Université de Montréal

Trois études sur la prise de décision en incertitude en économie

par
Yves Alarie

Département de Sciences Economiques
Faculté des Arts et des Sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en Sciences Economiques

janvier, 1997

Page d'identification du jury

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée:

Trois études sur la prise en décision
en incertitude en économie

présentée par:
Yves Alarie

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

......Jacques Robert......................président du jury
......Georges Dionne......................directeur de recherche
......Camille Bronsard....................membre du jury
......Claude Fluet.........................examinateur externe
......Jacques Ferland......................représentant du doyen

Thèse acceptée le:...3 septembre 1997...........................

SOMMAIRE

La plupart des gens anticipent qu'un agent averse au risque faisant face à une augmentation de risque à moyenne constante adoptera une position moins risquée. Cette croyance n'est cependant pas toujours vraie pour le marché de l'assurance, et de façon plus générale dans plusieurs autres exemples. Ce fait a entraîné plusieurs recherches théoriques dont le but était de remédier à cette situation. Certains auteurs se sont attardés aux restrictions sur la fonction de richesse pendant que d'autres étudiaient les modifications à apporter à la définition d'augmentation de risque à moyenne constante. Il est intéressant de noter qu'aucun auteur n'a appliqué leur analyse au problème d'assurance. Le but de cet article est de remplir cette faille. En se limitant au problème de la coassurance nous montrons qu'une de ses spécifications, la linéarité du payoff dans la variable de décision et dans l'élément aléatoire, n'empêche pas l'application des théorèmes les plus connus de la théorie de l'assurance.

Le second article est un plaidoyer en faveur de l'approche perceptuel pour la résolution des paradoxes de l'espérance d'utilité. Cette approche met l'emphase sur le processus

de raisonnement de l'agent. A l'aide d'une revue de littérature nous expliquons le rôle des motivations qui ont entraîné la création de la théorie de l'espérance d'utilité, et on montre que le passage de cette théorie du rôle d'outil à celui de problème autonome est la conséquence de l'arrivée de nombreux tests encore non expliqués. Par la suite, on démontre que l'évolution des modèles tend de plus en plus vers l'approche perceptuelle. La partition des paradoxes en différentes classes est l'argument principal en faveur de notre approche. On met en évidence le parallèle entre les changements de classe et les changements de procédure.

Dans le troisième chapitre, on propose une condition nécessaire et suffisante pour que tous les biens soient normaux. Si l'on interprète cette condition à l'aide d'une matrice d'Allais et que l'on considère chacun des x_i comme étant un revenu reçu si l'état i se réalise notre condition donne des bornes à la non-complémentarité éventuelle de certains états du monde.

RESUME

La plupart des gens anticipent qu'un agent averse au risque faisant face à une augmentation de risque adoptera une situation moins risquée ou demandera plus d'assurance. Le problème fondamental traité dans cet article est l'obtention de ce résultat intuitif pour le cas de l'assurance.

Rothschild et Stiglitz (1970) ont défini une augmention de risque à moyenne constante (ARMC) à l'aide de deux conditions. La première est que si G est une ARMC de F où F et G sont deux fonctions cumulatives, alors G a plus de poids dans les queues que F. La seconde condition impose que les deux fonctions aient la même moyenne. Rothschild et Stiglitz n'ont pas pu établir le résultat intuitif désiré. Myers et Ormiston (1983) ont ajouté une condition supplémentaire à l'ARMC en imposant que le poids qui est enlevé de F soit redistribué à l'extérieur de son domaine de définition. Black et Bulkley (1989) ont défini une augmention de risque qui est un peu moins restrictive que celle de Meyer et Ormiston tout en conservant le résultat intuitif. Ils imposent aussi des restrictions sur la fonction de richesse.

Pour le cas de l'assurance la fonction de richesse est linéaire pour la variable de décision ainsi que pour la variable risquée, ce qui entraîne que la dérivé seconde par rapport à la variable de décision est nulle contrairement à Meyer et Ormiston qui imposent la stricte négativité. Nous démontrons que cette différence n'empêche pas l'application de leur modèle à l'assurance. Une autre différence est que la dérivé seconde de la variable risquée est nulle, ce qui est très utile dans notre démonstration mais qui ne semble pas important dans la leur.

Le résultat appliqué ici au problème d'assurance peut être étendu à d'autres problèmes où la fonction de richesse est linéaire tel que le problème de portefeuille ou encore celui de la firme en compétition qui possède des coûts marginaux constants.

Dans le chapitre 3 on considère l'article de Leroux (1987) qui généralise la notion classique de complémentarité et utilise son résultat pour donner une condition suffisante pour que tous les biens soient normaux. Dans cet article nous présenterons une condition suffisante et nécessaire. Après avoir exposé la notation nous isolerons une caractéristique pour la matrice des effets quantités. Puis après avoir démontré le résultat principal nous interpréterons le résultat de Leroux ainsi que le nôtre à l'aide d'une matrice d'Allais. Si l'on considère que chaque x_i correspond à un revenu si l'état i se réalise, alors la matrice d'Allais est une mesure généralisée de l'aversion au risque.

TABLE DES MATIERES

Identification du jury....................................ii
Sommaire....................................iii
Résumé....................................v
1. INCREASING IN RISK AND THE DEMAND FOR INSURANCE..3
1.1 Introduction....................................3
1.2 Mean preserving increases in risk: a review..5
1.3 The coinsurance model....................................14
1.4 Increase in risk and the demand for insurance....................................16
1.5 Conclusion....................................22
References....................................23
2. L'IMPORTANCE DE LA PROCEDURE DANS LE CHOIX DE LA LOTERIE....................................27
2.1 Introduction....................................27
2.2 Revue de la littérature....................................29
2.2.1 Avant 1930....................................29
2.2.2 Années 30 - 60....................................29
2.2.3 Années 60 - 80....................................33
2.2.4 Années 80 - 95....................................35
2.2.5 Machina (1982)....................................42
2.2.6 Regret theory....................................46
2.2.7 Cumulative prospect theory....................................48
2.2.8 Luce (1993)....................................50
2.2.9 Ambiguité....................................52
2.3 Procédure....................................54
2.3.1 Littérature....................................55
2.3.2 Paradoxes....................................57
2.4 Conclusion....................................61
Bibliographie....................................62
3. PREFERENCES AND NORMAL GOODS:A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION....................................69
3.1 Introduction....................................69
3.2 Assumptions and notation....................................70
3.3 Intermediate results....................................70
3.4 Proposition....................................73

3.5 Interpretation and empirical relevance......74
3.6 Example......................................77
References.......................................79

A mes parents, ainsi que Josée et Alexandre

INCREASES IN RISK AND THE DEMAND FOR INSURANCE

1.1 INTRODUCTION

Many people anticipate that a risk averse agent faced with an exogenous mean preserving increase in risk will demand more insurance to maintain an adequate level of protection.

This widespread belief does not always turn out to be true as already implicitly shown in a very general context by Rothschild and Stiglitz (1970, 1971) when they first presented the notion of a mean preserving increase in risk (M.P.I.R.) or of a mean preserving spread. For instance, when they applied their model to the simplest portfolio problem, they were unable to obtain the a priori intuitive result that an M.P.I.R. in the return of the risky asset will reduce its holdings by all risk averse individuals. In order to generate clear-cut comparative statics results they needed to put additional restrictions either on the shape of the utility function or on that of the original density. They arrived at the same conclusion for many other applications such as savings under uncertainty, the behaviour of the competitive firm under uncertainty and the firm production problem. This observation has prompted further investigations. Indeed, some authors have searched for conditions on the utility fonction -

besides monotonicity and risk aversion - that would yield the desired result [Dreze and Modigliani (1972), Diamond and Stiglitz (1974), Dionne and Eeckhoudt (1987), Dionne, Eeckhout and Briys (1989)]. Another branch of the literature has tried to stay close to the assumption of risk aversion while presenting subclasses of M.P.I.R. that would produce the kind of comparative statics results that one expects [Meyer and Ormiston (1983, 1983), Black and Bulkley (1989), Eeckhoudt and Hansen (1980, 1983, 1984)]. Notice also that, in some papers, the two kinds of restrictions are jointly considered [Sandmo (1970, 1971), Meyer and Ormiston (1989)].

One may notice that none of the authors mentioned so far have applied their analysis to the insurance problem, although Meyer (1989) and Meyer and Ormiston (1989) have interpreted the nature of insurance contracts as simple risk reducing transformations.

The object of this article is to fill this gap in literature. By examining the study of the optimal coinsurance coverage, we find that one of its specifications, namely the linearity of the payoff in the decision variable and in the random element does not preclude the applicability of well known theorems to the demand for insurance. We begin the paper with a review of the main contributions in the field. We then introduce the characteristics of the demand for coinsurance and, in Section 3, we present our main result. A short conclusion proposes potential extensions.

1.2 MEAN PRESERVING INCREASES IN RISK: A REVIEW

The first distinction to be made in the field of M.P.I.R. concerrns the difference between global and marginal increases in risk. For a global increase in risk, the economic environment moves from initial certainty to an uncertain situation. This class of problems has been extensively analyzed by Kraus (1979) and Katz (1981) for one-dimensional utilities and by Dreze and Modigliani (1972) for general utility fonctions in a two-period context. An important finding, in the one-dimensional environment on which we shall concentrate the discussion, is to present conditions under which all risk averse agents react in a way that is in agreement with intuition. Kraus and Katz derived their results for global increases in risk by considering the following problem:

$$\max_{\alpha} E\,\{U\,(Z(\alpha,x))\} \qquad (1.1)$$

where x is a random variable which is degenerate in the initial situation ($x \equiv x_0$);

U is an increasing and concave utility fonction of Z;

Z is a payoff function; and

α is a decision variable.

In all reviewed contributions, Z is assumed strictly concave in α. It is assumed that x is an advantageous outcome by taking Z_x to be strictly positive. This arbitrary definition is not at all restrictive. However, we shall keep it in this review in order to simplify the discussion.

Let us define α^* as the optimal level of the control variable in the initial (here, non-risky) situation. The assumption that $Z_{\alpha\alpha}$ is always negative ensures that the second order condition for a maximum is satisfied. When the agent is shifted to uncertainty (for exogenous reasons) from x_0 to x with $E(x) = x_0$, α^{**} will denote his new optimal position which is obtained by solving (1.1). In order to give a sign to $(\alpha^{**} - \alpha^*)$, Kraus and Katz simply needed to focus on the shape of Z and did not have to restrict U beyond the standard assumptions that $U' > 0$ and $U'' < 0$.

When marginal increases in risk are considered, two risky situations are compared and equation (1.1) becomes the starting point. This can be written:

$$Max_{\alpha} \int_{x2}^{x3} U(Z(\alpha, x))\ dF(x)$$

where $F_{(x)}$ is the original cumulative distribution function with support in the bounded interval $[x_2, x_3]$.
$F_{(x)}$ is assumed here to be continuous, but he following analysis could easily be accommodated for discrete random variables.

In the context of marginal changes in risk, the definition of an M.P.I.R., namely a mean preserving spread, was formulated by Rothschild and Stiglitz (1970). They presented three equivalent definitions of an M.P.I.R. One of them, called the integral condition, is written

$$(a) \int_{x1}^{x4} [G(x)-F(x)\ dx=0$$

$$(b) \int_{x1}^{y} [G(x)-F(x)]\ dx \geq 0 \ for\ all\ y \epsilon\ [x_1,\ x_4]$$

where: G(x) is the cumulative distribution fonction after the exogenous increase in risk; $[x_1, x_4]$ is a bounded interval that contains the support of G(x) with $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$.

Specifically, condition (b) indicates that G has more weight in the tails than F, while condition (a) guarantees the equality of the means. One of the major results of Rothschild and Stiglitz (1970) is that a mean preserving spread reduces expected utility under risk aversion, but does not always reduce the optimal level of the risky activity (α^*). This "negative" result has prompted much further research. We concentrate here on the articles whose main focus was the restrictions on the changes from F to G.

In fact, Rothschild and Stiglitz themselves already took a step in that direction by showing that in the comparison between bets satisfying conditions (a) and (b), intuitive comparative statics results emerge in the sense that M.P.I.R reduce both expected utility and the level of the risky activity. Notice however, that bets represent a very specific case since only two outcomes for x are allowed both in the initial and final situations.

This restriction was nicely removed by Meyer and Ormiston (1983, 1985) in two companion paper where they defined a "strong increase in risk". The basic idea behind the definition is the following: while Rotschild and Stiglitz redistribute probability mass located at a set of points to the right and to the left without restrictions, Meyer and Ormiston require that the shifts to the right and to the left have to be outside (or at the extreme points) of the initial interval of the distribution F(x) [see Meyer and Ormiston (1985), p. 429 for more details]. Formally, a strong increase in risk is obtained by adding the following condition (c) to (a) and (b) in (1.2):

(c) G(x) - F(x) is non increasing on (x_2, x_3)
where support F(x) in contained in $[x_2, x_3]$ (1.3)
and support G(x) is contained in $[x_1, x_4]$.

This additional condition means that the weight taken from F(x) is never redistributed inside (x_2, x_3) but transferred either to x_2 and x_3 themselves or outside these limits. While the strong increase in risk is obviously a special case of Rothschild and Stiglitz's definition (because of the additional condition (c)) it results in a generalization of : 1) the notion of a global increase in risk; 2) the case of bets; and 3) the concept of a squeeze [Eeckhoudt and Hansen (1980, 1983)].
Despite its advantages, the restriction imposed by Meyer and Ormiston remains rather strong and it is legitimate to

try to improve it. This goal was reached by Black and Bulkley (1989) who presented the notion of a "relatively strong increase in risk" to compare risky situations. In their approach, they relax the need to transfer weight from inside the original density to points that are outside or just at its end points. More precisely, they use the idea that an increase in risk should raise the likelihood of the extreme values of the initial density and this is the reason why they consider the behaviour of the likelihood ratio fonction f(x)/g(x) where f(x) and g(x) are the probability density fonctions associated to F and G. Formally, the definition of a relatively strong increase in risk reads as follows:

$$(a) \quad \int_{x1}^{x4} [G(x) - F(x)]\, dx = 0;$$

(b) For all points in $[x_5, x_6]$, $f(x) \geq g(x)$
and for all points outside this interval
$f(x) \leq g(x)$ with $x_1 \leq x_2 \leq x_5 \leq x_6 \leq x_3 \leq x_4$,
where $[x_1, x_4]$ is defined here as the support of
G(x) and $[x_2, x_3]$ as the support of F(x);

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is non-decreasing in the interval $[x_2, x_5]$;

(d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ is non-increasing in the interval $[x_6, x_3]$.

Condition (b) means that the weight taken from inside the support of $F(x)$, that is $[x_2, x_3]$, can be sent either outside $[x_5, x_6$ or, even at its extremities, inside $[x_1, x_4]$. Conditions (c) and (d) specify how the weights sent to the extremities of $F(x)$ have to be allocated. This discussion reveals that the relatively strong increase in risk includes, as a special case, a strong increase in risl. To give an example different from those presented by Black and Bulkley, consider Figure 1 in which two triangular densities are compared:

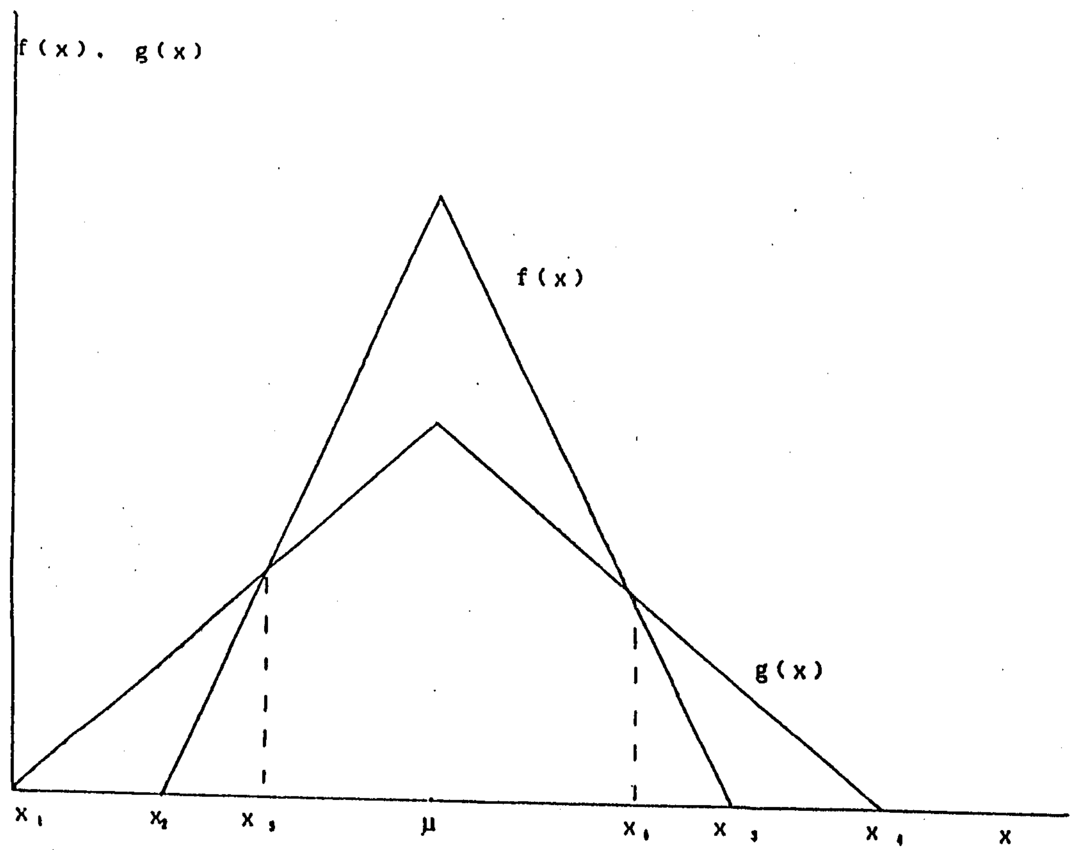

FIGURE 1

Obviously between x_2 and x_5 $\frac{f(x)}{g(x)}$ is increasing and the reverse occurs between x_6 and x_3. Notice that this example satisfies Black and Bulkley's definition without being a strong increase in risk.

After having presented the definition of both a strong increase and a relatively strong increase in risk, we now turn to a general presentation of the results obtained by using them. They can be synthesized in the following theorem:

Theorem 1: If α^* and α^{**} maximize $E[U(Z(\alpha, x))]$ under $F(x)$ and $G(X)$ respectively, sufficient conditions for $\alpha^{**} < \alpha^*$ for all risk averse decision makers are such that:

i) $G(x)$ represents either a strong or a relatively strong increase in risk;

ii) $Z_x \geq 0$, $Z_{\alpha x} \geq 0$, $Z_{\alpha xx} \leq 0$, $Z_{\alpha\alpha} < 0$.

Proof:

See the corresponding articles.

Before introducing the insurance model, let us discuss briefly another type of risk increase often used for comparative statics analysis. First proposed by Sandmo

(1970, 1971) as a "stretching" of a density around a constant mean, this notion of increasing risk was recently extended by Meyer (1989) and Meyer and Ormiston (1989) who showed that an initial random variable x can be transformed by using a single value fonction t(x). The transformation t(x) is defined as deterministic in order to distinguish it from other transformations presented above. Under particular conditions (a non-decreasing, continuous and differentiable fonction), the transformation t(x) represents an M.P.I.R. of the random variable x if function $k(x) \equiv t(x) - x$ is such that

$$a) \quad \int_{x2}^{x3} K(x)\ dF(x) = 0$$

$$(1.5)$$

$$b) \quad \int_{x2}^{y} k(x)\ dF(x) \leq 0 \ for\ all\ y \in [x_2,\ x_3]$$

As usual, condition (a) preserves the mean of the random variable, while condition (b) is equivalent to the second integral condition introduced by Rothschild and Stiglitz. To obtain intuitive comparative statics results, the transformation t(x) must be restricted to the case of a simple transformation and conditions on U must be introduced. For instance, linear transformations such as the stretching of Sandmo (1970) or the squeeze of Eeckhoudt and Hansen (1980) are examples of simple deterministic transformations. In fact, Meyer and Ormiston (1989) have proved the following theorem:

Theorem 2: If α^* and α^{**} maximize $EU(Z(\alpha,x))$ under x and $t(x) \equiv x + k(x)$ respectively, sufficient conditions to obtain $\alpha^{**} < \alpha^*$ for all risk averse decision makers are:

a) $U(\cdot)$ corresponds to a decreasing (absolute) risk averse fonction;

b) $Z_x \geq 0$, $Z_{xx} \leq 0$, $Z_{bx} \geq 0$, and $Z_{bxx} \leq 0$;

c) $t'(x) \geq 0$ and $t(x)$ is a simple increase in risk.

Proof:

See Meyer and Ormiston (1989).

It is interesting to observe that Theorem 2 contains conditions related to both the utility fonction and the transformation of the random variable. This suggests that even simple deterministic transformations of random variables represent quite general increases in risk. We are now ready to analyze the demand for insurance.

1.3 THE COINSURANCE MODEL

In this paper, we refer to the classical insurance problem

(Mossin, 1968; Briys, Dionne, Eeckhoudt, 1989) in which the individual is endowed with a wealth, W_0, and a risk L stands for the value of the physical asset submitted to the risk.

To protect himself against this damage, the individual has the opportunity to buy a coinsurance contract paying an indemnity $\alpha x (0 \leq \alpha \leq 1)$ for a fixed premium $P = \lambda\alpha\mu$, where λ is equal to unity plus the loading factor and $\mu \equiv E(x)$.

Given these specifications, the individual's optimization problem is

$$\max_{\alpha} E[U(W_0 - (1-\alpha)\ x - \lambda\mu\alpha)] \qquad (2.1)$$

With first order condition

$$E[U'(Z)\ (x-\lambda\mu)] = 0 \qquad (2.2)$$

where Z stands for the value of final wealth. Strict concavity of U guarantees that the second order condition for a maximum is satisfied. Notice also that the value of λ will always be such that the optimal α that solves (2.2) is an interior solution for all transformations of the distribution function.

At this stage, it is worth pointing out the differences between the present problem and those presented in the preceding section. A major distinction concerns the sign of $Z_{\alpha\alpha}$. In the two models that are the closest to our own problem [Meyer and Ormiston (1985), and Black and Bulkley (1989)], $Z_{\alpha\alpha}$ needs to be strictly negative in order to derive Theorem 1 (see especially p. 431 in Meyer and Ormiston and the definition of b^* in Black and Bulkley, p. 126). Of course, in our problem $Z_{\alpha\alpha}$ is equal to zero. However, as we shall see this differecnce will not preclude the applicability of both Black and Bulkley's and Meyer and Ormiston's conditions to obtain comparative statics results.

The second difference, which results from the fact that x is a damage, is unimportant since it only alters the type of proof. $Z_{xx} > 0$ in the insurance problem will be useful in the proof of our main result while it seems unimportant in Theorem 1. The conditions $Z_{\alpha x} = 1$ and $Z_{\alpha xx} = 0$ illustrate other specific aspects of the insurance problem.

1.4 INCREASE IN RISK AND THE DEMAND FOR INSURANCE

Proposition: If α^* and α^{**} maximize $E[U(Z(x,\alpha))]$ under $F(x)$

and G(x) respectively, sufficient conditions to obtain a greater insurance coverage ($\alpha^{**} > \alpha^{*}$) for all risk averse decision makers are such that:

i) G(x) represents a relatively strong increase in risk;

ii) $Z(x,\alpha)$ is linear in α and x.

Proof:

The proof starts from the first order condition corresponding to the initial density f(x)

$$E[U'(Z) \cdot (x - \lambda\mu)] = 0 \tag{3.2}$$

Under the new density g(x), one has to show that the above expression evaluated at α^{*} is positive. Consequently, we want to show that

$$\int_0^L U'(z)\ (x-\lambda\mu)\ s(x)\ dx > 0 \tag{3.3}$$

where $s(x) \equiv g(x) - f(x)$ is positive (negative) whenever the likelihood ratio $\frac{f(x)}{g(x)}$ is less (greater) than 1.

In order to establish (3.3), one has to consider three cases: (i) $x_5 \leq \lambda\mu \leq x_6$; (ii) $x_5 \geq \lambda\mu$; (iii) $\lambda\mu \geq x_6$. We shall restrict ourselves to cases (i) and (iii) since the proof can be repeated with appropriate modifications for the other case.

For case (i), we can rewrite (3.3) as:

$$\int_0^{x5} U'(z)\ (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx + \int_{x5}^{\lambda\mu} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx$$

$$+ \int_{\lambda\mu}^{x6} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx + \int_{x6}^{L} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx > 0 \tag{3.4}$$

where Z stands for $Z(\alpha, x)$. From the definition of a relatively strong increase in risk, the integrands in (3.4) alternate in sign starting with a negative, as can be seen from Figure 2 below where $\lambda\mu$ happens to lie in the interval $[x_5, x_6]$.

Because $U'(Z)$ is <u>increasing</u> in x when $\alpha^* < 1$, the left-hand side of (3.4) is greater than

$$U'(Z_5)\ [\int_0^{\lambda\mu} (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx] + U'(Z_6) \int_{\lambda\mu}^{L} (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx] \quad (\tag{3.5}$$

where $Z_i = W_0 - x_i + \alpha^* x_i - \lambda\mu\alpha^*$, i = 5,6

The sum of the two expressions in brackets above is clearly equal to zero. Indeed

$$\int_0^L (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx = \int_0^L x\ s(x)\ dx - \lambda\mu \int_0^L s(x)\ dx \quad (3.6)$$

and the two terms on the R.H.S. of (3.6) are zero because of the definition of a mean preserving increase in risk.

To complete the proof, since $U'(Z_5) < U'(Z_6)$, we now show that the first bracket in (3.5) is negative. Integrating by parts, one obtains

$$\int_0^{\lambda\mu} (x-\lambda\mu)\, s(x)\ dx = (x-\lambda\mu)\, S(x)\ \Big|_0^{\lambda\mu} - \int_0^{\lambda\mu} S(x)\ dx \quad (3.7)$$

$$= - \int_0^{\lambda\mu} S(x)\, dx$$

Which is negative by the definition of a relatively weak increase in risk.

Q.E.D.

Figure (2) gives an example with the following two triangular densities:

$g(x) = 1/25x \qquad 0 \le x \le 5 = \mu$

$\quad = -1/25x + 2/5 \qquad \mu = 5 \le x \le 10 = L$

$f(x) = 1/9x - 2/9 \qquad x_2 = 2 \le x \le 5 = \mu$

$$=-1/9x + 8/9 \qquad \mu = 5 \le x \le 8 = x_3$$

Since $s(x) \equiv g(x) - f(x)$, $s(x)$ is negative in the interval $[x_5, x_6]$ and positive otherwise, which is in accordance with condition (b) in the definition of a relatively strong increase in risk (1.4).

Remark: It is interesting to notice that when $\lambda\mu$ lies in the interval $[x_5, x_6]$ neither condition (c) nor condition (d) in (1.4) are necessary to prove the desired result. In the Appendix we show explicitly how condition (d) is useful for the case $x_6 \le \lambda\mu$ and the reader can verify

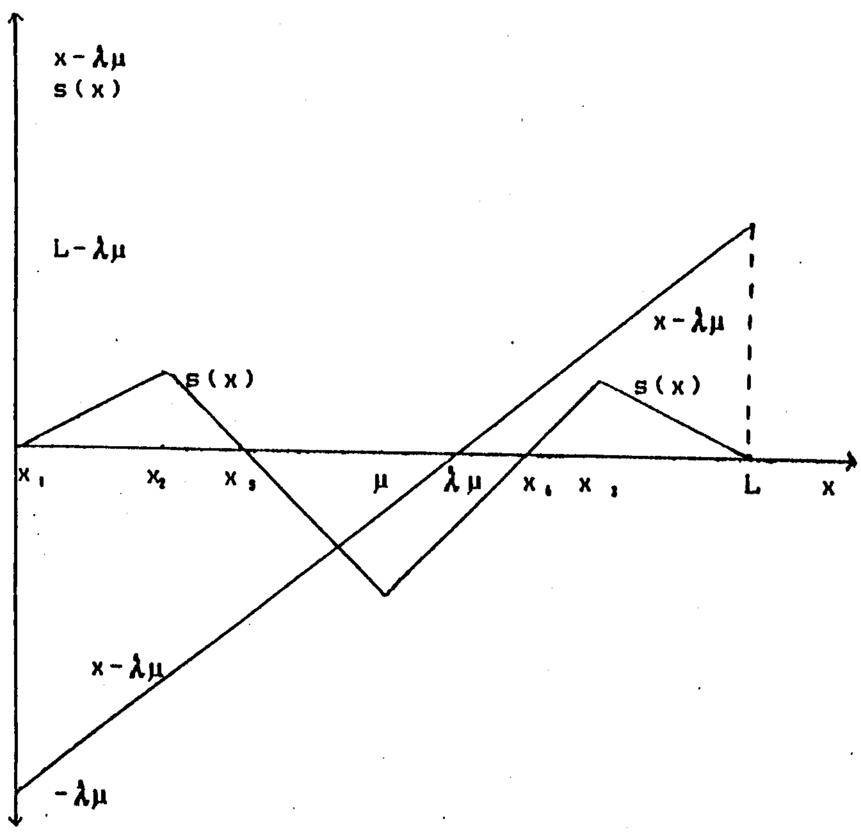

FIGURE 2

that condition (c) has a symmetric role for the case $x_5 \geq \lambda\mu$. Finally, since the Meyer and Ormiston's definition of increasing risk implies that $x_5 = x_2$ and $x_6 = x_3$, $\lambda\mu$ lies, by definition, in the intreval $[x_2, x_3]$.

After having made the proof for marginal changes in risk, a few words about a global increase in risk are in order. If F(x) were a degenerate distribution with probability 1 at x_0 inside [0, L], it is clear that a risk averse individual would never buy nonactuarial insurance so that a corner solution ($\alpha^* = 0$) prevails. The transition from certainty to uncertainty (with distribution G(x)) will necessarily create a positive insurance demand for a risk averse agent if λ is not prohibitive ($\lambda < \lambda^*$). Hence, Theorem 3 also applies for a global increase in risk despite the fact that $Z_{\alpha\alpha}$ equals zero.

Finally, we can apply directly the definition of deterministic transformations of random variables to the coinsurance problem and obtain the result that a risk averse individual with decreasing absolute risk aversion will increase α from α^* to α^{**} if a simple increase in risk is applied to the initial random variable. This result can easily be verified since the characteristics of the payoff function in the coinsurance problem satisfy the conditions of theorem 2.

1.5 CONCLUSION

In the same manner as restrictions on the shift from F to G are substitutes to restrictions on U to obtain intuitivily comparative statics results, this paper has shown that restricting the class of the payoff functions to a linear one did not preclude the applicability of well known theorems to the demand for insurance.

This general conclusion, applied here to the coinsurance problem, can of course be extended to other problems with a linear payoff such as the simple portofolio problem or the competitive firm under uncertainty with constant marginal costs (see Dionne and Eeckhoudt (1990)). Another potential extension concerns other forms of insurance contracts. An example is the choice of the optimal deductible which involves kinked linear payoffs.

REFERENCES

Black, J.M. and G. Bulkley, "A Ratio Criterion for Signing the Effects of an Increase in Uncertainty," International Economic Review 30 (February 1989), 119-130.

Bris, E., Dionne, G. and L. Eeckhoudt, "More on insurance as a Giffen Good," Journal of Risk and Uncertainty 2 (December 1989), 415-420.

Diamond, P.A. and J.E. Stiglitz,"Increase in Risk and in Risk Aversion," Journal of Economic Theory 8 (July 1974), 333-361.

Dionne, G. and L. Eeckhoudt,"Proportional Risk Aversion, Taxation and Labour Supply Under Uncertainty," Journal of Economics 47 (November,1987), 353-366.

Dionne, G and L.Eeckhoudt,"Increases in Rick and Linear Payoffs," Working paper, Economics Department and C.R.T., Universite de Montreal (1990).

Dionne, G., L. Eeckhoudt and E. Briys, "Proportional Risk Aversion and Saving Decisions Under Uncertainty," in Henri Louberge (Ed.), Risk, Information and Insurance, Boston: Kluwer Academic Publishers (1989).

Dreze, J. and F. Modigliani, "Consumption Decisions Under Uncertainty," Journal of Economic Theory 5 (1972), 308-335.

Eeckhoudt, L. and P. Hansen, "Minimum and Maximum Prices, Uncertainty and the Theory of the Competitive Firm," American Economic Review 70 (December 1980), 1064-1068.

Eeckhoudt, L. and P. Hansen, "Micro-economic Applications of Marginal Changes in Rick," European Economic Review 22 (July 1983), 167-176.

Eeckhoudt, L. and P. Hansen, "Mean-Preserving Changes in Risk with Tail-Dominance," Working paper # 8413, Economics Department, Universite de Montreal (1984).

Katz, E., "A Note on a Comparative Statics Theorem for Choice under Risk," Journal of Economic Theory 25 (April 1981), 318-319.

Kraus, M. "A Comparative Statics Theorem for Choice under Risk," Journal of Economic Theory 21 (December 1979), 510-517.

Meyer, J. "Stochastic Dominance and Transformations of Random Variables." In Thomas B. Fomby and Tae Kun Seo (Eds), Studies in the Economics of Uncertainty: In Honor of Josef Hadar. New York: Springer Verlag (1989).

Meyer, J. and M.B. Ormiston, "The Comparative Statics of Cumulative Distribution Function Changes for the Class or Risk Averse Agents," Journal of Economic Theory 31 (October 1983), 153-169.

Meyer, J. and M.B. Ormiston, "Strong Increases in Risk and their Comparative Statics," International Economics Review 26 (June 1985), 425-437.

Meyer, J. and M.B.Ormiston, "Deterministic Transformations of Random Variables and the Comparative Statics of Risk," Journal of Risk and Uncertainty 2 (June 1989), 179-188.

Mossin, J., "Aspects of Rational Insurance Purchasing," Journal of Political Economy 76 (1968), 553-568.

Rothschild, M. and J. Stiglitz, "Increasing Risk I: A Definition," Journal of Economic Theory 2 (September 1970), 225-243.

Rothschilt, M. and J. Stiglitz, "Increasing Risk II: Its Economic Consequences," Journal of Economic Theory 3 (June 1971), 66-84.

Sandmo, A., "The Effects of Uncertainty of Saving Decisions," Review of Economic Studies (July 1970), 353-360.

Sandmo, A., "On the Theory of the Competitive Firm under Price Uncertainty," American Economic Review 61 (March 1971), 65-73.

APPENDIX

Proof for the case where $\lambda\mu \geq x_6$

We have to show that

$$\int_0^L U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx > 0 \qquad (A.1)$$

Let us first consider the case where

$$\int_{x6}^L (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx > 0$$

By using (3.6) in the text, this implies that

$$\int_0^{x6} (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx < 0$$

and the proof in the text gives the desired result without any additional condition. This is true since (A.1) is greater than the following positive expression:

$$U'(Z_5)\,[\int_0^{x6} (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx] + U'(Z_{\lambda\mu})\,[\int_{x6}^L (x - \lambda\mu)\ s(x)\ dx]$$

When

$$\int_{x6}^{L} (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx < 0 \qquad (A.2)$$

we have to introduce condition (d) in (1.4) to get the desired result.

To see this, let us first notice that (A.2) implies

$$\int_{0}^{x6} (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx > 0$$

and, consequently,

$$\int_{0}^{x6} U'(Z) \; (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx > 0$$

Therefore, by definition,

$$\int_{0}^{L} U'(Z) \; (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx > \int_{x6}^{L} U'(Z) \; (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx \qquad (A.3)$$

To complete the proof we now show that the right hand side or (A.3) is positive. This expression can be rewritten as

$$\int_{x6}^{x3} U'(Z) \; (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx + \int_{x3}^{L} U'(Z) \; (x - \lambda\mu) \; s(x) \; dx \qquad (A.4)$$

The second term in (1.4) is non negative. The first integral is equal to

$$\int_{x6}^{x3} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ (r(x) - 1)\ f(x)\ dx$$

where $r(x) \equiv g(x)/f(x)$. Condition (d) in (1.4) implies that

$$\int_{x6}^{x3} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ (r(x) - 1)\ f(x)\ dx >$$

$$(r(\lambda\mu) - 1) \int_{x6}^{x3} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ f(x)\ dx.$$

Finally, since by (3.2)

$$\int_{x2}^{x3} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ f(x)\ dx = 0$$

it follows that

$$\int_{x6}^{x3} U'(Z)\ (x - \lambda\mu)\ f(x)\ dx > 0$$

which completes the proof since $r(\lambda\mu) > 1$ by definition of a relatively strong increase in risk.

Q.E.D.

L'IMPORTANCE DE LA PROCEDURE
DANS LE CHOIX DE LOTERIE

2.1 INTRODUCTION

Ce chapitre discute de la prise de décision en incertitude. Nous allons montrer à l'aide de la revue de littérature pourquoi la théorie de l'espérance d'utilité malgré son échec à expliquer les différents résultats obtenus dans les tests demeure encore aujourd'hui la base de plusieurs modèles alternatifs. Par la suite nous allons démontrer à l'aide des différents faits testés et de l'évolution de la littérature qu'un modèle basé sur la procédure employée par l'agent pour résoudre les problèmes importants de l'incertitude est la meilleure façon de faire.

Ce genre de modèle s'oppose de façon drastique aux théories classiques de choix dont l'axiomatique est faite entièrement à partir des variables (loteries) de base. Un exemple connu est la théorie de l'espérance d'utilité.

On peut diviser la littérature théorique en deux parties. La préoccupation de la première est d'expliquer les faits tout en ayant une base mathématique plus faible que la seconde qui elle est plus préoccupée par l'axiomatique de la théorie que par son pouvoir de résolution. Etant donné qu'aujourd'hui encore aucun modèle ne parvient à expliquer tous les paradoxes les plus connus nous croyons que l'emphase devrait être mise sur la résolution plutôt que sur l'axiomatisation. C'est d'ailleurs la voie la plus naturelle en sciences où après avoir expliqué et donc compris les faits, une étude plus profonde et rigoureuse est de mise.

Certaines théories ont été employées à plusieurs reprises pour tenir compte de l'incertitude dans des modèles économiques, financiers... Il est à noter qu'il ne faut pas confondre l'importance de la déviation à la théorie de l'espérance d'utilité avec l'importance de cette théorie dans les différents modèles considérés. Par exemple, si dans un modèle financier un emprunteur riscophobe doit réagir face à un risque de faillite, alors la manière d'introduire le risque dans ce modèle est plutôt secondaire même si la notion de risque est fondamentale. Un modèle d'espérance mathématique simple (sans U concave) pourrait tout aussi bien être adéquat dans bien des cas. Par conséquent, la théorie de l'espérance d'utilité ou d'autres du même genre donneront les mêmes résultats. Ceci démontre que la forme de l'outil utilisé n'a pas d'importance et ne démontre d'aucune façon que la théorie d'espérance d'utilité est pertinente ou pas. Pour ce faire il faut procéder à des tests plus directs. C'est pourquoi nous ne considérerons que les tests directs qui sont nommés les paradoxes à la théorie de l'espérance d'utilité parce qu'ils ont été faits dans le but de tester la pertinence de cette théorie.

2.2 REVUE DE LA LITTERATURE

2.2.1 Avant 1930

Le premier paradoxe que l'on rencontre est le paradoxe de St-Petersbourgh qui dit essentiellement qu'une loterie où l'espérance mathématique de gains est infinie n'a pas une valeur infinie pour le commun des mortels. La solution proposée par Daniel Bernouilli est l'espérance mathématique où les montants sont transformés à l'aide d'une fonction concave ce qui diminue leurs valeurs relatives lorsqu'ils augmentent. Cette solution apparaît des plus acceptables mais il faut bien remarquer que nous sommes en présence de montants infinis.

2.2.2. Années 30 - 60

Les économistes ont commencé à s'intéresser aux choix en incertitude dans les années 1930. Comme le fait remarquer Arrow (1951), il existait une multitude d'approches difficilement compréhensibles pour celui qui ne connaissait pas une très vaste littérature. Les deux problèmes principaux étaient de déterminer la façon de décrire les conséquences et d'ordonner les effets des actions. Pour le premier problème il y avait deux clans: ceux qui pensaient qu'on devait employer exclusivement le langage des probabilités et les autres qui croyaient que quelques fois on devait ajouter d'autres principes supplémentaires. De plus, la première catégorie discutait de l'interprétation qu'on devait donner aux probabilités; était-ce une fréquence ou un degré de crédibilité etc. La seconde catégorie qui voulait remplacer ou complémenter comprenait des économistes comme Keynes, Knight... et des statisticiens comme Neyman, Pearson, ce qui ne simplifiait en rien la discussion. Pour le second problème, celui d'ordonner les effets des actions et donc d'ordonner les probabilités, les économistes comme Hicks, Marshall et Tinter discutaient de la pertinence de comparer les distributions seulement par leur moyenne et écart type ou si l'on devait ajouter d'autres paramètres. Donc à ce moment le problème le plus urgent à règler était de ramener toute ces discussions à un centre commun. De plus, l'intérêt pricipal de l'incertitude dans les modèles était le marché des denrées à terme et celui des paiements monétaires dans les périodes futures. Ces problèmes de marché comme on le remarque, ne sont pas des problèmes fondamentaux de la théorie de la décision mais plutôt des applications de cette théorie. Donc, les problèmes étudiés ainsi que le besoin de rallier les différents intervenants dictaient le genre de théorie désirée. C'est-à-dire une théorie avec une base forte du point de vue mathématique dont le pouvoir explicatif n'a pas besoin d'être très élevé. Ramsey (1931) a été le premier à proposer ce genre de théorie avec axiomes. Par la suite Von Newman et Morgenstern (1953), qui avaient aussi besoin d'une théorie de l'incertain comme base pour la théorie des jeux, ont eux aussi suivi la route la plus sûre car leur préoccupation réelle n'était pas de développer une théorie de la décision mais bien une théorie pour expliquer l'interaction entre les différents agents. Pour eux le risque n'était qu'un item parmi d'autres dans leur théorie. Ils ont donc choisi une théorie axiomatique simple et ont récupéré l'explication de Bernouilli du paradoxe de St-Petersbourgh. Allais (1979) a nommé ce genre de modèle néo-Bernouillien. Savage (1958) a continué le développement de la théorie en la précisant de plus en plus et en permettant l'emploi de probabililtés subjectives. Debreu (1959) ainsi que Radner (1968) les ont utilisées dans des modèles d'équilibre général tandis que Markowitz (1959) les a utilisées pour les marchés monétaires et pour développer la théorie du choix de portefeuille.

Comme nous venons de le voir, à cause de l'urgence de rallier les discussions et les priorités des chercheurs économistes du temps, nous avons assisté à la naissance, non pas d'une théorie axée sur la prise de décision réelle des agents mais à une théorie très consistante quoique peu réaliste, et cette dernière semblait très satisfaisante pour les chercheurs du temps. Cependant, il existe une exception à cette règle, Maurice Allais (1952). Ce dernier contrairement aux Néo-Bernouilliens mettait l'emphase sur la valeur psychologique associée à chaque loterie ce qui se voulait une explication aux deux paradoxes connus soit les paradoxes d'Allais et de St-Petersbourgh. Un exemple du paradoxe d'Allais est le suivant. Soit les loteries

	P = 0	x = 5,000,000		P = .1	x = 5,000,000
1)	P = 1	x = 1,000,000	2)	P = .89	x = 1,000,000
	P = 0	x = 0		P = .01	x = 0
3)	P = .9	x = 0	4)	P = .89	x = 0
	P = .1	x = 5,000,000		P = .11	x = 1,000,000

L'espérance d'utilité prédit les choix 1 et 4 ou encore 2 et 3 cependant le résultat le plus souvent obtenu de différentes expérimentations est 1 et 3. Ceci le conduisit à construire un test plus complet pour confirmer ou non sa théorie. Malheureusement les résultats de cette étude ne furent publiés que 25 ans plus tard et ce retard, justifié par Allais, a été expliqué par le fait que ce problème n'était pas le plus important en économie pendant cette période.

2.2.3 Années 60 - 80

Durant les années 60-80, on assistait à une progression de l'applicabilité de la théorie. Le premier point d'importance fut l'introduction du coefficient d'aversion au risque par Arrow (1965) et Pratt (1964) qui fût plus tard raffiné par Ross (1981), Khilstrom (1980), Machina (1982). Le second point est la définition de "plus risqué". Hanoch et Levy (1969) ainsi que Rotschild et Stiglitz (1970) ont largement contribué à développer ces définitions. Le premier point permettait la comparaison entre individus tandis que le second permettait d'étudier la réaction d'un individu face à un changement de risque. Ces deux outils ainsi que la notoriété croissante des mathématiques en économie furent suffisantes pour entraîner un flot de travaux dans les champs les plus divers tel que les décisions d'épargne, la recherche de travail, l'assurance, la consommation ainsi que pour les comportements des firmes dans différentes situations telles que le monopole, la compétition parfaite et les équilibres de marché...

Pendant ce temps, mais de façon beaucoup plus timide, quelques tests à la théorie de V-N-M furent faits. Macrimon (1968) fit un test qui englobe comme cas particulier le paradoxe d'Allais et est connu sous le nom de *common consequence effect*. Ce test comprend un montant sûr "a", une loterie P avec des montants plus grands et plus petits que "a" ainsi que deux loteries P^2 et P^1 où P^2 domine stochastiquement P^1. Le choix se fait entre b_1 et b_2 et b_3 et b_4

b_1: $a + P^2$ $\qquad$ b_2: $P + P^2$

b_3: $a + P^1$ $\qquad$ b_4: $P + P^1$

La théorie de l'espérance d'utilité prédit le choix de b_3 et b_1 ou b_2 et b_4. Mais les résultats les plus souvents observés sont b_1 et b_4. Une explication est que mieux l'individu est, lorsqu'il gagne P^2, le plus riscophobe il sera si il perd, alors il aura tendance à se protéger et choisir a avec P^2 tandis que P est acceptable avec P^1. Kahneman et Tverski (1979) testèrent un paradoxe appelé *common ratio* ou le ratio des probabilités est constant. On est en présence de deux loteries où $P>q$, $y>x>0$ et $r \varepsilon (0, 1)$. Le choix est le suivant:

1) P gagne x
   1 - P gagne 0

2) q gagne y
   1 - q gagne 0

3) rP gagne x
   1 - rp gagne 0

4) rq gagne y
   1 - rq gagne 0

Encore là le choix le plus souvent observé est 1 et 4 ce qui est contraire à la théorie de l'espérance d'utilité. On remarque que les trois paradoxes (Allais, *common consequence* et *common ratio*) sont une représentation du phénomène de *fanning out* (Machina 1987). Donc si on explique ce phénomène alors on résout les trois paradoxes. Généraliser ainsi comporte une part de risque car on remarque que le paradoxe d'Allais a comme propriété principale la comparaison d'une loterie avec un montant sûr tandis que *Common consequence* fait appel à des additions de loteries et peut donc comporter une part d'effet richesse. Quant au *Common ratio* il fait appel à des probabilités minimes de gain et par conséquent l'explication n'est peut-être pas la même pour les trois.

Donc les années 60 - 80 furent les témoins d'une littérature qui applique la théorie de l'espérance d'utilité de façon abondante mais qui ne la teste que très peu, et cette popularité entrainera qu'on la considèrera comme un fait acquis.

2.2.4 Années 80 - 95

Un paradoxe testé auparavant par les psychologues Lichtenstein et Slovic (1971) mais connu que plus tard en économie, le *reversal preference* est celui qui porta le plus dur coup à la théorie existante bien que les nouvelles théories n'en tiennent pas toujours compte car c'est le plus difficile à intégrer. Il n'en demeure pas moins qu'il a forcé la recherche universitaire à changer de cap et à se pencher plus profondément sur la base axiomatique de V-N-M. Ce paradoxe comporte deux loteries où

$P > .5$, $.5 > q$, $y > x$ et on a le choix suivant:

1) P gagne x 1 - P gagne 0	2) q gagne y 1 - q gagne 0

Dans un choix direct, 1 est choisi mais si on demande au décideur de donner un prix à une série de loteries dont 1 et 2 font parties (il ne faut pas qu'il reconnaisse 1 et 2) alors il donne un prix plus élevé à 1 qu'à 2. L'explication le plus simple est que dans le choix de loterie c'est la probabilité qui est le facteur de décision tandis que lorsqu'on donne un prix c'est le montant qui est important. Comme nous l'avons vu plus haut, la théorie de l'espérance d'utilité a été crée non dans le but de modéliser précisement la prise de décision de l'agent mais plutôt pour avoir un outil rationel et facilement utilisable, et dans ce sens ce fut une réussite et ceci est particulièrement dû à l'avénement du coefficient d'aversion au risque et de la mesure d'accroissement de risque qui étaient utilisés dans des modèles où l'importance des outils n'était pas fondamentale. On ne savait donc pas à quoi s'attendre de la performance de cette théorie lorsqu'elle serait vraiment testée. Malheureusement les résultats sont désastreux. A l'exception de l'axiome de comparaison et de continuité qui sont évidents les autres axiomes furent attaqués sérieusement. L'axiome d'indépendance ne pouvait être en accord avec les paradoxes d'Allais, common ratio, common consequence... Même l'axiome pourtant simple de transitivité ne résiste pas au paradoxe *preference reversal*. Les autres axiomes qui sont plus raffinés performent évidemment moins bien. Mais les axiomes quoique intéressants du point de vue formel ne sont pas à notre avis le coeur de la théorie de l'espérance d'utilité. Le point fondamental de cette théorie est à notre avis la loi des grands nombres qui peut se vulgariser de cette façon. Si on augmente le nombre de répétitions de la loterie, on est de plus en plus sûr d'obtenir l'espérance mathématique de cette loterie. Donc cette loi élimine totalement le risque du problème. Si on propose à un individu qui connaît la loi des grands nombres, une loterie et si on lui dit que la loterie sera jouée un très grand nombre de fois instantanément, alors le choix de l'espérance mathématique comme critère de décision est adéquat. Mais en employant cette loi le risque est complètement éliminé du modèle ce qui est contraire aux observations générales et particulières au paradoxe de St-Petersbourgh. Bernouilli proposa donc l'ajout d'une fonction d'utilité concave pour réintroduire le risque. L'effet de risque ainsi obtenu ne provient plus directement de la loterie mais de la fonction d'utilité, et cette manière de faire comporte certains dangers.

Si l'on peut jouer une infinité de fois la loterie dans une période alors on gagnerait la moyenne de la loterie et le bon critère d'évaluation serait l'utilité de l'espérance. Comme ce n'est pas le cas on joue donc la loterie une fois par période. De plus si on considère que toutes nos actions journalières comportent une certaine part de risque, alors on fait face à un grand nombre de loteries et là encore on devrait utiliser l'utilité de l'espérance. Comme ce n'est pas le cas il n'existe donc pas plusieurs situations risquées par période. Si l'on utilise l'espérance d'utilité il faut donc qu'il existe une infinité de périodes et que l'agent considère sa vie entière. Donc la longueur des périodes se doit d'être relativement courte et ceci faciliterait le transfert monétaire entre les différentes périodes. Mais le transfert est impossible sinon on devrait utiliser l'utilité de l'espérance.

Le fait d'utiliser l'espérance d'utilité entraîne implicitement une série d'hypothèses très restrictives comme l'impossibilité de jouer la loterie aussi souvent qu'on veut dans une période mais également l'obligation de considérer une infinité de périodes ainsi que le nombre restreint de situations risquées par période et l'impossibilité de transfert entre les périodes.

La théorie de l'espérance d'utilité avec ses cinq axiomes et sa définition se veut une théorie très rationelle et robuste mais elle cache pourtant une série d'hypothèses très restrictives, et ceci est dû à notre avis à la façon dont on y a introduit le risque. Par conséquent nous pensons que les effets de risque devraient provenir directement de la loterie. La popularité de la théorie de l'espérance d'utilité acquise au cours des années préçédantes a eu l'impact qu'au lieu de repartir à zéro et envisager une théorie nouvelle étant donné le peu de succès de cette dernière à expliquer les tests, on a plutôt considéré cette théorie comme base et on a assisté à une prolifération de modèles d'espérance d'utilité non linéaires. Ces derniers se voulaient une déviation plus ou moins timide à la théorie de référence. Voici quelques uns de ces modèles où p_i est la probabilité attachée au montant monétaire x_i.

Subjective expected utility\prospect theory par Ward Edwards (1955, 1962) et Kahneman and Tversy (1979)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, f(p_i)$$

Subjectively weighted utility par Uday Karmarkar (1978, 1979)

$$[\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, f(p_i)] \div [\sum_{i=1}^{n} f(p_i)]$$

Weighted utility par Chew and MacCrimmon (1979), Chew (1983) et Fishburn (1983)

$$[\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, l(x_i)\, p_i] \div [\sum_{i=1}^{n} l(x_i)\, p_i]$$

Anticipated utility par John Quiggin (1982)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, [g(\sum_{j=1}^{i} p_j) - g(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)]$$

General quadratique par Chew, Epstein, et Segal (1988)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} T(x_i, x_j)\, P_i P_j$$

Optimism\pessimism par John Hey (1984)

$$\sum_{i=1}^{n} v(x_i)\, g(p_i; x_1, \ldots, x_n)$$

Ordinal independence par Segal (1984), Green and Jullien (1988)

$$\sum_{i=1}^{n} h(x_i, \sum_{j=1}^{i} p_j)\, [g(\sum_{j=1}^{i} p_j) - g(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)]$$

Plusieurs de ces modèles ainsi que d'autres comme ceux de Yaari (1987), Viscusi (1989) et Gul (1991) sont testés par Hey (1994).

Une autre avenue surtout empruntée par des psychologues est l'étude du processus cognitif employée par l'agent pour résoudre le problème des choix de loteries. Lichtenstein et Slovic (1971) débutèrent ce mouvement qui se poursuivit avec entre autres Birnbaum (1974), Kahneman et Tverski (1979), Meller et al. (1992), Luce et al. (1993), ainsi que Ranyard (1995). Dans la majorité des cas les différentes procédures sont peu ou pas intégrées à un modèle mathématique. Par exemple Kahneman et Tverski (1979) énumèrent plusieurs opérations (cancellation, ségrégation,...) qui se font dans une étape préliminaire et par la suite le décideur incorpore les résultats obtenus dans un modèle mathématique. La partie procédure n'est donc pas intégrée dans le modèle mathématique. Bien que la modélisation soit un peu faible on remarque cependant que les différentes opérations effectuées par le décideur sont très bien identifiées. Dans un premier temps il fait différents *framings* comme par exemple la séparation des montants monétaires en gains et pertes. Une deuxième opération est le groupement des éléments simitaires. Par la suite, dans une troisième phase nommée *editing* il fait des amalgamations où par exemple il additionne les probabilités attachées à des montants monétaires qui ont des valeurs à peu près identiques pour les attribuer à la moyenne de ces montants. Il existe aussi une élimination directe des éléments communs aux deux loteries. Donc comme toutes ces opérations ont été formellement identifiées par des tests, un modèle qui veut tenir compte de la validité psychologique devra contenir toutes ces opérations.

Comme on le remarque, les théories alternatives sont nombreuses. Nous nous proposons par la suite d'étudier quatre théories qui englobent d'une certaine façon celles-ci et qui sont les plus populaires. Ce sont: 1) la théorie de Machina; 2) celle de Bell, Fishburn, Loomes: "la théorie du regret"; 3) la *prospect theory* de Tverski et Kahneman, ainsi que 4) celle de Luce (1992)

2.2.5 Machina (1982)

Le but principal de Machina était de construire une fonction de préférence qui varie non seulement avec x mais aussi avec la distribution F et il s'est intéressé à des changements de la fonction par rapport à F, ce qui l'a conduit à adopter la notion de différentiabilité la plus naturelle dans ce cas; celle de Fréchet ce qui complique un peu l'aspect mathématique. Le changement de bien-être associé à un changement de distribution (F^* à F) est donné par:

$$v(F^*) = v(F) + \int_0^n U(x{:}F)\,[dF^*(x) - dF(x)] + 0(\|F^* - F\|)$$

Avec une série de théorèmes, il établit des relations simples entre la fonction locale U et la fonction globale V. Donc en mettant des restrictions sur la fonction U il obtient différentes décisions pour l'agent qui a la fonction de préférence V. Il est à remarquer que pour le même F l'agent agit selon l'espérance d'utilité (linéaire en p) mais lorsque F varie le résultat est tout autre.

Le paradoxe d'Allais ainsi que la surestimation des petites probabilités et la sous estimation des grandes probabilités ont conduit Machina au principe suivant. Tout mouvement de la distribution qui rend un point moins important rend la sensibilité à ce point plus grande. Ce qui veut dire qu'un point qui est plus près du centre de la distribution sera sous évalué par rapport à un point éloigné du centre. Ce principe implique que pour une fonction relativement régulière, le fait de diminuer le point au centre pour le placer dans les queues augmente l'évaluation des queues. Cette hypothèse est souvent rencontrée sous la forme: Si F^* domine stochastiquement F sur $x \varepsilon (0 , M)$ alors

$-U_{11}(F^*) \div U_1(F^*) > -U_{11}(F) \div U_1(F)$ pour tout x. Donc la variation de F vers F^* augmente l'aversion au risque. Si F^* est un point sûr et F une distribution, on remarque qu'alors le paradoxe d'Allais sera facile à résoudre.

La première hypothèse est que pour tout F on a que $-U_{11}(x;F) \div U_1(x;F)$ est non croissante pour tout x. Cette théorie est donc le pas le plus normal pour quelqu'un qui croit à l'essence de l'espérance d'utilité. Elle explique tous les paradoxes concernant le *fanning out* même si ceux-ci ne devraient peut-être pas avoir la même explication. De plus, elle ne résout pas le paradoxe *reversal preference* (par contre voir Safra et all (1990) à ce sujet). En changeant légèrement la forme de common consequence, Starmer (1992) à l'aide d'expérimentations démontre la faiblesse de la théorie ce qui confirme notre appréhension à expliquer tous les *fanning out* de la même manière.

De plus d'autres tests comme Loomes (1991) ainsi que

Kagel et al (1990) démontrent l'incapacité de cette théorie à expliquer leurs résultats.

Le test de Loomes (1989) comprend une loterie à trois points $(p_1,0:p_2,x_2:p_3,x_3)$ où $p_3>p_2$. L'agent doit choisir les quantités x_2 et x_3 sous la contrainte $x_2 + x_3 = k$ où k est constant. Les résultats sont que les montants monétaires sont réparties de telle façon que p_3/p_2 est proportionnelle à x_3/x_2 ce qui est contraire à l'espérance d'utilité où l'on aurait $x_3 = k$ et $x_2 = 0$. De plus en faisant varier p_1 tout en gardant p_3/p_2 constant on devrait s'attendre au même résultat mais on obtient plutôt que le ratio x_3/x_2 tend vers 1 et cet effet croit proportionnellement à la grandeur de p_1, ce qui semble contraire à *common ratio*. De plus dans les modèles où il y a un processus cognitif comme Raynar (1995), on admet souvent l'élimination des variables non pertinentes pour faire le choix. Par exemple, comme le x_1 est fixé à zéro le p_1 serait simplement ignoré, mais ce n'est pas le cas pour ce test. Une explication partielle à ce test serait que si l'on considère que les deux derniers points forment une sous loterie alors l'agent devrait considérer plus le point x_2 que x_3 ce qui nous amène au test de Mellers et al. (1992). Dans ce test on donne un prix à une loterie à deux points et la seul différence entre les loteries est le x_1. Par exemple ils ont testé que (30,.2;83,.8) a eu un prix plus élevé que (0,.2;83,.8). Ce résultat est vraiment contreintuitif et très peu de modèle parviennent à l'expliquer.

2.2.6. Regret theory

La théorie du regret fût développée par Bell (1982), Fishburn (1982) et Loomes et Sudgen (1987). Cette théorie, comme son nom l'indique, tient compte du regret ou de la joie qu'un individu ressent lorsqu'il reçoit un montant x et qu'il aurait eu un montant y s'il avait pris l'autre alternative. Formellement soit les probabilités $l(l_i,...l_n)$ et $p(p_1,...p_n)$ et un ensemble de montants $(x_1,...x_n)$. On a alors:

$$\sum_i \sum_j r(x_i x_j)\, l_i p_j \qquad ou \qquad r(x,y) = -r(y,x)$$

Cette théorie réussit à démontrer les paradoxes *fanning out* ainsi que *reversal preference*. Mais Loomes (1990) ne réussit pas à expliquer ses résultats à l'aide de ce modèle.

De plus une autre expérience menée par Kahneman et Tverski (1979) complique la discussion. Si on laisse le choix entre:

$$1{,}000 \quad + \quad 500 \quad ou \quad 1{,}000 \quad + \quad \left[\begin{array}{lcl} .5 & \text{——} & 1{,}000 \\ .5 & \text{——} & 0 \end{array}\right.$$

$$2{,}000 \quad - \quad 500 \quad \text{ou} \quad 2{,}000 \quad - \quad \left[\begin{array}{ll} .5 \text{ —— } & 1{,}000 \\ .5 \text{ —— } & 0 \end{array}\right.$$

et si l'on réduit ces deux choix, on obtient:

$$1{,}500 \quad \text{vs} \quad \left[\begin{array}{ll} .5 \text{ —— } & 2{,}000 \\ .5 \text{ —— } & 1{,}000 \end{array}\right.$$

pour les deux loteries. Donc le choix est différent même si les loteries résultantes sont semblables. Cet effet connu sous le nom de *framing effet* a été testé de différentes façons et donne toujours le même résultat. La théorie du regret n'a pas le potentiel pour l'expliquer. Tout comme la théorie de Machina cette dernière ne résiste pas au test de Loomes (1991) qui est lui même un des premiers intervenants dans le développement de ce modèle.

L'originalité de cette théorie est qu'auparavant l'évaluation de x dépendait de p (Machina 1982). Maintenant l'évaluation de x dépend de l'autre alternative y.

Auparavant la surestimation des loteries avec de petites probabilités de gain et la sousestimation des loteries avec de grandes probabilités de gain étaient plus ou moins admises. Mais les tests de Tverski et Kahneman

(1992) et Luce et al.(1992) établirent ces deux faits de façon très précise. Le point P où la loterie n'est plus ni surévaluée et ni sous évaluée est telle que .5 > P ce qui implique que les modèles où l'on imposait la symétrie ne sont plus valides. De plus on a que plus la probabilité est proche de zéro ou de un plus la distorsion est grande.

2.2.7 *Cumulative prospect theory*

Kahneman et Tverski (1992) proposent une extension de leur modèle nommé Prospect theory où les deux élements principaux sont premièrement le fait d'avoir une fonction concave pour les gains et une fonction convexe pour les pertes où la pente de la fonction pour les pertes est plus grande que la pente de la fonction des gains. Deuxièmement les probabilités sont transformées de telle sorte que les petites probabilités soient surestimées et les grandes probabilités soient sous estimées.

L'ajout d'une fonction cumulative qui transforme toute la distribution au lieu de transformer chaque probabilité individuellement a été proposée initialement par Quiggin (1982). Cet ajout améliore la *prospect theory* en permettant le jugement à plusieurs points ou encore à des fonctions de distribution continues au lieu de loteries à deux points seulement. Elle peut aussi s'appliquer aux cas d'incertitude. Finalement la fonction qui transforme les probabilités associées à des montants positifs n'est plus contrainte a être égale à celle qui transforme les probabilités associées aux montants négatifs. On évalue les loteries dans ce modèle de la façon suivante:

$$V(L) = \Sigma_i \, \pi^+_i \, v^+(x_i) + \Sigma_i \, \pi^-_i \, v^-(x_i)$$

où π^+_i représente les probabilités de la loterie L qui sont associées aux montants positifs et π^-_i représentent celles associées aux montants négatifs. La fonction cumulative a la forme suivante:

$$\pi^+_i = w^+(p_i+...+p_n) - w^+(p_{i+1}+...+p_n)$$

Leur modèle est testé à l'aide d'un *pricing* où la fonction v(x) est défini par $v^+(x) = x^\alpha$ et $v^-(x) = -k(-x)^\beta$. Le k est supérieur à 1 ce qui tient compte d'une pondération plus forte pour les montants négatifs que pour les montants positifs. Les fonctions de transformation des probabilités ont la forme suivante:

$$w^s(p) = p^\delta \; / \; (p^\delta+(1-p)^\delta)^{1/\delta} \qquad s=-,+$$

Ces deux fonctions ont une forme sinusoidale ce qui entraine une surestimation des petites probabilités et une sousestimation des grandes probabilités. De plus ces fonctions permettent au point w(p)=p de se réaliser avec un $p \neq .5$.

Cette théorie ne permet pas d'expliquer tous les paradoxes dont le très important preference reversal ainsi que le pricing d'une loterie qui a deux montants strictement positifs. Cependant elle permet d'expliquer très bien certains *framing effect* ainsi que le fait que l'aversion au risque est plus grande pour les pertes que pour les gains.

Du point de vue théorique Kahneman et Tverski introduisent les fonctions de transformation de probabilités sans en justifier leur forme. Ils ne donnent pas de raisons pour lesquelles les petites probabilités sont surestimées et les grandes probabilités sont sousestimées. Ce modèle demeure cependant l'un des plus performants mais nous croyons qu'il sera très difficile d'y apporter les modifications nécessaires qui permettraient de récupérer les paradoxes non expliqués par cette théorie.

2.2.8 Luce (1993)

Le paradoxe *Preference Reversal* ainsi que quelques cas d'intransitivité et le fait que le contexte affecte les choix ont été les motivations qui ont conduit Luce et al (1993) à considérer un niveau de référence déduit de l'équivalent certain comme base de leur théorie. En prenant ce virage Luce se détache vraiment de la théorie de l'espérance d'utilité parce que le point important est la procédure utilisée par l'agent qui dicte son choix.

La procédure employée est la suivante. Dans une première étape, ils calculent l'équivalent certain de chaque loterie et à partir de ces différents équivalents certains, ils forment un niveau de référence dans la seconde étape. La troisième étape est le positionnement des loteries en terme de gains ou pertes à partir du niveau de référence. Enfin ils recalculent une autre fois un équivalent certain qui diffère évidemment du premier mais les fonctions utilisée sont les mêmes. Les fonctions utilisées pour calculer l'équivalent certain sont des fonctions w^+ et w^- qui transforment les probabilités et qui font partie d'une fonction cumulative π_i. De plus comme le font Kahneman et Tverski (1992) ils permettent $w^+ \neq w^-$. Les fonctions $v^+(x)=x^\alpha$ et $v^-(x)=-k(-x)^\beta$ sont identiques à celles de la cumulative prospect theory tandis que $w(p)=p^\delta$ est plus simple. On a donc ici que la surestimation des loteries avec de petites probabilités et la sousestimation des loteries avec grandes probabilités ne sont pas introduite directement mais sont plutôt causées par la valeur des différents paramètres ainsi que la procédure employée.

Une première critique de cette théorie est qu'elle ne semble pas pouvoir s'associer au problème où x_1 est différent de 0. De plus étant donné que le *pricing* peut être vu comme un cas limite du *Reversal* classique avec un $p = .999$, je ne pense pas qu'il pourrait être résoluble si les paramètres sont fixes.

Même si l'idée de base qui est la formation d'un point de référence à partir duquel on rejuge les loteries est intéressante la plus grande faiblesse de ce modèle est la variation exogène de la valeur des différents paramètres lorsque l'on passe d'un paradoxe à un autre. Par exemple si on price on a $\alpha_1, \beta_1, \delta_1$, puis si l'on compare deux loteries on a $\alpha_2, \beta_2, \delta_2$. Ces variations sont exogènes et évidemment en pondérant à notre guise on peut générer tous les résultats. Tous les paradoxes expliqués à l'aide de la procédure seul sont bien résolus, cependant à cause de la complexité des calculs il est difficile de déterminer l'importance relative de la procédure par rapport aux valeurs des paramètres.

2.2.9 Ambiguité

Le paradoxe d'Ellsberg (1961) fut le premier à exposer le problème de l'ambiguité. Ce paradoxe viole la théorie de l'espérance d'utilité ainsi que la théorie subjective d'espérance d'utilité.

Le résultat principal est que le décideur préfère une situation non ambigue à une situation ambigue. Il existe plusieurs définitions de l'ambiguité mais la plupart ont pour base le concept d'information manquante. Cette façon de définir le problème tend à établir une frontière entre l'ambiguité et les autres paradoxes et ceci attaque directement notre approche puisque la procédure ne doit pas fonctionner seulement pour les loteries mais elle doit être assez générale pour expliquer aussi les choix de l'agent pour des biens physiques et a plus forte raison pour l'ambiguité.

Camerer et Weber (1992) font une excellente revue de la littérature de l'ambiguité. Ils exposent clairement les différentes théories et classent les faits stylisés. Avec l'aide de certains faits stylisés nous allons démontrer qu'il n'existe pas de frontières entre l'ambiguité et les autres paradoxes.

Le premier fait est que l'ambiguité est préférée lorsque les probabilités de gains sont faibles et inversement lorsque les probabilités de gains sont élevées. Le deuxième fait est que la plus forte aversion à l'ambiguité se produit pour des valeurs intermédiaires de p c'est à dire autour de $p = .5$. Le troisième fait est que l'aversion à l'ambiguité est plus forte lorsqu'on passe d'une situation sans ambiguité à une situation avec ambiguité que lorsqu'on compose deux situations qui contiennent toutes les deux de l'ambiguité.

Le paradoxe *Common ratio* nous dit qu'un agent aura tendance à prendre plus de risques lorsque les probabilités sont faibles que lorsqu'elles sont élevées et c'est ce phénomène que l'on observe pour le premier fait. Le paradoxe *Reversal Preferences* démontre que la perception d'une probabilité supérieure à p = .5 lorsque comparé à une probabilité inférieure à p = .5 est surévaluée ce qui entraîne une très grande aversion à l'ambiguité et explique le deuxième fait. Le troisième fait nous démontre une discontinuité entre l'existence et la non existence de l'ambiguité, et ce genre de discontinuité apparaît constamment dans les autres paradoxes comme le *Pricing*, le paradoxe où le x_1 est différent de 0...

Donc nous avons vu que les problèmes de l'ambiguité sont étroitement reliés aux autres paradoxes. Quant aux études qui tendent à démontrer l'indépendance de l'aversion au risque et de l'aversion à l'ambiguité elles sont en général basées sur des définitions très arbitraires.

2.3 PROCEDURE

Après avoir exposé les différents paradoxes et modèles et vu pourquoi encore aujourd'hui on utilise la théorie de l'espérance d'utilité comme base de plusieurs modèles, nous allons donner deux genres d'arguments pour démontrer que la procédure employée par l'agent pour résoudre les problèmes devrait être le concept de base de toute théorie. Le premier genre d'argument provient de l'évolution des modèles dans le temps tandis que le deuxième provient des faits directement.

2.3.1 Littérature

La procédure est souvent citée dans la littérature. Même si chacun reconnaît son existence, personne ne la considère comme fondamentale, et pourtant si l'on regarde la direction que prend la littérature en se fiant aux modèles les plus populaires on s'apperçoit qu'elle se dirige consciemment ou non vers cette problématique. Machina (1982) avec son hypothèse 2 parle de la perception des probabilités qui entraîne différentes manières de les évaluer suivant la forme des distributions considérées. Mais ceci n'est en fait qu'un changement de procédure dicté par les probabilités. Que ce changement soit dû à la perception ou à la difficulté de résoudre le problème ne change rien à l'aspect mathématique du modèle. Dans la *prospect theory*, les auteurs incorporent la fonction cumulative de Quiggin ainsi que des fonctions différentes pour les gains et les pertes. Kahneman et Tverski ne justifient pas théoriquement leur approche mais on voit que la procédure remplirait très bien ce rôle. La théorie du regret qui est très performante considère que l'on doit tenir compte des choix alternatifs quand on juge une option. Cette théorie considère donc qu'une même loterie jugée dans des contextes différents amène à des résultats différents. Par conséquent la manière de juger change avec le contexte et donc la procédure varie. Enfin Luce et al (1993) exprime encore plus directement l'importance du contexte et arrive à des résultats très impressionnants. De plus toutes les opérations identifiées par les psychologues lors des choix de loteries nous poussent à croire que l'explication des paradoxes doit tenir compte de la procédure employée par le décideur.

Donc on remarque que l'évolution des modèles dictée par les paradoxes et les nouveaux tests semblent se diriger vers l'idée de procédure. Malheureusement ces dernières sont paralysées par leur base commune qu'est l'espérance d'utilité. Nous croyons donc que tant que les théories traîneront ce boulet, l'amélioration ne se fera qu'à travers l'arrivée d'hypothèses de plus en plus nombreuses et de moins en moins justifiables si on veut garder l'esprit même du modèle. Les modèles risquent donc d'être très lourds et hétéroclytes.

2.3.2 Paradoxes

Comme nous l'avons vu la plupart des tests avaient pour seul objectif de justifier ou discréditer certaines théories. Cette façon de faire a le désavantage de ne pas couvrir entièrement l'espace des choix de loteries. Nous savons par exemple que dans une loterie à deux points la variation de la valeur du premier point est très importante (Meller et al 1992). Cependant l'effet *Common ratio* ou *Reversal preference* n'est pas testé lorsque le x_1 est différent de 0. On a aussi vu que lorsque qu'une loterie contient à la fois des valeurs positives et négatives, ces dernières sont plus importantes par conséquent il serait plausible de penser qu'une loterie à valeur négative seulement amènera des résultats différents qu'une loterie à valeurs positives seulement. Aucun test direct de ce phénomène n'a été fait et on ne peut donc pas se prononcer plus à fond sur l'effet négatif. Pour *Common consequence* on se retrouve avec le même problème et on sait que cet effet existe mais on ne connaît pas son importance relativement aux autres effets et on ne sait pas non plus avec quel grandeur de la probabilité il débute. Il existe de nombreux autres exemples où les données sont manquantes mais là où le phénomène est encore plus important, c'est pour les loteries à trois points. Il n'existe pas de *pricing* et de *reversal preference* pas plus que *Common conséquence* etc. Et de plus les tests de Starmer et Sudgen (1993) font état de nouveaux phénomènes comme la juxtaposition et peut être *event splitting effect*. Loomes (1991) arrive à des résultats qui semblent aller dans le sens contraire de *Common ratio*. Par conséquent il nous apparaît utopique de construire un modèle avec des loteries à trois points ou plus. Même avec des loteries à deux points la prudence est de mise étant donné le grand nombre de tests manquants.

Si la manière que prend l'agent pour résoudre le problème est une bonne explication, alors comme la procédure change avec la forme du problème on doit s'attendre à ce que les paradoxes soient causés par la comparaison de différents formes.

Définissons maintenant une notation qui nous sera utile par la suite. Soit L une loterie, P un montant d'argent, L+L l'addition de deux loteries comme dans le cas de common consequence. L(L) est une loterie où les gains sont d'autres loteries. Une classe de comparaison est formée de deux composantes comme L vs L et une autre classe pourrait être L(L) vs P.

Prenons le paradoxe *preference reversal*. Dans un premier temps, on donne un prix à la loterie ou de manière équivalente on compare différents prix à une loterie, on a donc la classe L vs P. Dans un second temps, on compare les deux loteries ensemble et on a L vs L. Par conséquent le fait de passer de la classe L vs P à la classe L vs L change la procédure.

Le paradoxe d'Allais compare une loterie L à un montant sûr P, on a donc L vs P. Puis par la suite il compare deux loteries L vs L. Donc on assiste ici encore à un changement de classe et donc un changement de procédure.

Le paradoxe *common consequence* a la forme L + L vs L + L, puis L + P vs L + P et on a encore un changement de classe.

La distorsion des probabilités qui explique le fait d'acheter de l'assurance et de jouer à la loterie n'est pas un paradoxe réel. Il confirme plutôt le fait que la procédure employée par l'agent dans la classe L vs P n'est pas l'espérance d'utilité. La sur-estimation des loteries de la forme (0, x) par rapport à celles de la forme (x, x) exprime aussi cette idée.

Les résultats obtenus par Loomes et qui sont inexplicables à l'aide de la théorie de Machina et celle du regret proposent une comparaison entre deux loteries à deux points puis par la suite deux loteries à 3 points et le fait de fixer le premier point tout en laissant à l'agent la manière de séparer un montant M comme nous l'avons vu, suggère fortement la forme L(L vs L(L)) dans le second cas et L vs L dans le premier ce qui entraîne un changement de procédure.

Les tests sur l'ambiguité nous disent que l'agent est plus averse à l'ambiguité lorsque les probabilités sont autour de p = .5 . En admettant que 0 et 1 soient les bornes de p et que chacune d'elles définissent des sous classes différentes qu'on pourrait associer à une loterie gagnante et perdante, alors on pourrait expliquer ce fait et de la même façon on réussirait à faire le lien entre *Common ratio* et *Reversal preference*. Donc le grand nombre de paradoxes qui comporte des différences de classes ainsi que l'évolution de la littérature nous forcent à considérer de plus en plus l'idée de procédure.

2.3 CONCLUSION

Nous avons vu comment l'évolution des modèles dictée par des considérations pratiques ainsi que par des tests nous a conduit à la situation actuelle dans la littérature. Nous avons par la suite démontré à l'aide de la littérature récente et des faits que la procédure semble être le meilleur principe de base pour construire de nouveaux modèles.

Une des qualités que devrait posséder les modèles est un changement de procédure associé à un changement de classe. Il existe plusieurs façons d'atteindre ce but, mais à notre avis un tel changement provoqué de façon endogène par une maximisation de la perception de l'agent serait vraiment idéal.

BIBLIOGRAPHIE

ALLAIS,M. (1953),'Le comportement de l'homme rationel devant le risque: critiques des postulats et axiomes de l'école américaine',Econometrica,21,503 - 546.

ALLAIS,M. et HAGEN,O. (1979),'Expected utility hypothese and the Allais paradox (Dordrect; J.Reidel Pub.).

ARROW,K.J. (1951),'Alternative approaches to the theory of choice in risk-taking situations',Econometrica,19,404 - 437.

BELL,D. (1982),'Regret in decision making under uncertainty',Operations research,20,961 - 981.

CHEW,S.H. (1983),'A generalization of the Quasilinear mean with applications to the measurement of inequality and decision ; Theory resolving the Allais paradox',Econometrica,51,1065 - 92.

CHEW,S.H.,EPSTEIN,L. et SEGAL,U. (1988),'Mixture symetric utility theory' manuscript,dept. of economics,U. of Toronto.

EARL, P.E. (1990), 'Economics and psychology: a survey',The Economic Journal,100,718 -755.

EDWARDS,W. (1955),'The prediction of decision among bets',Journal of experimental psychology,50,201 - 214.

FISCHBURN,P. (1982),'Non transitive measurable utility', Journal of economic theory,31,293 -317.

GREEN,J. et JUBEN,B. (1988),'Ordinal independence in non linear utility theory',Journal of risk and uncertainty,1,355 -387.

GUL,F.,(1991),'A theory of disappointment aversion' Econometrica,59,667-686.

HANOCH,G. et LEVY,H. (1969),'The efficiency analysis of choices involving risk',Review of economic studies,36,335 -346.

HEY,J. (1984),'The economic of optimism and pessimism: a defenition and some applications',Kyklos,37,181 - 205.

HEY,J., et ORME,C.,(1994),'Investigating generalisations of expected utility theory using experimental data' Econometrica,62,1291 - 1326.

IRWIN,J.,SLOVIC,P.,LICHTENSTEIN,S.,McCLELLAND,G.H. (1993),'Preference reversals and the measurement of environnemental values'Journal of risk and uncertainty,6,5 - 18.

KAGEL,J.H.,MACDONALD,D.N. et BATTALIO,R.C. (1990),'Tests of fanning out of indifference curves: results from animal and human experiments',American economic review,80, 912 - 921.

KAHNEMAN,D. et TVERSKI,A. (1979),'Prospect theory:and analysis of decision under risk',Econometrica,47,263 - 291.

KARMAKAR,U. (1978),'Subjectively weighted utility: a descriptive extension of the expected utility model' Organizational behaviour and human performance,21,61 - 92.

KHILSTROM,R.E. ROMER,D. et WILLIAMS,S. (1980),'Risk aversion with random initial wealth',Econometrica,49,911 -920.

LICHTENSEIN,S. et SLOVIC,P. (1971),'Reversals of preferences between bids and choices in gambling decision'Journal of experimental psychology,89,46 - 52.

LOOMES,G. et SUDGEN,R. (1982),'Regret theory: and alternative theory of rational choice under uncertainty',Economic journal,92, 805 - 824.

LOOMES,G. et SUDGEN,R. (1987),'Some implications of a more general form of regret theory' Journal of economic theory,41,270 - 288.

LOOMES,G. (1991),'Evidence of a new violation of the independance axiom' Journal of risk and uncertainty,4,92 - 109.

LUCE,R.D. MELLERS,B. CHANG,S. (1993),'Is choice the correct primitive? On using certainty equivalents and reference levels to predict choice among gamble' Journal of risk and uncertainty,6,115-144.

MAcCRIMON,K.R. (1968),'Descriptive and normative implications of the decision theory postulates' in Borch,K. and Mossin,J. eds.,Risk and uncertainty: Praceeding of a conference held by the international economic association,London,Macmillan.

MACHINA,M.J. (1982), A stronger characterization of risk declining aversion' Econometrica,50,1069 - 1079.

MACHINA,M.J.,(1982),'Expected utility analysis without the independance axiom',Econometrica,50,277 - 323.

MACHINA,M.J. (1987),'Choice under uncertainty:problems solved and unsolved',Economic perspectives,1,121 - 154.

MACHINA,M.J.(1989),'Dynamic consistency and non-expected utility models'Journal of economic litterature,27,1622 - 68.

MACORD,M. et de NEUFVILLE,R. (1984),'Utility dependance on probability: an empirical demonstration' Large scale systems,6,91 - 103.

MELLERS,B.,WEISS,R. et BIRNBAUM,M. (1992),'Violation of dominance in pricing judgemental'3,323 - 343.

MARKOWITZ,H.,(1959),'Portfolio Selection'Yale University Press,New Haven.

PRATT,J.W. (1964),'Risk aversion in the small and in the large' Econometrica,32,122 - 136.

QUIGGIN,J. (1982),'<u>A theory of anticipated utility</u>'Journal of economic behaviour and organization,3,92 - 109.

RANYARD,R.,(1995),'<u>Reversals of preference between compound and simple risk: the role of editing heuristics'</u> Journal of risk and uncertainty,11,159 - 175.

ROSS,S.A. (1981),'<u>Some stronger measures of risk aversion in the small and in the large with applications</u>' Econometrica,49,621 - 638.

ROTHSCHILD,M. et STIGLITZ,J.E. (1970),'<u>Increasing risk 1: a defenition</u>' Journal of economic theory,2,225 - 243.

SEGAL,U. (1984),'<u>Nonlinear decision weights with the independance axiom</u>' manuscript, dept. of economics,UCLA.

STARMER,C. (1992),'<u>Testing new theories of choice under uncertainty using the common consequence effect</u>' Review of economic studies,59,813 - 830.

TVERSKI,A.,SLOVIC,P. et KAHNEMAN,D. (1990),'<u>The causes of preference reversals</u>'American economic review,80,204 - 217.

TVERSKI,A. et WEATH,C. (1991),'<u>Preference and belief:ambiguity and competence in choice under uncertainty</u>' Journal of risk and uncertainty,4,5 - 28.

TVERSKI,A. et KAHNEMAN,D. (1992),'<u>Advances in prospect</u>

theory: cumulative representation of uncertainty'Journal of risk and uncertainty,5,297 - 323.

VISCUSI,W.KIP.,(1989),'Prospective reference theory:toward an explanation of the paradoxes'Journal of risk and uncertainty,2,235-263.

YAARI,M., (1987),'The dual theory of choice under risk' Econometrica,55,95-115.

PREFERENCES AND NORMAL GOODS:
A NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITION

1. INTRODUCTION

In a recent and very ingenious note, Leroux (1987) generalizes the classical definition of complementarity and utilizes his results to characterize a preference order such all goods are normal. His condition is sufficient. In this note, a necessary and sufficient condition is presented. Both conditions are then studied with the help of a generalized Allais matrix and a numerical example.

After specifying assumptions and notation (section 2), we define a complete system of marginal valuation functions, characterize its Jacobian matrix, and isolate a relationship among quantity-effects which is a characteristic of the preference order (section 3). In section 4, we prove that this relationship is a necessary and sufficient condition for all goods to be normal. In section 5, we interpret the Leroux condition as imposing Allais-complementarity between any two goods and our condition as imposing also some kind of complementarity but in a weaker sense and we apply it to risk theory. Historical and empirical relevance is stressed. A numerical example is exhibited in the last section. In this example, Leroux's condition fails on the whole set where our condition is satisfied.

2.ASSUMPTIONS AND NOTATION

We essentially adopt Leroux's assumptions and notation

(i) The analysis is restricted to a neighborhood of x^*,an interior point of the consumption set $X \subset R^n$.

(ii) The preference order is defined on X and representable by a utility function $U: R^n \rightarrow R$ which is twice continuously differentiable in a neighborhood of x^* ($U \in C^2$)

(iii) The transpose of a vector y is denoted ${}^t y$. In addition, $y > 0$ means that each composant of y is strictly positive; $y \geq 0$ that each component is non-negative and at least one is strictly positive, $y \geq 0$ that each component is non-negative.

(iv) The gradient vector and the Hessian matrix of U are denoted G and H, respectively. U is strongly increasing ($G > 0$) and strongly quasi-concave ($\xi \in R^n/\{0\}$ such that ${}^t\xi G=0$ implies ${}^t\xi H\xi < 0$).

(v) i and j run from 1 to n and indicate particular goods. First and second partial derivates are designated by U_i and U_{ij}, respectively.

3.INTERMEDIATE RESULT

If a consumer is representable by U, he is also representable by a vector of shadow prices π and a shadow income ρ defined as

$$\pi \equiv sG/{}^{t}wG \qquad \rho \equiv {}^{t}x\pi \qquad (1)$$

where s > 0 is a scalar and w ≥ 0 a vector of constant weighs. In this representation, π is also known as the "direction of preferences" Debreu (1972), the "marginal valuation functions" Hicks (1956), or the "marginal willingness to pay" Walras (1926). It is not affected by a monotonic transformation of the utility function and consequently is a characteristic of the preference order. Moreover, π and ρ are intrinsic properties- are independant of any particular institutional setup. (1) implies ${}^{t}w\pi \equiv s$, a normalization rule. According to the choosen specification of w and s, one could have $\Sigma_i \pi_i \equiv 1$, $\pi_n \equiv 1$ and so on. w is kept constant for the sake of simplicity: the analysis can be extended to cover, for instance, the case of the normalization $\Sigma_i \pi_i^2 \equiv 1$.
The Jacobian matix of (1) can be written

$$J = \begin{vmatrix} \delta\pi/\delta x & \pi/s \\ \delta\rho/\delta x & \rho/s \end{vmatrix} \qquad (2)$$

$\delta\pi/\delta x$ is a matrix of "quantity-effects" on (shadow) prices. One has

$$\delta\pi/\delta x \equiv [I_n - \pi{}^{t}w/s]\ sH/{}^{t}wG \qquad (3)$$

and consequently

$$^{t}w\ \delta\pi/\delta x \equiv 0 \tag{4}$$

Finally,

$$\delta\rho/\delta x \equiv {}^{t}\pi + {}^{t}x\ \delta\pi/\delta x \tag{5}$$

is a vector of quantity effects on (shadow) income.

Lemma 1. J has rank n+1

Proof. Assume the contrary. Then there exist an n-dimensional vector ϕ and a scalar θ such that

(i) $[{}^{t}\phi,\theta] \neq 0$

(ii) $(\delta\pi/\delta x)\ \phi + \theta(\pi/s) = 0$

(iii) ${}^{t}\pi\phi + {}^{t}x(\delta\pi/\delta x)\phi + \theta(\rho/s) = 0$.

Premultiplying (ii) by ${}^{t}x$ and taking (1) into account imply ${}^{t}\pi\phi = 0 = {}^{t}\phi\pi$. By (3), one has ${}^{t}\phi(\delta\pi/\delta x)\phi = (s/{}^{t}wG)^{t}\phi H\phi$, which is negative (since ${}^{t}\phi\pi = 0$) unless $\phi = 0$. But from (ii), $\phi = 0$, a contradiction with (i). ∎

Of course Lemma 1 implies that $[\delta\pi/\delta x,\ \pi/s]$ has rank n and, consequently, that rank $(\delta\pi/\delta x) \geq n-1$. From (4), rank $(\delta\pi/\delta x) \leq n-1$. So,

Lemma 2. $\delta\pi/\delta x$ has rank n-1.

After changing our numbering if necessary, we can define the partitions ${}^{t}x = [{}^{t}x_{*},\ x_{n}]$ and ${}^{t}\pi = [{}^{t}\pi_{*},\pi_{n}]$ so that in

$$\delta\pi/\delta x = \begin{vmatrix} \delta\pi_*/\delta x_* & \delta\pi_*/\delta x_n \\ \delta\pi_n/\delta x_* & \delta\pi_n/\delta x_n \end{vmatrix}$$

$\delta\pi_*/\delta x_*$ has rank n-1 (implying $w_n > 0$). We now consider $[\delta\pi_*/\delta x_*]^{-1}\,\delta\pi_*/\delta x_n$. Such a term is a pure characteristic of the preference order. We claim that its non-positiveness is a necessary and sufficient condition for all goods to be normal (when x* is the maximiser of U(x) subject to the budgetary constraint ${}^t px = R$, $p > 0$ being a price vector and R a given income).

4.PROPOSITION

Proposition. Let x* be the maximiser of U(x) subject to ${}^t px = R$. Then all goods will be normal (i.e., $\delta x/\delta R \geq 0$) if and only if

$$[\delta\pi_*/\delta x_*]^{-1}\ \delta\pi_*/\delta x_n \leq 0 \qquad (6)$$

Proof. (i) Necessity. Since x* is an interior point, this optimum can be characterized by the relation $\pi = p$, $\rho = R$. But the Jacobian matrix of (π, ρ) has rank n+1. By the inversion theorem, one has $x = f(p,R)$, $f \in C'$, $s = {}^t wp$. Moreover

$$\begin{vmatrix} \delta\pi/\delta x & \pi/s \\ \delta\rho/\delta x & \rho/s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta x/\delta p & \delta x/\delta R \\ w^t & 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

implies

$$(\delta\pi/\delta x)(\delta x/\delta R) \equiv 0 \quad (8)$$

$$(\delta\pi_*/\delta x_*)(\delta x_*/\delta R)+(\delta\pi_*/\delta x_n)(\delta x_n/\delta R) \equiv 0 \quad (8')$$

$$(\delta x_*/\delta R) \equiv -[\delta\pi_*/\delta x_*]^{-1}(\delta\pi_*/\delta x_n)(\delta x_n/\delta R) \quad (8'')$$

If $\delta x_*/\delta R = 0$, $\delta x_n/\delta R > 0$, then (6) is fulfilled with equality. $\delta x_n/\delta R = 0$ is impossible since it implies $\delta x_*/\delta R = 0$ and such a result contradicts ${}^t p(\delta x/\delta R) \equiv 1$ (another implication of (7)). If $\delta x_n/\delta R > 0$ and $\delta x_*/\delta R \geq 0$, then (6) is fulfilled with at least one inequality.

(ii) Sufficiency. Since $\delta x_n/\delta R \neq 0$ in (8''), one can write

$$(\delta x_*/\delta R)/(\delta x_n/\delta R) \equiv -[\delta\pi_*/\delta x_*]^{-1}\ \delta\pi_*/\delta x_n \quad (8''')$$

If $\delta\pi_*/\delta x_n = 0$, then $\delta x_*/\delta R = 0$ and $\delta x_n/\delta R > 0$ from ${}^t p\ \delta x/\delta R \equiv 1$. If $\delta\pi_*/\delta x_n \neq 0$, one has

$$(\delta x_*/\delta R)/(\delta x_n/\delta R) \geq 0$$

and at least one income effect is positive from ${}^t p\ \delta x/\delta R \equiv 1$. Consequently $\delta x/\delta R \geq 0$. ∎

5. INTERPRETATION AND EMPIRICAL RELEVANCE

Starting with the Antonelli matrix we derive a generalized Allais matrix and show that both Leroux's and our conditions can be interpreted in terms of an Allais matrix. We also present our condition (6) using this Allais matrix.

(a) The Antonelli Matrix (1886)

If postmultiplied by the matrix $[I - w^t\pi/s]$, the relation (3) defines an Antonelli matrix. One has

$$A = (\delta\pi/\delta x)-(\delta\pi/\delta x)\ w^t\pi/s = [I-\pi^t w/s](sH/{}^t wG)[I-w^t\pi/s] \quad (9)$$

and consequently,

$$A = {}^tA,\ Aw = 0,\ \xi' A\xi < 0 \quad \text{for} \quad \xi \neq \theta w,\ \theta \in R. \qquad (10)$$

When $\pi = p$, $\rho = R$, such a matrix characterizes a complete inverse demand system as the Slutsky matrix characterizes a complete direct demand system. In principle, A is observable (see, for instance, Theil (1976), Salvas-Bronsard et al. (1977), Barten and Bettendorf (1998)). According to Hicks and Allen, $A_{ij} > 0$ is an indication of complementarity.

(b) The Allais matrix (1943)

The integrability conditions of Antonelli ($A = {}^tA$) can also be written

$$A^1 = (\delta\pi/\delta x) + \pi^t w/s\ {}^t[\delta\pi/\delta x]$$
$$= {}^t[\delta\pi/\delta x] + (\delta\pi/\delta x)\ w^t\pi/s = {}^tA^1 \qquad (11)$$

Let e be a vector made up of ones, ξ_1 and ξ_2 two vectors not orthogonal with π, $\pi_\circ$ the diagonal matrix spanned by π_i, i = 1,2,..,n. A matrix A^2 such that

$$A^2 = \rho[\pi_\circ^{-1}\ A^1\ \pi_\circ^{-1} - [({}^t\xi_1 A^1\xi_2 e^t e)/({}^t\xi_1\pi^t\xi_2\pi)]] \quad (12)$$

will be called an Allais matrix. From (3), it is easy to prove that

$$A^2 = {}^twG\ [G_\circ^{-1}HG_\circ^{-1} - [({}^t\xi_1 H\xi_2 e^t e)/({}^t\xi_1 G^t\xi_2 G)]] \qquad (13)$$

If A is observable so is A^2 (see Barten and Bettendorf (1988)). According to Allais (1943),$A^2_{ij} > 0$ is an indication of complementarity. A specification of ξ_1 and ξ_2 defines a point of reference. For instance, let (r,s) denote a given pair of goods. By a suitable choice of ξ_1 and ξ_2, one has

$$A^2_{ij} = ({}^t wG)[(U_{ij}/U_iU_j) - (U_{rs}/U_rU_s)] \qquad (14)$$

the original Allais coefficients. They were rediscovered independently (up to a scalar) by Barten (1971). Remark that A^2 is symmetric and invariant under a monotone transformation of the utility function. Remark also that A and A^2 are direct generalizations of the classical (and cardinalist) definition of complementarity ($U_{ij} > 0$) as formulated by Edgeworth, Pareto, and Fisher(see Samuelson (1947)).

(Points (a) and (b) represent a slight generalization of Charette and Bronsard (1975).)

(c) The Leroux conditions of normality

The Leroux condition of normality implies that ξ_1 and ξ_2 are choosen in the kernel of H if H is singular and $\xi_1 = \xi_2 = H^{-1}G$ if not . Of course, this is not observable. However (after some tedious but simple manipulations) it proves that there exists an Allais matrix with the property

$$A^2p_\circ\ (\delta x/\delta R) = 0 \qquad (15)$$

and such a matrix is in principle observable. Leroux was not able to write down (15) and consequently to do for (15) what was done for (8). In other words, the necessary and sufficient condition for all goods to be normal can be written

$$[A^2_{**}]^{-1} A^2_{*n} \leq 0 \qquad (16)$$

in terms of a suitable Allais matrix. A sufficient condition for (16) is $A^2_{ij} \geq 0$ since A^2_{**} is negative definite. This is the Leroux's sufficient condition: any two goods have to be Allais complement.

Our condition (6) is simpler, more easily observable, but equivalent to (16). As (16) is a necessary condition for any pair of goods to be Allais complement, one may think that our condition (6) implies some Allais conplementarity. The "distance" between the (n-1) conditions (6) and the n(n-1)/2 conditions $A^2_{ij} \geq 0$ is illustrated with a numerical example in the annex. If i=1,..,n are states of the world, and x_i is an income then the matrix A is a generalized measure of risk aversion and our condition (16) put boundaries to the non-complementarity of certain states of the world.

6.EXAMPLE

We take $U(x) = {}^t ax + \frac{1}{2}\, {}^t xBx$, where

$$B=\begin{vmatrix}-1 & \alpha & 0\\ \alpha & -1 & \beta\\ 0 & \beta & -1\end{vmatrix}$$

is negative definite on the open disk $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. If ${}^t w = [0,0,1]$ in eq. (3) our condition (6), reduces to ${}^t[-\pi_1/\pi_3, 0] \leq 0$ when attention is restricted to $\pi_2 = -\alpha\pi_1 - \beta\pi_3$, implying $\beta < -(\pi_1/\pi_3)\alpha$, a restriction on the unit disk. In other words, income effects are positive for any (α,β) satisfying $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, $\beta < -(\pi_1/\pi_3)\alpha$ and any π_1/π_3.

Because B has a regular inverse, Leroux's conditions can be written $\alpha/\pi_1\pi_2 \geq 1/{}^t\pi B^{-1}\pi$, $B/\pi_2\pi_3 \geq 1/{}^t\pi B^{-1}\pi$. For $\pi_2 = -\alpha\pi_1 - \beta\pi_3$, this reduces to $\alpha/(-\alpha\pi_1^2 - \beta\pi_1\pi_3) \geq -1/(\pi_1^2 + \pi_3^2)$, $\beta/(-\alpha\pi_1\pi_3 - \beta\pi_3^2) \geq 1/(\pi_1^2 + \pi_3^2)$, that is to say $\beta \leq (1/(\pi_1/\pi_3))\alpha$ and $\beta \geq (1/(\pi_1/\pi_3))\alpha$. Hence $\beta = (1/(\pi_1/\pi_3))\alpha$ which is impossible. Leroux's condition is inefficient on the set $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, $\beta < (-\pi_1/\pi_3)\alpha$. Finally, it is easy to check that our condition coincide with $\delta x/\delta R = B^{-1}\pi/{}^t\pi B^{-1}\pi \geq 0$.

REFERENCES

1. M. ALLAIS, "Traité d'économie pure, Tome I," Imprimerie Nationale, Paris, 1943.

2. C. B. ANTONELLI, "Sulla Teoria Matematica della Economia Politica," Tipografia del Folchetto, Pisa, 1886; Translation by J.S. Chipman and A. Lorman, On the mathematical theory of political economy, in "Preference, Utility and Demand," (J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter and H. F. Sonnenschein, Eds.), Chap. 16, pp. 333-364, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971.

3. A. P. BARTEN, Preference and demand interactions between commodities, in "Welvaart," (Opstellen aangeboden aan Prof. Dr. P. Hennipman), Stenfert Kroese, Leiden, 1971.

4. A. P. BARTEN AND L. J. BETTENDORF, Price formation of fish: An application of an inverse demand system, Mimeo, Catholic University of Leuven, 1988.

5. L. CHARETTE AND C. BRONSARD, Antonelli-Hicks-Allen et Antonelli-Allais-Barten, sur l'utilisation des conditions d'intégrabilité d'Antonelli, Rech. Econ. Louvain 41 (1975), 25- 34.

6. G. DEBREU, Smooth preferences, Econometrica 40 (1972), 603-615.

7. J. R. HICKS, "A revision of Demand Theory," Clarendon,

Oxford, 1956.

8. J. R. HICKS AND R. G. D. ALLEN, A Reconsideration of the Theory of Value, I, Economica, N. S. 1, 52-75.

9. A. LEROUX, Preferences and normal goods: A sufficient condition, J. Econ. Theory 43 (1987), 192-199.

10. L. SALVAS-BRONSARD, D. LEBLANC, AND C. BRONSARD, Estimating demand equations: The converse approach, Europ. Econ. Rev. 9 (1977), 301-322.

11. P. SAMUELSON, "Foundations of Economic Analysis," Harvard Univ. Press, Cambridge, MA, 1947.

12. H. THEIL, "Theory and Measurement of Consumer Demand," Vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 1976.

13. L. WALRAS, "Eléments d'économie politique pure," Edition définitive, R. Pichon et R. Durand-Auzias, Paris, 1926.

Je tiens à remercier Georges Dionne pour la constance qu'il a démontré dans sa fonction de directeur de thèse, ainsi que Josée Perreault et Marcel Vincent pour leur aide à la rédaction de ce texte.