UNIVERSITE DE MONTREAL

# LES FONDEMENTS MICROECONOMIQUES DE LA THEORIE DU MULTIPLICATEUR

PAR

ANDRE JR CLEMENT

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRE ES SCIENCES (M.Sc.)

AOUT 1983

Centre de documentation

AVR 02 1984

Sciences économiques, U. de M.

Faculté des études supérieures
Mémoire accepté le
83/12/01
Université de Montréal

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

A partir de la caractérisation de l'optimum d'une économie astreinte à l'équilibre budgétaire du secteur public dans un contexte keynésien, J. Drèze développe une méthodologie qui lui permet de définir le concept macroéconomique du multiplicateur d'emploi.

En complétant et généralisant la méthodologie développée par ce dernier, nous explicitons les conditions d'existence du multiplicateur d'emploi. En effet, nous trouvons que le multiplicateur est une certaine fonction de l'écart entre les taux marginaux de substitution et les taux marginaux de transformation. (Il permet donc d'évaluer la perte sociale due à la multiplicité du système de prix).

Finalement, à partir d'un modèle simple, on discute des liens existant entre les différentes méthodologies employées dans les modèles de second rang.

# INTRODUCTION

## <u>Pourquoi s'intéresser à la notion de "déséquilibre"?</u>

En poursuivant l'objectif fondamental de dégager les implications macroéconomiques de la microéconomie, la théorie économique s'oriente vers la notion de "déséquilibre".

Malinvaud (1977) étudie, à partir d'un exemple numérique, l'effet de la rigidité de certains prix sur le type d'équilibre qui prévaudra dans l'économie. Selon lui, si l'observation permet de croire que la formation des prix dépend davantage de : l'imperfection de la concurrence sur certains marchés, coût d'information, coût de transaction, d'incertitude face à l'avenir ... Alors l'hypothèse, que les prix ne s'ajustent pas suffisamment rapidement afin d'égaliser l'offre et la demande, peut paver la voie à une meilleure représentation de l'économie.

Par la suite, divers auteurs ont complété les travaux de Malinvaud.

Par exemple, Hildenbrand-Hildenbrand (1978) démontrent sous quelles conditions des propriétés de statique comparative peuvent être déduites d'un équilibre keynésien. Ils observent également que les équilibres sous rationnement quantitatif dépendent du schéma de rationnement retenu et de la spécification des anticipations.

Muellbauer-Portès (1978) développent la typologie des équilibres possibles dans le cadre d'une économie intertemporelle. Ils insistent également sur la variabilité des résultats par rapport au choix du schéma de rationnement et à la spécification des anticipations.

En se concentrant spécialement sur certains types d'équilibre, Bronsard-Wagneur (1982) caractérisent l'optimum d'une économie soumise à l'équilibre budgétaire du secteur public dans un contexte keynésien. Leur étude montre qu'étant donné l'étroite dualité entre une politique de prix personnalisés et le rationnement quantitatif il est possible de réaliser un optimum dans un contexte institutionnel keynésien ayant la même valeur normative que son équivalent dans un monde néoclassique.

Donnant suite à l'article de Bronsard-Wagneur, Drèze (1982) développe une méthodologie qui lui permet de dégager le concept macroéconomique du multiplicateur d'emploi de la caractérisation d'un optimum d'un modèle de second rang avec marchés en déséquilibre.

Le mémoire suivant concentrera son attention autour de ces deux derniers articles. Plus précisément, il s'agira de :

- présenter et compléter la méthodologie développée par Drèze;
- critiquer les hypothèses ainsi que le résultat obtenu par ce dernier;
- élaborer un modèle plus général qui permettra éventuellement d'insérer les caractérisations de l'optimum dans un contexte temporaire afin de les rendre observables;
- faire le point sur les différentes méthodologies utilisées afin de traiter les modèles de second rang.

# PARTIE I

## Présentation du modèle de Drèze

## A. Description de l'économie

Considérons la représentation suivante d'une économie :

1) Il existe (m+n+1) biens :

- les m premiers sont décrits par le vecteur $X_1 \varepsilon \mathbb{R}^m$ et sont produits par le secteur privé;
- les n suivants sont décrits par le vecteur $X_2 \varepsilon \mathbb{R}^n$ et sont produits par le secteur public;
- le dernier bien $X_3$ représente le travail : $X_3 \varepsilon \mathbb{R}$, il est le seul intrant du modèle. $[\underline{X}_3 \leq X_3 \leq 0]$;
- $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ est le vecteur des biens $X \varepsilon \mathbb{R}^{m+n+1}$.

2) Il existe également $\ell$ consommateurs repérés par un indice i. Chaque consommateur i est représentable par une fonction d'utilité $u^i$ qui répond aux hypothèses suivantes :

- la fonction u, définie sur l'espace des biens, est deux fois continûment dérivables. $u \varepsilon C^2$;
- elle est strictement croissante. $u_x > 0$ où $u_x$ est le gradient de u;
- elle est fortement quasi-concave :

$$\zeta' U \zeta < 0 \quad \text{pour} \quad \zeta \neq 0 \quad \text{tel que} \quad \zeta' u_x = 0$$

où U est la matrice hessienne de u et $\zeta'$ un vecteur ligne quelconque.

3) Un secteur privé de production (que l'on traitera de façon agrégée afin d'éviter de spécifier comment se répartit le rationnement sur les diverses entreprises). Notre producteur privé est représentable par la fonction de production h qui répond aux exigences suivantes :

- $h \varepsilon C^2$;
- $h_y > 0$, $h_y$ étant le gradient de h;
- $\zeta_1' H \zeta_1 > 0$ pour les $\zeta_1 \neq 0$ tel que $\zeta_1 h_y = 0$ où H est la matrice hessienne de h;
- le producteur privé produit les m premiers biens avec le dernier. $Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_3 \end{bmatrix}$ est le vecteur colonne de production du secteur privé. $Y \varepsilon \mathbb{R}^{m+1}$.

4) Un secteur public qui produit les n autres biens de consommation. Celui-ci est représentable par la fonction de production g qui répond aux hypothèses suivantes :

- $g \varepsilon C^2$;
- $g_z > 0$ où $g_z$ est le gradient de g;
- $Z = \begin{bmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix}$ est le vecteur de production du secteur public. $Z \varepsilon \mathbb{R}^{n+1}$.

## B. Le contexte et l'équilibre keynésien

1. Le consommateur i maximise sa fonction d'utilité sous ses contraintes de budget et de rationnement sur le marché du travail.

Plus formellement il maximise $u^i(X^i)$ étant donné que

$$p'X^i \leq R^i$$

$$X_3^i \leq X_3^i(X_3)$$

où $p' \equiv (p_1, p_2, p_3)'$ est le système de prix à la consommation et $R^i$ est le revenu non salariale du consommateur i. ($R^i$ est considéré comme exogène).

De plus, $X_3^i(X_3)$ est la fonction qui détermine la ration de l'individu i, elle dépend du niveau global de l'emploi $(X_3)$. On postule également que les contraintes perçues par les ménages sur le marché du travail sont tous contraignantes en ce sens que $X_3^i = X_3^i(X_3)$, $\forall i$. Dans ce cas la fonction $X_3^i(X_3)$ sera telle que :

i) $\sum_i X_3^i = \sum_i X_3^i(X_3) = X_3$

ii) $\sum_i \gamma^i = 1$ où $\gamma^i = \dfrac{\partial X_3^i}{\partial X_3}$

De ce programme le consommateur i émet une fonction de demande :

$$\begin{bmatrix} X_1^i \\ X_2^i \\ X_3^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^i(p, R^i, X_3) \\ F_2^i(p, R^i, X_3) \\ X_3^i(X_3) \end{bmatrix}$$

dont la différentielle est :

$$(1) \qquad dX_1^i = \frac{\partial X_1^i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial X_1^i}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial X_1^i}{\partial p_3} dp_3 + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} dR^i + \frac{\partial X_1^i}{\partial X_3} dX_3$$

$$(2) \qquad dX_2^i = \frac{\partial X_2^i}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial X_2^i}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial X_2^i}{\partial p_3} dp_3 + \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} dR^i + \frac{\partial \dot{X}_2^i}{\partial X_3} dX_3$$

$$(3) \qquad dX_3^i = \gamma^i \, dX_3$$

Sachant que : $p' \, f^i(p, R^i, X_3) \equiv R^i$ , on aura :

$$(4) \qquad p_1' \, dX_1^i + p_2' \, dX_2^i + p_3 \, \gamma^i \, dX_3 + [X_1^i]' \, dp_1 + [X_2^i]' \, dp_2 + X_3 \, dp_3 \equiv dR^i$$

Substituons (4) dans (1) et (2) et groupons les termes.

$$dX_1^i = \left[\frac{\partial X_1^i}{\partial p_1} + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} [X_1^i]'\right] dp_1 + \left[\frac{\partial X_1^i}{\partial p_2} + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} [X_2^i]'\right] dp_2$$
$$+ \left[\frac{\partial X_1^i}{\partial p_3} + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} [X_3^i]'\right] dp_3 + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} \, p' dX^i + \frac{\partial \dot{X}_1^i}{\partial X_3} dX_3$$

$$dX_2^i = \left[\frac{\partial X_2^i}{\partial p_1} + \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} [X_1^i]'\right] dp_1 + \left[\frac{\partial X_2^i}{\partial p_2} + \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} [X_2^i]'\right] dp_2$$
$$+ \left[\frac{\partial X_2^i}{\partial p_3} + \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} [X_3^i]'\right] dp_3 + \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} \, p' dX^i + \frac{\partial \dot{X}_2^i}{\partial X_3} dX_3$$

Ces équations se réécrivent :

$$(4) \qquad dX_1^i = S_{11}^i \, dp_1 + S_{12}^i \, dp_2 + S_{13}^i \, dp_3 + \bar{k}_1^i \, p' dX^i + \dot{R}_{13}^i \, dX_3$$

$$(5) \qquad dX_2^i = S_{21}^i \, dp_1 + S_{22}^i \, dp_2 + S_{23}^i \, dp_3 + \bar{k}_2^i \, p' dX^i + \dot{R}_{23}^i \, dX_3$$

ou encore

(6) $dX_1^i = S_{11}^i\ dp_1 + S_{12}^i\ dp_2 + S_{13}^i\ dp_3 + \dot{\hat{R}}_{13}^i\ dX_3 + \bar{k}_1^i du^i/\lambda$

(7) $dX_2^i = S_{21}^i\ dp_1 + S_{22}^i\ dp_2 + S_{23}^i\ dp_3 + \dot{\hat{R}}_{23}^i\ dX_3 + \bar{k}_2^i du^i/\lambda$

où $\dot{\hat{R}}_{a3}^i \equiv \dot{R}_{a3} - \bar{k}_a^i(\hat{p}_3^i - p_3)\ \gamma^i$ pour $a = 1$ et $2$.

Preuve

On sait que $u^i = u^i(X^i)$ d'où :

(8) $du^i = [u^i_{x_1^i}]'\ dX_1^i + [u^i_{x_2^i}]'\ dX_2^i + u^i_{x_3^i}\ \gamma^i\ dX_3$

Or les conditions du premier ordre du problème du consommateur dans un contexte keynésien sont :

a) $u^i_{x_1} = \lambda p_1$

b) $u^i_{x_2} = \lambda p_2$

c) $u^i_{x_3}\ \gamma^i = \lambda p_3 + V$ où V est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de rationnement.

Si on définit $\dfrac{u^i_{x_i}}{\lambda} = \hat{p}$, on aura donc :

$$\hat{p}_1 = p_1$$

$$\hat{p}_2 = p_2$$

$$\hat{p}_3 = p_3 + V^* \qquad \text{où} \quad V^* \equiv V/\lambda \ .$$

Alors en substituant les conditions de premier ordre (a, b, c) dans (8) on obtient :

$$\frac{du^i}{\lambda} = p_1' \, dX_1^i + p_2' \, dX_2^i + \hat{p}_3 \, \gamma^i \, dX_3$$

En lui rajoutant et soustrayant le terme $p_3 \, \gamma^i \, dX_3$, on obtient

$$\frac{du^i}{\lambda} = p' dX^i + (\hat{p}_3 - p_3) \, \gamma^i \, dX_3$$

donc

$$p' dX^i = \frac{du^i}{\lambda} - (\hat{p}_3 - p_3) \, \gamma^i \, dX^3$$

Il suffit maintenant de substituer le terme $p' dX^i$ dans (4) et (5) pour trouver (6) et (7).

C.Q.F.D.

Intéressons nous maintenant aux propriétés des coefficients des différentielles (4) et (5)[1] :

(P1) $S_{11}^i \equiv [S_{11}^i]'$ , $\sum_i S_{11}^i = S_{11}$

(P2) $S_{22}^i \equiv [S_{22}^i]'$ , $\sum_i S_{22}^i = S_{22}$

(P3) $S_{12}^i \equiv [S_{21}^i]'$ , $\sum_i S_{12}^i = S_{12}$ , $\sum_i S_{21}^i = S_{21}$

---

[1]Ces propriétés sont démontrées dans l'article de Bronsard et Leblanc.

(P4) $$\begin{bmatrix} S^i_{11} & S^i_{12} \\ S^i_{21} & S^i_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \equiv 0 \ , \quad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \equiv 0$$

(P5) $$\zeta_2' \begin{bmatrix} S^i_{11} & S^i_{12} \\ S^i_{21} & S^i_{22} \end{bmatrix} \zeta_2 < 0 \quad \text{pour} \quad \zeta_2 \neq \theta \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \ , \quad \theta \in \mathbb{R}$$ (ceci est également valide pour les matrices agrégées)

(P6) $$S^i_{13} \equiv [S^i_{31}]' \equiv 0$$

$$S^i_{23} \equiv [S^i_{32}]' \equiv 0$$

(ceci est également valide pour les matrices agrégées)

(P7) $$p_1' \, \bar{k}^i_1 + p_2' \, \bar{k}^i_2 \equiv 1$$

(P8) $$p_1' \, \dot{R}^i_{13} + p_2' \, \dot{R}^i_{23} \equiv -p_3 \, \gamma^i$$

$$p_1' \, \dot{\tilde{R}}^i_{13} + p_2' \, \dot{\hat{R}}^i_{23} \equiv -\hat{p}_3 \, \gamma^i$$

(P9) Si on définit $$\begin{cases} \dot{R}_{13} = \sum\limits_i \dot{R}^i_{13} \ , & \dot{R}_{23} = \sum\limits_i \dot{R}^i_{23} \\ \dot{\tilde{R}}_{13} = \sum\limits_i \dot{\tilde{R}}^i_{13} \ , & \dot{\tilde{R}}_{23} = \sum\limits_i \dot{\tilde{R}}^i_{23} \end{cases}$$

Alors $$p_1' \, \dot{R}_{13} + p_2' \, \dot{R}_{23} \equiv -p_3$$

$$p_1' \, \dot{\tilde{R}}_{13} + p_2' \, \dot{\tilde{R}}_{23} \equiv -\dot{\tilde{p}}_3$$

Nous constatons :

i) par les propriétés (P1) à (P5) et (P7) qu'il existe une structure locale de Slutsky pour les biens non rationnés;

ii) par (P6) l'effet de substitution par les prix entre biens rationnés et non rationnés est nul;

iii) par (P8) et (P9) que les vecteurs d'effets de débordement ($\dot{R}_{13}$ et $\dot{\tilde{R}}_{13}$) du marché du travail sur les marchés des biens de consommation ne sont pas quelconques.

2. Le producteur privé maximise son profit $\pi = p_1' \, y_1 + p_3 \, y_3$ étant donné son ensemble des possibilités de production $h(y_1, y_3) \leq 0$.

De plus dans un contexte institutionnel keynésien il se trouve rationné sur son output : $y_1 = \bar{y}_1$.

Alors en résolvant, à l'aide des conditions Kuhn-Tucker, le programme suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiser} & p_1' \, \bar{y}_1 + p_3 \, y_3 \\ \text{S.C.} & \\ & h(\bar{y}_1, y_3) \leq 0 \\ & y_3 \leq 0 \end{array}$$

On trouve les fonctions d'offre de bien et de demande de facteur suivantes :

$$y_1 = \bar{y}_1$$

$$y_3 = y_3(p_1, p_3, y_1)$$

(Il est à noter que la fonction de demande de facteur est équivalente à la fonction de production écrite sous une forme explicite, c'est-à-dire $y_3$ en terme de $y_1$ car $y_3$ est un scalaire).

Les différentielles de ces fonctions s'écrivent :

$$dy_1 = d\bar{y}_1$$

$$dy_3 = \frac{\partial y_3}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial y_3}{\partial p_3} dp_3 + \frac{\partial y_3}{\partial y_1} dy_1$$

où

(9) $$dy_3 = T_{31}\, dp_1 + T_{33}\, dp_3 + V_{31}\, dy_1$$

Les coefficients de cette dernière équation possèdent les propriétés suivantes[1] :

(P10) $T_{31} \equiv 0$

(P11) $T_{33} \equiv [T_{33}]'$

(P12) $T_{33}\, p_3 \equiv 0$

(P13) $T_{33} \equiv 0$ , dans le cas où le biens 3 est un scalaire

(P14) $p_3'\, V_{31} \equiv -\tilde{p}_1' = -m_1'$ où i) $\tilde{p}_1$ est le système de prix qui permettrait au producteur privé de produire le même nombre de biens dans un monde néoclassique;

ii) $m_1$ est le coût marginal dans le système de prix à la consommation de produire $\bar{y}_1$.

---

[1]Ces propriétés sont démontrées dans l'article de Allard, Bronsard et McDougall.

3. Le producteur public se trouve rationné sur le marché des biens "2". Comme le producteur privé, ses fonctions d'offre et demande de facteur s'écrivent :

$$Z_2 = \overline{Z}_2$$

$$Z_3 = Z_3(r_2, r_3, \overline{Z}_2)$$

où $\begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ est le système de prix à la production pour le secteur public.

Les coefficients des différentielles de ces fonctions, c'est-à-dire

$$dZ_2 = d\overline{Z}_2$$

(10) $$dZ_3 = T^0_{32}\, dr_2 + T^0_{33}\, dr_3 + Z_{32}\, dZ_2$$

possèdent les propriétés suivantes :

(P15) $T^0_{32} \equiv 0$

(P16) $T^0_{33} \equiv [T^0_{33}]'$

(P17) $T^0_{33}\, r_3 \equiv 0$ d'où $T^0_{33} \equiv 0$

(P18) $r_3\, Z_{32} \equiv -\tilde{r}'_2$

$p_3\, Z_{32} \equiv -m'_2$

où i) $\tilde{r}_2$ est le système prix qui permettrait au producteur public de produire exactement les mêmes biens mais toutefois dans un monde néo-classique;

ii) $m_2$ est le vecteur des coûts marginaux dans le système de prix à la consommation de produire les biens Z.

Sachant que les producteurs privé et public se trouvent respectivement rationnés sur les marchés des biens "1" et "2" (bien de consommation) on constate dès lors :

i) par (P10) et (P15) l'effet de substitution entre biens rationnés et non rationnés est nul chez les producteurs;

ii) par (P11) à (P13) et (P16) à (P17) il existe une structure locale de Slutsky pour les biens non rationnés;

iii) (P14) et (P18) les effets de débordement des marchés "1" ou "2" sur les marchés "3" ne sont pas quelconques.

<u>L'équilibre keynésien</u>

Les conditions d'équilibre sont

$X_1 = Y_1$ pour le marché des biens "1";

$X_2 = Z_2$ pour le marché des biens "2";

$X_3 = Y_3 + Z_3$ pour le marché du travail.

Substituons les hypothèses de comportement de nos agents, c'est-à-dire les fonctions d'offre et de demande dans ces équations. On obtient alors

a) $\sum_i X_1^i(p, R^i, X_3) = \overline{Y}_1$

b) $\sum_i X_2^i(p, R^i, X_3) = \overline{Z}_2$

c) $\sum_i X_3^i = y_3(p_1, p_3, \overline{Y}_1) + Z_3(r_2, r_3, \overline{Z}_2)$

Or comme on l'a décrit auparavant, le contexte keynésien se caractérise par des offres excédentaires sur chacun des marchés. (1, 2 et 3). A ce déséquilibre on associe des contraintes de rationnement :

i) sur le marché du travail ($X_3$) pour les consommateurs;

ii) sur le marché des biens de consommation ($Y_1$, $Z_2$) pour les producteurs.

Un équilibre keynésien correspond alors à des valeurs du revenu national ($Y_1$ et $Z_2$) et du niveau global de l'emploi ($X_3$) qui font en sorte que les conditions a), b) et c) soient respectées.

Imaginons maintenant une transformation marginale de cette économie qui préserve l'équilibre. On aura donc :

$$\sum_i dX_1^i = dy_1$$

$$\sum_i dX_2^i = dZ_2$$

$$\sum_i dX_3^i = dy_3 + dZ_3$$

ce qui se réécrit (par les équations (6), (7), 9) et (10)) :

$$\sum_i \left[ S_{11}^i \, dp_1 + S_{12}^i \, dp_2 + \dot{\tilde{R}}_{13}^i \, dX_3 + \overline{k}_1^i \, \frac{du^i}{\lambda} \right] = d\overline{Y}_1$$

$$\sum_i \left[ S_{21}^i \, dp_1 + S_{22}^i \, dp_2 + \dot{\tilde{R}}_{23}^i \, dX_3 + \overline{k}_2^i \, \frac{du^i}{\lambda} \right] = d\overline{Z}_2$$

$$\sum_i dX_3^i = T_{31} \, dp_1 + T_{33} \, dp_3 + V_{31} \, dy_1 + T_{32}^0 \, dr_2 + T_{33}^0 \, dr_3 + Z_{32} \, dZ_2$$

En agrégeant, cela se ramène à :

d) $S_{11}\ dp_1 + S_{12}\ dp_2 + \dot{\hat{R}}_{13}\ dX_3 + \sum_i \overline{k}_1^i\ du^i/\lambda = d\overline{Y}_1$

e) $S_{21}\ dp_1 + S_{22}\ dp_2 + \dot{\tilde{R}}_{23}\ dX_3 + \sum_i \overline{k}_2^i\ du^i/\lambda = d\overline{Z}_2$

f) $dX_3 = V_{31}\ dY_1 + Z_{32}\ dZ_2$ car $T_{31}$, $T_{33}$, $T_{32}^0$ et $T_{33}^0 \equiv 0$ .

Supposons que l'on soit à l'optimum dans un contexte keynésien. Alors $\frac{du^i}{\lambda} = 0$; et que l'on cherche à caractériser l'effet d'une politique de prix du secteur public sur l'emploi.

Plus formellement on cherche la valeur de :

$$\left.\frac{dX_3}{dp_2}\right|_{dp_1 = 0}$$

Pour ce faire substituons donc d) et e) dans f) en posant :

$$dp_1 = 0 \quad ; \quad dU = 0 .$$

$$dX_3 = V_{31}\ [S_{12}\ dp_2 + \dot{\hat{R}}_{13}\ dX_3] + Z_{32}\ [S_{22}\ dp_2 + \dot{\tilde{R}}_{23}\ dX_3]$$

$$dX_3 - V_{31}\ \dot{\hat{R}}_{13}\ dX_3 - Z_{32}\ \dot{\tilde{R}}_{23}\ dX_3 = V_{31}\ S_{12}\ dp_2 + Z_{32}\ S_{22}\ dp_2$$

$$[I - V_{31}\ \dot{\hat{R}}_{13} - Z_{32}\ \dot{\tilde{R}}_{23}]\ dX_3 = [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}]\ dp_2$$

$$dX_3 = \hat{M}^{-1}\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}]\ dp_2$$

$$\frac{dX_3}{dp_2} = \hat{M}^{-1}\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}]$$

où $\hat{M}^{-1} = [I - V_{31}\,\tilde{R}_{13} - Z_{32}\,\tilde{R}_{23}]^{-1}$ est le multiplicateur d'emploi de Drèze.

On peut interpréter ces démarches de la façon suivantes : quel est l'effet d'une politique de prix du secteur public $[dp_2]$ sur le niveau global de l'emploi $[dX_3]$ lorsque le niveau de vie des agents est optimal $(dU = 0)$ et que les prix du secteur privé de production sont maintenus constants $(dp_1 = 0)$.

C. Note concernant les propriétés de la fonction d'utilité indirecte dans un monde keynésien

Soit $V^i\,[p,\, R^i,\, X^3] \equiv U^i\,(f_1^i(p,\, R^i,\, X^3),\, f_2^i\,(p,\, R^i,\, X_3),\, X_3)$. Alors la fonction $V^i$ possède les propriétés suivantes communément appelées les identités de Roy.

(P19) $\qquad [V_p^i]' + V_{R^i}^i\,[X^i]' \equiv 0$

(P20) $\qquad [V_{X_3}^i] \equiv V_{R^i}^i\,[\tilde{p}_3 - p_3]\,\gamma^i$

où $\tilde{p}_3$ est le taux de salaire (prix fictif) qui permettrait d'obtenir le même niveau d'emploi dans un monde néoclassique que dans un contexte keynésien.

Revenons maintenant à la définition de la fonction $V^i(p,\, R^i,\, X_3)$. On a donc :

$$[V_p^i]' \equiv [u_{X_1}^i]' \frac{\partial X_1^i}{\partial P} + [u_{X_2}^i]' \frac{\partial X_2^i}{\partial p}$$

$$[V_{R^i}^i] \equiv [u_{X_1}^i]' \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} + [u_{X_2}^i]' \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i}$$

$$[V_{X_3}^i] \equiv [u_{X_1}^i]' \frac{\partial X_1^i}{\partial X_3} + [u_{X_2}^i]' \frac{\partial X_2^i}{\partial X_3} + u_{X_3}^i$$

Donc 1) $[V_p^i]' + V_{R^i}^i \; [X^i]' \equiv [u_{X_1}^i]' \left(\frac{\partial X_1^i}{\partial P} + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} (X^i)'\right) + (u_{X_2}^i)' \left(\frac{\partial X_2^i}{\partial P} \quad \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} (X^i)'\right)$

or $u_{X_1}^i = \lambda p_1$

$u_{X_2}^i = \lambda p_2$ par les conditions de premier ordre d'un maximum de la fonction d'utilité.

$$[V_p^i]' + V_{R^i}^i \; [X^i]' \equiv \lambda \; [p_1' \; S_1 + p_2' \; S_2] \quad \text{où} \quad S_1 \equiv [S_{11} \quad S_{12} \quad S_{13}]$$

$$S_2 \equiv [S_{21} \quad S_{22} \quad S_{23}]$$

donc par les propriétés (P1) à (P4) et (P6) :

$$[V_p^i]' + V_{R^i}^i \; [X^i]' \equiv 0 \; .$$

2) $V_{X_3}^i \equiv V_{R^i}^i \; [\tilde{p}_3 - p_3] \; \gamma^i$

$$[u_{X_1}^i]' \frac{\partial \dot{X}_1^i}{\partial X_3} + [u_{X_2}^i]' \frac{\partial \dot{\tilde{X}}_2^i}{\partial X_3} + u_{X_3}^i \equiv \left[[u_{X_1}^i]' \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} + [u_{X_2}^i]' \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i}\right] [\tilde{p}_3 - p_3] \; \gamma^i$$

$$[u_{X_1}^i]' \; [\dot{R}_{13}^i - \bar{k}_1^i \; (\hat{p}_3 - p_3) \; \gamma^i] + [u_{X_2}^i]' \; [\dot{R}_{23}^i - \bar{k}_2^i \; (\tilde{p}_3 - p_3) \; \gamma^i] + u_{X_3}^i \equiv 0$$

$$\lambda \; [p_1' \; \dot{\tilde{R}}^i_{13} + p_2' \; \dot{\tilde{R}}^i_{23} + \tilde{p}_3 \; \gamma^i] \equiv 0$$

d'où $p_1' \; \dot{\tilde{R}}^i_{13} + p_2' \; \dot{\tilde{R}}^i_{23} \equiv -\tilde{p}_3 \; \gamma^i$, ce qui est cohérent avec la propriété (P8).

## D. Caractérisation de l'optimum

On minimise donc la fonction suivante :

$$L(p, R^i, X_3, Y_1, Z_2, r; \lambda^i, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \psi) = \sum_i \lambda^i \; V^i \; (p, R^i, X_3)$$

$$- \pi_1' \; [\sum_i X_1^i \; (p, R^i, X_3) - Y_1]$$

$$- \pi_2' \; [\sum_i X_2^i \; (p, R^i, X_3) - Z_2]$$

$$- \pi_3' \; [\sum_i X_3^i - Y_3 \; (p_1, p_3, y_1) - Z_3 \; (r_2, r_3, z_2)]$$

$$- \psi \;\; [p_2' \; Z_2 + p_3 \; Z_3 \; (r_2. \; r_3, z_2) - \beta \; W_2' \; p_2]$$

En considérant les prix $p_1$, $p_3$, $r_2$ et $r_3$ comme étant fixés, Drèze étudie l'impact d'une décision publique (c'est-à-dire un changement dans les variables contrôlées par le secteur public) sur la caractérisation de l'optimum de cette économie.

Les conditions de premier ordre :

(1) $$L_{p_2} = \sum_i \lambda^i \; [V^i_{p_2}]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_2} - \pi_2' \sum_i \frac{\partial X_2^i}{\partial p_2} - \psi \; [Z_2 - \beta \; W_2]' = 0$$

(2) $$L_{R^i} = \lambda^i \; V^i_{R^i} - \pi_1' \; \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} - \pi_2' \; \frac{\partial X_2^i}{\partial R^i} = 0 \qquad \forall i$$

(3) $L_{X_3} = \sum_i \lambda^i V^i_{X_3} - \pi'_1 \sum_i \dot{R}^i_{13} - \pi'_2 \sum_i \dot{R}^i_{23} - \pi_3 = 0$

(4) $L_{Y_1} = \pi'_1 + \pi_3 V_{31} = 0$

(5) $L_{Z_2} = \pi'_2 + \pi_3 Z_{32} - \psi [p'_2 + p_3 Z_{32}] = 0$

Considérons l'équation (5). On a que :

$$\pi'_2 = -\pi_3 Z_{32} + \psi [p'_2 + p_3 Z_{32}]$$

que l'on peut réécrire

(6) $$\pi'_2 = -\pi_3 Z_{32} + \psi [p_2 - m_2]'$$

où $m'_2 = -p_3 Z_{32}$ est le coût marginal en valeur (dans le système de prix à la consommation) de produire les biens "2".

Considérons maintenant les opérations suivantes :

a) $[1] + \sum_i [2] [X^i_2]'$ (en tenant compte des identités de Roy (P19)),

on trouve

$$-\pi'_1 \sum_i \left( \frac{\partial X^i_1}{\partial p_2} + \frac{\partial X^i_1}{\partial R^i} [X^i_2]' \right) - \pi'_2 \sum_i \left( \frac{\partial X^i_2}{\partial p_2} + \frac{\partial X^i_2}{\partial R^i} [X^i_2]' \right) = \psi [Z_2 - \beta W_2]'$$

(7) $$\pi'_1 S_{12} + \pi'_2 S_{22} = -\psi [Z_2 - \beta W_2]'$$

b) Sachant que $[V^i_{X_3}] \equiv V^i_{R^i}\ (\tilde{p}_3 - p_3)\ \gamma^i$ alors [3] se réécrit :

$$\sum_i \lambda^i\ V^i_{R^i}\ [\tilde{p}_3 - p_3]\ \gamma^i = \pi_1'\ \sum_i \dot{R}^i_{13} + \pi_2'\ \sum_i \dot{R}^i_{23} + \pi_3$$

Définissons [8] $\sum_i \lambda^i\ V^i_{R^i}\ [\tilde{p}_3 - p_3]\ \gamma^i \equiv \lambda\ [p_3 - \bar{p}_3]$, alors

$$(9) \qquad \lambda[p_3 - \bar{p}_3] = \pi_1'\ \dot{R}_{13} + \pi_2'\ \dot{R}_{23} + \pi_3$$

par (P9).

Substituons les équations (4) et (6) dans (7), on obtient :

$$-\pi_3\ V_{31}\ S_{12} - \pi_3\ Z_{32}\ S_{22} + \psi\ [p_2 - m_2]'\ S_{22} = -\psi\ [Z_2 - \beta\ W_2]'$$

$$-\pi_3[V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}] = -\psi\ [(Z_2 - \beta\ W_2)' + (p_2 - m_2)'\ S_{22}]$$

$$(10) \quad \pi_3\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}] = \psi\ [(Z_2 - \beta\ W_2)' + (p_2 - m_2)'\ S_{22}]$$

Substituons également les équations (4) et (6) dans (9) ;

$$\lambda\ [p_3 - \bar{p}_3] = -\pi_3\ V_{31}\ \dot{R}_{13} - \pi_3\ Z_{32}\ \dot{R}_{23} + \pi_3 + \psi\ [p_2 - m_2]'\ \dot{R}_{23}$$

$$\lambda\ [p_3 - \bar{p}_3] - \psi\ [p_2 - m_2]'\ \dot{R}_{23} = \pi_3\ [1 - V_{31}\ \dot{R}_{13} - Z_{32}\ \dot{R}_{23}]$$

$$(11) \qquad \pi_3 = \lambda\ [p_3 - \bar{p}_3]\ M^{-1} - \psi\ [p_2 - m_2]'\ \dot{R}_{23}\ M^{-1}$$

où $M^{-1} = [1 - V_{31}\ \dot{R}_{13} - Z_{32}\ \dot{R}_{23}]^{-1}$ est le multiplicateur d'emploi de Drèze.
On le conçoit mieux sous la forme

$$M^{-1} = \frac{1}{1 - \partial Y_3/\partial Y_1 \ \partial X_1/\partial X_3 - \partial Z_3/\partial Z_2 \ \partial X_2/\partial X_3} = \frac{1}{1 - \text{PmE}}$$

où PmE signifie la propension marginale à embaucher.

Substituons maintenant (11) dans (10) en tenant compte que

$$M^{-1} \ [V_{31} \ S_{12} + Z_{32} \ S_{22}] = \left.\frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right|_{dp_1=dp_3=dr_2=dr_3=du=0}$$

$$\lambda \ [p_3 - \bar{p}_3] \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} - \psi \ [p_2 - m_2]' \ R_{23} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} = \psi \ [[Z_2 - \beta \ W_2]' + (p_2 - m_2)' \ S_{22}]$$

$$(12) \qquad [p_3 - \bar{p}_3] \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} = \frac{\psi}{\lambda} \left[(Z_2 - \beta \ W_2)' + (p_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{R}_{23} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right)\right]$$

En rajoutant à (12) les identités suivantes :

$$(13) \qquad (P_1 - m_1)' \left(S_{12} + \dot{R}_{13} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right) + (P_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{R}_{23} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right) \equiv 0$$

$$(14) \qquad (Z_2 - \beta \ W_2)' \equiv (Z_2 - \beta \ W_2)' \qquad \text{(démonstration voir annexe I)}$$

on trouve que

$$(15) \qquad \phi \left[(Z_2 - \beta \ W_2)' + (P_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{R}_{23} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right)\right] =$$

$$(Z_2 - \beta \ W_2)' - [p_1 - m_1]' \left(S_{12} + \dot{R}_{13} \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right) + (p_3 - \bar{p}_3) \ \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}$$

où $\phi = (1 + \psi/\lambda)$.

La formule (15) s'interprète en terme d'analyse avantage-coût. Le crochet de gauche mesure le revenu marginal provenant d'une variation des prix du secteur public (politique économique). Il se divise en deux effets :

1. un bénéfice direct $(Z_2 - \beta W_2)$ qui représente le revenu marginal provenant de la vente des biens 2;
2. une perte ou un bénéfice indirect $(P_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{R}_{23} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right)$ qui représente le surplus (perte) généré par la politique de prix du secteur public, (c'est-à-dire l'ajustement en bien 2 provoqué par la variation des prix des biens 2).

Le crochet de droite mesure le coût marginal sur le secteur privé de la politique de prix du secteur public. Il se décompose en trois effets :

1. $(Z_2 - \beta W_2)$ représente le coût marginal direct qui s'applique aux consommateurs qui achète les biens 2;
2. $(p_1 - m_1)' \left(S_{12} + \dot{R}_{13} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right)$ représente le surplus (perte) généré par la politique de prix du secteur public sur la production du secteur privé, (c'est-à-dire l'ajustement en bien 1 provoqué par la variation des prix des biens 2);
3. $(p_3 - \bar{p}_3) \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}$ mesure le coût chez les ménages d'être en déséquilibre sur le marché du travail.

Le scalaire $\phi$ pondère le revenu marginal de façon à ce qu'à l'optimum le revenu marginal du secteur public soit égal au coût marginal du secteur privé.

## E. Correction théorique du modèle de Drèze

Nous venons de présenter le modèle de Drèze. Avant de généraliser certaines hypothèses de ce modèle, on aimerait souligner une lacune de celui-ci.

En effet, reprenons les équations (8) et (9), on a que

$$\sum_i \lambda^i \, V^i_{R^i} \, [\tilde{p}_3 - p_3] \, \gamma^i = \pi'_1 \, \dot{R}_{13} + \pi'_2 \, \dot{R}_{23} + \pi_3$$

Drèze définit

$$\sum_i \lambda^i \, V^i_{R^i} \, [\tilde{p}_3 - p_3] \, \gamma^i = \lambda \, [p_3 - \bar{p}_3]$$

Or par l'équation (2), à l'optimum le terme $\lambda^i \, V^i_{R^i}$ n'est pas quelconque, il est égal à

$$\lambda^i \, V^i_{Ri} = \pi'_1 \, \frac{\partial X^i_1}{\partial R^i} + \pi'_2 \, \frac{\partial X^i_2}{\partial R^i}$$

Alors dans ce cas l'équation (9) se réécrit :

$$\sum_i \left[\left(\pi'_1 \, \frac{\partial X^i_1}{\partial R^i} + \pi'_2 \, \frac{\partial X^i_2}{\partial R^i}\right)[\tilde{p}_3 - p_3] \, \gamma^i = \pi'_1 \, \dot{R}_{13} + \pi'_2 \, \dot{R}_{23} + \pi_3\right.$$

donc

$$\pi'_1 \sum_i \left[\dot{R}^i_{13} - \frac{\partial X^i_1}{\partial R^i} \, [\tilde{p}_3 - p_3] \, \gamma^i\right] + \pi'_2 \sum_i \left[\dot{R}^i_{23} - \frac{\partial X^i_2}{\partial R^i} \, [\tilde{p}_3 - p_3] \, \gamma^i\right] + \pi_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \pi'_1 \sum_i \dot{\tilde{R}}^i_{13} + \pi'_2 \sum_i \dot{\tilde{R}}^i_{23} + \pi_3 = 0$$

(9') $$\pi'_1 \, \dot{\tilde{R}}_{13} + \pi'_2 \, \dot{\tilde{R}}_{23} + \pi_3 = 0$$

Alors en substituant (4) et (6) dans (9') on trouve

$$-\pi_3 \; V_{31} \; \dot{\tilde{R}}_{13} - \pi_3 \; Z_{32} \; \dot{\tilde{R}}_{23} + \pi_3 + \psi \; [p_2 - m_2]' \; \dot{\tilde{R}}_{23} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \pi_3 \; [1 - V_{31} \; \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \; \dot{\tilde{R}}_{23}] = -\psi \; [p_2 - m_2]' \; \dot{\tilde{R}}_{23}$$

$$(11') \quad \pi_3 = -\psi \; [p_2 - m_2]' \; \dot{\tilde{R}}_{23} \; \tilde{M}^{-1}$$

où $\tilde{M}^{-1} = [1 - V_{31} \; \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \; \dot{\tilde{R}}_{23}]^{-1}$ est le multiplicateur d'emploi corrigé de Drèze.

Substituons maintenant (11') dans (10) et en tenant compte que

$$[V_{31} \; S_{12} + Z_{32} \; S_{22}] \; \tilde{M}^{-1} = \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}$$

on trouve alors

$$-\psi \; [p_2 - m_2]' \; \dot{\tilde{R}}_{23} \; \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} = \psi \; [(Z_2 - \beta \; W_2)' + (p_2 - m_2)' \; S_{22}]$$

$$(12') \Longrightarrow \quad -\psi \left[ (Z_2 - \beta \; W_2)' + (p_2 - m_2)' \left( S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \; \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \right) \right] = 0$$

On pourrait faire disparaître le $\psi$ mais il serait malhabile de procéder ainsi. Plutôt considérons les identités suivantes :

$$(13') \quad (p_1 - m_1)' \left( S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \; \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \right) + (p_2 - m_2)' \left( S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \; \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \right) \equiv (p_3 - \tilde{p}_3) \; \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}$$

(Voir annexe II)

$$(14) \quad (Z_2 - \beta \; W_2)' \equiv (Z_2 - \beta \; W_2)'$$

et ajoutons-les à l'équation (14'), on trouve alors :

$$(15') \quad \phi\left[(Z_2 - \beta\, W_2)' + (p_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right)\right] =$$
$$\left[(Z_2 - \beta\, W_2)' - (p_1 - m_1)' \left(S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right) + (p_3 - \tilde{p}_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right]$$

où $\phi = (1 - \psi)$.

(15') s'interprête comme (15). Le crochet de gauche représente le revenu marginal généralisé du secteur public, tandis que le crochet de droite est associé au coût marginal généralisé du secteur privé. Nous reviendrons plus tard compléter les raisonnements que l'on peut dégager de (15').

## F. Si le premier rang est accessible

Reprenons les équations (11') et (10) :

$$(11') \qquad \pi_3\, \tilde{M} = -\psi\, [p_2 - m_2]'\, \dot{\tilde{R}}_{23}$$

$$(10) \qquad \pi_3\, [V_{31}\, S_{12} + Z_{32}\, S_{22}] = \psi\, [(Z_2 - \beta\, W_2)' + (p_2 - m_2)\, S_{22}]$$

et supposons que l'optimum de premier rang puisse être atteint, en ce sens que

1. la contrainte budgétaire du secteur public ne soit pas contraignante ($\psi = 0$);
2. les prix soient égaux au coûts marginaux : $p_1 = m_1$ où $m_1' = -p_3\, V_{31}$
$p_2 = m_2$ où $m_2' = -p_3\, Z_{32}$.

Alors (11') se ramène à

(16) $$\pi_3 \tilde{M} = 0$$

où $\tilde{M} = [1 - V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23}]$.

Et (10) se réécrit :

(17) $$\pi_3 [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}] = 0$$

Comme $p_1 = m_1$ et $p_2 = m_2$ impliquent que

(18) $$-\frac{p_1'}{p_3} = V_{31}$$

et

(19) $$-\frac{p_2'}{p_3} = Z_{32}$$

En substituant dans (17) on trouve :

$$p_1' S_{12} + p_2' S_{22} = 0$$

ce qui est cohérent avec $p_1' S_{12} + p_2' S_{22} \equiv 0$ (P4).

Si on substitue (18) et (19) dans (16) on trouve que :

$$\pi_3 = \pi_3 \left[ -\frac{p_1'}{p_3} \dot{\tilde{R}}_{13} - \frac{p_2'}{p_3} \dot{\tilde{R}}_{23} \right]$$

$$\pi_3 = -\pi_3 \left[ \frac{p_1' \dot{\tilde{R}}_{13} + p_2' \dot{\tilde{R}}_{23}}{p_3} \right]$$

$$\pi_3 = -\pi_3 \left[ -\frac{\tilde{p}_3}{p_3} \right]$$

d'où que $\tilde{p}_3 = p_3$.

Ce qui signifie :

1. qu'à l'optimum de premier rang les contraintes de rationnement ne sont plus opératoires;
2. $\tilde{M}^{-1}$, le multiplicateur d'emploi existe à l'optimum sous les conditions que : 1) $\psi \neq 0$, c'est-à-dire le premier rang n'est pas accessible;

   2) $p_2 \neq m_2$ (voir 11'), c'est-à-dire qu'il existe un écart entre les taux marginaux de substitution ($p_2$) et les taux marginaux de transformation ($m_2$).

## G. Généralisation multidimensionnelle du modèle de Drèze

Voyons si la méthodologie développée par Drèze peut s'appliquer à un modèle où il existe plusieurs types de qualité de travail.

Dorénavant $X_3$, $Y_3$, $Z_3$, $p_3$, $r_3$ et $\pi_3$ représenteront des vecteurs colonnes à "k" éléments.

Notons immédiatement que cela affectera certaines propriétés énoncées auparavant. On obtiendra maintenant :

(P8) $$p_1' \dot{R}_{13}^i + p_2' \dot{R}_{23}^i \equiv -p_3' \hat{\gamma}^i$$

où $\hat{\gamma}^i$ est une matrice diagonale telle que $\sum\limits_i \hat{\gamma}i = I_{kxk}$

(P9) $$p_1' \dot{R}_{13} + p_2' \dot{R}_{23} \equiv -p_3'$$

(P13) $\qquad \zeta_3' \, T_{33} \, \zeta_3 > 0 \qquad$ pour $\quad \zeta_3 \neq \theta p_3 \; , \quad \theta \in \mathbb{R}$

(P17) $\qquad T^0_{33} \, r_3 \equiv 0 \; .$

Cherchons donc l'optimum social associé à une telle économie. On minimisera la fonction :

$$L(p, R^i, X_3, Y_1, Z_2, r; \lambda^i, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \psi) = \sum_i \lambda^i \, V^i \, (p, R^i, X_3)$$

$$-\pi_1' \, [\sum_i X^i_1 \, (p, R^i, X_3) - Y_1]$$

$$-\pi_2' \, [\sum_i X^i_2 \, (p, R^i, X_3) - Z_2]$$

$$-\pi_3' \, [\sum_i X^i_3 - Y_3 \, (p_1, p_3, Y_1) - Z_3 \, (r_2, r_3, z_2)]$$

$$-\psi \; [p_2' \, Z_2 + p_3 \, Z_3 - \beta \, W_2' \, p_2]$$

Fidèle à Drèze on considère les prix $p_1$, $p_3$, $r_2$ et $r_3$ comme étant donnés.

Les conditions de premier ordre sont alors :

(1) $$L_{p_2} = \sum_i \lambda^i \, [V^i_{p_2}]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X^i_1}{\partial p_2} - \pi_2' \sum_i \frac{\partial X^i_2}{\partial p_2} - \psi \, [Z_2 - \beta \, W_2]' = 0$$

(2) $$L_{R^i} = \lambda^i \, V^i_{R^i} - \pi_1' \frac{\partial X^i_1}{\partial R^i} - \pi_2' \frac{\partial X^i_2}{\partial R^i} = 0 \qquad \forall i$$

(3) $$L_{X_3} = \sum_i \lambda^i \, [V^i_{X_3}]' - \pi_1' \sum_i \dot{R}^i_{13} - \pi_2' \sum_i \dot{R}^i_{23} - \pi_3' = 0$$

(4) $$L_{Y_1} = \pi_1' + \pi_3' \, V_{31} = 0$$

(5) $\quad L_{Z_2} = \pi_2' + \pi_3' Z_{32} - \psi [p_2' + p_3' Z_{32}] = 0$

De (5) on déduit :

(6) $$\pi_2' = -\pi_3' Z_{32} + \psi [p_2 - m_2]'$$

où $m_2' = -p_3' Z_{32}$ est le coût marginal en valeur de produire les biens "2".

Considérons les opérations suivantes :

i) $[1] + \sum_i [2] [X_2^i]' \Rightarrow [7] \; \pi_1' S_{12} + \pi_2' S_{22} = -\psi [Z_2 - \beta W_2]'$

(par les identités de Roy);

ii) $[3] - [2] (\tilde{p}_3 - p_3)' \hat{\gamma}^i$

conduit à

(8) $$\pi_1' \dot{\tilde{R}}_{13} + \pi_2' \dot{\tilde{R}}_{23} + \pi_3' = 0$$

iii) Substituons (4) et (6) dans (7) :

(9) $$\pi_3' [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}] = \psi [(Z_2 - \beta W_2)' + (p_2 - m_2)' S_{22}]$$

iv) Substituons (4) et (6) dans (8) :

$$-\pi_3' V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} - \pi_3' Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23} + \pi_3' = -\psi [p_2 - m_2]' \dot{\tilde{R}}_{23}$$

$$\pi_3' [I - V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23}] = -\psi [p_2 - m_2]' \dot{\tilde{R}}_{23}$$

(10) $$\pi_3' = -\psi [p_2 - m_2]' \tilde{R}_{23} \tilde{M}^{-1}$$

où $\tilde{M}^{-1}$ est la matrice de multiplicateur d'emploi de Drèze.

v) Finalement substituons (10) dans (9) en tenant compte que $\tilde{M}^{-1} \; [V_{31} \; S_{12} + Z_{32} \; S_{22}] = \dfrac{d\hat{X}_3}{dp_2}$ . On obtient alors :

$$-\psi \; [p_2 - m_2]' \; \dot{\tilde{R}}_{23} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} = \psi \; [(Z_2 - \beta \; W_2)' + (p_2 - m_2)' \; S_{22}]$$

$$(11) \qquad 0 = -\psi \left[ (Z_2 - \beta \; W_2)' + (p_2 - m_2)' \left( S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \; \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right) \right]$$

Si on rajoute à (11) les identités suivantes :

$$(Z_2 - \beta \; W_2)' \equiv (Z_2 - \beta \; W_2)'$$

$$(p_1 - m_1)' \left( S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right) + (p_2 - m_2)' \left( S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right) \equiv (p_3 - \tilde{p}_3)' \; \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}$$

(voir annexe II)

on trouve alors :

$$(12) \qquad \phi \left[ (Z_2 - \beta \; W_2)' + (p_2 - m_2)' \left( S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \; \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right) \right] =$$
$$\left[ (Z_2 - \beta \; W_2)' - (p_1 - m_1)' \left( S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \; \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right) + (p_3 - \tilde{p}_3)' \; \frac{d\hat{X}_3}{dp_3} \right]$$

où $\phi = 1 - \psi$.

(12) est la caractérisation finalisée du modèle de Drèze.

H. Critique du modèle

1. L'hypothèse que les prix $p_1$, $r_2$, $p_3$ et $r_3$ sont fixés implique que la caractérisation de l'optimum, c'est-à-dire la formule (12) ne permet plus de définir l'écart optimal entre les systèmes de prix $\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ comme le faisait jadis la formule de Boiteux. Par contre si on fait l'hypothèse qu'il y a absence de tarification sur le marché du travail, c'est-à-dire $p_3 = r_3$ alors par la propriété ((P18) : $r_3' \, Z_{32} \equiv -\hat{r}_2'$) on déduit que $p_3' \, Z_{32} = -\hat{m}_2' = -\tilde{r}_2'$. Dans ce cas, le terme $(p_2 - \tilde{r}_2)' \left( S_{22} + R_{23} \dfrac{d\hat{X}_3}{dp_2} \right)$ de la formule (12) s'interpréterait comme le revenu marginal provenant à la fois du fait que le secteur public est rationné sur le marché des biens "2" et de la tarification sur ce même marché. On pourrait donc alors définir une taxe optimale sur le marché des biens "2".

2. On pourrait se demander pourquoi n'est-il pas possible de caractériser une politique de prix sur le marché du travail puisque le secteur public est présent sur un tel marché. Pour ce faire, relâchons l'hypothèse que les prix $p_3$ et $r_3$ sont fixes. Alors la dérivée du lagrangien par rapport à $p_3$ conduit à :

$$L_{p_3} = \sum_i \lambda^i \, [V^i_{p_3}]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_3} - \pi_2' \sum_i \frac{\partial X_2^i}{\partial p_3} - \pi_3' \, T_{33} - \psi \, Z_3' = 0$$

Considérons l'opération suivante : $(1) + \sum_i (2) \, [X_3^i]'$. On trouve alors :

$$-\pi_1' S_{13} - \pi_2' S_{23} + \pi_3' T_{33} = \psi Z_3'$$

or $S_{13} \equiv 0$ et $S_{23} \equiv 0$ (par (P6))

d'où $\pi_3' T_{33} = \psi Z_3'$ si on post-multiplie ce résultat par $p_3$ on trouve

$\pi_3' T_{33} p_3 = \psi Z_3' p_3$

$0 = \psi p_3' Z_3$ (puisque $T_{33} p_3 \equiv 0$ par (P12))

Alors trois possibilités s'offrent à nous :

i) $\psi = 0$, ce qui nous intéresse très peu puisque qu'on étudie le cas où $\psi \neq 0$;

ii) $p_3' Z_3 = 0$, c'est-à-dire la masse salariale du secteur public est nulle, ce qui est absurde;

iii) le problème est mal posé en ce sens que le modèle présenté par Drèze est trop simple.

3. A partir de la formule (12), demandons-nous ce qui se passe s'il n'existe pas de secteur public soumis à l'équilibre budgétaire ($\psi = 0$), et si on tarifie les prix égaux aux coûts marginaux ($p_1 = m_1$, $p_2 = m_2$). En d'autres mots, si le premier rang est accessible. La réponse est que l'on ne peut rien conclure car le terme $\frac{d\hat{X}_3}{dp_2} = \tilde{M}^{-1} [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}]$ n'est plus définit puisque $\tilde{M}^{-1}$ n'existe pas sous les conditions i) $p_2 = m_2$ ou ii) $\psi = 0$. Donc la formule (12) ne semble pas très souple afin d'étudier certaines éventualités.

4. Drèze fait l'hypothèse que les biens vendus par le secteur privé, les biens "1", sont strictement consommés par les consommateurs ainsi que les biens produits par le secteur public, les biens "2", sont également strictement consommés par les consommateurs. Autrement dit, il n'existe pas d'échanges commerciaux entre les producteurs privé et public. Par exemple, cela peut signifier que si le producteur public produit de l'électricité il ne la vendra qu'au consommateur.

Dans la deuxième partie, nous tenterons de contourner ces ambiguïtés en présentant un modèle plus général.

En fait il s'agira d'une synthèse entre les articles de Drèze et Bronsard-Wagneur.

Le but consiste à étendre la méthodologie de Drèze dans un modèle plus complet afin de pouvoir définir éventuellement des concepts observables que l'on pourra insérer dans un contexte temporaire.

# PARTIE II

## Vers un modèle plus général

A. <u>Description de l'économie</u>

Considérons les ajustements suivant à la représentation de l'économie décrite dans la partie I.

Il existe (m+n) biens. Les m premiers représentent les biens de consommation et ils sont produits à la fois par les producteurs privés et le producteur public.

Donc les échanges entre producteurs privés et public sont possibles.

Les n autres biens représentent les diverses qualités de travail que peuvent fournir les consommateurs.

Nous gardons par contre les mêmes hypothèses concernant les fonctions d'utilité, de production du secteur privé et de production du secteur public. De plus, maintenant le secteur de production privé se divisera en $\ell'$ producteurs privés tous repérés par un indice j.

B. Le contexte et l'équilibre keynésien

A quoi correspondra le contexte keynésien d'une telle économie.

1. Chaque consommateur i maximisera sa fonction d'utilité $u^i(X^i)$ étant donné ses contraintes budgétaires et de rationnement sur le marché du travail, c'est-à-dire $p'X^i \leq R^i$ et $X_2^i \leq \overline{X}_2^i$.

De ce programme il émettra les fonctions de demande suivantes :

$$X_1^i = f_1^i\ (p,\ R^i,\ X_2^i)$$

$$X_2^i = \overline{X}_2^i$$

La différentielle de ces fonctions s'écrit :

$$(1)\qquad dX_1^i = \frac{\partial X_1^i}{\partial p_1}\,dp_1 + \frac{\partial X_1^i}{\partial p_2}\,dp_2 + \frac{\partial X_1^i}{\partial X_2^i}\,dX_2^i + \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i}\,dR^i$$

Or en substituant les fonctions de demande dans la contrainte budgétaire on obtient $dR^i = p'dX^i + [X^i]'dp$. Substituons cette valeur dans (1). On trouve :

$$(1)\qquad dX_1^i = S_{11}^i\,dp_1 + S_{12}^i\,dp_2 + \tilde{R}_{12}^i\,dX_2^i + \overline{k}_1^i\,du^i/\lambda$$

où $S_{11}^i \equiv \dfrac{\partial X_1^i}{\partial p_1} + \dfrac{\partial X_1^i}{\partial R^i}\,[X_1^i]'$ est tel que

(P1) $\quad S_{11}^i \equiv [S_{11}^i]'$ $\qquad$ ceci est valide si on agrège les $S_{11}^i$.

(P2) $s^i_{12} \equiv [s^i_{22}]' \equiv 0$ où $s^i_{12} \equiv \dfrac{\partial x^i_1}{\partial p_2} + \dfrac{\partial x^i_1}{\partial R^i}[x^i_2]'$

(P3) $s^i_{11}\, p_1 \equiv 0$

(P4) $\zeta_4'\, s^i_{11}\, \zeta_4 < 0$ pour $\zeta_4 \neq \theta p_1$ , $\theta \in \mathbb{R}$

(P5) $p_1'\, \overline{k}^i_1 \equiv 1$ où $\overline{k}^i_1 \equiv \dfrac{\partial x^i_1}{\partial R^i}$

(P6) $p_1'\, R^i_{12} \equiv -p_2'$ où $R^i_{12} \equiv \dfrac{\partial x^i_1}{\partial x^i_2}$

$p_1'\, \tilde{R}^i_{12} \equiv -\tilde{p}^i_2$ où i) $\tilde{R}^i_{12} \equiv R^i_{12} - \overline{k}^i_1 [\tilde{p}^i_2 - p_2]'$

ii) $\tilde{p}^i_2$ représente le système prix qui dans un monde néoclassique permettrait au consommateur i de choisir librement $x^i_2$ $(=\overline{X}_2)$.

Ces propriétés s'interprètent exactement comme celles utilisées dans la partie I. C'est-à-dire :

i) par (P1) et (P3) à (P5) on retrouve une structure locale de Slutsky pour les biens non rationnés;

ii) par (P2) on conclut qu'il n'existe pas d'effet de substitution par les prix entre biens rationnés et non rationnés;

iii) par (P6) le lecteur remarque que nous n'avons pas imposé de schéma de rationnement a priori à notre consommateur. D'où que (P6) représente la valeur des effets de débordement pur associé à l'individu i.

2. Le producteur "j" maximise ses profits $p'y^j$ étant donné ses contraintes technologiques et de rationnement sur les biens "1", c'est-à-dire :

$$h^j(y^j) \leq 0$$
$$y_1^j = \bar{y}_1^j$$

De ce programme il émet une fonction d'offre :

$$y_1^j = \bar{y}_1$$
$$y_2^j = y_2^j\ (p, \bar{y}_1^j)$$

dont la différentielle

$$dy_1^j = d\bar{y}_1$$
$$dy_2^j = T_{21}^j\ dp_1 + T_{22}^j\ dp_2 + V_{21}^j\ dy_1^j$$

où $T_{21} = \dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}$ , $T_{22} = \dfrac{\partial y_2}{\partial p_2}$ et $V_{21} = \dfrac{\partial y_2}{\partial y_1}$

possède les propriétés suivantes :

(P7) $\quad T_{21}^j \equiv 0$

(P8) $\quad T_{22}^j \equiv [T_{22}^j]'$

(P9) $\quad T_{22}^j\ p_2 \equiv 0$

(P10) $\quad \zeta_5'\ T_{22}\ \zeta_5 > 0$ , pour $\zeta_5 \neq \theta p_2$ , $\theta \in \mathbb{R}$

(P11) $\quad p_1' \, V_{21}^j \equiv -\tilde{p}_1^j$ $\qquad$ où $\tilde{p}_1^j$ est le système qui permet au producteur j de choisir librement les quantités $y_1$ et $y_2$ dans un monde néoclassique.

Ces propriétés s'interprètent exactement comme celles développées dans la partie I.

3. Finalement le producteur public. On considèrera que celui-ci n'est pas rationné mais par contre il possède un système de prix qui le personnalise. Cette astuce permettra d'engendrer des résultats intéressants. (Nous y reviendrons).

Donc le producteur public émet la fonction d'offre suivante :

$$Z = Z(r)$$

dont la différentielle possède les propriétés suivantes :

$$dZ = Z \, dr \qquad \text{où} \qquad Z = \partial Z/\partial r \; .$$

(P12) $\quad Z \equiv Z'$

(P13) $\quad Zr \equiv 0$

(P14) $\quad \text{rang } Z = (n+m) - 1$ .

Notons qu'il est possible que $\zeta_6 \, Z \, \zeta_6 < 0$, c'est-à-dire que des rendements croissants à l'échelle caractérise notre producteur public. Intéressons-nous à la différentielle : $dZ = Z \, dr$.

Elle peut se réécrire en partitionnant convenablement Z :

i) $dZ_1 = \frac{\partial Z_1}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial Z_1}{\partial r_2} dr_2$

ii) $dZ_2 = \frac{\partial Z_2}{\partial r_1} dr_1 + \frac{\partial Z_2}{\partial r_2} dr_2$

Par (P14) on a que $\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}$ et $\frac{\partial Z_2}{\partial r_2}$ s'inversent. Alors i) peut se réécrire :

$$\left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1} dZ_1 = dr_1 + \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1} \frac{\partial Z_1}{\partial r_2} dr_2$$

d'où $dr_1 = \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1} dZ_1 - \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1} \frac{\partial Z_1}{\partial r_2} dr_2$

Substituons cette valeur dans ii) et on trouve :

iii) $dZ_2 = Z_{21}\, dZ_1 + Z_{22}\, dr_2$

où $Z_{21} \equiv \frac{\partial Z_2}{\partial r_1} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1}$

$Z_{22} \equiv \frac{\partial Z_2}{\partial r_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial r_1} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1} \frac{\partial Z_1}{\partial r_2}$

Notons que les coefficients de la différentielle iii) se comportent et s'interprètent exactement comme ceux qui auraient caractérisé un producteur public dans un contexte keynésien (c'est-à-dire rationné sur les marchés "1", $Z_1 = \overline{Z}_1$), d'où

(P15) $\quad Z_{22} \equiv [Z_{22}]'$

(P16) $\quad Z_{22}\ r_2 \equiv 0$

(P17) $\quad r_2'\ Z_{21} \equiv -r_1'$

Or de plus rien n'empêche d'isoler $dr_2$ dans l'équation ii) et de substituer cette valeur dans i).

On trouve alors en procédant comme auparavant :

iv) $dZ_1 = Z_{12}\ dZ_2 + Z_{11}\ dr_1$

où $$Z_{12} \equiv \frac{\partial Z_1}{\partial r_2}\left[\frac{\partial Z_2}{\partial r_2}\right]^{-1}$$

$$Z_{11} \equiv \frac{\partial Z_1}{\partial r_1} - \frac{\partial Z_1}{\partial r_2}\left[\frac{\partial Z_2}{\partial r_2}\right]^{-1}\frac{\partial Z_2}{\partial r_1}$$

sont tels que

(P18) $\quad Z_{11} \equiv [Z_{11}]'$

(P19) $\quad Z_{11}\ r_1 \equiv 0$

(P20) $\quad r_1'\ Z_{12} \equiv -r_2'$

iv) Peut s'interpréter comme si le producteur public pouvait discriminer par les prix ses deux clientèles, c'est-à-dire les entreprises privées et les consommateurs sur le marché du travail.

4. Equilibre keynésien : Les conditions d'équilibre pour chacun des marchés sont :

i) $\sum_i X_1^i = \sum_j y_1^j + Z_1$ marché des biens

ii) $\sum_i X_2^i = \sum_j X_2^j + Z_2$ marché du travail

Substituons dans ces conditions les hypothèses de comportement définit auparavant pour chaque agent :

iii) $\sum_i X_1^i(p, R^i, X_2^i) = \overline{y}_1 + Z_1$

iv) $\overline{X}_2 = \sum_j y_2^j(p, y_1^j) + Z_2$

Un équilibre keynésien correspond à une situation où le déséquilibre causé par des offres excédentaires sur tous les marchés se résorbe via une compensation sur les variables $X_2^i$ et $y_1^j$.

Imaginons une transformation marginale de cette économie qui préserve l'équilibre. Donc

$$\sum_i dX_1^i = \sum_j dy_1^j + dZ_1$$

$$\sum_i dX_2^i = \sum_j dy_2^j + dZ_2$$

En substituant les hypothèses de comportement de nos agents on retrouve :

v) $\sum_i [S_{11}^i \, dp_1 + \tilde{R}_{12}^i \, dX_2^i + \overline{k}_1^i \, du^i/\lambda] = dy_1 + dZ_1$

vi) $\quad dX_2 = \sum_j (T^j_{22}\, dp_2 + V^j_{21}\, dy^j_1) + dZ_2$

Introduisons de manière explicite des schémas de rationnement dans ces équations. Supposons que

1) $\quad dX^i_2 = \hat{\gamma}^i\, dX_2$

où $\hat{\gamma}^i$ est une matrice diagonale telle que $\sum_i \hat{\gamma}^i = I_2$.

En définissant

$$\dot{\tilde{R}}^i_{12} \equiv \tilde{R}^i_{12}\, \hat{\gamma}^i$$

on peut réécrire l'équation v)

$$\sum_i [S^i_{11}\, dp_1 + \dot{\tilde{R}}^i_{12}\, dX_2 + \bar{k}^i_1\, du^i/\lambda] = dy_1 + dZ_1$$

2) Faisons de même pour les producteurs j.

$$dy_1 = \hat{\gamma}^j\, dy_1$$

où $\hat{\gamma}^j$ est une matrice diagonale telle que $\sum_j \hat{\gamma}^j = I_1$.

En définissant $\dot{V}^j_{21} \equiv V^j_{21}\, \hat{\gamma}^j$ , on réécrit vi)

$$dX_2 = \sum_j (T^j_{22}\, dp_2 + \dot{V}^j_{21}\, dy_1) + dZ_2$$

En agrégeant sur i et j les conditions v) et vi) on trouve en posant $du^i/\lambda = 0$ (en cherchant l'optimum) :

vii) $\quad S_{11}\, dp_1 + \dot{\tilde{R}}_{12}\, dX_2 = dy_1 + dZ_1$

viii) $\quad dX_2 = T_{22}\, dp_2 + \dot{V}_{21}\, dy_1 + dZ_2$

or on a vu précédemment que le producteur public se comportait comme s'il

i) pouvait discriminer par les prix pour les biens "2";

ii) était rationné sur le marché des biens "1".

Alors :

ix) $\quad dZ_1 = Z_{12}\, dZ_2 + Z_{11}\, dr_1$

x) $\quad dZ_2 = Z_{21}\, dZ_1 + Z_{22}\, dr_2$

Maintenant on substituera les conditions d'équilibre vii) et viii) soit dans ix) soit dans x).

1) Commençons par la première. On obtient

$$S_{11}\, dp_1 + \dot{\tilde{R}}_{12}\, dX_2 - dy_1 = Z_{12}\, [dX_2 - T_{22}\, dp_2 - \dot{V}_{21}\, dy_1] + Z_{11}\, dr_1$$

$$S_{11}\, dp_1 + [\dot{\tilde{R}}_{12} - \dot{Z}_{12}]\, dX_2 + Z_{12}\, T_{22}\, dp_2 - Z_{11}\, dr_1 = [I - Z_{12}\, \dot{V}_{21}]\, dy_1$$

d'où que $\left.\dfrac{dy_1}{dp_2}\right|_{\substack{dr_1=0\\ dX_2=0\\ dp_1=0}} = M^{-1}\, Z_{12}\, T_{22}$

où $M^{-1} = [I - \dot{Z}_{12}\, \dot{Y}_{21}]^{-1}$ est le multiplicateur de production des biens "1".

2) Si on substitue vii) et viii) dans x) on trouve

$$dX_2 - T_{22}\, dp_2 - \dot{V}_{21}\, dy_1 = Z_{21}\, [S_{11}\, dp_1 + \dot{\tilde{R}}_{12}\, dX_2 - dy_1] + Z_{22}\, dr_2$$

$$[I - Z_{21}\, \dot{\tilde{R}}_{12}]\, dX_2 = Z_{21}\, S_{11}\, dp_1 + T_{22}\, dp_2 + (V_{21} - Z_{21})\, dy_1 + Z_{22}\, dr_2$$

d'où que $$\left.\frac{dX_2}{dp_1}\right|_{\substack{dr_2=0\\ dp_2=0\\ dy_1=0}} = \tilde{M}^{-1}\, \dot{Z}_{21}\, S_{11}$$

où $\tilde{M}^{-1} = [I - Z_{21}\, \dot{\tilde{R}}_{12}]^{-1}$ est le multiplicateur d'emploi.

Interprétons brièvement ces résultats :

a) $\dfrac{dy_1}{dp_2} = M^{-1}\, Z_{12}\, T_{22}$

pour mesurer l'effet d'une politique économique sur les salaires ($dp_2$) s'adressant essentiellement aux producteurs privés;

b) $\dfrac{dX_2}{dp_1} = \tilde{M}^{-1}\, Z_{21}\, S_{11}$

mesure l'impact d'une politique de prix ($dp_1$) sur l'emploi.

C. Caractérisation de l'optimum

Caractérisation de l'optimum d'une économie soumise à l'équilibre budgétaire du secteur public dans un contexte keynésien.

On minimisera la fonction suivante :

$$L\ (p,\ R^i,\ X_2^i,\ y_1^j,\ r;\ \lambda^i,\ \pi_1,\ \pi_2,\ \psi) = \sum_i \lambda^i\ V^i\ [p,\ R^i,\ X_2^i]$$

$$-\pi_1'\ [\sum_i X_1^i\ (p,\ R^i,\ X_2^i) - \sum_j y_1^j - Z_1(r)]$$

$$-\pi_2'\ [\sum_i X_2^i - \sum_j y_2^j\ (p,\ y_1^j) - Z_2(r)]$$

$$-\ \psi\ [p_1'\ Z_1 + \rho\ p_2'\ Z_2 - \beta\ W_1'\ p_1]$$

où $\rho = \frac{W_1'\ p_1}{W_2'\ p_2}$ est un taux de change qui permet de comparer deux unités de compte et de définir la contrainte de Boiteux en terme réel. Par exemple si les prix $p_1$ sont multipliés par dix, alors la contrainte de Boiteux est également multipliée par dix. De plus, comme nous l'avons démontré chez Drèze il était impossible de définir une tarification optimale pour les salaires ($p_3$) car le problème était mal posé.

Par contre, l'introduction d'un taux de change ($\rho$) permettra de résoudre ce problème. En effet il sera possible de dériver par rapport au prix $p_2$.

Les conditions du premier ordre sont donc :

$$(1)\quad L_{p_1} = \sum_i \lambda^i\ [V_{p_1}^i]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_1} + \pi_2' \sum_j \frac{\partial y_2^j}{\partial p_1} - \psi \left[Z_1' + \frac{W_1'}{W_2'\ p_2}\ p_2'\ Z_2 - \beta\ W_1'\right] = 0$$

$$(2)\quad L_{p_2} = \sum_i \lambda^i\ [V_{p_2}^i]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_2} + \pi_2' \sum_j \frac{\partial y_2^j}{\partial p_2} - \psi \left[-\frac{W_2'}{(W_2'\ p_2)^2}\ W_1' p_1\ \ p_2' Z_2 + \rho\ Z_2'\right] = 0$$

$$(3)\quad L_{R^i} = \lambda^i\ V_{R^i}^i - \pi_1'\ \frac{\partial X_1^i}{\partial R^i} = 0 \qquad \forall i$$

$$(4) \quad L_{X_2^i} = \lambda^i \, [V^i_{X_2^i}]' - \pi_1' \frac{\partial X_1^i}{\partial X_2^i} - \pi_2' = 0 \qquad \forall i$$

$$(5) \quad L_{Y_1^j} = \pi_1' + \pi_2' \frac{\partial y_2^j}{\partial y_1^j} = 0 \qquad \forall j$$

$$(6) \quad L_R = (\pi_1' - \psi \, p_1' \, , \, \pi_2' - \psi \, \rho \, p_2') \, Z = 0$$

Si on définit $\dfrac{p_2' \, Z_2}{W_2' \, p_2} \equiv \beta_2$ et $\beta_1 = \beta - \beta_2$ alors les équations (1) et (2) se réécrivent :

$$(1') \quad L_{p_1} = \sum_i \lambda^i \, [V^i_{p_1}]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_1} + \pi_2' \sum_j \frac{\partial y_2^j}{\partial p_1} - \psi \, [Z_1 - \beta_1 \, W_1]' = 0$$

$$(2') \quad L_{p_2} = \sum_i \lambda^i \, [V^i_{p_2}]' - \pi_1' \sum_i \frac{\partial X_1^i}{\partial p_2} + \pi_2' \sum_j \frac{\partial y_2^j}{\partial p_2} - \psi \, [\rho \, Z_2 - \rho \, \beta_2 \, W_2]' = 0$$

Considérons maintenant les manipulations suivantes :

i) $\quad (1) + \sum_i (3) [X_1^i]'$

on trouve, par les identités de Roy et par $T^j_{21} \equiv 0$ que :

$$(7) \qquad \pi_1' \, S_{11} = -\psi \, [Z_1 - \beta_1 \, W_1]'$$

ii) $\quad (2) + \sum_i (3) [X_2^i]'$

conduit à

$$(8) \qquad \pi_2' \, T_{22} = \psi \, [\rho \, Z_2 - \rho \, \beta_2 \, W_2]'$$

car $S^i_{12} \equiv 0$.

iii) $\sum_i [④ - ③ [\tilde{p}_2^i - p_2]' \ \hat{\gamma}^i]$

nous mène à

(9) $\pi_1' \dot{\hat{R}}_{12} + \pi_2' = 0$

iv) $\sum_j ⑤ \hat{\gamma}^j$

donne

(10) $\pi_1' + \pi_2' \dot{V}_{21} = 0$

v) Finalement de (6) on peut conclure par les propriétés (P13) à (P14) que comme le noyau de Z est engendré par le vecteur r, alors il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

(11) $\pi_1' = \psi \, p_1' + \theta \, r_1'$

(12) $\pi_2' = \rho \, \psi \, p_2' + \theta \, r_2'$

Sachant par les propriétés (P17) et (P20) que :

(P17) $r_1' \equiv -r_2' \, Z_{21}$

(P20) $r_2' \equiv -r_1' \, Z_{12}$

Alors considérons les opérations suivantes ;

a) $(11) \times -Z_{12} \Rightarrow -\pi_1' \, Z_{12} = -\psi \, p_1' \, Z_{12} - \theta \, r_1' \, Z_{12}$

par (P20)

$$-\pi_1' \, Z_{12} + \psi \, p_1' \, Z_{12} = \theta \, r_2'$$

Substituons cette valeur de $\theta\ r_2'$ dans (12) on trouve :

$$\pi_2' = \rho\ \psi\ p_2' - \pi_1'\ Z_{12} + \psi\ p_1'\ Z_{12}$$

(13) $$\pi_2' = -\pi_1'\ Z_{12} + \psi\ [\rho\ p_2 - m_2]'$$

où $m_2' \equiv -p_1'\ Z_{12}$ est la productivité marginale du travail évaluée dans le système de prix à la consommation.

On peut procéder de la même façon avec l'équation (12), d'où :

$$(12) \times -Z_{21} \Rightarrow -\pi_2'\ Z_{21} = -\rho\ \psi\ p_2'\ Z_{21} - \theta\ r_2'\ Z_{21}$$

par (P17) $$-\pi_2'\ Z_{21} + \rho\ \psi\ p_2'\ Z_{21} = \theta\ r_1'$$

En substituant cette valeur de $\theta\ r_1'$ dans l'équation (11) on trouve :

$$-\pi_2'\ Z_{21} + \rho\ \psi\ p_2'\ Z_{21} = \pi_1' - \psi\ p_1'$$

(14) $$\pi_1' = -\pi_2'\ Z_{21} + \psi\ [p_1 - \rho\ m_1]'$$

où $m_1' \equiv -p_2\ Z_{21}$ est le vecteur des coûts marginaux du secteur public évalué dans le système de prix à la consommation.

On obtient donc les six équations suivantes :

(7) $$\pi_1'\ S_{11} = -\psi\ [Z_1 - \beta_1\ W_1]'$$

(9) $$\pi_1'\ \dot{\tilde{R}}_{12} + \pi_2' = 0$$

(14) $$\pi_1' = -\pi_2'\ Z_{21} + \psi\ [p_1 - \rho\ m_1]'$$

(8) $\pi_2' \, T_{22} = \psi \, [\rho \, Z_2 - \rho \, \beta_2 \, W_2]'$

(10) $\pi_1' + \pi_2' \, \dot{V}_{21} = 0$

(13) $\pi_2' = -\pi_1' \, Z_{12} + \psi \, [\rho \, p_2 - m_2]'$

Les trois premières serviront à caractériser le comportement du secteur public envers les consommateurs. Les trois autres permettront de définir un comportement optimal du secteur public envers les producteurs privés.

Analysons les trois premières à l'aide de la méthodologie développée par Drèze.

Donc substituons (14) dans (9) et (7) respectivement on trouve :

i) (15) $\pi_2' \, [I - Z_{21} \, \dot{\tilde{R}}_{12}] = -\psi \, [p_1 - \rho \, m_1]' \, \dot{\tilde{R}}_{12}$

(16) $\pi_2' = -\psi \, [p_1 - \rho \, m_1]' \, \dot{\tilde{R}}_{12} \, \tilde{M}^{-1}$

où $\tilde{M}^{-1} = [I - Z_{21} \, \dot{\tilde{R}}_{12}]^{-1}$

ii) (17) $-\pi_2' \, Z_{21} \, S_{11} = -\psi \, [(Z_1 - \beta_1 \, W_1)' + (p_1 - \rho \, m_1)' \, S_{11}]$

Substituons (16) dans (17) :

$$\psi \, [p_1 - \rho \, m_1]' \, \dot{\tilde{R}}_{12} \, \tilde{M}^{-1} \, Z_{21} \, S_{11} = -\psi \, [(Z_1 - \beta_1 \, W_1)' + (p_1 - \rho \, m_1)' \, S_{11}]$$

d'où

(18) $$0 = -\psi \left[ (Z_1 - \beta_1 \, W_1)' + (p_1 - \rho \, m_1)' \left( S_{11} + \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{dX_2}{dp_1} \right) \right]$$

$$\frac{dX_2}{dp_1} = \tilde{M}^{-1} Z_{21} S_{11} , \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} dr_2=0 \\ dp_2=0 \\ dy_1=0 \end{array}$$

Si on rajoute à (18) les identités suivantes :

(19) $$(Z_1 - \beta_1 W_1)' \equiv (Z_1 - \beta_2 W_1)'$$

(20) $$(p_1 - \rho m_1)' \left(S_{11} + \tilde{R}_{12} \frac{dX_2}{dp_1}\right) \equiv [\rho p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

(Preuve voir annexe III)

On trouve alors

(21) $$\phi \left[(Z_1 - \beta_1 W_1)' + (p_1 - \rho m_1)' \left(S_{11} + \tilde{R}_{12} \frac{dX_2}{dp_1}\right)\right] =$$

$$(Z_1 - \beta_1 W_1)' + (\rho p_2 - \tilde{p}_2)' \frac{dX_2}{dp_1}$$

où $\phi = 1-\psi$ .

Avant d'interpréter (21), analysons de la même façon les équations (8), (10) et (13). C'est-à-dire substituons (13) dans (10) et (8) respectivement. On trouve alors :

i) (22) $$\pi_1' [I - Z_{12} \dot{V}_{21}] = -\psi [\rho p_2 - m_2]' \dot{V}_{21}$$

(23) $$\pi_1' = -\psi [\rho p_2 - m_2]' \dot{V}_{21} M^{-1}$$

où $M^{-1} = [I - Z_{12} \dot{V}_{21}]^{-1}$.

ii) Par (13) et (8) on obtient :

$$(24) \qquad -\pi_1' Z_{12} T_{22} = \psi [(\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (\rho p_2 - m_2)' T_{22}]$$

Substituons (23) dans (24)

$$\psi [\rho p_2 - m_2]' \dot{V}_{21} M^{-1} Z_{12} T_{22} = \psi [(\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (\rho p_2 - m_2)' T_{22}]$$

$$(25) \qquad 0 = -\psi \left[ (\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (\rho p_2 - m_2)' \left( T_{22} + \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \right) \right]$$

où $\frac{dy_1}{dp_2} = M^{-1} Z_{12} T_{22}$ lorsque $dr_1 = 0$, $dX_2 = 0$, $dp_1 = 0$

Si on rajoute à (25) les identités suivantes :

$$(26) \qquad \begin{aligned} &(\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' \equiv (\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' \\ &-(\rho p_2 - m_2)' \left( T_{22} + \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \right) \equiv -(p_1 - \rho \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2} \end{aligned}$$

(Preuve voir annexe IV)

on obtient

$$(27) \qquad \phi \left[ (\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (\rho p_2 - m_2)' \left( T_{22} + \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \right) \right] = (\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (p_1 - \rho \tilde{p}_1) \frac{dy_1}{dp_2}$$

où $\phi = (1-\psi)$.

Considérons les résultats :

$$(21) \quad \phi\left[(Z_1 - \beta_1 W_1)' + (p_1 - \rho m_1)'\left(S_{11} + \dot{\tilde{R}}_{12}\frac{dX_2}{dp_1}\right)\right] = (Z_1 - \beta_1 W_1)' + (\rho p_2 - \tilde{p}_2)'\frac{dX_2}{dp_1}$$

$$(27) \quad \phi\left[(\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (\rho p_2 - m_2)'\left(T_{22} + \dot{V}_{21}\frac{dy_1}{dp_2}\right)\right] = (\rho Z_2 - \rho \beta_2 W_2)' - (p_1 - \rho \tilde{p}_1)'\frac{dy_1}{dp_2}$$

où $\phi = 1-\psi$ .

On peut interpréter chacun de ces résultats en termes d'analyse avantage-coût.

Par exemple (21) représente la caractérisation optimale du comportement du secteur public envers les consommateurs. On retrouve dans le crochet de gauche le revenu marginal généralisé du secteur public suite à un changement dans les prix du biens "1". Ce revenu marginal se décompose en deux termes :

i) un revenu direct provenant de la vente des biens "1" : $(Z_1 - \beta_1 W_1)$;

ii) un revenu indirect provenant du surplus généré par le changement du prix des biens "1".

Ce surplus correspond à un effet prix compensé $(p_1 - \rho m_1)' S_{11}$ et à l'effet de débordement du marché du travail sur le marché des biens de consommation suite à un changement du niveau global de l'emploi $(p_1 - \rho m_1)' \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{dX_2}{dp_1}$ .

Par contre le crochet de droite représente le coût marginal généralisé pour les agents privés. Ce coût se décompose en deux effets :

i) un coût direct provenant de l'achat des biens "1" : $(Z_1 - \beta_1 W_1)$;

ii) un coût associé au fait que les consommateurs sont en déséquilibre sur le marché du travail $(\rho\, p_2 - p_2)' \dfrac{dX_2}{dp_1}$. Ce coût dépend de l'ampleur de l'écart entre les taux de salaire qui égaliserait l'offre et la demande de travail dans un monde néoclassique $(\tilde{p}_2)$ et les taux de salaire présentement en vigueur dans un contexte keynésien $(\rho\, p_2)$.

Notons qu'à l'optimum il existe un scalaire $\phi = 1-\psi$ qui pondère le revenu marginal du secteur public de manière à ce qu'il soit égal au coût marginal attribué au consommateur.

L'équation (27) possède une signification économique similaire à (21).

En effet elle représente la caractérisation optimale du comportement du secteur public envers les producteurs privés. On retrouve dans le crochet de gauche le coût marginal social du secteur public. Ce coût se décompose en deux termes :

i) le coût associé au paiement des salaires $[\rho\, Z_2 - \rho\, \beta_2\, W_2]$;

ii) le coût provenant du changement dans le niveau global de l'emploi du secteur privé (étant donné un changement $(dp_2)$ des taux de salaire).

Par contre le terme de droite représente le revenu marginal associé à un changement des prix $p_2$. Il se décompose en :

i) le revenu provenant de l'emploi $\rho(Z_2 - \beta_2\, W_2)'$;

ii) auquel on soustrait le coût aux producteurs privés d'être en déséquilibre sur le marché des biens "1", c'est-à-dire l'écart entre $p_1$ et $\rho\, \tilde{p}_1$.

A l'optimum le scalaire $\phi = 1-\psi$ joue toujours le rôle de pondérateur qui ajuste le coût marginal social au revenu marginal social.

# PARTIE III

## Conclusion

On divisera cette partie en trois sections :

a) on montrera que le résultat de Drèze est un cas particulier des équations (21) et (27);

b) on reprendra la discussion concernant la critique faite dans la partie I;

c) à l'aide d'un modèle simple on étudiera les divers résultats pouvant être engendrés par les méthodologies appliquées au modèle de second rang.

## A. Montrer que le modèle de la partie I est un cas particulier de celui présenté dans la partie II

Comment retrouver le modèle de Drèze? Pour nous faciliter la tâche, on partitionnera tous les vecteurs associés aux biens "1" de la manière suivante :

$$X_1 = \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$$

De plus, on considèrera les prix des biens "2" comme fixes.

Donc la formule (27) disparaît puisque l'on ne dérive plus par rapport aux biens "2". Par contre la formule (21) peut se réécrire :

$$\phi \left\{ [Z_a - \beta_a W_a), (Z_b - \beta_b W_b)]' + [(p_a - \rho m_a), (p_b - \rho m_b)]' \left[ \begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \begin{pmatrix} \dot{\tilde{R}}_{a2} \\ \dot{\tilde{R}}_{b2} \end{pmatrix} \left( I - (Z_{2a}, Z_{2b}) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{R}}_{a2} \\ \dot{\tilde{R}}_{b2} \end{pmatrix} \right)^{-1} (Z_{2a}, Z_{2b}) \begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} \right] \right\} =$$

$$\left[ [(Z_a - \beta_a W_a), (Z_b - \beta_b W_b)]' + (\rho p_2 - \tilde{p}_2)' \left( I - (Z_{2a}, Z_{2b}) \begin{pmatrix} \dot{\tilde{R}}_{a2} \\ \dot{\tilde{R}}_{2b} \end{pmatrix} \right)^{-1} \right.$$

$$\left. (Z_{2a}, Z_{2b}) \begin{pmatrix} S_{aa} & S_{ab} \\ S_{ba} & S_{bb} \end{pmatrix} \right]$$

Si de plus on considère les prix des biens "A" comme fixes alors on ne dérive plus par rapport à $p_a$. Alors cette formule se ramène à

$$\phi \left\{ (Z_b - \beta_b W_b)' + [(p_a - \rho m_a), (p_b - \rho m_b)]' \left[ \begin{pmatrix} S_{ab} \\ S_{bb} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\tilde{R}}_{a2} \\ \dot{\tilde{R}}_{b2} \end{pmatrix} \right.\right.$$

$$\left.\left. (I - Z_{2a} \dot{\tilde{R}}_{a2} - Z_{2b} \dot{\tilde{R}}_{b2})^{-1} (Z_{2a} S_{ab} + Z_{2b} S_{bb}) \right] \right\} =$$

$$[(Z_b - \beta_b W_b)' + (\rho p_2 - \tilde{p}_2)' (I - Z_{2a} \dot{\tilde{R}}_{a2} - Z_{2b} \dot{\tilde{R}}_{b2})^{-1} (Z_{2a} S_{ab} + Z_{2b} S_{bb})]$$

Or le terme $\phi [(p_a - \rho m_a)' (S_{ab} + R_{a2} (I - Z_{2a} \dot{\tilde{R}}_{a2} - Z_{2b} \dot{\tilde{R}}_{b2})^{-1}$ $(Z_{2a} S_{ab} + Z_{2b} S_{bb}))] = (p_a - \rho m_a)' (S_{ab} + \dot{\tilde{R}}_{a2} (I - Z_{2a} \dot{\tilde{R}}_{b2})^{-1}$ $(Z_{2a} S_{ab} + Z_{2b} S_{bb}))$, car si les biens "b" représentent les biens produits par le secteur public (les biens "2" dans le modèle de Drèze) et que les biens "a" correspondent aux biens produits par le secteur privé (les biens "1" du modèle de Drèze). Alors la contrainte de Boiteux s'écrit :

$$p_b' \; Z_b \; (r_b, \; r_2) + \rho \; p_2' \; Z_2 \; (r_b, \; r_2) = \beta \; W_b' \; p_b$$

et l'on retombe tout simplement sur le modèle de Drèze (preuve voir le modèle présenté dans la partie I).

Il suffit de réécrire le résultat obtenu sous la forme suivante :

$$\phi \left\{ (Z_b - \beta_b \; W_b)' + (p_b - \rho \; m_b)' \left( S_{bb} + \dot{\tilde{\tilde{R}}}_{b2} \frac{dX_2}{dp_b} \right) \right\} =$$

$$(Z_b - \beta_b \; W_b)' - (p_a - \rho \; m_a)' \left( S_{ab} + \dot{\tilde{R}}_{a2} \frac{dX_2}{dp_b} \right) + (\rho \; p_2 - \tilde{p}_2)' \frac{dX_2}{dp_b}$$

où $\frac{dX_2}{dp_b} = \tilde{M}^{-1} \; (Z_{2a} \; S_{ab} + Z_{2b} \; S_{bb})$, $\tilde{M}^{-1} = [I - Z_{2a} \; \dot{\tilde{R}}_{a2} - Z_{2b} \; \dot{\tilde{R}}_{b2}]^{-1}$.

Donc le modèle de Drèze est bien un cas particulier de ce modèle car il suffit de :

1. partitionner les biens "1" en deux sous-groupes;
2. considérer comme exogène les prix $p_a$ et $p_2$;
3. interpréter les biens "A" comme ceux produits par le secteur de production privé, les biens "b" correspondent au bien produit par le secteur public et les biens "2" représentent les diverses qualités de travail.

Par contre, en général on ne fera pas ces hypothèses, ce qui permettra de définir deux caractérisations optimales qui correspondent soit au consommateur soit au producteur privé.

B. Critique du modèle

Nous avions vu dans la partie I qu'il était impossible de caractériser une politique de prix optimale sur le marché du travail. Nous avions conclu que le modèle de Drèze était mal posé car la contrainte de l'entreprise public astreinte à l'équilibre budgétaire n'était pas exprimée en terme réel. On a donc introduit un taux de change ($\rho$) qui permettait de préserver l'homogénéité dans les prix de la contrainte de Boiteux. En fait, ce taux de change fait le lien entre deux systèmes de prix différents. Il permet d'additionner des "oranges" avec des "oranges". On a vu que la formule (12) dans la partie I ne permettait pas de mesurer l'écart optimal entre les systèmes de prix $\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$ . On peut appliquer cette même critique aux caractéristiques (21) et (27). En effet, on ne peut rien conclure, en lisant directement les formules (21) et (27), sur ce que doit être les écarts optimaux entre les deux systèmes de prix p et r. Par contre, il serait facile de définir ces écarts puisque le modèle utilisé correspond à celui développé dans l'article "Second rang et déséquilibre" où justement un des buts de l'article était de caractériser ces écarts. En d'autres mots, les formules (21) et (27) ont une intéressante signification économique en terme d'analyse avantage-coût, mais par contre elles n'ont pas la qualité de présenter directement la tarification optimale.

On peut également reprocher aux formules (21) et (27) leur manque de souplesse à ce qui a trait à l'étude de certaines éventualités. Par exemple si on reprend l'équation (15) de la partie II :

(15) $\pi_2' \, [I - Z_{21} \, \dot{\tilde{R}}_{12}] = -\psi \, [p_1 - \rho \, m_1]' \, \dot{\tilde{R}}_{12}$

$$\pi_2' \, \tilde{M} = -\psi \, [p_1 - \rho \, m_1]' \, \dot{\tilde{R}}_{12}$$

On voit que $\tilde{M}^{-1}$ existe à la condition que $\psi \neq 0$ et $p_1 \neq \rho \, m_1$.

Donc si on pose directement $p_1 = \rho \, m_1$ dans l'équation (21), alors on ne peut rien conclure car le terme $dX_2/dp_1 = \tilde{M}^{-1} \, Z_{21} \, S_{11}$ n'est plus défini. ($\tilde{M}^{-1}$ n'existe pas).

Il est pertinent de noter que le multiplicateur $\tilde{M}$ est une certaine évaluation de la perte sociale attribuée :

i) à la contrainte de Boiteux ($\psi \neq 0$);

ii) à l'existence d'un écart entre les taux marginaux de substitution et les taux marginaux de transformation ($p_1 \neq \rho \, m_1$) causé par les rationnements sur les marchés du travail et des biens.

Un autre problème que nous avions relevé dans la partie I concernait le fait que dans le modèle de Drèze il n'existait pas d'échanges commerciaux entre les producteurs privé et public. En postulant dans la partie II que tous les producteurs produisaient les mêmes biens on résout cette ambiguïté.

C. Discussion sur les différentes méthodologies appliquées au modèle de second rang

Etudions maintenant, à l'aide d'un modèle simple, les différents résultats pouvant être engendrés par les diverses méthodologies appliquées au modèle de second rang.

Considérons le modèle de Boiteux suivant : (celui-ci est simplifié et transformé pour les besoins de la cause). On minimise :

$$(1) \quad L(p, R^i, r; \lambda^i, \pi, \psi) = \sum_i \lambda^i v^i (p, R^i)$$
$$- \pi' [\sum_i X^i (p, R^i) - Z(r)]$$
$$- \psi \; [p_1' Z_1(r) + \rho \, q_2' Z_2(r) - \beta \, W_1' p_1]$$

où i) $q_2$ est un système de prix (pour les diverses qualités de travail) exogène au modèle;

ii) $\rho = \dfrac{W_1' p_1}{W_2' q_2}$ est un "taux de change" entre les systèmes de prix p et q.

La simplification par rapport à Boiteux est l'absence de producteurs privés. Tandis que la transformation concerne la contrainte du secteur public.

N.B. : a) $\dfrac{\partial \rho}{\partial p_1} = \dfrac{W_1'}{W_2' p_2}$ d'où que $\dfrac{\partial \rho}{\partial p_1} p_1 = \rho$

b) $\dfrac{\partial \rho}{\partial q_2} = - \dfrac{\rho \, W_2'}{W_2' q_2}$ d'où que $\dfrac{\partial \rho}{\partial q_2} q_2 = -\rho$ .

Toujours pour fins d'uniformisation, on utilisera :

c) $\beta_2 = \dfrac{q_2' Z_2}{W_2' q_2}$ et $\beta_1 = \beta - \beta_2$

La caractérisation brute de l'optimum :

$$(2) \quad L_p = \sum_i \lambda^i \left[\frac{\partial v^i}{\partial p}\right]' - \pi' \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial p} - \psi \left[Z_1' + \frac{q_2' \, Z_2 \, W_1'}{W_2' \, q_2} - \beta \, W_1'\right] \frac{\partial p_1}{\partial p} = 0$$

$$(2') \quad L_p = \sum_i \lambda^i \left[\frac{\partial v^i}{\partial p}\right]' - \pi' \frac{\partial X}{\partial p} - \psi \, [Z_1' - \beta_1 \, W_1', \, 0] = 0$$

$$(3) \quad L_{R^i} = \lambda^i \frac{\partial v^i}{\partial R^i} - \pi' \frac{\partial X^i}{\partial R^i} = 0$$

$$(4) \quad L_r = \pi' \frac{\partial Z}{\partial r} - \psi \, [p_1', \, \rho \, q_2'] \frac{\partial Z}{\partial r} = 0$$

## SECTION 1 : La version de Boiteux

A l'aide de cette méthodologie, on caractérise l'optimum de l'économie décrite ci-dessus en tenant compte que :

i) les prix égalisent l'offre et la demande sur chacun des marchés ce qui correspond à l'équilibre walrasien;

ii) dans ce cas, si la réalité correspond à une telle économie, alors les concepts observables seront :

a) la matrice de Slutsky (K);

b) le niveau de la taxation (p-r).

Développons cette méthodologie.

Considérons la manipulation suivante :

$$2' + \sum_i 3 \, [X^i]'$$

Alors par les identités de Roy, on trouve :

$$(5) \qquad - \pi' \; K = \psi \; [Z_1' - \beta_1 \; W_1', \; 0]$$

où $K \equiv \frac{\partial X}{\partial p} + \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial R^i} \, [X^i]'$.

En transposant on trouve :

$$(6) \qquad - K \; \pi = \psi \begin{bmatrix} Z_1 - \beta_1 \; W_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il suffit maintenant d'éliminer $\pi$. Par (4) on trouve :

$$(7) \qquad \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} - \psi \begin{bmatrix} p_1 \\ \rho \; q_2 \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

étant donné les propriétés de $\partial Z / \partial r$.

D'où $\frac{\pi}{\theta} = \frac{\psi}{\theta} \begin{bmatrix} p_1 \\ \rho \; q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$

Substituons cette valeur dans (6) :

$$(8) \qquad - K \frac{\psi}{\theta} \begin{bmatrix} p_1 \\ \rho \; q_2 \end{bmatrix} - K \; r = \frac{\psi}{\theta} \begin{bmatrix} Z_1 - \beta_1 \; W_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou bien

$$(9) \qquad K \; [p - r] = \frac{\psi}{\theta} \left[ \begin{pmatrix} Z_1 - \beta_1 \; W_1 \\ 0 \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} p_1 \\ \rho \; q_2 \end{pmatrix} \right]$$

puisque $K \; p \equiv 0$.

Voilà donc la caractérisation finale de Boiteux.

## SECTION II : La version Ramsay-Hotelling revue par Bronsard ou Le retour dans l'espace primal[1]

En étudiant toujours une économie régie par un équilibre walrasien, on caractérisera, à l'aide de cette méthodologie, le système de prix à la production du secteur public, c'est-à-dire r.

On trouvera qu'à l'optimum r est égal à la recette marginal de compromis que retire le producteur public à partir de l'utilisation partielle $(\psi/\theta)$ de son pouvoir de monopole.

Développons cette méthode. Soit $W^* = \begin{bmatrix} W_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . En définissant l'inverse g-réflexive de K comme étant H alors il est logique d'utiliser le vecteur de poids W* pour définir l'unité de compte. On a donc :

$$HK = I - \frac{p\,[W^*]}{W_1'\,p_1}$$

Prémultiplions (9) par H, on aura, en normalisant r de sorte que $[W^*]'\,r = [W^*]'\,p = W_1\,p_1$ :

$$(10) \qquad p - r = \frac{\psi}{\theta} H \begin{bmatrix} Z_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\psi}{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\,q_2 - p_2 \end{bmatrix}$$

car $H\,W^* \equiv 0$ implique $[W_1', 0]\,H \equiv 0$.

D'où

$$(10') \qquad p_1 - r_1 = \frac{\psi}{\theta} H_{11}\,Z_1$$

$$(10'') \qquad p_2 - r_2 = \frac{\psi}{\theta} H_{21}\,Z_1 + \frac{\psi}{\theta} [\rho\,q_2 - p_2]$$

[1]Afin de mieux comprendre les propriétés utilisées, voir l'article "Second rang et déséquilibre" de Bronsard-Wagneur.

ou encore

$$(11) \qquad \begin{cases} r_1 = p_1 - \frac{\psi}{\theta} H_{11} Z_1 \\ r_2 = \left(1 + \frac{\psi}{\theta}\right) p_2 - \frac{\psi}{\theta} [\rho\, q_2 + H_{21} Z_1] \end{cases}$$

SECTION III : La réinterprétation de Bronsard-Wagneur

Les relations (9) ainsi que les conditions d'équilibre X = Z sont l'équivalent néoclassique d'un équilibre keynésien optimal. On pourrait transformer (9) en K-caractérisation mais il est plus facile de repartir des relations brutes (6). Donc si on admet que :

i) les consommateurs se trouvent rationnés sur le marché du travail (bien 2);

ii) les producteurs sont rationnés sur le marché des biens de consommation (bien 1).

Alors on se retrouve dans une situation qui correspond à un équilibre keynésien.

Les concepts observables seront donc :

a) la matrice des effets de substitution chez les biens non rationnés. ($S_{11}$ qui possède une structure locale de Slutsky);

b) la taxation optimale chez les biens 1 ($p_1 - r_1$);

c) la matrice des effets de débordement du marché du travail sur le marché des biens 1.

Développons cette méthode. On peut réécrire (6) de la manière suivante :

$$(12) \qquad \begin{cases} -K_{11}\ \pi_1 - K_{12}\ \pi_2 = \quad [Z_1 - \beta_1\ W_1] \\ -K_{21}\ \pi_1 - K_{22}\ \pi_2 = 0 \end{cases}$$

comme $K_{22}$ s'inverse on trouve alors que

$$K_{22}^{-1}\ K_{21}\ \pi_1 + \pi_2 = 0$$

et par substitution

$$-K_{11}\ \pi_1 + K_{12}\ K_{22}^{-1}\ K_{21}\ \pi_1 = \psi\ [Z_1 - \beta_1\ W_1]$$

que l'on note :

$$(13) \qquad \begin{cases} \tilde{R}'_{12}\ \pi_1 + \pi_2 = 0 \\ -S_{11}\ \pi_1 = \psi\ [Z_1 - \beta_1\ W_1] \end{cases}$$

Or par (7)

$$\pi_1 = \psi\ p_1 + \theta\ r_1$$

$$\pi_2 = \rho\ \psi\ q_2 + \theta\ r_2$$

Substituons dans (13)

$$\tilde{R}'_{12}\ (\psi\ p_1 + \theta\ r_1) + \psi\ \rho\ q_2 + \theta\ r_2 = 0$$

$$-\psi\ \tilde{p}_2 + \theta\ \tilde{R}'_{12}\ r_1 + \psi\ \rho\ q_2 + \theta\ r_2 = 0$$

$$(14) \qquad \tilde{R}'_{12}\ r_1 + r_2 = \frac{\psi}{\theta}\ [\tilde{p}_2 - \rho\ q_2]$$

et

$$-S_{11}\ [\psi\ p_1 + \theta\ r_1] = \psi\ [Z_1 - \beta_1\ W_1]$$

$$-S_{11}\ r_1 = \frac{\psi}{\theta}\ [Z_1 - \beta_1\ W_1]$$

car $S_{11}\ p_1 \equiv 0$.

$$S_{11}\ (p_1 - r_1) = \frac{\psi}{\theta}\ [Z_1 - \beta_1\ W_1] \tag{15}$$

Les relations (15) sont une formule de Boiteux pour les biens non rationnés et (14) caractérise les rations optimales. On peut montrer que l'inverse de (15) est (10') et que (14) peut se ramener à (10").

Donc, à partir des caractérisations brutes on a implanté un équilibre keynésien correspondant à un contexte institutionnel ou les prix n'ajustent pas automatiquement les offres et demandes et on a caractérisé l'optimum d'une telle économie.

## SECTION IV : La "macroéconomisation" de Drèze

Partant d'un équilibre keynésien, Drèze définit le concept macroéconomique du multiplicateur d'emploi (ce qui est observable) et interprète en terme d'analyse avantage-coût la caractérisation optimale de son modèle. Développons sa méthodologie.

Essentiellement on a d'abord les relations (13) que l'on peut réécrire ;

$$\pi_1' \tilde{R}_{12} + \pi_2' = 0$$

$$\pi_1' S_{11} = -\psi [Z_1 - \beta_1 W_1]'$$

On a également par (4) que (16)

$$[\pi_1' - \psi p_1', \pi_2' - \psi \rho q_2'] \begin{bmatrix} \partial Z_1/\partial r_1 & \partial Z_1/\partial r_2 \\ \partial Z_2/\partial r_1 & \partial Z_2/\partial r_2 \end{bmatrix} = 0$$

Or le terme $\partial Z_1/\partial r_1$ s'inverse. Donc :

$$(\pi_1 - \psi p_1)' = -(\pi_2 - \psi \rho q_2) \frac{\partial Z_2}{\partial r_1} \left[\frac{\partial Z_1}{\partial r_1}\right]^{-1}$$

(17) $$(\pi_1 - \psi p_1)' = -(\pi_2 - \psi \rho q_2)' Z_{21}$$

En substituant (17) dans la deuxième équation de (16) on trouve :

(18) $$[\pi_2 - \psi \rho q_2]' Z_{22} = 0$$

où $Z_{22} = \dfrac{\partial Z_2}{\partial r_2} - Z_{21} \dfrac{\partial Z_1}{\partial r_2}$

Remarque : Mathématiquement, (16) correspond aux équations (17) et (18). Cependant $\frac{\partial Z}{\partial r}$ est observable si l'état n'est pas directement rationné alors que $\begin{bmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix}$ est observable si la situation institutionnelle est le rationnement. Par (18) on a donc :

(19) $$\pi_2' = \psi \rho q_2 + \theta r_2' \qquad \text{(comme (7))}$$

de sorte que (17) peut s'écrire :

(20) $$(\pi_1 - \psi\, p_1) = -\theta\, r_2'\, Z_{21}$$

Or comme $r_2'\, Z_{21} \equiv -r_1'$, on constate que (19) et (20) correspondent aux équations (7) et on retrouve la solution de Bronsard-Wagneur.

Mais considérons plutôt (17) sous la forme :

(21) $$\pi_1' = \psi\, p_1' - \pi_2'\, Z_{21} + \psi\, \rho\, q_2'\, Z_{21}$$

et définissons

(22) $$\rho\, q_2'\, Z_{21} \equiv -m_1'$$

On aura que

(23) $$\pi_1' = -\pi_2'\, Z_{21} + \psi\, [p_1 - m_1]'$$

Substituons cette valeur dans (13) (en prenant soin de transposer). On a :

(24) $$\begin{cases} \pi_2' - \pi_2'\, Z_{21}\, \tilde{R}_{12} = -\psi\, [p_1 - m_1]'\, \tilde{R}_{12} \\ -\pi_2'\, Z_{21}\, S_{11} + \psi\, [p_1 - m_1]'\, S_{11} = -\psi\, [Z_1 - \beta_1\, W_1]' \end{cases}$$

(25) $$\begin{cases} \pi_2'\, [I - Z_{21}\, \tilde{R}_{12}] = -\psi\, [p_1 - m_1]'\, \tilde{R}_{12} \\ -\pi_2'\, Z_{21}\, S_{11} = -\psi\, [(Z_1 - \beta_1\, W_1)' + (p_1 - m_1)'\, S_{11}] \end{cases}$$

Eliminons $\pi_2$, on aura :

$$\pi_2' = -\psi\, [p_1 - m_1]'\, \tilde{R}_{12}\, \tilde{M}^{-1} \qquad \text{si} \quad \begin{cases} \psi \neq 0 \\ p_1 \neq m_1 \end{cases}$$

(26) $\psi\,[p_1 - m_1]'\,\tilde{R}_{12}\,\tilde{M}^{-1}\,Z_{21}\,S_{11} = -\psi\,[(Z_1 - \beta_1\,W_1)' + (p_1 - m_1)'\,S_{11}]$

(27) $-\psi \left[ (Z_1 - \beta_1\,W_1)' + (p_1 - m_1)' \left( S_{11} + \tilde{R}_{12}\,\frac{\partial X_2}{\partial p_1} \right) \right] = 0$

où $\frac{\partial X_2}{\partial p_1} = \tilde{M}^{-1}\,Z_{21}\,S_{11}$.

Si on rajoute à (27) les identités suivantes :

$$(p_1 - m_1)' \left( S_{11} + \tilde{R}_{12}\,\frac{\partial X_2}{\partial p_1} \right) \equiv (\rho\,q_2 - \tilde{p}_2)'\,\frac{\partial X_2}{\partial p_1}$$

$$(Z_1 - \beta_1\,W_1)' \equiv (Z_1 - \beta_1\,W_1)'$$

on trouve :

(28) $\phi \left[ (Z_1 - \beta_1\,W_1)' + (p_1 - m_1)' \left( S_{11} + \tilde{R}_{12}\,\frac{\partial X_2}{\partial p_1} \right) \right] = (Z_1 - \beta_1\,W_1)' + (\rho\,q_2 - \tilde{p}_2)'\,\frac{\partial}{\partial}$

où $\phi = 1-\psi$

qui s'interprète en terme d'analyse avantage-coût. C'est-à-dire le crochet de gauche représente le revenu marginal du producteur, tandis que le crochet de droite est le coût marginal du consommateur.

En résumé, selon le contexte institutionnel auquel correspond notre économie, il est possible de définir des concepts observables (ex. : multiplicateur, K, $S_{11}$, ...) qui permettent de tester les théories développées jusqu'ici.

Finalement nous tenons à noter qu'il serait pertinent :

1. de compléter les sections où l'on discute du contexte et de l'équilibre keynésien. Par exemple en insistant davantage sur ce qui se passe en dehors de l'optimum;
2. d'insérer dans un contexte temporaire les résultats obtenus;
3. d'étudier les autres types d'équilibre avec rationnement. Par exemple le cas où il existe une demande excédentaire sur le marché des biens et une offre excédentaire sur le marché du travail (cas classique).

ANNEXES

Annexe I

$$(15)\quad (p_1 - m_1)' \left(S_{12} + \dot{R}_{13} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right) + (p_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{R}_{23} \frac{d\hat{X}_3}{dp_2}\right) \equiv 0$$

où $m_1 \equiv -p_3\ V_{31}$

$m_2 \equiv -p_3\ Z_{32}$

$\frac{dX_3}{dp_2} \equiv M^{-1}\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}]$

et sachant que

i) $p_1'\ S_{12} + p_2'\ S_{22} \equiv 0$ par (P4)

ii) $p_1'\ \dot{R}_{13} + p_2'\ \dot{R}_{23} \equiv -p_3$ par (P9)

donc (15) se réécrit :

$$(p_1'\ S_{12} + p_2'\ S_{22}) + (p_1'\ \dot{R}_{13} + p_2'\ \dot{R}_{23}) \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} + p_3\ (V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}) +$$

$$p_3\ [V_{31}\ \dot{R}_{13} + Z_{32}\ \dot{R}_{23}] \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \equiv 0$$

$$-p_3 \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} + p_3\ (V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}) + p_3\ [V_{31}\ \dot{R}_{13} + Z_{32}\ \dot{R}_{23}] \frac{d\hat{X}_3}{dp_2} \equiv 0$$

$$p_3\ (V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}) - p_3\ [1 - V_{31}\ \dot{R}_{13} - Z_{32}\ \dot{R}_{23}]\ M^{-1}\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}] \equiv 0$$

$$\Rightarrow\quad p_3\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}] - p_3\ M\ M^{-1}\ [V_{31}\ S_{12} + Z_{32}\ S_{22}] \equiv 0$$

C.Q.F.D.

## Annexe II

Preuve que :

$$(15') \quad (p_1 - m_1)' \left(S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \frac{dX_3}{dp_2}\right) + (p_2 - m_2)' \left(S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right) \equiv (p_3 - \tilde{p}_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}$$

où $m_1' \equiv -p_3 V_{31}$

$m_2' \equiv -p_3 Z_{32}$

$\frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \equiv \tilde{M}^{-1} [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}]$ où $\tilde{M} = [1 - V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23}]$

en sachant que $p_1' \dot{\tilde{R}}_{13} + p_2' \dot{\tilde{R}}_{23} \equiv -\tilde{p}_3$

Donc :

$$[p_1' + p_3 V_{31}] \left(S_{12} + \dot{\tilde{R}}_{13} \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right) + [p_2' + p_3 Z_{32}] \left(S_{22} + \dot{\tilde{R}}_{23} \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}\right) + (\tilde{p}_3 - p_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \equiv 0$$

1. $p_1' S_{12} + p_2' S_{22} \equiv 0$
2. $(p_1' \dot{\tilde{R}}_{13} + p_2' \dot{\tilde{R}}_{23}) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \equiv -\tilde{p}_3 \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}$

Alors

$$\Rightarrow \quad -\tilde{p}_3 \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} + p_3 [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}] + p_3 [V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} + Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23}] \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} + (\tilde{p}_3 - p_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \equiv 0$$

En rajoutant et soustrayant $p_3 \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2}$ on trouve :

$$\Rightarrow \quad (p_3 - \tilde{p}_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} + p_3 [V_{31} S_{12} + Z_{32} S_{22}] - p_3 [1 - V_{31} \dot{\tilde{R}}_{13} - Z_{32} \dot{\tilde{R}}_{23}] \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} +$$

$$(\tilde{p}_3 - p_3) \frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} \equiv 0$$

$$\Rightarrow \quad -(\tilde{p}_3 - p_3)\,\frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} + (\tilde{p}_3 - p_3)\,\frac{d\tilde{X}_3}{dp_2} + p_3\,[V_{31}\,S_{12} + Z_{32}\,S_{22}] -$$

$$p_3\,\tilde{M}\,\tilde{M}^{-1}\,[V_{31}\,S_{12} + Z_{32}\,S_{22}] \equiv 0$$

C.Q.F.D.

## Annexe III

Preuve que :

$$(p_1 - \rho\, m_1)' \left(S_{11} + \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{dX_2}{dp_1}\right) \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

où $-\rho\, m_1 = \rho\, p_2'\, Z_{21}$ et $\frac{dX_2}{dp_1} = \tilde{M}^{-1}\, Z_{21}\, S_{11}$

On a donc :

$$p_1'\, S_{11} + p_1'\, \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{d\tilde{X}_2}{dp_1} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, S_{11} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{dX_2}{dp_1} \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

Donc

$$-p_2' \frac{dX_2}{dp_1} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, S_{11} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, \dot{\tilde{R}}_{12} \frac{dX_2}{dp_1} + (\rho\, p_2 - \rho\, p_2)' \frac{dX_2}{dp_1} \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

Donc

$$[\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1} - \rho\, p_2'\, [I - Z_{21}\, \dot{\tilde{R}}_{12}] \frac{dX_2}{dp_1} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, S_{11} \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

$$[\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1} - \rho\, p_2'\, \tilde{M}\, \tilde{M}^{-1}\, Z_{21}\, S_{11} + \rho\, p_2'\, Z_{21}\, S_{11} \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

$$[\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1} \equiv [\rho\, p_2 - \tilde{p}_2]' \frac{dX_2}{dp_1}$$

C.Q.F.D.

## Annexe IV

Preuve que :

$$(\rho \; p_2 - m_2)' \left( T_{22} + \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \right) \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

où $-m_2' \equiv p_1' \; Z_{12}$

$$\frac{dy_1}{dp_2} = M^{-1} \; Z_{12} \; T_{22}$$

Donc

$$\rho \; p_2' \; \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \quad p_1' \; Z_{12} \; T_{22} \quad p_1' \; Z_{12} \; \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

$$-\rho \; \tilde{p}_1' \frac{dy_1}{dp_2} + p_1' \; Z_{12} \; T_{22} + p_1' \; Z_{12} \; \dot{V}_{21} \frac{dy_1}{dp_2} + (p_1 - p_1)' \frac{dy_1}{dp_2} \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

$$(p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2} - p_1' \; [I - Z_{12} \; \dot{V}_{21}] \frac{dy_1}{dp_2} + p_1' \; Z_{12} \; T_{22} \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

$$(p_1' - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2} - p_1' \; M \; M^{-1} \; Z_{12} \; T_{22} + p_1' \; Z_{12} \; T_{22} \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

Donc

$$(p_1 - \rho \, \tilde{p}_1')' \frac{dy_1}{dp_2} \equiv (p_1 - \rho \; \tilde{p}_1)' \frac{dy_1}{dp_2}$$

C.Q.F.D.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier ici Monsieur Camille Bronsard, mon directeur de recherche; travailler à ses côtés fut l'expérience la plus intéressante de ma formation. Je voudrais également remercier tous les participants au séminaire d'économie mathématique ainsi que Suzanne Larouche-Sidoti qui a eu la patience de dactylographier ce travail.

# BIBLIOGRAPHIE

ALLARD, M., BRONSARD, C., McDOUGALL, G. (1981), "Note sur la théorie néo-classique du producteur", L'Actualité Economique, no 2, avril-juin.

BRONSARD, C., LEBLANC, D. (1980), "Théorie générale du consommateur et applications", in Pseudo-inverses et applications, Cahier no 3, Groupe de mathématiques économiques.

BRONSARD, C., WAGNEUR, E. (1982), "Second rang et déséquilibre", Cahiers du Séminaire d'Econométrie.

DRAZEN, A. (1980), "Recent Developments in Macroeconomic Disequilibrium Theory", Econometrica, mars.

DREZE, J. (1982), "Second-Best Analysis with Markets in Disequilibrium : Public Sector Pricing in a Keynesian Regime", Cahier de recherche en économie de l'Université de Louvain.

HINDENBRAND, K. et U. (1978), "On Keynesian Equilibria with Unemployment and Quantity Rationing", Journal of Economic Theory, août.

MALINVAUD, E. (1977), Réexamen de la théorie du chômage, Calman-Lévy, (1980).

MUELLBAUER, J., PORTES, R. (1978), "Macroeconomic Models with Quantity Rationing", The Economic Journal, décembre.