et d'autre de la droite. Mais il n'a pas mis en relation ces marques avec l'obtention d'un triangle isocèle ainsi qu'avec le théorème selon lequel dans un triangle isocèle la médiane relative à la base est à la fois bissectrice, hauteur et médiatrice de cette base.

En résumé des entretiens, nous avons noté la conception de l'*Appréhension des marques de codage d'une figure*. Pour sa mise en œuvre, les élèves ont retenu une ou plusieurs marques selon leur compréhension des définitions des objets géométriques représentés. Par ailleurs, la présence de marques de codage aux figures b) à f) n'a pas été un frein à la mobilisation de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* par les élèves 3 et 4 et à la *Mesure d'une figure* par l'élève 3. De plus, chaque élève a réagit différemment à la figure a); l'élève 2 a perçu une bissectrice, l'élève 3 une médiatrice, et l'élève 4 une médiatrice même si la figure lui inspirait l'image d'une bissectrice.

Nous terminons par la compilation des résultats provenant des cahiers des trente élèves ayant résolu les problèmes. Le tableau XIV suivant montre une diversité des réponses selon les figures.

Tableau XIV Réponses des trente élèves aux problèmes Reconnaître - classe 3

Figures	Résultats des élèves
Figure a)	Bissectrice (21/30); Médiatrice (4/30); Hauteur (2/30); Bissectrice et médiane (2/30); Aucune réponse (1/30)
Figure b)	Hauteur (24/30); Hauteur et médiane (4/30); Bissectrice (1/30); Médiane (1/30)
Figure c)	Médiatrice (23/30); Médiane (1/30); Médiatrice et hauteur (1/30); Médiane et bissectrice (1/30); Hauteur et bissectrice et médiane (1/30); Médiane (1/30); Médiatrice et médiane (1/30); Aucune réponse (1/30)
Figure d)	Bissectrice et médiatrice et médiane et hauteur (10/30); Bissectrice (8/30); Bissectrice et médiatrice et médiane (3/30); Médiane et bissectrice (3/30); Médiatrice et bissectrice (2/30); Droite et médiatrice et bissectrice (1/30); Hauteur et médiatrice et bissectrice (1/30); Hauteur et médiatrice et médiane (1/30); Bissectrice et hauteur et médiane (1/30)
Figure e)	Hauteur (22/30); Médiane (2/30); Aucune réponse (2/30); Médiane et hauteur (2/30); Médiatrice et médiane et hauteur (1/30); Médiatrice (1/30)
Figure f)	Médiane (23/30); Médiane et hauteur (3/30); Hauteur (1/30); Médiane et bissectrice (1/30); Médiane et médiatrice (1/30); Hauteur et médiatrice (1/30)

4.2.3.2.4 Conceptions des élèves et problèmes Reconnaître

Nous présentons des problèmes[77] du type *Reconnaître* dont les figures n'ont pas de marques de codage contrairement aux problèmes de la section précédente.

1. Fais l'étude des quadrilatères à l'aide du tableau des propriétés et déduis le type de quadrilatère en étant le plus précis possible. Utilise ton compas et ton équerre si tu dois vérifier certaines propriétés.

a) Pour chaque quadrilatère, coche les propriétés qui s'appliquent.

Propriétés	A	B	C	D	E	F	G
Une paire de côtés parallèles							
Deux paires de côtés parallèles							
Deux angles isométriques							
Deux paires d'angles isométriques							
Quatre angles isométriques							
Deux côtés isométriques							
Deux paires de côtés isométriques							
Quatre côtés isométriques							

b) Écris le nom du quadrilatère sous chaque figure.

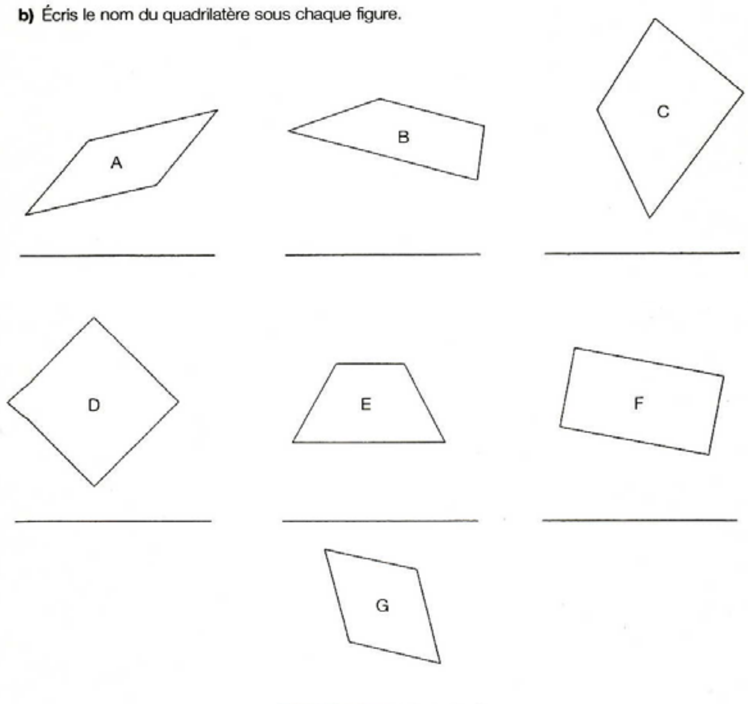


Figure 40 Problèmes - classe 3 Reconnaître

[77] Source : Guide B, *À vos maths!* p. 45.

De prime abord, il est surprenant de retrouver ces problèmes dans le projet de construction de l'enseignant étant donné son intérêt pour l'inscription des propriétés sur les figures. Toutefois, la possibilité d'en vérifier à l'aide d'instruments est un aspect qui a possiblement joué en faveur de la sélection de ces problèmes en GI. Rappelons-le, la mesure est un mode de validation observé au niveau 0 de l'activité enseignante. Nous détaillons l'analyse des problèmes ci-dessous.

4.2.3.2.4.1 Analyse a priori des problèmes

Une consigne précise aux élèves de faire l'étude de propriétés de quadrilatères. Elles concernent le parallélisme et la congruence des côtés ainsi que la congruence des angles. Un tableau à double entrée liste les propriétés selon sept figures de quadrilatères. Les sommets des figures ne sont pas identifiés. Les figures sont nommées à partir d'une lettre placée sur chacune d'elles. La figure D donne à voir un léger défaut d'impression où un côté ne semble pas tout à fait droit. De plus, les figures ne sont pas codées, tel que dit précédemment. La consigne stipule aussi de déterminer les propriétés en étant le plus précis possible dans l'usage du compas et de l'équerre. L'emploi du conditionnel pour la partie de la consigne *Utilise ton compas et ton équerre si tu dois vérifier certaines propriétés* laisse à la charge de l'élève la nécessité d'une vérification instrumentée. De plus, il est possible que des élèves utilisent d'autres outils, par exemple un gabarit, un rapporteur d'angles ou qu'ils n'en utilisent aucun.

Deux techniques sont anticipées pour la résolution des problèmes. Une première technique consiste à observer chacune des figures et à cocher dans le tableau la ou les propriétés en fonction de ce qui est perçu. Une seconde technique consiste à effectuer des vérifications instrumentées sur chacune des figures et à cocher dans le tableau la ou les propriétés selon ce qui est mesuré. Une combinaison des techniques précédentes est envisagée, c'est-à-dire pour une figure ou des figures différentes faire des observations ou bien prendre des mesures selon les propriétés. Les deux techniques appartiennent à GI. De plus, la technologie qui légitime la première technique consiste à dire *est vrai ce qui est vu* et la seconde technique *est vrai ce qui est mesuré*. Voyons les conceptions mobilisées par les élèves.

4.2.3.2.4.2 Conceptions des élèves

À partir des entretiens, nous avons observé deux conduites d'élèves. L'élève 1 a résolu les problèmes une figure à la fois de A à G; il a identifié la figure et complété les cases correspondantes dans le tableau. Les élèves 2, 3 et 4 ont identifié les figures de A à G et ensuite complété le tableau.

Nous n'avons pas relevé de nouvelles conceptions pour ces deux conduites. Les quatre élèves ont mobilisé l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*, la *Mesure d'une figure* et l'*Esquisse* (élève 1) pour la figure E. Les deux premières conceptions correspondent à ce que nous avions anticipé dans l'analyse a priori, c'est-à-dire faire des observations ou prendre des mesures sur une figure ou des figures différentes. Pour la complétion du tableau, les élèves 2 et 4 ont sollicité la conception *Référence*.

Le tableau XV regroupe les réponses extraites des cahiers des élèves interviewés au sujet de l'identification des figures.

Tableau XV Réponses extraites des cahiers (élèves interviewés) - classe 3

Figures	Réponses issues des cahiers des élèves interviewés (numéro b)			
	Élève 1	Élève 2	Élève 3	Élève 4
Figure A	Parallélogramme	Parallélogramme	Parallélogramme	Parallélogramme
Figure B	Trapèze scalène	Trapèze scalène	Trapèze scalène	Trapèze scalène
Figure C	N'a rien écrit	Trapèze scalène	Trapèze isocèle	Trapèze rectangle
Figure D	Quadrilatère quelconque	Losange	Carré	Carré
Figure E	Trapèze scalène	Trapèze isocèle	Trapèze isocèle	Trapèze isocèle
Figure F	Rectangle	Rectangle	Rectangle	Rectangle
Figure G	Losange	Parallélogramme	Losange	Losange

Le tableau XV montre des réponses identiques pour les figures A, B et F. Pour les figures D, E et G, au moins deux réponses sur quatre sont identiques dans chaque cas. Pour la figure C, les réponses sont différentes. Dans ce qui suit, nous présentons des exemples de conduites des élèves 1, 2, 3 et 4 ayant menés à ces choix de réponses pour l'identification des figures A à G.

D'abord, précisons que la mise en œuvre de *l'Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure* a été systématique pour aucun des élèves. Nous avons observé que des réponses identiques ne provenaient pas nécessairement d'une mobilisation des mêmes conceptions. En contrepartie, des réponses différentes pouvaient s'appuyer de conceptions identiques. Nous présentons deux exemples pour illustrer nos propos.

Voici un premier exemple avec la figure A pour laquelle les réponses des quatre élèves sont identiques; tous l'ont nommée un parallélogramme. Les élèves 1 et 2 l'ont identifiée uniquement sur la base d'une *Appréhension perceptive globale* alors que les élèves 3 et 4 ont en plus sollicité la *Mesure d'une figure* sans toutefois vérifier les mêmes éléments de la figure A. L'élève 3 a validé la congruence des côtés opposés avec une règle et l'élève 4 a vérifié la congruence et le parallélisme des côtés opposés avec une règle.

Voici un second exemple avec la figure C pour laquelle les réponses des trois élèves sont différentes. L'élève 1 n'avait rien écrit dans son cahier, mais il a dit pendant l'entretien qu'il s'agissait d'un quadrilatère quelconque sur la base de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*. C'est cette même conception qui a guidé l'élève 2 pour l'identification de la figure C sans toutefois mener au même résultat. Pour l'élève 2, la figure C représentait un trapèze scalène. Voici son explication dont le début porte sur un angle et se termine sur des côtés de la figure :

> « Ben, parce que ici *(pointe un angle de la figure celui plus à droite)*, ben, d'après, euh, mes yeux là, ça l'a pas vraiment l'air d'un angle droit. C'est un peu plus petit. Ça l'air plus aigu. Donc, j'ai écrit que c'est un trapèze scalène parce que y étaient pas toutes égals *(pointe les côtés de la figure)*. »

Les élèves 3 et 4 ont mobilisé la *Mesure d'une figure* et ils ont obtenu chacun une réponse différente en fonction des éléments de la figure mesurés. Ainsi, l'élève 3 a considéré qu'il s'agissait d'un trapèze isocèle après avoir mesuré deux côtés de la figure C : « Je pensais que ces deux côtés-là étaient congrus *(pointe les deux côtés formant l'angle du haut)* parce que quand j'ai mesuré, ils avaient l'air congrus. ». Quant à l'élève 4, il a déterminé qu'il s'agissait d'un trapèze rectangle après avoir mesuré les angles de la figure C : « J'ai pris les mesures des angles pour voir si c'était un trapèze et, effectivement, il y avait un angle de quatre-vingt-dix degrés, alors j'ai marqué que c'était un trapèze rectangle. ».

Notons, pour la figure C, que le parallélisme des bases du trapèze n'a pas été évoqué par l'élève 2 puisque son *Appréhension perceptive globale d'une figure* a été suffisante. En effet, lorsque nous lui avons demandé ce qu'il avait fait pour s'assurer d'une identification correcte de la figure C, il a répondu : « Ben, je me suis pas vraiment assuré. J'ai juste suivi, euh, genre, qu'est-ce que j'ai vu. ». Quant à l'élève 3, il avait coché une paire de parallèles dans le tableau des propriétés. Néanmoins, il a dit qu'il avait effacé son choix après avoir fait une vérification du parallélisme de deux côtés à l'aide d'une équerre et d'une règle laissant tout de même la réponse *trapèze isocèle*. L'élève 4 n'a fait aucune allusion à cette propriété du trapèze ni aucune vérification instrumentée sur la figure C. Pourtant, pour toutes les autres figures, il est le seul des quatre élèves à avoir vérifié le parallélisme des côtés en les prolongeant avec une règle.

Ajoutons que la conception *Mesure d'une figure* a été sollicitée par l'élève 1 seulement pour la figure F, par l'élève 2 pour les figures B, E, G et par les élèves 3 et 4 pour toutes les figures (A à G). De plus, les élèves ont employé plus d'outils que ceux prescrits dans la consigne générale des problèmes (compas ou équerre). Ils ont utilisé aussi la règle graduée, le rapporteur d'angles et le «bout d'une feuille», pour reprendre l'expression de l'élève 3.

Des quatre élèves, c'est l'élève 1 qui a majoritairement mobilisé l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*, alors que pour les élèves 3 et 4 ce fut la *Mesure d'une figure*. Par contre, c'est chez l'élève 2 que nous avons vu une plus grande variation dans la mise en œuvre de ces conceptions. Ainsi, pour une figure donnée, l'élève 2 pouvait nous fournir une explication justifiant le recours à la perception ou bien nous produire une argumentation basée sur la mesure dans l'instant suivant pour une autre figure. Tel fut le cas, par exemple pour les figures D et E nommées respectivement un losange par *Appréhension perceptive globale* et un trapèze isocèle par *Mesure d'une figure*. Voici un premier extrait de l'entretien avec cet élève au sujet de la figure D :

> « Ben, parce que, moi, dans ma tête, quand je vois ça, c'est un losange, comme *(tourne la feuille)*, j'ai pas pensé le mettre de même…Moi, je regarde toujours comme. Je vérifie pas parce que le prof y nous dit, genre, que c'est pas les vraies mesures. C'est juste fait à l'ordi. Donc, tu peux pas te vérifier en mesurant. »

Voici un second extrait à propos de la figure E où cette fois-ci l'élève 2 a utilisé un rapporteur pour mesurer des angles :

> « Ben, j'ai quand même mesuré, mais j'ai pas pris les vraies mesures. J'ai pris qu'est-ce que ça me donne comme par exemple, en réalité le prof y voulait, ici, comme par exemple, cent-vingt degrés *(pointe un angle adjacent à la petite base de la figure E)*, mais, moi, quand j'ai mesuré, ça m'a donné, par exemple, cent-dix-huit. Si l'autre y m'a donné cent-dix-huit aussi, ça veut dire que c'est quand même congru. »

L'élève 2 est le seul des quatre élèves à avoir fait un commentaire concernant l'absence de marques de codage sur les figures dès le début de l'entretien. Voici ce qu'il a dit quand nous avons demandé ce qu'il avait fait pour écrire le mot parallélogramme à la figure A : « Ben, y avait pas d'indices, y avait juste la forme genre. ».

Dans ce qui suit, nous discutons des deux autres conceptions dégagées de nos analyses, soient la conception *Esquisse* pour élève 1 et la conception *Référence* utilisée par les élèves 2 et 4.

Tel que dit précédemment, l'élève 1 est le seul des élèves interviewés à avoir utilisé l'*Esquisse* uniquement pour la figure E. Il a tracé à main levée les diagonales sur la figure proposée. Sur la base du tracé imprécis de ses diagonales, il a nommé la figure E un *trapèze scalène*. De plus, il n'a fait aucune référence au parallélisme des bases, comme en fait foi l'extrait suivant :

> « Ben, parce que dans un trapèze, dans un trapèze isocèle les diagonales sont congrues, pis les diagonales ici *(pointe les diagonales qu'il a tracées sur la figure E)*, ben, quand j'ai fait mon dessin y avaient pas l'air congrues. »

Rappelons que pour toutes les autres figures (sauf F où il a mesuré les angles), l'élève 1 les a essentiellement identifiées selon la perception qu'il en avait. Ceci ne veut pas dire que cet élève ne pourrait pas pour d'autres figures utiliser la conception *Mesure d'une figure* puisqu'elle fait partie de son coffre à outils. Par exemple, pour la figure B, dite trapèze scalène sur la base d'une perception globale de la figure, l'élève a tout de même livré une argumentation qui semble favoriser le recours à la mesure pour plus de certitude. Quand nous avons demandé comment il avait fait pour déterminer qu'aucun côté n'était isométrique, il a répondu ce qui suit :

> « Ben, parce que ça, ça saute aux yeux. Ben, même si on est sûr et certain que, que, que c'est pas isométrique, la prochaine fois, j'aurais dû vérifier pour être sûr et certain à cent pour cent. Mais, euh, je le voyais là que c'était, y avait aucun côté, parce que lui *(pointe ce qui semble la grande base d'un trapèze-figure B)* y paraissait beaucoup plus grand que lui, lui et lui *(pointe les trois autres côtés de ce qui semble un trapèze)*. Et lui *(pointe le côté non parallèle à droite de ce qui semble un trapèze)*, plus petit que tous les autres, et lui *(pointe ce qui semble être la petite base d'un trapèze*) lui, il était un p'tit peu plus grand que lui *(pointe l'autre côté non parallèle à gauche de ce qui semble un trapèze)*, mais j'aurais dû utiliser mes instruments. »

Pour ce qui est de la conception *Référence*, celle-ci a été mobilisée par les élèves 2 et 4 dans la mesure où ils ont dit avoir utilisé leur cahier de notes de cours. Les élèves 1 et 3 n'ont rien dit à ce sujet lors des entretiens. Bien que les élèves 2 et 4 aient eu recours à leur cahier de notes, cela n'a pas été un gage de réussite absolue pour la complétion du tableau des propriétés. En fait, nous disons que la mise en œuvre de la conception *Référence* a été ici subordonnée à ce que les élèves avaient fait au préalable pour l'identification des figures au numéro b). D'ailleurs, il est loisible de se demander comment les éléments théoriques du tableau auraient eu préséance sur l'observation ou la mesure des figures lorsque la consigne invitait les élèves à prendre des mesures pour vérifier des propriétés. Voici un exemple avec l'élève 4 (figure G) illustrant comment il a mis en relation son travail d'identification de cette figure avec celui des propriétés à cocher dans le tableau.

L'élève 4 avait nommé la figure G *un losange.* Sa stratégie pour vérifier le parallélisme des côtés de la figure a été de les prolonger à la règle. De plus, il avait mesuré les angles au rapporteur et les côtés à la règle. Selon ces éléments, l'élève avait coché dans le tableau les énoncés relatifs au parallélisme des côtés, ceux concernant la congruence des angles opposés, ceux indiquant deux côtés isométriques et deux paires de côtés isométriques. Mais il n'avait pas choisi l'énoncé des quatre côtés isométriques.

Là, il a dit : « Pis, j'ai, euh, quatre côtés isométriques. Ça, j'ai marqué non parce que quand j'ai mesuré, ils avaient une p'tite, p'tite, p'tite, p'tite différence, alors j'ai, euh, je me suis trompé. ». Selon ses résultats de mesure, l'élève n'a pas retenu la propriété du losange d'avoir quatre côtés congrus. Pourtant, cette information était disponible dans son cahier de notes.

Ajoutons que pour le choix des propriétés à cocher dans le tableau, l'élève 1 a dit ne pas s'être appliqué. Pour les trois autres élèves, leurs choix de propriétés ont été modulés selon leur travail préalable d'identification des figures, ce qui a donné lieu à des réponses partielles ou complètes, mais cohérentes avec ce travail d'identification.

Voici le tableau XVI regroupant les identifications des figures par les élèves de la classe (31 élèves pour la figure C car l'élève 1 n'a rien écrit).

Tableau XVI Réponses extraites des cahiers (32 élèves) - classe 3

Figures	Réponses issues des cahiers des élèves de la classe (numéro b)
Figure A	Parallélogramme (31/32); Losange (1/32)
Figure B	Trapèze scalène (23/32); Trapèze (6/32); Trapèze rectangle (3/32)
Figure C	Quadrilatère quelconque (quadrilatère ou quelconque) (18/31); Trapèze rectangle (5/31); Trapèze scalène (3/31); Trapèze (2/31); Cerf-volant (1/31); Losange (1/31); Trapèze isocèle (1/31)
Figure D	Carré (28/32); Losange (3/32); Quadrilatère quelconque (1/32)
Figure E	Trapèze isocèle (26/32); Trapèze (5/32); Trapèze scalène (1/32)
Figure F	Rectangle (32/32)
Figure G	Losange (23/32); Parallélogramme (9/32)

Le tableau XVI montre des réponses variées sauf pour la figure F. La figure C a généré la plus grande diversité de réponses. À la lumière des entretiens, nous avons observé que des réponses identiques ne provenaient pas nécessairement des mêmes conceptions et des réponses différentes de conceptions identiques. Parmi les vingt-huit autres élèves, il se peut que certains aient sollicité les mêmes conceptions que les élèves 1, 2, 3 et 4 ou qu'ils en aient mobilisé de nouvelles. Ce sont des hypothèses.

4.2.3.3 Niveaux 3 à 0 de l'enseignant et conceptions des élèves - classe 3

Nous terminons l'analyse de la classe 3. Le tableau XVII (page 229) présente la compilation synthétique des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1), des problèmes du projet de construction (niveau 2), de l'actualisation de ses intentions (niveau 0) et des conceptions d'élèves (niveau -1).

Les données du tableau montrent que les intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1) se situent globalement surtout en GI-II et vers GII plutôt qu'en GI. Nous avons donné des exemples de propos pour ces catégories (voir section 4.2.3.1.5). Rappelons pour GI-II ses dires relatifs à l'énumération d'objets géométriques, aux idées de faire découvrir des propriétés et montrer l'utilité de la géométrie. Parmi les propos tendant vers GII, il y a l'intérêt manifesté à l'égard des définitions et des propriétés pour l'enseignement et l'apprentissage rigoureux de la géométrie. Les éléments théoriques sont susceptibles d'être bien acquis si les élèves les découvrent à partir de contextes pédagogiques conçus à cette fin. Pour satisfaire cette visée constructiviste, l'enseignant va planifier des leçons notamment sur la base de constructions de triangles et de quadrilatères produites avec des propriétés et l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Il souhaite que les élèves exploitent la fonction d'illustration de l'invariance des propriétés que permet le logiciel. Toutefois, ses intentions vers GII sont teintées de l'idée d'introduire de l'arithmétique à l'enseignement de la géométrie. Bien qu'elle ne soit pas dominante dans son discours, cette intention s'est actualisée par l'emploi de valeurs numériques et de la mesure (GI) au niveau 0 de son activité. Nous y reviendrons.

Par ailleurs, les problèmes de son projet de construction relèvent principalement des types *Reconnaître*, *Rechercher une mesure*, *Construire* et *Justifier*. Nous avons dit (voir section 4.2.3.1.5) que ceux du type *Reconnaître* sont répartis un peu en GI et surtout vers GII, que parmi les problèmes des types *Rechercher une mesure* et *Justifier* certains sont en GI ou en GI-II, mais la plupart tendent vers GII, et que les problèmes du type *Construire* sont surtout en GI-II, alors que quelques autres sont en GI ou vers GII. De manière générale, ses choix de problèmes tendent vers GII même s'il en existe en GI ou GI-II. À titre d'exemple pour GI, soulignons les problèmes du type *Reconnaître* employés pour les entretiens (voir section 4.2.3.2.4) dont les figures non codées ni décrites en mots pouvaient faire l'objet d'une vérification instrumentée. Pour GI-II, prenons l'exemple du problème *Rechercher une mesure* (voir section 4.2.3.2.1) utilisé aussi pour les entretiens. Trois techniques favorisaient sa résolution : une technique par l'emploi d'instruments de mesure (GI) et deux autres par le recours à la théorie (GII). Nonobstant ces deux exemples, il demeure que l'enseignant fait ses choix de problèmes en direction surtout de GII. De plus, ce sont les référents théoriques qui ont guidé son appréciation des problèmes du questionnaire, par exemple il a rejeté le problème 2 (GI) en déplorant l'absence de codage des figures. Par ailleurs, l'idée d'insérer des valeurs numériques et de la mesure expliquerait peut-être pourquoi l'enseignant a conservé le problème 4 (GI) proposant trois figures à mesurer pour dégager une propriété.

Les intentions de l'enseignant se sont actualisées en direction de GII lorsque ses leçons visaient à traiter de définitions et de propriétés géométriques. Cependant, l'usage de valeurs numériques, entre autres pour illustrer des propriétés, les valider et produire des constructions, a favorisé une cohabitation des validations théorique et instrumentée où la première subordonnait la seconde et vice versa. Soulignons à nouveau le cas du point d'intersection des trois médianes (leçon 1) où l'enseignant s'est référé à la théorie (GII) pour expliquer l'imprécision causée par la mine de crayon (GI), alors qu'à la leçon 3, il a misé sur des valeurs numériques (GI) transmises par le logiciel de géométrie dynamique, à partir de constructions virtuelles de quadrilatères, pour faire valider des propriétés par les élèves (GII).

Le recours aux définitions, aux propriétés, aux valeurs numériques et à la mesure est un élément du milieu avec lequel les élèves ont résolu des problèmes, ce qui n'a pas été sans effet auprès des conceptions mobilisées; certaines en GI et d'autres vers GII. Par exemple, au problème *Rechercher une mesure* (GI-GII) choisi pour les entretiens, nous avons observé les conceptions *Mesure d'une figure, Appréhension perceptive globale d'une figure* et *Calculatoire.* La *Mesure d'une figure* et l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* n'ont pas permis aux élèves de saisir tous les éléments théoriques visés par le problème, par exemple aucun élève n'a référé au théorème induit par l'énoncé selon lequel si dans un triangle une bissectrice est aussi une hauteur, alors ce triangle est isocèle.

Les référents théoriques seraient susceptibles d'être exprimés par les élèves en résolution des problèmes du type *Justifier*. Pourtant, lors des entretiens pour ce type de problèmes, c'est la conception *Référence* qui est apparue. Le cahier de cours a assuré la validité théorique du contenu auquel les élèves se sont fiés pour résoudre les problèmes. La validité théorique n'est pas remise en question puisqu'elle provient de l'enseignant. Néanmoins, la consultation du cahier par les élèves laisse entrevoir la précarité de leurs apprentissages. Par exemple, rappelons le cas de l'élève 3 pour qui un losange possédait ou ne possédait pas quatre côtés congrus au gré de ses comparaisons de quadrilatères. Notre hypothèse est que la consultation du cahier ne suffit pas dans la mesure où la mise en relation hiérarchique des référents théoriques semble laissée à la charge des élèves. Aussi, une présentation linéaire des référents théoriques, sous la forme d'une liste par exemple, occulterait peut-être leur organisation hiérarchique dans la pensée des élèves. Néanmoins, quand les élèves mobilisent la conception *Référence*, leurs apprentissages ne sont pas stabilisés et ils risquent de solliciter d'autres conceptions. Nous reviendrons sur cette situation en fournissant un exemple pour des problèmes du type *Reconnaître*.

Parmi les problèmes du type *Reconnaître*, nous en avions dont les figures étaient codées. Ces dernières ont effectivement favorisé la mise en œuvre de l'*Appréhension des marques de codage d'une figure* (vers GII) pour laquelle les élèves ont été sensibles à des propriétés exprimées par des indices sur les figures. Néanmoins, la structure de contrôle théorique de cette conception n'était pas stabilisée et les élèves n'ont considéré qu'une partie des marques. Les figures codées n'ont pas empêché la mise en œuvre de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure* pour la reconnaissance des objets géométriques concernés.

Les autres problèmes de reconnaissance laissaient à la discrétion des élèves la possibilité de se servir du compas et de l'équerre pour vérifier des propriétés sur des figures non codées (GI). C'est sans surprise que nous avons retrouvé les conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure*. Pour la mesure, les élèves ont utilisé davantage d'outils que ceux prescrits dans la consigne des problèmes : règle graduée, rapporteur, coin d'une feuille. À ces conceptions de GI s'est ajoutée l'*Esquisse* (élève 1). De plus, des élèves (2 et 4) ont mobilisé la conception

Référence pour leur gestion des propriétés présentées en une liste d'énoncés à cocher. Malgré cela, l'exemple de l'élève 4 pour l'objet géométrique losange a montré que la conception *Mesure d'une figure* a prévalu sur la consultation du cahier de théorie. L'élève a conclu qu'un losange n'avait pas quatre côté congrus étant donné ses résultats de mesure des côtés de la figure pour lesquels il avait noté une « […] p'tite, p'tite, p'tite, p'tite différence. ».

En résumé, nous disons que les intentions de l'enseignant pour la géométrie qu'il désire enseigner et faire apprendre sont surtout en GI-II et vers GII plutôt qu'en GI (niveaux 3 à 1). Celles orientées vers GII trouvent un écho dans ses choix de problèmes où trois types sur quatre présentent les plus hauts pourcentages en direction de GII. En classe, ses intentions se sont actualisées majoritairement en direction de GII. Cependant, son emploi de valeurs numériques et de la mesure a contribué à introduire des éléments de GI aux leçons. Quant aux conceptions d'élèves, nous en avons identifiées en GI et vers GII dont la *Référence* en résolution de problèmes du type *Justifier*, notamment.

Tableau XVII Compilation des résultats de la classe 3 selon GI, GII et GI-II

Entrevue et leçons

Niveaux	GI	GII	GI-II	
3	6%	29%	**65%**	100%
2	0%	**82%**	18%	100%
1	2%	14%	**84%**	100%
0	16%	**70%**	14%	100%
3 à 1	4%	33%	**63%**	100%
3 et 1 sans Q8	5%	25%	**70%**	100%

Problèmes de la planification *		**Problèmes pour les entretiens**	**Conceptions des élèves (niveau -1)**
Reconnaître **(43%)** (132 problèmes)	GI: 27% GII : **73%** GI-II: 0%	7 problèmes GI 6 problèmes GII	GI: Appréhension perceptive globale d'une figure GI: Mesure d'une figure GI: Esquisse vers GII: Appréhension des marques de codage d'une figure vers GII: Référence
Rechercher une mesure **(27%)** (83 problèmes)	GI: 13% GII: **76%** GI-II: 11%	1 problème GI-II	GI: Appréhension perceptive globale d'une figure GI: Mesure d'une figure vers GII: Calculatoire
Construire **(10%)** (29 problèmes)	GI: 10% GII: 10% GI-II: **80%**	n/d	n/d
Justifier **(19%)** (57 problèmes)	GI: 21% GII: **75%** GI-II: 4%	4 problèmes GII	vers GII: Référence
Découvrir (0%) (0 problème)	GI: 0% GII: 0% GI-II: 0%	n/d	
Produire une représentation (1%) (3 problèmes)	GI: 0% GII: 0% GI-II:**100%**	n/d	

*Compilation des problèmes (304)

4.2.4 Analyse de la situation didactique de la classe 4

Nous terminons l'analyse de la géométrie souhaitée et mise en place par les enseignants et celle développée par les élèves à l'aide des données de la classe 4. Elle compte vingt-neuf élèves. Comme pour les classes précédentes, nous présentons et synthétisons les niveaux d'activité de l'enseignant et poursuivons avec les conceptions d'élèves. Ces dernières ont été observées à partir de problèmes des types *Justifier, Reconnaître* et *Construire.* Il a été impossible d'employer des problèmes *Rechercher une mesure* car les recueils des élèves ne contenaient pas de résolutions. Par conséquent, nous avons fait le choix de questionner les élèves à deux reprises sur des problèmes du type *Construire* puisque la construction occupe une place importante dans les niveaux d'activité de l'enseignant, comme nous le verrons dans ce qui suit.

4.2.4.1 Analyse des niveaux de l'activité de l'enseignant de la classe 4

Voici les niveaux 3 à 0 de l'activité enseignante suivis de leur résumé.

4.2.4.1.1 Niveau 3 Conceptions et valeurs

Pour l'enseignant, *faire de la géométrie plane* évoque tout ce qui se fait sur une feuille de papier en fonction d'objets géométriques en deux dimensions tels des droites, des quadrilatères, plus généralement des polygones. L'énumération des objets à l'étude ne fournit pas d'indices pour connaître la perspective paradigmatique avec laquelle il entend les traiter (GI-GII). Il en est de même lorsque l'enseignant voit dans les tâches exigeant de la manipulation dont celle des instruments de géométrie un aspect favorable à l'enseignement de la géométrie. L'enseignant estime que les élèves aiment faire de la géométrie, se valorisent et s'investissent dans la résolution de ces tâches. Néanmoins, la manipulation des instruments de géométrie devient pour l'enseignant le défaut de la qualité de l'enseignement. Il affirme que leur emploi sur un tableau placé verticalement, afin de montrer aux élèves des procédures de construction, s'avère plus ardu que sur une feuille de papier placée à l'horizontale. En effet, ce travail est fait en direct en faisant dos aux élèves, ce qui implique une gestion de classe plus difficile. Cette contrainte organisationnelle ne remet pas en cause l'intérêt qu'il voit à se servir des instruments.

Au contraire, il espère que ses élèves développent de l'autonomie, de la précision et de la dextérité dans le maniement des instruments de géométrie.

Par ailleurs, en ce qui concerne le programme d'études, l'enseignant ne voit pas de modifications à y apporter. Il estime plutôt que les manuels scolaires nécessiteraient des améliorations dans la mesure où la répartition des notions entre les manuels de la première et de la deuxième secondaire le limite dans ses choix de problèmes. Quant au guide pédagogique associé au manuel, l'enseignant le dit pertinent car il présente des exemples d'erreurs chez les élèves, des astuces et des références supplémentaires. Un ajout d'exercices et d'idées serait toutefois apprécié. Bien que l'enseignant n'ait pas proposé de changement au programme d'études, il avoue que la géométrie n'est pas ce qu'il préfère enseigner : « Au niveau du contenu, je n'ai pas vraiment de satisfaction, je dirais. ». Il a l'impression que les notions supposées acquises par ses élèves au primaire leurs semblent nouvelles quand ils arrivent dans sa classe. L'extrait suivant traduit son sentiment :

> « On recommence là, malheureusement, quasiment à zéro. On reprend la notion de carré, de rectangle, tout le vocabulaire rattaché à ces figures là, alors que ça été déjà vu, c'est du déjà vu. »

Cette idée de devoir reprendre une partie du travail fait au primaire concernant l'identification d'objets géométriques se répercute notamment dans les problèmes du projet de construction de l'enseignant. Nous le verrons au niveau 2.

4.2.4.1.2 Niveau 2 Projet de construction

La description du projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* est orientée vers GII dans la mesure où elle comprend la classification de triangles et de quadrilatères. Le projet inclut la construction de triangles et de quadrilatères, celle des médianes, médiatrices, hauteurs et le calcul du périmètre (GI-II).

La classification des triangles se fait selon les angles et les côtés. Les triangles étudiés sont acutangle, obtusangle, rectangle, isoangle, équiangle, isocèle, équilatéral et scalène. Les quadrilatères sont catégorisés selon le parallélisme des côtés, la congruence des côtés, des angles, la présence d'angles droits, d'angles consécutifs supplémentaires, la présence de diagonales congrues, se coupant en leur milieu ou perpendiculairement, l'admission d'au moins un axe de symétrie.

Vingt-six énoncés géométriques sont proposés aux élèves; trois concernent les droites parallèles et perpendiculaires, six traitent des angles, quatorze concernent les triangles (sept) et les quadrilatères (sept), un énoncé traite des éléments homologues de figures planes isométriques et deux énoncés sont relatifs aux polygones. L'enseignant considère toutes les propriétés nécessaires à son enseignement, mais il dit éprouver de la difficulté à en montrer la pertinence aux élèves :

> « Donc, c'est ça qui est difficile, sont toutes importantes, mais, c'est ça, c'est pas évident de montrer à l'élève que c'est important qu'il sache ces propriétés-là. Parce que souvent on se fait poser la question, ben, pourquoi qu'on le fait? À quoi ça sert? Elles sont toutes importantes oui, mais, euh, de faire le lien, le parallèle entre la théorie et pis, euh, l'utilisation. »

Cette difficulté à faire apprécier aux élèves des référents théoriques de GII peut s'expliquer notamment par les problèmes qu'ils résolvent. Le tableau XVIII ci-dessous montre la répartition par types des problèmes[78] du projet de construction.

Tableau XVIII Problèmes par types - classe 4

Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
53%	22%	18%	4%	0%	3%	100%

Nous observons que les problèmes du type *Reconnaître* (53%) sont les plus nombreux. Ils comptent pour un peu plus de la moitié des problèmes. Cela semble cohérent avec l'idée qu'a l'enseignant de devoir reprendre l'identification d'objets géométriques étudiés au primaire. Les problèmes des types *Rechercher une mesure* (22%) et *Construire* (18%) occupent les deuxième et troisième positions, ceux des types *Justifier* (4%) et *Produire une représentation* (3%) sont presque ex-æquo en quatrième

[78] Deux cents cinquante-neuf problèmes.

position. Remarquons que le faible pourcentage des problèmes du type *Justifier* (4%) laisse peu de place à l'explicitation des référents théoriques de GII, ce qui n'est peut-être pas étranger à leur remise en question par les élèves lorsque, selon les dires de l'enseignant, ils demandent « À quoi ça sert? ». Aucun problème du type *Découvrir* (0%) n'a été identifié.

D'un point de vue paradigmatique, les problèmes s'inscrivent en GI, vers GII ou en GI-II. Les problèmes du type *Reconnaître* se situent à parts égales en GI et vers GII. Ceux du type *Rechercher une mesure* s'inscrivent surtout vers GII, un peu en GI-II et moins en GI. Ceux du type *Construire* relèvent majoritairement de GI, un peu en GI-II, vers GII dans une moindre mesure. Les problèmes du type *Justifier* se retrouvent en GI-II et un peu vers GII. Ceux du type *Produire une représentation* sont majoritairement en GI et un peu en GI-II.

À partir de l'évaluation des problèmes du questionnaire, nous avons documenté ce qui motive les choix de l'enseignant. Rappelons que les deux premiers problèmes diffèrent selon l'enseignant. Pour celui-ci, nous avons choisi un premier problème du type *Construire* vers GII bien que ce type représente (18%) des problèmes. Néanmoins, nous avons fait ce choix car le développement de l'autonomie, de la dextérité et de la précision avec les instruments de géométrie est une attente de l'enseignant à l'égard de ses élèves. Nous souhaitions approfondir cette idée. À quoi pense-t-il lorsqu'il parle de précision? S'agit-il d'une habileté technique, une référence à la mesure? Le deuxième problème est du type *Rechercher une mesure* en GI. Nous l'avons retenu puisque la recherche de mesure n'est pas ressortie de son discours contrairement à l'emploi des instruments et la reconnaissance d'objets géométriques. Pourtant, le type *Rechercher une mesure* occupe la seconde place (22%) après le type *Reconnaître* (53%).[79] Voici un bref descriptif des problèmes suivi des deux premiers problèmes du questionnaire.

---

[79] Nous aurions pu cibler un problème du type *Reconnaître* étant donné son plus haut pourcentage. Mais puisque l'enseignant avait déjà fait allusion à l'identification d'objets géométriques en entrevue et que les problèmes du questionnaire sont un subterfuge pour le faire parler selon GI ou GII, nous avons décidé de présenter un problème *Rechercher une mesure*; type pour lequel il n'avait pas émis de commentaires.

Problème 1, *Construire*, versGII peut se retrouver dans le projet de construction;
Problème 2, *Rechercher une mesure*, vers GI, peut se retrouver dans le projet de construction;
Problème 3, *Justifier,* vers GII, est atypique;
Problème 4, *Découvrir*, vers GI, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 5, *Justifier*, vers GII, peut se retrouver dans un manuel;
Problème 6, *Justifier,* vers GII, peut se retrouver dans un manuel.

Problème 1

a) Construisez ci-dessous un triangle isocèle avec la règle et le compas.

b) Écrivez chacune des étapes de votre procédure de construction.

c) Pourquoi êtes-vous assuré que le triangle construit est bien isocèle?

Figure 41 Problème 1 du questionnaire - enseignant 4

Problème 2

Dans chacune des figures ci-dessous, inscrivez les mesures données aux endroits appropriés sans utiliser d'instruments de mesure.

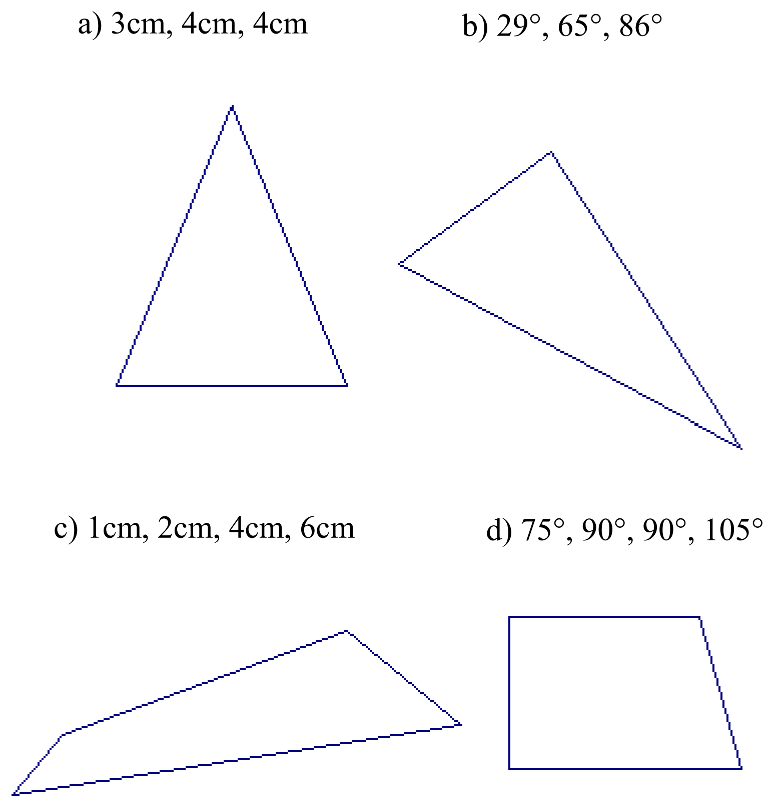


Figure 42 Problème 2 du questionnaire - enseignant 4

Les arguments de l'enseignant pour évaluer les problèmes ne sont pas liés à leur aspect paradigmatique. Ils se distinguent plutôt en trois catégories non exclusives. Dans la première catégorie, les arguments concernent les habiletés sollicitées pour résoudre les problèmes. Par exemple, les problèmes permettent d'utiliser le compas (problème 1), de travailler l'estimation et l'observation (problème 2), de réfléchir (problème 3), de déduire une propriété (problème 4), d'utiliser le langage mathématique (problèmes 3 et 5). Le problème 6 a été évalué en fonction des deuxième et troisième catégories. Dans la deuxième catégorie, les arguments ciblent la nature ou la quantité des notions en jeu dans le problème, par exemple l'enseignant note que le problème 1 travaille la notion de triangle isocèle et le problème 6 implique plusieurs notions. Dans la troisième catégorie, les arguments visent la présentation des problèmes. Ainsi, l'enseignant voit comme un avantage le fait d'avoir inséré un tableau au problème 4 et placé un point d'interrogation sur la figure du problème 6.

Bien qu'il ait trouvé les problèmes intéressants, il ne donnerait pas les problèmes 3 et 5 du type *Justifier* (GII). N'oublions pas que ce type ne compte que pour 4% des problèmes du projet de construction. Pour les problèmes 3 et 5, l'enseignant trouve qu'ils exigent trop d'interprétations, donc de mises en relation des référents théoriques de GII. De plus, il ajoute que le problème 3 contient beaucoup de texte, que sa figure est petite et présentée en biais, alors que le problème 5 lui semble manquer d'informations et de précisions.

Tous les problèmes seraient susceptibles d'être modifiés sauf le problème 6. Ses transformations n'ont pas pour effet de changer l'aspect paradigmatique des problèmes à l'exception peut-être du problème 5; nous ne pouvons l'affirmer puisqu'il n'a pas écrit de suggestion précise. Au problème 1 (GII), il proposerait de nommer le triangle. Au problème 2 (GI), il noircirait l'expression *sans utiliser les instruments de mesure*, renforçant ainsi l'observation globale des figures. Au problème 3 (GII), tel que dit plus haut, ce sont la quantité de texte et la figure qui feraient l'objet de modifications. Au problème 4 (GI), l'enseignant accepterait que les angles soient mesurés au rapporteur par les élèves. Au problème 5, les informations (précisions) seraient corrigées sans que l'enseignant explicite néanmoins son idée.

Pour les problèmes à donner aux élèves, l'enseignant émet diverses attentes de solutions et des anticipations de réponses effectives dont plusieurs sont positionnées en GI. Par exemple, au problème 1 (GII), il souhaite que les élèves construisent le triangle isocèle et identifient les côtés congrus, mais il anticipe qu'ils éprouvent des difficultés à produire la figure avec le compas étant donné que le problème n'offre pas de mesure précise. Il croit que des élèves traceraient un triangle équilatéral (donc aussi isocèle). Ajoutons pour ce problème qu'il a indiqué deux moyens associés à la mesure (GI) afin de valider la construction d'un triangle isocèle :1) mesurer les deux segments à la règle 2) reporter une mesure à partir d'une même ouverture de compas. Au problème 2 (GI), l'enseignant croit que les élèves devraient le trouver facile et le réussir. Cependant, leur premier réflexe serait d'employer les instruments pour vérifier les mesures (GI). Au problème 4 (GI), il souhaite que les élèves complètent le tableau et remarquent une similitude dans les mesures d'angles. Il anticipe qu'ils puissent remplir le tableau mais éprouver de la difficulté à énoncer une propriété. Au problème 6 (GII), il espère que les élèves trouvent les mesures d'angles par déduction en faisant les calculs de nombres décimaux, qu'ils réfèrent aux théorèmes de la somme des angles intérieurs du triangle et des angles opposés par le sommet. Toutefois, malgré des valeurs numériques affichées au dixième près, il croit que les élèves auront encore le réflexe d'utiliser les instruments de géométrie (GI) en négligeant le théorème traitant des angles opposés par le sommet, mais qu'ils sauront faire des calculs de nombres décimaux.

4.2.4.1.3 Niveau 1 Projet d'une leçon

L'enseignant dit planifier son enseignement du thème *triangles et quadrilatères* par chapitres contenant chacun un ensemble de notions. Les notions font l'objet d'un découpage pour la préparation d'une leçon. Nous sommes ici en GI-II dans la mesure où l'enseignant parle d'une leçon selon les notions à l'étude sans dire comment il prévoit les traiter en classe. Ses propos sont aussi en GI-II quand il dit qu'il est plus difficile de préparer une leçon de géométrie que d'arithmétique en parlant à nouveau de la gestion liée à la manipulation des instruments de géométrie et en ajoutant que les élèves doivent être vite guidés et rassurés lorsqu'ils emploient les instruments afin qu'ils ne fassent n'importe quoi. De plus, sa correction des travaux d'élèves faits avec les instruments nécessite une façon de faire différente de celle employée en arithmétique. C'est ce qu'il affirme dans l'extrait suivant :

> « Il y a aussi la correction qui est différente. Euh, la correction arithmétique, ben, c'est, je donne la réponse, je fais la démarche au tableau ou j'envoie un élève. La géométrie, c'est beaucoup plus difficile. Ils le font, pis c'est important de voir si c'est précis ou non. Donc, c'est une correction, moi, j'utilise beaucoup les acétates pour, euh, par élève. »

La superposition d'une figure-réponse à l'aide d'un transparent sur les figures produites par les élèves donne ici une idée de ce à quoi réfère l'enseignant lorsqu'il parle de précision dans l'usage des instruments de géométrie; précision pour laquelle nous obtiendrons de nouveaux éclaircissements au niveau 0 de son activité. Mais la manipulation ne se réduit pas à celle des instruments de géométrie. Elle englobe aussi des actions de découpage et de collage, tel que dit ci-dessous :

> « Moi, j'y vais par découpage, par collage pis même les élèves disent, voyons donc, on fait un cours de bricolage en mathématiques. Mais je pense que, oui, ça vaut la peine de le faire. C'est beaucoup plus efficace que un prof en avant qui donne la théorie pis que les élèves écoutent et essayent de faire, euh, et d'apprendre, de visualiser. »

Ces actions de découpage et de collage faites par les élèves sont susceptibles de les placer en GI. Pour l'enseignant, elles assurent le bon fonctionnement d'une leçon tout en contribuant à l'efficacité des apprentissages géométriques des élèves. De plus, une interaction dynamique avec les élèves est perçue comme un autre moyen de bien planifier une leçon. Voyons à présent l'actualisation en classe de trois leçons.

4.2.4.1.4 Niveau 0 Actualisation en classe de trois leçons

Voici une description sommaire du contenu de chacune des trois leçons.

<u>Leçon 1</u> : a) Travail de définition du mot polygone avec les élèves; b) Feuille d'exercices pour la reconnaissance de figures de polygones; c) Correction de la feuille d'exercices; d) Écriture d'une définition du mot polygone; e) Travail de définition des expressions polygones convexes et non convexes d'un point de vue métaphorique; Seconde feuille d'exercices de reconnaissance de polygones convexes et non convexes; Correction de la seconde feuille d'exercices; Amorce de la notion de polygones réguliers; Devoir.
<u>Leçon 2</u> : a) Retour sur la définition de polygone donnée à la leçon 1; b) Retour sur les notions suivantes : polygones convexes, non convexes, réguliers; c) Nomenclature des polygones selon le nombre de côtés; d) Classification des triangles; Retour sur le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle; Construction de triangles; Devoir.
<u>Leçon 3</u> : a) Correction du devoir portant sur la construction de triangles; b) Présentation de deux propriétés du triangle; Amorce des quadrilatères; Devoir sur les quadrilatères.

La leçon 1 débute par un travail de définition du mot *polygone* à partir d'une interaction entre l'enseignant et ses élèves. Il les questionne afin d'obtenir des attributs à partir desquels définir un polygone. Les élèves nomment des éléments : par exemple figure plane, deux dimensions, sur une feuille, trois angles ou plus avec des arêtes, une aire précise, trois sommets ou plus, lignes brisées, figure fermée, les lignes se rejoignent toutes, aucune ligne courbe, angles intérieurs ou extérieurs[80] à la figure, intérieur ou extérieur de la figure, etc. L'enseignant ne statue pas tout de suite sur ces éléments. Plutôt, il distribue une feuille d'exercices pour la reconnaissance de figures représentant des polygones. Les élèves font le travail demandé et ensuite l'enseignant effectue la correction en grand groupe en projetant des figures sur un écran électronique (tableau blanc interactif). Au terme de la correction, l'enseignant écrit une définition du polygone notée par les élèves : figure plane (2D) formée d'une ligne droite brisée et fermée (les deux bouts du segment doivent se rejoindre) - pas de ligne courbe.[81]

Ensuite, l'enseignant demande de fournir des noms de polygones déjà étudiés au primaire. Les élèves disent des mots tels : triangle, quadrilatère, pentagone, hexagone, carré, losange, rectangle, parallélogramme, etc. L'enseignant encercle le mot pentagone et demande de le définir. Les élèves disent « figure à cinq côtés », l'enseignant rectifie par « polygone à cinq côtés ». Les élèves sont invités à déterminer combien de sortes de pentagones existent et à en tracer deux différentes. Les élèves s'exécutent. Après quoi, un élève vient tracer son polygone au tableau. L'enseignant en profite pour revenir sur des attributs du polygone : « Est-ce que c'est une figure qui est fermée plane? Oui, il y a un intérieur et un extérieur. Le début, est-ce qui rejoint la fin? Oui. Est-ce qui a des courbes? ». Deux autres élèves effectuent leur figure respective au tableau. Le troisième élève produit un pentagone non convexe.

L'enseignant conserve le tracé d'un pentagone convexe et celui du pentagone non convexe pour amorcer une discussion afin de distinguer les deux figures et les expressions associées. Les élèves utilisent la métaphore d'absence de creux pour discuter de la convexité d'un polygone. L'enseignant parle d'absence d'accumulation

---

[80] L'expression *angle extérieur* d'un polygone employée par les élèves ne correspond pas ici à l'angle formé par un côté quelconque du polygone et le prolongement du côté adjacent. Il s'agit de toute la partie externe associée à un angle intérieur donné.

[81] La définition est ambigüe. Il est difficile d'imaginer qu'une ligne puisse être simultanément droite et brisée ou que les deux extrémités d'un segment se rejoignent. De plus, au cours de la leçon, l'enseignant produira oralement la définition suivante d'une ligne brisée qui ne sera pas écrite par les élèves : une ligne brisée, une ligne que je casse en petits morceaux pour être capable de faire des arêtes.

d'eau sur la figure lorsqu'elle est tournée dans tous les sens. Il fait aussi référence à la métaphore issue du primaire selon laquelle la souris ne peut trouver d'endroit où se cacher dans une figure convexe. Par l'emploi de cette métaphore, l'enseignant induit ce qu'il reprochait au niveau 3 de son activité, c'est-à-dire qu'il contribue précisément à maintenir ses élèves dans une géométrie *du recommencement*, nous dirions en GI.

L'enseignant mentionne que les expressions convexe et non convexe n'ont pas encore été définies et il distribue une autre feuille d'exercices sur laquelle sont tracées diverses figures dont aucune ne présente de marques de codage des angles ou des côtés. Les élèves doivent, d'une part, identifier celles qui sont des polygones, et, d'autre part, parmi les polygones, déterminer ceux qui sont convexes ou non convexes. L'enseignant fait la correction de la feuille d'exercices. Après cela, il dirige l'attention des élèves vers les cinq figures classées comme étant des polygones. Elles ont les formes respectives d'un octogone, d'un rectangle, d'un losange, d'une croix et d'un deltoïde. L'enseignant demande : « Petite parenthèse, est-ce que quelqu'un pourrait me dire c'est quoi un polygone? Maintenant on sait c'est quoi un polygone, régulier? ». Des élèves donnent des réponses telles « tous les côtés sont symétriques », « isométriques », « congrus ». Il invite ses élèves à faire une lecture des figures en GI et il ajoute :

> « Ok, si tu regardes les dessins qui sont là, à l'œil *(pointe les cinq figures).* Est-ce qu'on a des polygones réguliers? Oui. Lequel? Est-ce que le G *(figure de forme rectangulaire)*, c'est un polygone régulier? »

Les élèves disent non. L'enseignant poursuit :

> « Pourquoi? Les côtés ne sont pas isométriques. Le A *(figure de forme octogonale qui semble régulière)*, c'est un polygone régulier. Ça, au prochain cours, je reviens là-dessus. Est-ce qui en a d'autres polygones réguliers? »

Les élèves ne répondent pas unanimement : « Oui, non, le F *(figure de forme losange)* ». L'enseignant rétorque : « Pourquoi non? Parce que les angles ne sont pas pareils, alors le seul qui a d'l'air régulier, faudrait vérifier, c'est le A, c'est le seul. ». Aucun élément de vérification n'est discuté au sujet de la figure A qui semble toujours régulière sur la base d'une observation globale (GI). La leçon 1 se termine par la remise du devoir qui consiste à lire deux pages du cahier de théorie traitant des polygones et des types de triangles.

L'enseignant amorce la leçon 2 en demandant à un élève de définir le mot polygone. L'élève répond : « Euh, ça prend une ligne, euh, une ligne droite brisée fermée. ». L'enseignant retient les mots suivants de la définition donnée par l'élève : ligne brisée fermée. Du coup, il projette au tableau blanc interactif une définition du polygone légèrement différente de celle écrite à la leçon 1 : figure plane formée par une ligne brisée fermée.

L'enseignant remet au tableau blanc les cinq figures de polygones présentées à la leçon 1. Rappelons qu'elles ont les formes respectives d'un octogone, d'un rectangle, d'un losange, d'une croix, d'un deltoïde et qu'aucune d'elles ne possède de marques de codage des côtés ou des angles, ni aucune valeur numérique. À nouveau, les élèves sont invités à faire une lecture en GI de ces figures. Les cinq figures doivent être classées selon les catégories polygones convexes, non convexes et réguliers. Pour chacune des figures, l'enseignant demande aux élèves les raisons justifiant leurs classifications. Au fil des échanges entre l'enseignant et ses élèves, cette lecture des figures par les élèves a priori en GI va obliger l'enseignant à faire des mises au point de manière à modifier la lecture vers GII. Néanmoins, ces mises au point ne seront pas constamment respectées pendant les leçons 2 et 3, comme nous le verrons dans la suite du texte.

Ainsi, à partir de l'observation de la figure F (en forme de losange), l'enseignant discute des côtés en supposant que c'est un losange. Sur la base de cette supposition, il est permis de dire que les côtés de la figure F sont congrus par définition du losange. C'est ce qu'affirme l'enseignant dans l'extrait suivant :

> « Ok, isométriques, faut que tous les côtés soient isométriques. Ici, ça a l'air de quoi comme figure? On peut supposer que c'est un losange. Bien supposer parce que j'ai pas identifié si tous les côtés étaient pareils. Si on suppose que c'est un losange, donc tous les côtés sont identiques, sont isométriques. Est-ce que je peux dire que c'est un polygone régulier parce que les côtés sont isométriques? »

Les élèves répondent par la négative à la dernière question. Mais l'explication de l'enseignant invite à nouveau les élèves à faire une lecture en GI de la figure F :

> « Il faut que les angles soient isométriques. Ici, on le voit très bien que l'angle qui est ici et l'angle qui est ici *(pointe deux angles consécutifs de la figure F)*, c'est pas du tout le même. Ok, ici, c'est un angle beaucoup plus grand que celui-là, c'est pas identiques, c'est pas isométriques, donc, euh, est-ce que c'est un polygone régulier? Malheureusement non. »

De nouvelles figures sont projetées sur le tableau; aucune est nommée, codée ou possède des valeurs numériques (GI). Elles sont séparées en deux classes. L'enseignant demande d'expliquer le classement. Un élève dit qu'une classe contient des polygones réguliers et l'autre non. L'enseignant demande pourquoi. L'élève réplique : « Tous les côtés sont de la même longueur pis les angles sont de la même chose. ». L'enseignant enchaîne avec ce qui suit en employant des verbes faisant référence à l'observation et à la mesure (GI) :

> « Est-ce que ça va pour définir c'est quoi un polygone régulier? Il faut que tu regardes les côtés et les angles. Il faut que tous les côtés soient isométriques, donc, c'est-à-dire tous les côtés doivent mesurer la même chose et tous les angles à l'intérieur doivent mesurer la même chose. »

Mais voilà qu'un élève en regardant les figures ajoute : « Ben, y me semble que le pentagone yé pas, euh, yé pas tout isométrique. ». L'enseignant s'adresse au groupe et demande ce qu'il aurait dû faire (aux figures), la réponse ne vient pas. Il procède alors à une mise au point pour la lecture des figures où il fait appel à la mesure (GI) puis au codage (GII) :

> « Ça a l'air, c'est ça, donc. Ben, faudrait quasiment prendre la, mais, ça donne une illusion. Mais si tu prends la règle pis tu mesures comme il faut, oui. Pis, comment on fait pour savoir que? Si on veut identifier vraiment tout? Qu'est-ce que j'aurais dû faire pour te dire, ah oui! c'est sûr que c'est de la même mesure là? Qu'est-ce que je pourrais faire sur une figure pour être sûr? T'as même pas besoin de mesurer pis dire aye c'est sûr c'est pareil. Y a un symbole que j'ajoute à ma figure qui fait que t'as, tu peux même pas t'austiner,[82] c'est sûr les côtés vont mesurer la même affaire, vont tous être isométriques. »

---

[82] Expression dans le langage vernaculaire qui est synonyme de contredire, argumenter.

L’enseignant poursuit son explication du codage des figures (GII) en faisant un petit trait sur chacun des côtés du pentagone en question et il ajoute deux petits traits sur chacun des côtés de la figure de forme octogonale en disant :

> « Deux petites lignes ou en tous cas le même symbole pour dire que ce côté-là est pareil, pis yé pareil, pareil. Faque, là, on peut pas dire, ben, ça a l’air bizarre même si c’est quelques millimètres de différent. Ben, moi, je te dis, je viens de faire un dessin à main levée. Je vais te dire que c’est la même grandeur. Faque, je vais utiliser ce symbole-là pour dire que c’est isométrique. Est-ce que ça va pour ça? »

Après cette intervention, l’enseignant projette d’autres figures de polygones non codées. Les élèves doivent nommer les figures selon le nombre de côtés. L’exercice de nomenclature des polygones se fait pour les figures de trois à douze côtés incluant les cas à quinze, dix-huit, vingt, vingt-cinq, trente, cinquante, cent et mille côtés.

La leçon 2 se poursuit par un exercice de reconnaissance des types de triangles. Les élèves sont invités à dire des mots pour les identifier: équilatéral, isocèle, scalène, isoangle, acutangle, obtusangle, équiangle, rectangle. L’enseignant définit les triangles équilatéral, isocèle et scalène. Aux deux premiers mots, il trace à main levée la figure d’un triangle et marque d’un trait chacun des côtés congrus (GII). Il fait constater que d’autres termes ont en commun de se terminer par le mot angle. Il ajoute que pour décrire un triangle, il faut observer les côtés et les angles. Les mots isoangle, acutangle, obtusangle et équiangle sont aussi définis.

Ensuite, l’enseignant distribue deux feuilles. La première comprend sept figures de triangles dont deux ne sont pas codées (GI). Les figures codées (GII) représentent deux triangles isocèles (codage des côtés), un triangle rectangle (codage de l’angle droit), un triangle isocèle-rectangle (codage des côtés et de l’angle droit) et un triangle équilatéral (codage des trois côtés). La deuxième feuille contient un tableau à double entrée *Côtés/Angles* qui reprend les mots identifiés par les élèves et dans lequel seront classées les sept figures. Les élèves doivent découper les figures et les placer dans le tableau; action de découpage annoncée au niveau 1.

La correction de l’exercice de classification se fait par une observation des côtés et des angles des figures, codées ou non. À titre d’exemple, les figures représentant des triangles isocèles sont classées sous la case isocèle par observation de leurs côtés codés (GII). Elles sont aussi respectivement classées sous la case obtusangle pour l'une et acutangle pour l'autre uniquement par observation des angles (GI). Ces figures ont été classées en plus sous la case isoangle.

L'enseignant rappelle aux élèves le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle. Il propose trois mesures d'angles (178º, 1º, 1º) et demande aux élèves de dire d'une part, si ce triangle peut être tracé et, d'autre part, de déterminer le type de triangle. La leçon 2 se termine par un exercice de construction d'un triangle avec deux mesures de côtés en cm et une mesure d'angle en degrés (GI). L'enseignant suggère aux élèves de faire un schéma à main levée pour y indiquer les données du problème de construction. Ensuite, il fait la construction à l'aide d'instruments virtuels du tableau blanc interactif (règle graduée, rapporteur). Les élèves sont invités à consulter la page de leur cahier de théorie où sont décrites trois procédures de construction d'un triangle. Ils ont pour devoir de construire différents triangles.

La leçon 3 débute par la correction des constructions de triangles du devoir. Le premier triangle comporte trois mesures de côtés en cm (7,8,10). L'enseignant exécute la procédure de construction à l'aide d'instruments du tableau blanc interactif (règle et compas) en rappelant aux élèves de se faire un schéma à main levée dans un premier temps. Le deuxième triangle IJK devait être construit à partir de deux mesures de côtés (6,5 et 8 cm) et une mesure d'angle de 53º. Cette fois, l'enseignant projette au tableau une vidéo préalablement fabriquée qui présente les étapes de la construction toujours à l'aide des instruments du tableau interactif règle, rapporteur, compas. Les étapes sont : 1) le tracé à la règle du segment IJ de 6,5 cm; 2) le tracé de l'angle IJK de 53º avec le rapporteur; 3) une ouverture du compas à 8 cm avec une règle; 4) le tracé d'un arc de cercle à partir du point I; 5) le tracé du segment IK avec la règle pour joindre le point I au point d'intersection de l'arc avec le segment JK.

La figure produite semble avoir un angle droit. Lorsque l'enseignant demande de déterminer le type de triangle, des élèves mentionnent le mot scalène, mais un élève dit le mot rectangle. L'enseignant lui demande pourquoi et l'élève répond parce qu'il y a un angle droit. L'enseignant ajoute : « Est-ce que t'es sûr c'est un angle droit? Est-ce qu'on peut juste en voyant comme ça dire ah! c'est un angle droit? ». Pourtant, dans l'exercice de classification des triangles de la leçon 2, à titre d'exemple, les figures des triangles isocèles avaient été classées par observation de leurs angles (GI); obtusangle pour l'une et acutangle pour l'autre.

Cette seconde construction donne lieu à un échange avec un autre élève qui ne saisit pas pourquoi il faut employer le compas pour le tracé du segment IK de 8 cm. Lorsqu'il affirme *«* Y aurait pu juste tracer le 8 avec la règle. »*,* l'enseignant tente de lui expliquer l'avantage du compas sur celui de la règle graduée :

> « Ben, parce qu'il faut qui fasse une intersection avec, euh, le côté ici *(pointe le segment KJ)*, parce que c'est important l'ouverture de 53º. Il faut que tu respectes. Pis ici, ce côté-là, y faut absolument qui mesure 8 cm juste. Faque, tu peux pas dire mon 8 cm, j'pense y va aller ici ou là ou là, par rapport à cette ligne là *(pointe segment KJ),* 8 cm comme ça, comme ça *(fait varier la règle en différents sens),* j'vas chercher autant, pardon? »

L'explication ci-dessus ne convainc pas l'élève qui mentionne « Ben, y peut juste aller à une place le 8 cm. ». À nouveau, l'enseignant tente l'explication suivante en insistant sur la précision de la construction :

> « Ben, nous, on veut une construction précise. Genre, quand je prends un transparent, quand je mets dessus, faut pas que, ah! y a peut-être trois millimètres de différence. Y faut que ça arrive exactement dessus. Faque, le fait de prendre ta règle, c'est vrai que ça prends une règle, oui, mais tsé, c'est parce que ici, là, on a dit de là *(pointe le sommet K)* quand j'ai fait mon arc de cercle, c'est de là à là *(pointe les sommets I et K)*, y a toujours une distance de 8. Là, tu dis, oui, y a juste une place, oui, mais si tu fais pas, si tu prends pas le compas, c'est que y a place comme à plein d'interprétations, pis là, ben, y suffit que tu décales légèrement. »

L'élève reste sur sa position et ajoute « Ben, on peut pas décaler, ben, si la ligne est comme ça *(fait référence au segment IJ),* là, si c'est ouvert comme ça *(fait référence à l'angle de 53º)* y a juste une place. ». Cette fois, l'enseignant exprime un argument d'autorité en disant : « Moi, je veux huit précisément, pas huit virgule deux, pas huit virgule trois, pas sept virgule huit, je veux huit précis. ». L'élève abdique et l'enseignant poursuit la correction du devoir. Il présente une autre vidéo pour la construction d'un triangle à partir de deux mesures d'angles (40º, 72º) et une mesure de côté (7,5 cm). Les autres triangles à construire offrent des variations sur le même thème en GI : construire à partir de deux mesures de côtés et une mesure d'angle, trois mesures de côtés, une mesure de côté et deux mesures d'angles. Pour ces triangles, l'enseignant ne présente que les constructions finies sans les procédures de construction.

L'enseignant utilise un dernier cas de construction d'un triangle (impossible) à partir des valeurs numériques de côtés de 5 cm, 3 cm et 11 cm. La construction affichée à l'écran montre un segment ON de 11 cm et deux arcs de cercle de 5 cm et 3 cm au-dessus de chacune des extrémités du segment. L'enseignant s'en sert pour introduire l'inégalité triangulaire. Du coup, il montre aussi une règle en plastique de 30 cm qu'il invite à considérer comme le segment ON de 11 cm. Il en prend une seconde coupée en deux parties inégales reliées par un bout de papier collant. L'enseignant emploie la règle complète et les deux bouts de règle comme un système articulé afin de faire dégager une condition d'obtention d'un triangle. Un élève finit par dire qu'il faut que les deux côtés articulés donnent plus que 11. À partir de cet exemple, l'enseignant écrit une propriété des triangles au tableau : *La somme des mesures des deux petits côtés doit être plus grande que la mesure du grand côté*. Or, l'insertion des mots *petits* et *grand* dans l'écriture de la propriété interroge un élève; celui qui avait abdiqué pour l'utilisation du compas. Il dit : « Oui, mais, admettons les deux côtés sont égals, mettons c'est toutes des côtés égals, tsé, comme, euh, équilatéral là. Qu'est-ce qui arrive? C'est pas un triangle? ». L'enseignant rétorque : « C'est une des exceptions, je dirais là, ben, non, attends, regarde. ». L'élève poursuit : « Non, mais y a pas de côté plus petit. ». L'enseignant trace un triangle équilatéral à main levée sur lequel il fait trois marques de codage des côtés et indique trois fois le chiffre 6. Il demande : « Qu'est-ce que je viens de dire? Ben, la somme des deux, ça fait combien ensemble? Douze, c'est plus grand que 6. ». L'élève reprend : « Ouais, mais vous avez dit la somme des deux petits. Y a pas de petit. ». L'enseignant réplique sans modifier l'écriture de la propriété : « Là, t'as le choix de plus petit. Y en a trois plus petits. Y en a trois plus grands. ».

L'enseignant poursuit la leçon 3 en traçant au tableau un triangle ABC dépourvu de codage ou valeur numérique. Il demande aux élèves d'identifier le plus grand côté, le plus petit, le moyen côté. Il fait de même pour les angles. Ainsi, il fait faire à nouveau à ses élèves une lecture en GI de la figure, ce qu'ils font en répondant selon ce qu'ils en perçoivent. La demande d'identification est renouvelée cette fois à partir du tracé d'un triangle isocèle avec deux côtés codés. Sur la base de ces deux exemples, l'enseignant écrit une autre propriété : *Le plus petit côté est opposé au plus petit angle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle*.

Pour terminer la leçon, l'enseignant demande de définir les mots quadrilatère, diagonale, axe de symétrie et identifier des types de quadrilatères. Ensuite, il distribue un document montrant des figures de quadrilatères pour lesquelles les élèves fourniront de l'information au sujet des angles, des côtés, des diagonales et des axes de symétrie, en guise de devoir. La consigne n'est pas écrite sur le document. L'enseignant suggère d'employer les instruments de géométrie pour mesurer ces figures, non codées.

4.2.4.1.5 Résumé des niveaux 3 à 0 de l'activité de l'enseignant 4

De manière générale, lorsque l'enseignant parle de la géométrie qu'il désire faire apprendre à ses élèves (niveaux 3 à 1), ses propos ne nous permettent pas d'identifier le paradigme géométrique au sein duquel il entend œuvrer (GI-II). En effet, ses intentions sont guidées notamment par les notions géométriques à l'étude, le sentiment de devoir reprendre partiellement l'enseignement de notions vues au primaire et la manipulation dont celle des instruments de géométrie. Néanmoins, certains éléments de son discours sont susceptibles de le positionner en GI quand il parle de tracer des figures précises se vérifiant par la superposition d'un figure-réponse produite sur un transparent ou qu'il évoque des activités de découpage et de collage. D'autres propos sont orientés vers GII lorsqu'il discute de faire apprendre les propriétés géométriques même s'il dit avoir des difficultés à montrer leur utilité aux élèves. Cet aveu n'est pas sans relation avec les problèmes de son projet de construction.

En effet, les problèmes appartiennent aux types *Reconnaître* (53%), *Rechercher une mesure* (22%), *Construire* (18%)*, Justifier* (4%) et *Produire une représentation* (3%). Les problèmes du type *Justifier* (4%) sont peu nombreux. Pourtant, ils favorisent l'explicitation des référents théoriques de GII, ce qui pourrait contribuer à faire voir leur pertinence. Par ailleurs, le sentiment éprouvé par l'enseignant à reprendre des notions du primaire se répercute dans le pourcentage élevé des problèmes du type *Reconnaître*

(53%). Pour l'ensemble des problèmes, nous en avons identifiés en GI, vers GII ou en GI-II. Toutefois, la dimension paradigmatique des problèmes ne semble pas guider les choix de l'enseignant a priori. Il s'agirait plutôt d'arguments relatifs aux habiletés et aux notions sollicitées par les problèmes ainsi qu'à leur présentation.

L'actualisation des intentions de l'enseignant a révélé une propension en GI. En effet, les leçons en classe traitaient principalement d'objets géométriques pour lesquels des définitions ont été données, mais que les élèves devaient identifier aussi à partir de figures les représentant. L'enseignant a émis différentes directives pour la lecture des figures par ce qu'il a dit et validé et par les figures montrées aux élèves. L'information qui en était extraite provenait souvent de l'observation globale ou d'une mesure (GI). À la leçon 3, l'enseignant a particulièrement démontré son intérêt pour la précision des tracés faits avec les instruments. Les problèmes de construction se faisaient à partir de valeurs numériques (GI). Pour l'un d'eux, il s'est servi d'arguments de précision pour justifier l'emploi du compas sur celui de la règle graduée, ce qui n'a pas convaincu un élève qui ne voyait pas, avec raison, pourquoi employer le compas plutôt que la règle graduée. Le scepticisme de l'élève s'explique par le fait que le compas a servi à reporter une mesure prise d'une règle graduée (GI) au lieu d'exploiter l'idée que les rayons du cercle sont égaux (technologies de GII). Aussi, l'enseignant a suggéré le tracé de figures à main levée surtout comme préalable à la construction de figures à l'échelle. L'activité de découpage de figures pour identifier des triangles (leçon 2) ainsi que l'emploi par l'enseignant d'un système articulé de règles (en plastique) pour traiter de l'inégalité triangulaire (leçon 3) ont illustré son intention associée à la manipulation. Par ailleurs, le recours aux instruments virtuels du tableau blanc interactif et aux vidéos montrant des procédures de construction semble avoir réglé ses difficultés de gestion de classe liées à la manipulation des instruments de géométrie. Ceci termine l'analyse des niveaux de l'activité enseignante. Voyons ce qui en des conceptions d'élèves.

4.2.4.2 Analyse de conceptions des élèves de la classe 4

Tel que dit à la section 4.2.4, les conceptions d'élèves ont été observées à partir de problèmes des types *Justifier, Reconnaître* et *Construire.* Ne pouvant questionner les élèves pour des problèmes du type *Rechercher une mesure* (les recueils ne contenaient pas de résolutions), nous les avons interrogés deux fois à partir de problèmes *Construire* puisque la construction est présente à chacun des niveaux de l'activité enseignante.

4.2.4.2.1 Conceptions des élèves et problème Justifier

Voici le problème[83] sélectionné pour les entretiens.

7) Un triangle possède des angles de 100° et 40°. Pourquoi peut-on être assuré que ce triangle est isocèle?

Figure 43 Problème - classe 4 Justifier

Les élèves résolvent peu de problèmes du type *Justifier* (4% des problèmes du projet de construction). L'enseignant n'a d'ailleurs pas retenu deux problèmes *Justifier* (problèmes 3 et 5) du questionnaire jugeant qu'ils demandent trop d'interprétations. Le problème sélectionné pour les entretiens n'exige pas beaucoup d'interprétations à l'aide de référents théoriques de GII. Néanmoins, il n'est pas exclu que les valeurs numériques de l'énoncé fassent basculer les arguments des élèves en GI, en particulier s'ils font une construction à l'échelle du triangle décrit dans l'énoncé. Cela est possible compte tenu de l'intérêt pour les constructions à l'échelle transmis par l'enseignant à la leçon 3. Nous détaillons ces potentielles résolutions dans l'analyse a priori suivante.

4.2.4.2.1.1 Analyse a priori du problème

Il faut expliquer pourquoi un triangle possédant des angles respectifs de 100º et 40º est isocèle. Le problème n'a pas de figure et n'en suggère pas la production. Il contient deux valeurs numériques pour démarrer la résolution. Une technique consiste à trouver la valeur du troisième angle en faisant le calcul : 180º – (100º + 40º) = 40º. L'argumentation s'appuie des technologies suivantes (GII) : le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle, la définition du triangle isocèle, le théorème selon lequel si dans un triangle deux angles sont congrus, alors leurs côtés opposés le sont aussi et le triangle est isocèle.

---

[83] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

Après avoir fait le calcul précédent pour la valeur du troisième angle, des élèves pourraient tracer une figure à l'échelle, tel que dit auparavant. Ils seraient susceptibles de fournir une argumentation basée sur une validation instrumentée de leur figure (GI). D'autres cas sont à prévoir, par exemple des élèves traceraient une figure à l'échelle ou à main levée légitimée par une argumentation en GII, partielle ou complète. Voyons ce qu'ils ont fait.

4.2.4.2.1.2 Conceptions des élèves

Nous avons identifié les conceptions *Calculatoire, Esquisse codée et Esquisse* chez les élèves interviewés. Elles ont été observées dans les classes précédentes. Pour la conception *Calculatoire*, les quatre élèves ont fait le calcul du troisième angle selon la structure de contrôle théorique associée au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle. L'*Esquisse codée* et l'*Esquisse* ont été sollicitées respectivement par les élèves 1 et 2. Ils ont produit une figure à main levée indiquant les valeurs d'angles 100º, 40°, 40°. La figure tracée par l'élève 1 a des marques de codage contrairement à celle de l'élève 2. Les élèves 3 et 4 n'ont qu'un argument écrit. Nous y reviendrons. Voici la figure produite par l'élève 1 avec son argumentation.

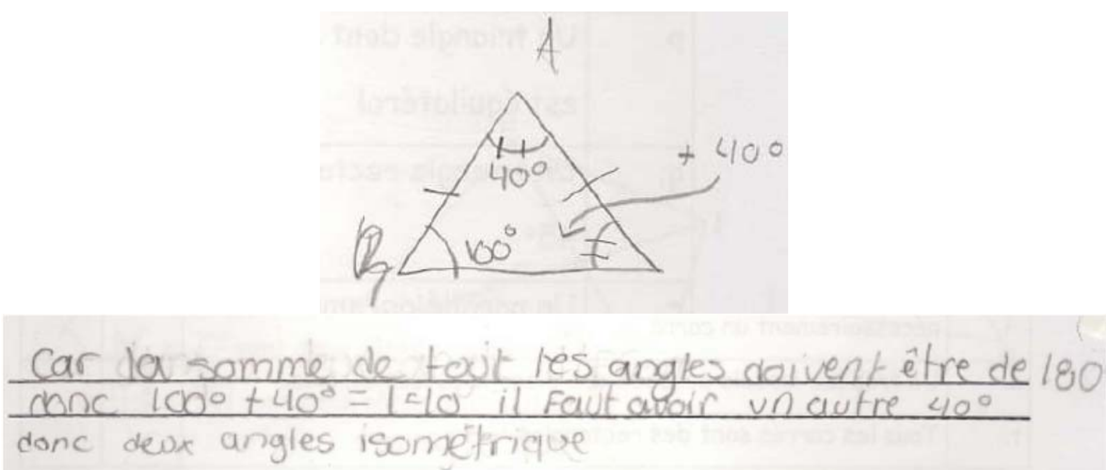


Figure 44 Production de l'élève 1 (classe 4) Justifier

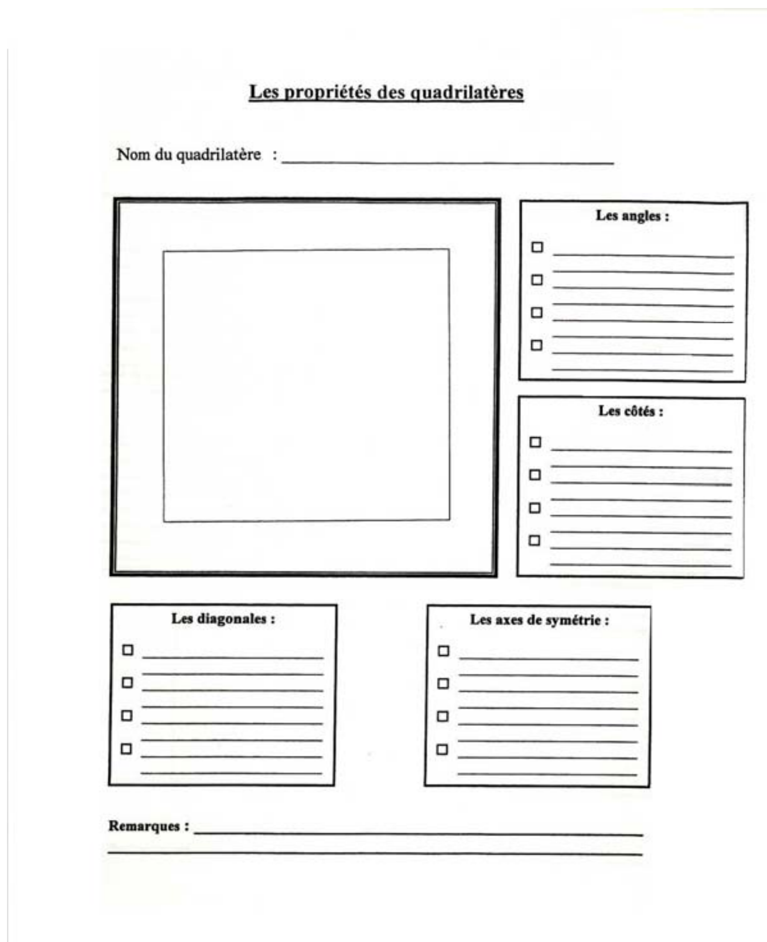
L'élève 1 a sollicité les conceptions *Calculatoire* et *Esquisse codée.* Pour la seconde conception, il a produit une figure à main levée en y ajoutant des marques de congruence des côtés et des angles. Sa structure de contrôle est théorique puisqu'il a référé à la définition du triangle isocèle, à la propriété d'avoir deux angles congrus ainsi qu'au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle. Néanmoins, nous doutons que le théorème selon lequel dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés congrus sont congrus fasse partie de sa structure de contrôle théorique. La figure 44 montre qu'un des angles congrus n'est pas associé à un côté opposé congru. L'entretien avec l'élève n'a pas permis d'en savoir plus à ce sujet. Tout ce qu'il a dit est : « Ben, c'est sûr que c'est un triangle isocèle parce que, tsé, si on fait, euh, 100 plus 40 ça fait 140 moins 180 ça donne, euh, 40, faque, c'est pour ça que c'est un triangle isocèle. ».

Le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle a été employé par les trois autres élèves pour justifier la nature du triangle. Il a été l'unique argument utilisé par les élèves 2 et 3, alors que l'élève 4 a aussi fait mention de la congruence de deux angles. Les justifications des quatre élèves sont partielles, ce que nous avons observé dans l'ensemble des cahiers des élèves. En effet, les arguments des vingt-quatre élèves ayant résolu le problème se répartissent en trois catégories. Dans la première catégorie, les élèves mentionnent le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle (9 élèves y compris les élèves 2 et 3). Dans la seconde catégorie, ils réfèrent au théorème de la somme des angles intérieurs du triangle et à la présence de deux angles congrus (6 élèves y compris les élèves 1 et 4). Dans la troisième catégorie, les élèves ne parlent que des deux angles congrus du triangle (6 élèves). Trois arguments n'entrent pas dans ces catégories : « Car les trois angles sont tous différents. », « Non parce que si on additionne 100º et 40º sa donne plus que 90º. », « Car ce ne sont pas les même angle. ».

En appui aux justifications, neuf élèves au total ont tracé une figure à main levée contenant les valeurs numériques du problème, à l'exception d'une seule figure tracée sans indication. Parmi les neuf figures, seule la figure produite par l'élève 1 avait ses angles et ses côtés congrus codés, telle que vue ci-dessus. Par ailleurs, nous n'avons pas trouvé de figures produites à l'échelle contrairement à ce que nous avions anticipé dans l'analyse a priori. Peut-être est-ce dû au type *Justifier*? Les élèves ont possiblement repris l'idée d'un tracé à main levée comme un outil d'aide à la réflexion. L'enseignant avait d'ailleurs exemplifié en classe le tracé à main levée de figures pour l'appropriation des données de problèmes de construction.

4.2.4.2.2 Conceptions des élèves et problèmes Reconnaître

Nous présentons un des quatre problèmes[84] employés pour les entretiens; les autres sont faits sur le même modèle. Les problèmes traitent du carré, du losange, du parallélogramme et du trapèze isocèle. Ils proviennent d'un document traitant de ces quadrilatères en plus des rectangle et trapèze rectangle. Le document a pour titre *Les propriétés des quadrilatères*, néanmoins, les problèmes sont susceptibles de maintenir les élèves en GI. Nous le verrons dans l'analyse a priori et les conceptions d'élèves.



Les propriétés des quadrilatères

Nom du quadrilatère :

Les angles :

Les côtés :

Les diagonales :

Les axes de symétrie :

Remarques :

Figure 45 Problèmes - classe 4 Reconnaître

[84] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

4.2.4.2.2.1 Analyse a priori des problèmes

Tel que dit précédemment, chacun des quatre problèmes est conçu sur le même modèle. Il s'agit d'une figure représentant un quadrilatère et d'encadrés pour inscrire des informations au sujet des angles, des côtés, des diagonales et des axes de symétrie. Quelques lignes tracées au bas de la feuille invitent les élèves à écrire des remarques.

La figure n'est pas nommée et ses sommets ne sont pas identifiés par des lettres. Elle ne contient aucune marque de codage ou valeur numérique. Les diagonales et les axes de symétrie n'apparaissent pas sur la figure.

Aucune consigne n'est écrite. Celle-ci a été formulée oralement par l'enseignant à la fin de la leçon 3. Il a demandé aux élèves de nommer chacun des quadrilatères et de fournir un maximum d'informations selon les encadrés. Aussi, il a suggéré l'emploi des instruments de géométrie pour la mesure des figures (GI) induisant ainsi une technique de résolution.

La première technique consiste à observer la figure et à compléter les encadrés selon ce qui est perçu (GI). L'observation des diagonales et des axes de symétrie peut nécessiter de les avoir préalablement tracés, mais pas nécessairement. Certains élèves pouvant se satisfaire de leur évocation mentale. La seconde technique réfère à la mesure des figures (GI). Dans ce cas, les diagonales seront tracées avant d'être mesurées. Les techniques ne sont pas nécessairement disjointes puisque selon la figure ou ses éléments (angles, côtés, etc.) des élèves complèteraient les encadrés sur la base d'observations et de mesures.

La technologie qui légitime la première technique consiste à dire est vrai ce qui est perçu. Celle qui légitime la seconde technique renforce l'idée selon laquelle est vrai ce qui est mesuré. Les problèmes visent l'explicitation de propriétés des quadrilatères (GII), mais ils induisent deux techniques de résolution en GI.

4.2.4.2.2.2 Conceptions des élèves

Sans surprise, nous avons observé les conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* auprès des élèves interviewés. Elles sont apparues de façon concomitante chez les élèves 1, 2 et 3, sauf chez l'élève 4 qui n'a pas sollicité la *Mesure d'une figure* pour résoudre les problèmes. La détermination des axes de symétrie a donné lieu à la mobilisation d'une nouvelle conception par les quatre élèves appelée *Pliage virtuel*. Nous la détaillons après avoir discuté des deux premières conceptions.

L'*Appréhension perceptive globale d'une figure* a permis aux élèves de nommer les figures de quadrilatères. Par exemple, lorsque nous avons demandé à l'élève 2 de dire par quoi il avait commencé le problème (celui du trapèze isocèle), il a répondu : « Ben, j'ai commencé par dire son nom. ». En demandant ce qu'il avait fait pour dire son nom, il a dit :

> « Ben, tsé, je l'avais déjà appris là, pis je savais que c'était un trapèze. Ben, mon prof en 6e année a disait que un trapèze, tsé, c'était, ça se nommait aussi un trapèze dans la vraie vie, tsé, ce que les éléphants, tsé y montaient dessus là, tsé, dans les cirques là. »

Dans l'extrait précédent, l'élève 2 a fait allusion à l'image globale d'un trapèze isocèle en l'associant à un objet physique; celui d'un socle surmonté par des éléphants dans les spectacles de cirques! Il s'est maintenu en GI en réinvestissant un souvenir de ses apprentissages géométriques du primaire.

C'est par l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* que les quatre élèves ont évalué le parallélisme et la congruence de côtés ou d'angles. Toutefois, cela n'a pas suffit aux élèves 1, 2 et 3; ils ont fait appel à la *Mesure d'une figure* principalement pour vérifier des angles et des côtés. Ces deux conceptions ont coexisté chez les élèves 1, 2 et 3. À titre d'exemple, pour la figure représentant un carré, les quatre élèves l'ont identifiée à vue en disant qu'ils savaient depuis le primaire que le carré a quatre angles de 90º et quatre côtés congrus. Cela n'a pas empêché les élèves 1, 2 et 3 d'employer en plus le rapporteur et la règle graduée sur cette figure.

La *Mesure d'une figure* a produit des résultats divers selon la précision accordée au maniement et à la lecture des instruments. Pour les angles du losange, par exemple, les élèves 1, 2 et 3 ont obtenu les valeurs respectives suivantes : (4 x 120º), (2 x 120º et 2 x 60º), (2 x 115º et 2 x 60º) générant des valeurs de 480º, 360º et 350º pour la somme des angles intérieurs du quadrilatère. L'élève 4 n'avait rien mesuré; il s'est contenté de dire que le losange avait deux angles aigus et deux autres obtus.

Pour les diagonales des quadrilatères, c'est principalement par une *Appréhension perceptive globale des figures* que les élèves ont cherché à les identifier, ce qui a donné lieu à des commentaires pas tous exacts. Par exemple, l'élève 1 a dit que les diagonales du losange lui semblaient isométriques. L'élève 2 a repéré les segments obliques sur les figures en retenant le sens courant du mot *diagonale*. Il n'a trouvé aucune diagonale au carré et a considéré comme diagonales les côtés obliques perçus des figures du losange, du parallélogramme et du trapèze isocèle. L'élève 3 a tracé les diagonales et il a compté les demies diagonales; le carré avait huit diagonales, les losange, parallélogramme et trapèze isocèle quatre chacun. L'élève 4 croyait que les diagonales correspondaient aux côtés des quadrilatères.

La détermination des axes de symétrie a donné lieu à une nouvelle conception sollicitée par les quatre élèves; nous l'avons nommée *Pliage virtuel*. Les élèves ont visualisé le rabattement d'une partie de la figure sur une autre à partir d'un axe vertical, horizontal ou oblique, virtuel ou réellement tracé (R). Le système de représentation pour l'expression de l'opérateur correspond aux gestes physiques et mentaux des élèves pour indiquer l'axe choisi sur la figure et visualiser les parties ainsi repliées. La structure de contrôle est figurale (∑) puisque les élèves établissent une mise en correspondance d'éléments de la figure suite au rabattement virtuel. Voici un exemple où l'élève 4 explique ce qu'il a fait pour déterminer un seul axe de symétrie au trapèze isocèle.

> « J'ai divisé juste en deux *(met le côté de sa main vis-à-vis un axe vertical dessiné)*, pis j'ai essayé genre de plier ça juste en deux *(simule un pliage de la figure selon un axe horizontal non dessiné)*. Ça se pouvait pas, ça, ça allait ici *(simule le rabattement des angles adjacents à la grande base vers le haut)*, pis ça *(pointe les angles adjacents à la petite base*), ça revenait dedans *(pointe l'intérieur du trapèze)*. »

Par ailleurs, nous avons compté vingt-cinq cahiers contenant des résolutions. La conception *Mesure d'une figure* semble avoir été sollicitée notamment pour les valeurs des angles intérieurs, ce qui a généré une variété de résultats à l'exception du carré dont les valeurs d'angles sont connues des élèves. Par exemple, l'élève 24 a écrit des valeurs d'angles différentes pour le losange (64º, 116º, 120º, 117º) et le trapèze isocèle (119º, 127º, 60º, 121º).

4.2.4.2.3 Conceptions des élèves et problème Construire

Voici le premier problème[85] du type *Construire* utilisé pour les entretiens. Nous présentons le second à la section 4.2.4.2.4.

12)Construis un carré DEFG de 35 mm de côté.

Figure 46 Problème - classe 4 Construire

La production de figures avec les instruments de géométrie est présente à tous les niveaux d'activité de l'enseignant. Il importe que les tracés soient précis pour des valeurs numériques données (GI) et qu'ils se vérifient par la superposition d'une figure-réponse. Le problème correspond à cette façon de produire des figures puisqu'il faut tracer un carré à partir d'une valeur de côté de 35 mm. Nous l'avons choisi pour cette raison et parce que le carré est un objet géométrique connu des élèves, ce qui devrait faciliter sa résolution. Voyons l'analyse a priori suivie des conceptions d'élèves.

4.2.4.2.3.1 Analyse a priori du problème

Afin de produire un carré DEFG de 35 mm de côté, une technique de résolution avec règle graduée, équerre et compas comprend les actions ci-dessous :

Avec la règle graduée, tracer un segment DE de 35 mm;
Avec l'équerre, à partir du point D, tracer un segment DX;
Avec l'équerre, à partir du point E, tracer un segment EY;
Avec le compas et une ouverture correspondant au segment DE, à partir du point D comme centre, tracer un arc de cercle passant par le segment DX;
Avec le compas et la même ouverture, à partir du point E comme centre, tracer un arc de cercle passant par le segment EY;
Nommer F et G, les points d'intersection de chacun des arcs avec les segments EY et DX;
Avec la règle, joindre les points F et G.

La technique est supportée par la technologie suivante : définition du carré qui est un quadrilatère aux angles droits et aux côtés congrus, propriété selon laquelle tous les rayons du cercle sont congrus. Nous ajoutons l'énoncé selon lequel deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

---

[85] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

Une variante de la technique consiste à n'utiliser que l'équerre (ou le rapporteur d'angles) et la règle graduée. Dans ce cas, la mesure des segments DG et EF s'obtient avec la règle. Des variantes de ces techniques existent en fonction de l'ordre dans lequel les éléments seront pris en compte pour produire la figure.

4.2.4.2.3.2 Conceptions des élèves

Les quatre élèves interviewés ont tracé leur figure avec règle graduée, rapporteur d'angles ou équerre. Aucun élève n'a employé le compas. Les élèves 1, 2, 3 ont pris la règle et le rapporteur et l'élève 4, la règle et l'équerre. Les trois premiers élèves ont mobilisé la conception *Instruments rapporteur/règle* et le quatrième élève la conception *Instruments équerre/règle*. Nous les décrivons ci-après.

Pour la conception *Instruments rapporteur/règle*, ils ont fait ceci : (R_1) avec la règle, ils ont tracé un segment DE (35 mm); (R_2) avec le rapporteur, à partir du point E, ils ont marqué un angle de 90º; (R_3) avec la règle, ils ont tracé un segment EF (35 mm); (R_4) avec le rapporteur, à partir du point F, ils ont marqué un angle de 90º; (R_5) avec la règle, ils ont tracé un segment FG de 35 mm; (R_6) avec la règle, ils ont joint les points G et D. Le système de représentation (L) pour l'expression des opérateurs correspond aux gestes effectués pour manier le rapporteur et la règle. Le système de représentation a été bonifié par l'ajout de lettres aux sommets de la figure (élèves 1, 2, 3). Des marques de codage apparaissent pour la congruence des côtés ou des angles ou la valeur numérique (3,5 cm ou 35 mm) est inscrite pour signifier la congruence des côtés. Ces indications sont variables : codage des côtés et une valeur numérique (élève 1), codage des angles et quatre fois la valeur numérique (élève 2), codage des angles et des côtés sans valeur numérique (élève 3). La structure de contrôle ($\sum$) est double. Elle est théorique ($\sum_1$) puisque les élèves ont référé à la définition du quadrilatère (carré). Elle est technique ($\sum_2$) dans la mesure où ils ont manipulé le rapporteur et la règle.

Pour la conception *Instruments équerre/règle*, l'élève 4 s'est servi des mêmes opérateurs décrits dans l'analyse a priori à l'exception des opérateurs liés à l'emploi du compas. Il a préféré utiliser une règle graduée pour la mesure des segments congrus. Le système de représentation (L) pour l'expression des opérateurs correspond aux gestes associés au maniement de l'équerre et la règle. Le système de représentation aurait pu être enrichi par l'ajout de lettres aux sommets, de codage ou de valeurs numériques sur la figure, mais ce ne fut pas le cas de l'élève 4 (aucune indication). La structure de contrôle ($\sum$) est double. Elle est théorique ($\sum_1$) liée à la définition du quadrilatère (carré) et technique ($\sum_2$) par l'emploi de l'équerre et la règle.

Les figures produites selon ces conceptions sont à l'échelle autant que faire se peut. De plus, deux des quatre élèves (élèves 1 et 3) ont tracé une figure à main levée avant de faire la figure avec les instruments, tel que le proposait l'enseignant à la leçon 2 afin d'indiquer les données du problème de construction. Or, nous avons observé que les données n'étaient pas complètement traduites par des indications sur les figures à main levée. De plus, les indications sur les figures à main levée ne correspondaient pas nécessairement aux indications sur les figures tracées avec les instruments. Par exemple, la figure à main levée de l'élève 1 possède des marques de codage des quatre côtés et une valeur numérique (3,5 cm) et rien n'est indiqué aux angles et aux sommets DEFG. La figure produite avec les instruments contient ces mêmes marques de côtés et valeur numérique en plus des sommets identifiés par les lettres DEFG (donnée du problème). Pour l'élève 3, la figure à main levée contient moins d'informations que celle produite avec les instruments. La figure à main levée montre le tracé d'un carré dont les sommets sont nommés par les lettres DEFG, alors que la figure faite avec les instruments contient en plus des marques de codage pour la congruence des côtés et des angles droits.

Nous n'avons pas investigué plus à fond cet aspect du travail des élèves lors des entretiens. Comment interpréter les différences observées entre les figures à main levée, tracées avec les instruments et les données du problème? Quel rôle a effectivement été attribué à la figure à main levée par les élèves 1 et 3? S'agissait-il « […] de se donner une idée pour visualiser » comme a dit l'élève 1 ou bien de retenir toutes les données du problèmes? Deux autres élèves de la classe ont fait des figures à main levée en plus de celles produites avec les instruments (élèves 13 et 26) pour lesquelles des différences sont observables. Les figures à main levée et avec instruments de l'élève 13 montrent respectivement une valeur numérique de 3,5 cm et quatre fois la valeur de 3,5 cm sans autre indication relative aux propriétés du carré. Celles de l'élève 26 ont leurs sommets identifiés par les lettres DEFG, mais la figure à main levée contient en plus une marque de codage d'un angle droit.

Vingt-deux élèves ont résolu le problème. La moitié d'entre eux ont fait une figure à l'échelle sans marques pour identifier la congruence des côtés et des angles. Il semble que le travail avec les instruments ait été satisfaisant. Pour l'autre moitié des élèves, les figures présentent des éléments codés incluant des valeurs numériques. Sept figures ont des indications de congruence des côtés seulement. Une figure contient des indications pour les angles droits seulement. Trois figures ont des indications relatives aux angles et aux côtés.

4.2.4.2.4 Conceptions des élèves et problème Construire

Voici l'autre problème[86] du type *Construire* utilisé pour les entretiens.

14) Sachant qu'un de ses côtés mesure 3 cm et qu'un de ses angles mesure 80°. Construis ce losange.

Figure 47 Problème - classe 4 Construire (losange)

Ce problème oriente le travail des élèves en GI puisqu'il sollicite la mesure. Il représente un défi supérieur à celui du carré dans la mesure où les propriétés du losange sont habituellement moins familières aux élèves. De plus, il arrive qu'ils confondent visuellement le losange avec le carré ou qu'ils l'associent au quadrilatère ressemblant à un cerf-volant. Détaillons l'analyse a priori du problème.

[86] Source : Répertoire personnel de l'enseignant.

4.2.4.2.4.1 Analyse a priori du problème

Les données numériques du problème relatives à un côté de 3 cm et un angle de 80º induisent une technique de résolution à partir de la règle graduée et du rapporteur d'angles. Elle est décrite ci-dessous :

Avec la règle graduée, tracer un segment AB de 3 cm;
Avec le rapporteur d'angles, à partir du point A, marquer un angle de 80º;
Avec la règle, tracer un segment AD de 3 cm de côté;
Avec le rapporteur d'angles, à partir du point D, marquer un angle de 100º;
Avec la règle, tracer un segment DC de 3 cm de côté;
Avec la règle, joindre les points C et B.

La technique est supportée par la définition du losange (quadrilatère aux côtés congrus). Elle implique aussi le théorème selon lequel les angles consécutifs du losange sont supplémentaires.

Une autre technique est possible avec la règle graduée, le rapporteur d'angles et le compas. Nous la décrivons ci-dessous mais doutons de son emploi, d'une part, parce que les données du problème n'évoquent pas l'usage du compas et, d'autre part, parce qu'elle est plus complexe à réaliser. Voici les étapes de construction :

Avec la règle graduée, tracer un segment AB de 3 cm;
À partir du point A, avec un rapporteur d'angles, marquer un angle de 80º;
Avec une règle, tracer le segment AX;
Avec un compas, à partir du point A comme centre et une ouverture de compas égale à celle du segment AB, tracer un arc de cercle;
Nommer D le point d'intersection de l'arc avec le segment AX;
Avec la règle, joindre les points D et B;
Avec le compas et la règle, tracer la bissectrice de l'angle BAD;
Pour tracer la bissectrice BAD, à partir du point D faire un arc de cercle;
À partir du point B et la même ouverture de compas, faire un arc de cercle;
Nommer Z, un des points d'intersection des deux arcs;
Avec la règle, tracer la bissectrice en joignant les points A et Z;
Nommer K le point d'intersection de la bissectrice avec le segment DB;
Avec le compas, à partir du point K comme centre et avec une ouverture égale à celle du segment AK, tracer un cercle;
Nommer C le point d'intersection du cercle avec la bissectrice;
Avec la règle, joindre les points D et C ainsi que B et C.

Cette technique sous-entend les technologies suivantes : la définition du losange et du triangle isocèle; le théorème selon lequel dans un triangle isocèle la bissectrice issue du sommet est aussi hauteur, médiatrice et médiane; la propriété du cercle d'avoir ses rayons congrus; le théorème selon lequel les diagonales du losange se croisent perpendiculairement en leur milieu. Voyons les conceptions des élèves.

4.2.4.2.4.2 Conceptions des élèves

Nous ne disposions que des productions des élèves 1, 2, et 3 pour les entretiens; l'élève 4 n'avait pas fait le problème. Les trois élèves ont employé le rapporteur et la règle. La conception *Instruments rapporteur/règle* a été mobilisée par les élèves 1 et 3 et partiellement par l'élève 2 au niveau des opérateurs. Nous y reviendrons. Pour ces élèves, la structure de contrôle technique a fait légèrement défaut, c'est-à-dire qu'ils se sont moins bien appliqués dans le maniement et la lecture des instruments. Leurs figures présentent des variations de quelques millimètres ou degrés par rapport aux données du problème.

Les élèves 1 et 3 ont fait ceci : (R_1) avec la règle, ils ont tracé un segment AB[87] de 3 cm ; (R_2) avec le rapporteur, à partir du point B (ou A), ils ont marqué un angle de 80º; (R_3) avec la règle, ils ont tracé un segment BC de même longueur; (R_4) à partir du point C, ils ont marqué l'angle supplémentaire de 100º avec le rapporteur; (R_5) avec la règle, ils ont tracé un segment CD de 3 cm; (R_6) avec la règle, ils ont relié les points D et A. Le système de représentation (L) pour l'expression des opérateurs correspond aux gestes effectués avec le rapporteur et la règle pour tracer la figure montrant une ou des valeurs numériques. La structure de contrôle est théorique ($\sum_1$) puisque les élèves ont référé à la définition du losange et au théorème selon lequel les angles consécutifs du losange supplémentaires. Elle est technique ($\sum_2$) dans la mesure où ils ont manipulé le rapporteur et la règle avec plus ou moins de précision, tel que dit précédemment.

L'élève 2 s'est servi des trois premiers opérateurs de la conception *Instruments rapporteur/règle* pour amorcer la production de sa figure. Il a mesuré un angle de 80º compris entre deux segments de 3 cm chacun et il a tracé les diagonales du quadrilatère au lieu de poursuivre avec la mesure d'un angle consécutif. Voici sa figure.

---

[87] Nous ajoutons les lettres pour faciliter la lecture de la procédure de construction. Aucune des figures produites par les élèves n'avait ses sommets identifiés.

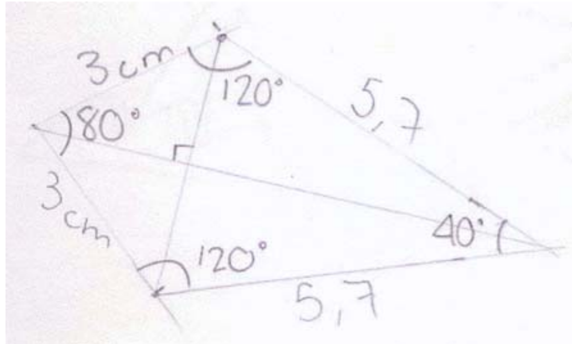


Figure 48 Production de l'élève 2 (classe 4) Construire

Pour compléter son travail, l’élève a relié les extrémités des segments de 3 cm avec une règle pour tracer la petite diagonale. Ensuite, il dit avoir déterminé le point milieu de la petite diagonale avec une règle. Il a joint par un segment le sommet de l’angle de 80º à ce point milieu toujours avec une règle et il a prolongé ce segment jusqu’à une longueur donnée. L’entretien n’a pas permis de savoir ce qui a contribué à établir la longueur de la grande diagonale. Cela semble arbitraire et n’est pas concluant. L’élève a affirmé : « Genre, je l’ai continué. Ben, ça adonné pile là. J’sais pas pourquoi, mais, genre, je l’ai continué. ». Par la suite, il a relié les extrémités de la petite diagonale à l’extrémité droite de la grande diagonale. Après, il a mesuré les deux autres côtés à la règle et les angles intérieurs du quadrilatère au rapporteur en constatant que leur somme donnait bien 360º.

Pendant l’entretien, il a employé le mot *losange* en référant à la perpendicularité des diagonales et au fait qu’un losange possède deux paires d’angles isométriques tout en pointant les côtés. Il a confondu le losange avec le quadrilatère ayant la forme d’un cerf-volant dans sa structure de contrôle théorique ($\sum_1$), ce qui a conditionné une bonne part de son travail : « Pis, j’me suis dit que si mon losange était correct, ben, ça me donnait cinq points sept cm l’autre côté aussi, faque, j’ai mesuré, pis ça m’avait donné cinq points sept cm. ». De plus, il a tenu compte d’une partie seulement des conditions associées aux diagonales du losange, à savoir une des diagonales est perpendiculaire en son milieu au lieu des deux.

Par ailleurs, aucune figure n'est à l'échelle dans les cahiers des dix-neuf élèves ayant fait le problème selon les contraintes de l'énoncé. Toutefois, six figures satisfont aux conditions de construction d'un losange, par exemple des figures aux côtés congrus avec des valeurs d'angles opposés de 70º, 70º, 110º, 110º. Quatre élèves (1, 3, 7, 13) ont fait en plus une figure à main levée. Une figure ne contient pas information (élève 13) et trois autres indiquent les valeurs numériques de l'énoncé (80º et 3 cm). Parmi ces trois dernières figures, l'une d'elles (élève 7) a des marques de codage pour la congruence des côtés.

Les treize figures ne satisfaisant pas les conditions de construction d'un losange ont été possiblement produites par la mise en œuvre de la conception *Production d'une figure.* Les élèves ont tracé quatre segments à la règle (R). Le système de représentation (L) correspond aux gestes pour former le quadrilatère à partir des segments. La structure de contrôle est figurale (∑); les élèves ont fait une figure correspondant à l'image qu'ils ont du losange (ou du cerf-volant).

4.2.4.3 Niveaux 3 à 0 de l'enseignant et conceptions des élèves - classe 4

Nous terminons l'analyse de la classe 4. Le tableau XIX (page 266) présente la compilation synthétique des poids relatifs, selon GI, GII ou GI-II, des intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1), des problèmes du projet de construction (niveau 2), de l'actualisation des intentions (niveau 0) et des conceptions d'élèves (niveau -1).

Les données du tableau indiquent que les intentions de l'enseignant (niveaux 3 à 1) se situent globalement surtout en GI-II et vers GII plutôt qu'en GI. En effet, lorsque l'enseignant parle de la géométrie, la plupart de ses propos ne sont pas identifiables à l'un des paradigmes, par exemple l'énumération de notions géométriques ou l'emploi des instruments de géométrie. Néanmoins, son discours est empreint dans une moindre mesure d'éléments tendant vers GII ou en GI, par exemple lorsqu'il est question des propriétés géométriques ou d'activités de découpage et de collage.

Par ailleurs, les problèmes que l'enseignant offre à ses élèves sont répartis selon les types *Reconnaître* (53%), *Rechercher une mesure* (22%), *Construire* (18%)*, Justifier* (4%) et *Produire une représentation* (3%). Les problèmes du type *Reconnaître* sont en

GI et vers GII à parts égales. Ceux du type *Rechercher une mesure* s'inscrivent surtout vers GII, un peu en GI-II et beaucoup moins en GI. Ceux du type *Construire* relèvent majoritairement de GI, un peu en GI-II, moins vers GII. Les problèmes du type *Justifier* s'inscrivent principalement en GI-II et un peu vers GII. Ceux du type *Produire une représentation* sont surtout en GI et un peu en GI-II. Il ne se dégage pas vraiment de tendance paradigmatique pour l'ensemble des problèmes du projet de construction. Cela ne semble pas être un critère à partir duquel l'enseignant effectue ses choix. D'ailleurs, celui-ci a trouvé tous les problèmes du questionnaire intéressants (GI ou vers GII). Son évaluation des dits problèmes a montré qu'il les considère plutôt selon les habiletés ou les notions qu'ils sollicitent ou leur présentation.

L'actualisation des intentions de l'enseignant a révélé une activité géométrique plus importante en GI. Les leçons traitaient de savoirs pour lesquels des définitions furent données (GII). Toutefois, les élèves devaient identifier ces savoirs à partir de figures les représentant. Or, l'information extraite des figures s'obtenait pour une large part à partir d'une observation globale ou d'une mesure (GI). De plus, les activités de découpage pour l'identification des triangles ainsi que l'utilisation de règles de plastique pour traiter de l'inégalité triangulaire ont favorisé une oscillation entre GI et vers GII puisque la manipulation de ces objets physiques (papiers et système articulé de règles) visait l'apprentissage de référents théoriques de GII, mais par un procédé ostentatoire en GI. Les actions de l'enseignant sont demeurées en GI par l'intérêt manifesté à l'égard de la précision des tracés avec les instruments lors de problèmes de construction à partir de données numériques. Il a conseillé de produire des figures à main levée comme travail préalable à la construction de figures à l'échelle. D'autres situations témoignent de ses actions en GI, par exemple l'épisode (leçon 3) où l'enseignant a restreint son emploi du compas au report d'une mesure à partir de la règle graduée (GI) au lieu d'exploiter l'idée selon laquelle les rayons du cercle sont égaux (technologies de GII).

Pour les conceptions d'élèves, il appert que les problèmes de GI ont sollicité des conceptions de GI. Ainsi, pour la construction d'un carré de 35 mm de côté, les élèves ont déployé les conceptions *Instruments rapporteur/règle* et *Instruments équerre/règle*. Pour la construction d'un losange selon les données de 3 cm de côté et un angle de 80 degrés, nous avons noté une plus large part d'imprécision dans la structure de contrôle instrumentée des élèves interviewés (1 et 3) ayant sollicité la conception *Instruments rapporteur/règle*. L'élève 2 a partiellement utilisé cette conception puisqu'il a confondu le losange avec le quadrilatère de la forme d'un cerf-volant. De plus, le problème de construction d'un losange a donné lieu à plus de figures non à l'échelle dans l'ensemble des cahiers. Elles ont été produites possiblement à partir de la conception *Production d'une figure.* Les élèves auraient tracé quatre segments en s'assurant de faire une figure correspondant à l'image qu'ils avaient du losange (ou du cerf-volant). La suggestion de l'enseignant de faire une figure à main levée, comme travail préalable à la production d'une figure avec les instruments, a trouvé un écho chez quelques élèves. Tel que dit précédemment, ces élèves n'ont pas complètement traduit les données des problèmes en indications sur leurs figures à main levée et ils n'ont pas nécessairement transposées ces indications sur les figures produites avec les instruments. Nous n'avons pu cerner chez les élèves le rôle de la figure à main levée dans l'idée de produire une figure à l'échelle notamment en relation avec le codage (partiel ou complet) de ces figures respectives. Des élèves ont codé les figures à main levée et produite avec les instruments, l'une ou l'autre des figures ou aucune. L'emploi du codage témoigne néanmoins d'une prise en compte d'éléments théoriques de GII, partiel ou précaire. À titre d'exemple, pensons aux marques sur la figure 44 produite par l'élève 1 au problème *Justifier* où un des angles congrus du triangle isocèle n'est pas associé à un côté opposé congru.

La résolution du problème *Justifier* a sollicité les conceptions *Esquisse codée* et *Esquisse* en lien avec la conception *Calculatoire*. Ce ne sont pas tous les élèves qui ont eu besoin de tracer une figure en appui à la résolution de ce problème. Toutefois, les arguments théoriques fournis par la majorité sont partiels. Leur opportunité de faire explicitement usage de référents théoriques de GII en résolution de problèmes *Justifier* est faible (4% des problèmes). A contrario, les occasions de résoudre des problèmes du type *Reconnaître* sont nombreuses puisqu'ils constituent une part importante du projet de construction (53%). Ceux choisis pour les entretiens étaient en GI; ils contenaient des figures dépourvues de codage et susceptibles d'être mesurées. Conséquemment, les élèves ont mobilisé des conceptions de GI pour les résoudre telles que l'*Appréhension perceptive globale d'une figure*, la *Mesure d'une figure* et le *Pliage virtuel*.

Tableau XIX Compilation des résultats de la classe 4 selon GI, GII et GI-II

Entrevue et leçons

Niveaux	GI	GII	GI-II	
3	4%	7%	**89%**	100%
2	0%	**60%**	40%	100%
1	17%	8%	**75%**	100%
0	**54%**	34%	12%	100%
3 à 1	6%	18%	**76%**	100%
3 et 1 sans Q8	8%	8%	**84%**	100%

*Compilation des problèmes (259)

Problèmes de la planification *		**Problèmes pour les entretiens**	**Conceptions des élèves (niveau -1)**
Reconnaître **(53%)** (137 problèmes)	GI: **50%** GII : **50%** GI-II: 0%	4 problèmes GI	GI: Appréhension perceptive globale d'une figure GI: Mesure d'une figure GI: Pliage virtuel
Rechercher une mesure **(22%)** (57 problèmes)	GI: 7% GII: **60%** GI-II: 33%	n/d	n/d
Construire **(18%)** (46 problèmes)	GI: **59%** GII: 15% GI-II: 26%	2 problèmes GI	GI: Instruments rapporteur/règle GI: Instruments équerre/règle GI: Production d'une figure
Justifier **(4%)** (10 problèmes)	GI: 0% GII: 20% GI-II: **80%**	1 problème GI-II	GI: Esquisse vers GII: Esquisse codée vers GII: Calculatoire
Découvrir (0%) (0 problème)	GI: 0% GII: 0% GI-II: 0%	n/d	
Produire une représentation (3%) (9 problèmes)	GI: **67%** GII: 0% GI-II: 33%	n/d	

Chapitre 5 Interprétation des résultats

Nous allons synthétiser et interpréter les résultats décrits précédemment afin de répondre à nos questions de recherche. Les voici à nouveau :

> **Question 1 :** Quels types de problèmes sont proposés à des élèves de première secondaire pour l'exercice de la géométrie et sur quel(s) projet(s) d'enseignement reposent-ils?
>
> **Question 2 :** Quelles conceptions géométriques d'élèves de première secondaire sont développées par ces problèmes?
>
> **Question 3 :** À quelle(s) géométrie(s) peut-on associer les conceptions d'élèves?

Nous débuterons notre exposé en revenant sur la géométrie souhaitée et sur la géométrie actualisée par les enseignants, car c'est à travers elles qu'ont été choisi des problèmes à donner aux élèves. Et c'est à partir d'un sous-ensemble de ces problèmes que nous avons pu identifier des conceptions d'élèves. Par la suite, nous discuterons du phénomène d'oscillation des géométries GI et GII en nous appuyant des manifestations présentées tout au long de la section 4.2, puis nous émettrons des hypothèses afin d'expliquer ce phénomène. Nous terminerons l'exposé par une présentation des limites de la recherche.

5.1 La géométrie souhaitée et la géométrie actualisée

Tel que dit en introduction à ce chapitre, les géométries souhaitée et mise en place par les enseignants sont susceptibles d'appartenir à GI ou de tendre vers GII. Le tableau XX suivant résume les types de géométrie identifiés aux différents niveaux de leur activité, chacun témoignant du souhait ou de l'actualisation de la géométrie. Rappelons que l'annexe 7 présente des extraits codés du discours d'un enseignant afin d'illustrer les éléments considérés et leur association aux niveaux et paradigmes

Tableau XX Répartition des types de géométrie selon les niveaux d'activité enseignante

	Niveau 3 Conceptions/valeurs (Questions 1 à 7)			Niveau 2 Projet construction du thème (Question 8)			Niveau 1 Projet d'une leçon (Questions 9 et 10)			Niveau 0 Leçons en classe (Captation vidéo)		
	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II
Enseignant1	12%	31%	**57** %	0%	**60**%	40%	0%	**80**%	20%	29%	**66**%	5%
Enseignant2	0%	18%	**82**%	0%	33%	**67**%	0%	25%	**75**%	43%	**48**%	9%
Enseignant3	6%	29%	**65**%	0%	**82**%	18%	2%	14%	**84**%	16%	**70**%	14%
Enseignant4	4%	7%	**89**%	0%	**60**%	40%	17%	8%	**75**%	**54**%	34%	12%

En observant les données du tableau XX, notamment les pourcentages aux niveaux 3 et 1, nous constatons que les intentions émises par les enseignants dans leur discours ont été majoritairement regroupées sous la colonne GI-II (pourcentages les plus élevés).[88] Pour ces niveaux,[89] les pourcentages en GI-II varient respectivement de 57% à 89% et de 20% à 84%, le reste des propos se répartissant entre GI et GII. Au niveau 1, il importe de mentionner que pour trois enseignants le pourcentage de GI clairement exprimé est pratiquement nul (de 0% à 2%). Ainsi, lorsque les enseignants parlent de la géométrie, de son enseignement ou apprentissage, beaucoup des propos sont a priori difficilement identifiables à GI ou GII. À titre d'exemple, l'expression « Faire découvrir les propriétés. », sans plus de détails, peut relever de GI s'il s'agit de faire mesurer quelques cas de figures pour statuer sur une propriété. Par contre, la découverte d'une propriété peut s'obtenir aussi à l'aide d'un raisonnement déductif et s'inscrire en GII.

---

[88] À l'exception du niveau 1 de l'enseignant 1 qui a qualifié ses leçons de théoriques. Ses propos (en entrevue) sur la planification d'une leçon expliquent un pourcentage plus élevé en GII qu'en GI-II.

[89] Au niveau 1, le protocole de recherche ne prévoyait pas demander aux enseignants de fournir par écrit une (ou des) planification(s) de leçon(s). Une comparaison des réponses aux questions de l'entrevue avec des planifications aurait peut-être donné un portrait des géométries sollicitées légèrement différent. Par planification, nous entendons la description écrite d'une leçon comprenant notamment les notions à traiter, les objectifs visés, les difficultés d'élèves anticipées, les moyens didactiques choisis, etc.

Au niveau 2, l'absence de propos identifiés en GI (0% aux quatre enseignants) concernant le projet de construction du thème *triangles et quadrilatères* s'explique notamment par la question 8[90] de l'entrevue qui visait explicitement les propriétés géométriques, ce qui était propice à orienter les réponses des enseignants vers GII plutôt qu'en GI. À cet effet, nous avons compilé l'ensemble des occurrences retenues lors de l'entrevue en termes de GI, GII ou GI-II pour vérifier l'impact de la question 8 sur l'ensemble des questions. Le tableau XXI suivant montre de légères variations des pourcentages, mais la répartition des propos des enseignants selon GI, GII ou GI-II demeure relativement semblable avec ou sans la question 8.

Tableau XXI Répartition des types de géométrie selon la question 8 de l'entrevue

	Enseignant 1			Enseignant 2			Enseignant 3			Enseignant 4		
Entrevue	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II	GI	GII	GI-II
Avec Q8	8%	43%	49%	0%	22%	78%	4%	33%	63%	6%	18%	76%
Sans Q8	11%	35%	54%	0%	19%	81%	5%	25%	70%	8%	8%	84%

Ajoutons que notre investigation du niveau 2 de l'activité enseignante ne s'est pas limitée à la question 8 de l'entrevue. L'analyse des problèmes sélectionnés par les enseignants pour leurs projets de construction du thème *triangles et quadrilatères* est venue l'enrichir. De fait, les problèmes qu'ils ont choisis nous ont permis de nuancer les types de géométrie privilégiés. Nous en discutons à la section 5.2.

Pour les niveaux 3 à 1, nous observons que ce qui est exprimé le plus clairement est en GII, ce qui est très peu explicitement référé est en GI, et la majorité des éléments du discours en entrevue ne peuvent être discriminés selon GI ou GII. De plus, parmi les propos qui ont teinté le discours des enseignants, certains d'entre eux ont retenu plus particulièrement notre attention. En effet, les enseignants ont exprimé des points de vue

[90] La question 8 de l'entrevue visait le niveau 2 de l'activité enseignante et elle était formulée ainsi : Dans l'ensemble des cours sur les triangles et les quadrilatères que vous faites avec vos élèves, quelles propriétés des triangles et des quadrilatères jugez-vous qu'il est important que vos élèves apprennent et puissent utiliser?

qui faisaient référence à l'usage de la géométrie et à des moyens d'y accéder. Ce sont ceux d'associer la géométrie à la vie quotidienne, d'en montrer l'utilité, de recourir à la manipulation et faire découvrir la discipline. Le tableau XXII illustre leurs pourcentages dans le discours des enseignants.

Tableau XXII Des points de vue extraits du discours des enseignants - niveaux 3 à 1

	E 1	E 2	E 3	E 4
Relation de la géométrie à la vie quotidienne	13%	0%	50%	8%
Montrer l'utilité de la géométrie	0%	0%	16%	31%
Faire manipuler à l'aide de matériel concret	87%	63%	0%	61%
Faire découvrir	0%	37%	34%	0%
% des occurrences retenues dans le discours (n3 à n1)	16%	9%	19%	27%

La dernière ligne du tableau XXII montre des pourcentages allant de 9% à 27 % selon les enseignants, ce qui paraît anecdotique. Selon nous, il n'en est rien car en sus de l'entrevue, nous avons retrouvé de ces idées dans leurs évaluations des problèmes des questionnaires et certaines actions en classe. Ces idées nous semblaient trouver un écho dans deux des catégories établies par les chercheurs Ernest (1989) et Thompson (1984). Selon ces auteurs, les enseignants combinent consciemment ou non dans leur pratique des éléments provenant de trois visions de la nature des mathématiques et leur enseignement : visions instrumentaliste, platonicienne et résolution de problèmes. Voici un résumé de chacune d'elles produit par Van der Sandt (2007, p. 345) :

> « Instrumentalist view : Mathematics is lookep upon as being useful and consisting of an unrelated collection of facts, rules, skills (Ernest, 1989) and processses to be memorized (Leung, 1995).
>
> Platonistic view : Mathematics is viewed as a static/fixed body (NRC, 2001) but a unified body of knowledge and procedures, consisting of interconnecting structures and truths which are to be discovered and not created (Ernest, 1989).
>
> Problem solving view : This view is characterized by a dynamic problem-driven view of mathematics as a continually expending field of human inquiry. Mathematics is not seen as a finished product, and its results remain open for revision (Ernest, 1989, Thompson, 1984). »

Ainsi, selon ces catégories, la volonté d'établir des liens entre la géométrie et la vie quotidienne, de montrer l'utilité de cette discipline jumelée à l'idée de rendre les apprentissages géométriques signifiants en prenant appui de cette réalité en particulier par de la manipulation d'objets physiques, souscrit bien à une vision instrumentaliste des mathématiques, alors que l'idée de faire découvrir les objets géométriques relèverait plutôt d'une vision platonique des mathématiques. Toutefois, il faut préciser que des pourcentages élevés de ces points de vue dans le discours ne signifie pas qu'ils soient actualisés automatiquement auprès des élèves. Par exemple, l'idée de manipulation a été importante dans le discours de l'enseignant 1 (87%), mais il s'agissait de l'expression d'un souhait non réalisé en classe. Aussi, l'importance de la relation entre la géométrie et la vie quotidienne dans le discours de l'enseignant 3 (50%) n'est pas ressortie en classe (du moins pour les leçons filmées). Nous reviendrons sur ces points de vue au moment d'émettre des hypothèses sur le phénomène d'oscillation GI, GII, observé tout au long de notre analyse.

Au niveau 0, les pourcentages sous la colonne GI-II sont très faibles; ils varient de 5% à 14%. C'est très peu comparativement aux niveaux 3 et 1 pour lesquels nous obtenons des pourcentages de 57% à 80% (niveau 3) et de 20% à 84% (niveau1). Tel que dit auparavant, il n'a pas été possible de catégoriser la plupart des propos dégagés de l'entrevue selon GI ou GII. Cette situation s'est inversée quand les enseignants ont actualisé leurs projets en classe. Cela est dû à notre position de chercheure qui, par l'observation des leçons, a permis de discriminer l'activité enseignante plus clairement entre GI et GII. En effet, quand les enseignants sont dans la classe, ce qu'ils avaient en tête et n'avaient pas explicitement livré en entrevue en termes de GI ou GII, là, nous voyons ce qu'ils arrivent à actualiser de leur pensée. Ainsi, au niveau 0, les enseignants se situent majoritairement en GII (sauf l'enseignant 4), mais à des degrés différents. Par ailleurs, il y a au moins de 16% à 54% de leur activité qui est en GI, en particulier pour les classes 2 (43%) et 4 (54%). À noter que les pourcentages sous les colonnes GI et GII pourraient être supérieurs si nous avions réussi à classer tous les éléments de la colonne GI-II sous GI ou GII. Nous n'y sommes pas parvenue complètement puisque certaines paroles restaient empreintes d'implicites, c'est-à-dire susceptibles d'appartenir à l'un ou l'autre des deux paradigmes. Par exemple, lorsqu'un enseignant suggère verbalement à ses élèves de produire une figure pour s'aider à comprendre lors d'un examen, cela ne nous renseigne pas sur l'allure de la figure à laquelle l'enseignant pense ni à celle qu'il imagine que les élèves pourraient dessiner. S'agit-il d'une esquisse ou d'une figure comportant des codages?

Notre comparaison des niveaux 3 et 1 avec le niveau 0 de l'activité enseignante indique que le discours reste avec un grand flou d'un point de vue paradigmatique. La verbalisation est extrêmement difficile. Pour nous, il s'agit d'un résultat. Quand les enseignants parlent de la géométrie, leurs implicites situés potentiellement en GI ou GII restent implicites, ils n'ont pas nécessairement le souci ou le besoin d'expliciter leurs opinions en termes de ce qui peut s'interpréter selon GI ou GII. Cela n'est pas vrai au niveau 2 concernant le projet de construction du thème possiblement parce que c'est nous qui avions posé la question en faisant référence aux propriétés géométriques (GII). Ainsi, pour ce niveau, les pourcentages en GII sont plus élevés et ceux en GI-II sont beaucoup plus petits, ce qui montre bien que les enseignants ont les moyens de parler de la géométrie en des termes qui s'inscrivent en GII. S'ils ont les moyens d'en discuter, mais qu'ils ne les prennent pas pour les autres questions (niveaux 3 et 1), c'est soit que nos questions n'appelaient pas cela ou que le caractère intuitif versus formel de la géométrie n'est pas ce qui caractérise leurs préoccupations. Comme nous n'avons pas les moyens de savoir par leur discours aux niveaux 3 et 1 à quelle géométrie ils réfèrent (GI ou GII), mais qu'ils ont les capacités de décrire correctement une géométrie en GII (leurs réponses à la question 8 le montrent), cela veut dire que la précision quant au type d'éléments sur lesquels ils s'appuient pour juger de la validité ou de la valeur de la géométrie n'est pas une préoccupation assez claire ou présente pour que le discours en rende compte explicitement; c'est une hypothèse. Quand les enseignants racontent ce qu'ils font, le caractère intuitif ou formel des outils employés pour le travail en géométrie ne transparaît pas vraiment du discours. Néanmoins, à partir du moment où nous orientons clairement le discours vers quelque chose de plus formel, les enseignants s'en emparent et ils en parlent bien (voir les pourcentages de 60% à 82% en GII). Ils ont les moyens d'en discuter, mais ils n'en montrent pas la préoccupation. Il s'agit pour nous d'un état de fait et non d'un jugement de valeur.

Toutefois, les questions qui nous semblent intéressantes à poser sont : pourquoi n'arrive-t-on pas à déceler du discours des enseignants une propension claire en GI ou GII qui sous-tendrait leur position implicite à partir de laquelle ils s'expriment? Quelles sont les conditions de leur environnement qui créent cet état de situation? Sont-elles liées au programme d'études ainsi qu'aux manuels scolaires? C'est possible sachant que le programme du premier cycle ne positionne pas clairement la géométrie à enseigner et à faire apprendre en suggérant des orientations à la fois inductives et déductives et que les manuels scolaires souscrivent aux prescriptions ministérielles afin d'être approuvés. Aussi, il se peut que nos questions n'aient pas suffisamment sollicité de réponses en lien avec les géométries GI et GII, tel que dit auparavant.

Donc, le discours des enseignants n'est pas spécifique d'un paradigme. Cela est normal dans la mesure où les paradigmes GI et GII sont une construction de recherche. Par ailleurs, leurs interventions en classe relèvent majoritairement d'un paradigme ou l'autre. Elles sont en GI de 16% à 54% ou en GII de 34% à 70%. De cette situation, il appert que nous ne pouvons pas comparer leur géométrie souhaitée avec celle qu'ils ont actualisée puisque l'expression de cette géométrie souhaitée n'est pas située clairement en GI ou GII. Et, il n'est peut-être pas étonnant que nous ne soyons pas parvenue à discriminer leur discours selon GI ou GII puisque leur activité en classe présente des épisodes d'oscillation entre GI et GII d'une fréquence parfois surprenante. Voici un exemple produit en 18 secondes.

Tableau XXIII Exemple d'une oscillation au sein d'un court extrait (leçon 1- classe 2)

« […] donc, euh, si dans un problème on te dit mesure l'angle avec ton rapporteur, ben, tu vas vraiment le mesurer	GI
sinon, quand on te demande de trouver les informations, habituellement, tu vas devoir te servir justement des caractéristiques des triangles et des différentes propriétés qu'on va voir pour être capable de trouver les mesures qui manquent […] »	GII

Ces épisodes d'oscillation très nets entre GI et GII observés en classe apportent une hypothèse de réponse au fait que le discours ne soit pas de GI ou GII. Nous disons que le discours non spécifiquement inscrit en GI ou GII est cohérent avec une action en classe oscillante. En effet, les enseignants auraient pu tenir des propos plus spécifiques à GI ou GII dans leur discours aux niveaux 3 à 1, ce qui n'a pas été le cas (à l'exception des réponses à la question 8), et leurs actions auprès des élèves être concordantes ou non avec le discours. A priori, nous aurions eu d'ores et déjà une idée plus précise de leurs intentions concernant GI ou GII. Ensuite, leurs intentions auraient pu s'inscrire en continuité avec leurs actions en classe (en GI ou GII) ou ne pas se réaliser. D'ailleurs, en enseignement des mathématiques, ce que nous envisageons et ce que nous faisons réellement n'est jamais tout à fait pareil à cause de divers facteurs dont certains sont hors du contrôle de l'enseignant (Gattuso, 1993).

En résumé, nous ne pouvons pas dire que les enseignants n'ont pas fait ce qu'ils ont dit par rapport à GI ou GII puisque l'expression de leurs intentions n'était pas claire, considérée sous l'angle de ces paradigmes. De plus, l'oscillation entre GI et GII de la géométrie qu'ils ont actualisée est peut-être due au programme et aux manuels. Mais comme elle apparaît chez les quatre enseignants, il est légitime de se demander si elle ne relèverait pas aussi d'une difficulté intrinsèque à l'enseignement de la géométrie. Il est à noter que l'enseignant de la classe 1 y avait fait allusion lorsqu'il a parlé d'un écart entre sa formation universitaire en géométrie euclidienne et les cours en enseignement de la géométrie dont il aurait aimé bénéficier pour aider au développement de la pensée formelle de ses élèves.[91] Par ailleurs, tel que déjà dit, certains des éléments composant l'environnement didactique des enseignants dont le programme d'études et les manuels scolaires n'offrent pas une vision paradigmatique nette d'un côté ou de l'autre. Nous verrons à la section suivante que cela s'est répercuté dans les choix de problèmes des enseignants.

[91] L'enseignant 1 est le seul à avoir discuté de sa formation initiale en géométrie au regard de sa pratique professionnelle. Cet aspect mériterait d'être investigué auprès d'autres enseignants, ne serait-ce que pour enrichir notre compréhension de l'effet de la formation sur la pratique d'enseignement de la géométrie.

5.2 Les types de problèmes proposés

Nous avons analysé l'ensemble des problèmes choisis par les enseignants afin de répondre à notre première question de recherche qui est : Quels types de problèmes sont proposés à des élèves de première secondaire pour l'exercice de la géométrie et sur quel(s) projet(s) d'enseignement reposent-ils? La compilation des problèmes est présentée au tableau XXXIII de l'annexe 8.

5.2.1 Problèmes proposés par les enseignants

Les données du tableau XXXIII indiquent quatre types de problèmes préférés des enseignants pour l'exercice de la géométrie : *Reconnaître*, *Rechercher une mesure*, *Construire* et *Justifier*. Les problèmes des types *Découvrir* et *Produire une représentation* sont négligés ou absents des projets de construction du thème *triangles et quadrilatères*, par exemple les problèmes du type *Découvrir* sont absents des choix faits par les enseignants des classes 2, 3 et 4 et ceux du type *Produire une représentation* le sont pour les classes 1 et 2.

Les problèmes des types *Reconnaître* et *Rechercher une mesure* présentent une propension vers GII plus importante qu'en GI ou GI-II. En effet, c'est la colonne GII du tableau qui offre une lecture des plus hauts pourcentages pour trois classes sur quatre (classes 1, 2, 3) au premier type et les quatre classes au second type.[92] Les problèmes du type *Justifier* s'inscrivent aussi surtout en GII pour les classes 1 et 3, presque ex-aequo en GII et GI-II pour la classe 2 et principalement en GI-II pour la classe 4. Enfin, peu de problèmes du type *Construire* sont en GII; ils sont répartis majoritairement en GI pour les classes 2 et 4 et en GI-II pour les classes 1 et 3. Ainsi, les poids relatifs (%) de ces quatre types de problèmes en fonction de GI, GII ou GI-II fluctuent d'une classe à l'autre avec des variations plus ou moins importantes. Mais à quoi peut-on attribuer la

[92] Néanmoins, dans le cas de la classe 2, les problèmes *Rechercher une mesure* comptent pour 39% en GI et 48% en GII. Bien que 48% > 39%, la part des problèmes en GI demeure importante.

ressemblance[93] entre les types de problèmes choisis par les enseignants au sein du projet de construction du thème *triangles et quadrilatères*?

Globalement, nous avons remarqué que les quatre types de problèmes privilégiés par les enseignants sont aussi les plus répertoriés des manuels scolaires : *Reconnaître*, *Rechercher une mesure*, *Construire* et *Justifier*. Le tableau XXIV ci-dessous montre en parallèle la répartition des types de problèmes des enseignants et celle issue de l'analyse des problèmes de manuels (voir section 4.1).

Tableau XXIV Répartition des problèmes des enseignants et des manuels scolaires

	Reconnaître	*Rechercher une mesure*	*Construire*	*Justifier*	*Découvrir*	*Produire une représentation*	
Enseignant1	18%	35%	14%	29%	4%	0%	100%
Enseignant2	27%	46%	21%	6%	0%	0%	100%
Enseignant3	43%	27%	10%	19%	0%	1%	100%
Enseignant4	53%	22%	18%	4%	0%	3%	100%
Manuels	15%	26 %	11%	38 %	5 %	5 %	100%

Les problèmes fournis par les enseignants provenaient surtout de manuels et de cahiers d'exercices (affiliés à des collections de manuels). Il est raisonnable de penser que les problèmes des manuels aient balisé leurs choix. Par ailleurs, les types les moins traités tant dans les choix des enseignants que les manuels sont *Découvrir* et *Produire une représentation*.

5.2.2 Problèmes soumis aux enseignants

Les arguments des enseignants extraits de leur appréciation des problèmes du questionnaire n'ont pas permis de savoir vraiment s'ils sont motivés par un besoin de

[93] La question des différences individuelles de la représentativité des types et des géométries associées serait l'objet d'une autre recherche. Il s'agirait d'identifier des prédicteurs de poids relatifs pour certains types de problèmes plutôt que d'autres. Par exemple, sur quelles bases un enseignant juge-t-il un nombre x de problèmes suffisant plutôt qu'un nombre y pour un type de problèmes ou plusieurs?

travailler en GI ou GII. Les propos formulés pour dire si un problème est intéressant, à donner aux élèves ou susceptible d'être modifié[94] relèvent plutôt des trois catégories suivantes : contenus mathématiques des problèmes, idées relatives aux mathématiques et à leur enseignement, présentation des problèmes.

Une première catégorie d'arguments repose sur les contenus mathématiques ou paramathématiques (Chevallard, 1991) en jeu dans les problèmes. Ainsi, un problème sera considéré si son contenu correspond à ce qui est travaillé en classe ou prévu à la planification. Voici des exemples : « Fait appel à diverses notions sur les angles. », « Permet de travailler avec plusieurs notions d'aire et même de périmètre. », « Permet de développer le sens d'estimation et d'observation », « Permet de travailler les déductions et justifications. ».

Une seconde catégorie comprend des arguments associés à des points de vue sur les mathématiques et leur enseignement; éléments déjà repérés en entrevue. Ainsi, un problème sera jugé selon sa relation à la vie quotidienne (vision instrumentaliste), son potentiel à faire découvrir une notion (vision platonicienne) ou à offrir des avenues de résolution (vision problem-solving). Voici des exemples : « Situation réaliste. », « Toujours intéressant de faire découvrir des propriétés aux élèves. », « Oui, plusieurs chemins pour arriver à justifier. », « Liberté de choisir la démarche qui convient le plus à l'élève. ».

Une troisième catégorie regroupe des arguments relatifs à la présentation du problème. Il sera considéré si sa mise en forme est convenable, par exemple « T.B. de mettre un tableau pour guider la résolution de la question. », « Montre l'illustration de ce que l'on cherche. » (en référence à un point d'interrogation dessiné sur la figure).

Ces catégories ne sont pas typées GI ou GII, mais à l'intérieur de chacune, il est possible de lire une orientation des arguments en GI ou vers GII. Voici des exemples. Dans la première catégorie, l'enseignant 1 a référé à des contenus mathématiques pour

---

[94] L'annexe 6 présente une synthèse des réponses positives et négatives des enseignants au regard de leurs évaluations des problèmes du questionnaire concernant leur intérêt, la possibilité d'être donné aux élèves tel quel ou modifié.

juger deux problèmes intéressants, entre autres; l'un en GI (P4) et l'autre vers GII (P3). Dans le premier cas, un problème du type *Découvrir* lui a plu dans la mesure où il pouvait « Aider à la compréhension de l'angle extérieur. ». Dans le second cas, il s'agissait d'un problème du type *Justifier* dont il a dit « Qu'il fait réfléchir sur les propriétés des quadrilatères. ». Dans la deuxième catégorie, la vision instrumentaliste des mathématiques via la relation des mathématiques à la vie quotidienne est endossée par l'enseignant 2. Il a employé cet argument pour juger un problème en GI (P2) et un autre vers GII (P3). Dans le premier cas, le problème *Rechercher une mesure* était accompagné de figures non codées ni décrites en mots, mais placé en contexte de vie quotidienne. L'enseignant 2 l'a trouvé intéressant pour cette raison. De plus, il a suggéré de bonifier le contexte de vie quotidienne du problème sans changer les figures, ce qui a maintenu le problème en GI. Dans le second cas, il a trouvé le problème *Justifier* intéressant puisqu'il « Travaille les caractéristiques des quadrilatères dans un contexte réaliste. », sans désirer le modifier. Dans la troisième catégorie, l'enseignant 4 a apprécié, entre autres, un problème en GI (P4) ainsi qu'un problème vers GII (P6). Pour le premier problème, du type *Découvrir*, il a accueilli favorablement la présence d'un tableau. Au second problème du type *Justifier*, il a apprécié le point d'interrogation placé sur la figure afin d'indiquer la valeur de l'angle à rechercher.

Bien sûr, le fait qu'un enseignant trouve un problème d'un type donné (GI ou vers GII) intéressant et envisage le donner tel quel à ses élèves fait penser qu'il en est satisfait. Autrement, il l'aurait modifié puisque le questionnaire lui en offrait l'occasion. De fait, onze propositions furent rédigées par les enseignants afin de modifier les problèmes. Parmi celles-ci, deux seulement ont eu pour effet de passer les problèmes de GI vers GII. Ce sont les propositions des enseignants 1 et 3 concernant un même problème du type *Reconnaître* (P2). Ils ont suggéré d'ajouter des marques de codage aux figures du problème et faire identifier les propriétés. Les autres propositions (neuf) ont maintenu les problèmes selon les mêmes types et les mêmes géométries (en GI ou vers GII).

Par ailleurs, la partie du questionnaire concernant les solutions attendues des élèves a permis de recueillir des commentaires qui montrent que les enseignants sont préoccupés par des difficultés inhérentes à la résolution de problèmes vers GII. À titre d'exemples, ils anticipent que les élèves n'interprètent pas bien les figures, qu'ils ne produisent pas de justifications écrites avec les calculs ou que les justifications soient partielles voire inadéquates, qu'ils éprouvent des difficultés à employer des instruments de géométrie pour construire une figure lorsqu'il n'y a pas de mesures précises ou en utilisent lorsqu'il faut déduire plutôt que mesurer.

En résumé, nous disons que ce sont principalement des problèmes des types *Reconnaître* et *Rechercher une mesure*, vers GII, qui sont proposés aux élèves pour l'exercice de la géométrie (voir annexe 8), ce qui répond à notre première question de recherche. Toutefois, sur la base des arguments formulés par les enseignants dans les questionnaires, il appert que les paradigmes géométriques ne semblent pas être leur premier vecteur de choix des problèmes. Par ailleurs, il aurait été possible qu'ils ne formulent pas d'arguments perçus selon nous en GI ou vers GII, mais que leurs modifications des problèmes témoignent de transformations au regard des géométries sous-jacentes aux problèmes. Or, à l'exception des deux modifications faisant passer un problème de GI vers GII, toutes les autres ont eu pour effet de laisser les problèmes en GI ou vers GII (rappelons qu'il y avait deux problèmes en GI et quatre vers GII). Nous pouvons voir par là une autre façon chez les enseignants de renouveler leur accord à la fois avec les géométries en GI ou tendant vers GII.

5.3 Les conceptions d'élèves et les géométries associées

Les problèmes privilégiés par les enseignants sont une composante du milieu au sein duquel les élèves ont développé des conceptions. À partir d'un sous-ensemble de ces problèmes, nous avons identifié des conceptions mobilisées par les élèves pour les résoudre, ce qui nous a permis de répondre à nos deux dernières questions de recherche. Les voici à nouveau :

> Quelles conceptions géométriques d'élèves de première secondaire sont développées par ces problèmes?
> À quelle(s) géométrie(s) peut-on associer les conceptions d'élèves?

Le tableau XXV ci-dessous résume les conceptions d'élèves répertoriées lors des analyses. Elles se répartissent presque ex-aequo entre GI et vers GII.

Tableau XXV Synthèse des conceptions d'élèves répertoriées en GI et vers GII

Conceptions de GI	Conceptions tendant vers GII
Appréhension perceptive globale d'une figure (1)[95]	Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte (11)
Mesure d'une figure (2)	Appréhension des marques de codage d'une figure (12)
Esquisse (3)	Esquisse codée (13)
Pliage virtuel (4)	Repérage à partir d'une figure codée (14)
Dénombrement (5)	Association directe d'une propriété à l'objet géométrique (15)
Production et mesure d'une figure (6)	Application directe d'une propriété (théorème) sans calcul (16)
Instruments rapporteur/règle (7)	Calculatoire (17)
Instruments équerre[96]/règle (8)	Instruments compas/règle (18)
Instrument règle (9)	Référence (19)
Production d'une figure (10)	

Dans le tableau XXV, les conceptions regroupées dans la colonne de gauche relèvent principalement de la perception des figures et de leur mesure. Ces conceptions appartiennent à une géométrie GI. Les conceptions de la colonne de droite s'éloignent de GI sans toutefois appartenir à une géométrie GII. Leur mise en œuvre a montré que les élèves sont sensibles à des éléments théoriques d'une situation présentés sous une forme figurale, symbolique, littérale ou numérique. Ces conceptions sont considérées comme les prémisses d'un travail de distanciation d'une géométrie GI. Néanmoins, ce travail demeure fragile puisque les élèves les ont utilisées bien souvent en concomitance des conceptions associées à la perception et à la mesure des figures.

---

[95] La numérotation des conceptions sert à leur identification dans l'entête du tableau XXXIV (annexe 9).
[96] L'équerre est employée comme un rapporteur à 90 degrés.

Toutes ces conceptions sont apparues en résolution de problèmes pour lesquels il fallait 1) identifier des figures ou des propriétés d'objets géométriques représentés par des figures y compris des sous figures 2) rechercher une valeur numérique, par exemple une valeur d'angle, de côté, de périmètre 3) produire un argument 4) évaluer la valeur de vérité d'un énoncé 5) produire des figures à l'échelle ou non. Or, une conception a un caractère de localité selon les problèmes (Balacheff et Margolinas, 2005). Dans cette perspective, il nous semblait pertinent de voir si des types de problèmes, en GI ou vers GII, étaient susceptibles de ne solliciter que des conceptions de GI ou vers GII. Nous avons compilé dans le tableau XXXIV (annexe 9) les conceptions selon les problèmes retenus pour les analyses.

Ainsi, les problèmes du type *Construire* en GI ont favorisé les conceptions de GI suivantes : l'*Esquisse*, les *Instruments rapporteur/règle* et *Instruments équerre/règle* et la *Production d'une figure.* Ces problèmes avec des consignes empreintes de valeurs numériques orientent les techniques et technologies de résolution principalement vers la mesure, donc en GI.

Les problèmes du type *Reconnaître* en GI ont aussi majoritairement[97] suscité des conceptions de GI telles que l'*Appréhension perceptive globale d'une figure,* la *Mesure d'une figure, l'Esquisse,* le *Pliage virtuel* et le *Dénombrement*. La présence de figures sans codage appelle implicitement des conceptions de GI, en particulier l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure*; conceptions sur lesquelles nous reviendrons.

Les problèmes du type *Reconnaître* vers GII, sans figures à l'appui, ont sollicité des conceptions vers GII comme le *Repérage à partir d'une figure codée*, l'*Association directe d'une propriété à l'objet géométrique* et la *Référence*. Les conduites des élèves

[97] La présence de la conception *Appréhension partiellement coordonnée du texte et de la figure* (vers GII) est due à un effet de contrat didactique. Cette conception est apparue chez l'élève 1 (classe 1) lors de la résolution du problème qui demandait *Combien de triangles isocèles y a-t-il dans la figure ci-contre?* Or, la figure ne comportait aucune indication permettant d'identifier des triangles isocèles. Mais pour cet élève, il devait y avoir des triangles isocèles puisque la question le demandait. Par ailleurs, la présence de la conception *Référence* n'est pas un indice de progression important des apprentissages vers GII dans la mesure où la structure de contrôle est assumée indirectement par le maître via le cahier de théorie.

pour ces trois conceptions respectives les ont amené à produire une figure codée afin de raisonner et tenter de ne pas s'induire en erreur, à faire appel à leur mémoire ou à leur cahier de théorie pour vérifier ce qu'ils croyaient savoir ou trouver ce qu'ils ignoraient.

Pour les autres cas de problèmes, nous avons assisté à la mise en œuvre d'une mixité de conceptions en GI ou tendant vers GII, ce qui est cohérent avec l'oscillation vécue dans l'enseignement. De plus, une telle situation s'anticipe aisément pour des problèmes identifiés GI-II, c'est-à-dire ceux qui sont résolubles à partir de techniques et technologies appartenant à l'un ou l'autre des paradigmes. Par ailleurs, les problèmes du type *Rechercher une mesure* en GI ont quand même sollicité une conception de type *Calculatoire* vers GII. De plus, en excluant le cas des problèmes du type *Reconnaître* (vers GII) discuté au paragraphe précédent, les autres problèmes vers GII n'ont pas assuré chez les élèves un déploiement de conceptions tendant uniquement vers GII. En fait, pour résoudre les problèmes des types *Reconnaître*, *Rechercher une mesure* et *Justifier* tendant tous vers GII, et pour lesquels nous avions des figures codées, décrites en mots voire une absence de figures pour une partie des problèmes du type *Justifier*, ils ont employé aussi des conceptions de GI notamment l'*Appréhension perceptive globale d'une figure,* la *Mesure d'une figure* et la *Production et mesure d'une figure*. Dans ce dernier cas, à défaut d'avoir une figure avec le problème, les élèves s'en sont fait une et l'ont mesurée pour justifier.

Les conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure* sont apparues pour trois des quatre types de problèmes ciblés par nos analyses et cela, autant pour des problèmes en GI que vers GII. Si nous excluons le type *Construire* pour lequel il est demandé aux élèves de faire une figure, nous dirions que ces deux conceptions de GI ont été omniprésentes, c'est-à-dire partout en résolution des problèmes des types *Reconnaître*, *Rechercher une mesure* et *Justifier*. Elles ont été les *outils* préférés des élèves. Certes, leur usage n'est pas étonnant pour la résolution de problèmes de GI qui présentent des figures non codées ou à l'échelle. Néanmoins, leur emploi pour des figures codées, décrites ou accompagnées d'une consigne interdisant leur mesure semble plus symptomatique des traitements que les élèves peuvent faire des figures. Rappelons les problèmes *Rechercher une mesure* (vers GII) avec interdiction de mesurer les angles dont on cherchait les valeurs pour lesquels des élèves (classe 1) ont mesuré d'autres éléments des figures décrites en mots.

Par ailleurs, certaines conceptions tendant vers GII s'avèrent plus intéressantes que d'autres dans la mesure où elles donnent des indices que les rapports des élèves aux figures changent. Ce sont notamment les conceptions de *l'Appréhension partiellement coordonnée de la figure et du texte*, de l'*Appréhension des marques de codage d'une figure*, de l'*Esquisse codée* et du *Repérage à partir d'une figure codée*. Ces conceptions suggèrent une certaine progression des apprentissages des élèves passant du perceptif-instrumenté vers les propriétés, bien que celle-ci ne soit pas linéaire. En effet, les élèves pouvaient solliciter ces conceptions vers GII en parallèle de conceptions de GI comme l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure*. Et, tel que dit précédemment, le seul cas où nous avons identifié des conceptions vers GII sans des conceptions de GI fut celui des problèmes du type *Reconnaître* sans figures. Pour ces problèmes, l'absence de figures a permis aux élèves d'avancer en direction de GII. Nous discuterons du rôle de la figure à la section 5.4.

Parmi les autres conceptions tendant vers GII, nous avons noté que la conception *Calculatoire*, référant principalement aux théorèmes de la somme des angles intérieurs du triangle et du polygone convexe, impliquait davantage pour les élèves des relations numériques (voire métriques) que géométriques.

Quant à la conception *Référence*, elle est d'une autre nature. Par sa mobilisation, les élèves ont délégué ou non pleinement assumé la structure de contrôle théorique, démontrant ainsi une faible rétention des propriétés géométriques. Or, cette conception est apparue en résolution de problèmes des types *Reconnaître* (GI, vers GII) et *Justifier* (GII); ceux visant précisément l'identification et l'utilisation explicite des propriétés. Peu souhaitable, la mobilisation de cette conception se conçoit pour des élèves en apprentissage, mais elle n'est peut-être pas étrangère au traitement didactique des propriétés géométriques. Nous en discutons dans ce qui suit.

5.4 L'articulation enseignement-problèmes-conceptions

Nous avons identifié des problèmes géométriques et des conceptions d'élèves en réponse à nos questions de recherche. Évidemment, les élèves sont en classe et ils reçoivent un enseignement de la géométrie dont le but est de les faire progresser d'une géométrie GI vers GII. Ainsi, cherchions-nous à rendre compte d'une articulation entre l'enseignement, les problèmes et les conceptions d'élèves à l'entrée au secondaire.

Or, il appert que cette articulation est oscillante entre GI et vers GII. C'est du moins notre proposition pour faire état de l'omniprésence de la géométrie GI tant dans l'enseignement que les conceptions d'élèves déployées pour la résolution de problèmes en GI bien sûr, mais aussi pour des problèmes orientés vers GII. En effet, il y a une interférence de la géométrie GI dans ce qui aurait pu être traité en GII, interférence due précisément à l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* colorant l'environnement dans lequel les élèves s'exercent à la géométrie en première secondaire.

Si nous considérons cette situation strictement du côté des élèves, le fait de voir une prédominance des conceptions de GI telles que l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure* n'est pas surprenant. En effet, l'observation et la mesure de figures sont des pratiques qui sont généralement admises auprès des élèves du primaire. Elles font partie de leur héritage scolaire lorsqu'ils débutent leurs études au secondaire. Nous pourrions nous attendre à ce que le secondaire vise à faire évoluer ces pratiques. Or, nos observations ont montré que l'environnement de première secondaire incluant les problèmes a permis ce réinvestissement des conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure* par les élèves.

Par nos observations en classe, nous avons été en mesure de mieux cerner l'environnement au sein duquel chaque enseignant a convié ses élèves à faire de la géométrie. Il s'agit d'un environnement hybride, *tricoté* à la fois en GI et vers GII, sans prise de position ferme, c'est-à-dire sans une visée claire du passage d'une géométrie de l'observation vers la déduction donnant lieu à des épisodes d'oscillation pédagogique entre GI et vers GII. Ces épisodes sont apparus chez les quatre enseignants à des degrés divers dans leur usage du référentiel théorique, des artéfacts et de l'espace local réel; composantes d'un *espace de travail géométrique* (Houdement et Kuzniak, 2006).

Ainsi, le référentiel théorique constitué de définitions[98] et de propriétés relatives aux triangles et aux quadrilatères appartenait à GII. Néanmoins, les propriétés ont été présentées en tant qu'énoncés admis ou vérifiés expérimentalement par la perception et la mesure (GI). Par exemple, lorsqu'un enseignant dit : « La somme des mesures des deux petits côtés doit être plus grande que la mesure du grand côté. » (leçon 3, classe 4), il renvoie à la fois à la perception (petits côtés, grand côté) et à la mesure. Rappelons pour cet énoncé qu'un élève a donné en contre-exemple le cas du triangle équilatéral en affirmant, avec raison, qu'il n'avait aucun côté plus petit qu'un autre.

L'utilisation d'artéfacts déclinés en objets physiques ou objets virtuels relevait de GI ou tendait vers GII. Par exemple, les objets physiques incluaient les instruments de géométrie tels que la règle graduée ou non, le rapporteur d'angles, l'équerre et le compas, mais ne s'y réduisaient pas. D'autres objets physiques comme des pailles, des papiers de couleurs différentes, des cartons ou encore des règles brisées pour former un système articulé ont servi à faire *voir*, faire dégager des propriétés géométriques. Les objets virtuels obtenus par des logiciels de géométrie dynamique ou des outils du tableau blanc interactif pouvaient être conçus à partir de propriétés (GII) notamment par les enseignants, mais leur emploi auprès des élèves s'inscrivait souvent en GI plutôt que vers GII.

Quant au travail sur les figures qui participent de l'espace local et réel,[99] il a été le lieu privilégié de cette oscillation en classe. Nous avons noté, d'une part, un désir des

---

[98] Nous avons observé en classe quelques cas de définitions qui n'étaient pas logiquement hiérarchisées par exemple « Un triangle est un polygone qui possède trois côtés et trois sommets. » (leçon 1, classe 2), qui étaient ambigües ou n'avaient pas d'écho dans la théorie géométrique comme dans « Une ligne brisée, une ligne que je casse en petits morceaux pour être capable de faire des arêtes. » (leçon 1, classe 4) ou dans celle-ci pour la définition d'un *triangle unique* « Ici, si on parle d'un triangle unique, on va parler d'un triangle unique au niveau des angles au niveau des côtés aussi. » (leçon 2, classe 2).

[99] Les figures étaient tracées à main levée, avec des instruments de géométrie, à l'aide de logiciels de géométrie dynamique ou des outils du tableau blanc interactif. Elles pouvaient contenir des marques de codage, des valeurs numériques ou des lettres pour l'identification de points particuliers. De plus, elles étaient représentées sur divers supports, par exemple un tableau noir, un tableau blanc interactif, un écran d'ordinateur, des cartons, des papiers de couleurs, des transparents, des pailles.

enseignants à vouloir modifier la lecture des figures faite par leurs élèves de GI vers GII notamment par le recours au codage et, d'autre part, un traitement des figures qui n'était pas toujours cohérent avec ce désir. En effet, nos observations ont révélé le côtoiement de trois modes de validation introduits à partir des figures : la perception, la mesure et le codage. Ajoutons la simulation du déplacement d'un élément d'une figure (enseignant 1) pour expliquer la propriété des angles consécutifs supplémentaires du losange. Ces modes de validation survenaient au cours d'une ou plusieurs leçons ou pour une même situation à l'intérieur d'une leçon. De plus, nous avons assisté à une mise en parallèle de ces modes ou à leur subordination. Par exemple, il y eu mise en parallèle de la mesure et des marques de codage comme façon de juger de la nature d'un triangle par l'enseignant 1 (leçon 1) lorsqu'il a répondu par l'affirmative à la question suivante d'un élève :

> « Ok, tsé, là, y a des p'tites lignes qu'on peut faire pour savoir si c'est pareil ou sinon on peut, euh, comme savoir la grandeur là, tsé, si c'est 3 cm, 3 cm, 3 cm, mais est-ce qu'on pourrait aussi le faire avec l'angle? »

Dans l'exemple suivant, il y eu subordination d'une validation théorique[100] à une validation instrumentée lorsque l'enseignant 2 (leçon 2) a jugé utile de mesurer un angle d'un triangle au rapporteur après avoir employé le théorème de la somme des angles intérieurs du triangle pour en connaître sa valeur.

Dans le prochain exemple, il y eu subordination d'une validation instrumentée à une validation théorique et vice versa. Dans le premier cas, l'enseignant 3 (leçon 1) a rappelé l'existence théorique du point d'intersection des trois médianes du triangle afin d'expliquer l'imprécision causée par la mine de crayon ou celle obtenue avec la règle graduée pour le point milieu d'un côté. Dans le second cas (leçon 3), il a référé à la mesure pour valider des propriétés de quadrilatères à partir de valeurs numériques affichées sur des constructions produites avec un logiciel de géométrie dynamique.

Par ailleurs, nos observations de l'utilisation des instruments de géométrie et de la mesure sont intéressantes car elles ont révélé des avis différents chez les enseignants des classes 3 et 4. Pour l'enseignant 3 (leçon 1), les constructions avec les instruments

[100] La validation théorique réfère ici à des énoncés géométriques admis ou vérifiés expérimentalement.

(objets physiques) impliquaient nécessairement de l'imprécision. Pour l'enseignant 4 (leçon 3), il était possible d'en produire avec précision (objets physiques ou virtuels[101]) :

> Enseignant 3 : « Ben, si y a une imprécision, ça veut dire. C'est une imprécision au niveau des mesures. Regarde, c'est pas pire…C'est sûr, sûr, sûr, qu'en construction, dès qu'on parle de construction, y va y avoir de l'imprécision et ça, c'est certain. Et, donc, mon logiciel, euh, me permet de ne pas avoir d'imprécision, quoique c'est déjà arrivé quand même. Ok, comme tantôt, on a parlé au niveau de l'arrondissement, bon etc., mais, euh, c'est tout à fait normal. Faque, des fois, si vous voyez qui en a une, ben, tricher là un petit peu, vous savez qu'il doit y avoir un point d'intersection. »
>
> Enseignant 4 : « Ben, nous, on veut une construction précise. Genre, quand je prends un transparent, quand je mets dessus, faut pas que, ah! y a peut-être trois millimètres de différence. Y faut que ça arrive exactement dessus. Faque, le fait de prendre ta règle, c'est vrai que ça prends une règle, oui, mais tsé, c'est parce que ici, là, on a dit de là *(pointe le sommet K)* quand j'ai fait mon arc de cercle, c'est de là à là *(pointe les sommets I et K)*, y a toujours une distance de 8. Là, tu dis, oui, y a juste une place, oui, mais si tu fais pas, si tu prends pas le compas, c'est que y a place comme à plein d'interprétations, pis là, ben, y suffit que tu décales légèrement. »

Ces extraits sur la précision des tracés fournissent des exemples d'une confusion favorisée par le croisement des cadres numérique et géométrique. Pour l'enseignant 3, la problématique des constructions imprécises produites avec les instruments (objets physiques) est contournable par l'emploi d'un logiciel de géométrie dynamique. Mais la considération des constructions produites par le logiciel dans une perspective de mesure a nuit à l'idée de constructions au sens euclidien du terme. Quant à l'enseignant 4, son emploi du compas pour le report d'une mesure de 8 cm prise sur une règle graduée sans référer aux technologies des rayons égaux du cercle n'a pas été convainquant. L'élève à qui s'adressait l'explication n'a perçu aucun avantage au compas sur la règle graduée puisqu'ils ont été employés d'un point de vue numérique. Par ces exemples, il convient de rappeler la nécessité de distinguer les objets géométriques (des idéalités) de leurs représentations matérielles. Reynes (2000, p. 74) mentionne que :

[101] Il s'agit du pendant virtuel des instruments de géométrie parmi les outils du tableau blanc interactif.

> « Le doute ne doit pas être permis : il n'y a pas de ***mesure exacte***[102] d'un objet matériel : on pourrait même dire que la question ne se pose pas : elle est hors sujet…Elle est même vide de sens : on ne peut pas mesurer la longueur d'une tige de fer avec une précision inférieure à la dimension d'un atome de fer! Le langage utilisé n'est pas monosémique et entraîne des dérapages sémantiques : lorsqu'on demande, par exemple : «découper dans du carton un carré de 8 cm de côté», ou «dessiner un carré de 8 cm de côté» on fait deux glissements du domaine conceptuel au domaine matériel : 1) ce n'est pas le carré que l'on découpe ou dessine, mais une image de carré, et 2) cet objet physique n'aura évidemment pas *exactement* 8 cm de côté, *mais on fera comme si c'était le cas parce qu'il en est ainsi pour le modèle qu'il représente et que c'est précisément sur ce modèle que l'on veut travailler*. »

Le côtoiement des modes de validation perceptif, instrumenté et théorique (voire leur subordination) apparu dans ce que les enseignants ont suggéré, dit et fait, a pu légitimement susciter des interrogations chez les élèves et contribuer à développer ou à renforcer leurs conceptions plus ou moins adéquates. Par exemple, pourquoi pour des problèmes où il faut trouver une valeur d'angle ou de côté d'une figure l'usage des instruments de mesure est interdit et pour d'autres valeurs il est autorisé? Pourquoi faut-il employer des symboles de codage tels trois petits traits pour chacun des côtés d'une figure de triangle lorsque trois mesures en cm de ces côtés jouent le même rôle d'identification du triangle équilatéral? Pourquoi l'utilisation du compas dont on prend l'ouverture sur une règle graduée serait-elle plus précise que la règle graduée placée soigneusement entre deux points? Pourquoi dans certains cas la seule perception suffirait à identifier des éléments d'une figure ou ne suffirait pas pour d'autres éléments ou encore pour d'autres cas? Nous l'avons dit, le travail sur les figures a été le lieu privilégié pour observer l'oscillation entre GI et GII en classe. La figure appelle l'intuition. Des moyens ont été proposés aux élèves pour travailler avec celle-ci, la *dompter*, par exemple le codage. Mais étant donné l'omniprésence des conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et la *Mesure d'une figure*, nous disons que ces moyens furent compromis dans la mesure où ils n'ont pas fait l'objet d'un usage constant en classe et dans les problèmes.

---

[102] Les caractères gras ainsi que la partie du texte en italique proviennent de l'auteur.

Par ailleurs, seuls des problèmes du type *Reconnaître* exempts de figures ont sollicité uniquement des conceptions tendant vers GII. Peut-être y a-t-il là une piste à explorer? L'absence de figures, en particulier pour ce type de problèmes, inciterait les élèves à en produire pour raisonner de telle sorte que ce serait leur travail géométrique qui appellerait les figures plutôt que s'appuyer sur des figures déjà fournies, lesquelles les privent des bénéfices de ce travail. Nous y voyons une belle occasion de dévolution; peu de problèmes du type *Produire une représentation de l'objet géométrique* ont été répertoriés dans les manuels scolaires et les projets de construction des enseignants. Nous ne suggérons pas qu'il faille ne considérer que des problèmes sans figures et ainsi évacuer le travail à partir de celles-ci. Nous disons que l'apprentissage raisonné des figures n'est pas aisé et ne doit être laissé à la seule charge des élèves. Pour le faciliter, il faut évaluer la cohérence des usages faits des figures autant en classe que dans les problèmes et en questionner certains. Par exemple, il importe de réfléchir à la pertinence des figures à l'échelle liées aux problèmes du type *Construire*, lesquelles ne s'accordent pas à des apprentissages orientés vers GII. Plus largement, s'interroger sur le rôle de la mesure pour valider des propriétés géométriques.

En effet, nous avons dit que les propriétés avaient été introduites comme des énoncés admis ou vérifiés par l'expérience. Elles sont évacuées d'une axiomatique qui est un système logique où chacun des énoncés est interdépendant des autres, c'est-à-dire trouve sa valeur de vérité par un raisonnement déductif. Ce système est une synthèse qui libère de façon générale les objets géométriques de leur substrat empirique. À partir du moment où les propriétés ne s'inscrivent pas dans ce système, *elles tombent à plat*. Elles ne sont plus des outils au service d'une logique et ne représentent qu'une liste à cocher participant de la fabrication « [...] d'un décor, pour qu'une scène à venir puisse se jouer. » (Noirfalise, 1993, p. 163).[103] Se priver d'un tel système implique qu'il ne reste que la perception et la mesure pour valider les propriétés, ce qui n'est pas sans relation avec la

[103] Selon Noirfalise (1993, p. 163), le phénomène « […] d'une désyncrétisation de l'univers géométrique théorique consiste en quelque sorte à mettre en place les éléments d'expérimentations dans ce laboratoire que constitue la feuille de papier et à différer le travail dans la théorie, le temps, pourrait-on dire, de mettre en place des matériaux nécessaires à ce travail. ».

mise en œuvre des conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure*. De plus, en l'absence d'un système structuré à l'aide duquel déduire logiquement des propriétés, une manière de les retenir est de les apprendre par cœur. Il est compréhensible que pour éviter cela les élèves aient mobilisé la conception *Référence*. À cet effet, un tel exercice de mémorisation exigé des élèves est discutable sachant que plusieurs d'entre nous n'y avons jamais été contraints dans la mesure où nous avons bénéficié d'une axiomatique en GII.

Dans ce qui précède, nous avons discuté de l'articulation entre l'enseignement, les problèmes et les conceptions d'élèves. Celle-ci s'est révélée oscillante dévoilant une position épistémologique basée sur les modes de validation perceptif et instrumenté de GI et sur celui théorique sans démonstration tendant vers GII, sans toutefois l'atteindre. Nous avons tenté d'expliquer cette oscillation.

Mais plus audacieusement, en amont, qu'est-ce qui préside à cette oscillation? Une partie de l'explication proviendrait du programme ministériel dont on a dit au chapitre 1 qu'il présentait conjointement une perspective inductive et déductive de la géométrie. Bien que chacun des enseignants ait mentionné ne pas vraiment y référer, nous croyons qu'ils en ont été imprégnés par un effet de transposition didactique du programme aux problèmes des manuels scolaires. Par ailleurs, et c'est là une hypothèse, nous supposons que certaines de leurs idées sur la nature des mathématiques et leur enseignement ont favorisé l'oscillation. Les visions instrumentaliste et platonicienne décrites précédemment ont peut-être été en filigrane de leur désir d'établir une relation entre la géométrie et le quotidien, de rendre les apprentissages signifiants en prenant appui de la réalité et faire vivre des activités de découverte se traduisant généralement par de la manipulation d'objets physiques. Cette dialectique entre la réalité et sa modélisation géométrique aurait ainsi participé à l'oscillation entre GI et vers GII dont nous avons été témoin.

5.5 Limites de la recherche

À partir de l'échantillon de quatre classes et de quatre élèves par classe pour les entretiens, nous avons dégagé, entre autres, un portrait plus fin de conceptions d'élèves. Toutefois, nous ne pouvions pas interviewer tous les élèves d'une classe sur les mêmes problèmes ciblés ou questionner les quatre élèves sur tous les problèmes qu'ils avaient résolus. Dans les deux cas, nous aurions rencontré des limites de temps occasionnées par les cadres organisationnels de la recherche et du système scolaire. Par exemple, sachant qu'un entretien durait en moyenne vingt-cinq minutes, nous aurions eu besoin d'un minimum de douze heures d'enregistrement pour les entretiens d'une classe d'au moins vingt-neuf élèves. Une telle disponibilité de temps est difficilement conciliable avec une logistique de sortie de classe des élèves selon les horaires des écoles. Notons que nous avons par ailleurs analysé les recueils de tous les élèves des quatre classes en fonction des problèmes choisis pour les entretiens.

De plus, étant donné le peu de problèmes des types *Produire une représentation* et *Découvrir* dans les projets de construction des enseignants, nous avions décidé de ne pas questionner les élèves à leur sujet. Nous ne disposons pas de conceptions mobilisées pour leurs résolutions. Enfin, puisque nous cherchions à identifier des conceptions en fonction de problèmes qui s'insèrent dans des situations de classes à un moment donné du parcours scolaire des élèves, nos résultats ne permettent pas de prévoir comment les conceptions d'élèves vont évoluer à moyen et long terme.

Conclusion

Nicolas Rouche (1925-2008) employait cette phrase pour décrire sa façon de voir l'enseignement des mathématiques : « Il faut partir du terrain de l'élève, mais ne pas y camper. » (cité dans Bkouche, Hauchart, Marmier et Michaux, 2011, p. 71). Si nous l'utilisons à notre tour, c'est qu'elle nous apparaît tout à fait pertinente au regard du passage d'une géométrie de l'observation à une géométrie de la déduction. En effet, nos résultats de recherche ont révélé une articulation de l'enseignement de la géométrie, de problèmes et de conceptions d'élèves oscillante entre GI et vers GII, à l'entrée au secondaire.

Or, l'enseignant est l'organisateur des *jeux* de l'élève (Brousseau, 1998). Il agit notamment sur le système des interactions élève-milieu en choisissant, entre autres, les problèmes et les règles permettant de les résoudre. Si ces règles sont empreintes d'une épistémologie d'entre deux, c'est-à-dire tantôt en GI ou vers GII, alors l'élève dans sa nécessité de participer aux *jeux* géométriques proposés risque fort de les utiliser aussi. D'ailleurs, les conceptions d'élèves dégagées de nos analyses s'inscrivent dans cette voie puisque certaines d'entre elles appartiennent à une géométrie GI et d'autres tendent à s'en éloigner (vers GII).

Toutefois, le terrain des *jeux* géométriques de l'élève est a priori celui de GI. Les règles avec lesquelles il s'est initié à la géométrie au primaire relèvent généralement des validations perceptives et instrumentées des figures. À l'entrée au secondaire, maintenir ces modes de validation, voire leur subordonner des éléments théoriques, contribue à laisser l'élève sur ce terrain. À cet effet, l'apparition des conceptions de l'*Appréhension perceptive globale d'une figure* et de la *Mesure d'une figure* pour trois des quatre types de problèmes visés par nos analyses y compris pour des problèmes vers GII est plutôt éloquente. Ce faisant, il appert que pour inciter l'élève à jouer sur un nouveau terrain des *jeux* géométriques, celui de GII, l'enseignement doit rompre avec une géométrie GI en cessant de recourir aux validations perceptives et instrumentées des figures, ce qui serait déjà un moyen de ne pas camper sur le terrain de l'élève. De plus, il nous semble que l'articulation de l'enseignement, de problèmes et de conceptions d'élèves, oscillante entre GI et vers GII, invite à une réflexion sur la géométrie en milieu scolaire en aval de la première secondaire. Comment ne pas anticiper une possible articulation oscillante en deuxième secondaire et au-delà de ce niveau si la nouveauté n'est qu'au regard d'objets géométriques qui s'ajoutent tels le cercle et les polygones, par exemple, sans qu'une réflexion épistémique en termes de GI et GII ne se fasse à propos de leur enseignement? Autrement dit, à quel moment les élèves sont-ils en présence des nouvelles règles des *jeux* géométriques de GII? Pour notre part, nous croyons qu'un travail peut s'accomplir dès la première secondaire en direction de GII. Nos résultats nous amènent à formuler les propositions suivantes pour l'enseignement et la recherche.

Recommandations pour l'enseignement :

Informer les enseignants en exercice des paradigmes géométriques GI et GII de manière à ce qu'ils perçoivent les enjeux épistémologiques auxquels ils sont confrontés aux différents niveaux de leur activité professorale, en particulier dans leurs sélections des problèmes et leurs interventions en classe.

Étant donné que les figures ont été un lieu propice à l'oscillation entre GI et vers GII, il serait souhaitable de travailler avec des figures produites à main levée et délaisser les figures à l'échelle. Le codage régulier des figures est à privilégier de concert avec l'emploi de la langue naturelle. Les validations perceptives et instrumentées des figures sont à éviter. Aussi, il serait approprié d'enseigner aux élèves comment faire un usage raisonné des figures.

Ne plus se servir des validations perceptives et instrumentées des figures impose de revisiter la manière dont sont introduits les référents théoriques des triangles et des quadrilatères. Nous avons observé un travail sur les figures problématique, mais avons constaté aussi que la conception *Référence* avait été employée par les élèves pour pallier leur compréhension partielle des référents théoriques. Or, il faut travailler là où c'est difficile. Pour que les élèves créent logiquement des liens entre des éléments théoriques, il faut leur en donner les moyens. Cela implique de mettre en place d'une part, un référentiel théorique cohérent, par exemple rapatrier les notions de cercle et les cas de congruence des triangles et, d'autre part, une axiomatique *souple*. Par axiomatique *souple*, nous voulons dire montrer aux élèves que des référents théoriques se déduisent logiquement les uns des autres et faire en sorte qu'ils s'exercent à faire de même tout en acceptant que l'expression de leurs pas de déduction soit mal formulée ou incomplète dans un premier temps.

Ce que nous avons suggéré aux paragraphes précédents a des conséquences sur les choix de problèmes. En effet, les problèmes du type *Justifier* en GII devraient être privilégiés dans la mesure où ils exigent l'expression explicite des référents théoriques. Les problèmes du type *Construire* en GI sont à éviter puisqu'ils invitent à la mesure laquelle prive les élèves d'un travail à partir des référents théoriques Néanmoins, les problèmes de construction qui suggèrent une mise en relation des référents théoriques sont pertinents, par exemple des constructions élaborées avec des logiciels de géométrie dynamique selon une visée géométrique, non numérique. Quelques artéfacts devraient être employés, en particulier le compas, la règle non graduée et les outils informatiques. Par ailleurs, il serait souhaitable de choisir plus de problèmes ne contenant que du texte de manière à ce que les résolutions incitent les élèves à tracer leurs figures pour s'aider à raisonner. En classe, il serait préférable de délaisser les activités de découverte de nature inductive (en GI) au profit d'activités favorisant plutôt l'expression de la pensée géométrique des élèves à l'aide de référents théoriques, par exemple des débats.

Recommandations pour la recherche :

Les recommandations précédentes découlent de nos résultats de recherche. Nous pensons qu'elles mériteraient d'être expérimentées en classe, mais nous ne les avons pas testées. Pour ce faire, nous suggérons une mise à l'essai d'ingénieries didactiques qui positionneraient les espaces de travail géométrique des enseignants et des élèves en GII, en première secondaire. Ces ingénieries s'intéresseraient aux composantes (espace local réel, artéfacts, référentiel théorique) de ces espaces pour l'étude des triangles et des quadrilatères. Elles auraient pour objectif d'évaluer leur portée sur l'activité enseignante et les apprentissages des élèves placés en contexte d'initiation à l'argumentation en géométrie.

Une fois ces recommandations testées, et à partir des données recueillies des ingénieries didactiques, nous pourrions élaborer des programmes de formation continue en enseignement de la géométrie s'adressant principalement aux enseignants du premier cycle du secondaire.

Enfin, nous avons émis l'hypothèse que l'articulation de l'enseignement de la géométrie, de problèmes et de conceptions d'élèves, oscillante entre GI et vers GII, ne soit pas spécifique à l'entrée au secondaire. Or, cette idée pourrait être le point de départ d'un projet qui exploiterait notre protocole de recherche, mais cette fois-ci au deuxième cycle du secondaire. Qui sait? Nous serions peut-être étonnée des résultats obtenus dans la mesure où la géométrie « […] plus que toute autre branche des mathématiques, est un trésor riche de choses intéressantes et à demi-oubliées dont une génération pressée n'a pas le temps de jouir. » (E.T. Bell, cité dans Coxeter et Greitzer, 1971, p. 1).

Bibliographie

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. et Mante, M. (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. France : Presses Universitaires de Lyon.

Audibert, G. (1992, août). *Contribution de l'apprentissage de la géométrie à la formation scientifique*. Communication présentée au 7e congrès international sur l'enseignement des mathématiques, Québec.

Balacheff, N. et Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques : Cours de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques* (p.75-106). Grenoble : La Pensée sauvage.

Balacheff, N. (1995). *Conception, propriété du système sujet/milieu*. Communication présentée à la VII École d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand, France.

Barbin, Y. (1991). Les Éléments de géométrie de Clairaut : Une géométrie problématisée. *Repères,* (4), 120-133.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*. Paris : Seuil.

Berté, A. (1993). *Mathématique dynamique*. France : Nathan.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège : Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive? *Petit x*, (56), 5-34.

Berthelot, R. et Salin, M. H. (1995). Savoirs et connaissances dans l'enseignement de la géométrie. Dans G. Arsac, J. Créa, D. Grenier et A. Tiberghien (dir.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (p. 187-204). France : La Pensée Sauvage.

Bkouche, R., Hauchart, C., Marmier, A.M. et Michaux, C. (2011). L'enseignement des mathématiques, des mathématiques du quotidien à la théorie : en l'honneur de Nicolas Rouche, *Repères*, (82), 70-74.

Bkouche, R. (1990). Enseigner la géométrie, pourquoi? *Repères*, (1), 92-102.

Boule, F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement*. Paris : Nathan.

Bouvier, A. et George, M. (1983). *Dictionnaire des mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France.

Braconne Michoux, A. (2008). *Évolution des conceptions et de l'argumentation en géométrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de Van Hiele à l'articulation CM2-6ème* (Ph.D., Université Paris Diderot, France). Repéré à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00389633/fr/

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*. Communication présentée au Séminaire des mathématiques du Département des Sciences de l'éducation, Université de Crète, Réthymon.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Burger, W.F. et Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, *17*(1), 31-48.

Burton, R. et Detheux-Jehin, M. (1999). Les élèves du premier degré secondaire sont-ils prêts à démontrer en géométrie? *Informations Pédagogiques*, (45), 1-20.

Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoram@th, Mathématique, 1er cycle du secondaire*, *manuel A, volume 1*. Montréal : Les Éditions CEC.

Cadieux, R., Gendron, I. et Ledoux, A. (2005). *Panoram@th, Mathématique, 1er cycle du secondaire*, *manuel A, volume 2*. Montréal : Les Éditions CEC.

Caron, F. et René de Cotret, S. (2007, juin). *Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective.* Communication présentée au colloque du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec, Université du Québec, Rimouski.

Chenu, F. et Detheux-Jehin, M. (2000, mai). *Vers une pédagogie de la maîtrise en géométrie au premier degré secondaire par l'application de procédures d'évaluation formative : Élaboration d'une typologie des erreurs des élèves en géométrie*. Communication présentée au 1er congrès des chercheurs en éducation, Bruxelles.

Chenu, F. et Detheux-Jehin, M. (2000a). Comment évaluer le raisonnement géométrique? *Cahiers du service de pédagogie expérimentale*, (3-4), 67-85.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. et Julien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège : Première partie. *Petit x*, (27), 41-76.

Clairaut, A. C. (1741). *Éléments de géométrie*. Paris : David Fils.

Coupal, M. (2005). *À vos maths!, Mathématique, 1er cycle du secondaire*, *manuel B*. Montréal : Graficor, Chenelière Éducation.

Coutat, S. (2006). *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique au collège sur la notion de propriété*. (Ph.D., Université Joseph Fourier, Grenoble).

Coxeter, H.S.M. et Greitzer, S.L. (1971). *Redécouvrons la géométrie*. Paris : Dunod.

Dahan-Dalmedico, A. et Peiffer, J. (1986) *Une histoire des mathématiques: Routes et dédales*. France : Seuil.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense. *Arithmetic teacher*, 14-20.

De Villiers, M. (1998, juillet). *To Teach Definitions in Geometry or Teach to Define?* Communication présentée au 22e congrès du PME, Stellenbosch, Afrique du Sud.

Dion, D., Pallascio, R. et Papillon, V. (1985). Perception structurale d'objets polyédriques. *Bulletin AMQ*, 10-21.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 5-31.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, 10,* 5-53.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse : Peter Lang.

Duval, R. (1995a, Septembre). *Why to teach geometry?* Communication présentée à la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, Catania, Italie.

Duval, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères*, (17), 121-137.

Ernest, P. (1989). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher : A model. *Journal of Education for Teaching*, *15* (1), 13-33.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Fujita, T., Jones, K. et Yamamoto, S. (2004, juillet). *The Role of Intuition in Geometry Education : Learning from the Teaching Practice in the Early 20th Century*. Communication présentée au 10e congrès de l'ICME, Copenague, Danemark.

Gattuso, L. (1993). *Les conceptions personnelles au sujet de l'enseignement des mathématiques et leur effet dans la pratique, un essai d'autoanalyse*. (Thèse de doctorat). Université de Montréal.

Gauthier, J. (1998). *Une initiation à l'argumentation en géométrie euclidienne synthétique* (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.

Gobert, S. (2007). Conditions nécessaires à l'usage des dessins en géométrie déductive. *Petit x,* (74), 34-59.

Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne : Éditions du Griffon.

Gouvernement du Québec. (2003). *Programme de formation de l'école québécoise: enseignement secondaire, premier cycle*. Québec : Ministère de l'éducation du Québec.

Gouvernement du Québec. (2001). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire*. Québec: Ministère de l'éducation du Québec.

Gouvernement du Québec. (1999). *Programmes d'études, Mathématique 526, enseignement secondaire*. Québec : Ministère de l'éducation du Québec.

Gouvernement du Québec. (1996). *Programmes d'études, Mathématique 416, enseignement secondaire*. Québec : Ministère de l'éducation du Québec.

Gouvernement du Québec. (1993). *Programme d'études : Mathématique 116 (068-116)*. Québec : Ministère de l'éducation du Québec.

Guay, S., Hamel, J.C. et Lemay, S. (2005). *Perspective, Mathématique, 1er cycle du secondaire, volume 1A*. Laval : Éditions Grand Duc.

Guay, S., Hamel, J.C. et Lemay, S. (2005). *Perspective, Mathématique, 1er cycle du secondaire, volume 2A*. Laval : Éditions Grand Duc.

Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, (36), 15-34.

Hoffer, A.R. (1977). *Mathematics Resource Project : Geometry and Visualisation*. Palo Alto, Californie : Creative Publications.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1999). Un exemple de cadre conceptuel pour l'étude de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, *40*, 283-312.

Houdement, C. et Kuzniak, A. (1998-1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x,* (51), 5-21.

Kahane, J. P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques: Rapport au ministre de l'éducation nationale*. Paris : Odile Jacob.

Kuhn T.S (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (16), 9-24.

Kuzniak, A. (2010). Un essai sur la nature du travail obligatoire en fin de la scolarité obligatoire en France. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (15), 75-95.

Kuzniak, A. (2004). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *L'Ouvert*, (110), 17-33.

Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 337-364.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique* (Ph.D., Université scientifique et médicale institut national polytechnique, Grenoble).

Laborde, C. et Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(12), 165-210.

Laparra, M. et Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques,* (145/146), 141-160.

Lismont, L. et Rouche, N. (1999). *Formes et mouvements : Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*. Belgique : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

Lukenbein, D. (1982). Géométrie dans l'enseignement au primaire. *Instantanés Mathématiques*, 5-15.

Mammana, C. et Villani, V. (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century : an ICMI study*. Dordrecht : Kluwer.

Marchand, P. (2004). *Analyse de deux interventions didactiques portant sur les connaissances spatiales auprès de trois profils d'élèves du secondaire*. (Thèse de doctorat). Université de Montréal.

Margolinas, C. (2004). *La situation du professeur et les connaissances en jeu au cours de l'activité mathématique en classe.* Communication présentée au Groupe canadien d'études en didactique des mathématiques, Québec, Canada.

Margolinas, C. (2002). *Situations, milieux, connaissance : Analyse de l'activité du professeur.* Communication présentée à la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques, Grenoble, France.

Margolinas, C. (1998, juillet). *Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations*. Communication présentée à l'Université d'Été, IREM Clermont-Ferrand, La Rochelle, France.

Mlodinow, L. (2002). *Dans l'oeil du compas : La géométrie d'Euclide à Einstein*. France : Saint-Simon.

Morris, R. (1987). *Études sur l'enseignement des mathématiques: L'enseignement de la géométrie*. Paris: Organisation des Nations Unies.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston (Virginie) : The Council.

Noirfalise, R. (1993). Rapports de l'élève à l'objet «Énoncé de résultat». *DidaTech*, (151), 151-173.

Ouvrier-Buffet, C. (2003). Construction de définitions/construction de concept: vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques. (Ph.D., Université Joseph Fourier, Grenoble).

Parzysz, B. (2007). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation des professeurs d'école : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica,* (17), 128-151.

Parzysz, B. (2001, mai). *Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1*. Communication présentée au XXVIIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres, Tours, France.

Parzysz, B. (1988). Knowing vs Seeing Problems of the Plane Representation of Space Geometry Figures. *Educational Studies in Mathematics*, (19), 79-92.

Piaget, J. et Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.

Puault, Y. (2005). *Les conceptions des objets mathématiques portées par le langage : Analyse des erreurs langagières en mathématique* (Université Paris 8, France).

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies*. Paris : Armand Collin.

Rauscher, J. C. (1994). Les enjeux de l'enseignement de la géométrie au début du collège et leur prise en compte par les professeurs. Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.)*, Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 291-297). France : La Pensée Sauvage.

René de Cotret, S. (2013, juin). *Un sujet multiple, de multiples sujets…et autant de milieux?* Communication présentée au congrès du GDM, Val d'Or, Québec.

Réunion de professeurs. (1964). *Cours de géométrie*. Paris: Ligel.

Reynes, F. (2000). La notion de mesure exacte. De l'impossibilité physique à la nécessité mathématique, les conditions d'une rupture inévitable. *Petit x*, (53), 69-79.

Richard, P. R. (2004). L'inférence figurale: un pas de raisonnement discursivo-graphique. *Educational Studies in Mathematics,* (57), 229-263.

Richard, P. R. (2004a). *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques.* Berne : Peter Lang.

Richard, P. R. et Sierpinska, A. (2004). Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *30*, (2), 379- 409.

Robert, P. (2009). *Le nouveau Petit Robert de la langue française*. Paris : Le Robert.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics,* (22), 1-36.

The CSMP staff. (1971). The CSMP Development of Geometry. *Educational Studies in Mathematics*, (3-4), 281-285.

The Royal Society. (2001). *Teaching and learning geometry 11-19 : Report of a Royal Society/Joint Mathematical Council working group*. London: The Royal Society.

Thompson, A.G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, (15), 105-127.

Van der Maren, J.M. (1996). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Bruxelles : De Boeck Université.

Van der Sandt, S. (2007). Research Framework on Mathematics Teacher Behaviour: Koehler and Grouws' Framework Revisited. *Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education*, *3*(4), 343-350.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight*. New York : Academy Press.

Van Hiele, P. (1960). La structure des niveaux dans l'argumentation. *Bulletin de la société mathématique de Belgique*, *12* (3-4), 174-187.

Van Hiele, P. (1959). La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'APMEP*, (198), 199-205.

Vergnaud, G. (2001, mai). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. Communication présentée au colloque du GDM, Montréal.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10* (23), 133-170.

Vermersch, P. et Maurel, M. (1997). *Pratiques de l'entretien d'explicitation*. Paris : ESF.

Vinner, S. et Hershkowitz, R. (1983, juillet). *The Role of Critical and Non Critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts*. Communication présentée au 7e congrès du PME, Israel.

Vygotski, L.S. (1985). *Pensée et Langage*. Paris : Messidor-Editions Sociales.

Walter, A. (2001). Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit x*, (54),31-49

Annexe 1 Comparaison de contenus des programmes

Tableau XXVI Comparaison de contenus géométriques des programmes

Angles	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Angle droit, aigu, obtus	• Bissectrice d'un angle • Angles : complémentaires, supplémentaires, opposés par le sommet, adjacents, alternes-internes, alternes-externes, correspondants
• Estimation et mesurage • Comparaison d'angles (droit, aigu, obtus) • Mesurage en degrés (rapporteur) • Indication pour usage du symbole ∠	• Recherche de la mesure manquante d'un angle dans différents contextes • Comparer et calculer des angles • Constructions géométriques (avec instruments ou logiciels)
• Mots de vocabulaire : angle, angle aigu, angle droit, angle obtus, angle au centre, degré (angle), rapporteur d'angles	• Énoncés (MELS, 2003, p. 261) : « Des angles adjacents dont les côtés extérieurs sont en ligne droite sont supplémentaires. » (numéro 16) «Les angles opposés par le sommet sont isométriques.» (numéro 17) «Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants sont respectivement isométriques.» (numéro 19) « Dans le cas d'une droite coupant deux droites, si deux angles correspondants (ou alternes-internes; alternes-externes) sont isométriques, alors, ils sont formés par des droites parallèles coupées par une sécante. » (numéro 20) « Si une droite coupe deux droites parallèles, alors les paires d'angles internes situées du même côté de la sécante sont supplémentaires. » (numéro 21)

Segments et droites	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Droites parallèles et perpendiculaires • Constructions de lignes parallèles et de lignes perpendiculaires • Estimation et mesurage : unités non conventionnelles; comparaison, construction de règles. Unités conventionnelles (km, m, dm, cm, mm). Relations entre les unités de mesure • Mesurage en degrés (rapporteur) • Indication pour usage des symboles ⊥ //	• Médiatrice d'un segment • Droites sécantes • Constructions géométriques (avec instruments ou logiciels) • Recherche de mesures manquantes : la mesure d'un segment provenant d'une isométrie ou d'une similitude
• Mots de vocabulaire : …est parallèle à… …est perpendiculaire à.. segment	• Énoncés (MELS, 2003, p. 261) : « Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont aussi parallèles entre elles. » (numéro 8) « Si deux droites sont perpendiculaires à une troisième, alors elles sont parallèles. » (numéro 9) « Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une d'elle est perpendiculaire à l'autre. » (numéro 10)

Triangles	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Comparaison et construction de figures composées de lignes courbes fermées ou de lignes brisées fermées • Identification du triangle • Description du triangle	• Constructions géométriques (avec instruments ou logiciels)
• Description de polygones convexes et non convexes	• Polygones réguliers convexes
• Description de triangles : triangle rectangle, triangle isocèle, triangle scalène, triangle équilatéral	• Médianes et hauteurs d'un triangle
• Classification de triangles	• « Au primaire, l'élève […]. Il a décrit et classifié des quadrilatères et des triangles […]. » (MELS, 2003, p. 258)
• Figures isométriques	• Figures isométriques et semblables
• Estimation et mesurage : unités non conventionnelles. Unité conventionnelles (m^2, dm^2, cm^2). Relations entre les unités de mesure	• Recherche de mesures manquantes : mesure manquante d'un segment d'une figure plane • Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères • Aire de figures décomposables en disques, en triangles ou en quadrilatères
• Périmètre, calcul du périmètre	• Périmètre d'une figure plane et périmètre d'une figure provenant d'une similitude

Triangles (suite)	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Mots de vocabulaire : côté, figure plane, hauteur, triangle, aire, figure symétrique, périmètre, polygone, polygone convexe, sommet, triangle équilatéral, triangle isocèle, triangle rectangle, triangle scalène	• Énoncés (MELS, 2003, p. 261) : « Dans tout triangle isocèle, les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques. » (numéro 1) « L'axe de symétrie d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur de ce triangle. » (numéro 2) « La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est de 180°. » (numéro 24) « La mesure d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles intérieurs qui ne lui sont pas adjacents. » (numéro 25) « Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure. » (numéro 26) « Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles. » (numéro 27) « Dans des figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude. » (numéro 28)

Quadrilatères	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Comparaison et construction de figures composées de lignes courbes fermées ou de lignes brisées fermées	• Constructions géométriques (avec instruments ou logiciels)
• Identification du carré, du rectangle et du losange	
• Description du carré, du rectangle et du losange	
• Description de polygones convexes et non convexes	• Polygones réguliers convexes
• Description des quadrilatères dont le trapèze et le parallélogramme: segments parallèles, segments perpendiculaires, angle droit, angle aigu, angle obtus	• Diagonales, base et hauteur d'un quadrilatère
• Classification des quadrilatères	• « Au primaire, l'élève […]. Il a décrit et classifié des quadrilatères […]. » (MELS, 2003, p. 258)
• Figures isométriques	• Figures isométriques et semblables
• Estimation et mesurage : unités non conventionnelles. Unités conventionnelles (m^2, dm^2, cm^2). Relations entre les unités de mesure	• Recherche de mesures manquantes : mesure manquante d'un segment d'une figure plane • Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères • Aire de figures décomposables en disques, en triangles ou en quadrilatères
• Périmètre, calcul du périmètre	• Périmètre d'une figure plane et périmètre d'une figure provenant d'une similitude

Quadrilatères (suite)	
Primaire	**Premier cycle du secondaire**
• Mots de vocabulaire : carré, côté, figure plane, largeur, longueur, losange, rectangle, aire, figure symétrique, parallélogramme, périmètre, polygone, polygone convexe, polygone non convexe, quadrilatère, trapèze, sommet	• Énoncés (MELS, 2003, p. 261) : « Les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques. » (numéro 3) « Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. » (numéro 4) « Les angles opposés d'un parallélogramme sont isométriques. » (numéro 5) « Les diagonales d'un rectangle sont isométriques. » (numéro 6) « Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires. » (numéro 7) « Les éléments homologues de figures planes ou de solides isométriques ont la même mesure. » (numéro 26) « Les angles homologues des figures planes ou des solides semblables sont isométriques et les mesures des côtés homologues sont proportionnelles. » (numéro 27) « Dans des figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude. » (numéro 28)

Annexe 2 Formulaire de consentement de l'enseignant

Université de Montréal

FORMULAIRE DE CONSENTEMENT POUR L'ENSEIGNANT

Titre de la recherche : Une étude de conceptions d'élèves de la première année du 1er cycle du secondaire en géométrie euclidienne.

Chercheure : Johanne Gauthier, étudiante au doctorat, Département de didactique, U de M.

Direction de recherche: Sophie René de Cotret, directrice, professeure titulaire, Département de didactique, Université de Montréal et Philippe R. Richard, co-directeur, professeur agrégé, Département de didactique, Université de Montréal.

A) RENSEIGNEMENTS AUX PARTICIPANTS

1. Objectifs de la recherche

Ce projet vise à étudier ce qui est proposé comme tâches géométriques à des élèves de première secondaire et ce qu'ils en développent sur le plan conceptuel. Nous souhaitons documenter des conceptions d'élèves en vue d'améliorer l'apprentissage de la géométrie.

2. Participation à la recherche

La participation à ce projet permettra à la chercheure d'observer le travail habituel fait en classe et de recueillir des productions d'élèves. Vous aurez à fournir les tâches géométriques que vous souhaitez faire résoudre par vos élèves d'une même classe. Vous compléterez un questionnaire de type papier crayon d'environ 30 minutes dont la passation peut se faire à l'école. Vous passerez une entrevue individuelle avec la chercheure d'une durée approximative de 30 minutes dont la passation peut se faire à l'école. Cette entrevue sera enregistrée sur bandes audio. Trois de vos cours seront captés sur bandes vidéo. Les tâches géométriques résolues par vos élèves seront regroupées sous la forme de recueils qui seront photocopiés par la chercheure pour analyse. Quatre élèves de votre classe seront choisis pour passer une entrevue individuelle avec la chercheure d'une durée approximative de 40 minutes. L'entrevue filmée sur bandes vidéo s'effectuera à l'école sur l'heure du dîner.

3. Confidentialité

Seule la chercheure principale aura accès aux bandes audio, aux bandes vidéo des cours et des entrevues avec les élèves ainsi qu'aux photocopies des recueils de tâches géométriques qui seront conservées dans un classeur verrouillé situé dans un bureau fermé. Le matériel recueilli (bandes audio et vidéo, recueils) ne portera pas votre nom ni celui de vos élèves. Aucune information permettant d'identifier un participant ne sera publiée. Les bandes audio et vidéo ainsi que les photocopies de recueils seront détruites 7 ans après la fin du projet.

4. Avantages et inconvénients

En participant à cette recherche, vous ne courez aucun risque ou inconvénient particulier. Bien au contraire, vous contribuerez à l'avancement des connaissances relatives à la géométrie en milieu scolaire.

5. Droit de retrait

Votre participation est entièrement volontaire. Vous êtes libre de vous retirer en tout temps sur simple avis verbal, sans préjudice et sans devoir justifier votre décision. Si vous décidez de vous retirer de la recherche, vous pouvez communiquer avec la chercheure au numéro de téléphone indiqué au bas de cette page. Si vous vous retirez de la recherche, les renseignements qui auront été recueillis au moment de votre retrait seront détruits.

6. Indemnité

Les participants ne recevront aucune indemnité.

7. Diffusion des résultats

Vous serez invité à une rencontre où seront présentées les principales conclusions de la recherche. Cette rencontre aura lieu après le dépôt de la thèse.

B) CONSENTEMENT

Je déclare avoir pris connaissance des informations ci-dessus, avoir obtenu les réponses à mes questions sur ma participation à la recherche et comprendre le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de cette recherche.

Après réflexion et un délai raisonnable, je consens librement à prendre part à cette recherche. Je sais que je peux me retirer en tout temps sans aucun préjudice, sur simple avis verbal et sans devoir justifier ma décision.

	Oui	Non
Je consens à ce que les données anonymisées recueillies dans le cadre de cette étude soient utilisées pour des projets de recherche subséquents de même nature, conditionnellement à leur approbation éthique et dans le respect des mêmes principes de confidentialité et de protection des informations	☐	☐

Signature : ______________________ Date : ______________________

Nom : ______________________ Prénom : ______________________

Je déclare avoir fourni toutes les informations concernant le but, la nature, les avantages, les risques et les inconvénients de l'étude et être disponible pour répondre à toute éventuelle question.

Signature de la chercheure ______________________ Date : ______________________

Nom : Gauthier Prénom : Johanne

Pour toute question relative à la recherche ou pour vous retirer du projet, vous pouvez communiquer avec Johanne Gauthier, au numéro de téléphone : (450) 662-7000.

Toute plainte relative à votre participation à cette recherche peut être adressée à l'ombudsman de l'Université de Montréal, au numéro de téléphone (514) 343-2100 ou à l'adresse courriel suivante: ombudsman@umontreal.ca **(l'ombudsman accepte les appels à frais virés).**

Un exemplaire du formulaire d'information et de consentement signé doit être remis au participant

Annexe 3 Problèmes 1 et 2 du questionnaire

Cette annexe contient les problèmes 1 et 2 du questionnaire, précédés de leur compilation par types. Une justification des choix de problèmes au regard du projet de construction de chacun des enseignants est présentée à la suite des problèmes.

Rappelons que les problèmes du questionnaire sont un moyen visant à enrichir notre connaissance des éléments sur la base desquels les enseignants choisissent des problèmes, selon les types identifiés par notre travail de catégorisation et leur tendance paradigmatique. Les problèmes 1 et 2 ne proviennent pas directement des problèmes a priori proposés par les enseignants. Néanmoins, ils s'en apparentent. Il peut s'agir, par exemple, de modifications aux figures ou aux données des problèmes recensés.

Les critères retenus pour choisir les problèmes 1 et 2 sont généralement liés aux pourcentages élevés ou faibles des types identifiés dans les projets de construction des enseignants. Dans certains cas, nous avons considéré des éléments issus de leur discours en entrevue et sur lesquels ils semblaient insister. Voici la compilation par types et enseignants des problèmes 1 et 2, suivie des huit problèmes.

Tableau XXVII Problèmes 1 et 2 du questionnaire par types et enseignants

	Enseignant 1	Enseignant 2	Enseignant 3	Enseignant 4
Problème 1 (vers GII)	*Rechercher une mesure*	*Justifier*	*Justifier*	*Construire*
Problème 2 (vers GI)	*Reconnaître*	*Rechercher une mesure*	*Reconnaître*	*Rechercher une mesure*

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle où $\overline{AB} \cong \overline{CB}$. L'angle ABC mesure 130°. De plus, $\overline{CF}$ est une médiane et $\overline{BG}$ est une hauteur issue du sommet B. La droite DE est la médiatrice du segment BC.

Sans mesurer, trouvez la valeur de l'angle GED.

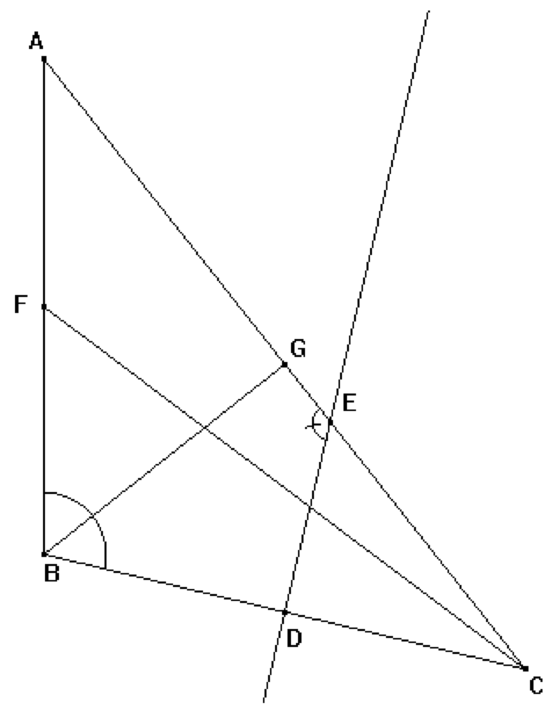


Figure 49 Problème 1 du questionnaire - enseignant 1

Problème 2

Donnez le nom de chacune des figures identifiées ci-dessous par une lettre.

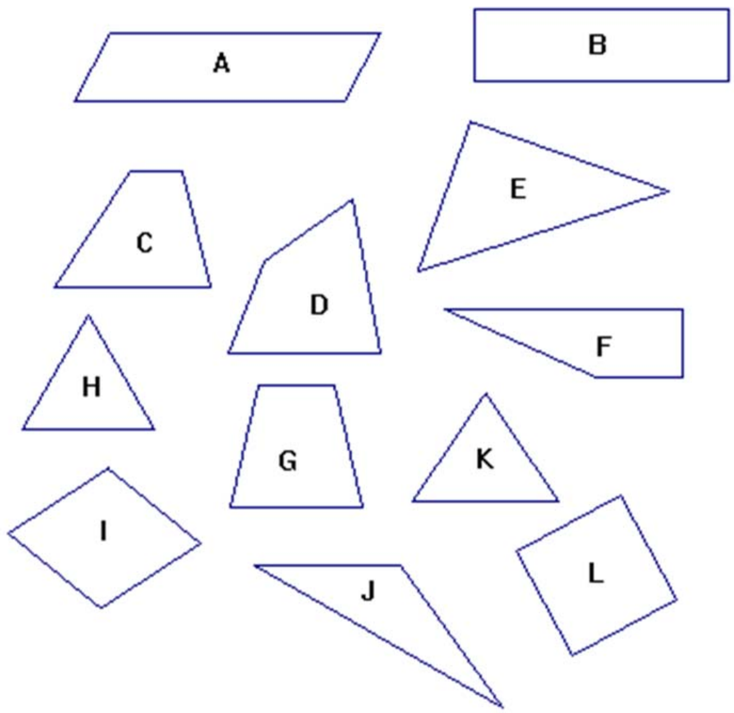


Figure 50 Problème 2 du questionnaire - enseignant 1

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABKJ est un carré, BCDK est un rectangle, DGFE est un trapèze rectangle, KDGH est un trapèze isocèle et JKHI est un parallélogramme.

Sachant que l'angle JIH mesure 110°, déterminez la mesure de l'angle FGD et justifiez chacune de vos étapes.

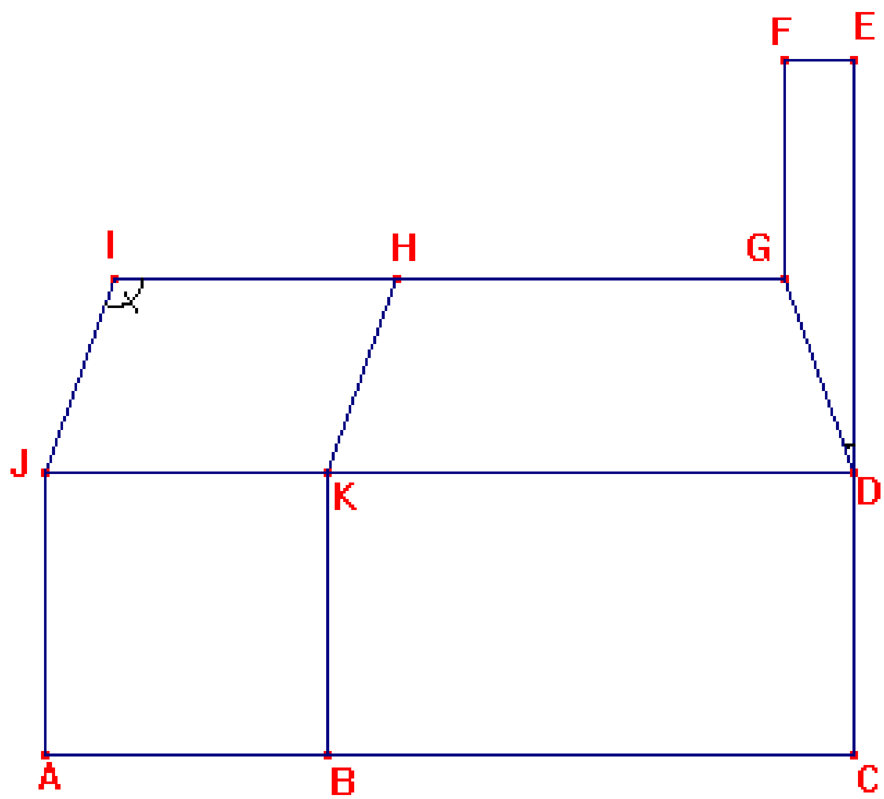


Figure 51 Problème 1 du questionnaire - enseignant 2

Problème 2

Monsieur Vanier désire recouvrir son terrain de gravier à l'exception de son champ de fraises, de son enclos et de son allée.

Quel montant devra payer Monsieur Vanier sachant que le gravier se vend 30$/m^2 ?

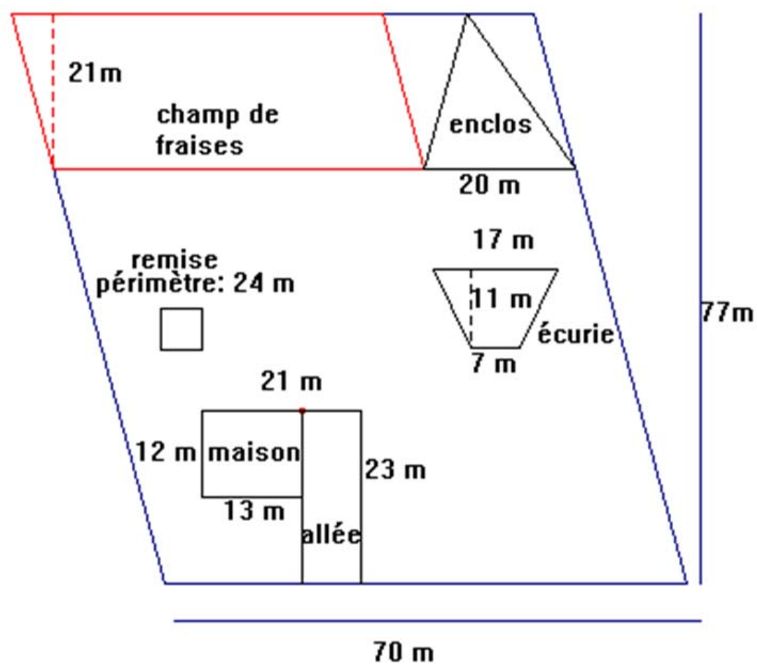


Figure 52 Problème 2 du questionnaire - enseignant 2

Problème 1

Dans la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme. Le côté AB est prolongé en E. Le côté AD est prolongé en F. L'angle ABC mesure 70°.

De plus, $\overline{BE} \cong \overline{BC}$ et $\overline{DC} \cong \overline{DF}$

Justifiez l'affirmation suivante à l'aide d'énoncés géométriques: la mesure de l'angle DCF est de 35°.

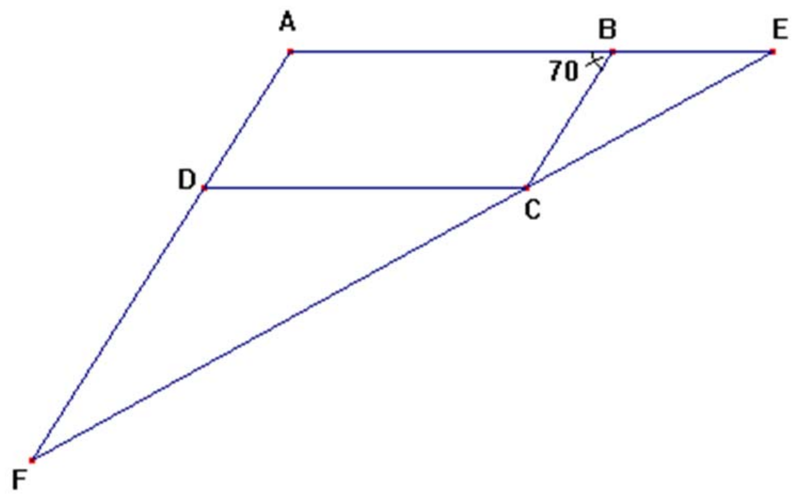


Figure 53 Problème 1 du questionnaire - enseignant 3

Problème 2

Donnez le nom de chacune des figures identifiées ci-dessous par une lettre.

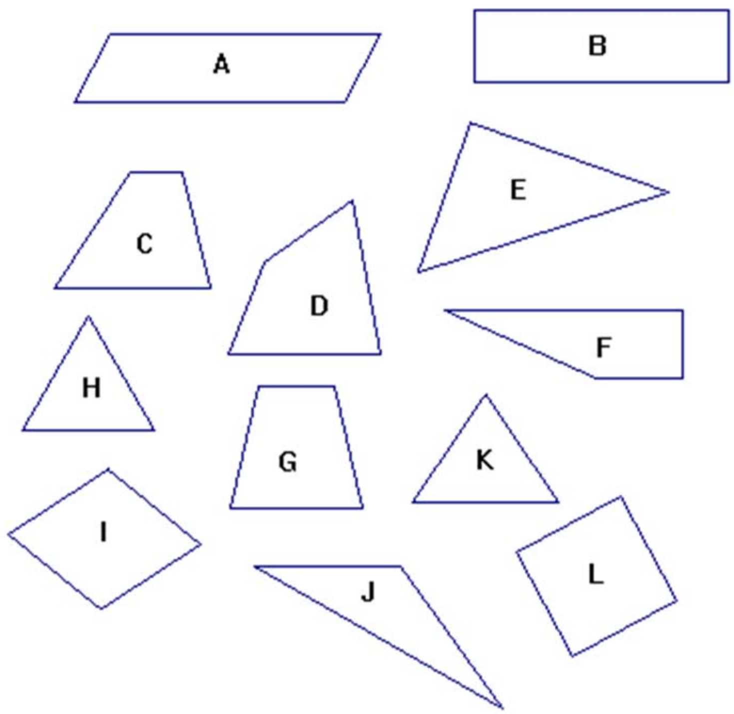


Figure 54 Problème 2 du questionnaire - enseignant 3

Problème 1

a) Construisez ci-dessous un triangle isocèle avec la règle et le compas.

b) Écrivez chacune des étapes de votre procédure de construction.

c) Pourquoi êtes-vous assuré que le triangle construit est bien isocèle?

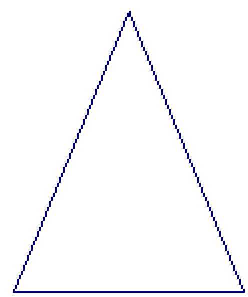
Figure 55 Problème 1 du questionnaire - enseignant 4

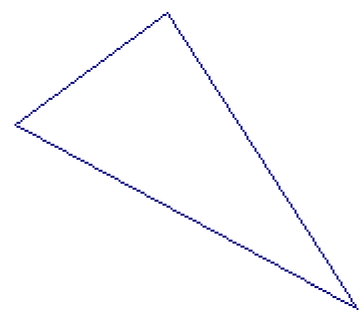
Problème 2

Dans chacune des figures ci-dessous, inscrivez les mesures données aux endroits appropriés sans utiliser d'instruments de mesure.

a) 3cm, 4cm, 4cm

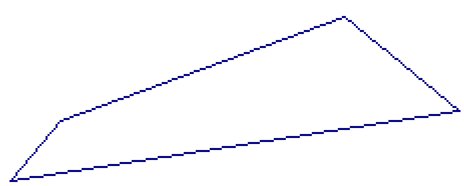
b) 29°, 65°, 86°





c) 1cm, 2cm, 4cm, 6cm

d) 75°, 90°, 90°, 105°



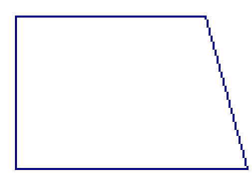


Figure 56 Problème 2 du questionnaire - enseignant 4

Explications relatives aux choix des problèmes 1 et 2 pour chacun des enseignants :

- **Enseignant 1** :
  - Problème 1 *Rechercher une mesure*

    Ce type de problèmes représente le plus haut pourcentage (35%) des problèmes proposés par l'enseignant (problèmes du manuel scolaire seulement). En présentant le problème 1, nous voulions vérifier si l'enseignant maintiendrait sa préférence pour ce type de problèmes et sa tendance paradigmatique lorsque le problème comporte plusieurs notions géométriques.

  - Problème 2 *Reconnaître*

    Ce type de problèmes représente le plus haut pourcentage (62%) des problèmes proposés par l'enseignant en ajoutant les problèmes issus du logiciel à ceux du manuel scolaire. Cela est dû principalement, tel que dit à la section 4.2.1.1.2, au logiciel qui génère des problèmes de ce type. De plus, ce dernier offre des problèmes dont la résolution implique de reconnaître des propriétés des triangles et des quadrilatères en déplaçant des points de figures, montrées à l'écran de l'ordinateur avec en toile de fond un quadrillage, sans indications de propriétés. À l'aide du problème 2, nous cherchions à savoir si les conduites en GI, sollicitées par les problèmes de reconnaissance du logiciel, seraient maintenues ou refusées par l'enseignant, lorsqu'il voit des figures produites sur papier sans quadrillage en toile de fond et sans indications de propriétés.

- **Enseignant 2** :
  - Problème 1 *Justifier*

    Ce type de problèmes représente un faible pourcentage (6%) des problèmes du projet de construction de l'enseignant. En proposant le problème 1, semblable à l'un d'eux, nous voulions vérifier si ce type serait maintenu par l'enseignant et s'il nous fournirait des informations susceptibles d'expliquer ce pourcentage peu élevé.

  - Problème 2 *Rechercher une mesure*

    Ce type de problèmes possède le pourcentage le plus élevé des problèmes (46%) du projet de construction de l'enseignant dont plusieurs sont en GI (39%). Nous avons soumis un problème semblable à un problème identifié dans le projet de construction où les figures ne sont pas nommées ni codées. Nous cherchions à savoir si l'enseignant accepterait à nouveau ces contraintes relatives aux figures, telles quelles, ou s'il proposerait des modifications de manière à faire basculer le problème vers GII.

- **Enseignant 3**:
  - Problème 1 *Justifier*

    Ce type de problèmes ne représente pas le pourcentage le plus élevé des problèmes (19%) du projet de construction, mais 75% d'entre eux sont classés en GII. De plus, l'enseignant a discuté en entrevue de l'importance des définitions et des propriétés qui, selon ses dires, procurent de la rigueur au niveau géométrique. En lui soumettant le problème 1, nous souhaitions qu'il fournisse des informations supplémentaires relatives à l'importance des définitions et des propriétés pour la résolution de ce type de problèmes.

- Problème 2 *Reconnaître*

Ce type de problèmes a le pourcentage le plus élevé (43%) des problèmes du projet de construction dont la plupart sont classés en GII (73%). Toutefois, nous avons observé des problèmes dont les figures n'avaient aucun codage, ce qui nous a étonnée. À l'aide du problème 2, nous cherchions à savoir si l'enseignant accepterait la reconnaissance de figures sans codage ou s'il suggèrerait des modifications susceptibles de faire basculer le problème vers GII.

- **Enseignant 4** :
  - Problème 1 *Construire*

Ce type de problèmes ne représente pas le pourcentage le plus élevé (18%) des problèmes du projet de construction, mais 59% d'entre eux sont en GI. Par ailleurs, en entrevue, l'enseignant a discuté de la manipulation des instruments en y attribuant des avantages et des inconvénients pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. En lui soumettant le problème 1, nous cherchions à savoir s'il l'accepterait tel quel ou s'il introduirait des éléments de GI dans ses commentaires.

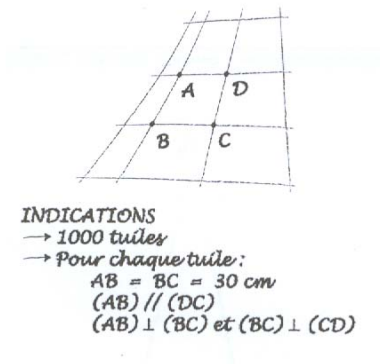
- Problème 2 *Rechercher une mesure*

Ce type de problèmes ne représente pas le pourcentage le plus élevé (22%) des problèmes du projet de construction, mais 60% d'entre eux sont classés en GII. En présentant le problème 2, nous voulions vérifier si la perception générale des figures ou la possibilité de recourir aux instruments (règle, rapporteur), seraient acceptées comme conduites valables pour la résolution de ce type de problèmes, orienté ici en GI.

Annexe 4 Problèmes 3 à 6 du questionnaire

Problème 3

Pour paver le plancher d'une navette spatiale en construction à l'aide de tuiles identiques, le docteur Vavite a rendu au responsable du projet une esquisse avec des indications et, ensuite, est parti en vacances pour deux semaines dans le Grand Nord.



Parce que chaque tuile doit être fabriquée avec une grande précision, que les matériaux et le coût de production sont très élevés et que le travail doit être terminé au plus tard dans une semaine, le responsable du projet doit s'assurer à tout prix de la nature du quadrilatère ABCD, sans pouvoir compter sur une aide éventuelle du docteur Vavite.

On veut aider le responsable du projet à déterminer la nature de ABCD. **Choisissez** la ou les bonnes réponses en cochant dans la ou les cases appropriées:

☐ Avec ce qui est donné dans les indications il est impossible de construire un tel quadrilatère.

☐ Trapèze.

☐ Parallélogramme.

☐ Rectangle.

☐ Losange.

☐ Carré.

☐ Aucune des réponses précédentes.

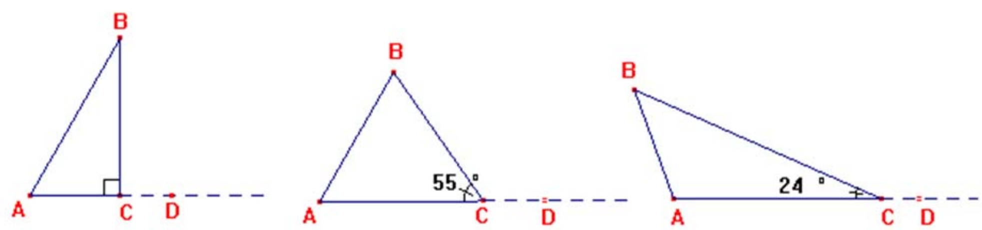
On veut s'assurer à tout prix que la ou les réponses données sont valables. **Donnez une explication** qui permet d'être complètement sûr de votre ou de vos réponses.

Figure 57 Problème 3 du questionnaire - tous les enseignants

Source : Problème extrait de Richard (2004a, p. 292).

Problème 4

Pour chacun des triangles ci-dessous, complétez le tableau et énoncez une propriété.



	Premier triangle	Deuxième triangle	Troisième triangle
m ∠ BAC + m ∠ABC			
m ∠ BCD			

Propriété :

Figure 58 Problème 4 du questionnaire - tous les enseignants

Source : Adapté d'un problème extrait du livre *Panoram@th* manuel A, vol 2. p. 197.

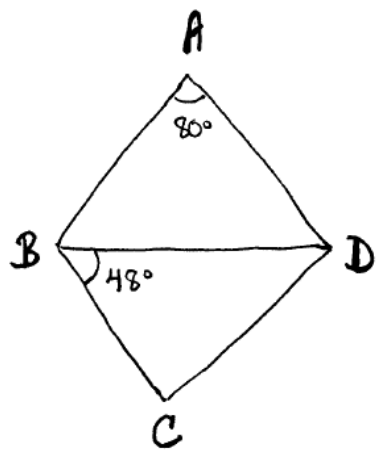
Problème 5

Andréanne a indiqué quelques informations au sujet de la figure qu'elle a dessinée à main levée:

Le segment BD mesure 8 cm;

$\overline{AB} \cong \overline{AD}$;

$\overline{BC} \cong \overline{DC}$



Andréanne dit avoir tracé un parallélogramme.
Son amie Maude n'est pas d'accord avec elle.

Déterminez qui a raison et justifiez votre raisonnement à l'aide de propriétés géométriques.

Figure 59 Problème 5 du questionnaire - tous les enseignants

Source : Adapté d'un problème extrait du livre *À vos maths!* manuel B, p. 233.

Problème 6

Déterminez la mesure de l'angle DAE formé par les prolongements de deux côtés du triangle ABC. Le côté CA est prolongé en E et le côté BA est prolongé en D.

Justifiez chacune de vos étapes.

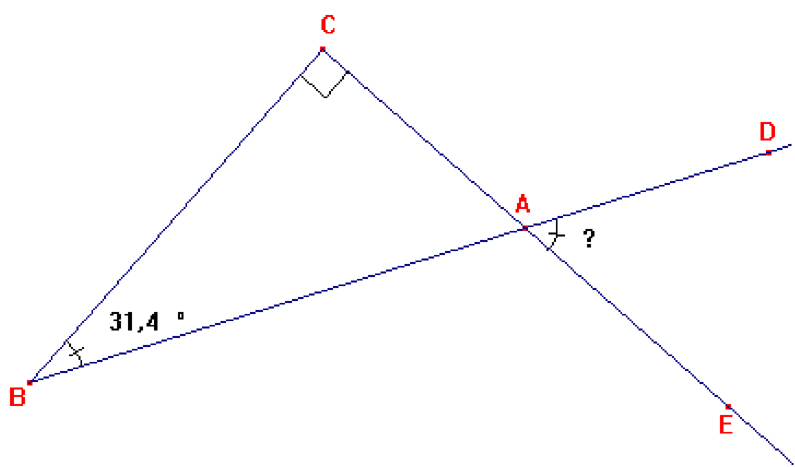


Figure 60 Problème 6 du questionnaire - tous les enseignants

Pour chacun des problèmes du questionnaire (P1 à P6), les enseignants devaient répondre aux questions suivantes :

A) Trouvez-vous cette question intéressante? Oui ☐ Non ☐

Donnez les raisons qui justifient votre choix.

B) Donneriez-vous cette question à vos élèves? Oui ☐ Non ☐

Donnez les raisons qui justifient votre choix.

C) Souhaiteriez-vous modifier la question? Oui ☐ Non ☐

Si oui? Quelles modifications apporteriez-vous?

D) Si vous donniez cette question, quelle solution *souhaiteriez*- vous que vos élèves produisent?

E) Si vous donniez cette question, quelle solution *pensez*-vous que vos élèves produiraient?

Annexe 5 Catégories pour coder l'activité enseignante

GI : Lorsque les propos, les références ou les interventions[104]de l'enseignant notamment celles de validation s'appuient sur le sensible, nous les considérons comme tendant vers GI et indiquons GI. Ce peut être par exemple :

- la manipulation d'objets physiques ou la manipulation qui dans le contexte réfère au sensible
- la perception globale d'une figure
- la référence à un support physique pour faire voir (visualisation qui dans le contexte réfère au sensible)
- la mesure d'une figure (ou de l'un de ses éléments) à l'aide d'un gabarit, d'une règle graduée, d'un rapporteur d'angles ou celle d'un objet physique
- le calcul de l'aire, du périmètre d'une figure ou d'un objet physique à partir de valeurs numériques

GII : Lorsque les propos, les références ou les interventions de l'enseignant sont subordonnés à l'aspect théorique des notions géométriques, nous les considérons comme tendant vers GII et indiquons GII. Ce peut être par exemple :

- les définitions, les propriétés (aussi nommées caractéristiques), les théorèmes
- les concepts
- le vocabulaire (terminologie)
- le codage des figures

GI-II : Lorsque les propos, les références ou les interventions de l'enseignant réfèrent à la géométrie, mais qu'ils sont susceptibles d'appartenir à l'un ou l'autre des paradigmes GI ou GII, nous indiquons GI-II. Ce peut être par exemple :

- la visualisation
- les constructions
- l'emploi des instruments de géométrie (sans préciser lesquels)
- rattacher la géométrie au quotidien (schématisation de la réalité ou réalité ?)
- montrer l'utilité de la géométrie (sans préciser comment)
- l'emploi de logiciels de géométrie dynamique (sans préciser comment)
- les notions géométriques à l'étude y compris l'aire, le périmètre (nomenclature des notions)
- les formules d'aire, de périmètre ou le calcul de l'aire et du périmètre (sans référence à des valeurs numériques)
- l'idée de faire découvrir aux élèves les notions géométriques (sans préciser comment)
- l'idée de faire manipuler (sans préciser avec quoi ni comment)

Note : L'expression *tendant vers* peut se traduire par *relevant de* dans le cas de GI, mais pas pour GII. Pour appartenir à GII, les interventions, références ou propos subordonnés à l'aspect théorique doivent s'inscrire en plus dans une perspective déductive de raisonnement, ce que nous avons peu observé.

[104] Le mot *interventions* est plus approprié pour parler du codage des leçons données par l'enseignant que celui des réponses à l'entrevue.

Annexe 6 Compilation des réponses dichotomiques (questionnaire)

Tableau XXVIII Compilation des réponses dichotomiques (questionnaire)

	P1 (vers GII) *Type variable*				P2 (GI) *Type variable*				P3 (vers GII) *Justifier*				P4 (GI) *Découvrir*				P5 (vers GII) *Justifier*				P6 (vers GII) *Justifier*			
	Intéressant	À donner		Modifications	Intéressant	À donner		Modifications	Intéressant	À donner		Modifications	Intéressant	À donner		Modifications	Intéressant	À donner		Modifications	Intéressant	À donner		Modifications
		Tel quel	Modifié			Tel quel	Modifié			Tel quel	Modifié			Tel quel	Modifié			Tel quel	Modifié			Tel quel	Modifié	
E1	O	O		N	N	N		O	O	N		O	O	O		N	O	N		N	O	O		N
E2	O		O	O	O		O	O	O	O		N	O	O		N	O	O		N	O	O		N
E3	O	O		N	N		O	O	O		O	O	O	n/d			O	O		N	O		O	O
E4	O		O	O	O		O	O	O	N		N	O		O	O	O	N		O	O	O		N

E_i : Enseignant 1 à 4; O : Oui; N : Non; n/d : l’enseignant n’a rien coché sous ces rubriques

Intéressant : L’enseignant a jugé le problème, tel que conçu, intéressant.

À donner : L’enseignant aurait donné le problème à ses élèves, tel quel ou modifié.

Modifications : L’enseignant a suggéré des modifications au problème

Annexe 7 Extraits codés du discours d’un enseignant

Tableau XXIX Extrait codé d'une entrevue - niveau 3 (enseignant 2)

	Extrait d'une entrevue - niveau 3 (enseignant 2)	GI	GII	GI-II
	Question 1: Que signifie pour vous faire de la géométrie plane?			
1	Ah mon dieu			
2	euh ben pour moi c’est travailler les figures			x
3	euh en deux dimensions ça peut être			x
4	euh les droites			x
5	les angles			x
6	ou les figures euh fermées			x
7	triangles quadrilatères bien sûr en particulier			x
8	mais ça peut être toutes les figures			x
9	mon dieu j’essaye d’être claire mais euh			
10	donc géométrie			
11	ben c’est géométrie plane, c’est ça la question?			
12	donc c’est ça			
13	tout ce qui est deux dimensions			x
14	donc droites angles			x
15	et figures convexes concaves euh			x
16	c’est ce que je vois là qui me vient en tête			
17	les mesures			x
18	euh calcul d’aire de périmètre bien sûr aussi			x
19	euh constructions et c’est ça			x

Tableau XXX Extrait codé d'une entrevue - niveau 2 (enseignant 2)

	Extrait d'une entrevue - niveau 2 (enseignant 2)	GI	GII	GI-II
	Question 8: Dans l'ensemble des cours sur les triangles et les quadrilatères			
	que vous faites avec vos élèves, quelles propriétés des triangles			
	et des quadrilatères jugez-vous qu'il est important que			
	vos élèves apprennent et puissent utiliser?			
1	Euh donc les propriétés		x	
2	ben pour les triangles euh			x
3	bon c'est sûr que y a les caractéristiques toutes par rapport euh		x	
4	aux angles euh			x
5	et aux mesures de côtés			x
6	pour être capables de les classifier		x	
7	mais euh on a			
8	j'insiste ben c'est sûr pour les triangles les angles			x
9	la des mesures des angles intérieurs			x
10	ben la somme des mesures des angles intérieurs			x
11	euh habituellement je l'aborde un peu aussi en pour les quadrilatères			x
12	mais euh j'insiste pas nécessairement beaucoup sur cette partie là			
13	mais ça pourrait être fait			
14	hum donc là les propriétés		x	
15	sinon donc à part les les			
16	c'est beaucoup par rapport aux les côtés			x
17	le les mesures de côtés			x
18	mais aussi les les les le parallélisme entre les côtés			x
19	ou les côtés congrus			x
20	donc euh tous les les mots aussi de vocabulaire qui s'y prêtent à aux mesures de côtés		x	
21	ou au au je cherche le mot			
22	mais en fait le fait de voir si la relation des côtés sont parallèles perpendiculaires euh		x	
23	et les mesures d'angles aussi			x
24	donc euh c'est beaucoup là-dessus que que j'insiste			

Tableau XXXI Extrait codé d'une entrevue - niveau 1 (enseignant 2)

	Extrait d'une entrevue - niveau 1 (enseignant 2)	GI	GII	GI-II
	Question 9: Comment préparez-vous la planification			
	d'une leçon sur les triangles et les quadrilatères?			
1	Euh ben habituellement j'essaie de de commencer toujours avec euh des notions que les élèves connaissent déjà			
2	donc partir de de connaissances antérieures			
3	donc soit les les ramener par une petite activité			
4	des fois ça va être juste par questionnement			
5	mais j'essaie toujours de de par			
6	parce que là c'est sûr qu'y ont déjà beaucoup de connaissances sur les triangles quadrilatères du primaire			x
7	donc euh j'essaie toujours de commencer avec une activité			
8	ou un questionnement			
9	qui va ramener les connaissances qui qu'y ont déjà en tête			
10	puis ensuite de ça ben			
11	pour les triangles quadrilatères			x
12	euh je vais plus vers euh des activités de découverte			x
13	d'autres y a d'autres concepts mathématiques		x	
14	où c'est plus moi qui enseigne			
15	mais dans dans triangles quadrilatères			x
16	y a beaucoup de parties où c'est euh j'amène l'élève à à découvrir justement les propriétés euh			x
17	ou les caractéristiques des triangles quadrilatères euh c'est ça		x	
18	différentes activités de manipulation			x
19	beaucoup de manipulations surtout			x

Tableau XXXII Extrait codé d'une leçon - niveau 0 (enseignant 2)

	Extrait d'une leçon- niveau 0 (enseignant 2 - leçon 1)	GI	GII	GI-II
17	(…) donc aujourd'hui on va parler uniquement des triangles			x
18	on abordera les quadrilatères euh dans euh un prochain cours			x
19	donc euh avant de commencer, est-ce qu'il y a quelqu'un qui pourrait me donner une définition		x	
	euh de ce qu'est un triangle dans des mots clairs?			
20	ok c'est sûr quand je dis triangle vous avez tous une image en tête			x
21	mais être capable de la mettre en mots ça serait intéressant		x	
22	faque euh pas des choses pis des patentes			
23	élève : ben un triangle c'est un euh une figure qui a 3 côtés			
24	ok, est-ce que quelqu'un a quelque chose à…oui			
25	élève: y a trois sommets, y a pas de courbe			
26	ok, elle a parlé de trois côtés		x	
27	ok tu as ajouté trois sommets pis y a pas de courbe		x	
28	donc euh quand une figure a euh n'a pas de courbe, quel nom on peut donner à cette figure?		x	
29	élève: polygone			
30	un polygone, oui, exact		x	
31	donc un triangle on peut dire que c'est un polygone parce que ça a pas de courbe		x	
32	c'est des côtés droits, trois côtés, trois sommets		x	
33	ben si on met tout ça ensemble, on peut se faire une définition complète		x	
34	*écrit au tableau : Triangle : polygone qui possède 3 côtés et 3 sommets*		x	
35	donc ici vous allez voir dans cette partie ci			
36	ben là le vocabulaire va être d'autant plus important		x	
37	donc euh s'assurer qu'on ait tous une compréhension commune il faut utiliser les bons termes		x	
38	donc quand on parle de figures avec les côtés droits ben on va parler de polygones		x	
39	donc les triangles avant de commencer à nommer des noms de triangles		x	
40	euh j'aimerais savoir d'après vous euh quelles caractéristiques on peut observer dans un triangle?		x	
41	qu'est-ce qu'on peut euh ?			
42	quelles observations on peut faire ?			
43	qu'est-ce qu'on peut observer quand on a un dessin d'un triangle ?			x
44	quelles caractéristiques on peut observer dans un triangle ?		x	
...	(…)			

	Extrait d'une leçon- niveau 0 (enseignant 2 - leçon 1) Suite	GI	GII	GI-II
74	donc si je donne un dessin d'un triangle comme ça par rapport aux angles, qu'est-ce qu'on peut dire			x
	sur ce triangle là?*(dessin d'un triangle qui a l'air aigu, non codé avec petits arcs pour indiquer les angles)*			
75	élève : ben les angles vont toujours donner 180			
76	oui ça c'est une caractéristique effectivement qu'on a vu euh la semaine dernière ben avant la relâche		x	
77	donc 180 degrés pour la somme des angles		x	
78	ça on va on va y revenir tout à l'heure d'ailleurs			
79	donc euh ça c'est une bonne remarque *(écrit : somme 180 degrés)*		x	
80	ben sinon par rapport à ce triangle là en particulier, oui			
81	élève : c'est tous des angles aigus			
82	oui donc ici on voit que ce sont tous des angles aigus dans ce triangle là *(en référence au triangle dessiné)*	x		
	(…)			

Annexe 8 Problèmes des projets de construction

Tableau XXXIII Problèmes provenant des enseignants par types et selon GI, GII, GI-II

Types de problèmes	Enseignants (E_i)	GI	GII	GI-II
Reconnaître	Enseignant 1 (14 problèmes – 18%)	14%	**86%**	0%
	Enseignant 2 (65 problèmes – 27%)	12%	**83%**	5%
	Enseignant 3 (132 problèmes – 43%)	27%	**73%**	0%
	Enseignant 4 (137 problèmes – 53%)	**50%**	**50%**	0%
Rechercher une mesure	Enseignant 1 (27 problèmes – 35%)	0%	**100%**	0%
	Enseignant 2 (108 problèmes – 46%)	39%	**48%**	13%
	Enseignant 3 (83 problèmes – 27%)	13%	**76%**	11%
	Enseignant 4 (57 problèmes – 22%)	7%	**60%**	33%
Construire	Enseignant 1 (11 problèmes – 14%)	27%	0%	**73%**
	Enseignant 2 (50 problèmes – 21%)	**80%**	4%	16%
	Enseignant 3 (29 problèmes – 10%)	10%	10%	**80%**
	Enseignant 4 (46 problèmes – 18%)	**59%**	15%	26%
Justifier	Enseignant 1 (23 problèmes – 29%)	13%	**70%**	17%
	Enseignant 2 (14 problèmes – 6%)	7%	43%	**50%**
	Enseignant 3 (57 problèmes – 19%)	21%	**75%**	4%
	Enseignant 4 (10 problèmes – 4%)	0%	20%	**80%**
Découvrir	Enseignant 1 (3 problèmes – 4%)	**100%**	0%	0%
	Enseignant 2 (0 problème – 0%)	0%	0%	0%
	Enseignant 3 (0 problème – 0%)	0%	0%	0%
	Enseignant 4 (0 problème – 0%)	0%	0%	0%
Produire une représentation	Enseignant 1 (0 problème – 0%)	0%	0%	0%
	Enseignant 2 (0 problème – 0%)	0%	0%	0%
	Enseignant 3 (3 problèmes – 1%)	0%	0%	**100%**
	Enseignant 4 (9 problèmes – 3%)	**67%**	0%	33%

Annexe 9 Synthèse des conceptions d’élèves

Tableau XXXIV Synthèse des conceptions d'élèves mises en oeuvre selon les problèmes

fnc : figure non codée *fc* : figure codée *fdm* : figure décrite en mots *pf* : pas de figure			Conceptions de **GI**										Conceptions tendant vers **GII**								
			App.perc. (1)	Mesure (2)	Esquisse (3)	Pliage virtuel (4)	Dénombrement (5)	Prod.et mesure (6)	Rapp./règle (7)	Équerre/règle (8)	Règle (9)	Prod. figure (10)	App.fig text (11)	App.mar.cod. (12)	Esquisse cod. (13)	Repér.fig.cod. (14)	Ass.dir.prop. (15)	Appl.dir.prop. (16)	Calculatoire (17)	Compas/règle (18)	Référence (19)
Problèmes **GI**	*Reconnaître*	*fnc*	x	x	x	x	x						x								x
	Rechercher une mesure	*fnc*	x	x															x		
	Construire	*pf*			x				x	x		x									
Problèmes tendant vers **GII**	*Reconnaître*	*pf*														x	x				x
		fc	x	x										x							
	Rechercher une mesure	*fdm*	x	x									x					x	x		
	Justifier	*pf*						x													x
		fdm	x	x														x	x		
Problèmes **GI-II**	*Rechercher une mesure*	*fnc*	x	x															x		
	Construire	*pf*							x		x	x			x					x	
	Justifier	*pf*			x										x				x		