

Université de Montréal

Désintégration du faux vide médiée par des kinks en 1+1 dimensions

par
Yvan Ung

Département de physique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)
en physique

juillet, 2015

© Yvan Ung, 2015.

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé:

Désintégration du faux vide médiée par des kinks en 1+1 dimensions

présenté par:

Yvan Ung

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes:

Michel Côté,	président-rapporteur
Richard MacKenzie,	directeur de recherche
David London,	membre du jury

Mémoire accepté le: 14 juillet 2015

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on étudie la désintégration d'un faux vide, c'est-à-dire un vide qui est un minimum relatif d'un potentiel scalaire par effet tunnel. Des défauts topologiques en 1+1 dimension, appelés kinks, apparaissent lorsque le potentiel possède un minimum qui brise spontanément une symétrie discrète. En 3+1 dimensions, ces kinks deviennent des murs de domaine. Ils apparaissent par exemple dans les matériaux magnétiques en matière condensée.

Un modèle à deux champs scalaires couplés sera étudié ainsi que les solutions aux équations du mouvement qui en découlent. Ce faisant, on analysera comment l'existence et l'énergie des solutions statiques dépend des paramètres du modèle. Un balayage numérique de l'espace des paramètres révèle que les solutions stables se trouvent entre les zones de dissociation, des régions dans l'espace des paramètres où les solutions stables n'existent plus. Le comportement des solutions instables dans les zones de dissociation peut être très différent selon la zone de dissociation dans laquelle une solution se trouve.

Le potentiel consiste, dans un premier temps, en un polynôme d'ordre six, auquel on y rajoute, dans un deuxième temps, un polynôme quartique multiplié par un terme de couplage, et est choisi tel que les extrémités du kink soient à des faux vides distincts. Le taux de désintégration a été estimé par une approximation semi-classique pour montrer l'impact des défauts topologiques sur la stabilité du faux vide. Le projet consiste à déterminer les conditions qui permettent aux kinks de catalyser la désintégration du faux vide. Il appert qu'on a trouvé une expression pour déterminer la densité critique de kinks et qu'on comprend ce qui se passe avec la plupart des termes.

Mots-clés : défauts topologiques, brisure spontanée de symétrie, kinks, soliton, désintégration du faux vide, effet tunnel

ABSTRACT

In this thesis, we study the tunneling decay of the false vacuum, that is, a vacuum that is a relative minimum of a scalar potential. Topological defects in 1+1 dimension, called kinks, appear when the potential possesses a minimum that spontaneously breaks a discrete symmetry. In 3+1 dimensions, these kinks become domain walls. For instance, they appear in magnetic materials in condensed matter.

A model with two coupled scalar fields will be studied, as well as the solutions to the equations of motion that arise from it. We will then analyze how the energy of the static solutions depend on the parameters of the model. A numerical survey of parameter space reveals that the stable solutions are located between dissociation zones, areas in parameter space where stable solutions no longer exist. The behavior of the unstable solutions in the dissociation zones can be very different depending on which dissociation zone a solution is found near the dissociation zone.

The potential first consists in a sixth-order polynomial, to which is added a quartic polynomial multiplied by a coupling term, and is chosen such that the extremities of the kink are at distinct false vacua. The decay rate has been estimated by a semiclassical approximation to show the impact of topological defects on the stability of the false vacuum. The project consists in determining the conditions that allow the kinks to catalyze false vacuum decay. It appears that we found an expression for the critical kink density and that we understand what happens with most terms.

Key words : topological defects, spontaneous symmetry breaking, soliton, kinks, false vacuum decay, tunneling

REMERCIEMENTS

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de recherche, Richard MacKenzie, un autre professeur, Manu Paranjape, ainsi que les étudiants de premier cycle, Éric Dupuis et Yan Gobeil, avec qui j'ai eu la chance de travailler. Et, comme il a travaillé sur le problème de recherche à ses débuts, et au début de la phase de recherche du programme de maîtrise auquel je suis inscrit, alors qu'il était en visite à l'Université de Montréal, j'aimerais également remercier Luc Marleau, professeur au département de physique, de génie physique et d'optique à l'Université Laval.

J'aimerais également remercier le réseau StackExchange pour avoir rendu l'écriture de ce document possible, surtout Mathematica Stack Exchange et TeX Stack Exchange pour m'avoir fourni de l'aide précieuse pour diverses tâches au cours des travaux. Pour cette raison, j'aimerais également remercier Marie-Lou Gendron Marsolais pour m'avoir fourni l'algorithme de relaxation sur Matlab, qui a rendu possible l'usage de la relaxation pour trouver les solutions aux équations du mouvement du kink, ainsi que le canevas de base pour la revue de littérature du sujet (hormis les kinks et les murs de domaine).

Je tiens à remercier le *Groupe de Physique des Particules* de l'Université de Montréal pour m'avoir fourni l'usage de leurs installations, ainsi que pour toutes les personnes mentionnées précédemment, ainsi que le CRSNG et le Département de physique de l'Université pour le financement nécessaire. Et le Département de physique doit être remercié pour bien d'autres usages encore : le soutien fourni par les autres étudiants (gradués comme de 1er cycle) dans les moments les plus sombres, les conférences du vendredi qui ont été bien informatives, malgré que leur lien avec le présent projet soit, plus souvent qu'autrement, plus que douteux.

De plus, même si les distractions ont été nombreuses, peut-être même trop nombreuses pour être vraies en raison de mes tâches d'auxiliaires d'enseignement, je dois les remercier parce que j'en ai tiré parti, surtout dans les moments les plus difficiles en recherche. Pour cette raison, je tiens également à remercier Alexandre Landry, pour m'avoir prodigué de précieux et nombreux conseils au sujet de la vie en recherche active alors qu'il était au bureau. Et je tiens également à remercier

YouTube pour m'avoir permis de garder le calme alors que les simulations numériques devenaient interminables, surtout lorsqu'il était question de faire les balayages dans l'espace des paramètres requis pour les travaux du chapitre 5.

Finalement, je tiens à remercier divers sites comme *PhysicsGRE.com* et *The Grad Cafe* pour me tenir au courant et pour m'aider dans mes démarches visant mon avenir post-maîtrise.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ	i
ABSTRACT	ii
REMERCIEMENTS	iii
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION	2
CHAPITRE 2 : DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE	6
2.1 Préambule	6
2.2 Considérations préliminaires	8
2.3 Nucléation des bulles de vrai vide	8
2.4 Le bounce	12
2.5 Passage à la théorie des champs	12
2.6 L'approximation du mur mince	15
2.7 Le destin du faux vide	18
2.8 Le coefficient A	21
CHAPITRE 3 : DÉFAUTS TOPOLOGIQUES	22
3.1 Brisure spontanée de symétrie	22
3.2 Solitons topologiques	23
3.3 Un exemple : le kink en ϕ^4	25
3.3.1 Nombre de minima > 2	28
3.4 Contexte physique	29
CHAPITRE 4 : LE MODÈLE ET SES SOLUTIONS	32
4.1 Motivation	32
4.2 Le modèle	33
4.3 Changement d'échelle	36
4.4 Les méthodes numériques d'obtention des solutions statiques	37

4.4.1	La méthode de relaxation	38
4.4.2	Linéarisation de l'équation du mouvement	40
4.5	L'obtention des solutions numériques	42
4.6	Les zones de stabilité	43
CHAPITRE 5 : ZONES DE DISSOCIATION		47
5.1	Expression de l'action en termes de la variation	47
5.1.1	La barrière énergétique	50
5.2	Deuxième variation	53
5.2.1	La théorie	53
5.2.2	La stabilité des solutions	55
5.2.3	La symétrie des solutions	57
5.2.4	Résultats	60
5.2.5	La symétrie des états propres	61
CHAPITRE 6 : DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE		62
6.1	Approximation du mur mince	63
6.2	Densité critique de kinks	65
CHAPITRE 7 : DISCUSSION		68
7.1	L'introduction de la gravité	68
7.2	Des murs en dimensions supérieures	69
CONCLUSION		70
BIBLIOGRAPHIE		72

LISTE DES FIGURES

1.1	Le faux et le vrai vide	2
1.2	Les différents types de transition de phase	4
2.1	Le problème d'isotropie	7
2.2	Le point de libération	9
2.3	Le potentiel avant et après la brisure de symétrie	16
2.4	La solution 2.33 pour $a = 1$, $\lambda = 8$, $\mu = \sqrt{8}$	16
2.5	L'action euclidienne de la bulle en fonction du rayon (équation 2.37)	17
2.6	Matérialisation de la bulle de vrai vide	20
3.1	Le potentiel en chapeau mexicain	22
3.2	Le potentiel ϕ^4 pour $\eta = 1$	26
3.3	Le kink ϕ^4	27
3.4	Le potentiel inversé	29
4.1	Le profil de V_1	32
4.2	Le kink ϕ^6	33
4.3	Le profil de V_2	35
4.4	Une configuration possible du système	35
4.5	La géométrie globale du potentiel	37
4.6	L'énergie selon les paramètres	42
4.7	Le système de kinks	44
4.8	Les zones de stabilité	44
4.9	Le kink pour $\delta_2 \simeq 0$	46
4.10	Le kink près de la limite supérieure	46
5.1	L'énergie du kink sous déformation	50
5.2	Les facteurs influençant l'énergie du kink sous déformation	51
5.3	\hat{Y} en fonction de δ_2	52
5.4	L'action euclidienne du kink en fonction de δ_2	52

5.5	Deux systèmes à trois modes	57
6.1	L'action du faux vide	64
6.2	Le bounce du faux vide	65

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

En mécanique classique, une particule peut être confinée à rester dans un puits de potentiel lorsque son énergie cinétique est insuffisante pour franchir une barrière de potentiel, auquel cas la particule est en équilibre stable. En mécanique quantique, ce n'est pas le cas ; par effet tunnel, une particule peut traverser n'importe quelle barrière de potentiel de dimensions finies.

En théorie des champs quantiques, un faux vide est une région de l'espace qui est métastable par effet tunnel. Le faux vide est un minimum local d'un potentiel mais qui n'est pas l'état d'énergie minimale, même si sa durée de vie peut être longue. Le vrai vide, cependant, est le minimum de plus basse énergie du potentiel.

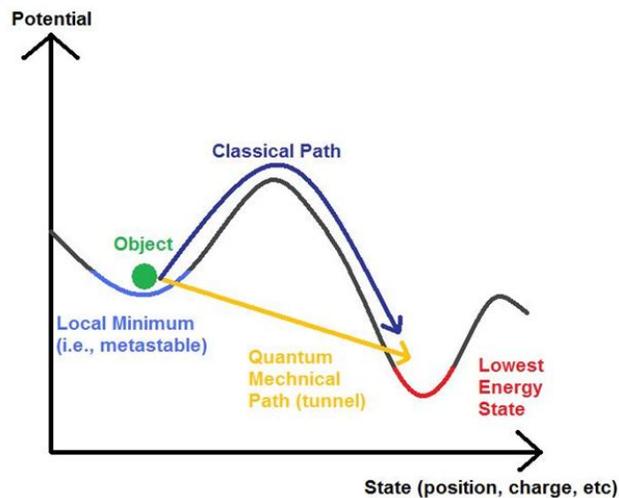


Figure 1.1 – Le potentiel $U(\phi)$ de la particule (Tiré de [2])

Ce processus a un parallèle en mécanique statistique : la transition entre un liquide surchauffé, c'est-à-dire chauffé au-delà de son point d'ébullition, et sa phase vapeur. Le minimum relatif, ou faux vide, correspondrait ici à la phase surchauffée et le minimum absolu, ou vrai vide, à la phase vapeur. Des fluctuations thermodynamiques vont continuellement causer l'apparition de bulles de vapeur dans la phase liquide, mais de l'énergie est dépensée lorsque le liquide fait la transition

jusqu'à la phase gazeuse : les murs de la bulle auront une tension de surface. Si la bulle créée est trop petite, la diminution d'énergie par le vrai vide à l'intérieur est plus que compensée par la tension du mur et la bulle disparaît. Par contre, il se formera à l'occasion des bulles assez grandes pour qu'il soit énergétiquement favorable pour elles de prendre de l'expansion. En effet, l'énergie de la paroi de la bulle augmente comme l'aire d'une sphère ($4\pi r^2$) mais la contribution négative de l'intérieur augmente plus rapidement, comme le volume d'une sphère ($4\pi r^3/3$), elle grandira donc jusqu'à ce que toute l'eau soit devenue vapeur [1].

En théorie des champs quantiques, les fluctuations quantiques remplacent les fluctuations thermodynamiques, mais c'est essentiellement le même processus : une bulle de vrai vide assez grande se formera et s'agrandira, convertissant le faux vide en vrai. À l'époque de l'univers primordial, l'énergie par unité de volume était très élevée, l'état de l'univers devait être très loin de tout vide, vrai ou faux. À mesure qu'il prend de l'expansion et se refroidit, il pourrait être tombé dans un faux vide à la place d'un vrai. Ce faux vide va se désintégrer vers le vrai vide, ou possiblement un autre faux vide de densité d'énergie moindre que le vide initial. Ce type de transition de phase est appelé "transition de premier ordre". Toute transition de phase est décrite en terme d'un paramètre d'ordre, distinguant les phases. Il existe plusieurs types de transitions de phase, dont les deux plus courants sont définis ici et illustrés dans la figure 2.1 :

1. Les transitions de premier ordre, ou transitions discrètes, se produisent lorsque $\phi = 0$ est un minimum local du potentiel effectif et alors la transition de phase s'effectue par effet tunnel à travers une barrière de potentiel, de sorte que le paramètre d'ordre varie de manière discontinue dans le temps.
2. Les transitions de deuxième ordre, ou transitions continues, se produisent lorsque $\phi = 0$ est un maximum local du potentiel effectif et alors la transition de phase s'effectue de manière plus graduelle et continue, mais où la discontinuité se trouve dans une dérivée quelconque d'ordre non-nul du paramètre d'ordre.

Même si, de nos jours, nous ne caractérisons plus les transitions de phase que selon la continuité du paramètre d'ordre, historiquement, une transition de phase d'ordre N était caractérisée par une discontinuité de la $(N - 1)$ -ème dérivée du paramètre d'ordre[4], classification due à Ehrenfest.

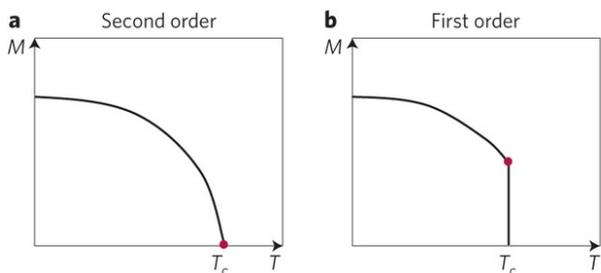


Figure 1.2 – Les différents types de transition de phase (Tiré de [3])

L'objectif de ce mémoire est de déterminer si l'existence de kinks en 1+1 dimensions ont un effet important sur la désintégration du faux vide. Comme l'univers a un âge fini, (13.798 ± 0.037) milliards d'années [5], l'univers pourrait être dans un faux vide si la durée de vie du faux vide est suffisamment longue.

Nous allons éclaircir ce qu'est la désintégration du faux vide, car c'est un concept central aux travaux présentés dans le présent ouvrage et, de là, les notions de bounce et d'action euclidienne qui sont à la base de ce qui suit. Par la suite, l'autre concept central, celui de défaut topologique et, par extension, de kink, sera abordé. De plus, tout comme le faux vide est instable, le kink l'est tout autant. Une fois que le concept de kink sera abordé, nous allons présenter un modèle à deux champs donnant lieu à des kinks stables, ainsi que les propriétés de ces kinks. Il y a donc quelques propriétés importantes qui sous-tendent notre modèle. Par exemple, la désintégration du kink donne lieu à une région de vrai vide qui grandit exponentiellement ; ainsi, le kink fournit une amorce pour la désintégration du faux vide. De plus, la durée de vie du kink est indépendante de celle du faux vide en l'absence de kinks.

Bien que la durée de vie du faux vide sans kinks puisse être très longue, la présence de kinks pourrait pousser le faux vide à se désintégrer beaucoup plus rapidement. Nous allons nous apercevoir par après que le modèle donne lieu à des zones de dissociation, c'est-à-dire des régions dans l'espace des paramètres du modèle où les solutions stables aux équations du mouvement du kink n'existent pas. Nous avons utilisé plusieurs méthodes pour confirmer leur emplacement. Tout ce développement nous mène au résultat le plus important de cet ouvrage : une expression pour la densité de kinks au-delà de laquelle la présence de kinks aura un impact significatif sur la désintégration du faux vide. Ladite expression dépend de manière non-triviale des paramètres du problème. Par conséquent, le kink pourrait avoir un effet très important sur la désintégration du

faux vide.

Même si le modèle étudié ici est un modèle jouet en 1+1 dimensions, dans un contexte plus réaliste en 3+1 dimensions, le résultat demeure tout de même important. Si, dans un modèle donné, on observe que la nature est dans un faux vide, ce modèle n'est pas nécessairement invalidé, car la durée de vie du faux vide pourrait quand même être plus longue que l'âge de l'univers. Pourtant, en présence d'une densité suffisamment élevée de kinks, le faux vide pourrait être beaucoup moins stable que l'on aurait cru, auquel cas la viabilité du modèle est remise en question : on doit réexaminer le modèle en tenant compte des kinks pour déterminer s'il est encore viable.

Ces travaux effectués font partie d'un article [6] dont je suis un des co-auteurs. J'ai effectué des contributions autant analytiques que numériques aux travaux dont cet article fait l'objet, en particulier, les contributions relatives aux conditions requises pour avoir des kinks stables et le calcul de l'action euclidienne, autant celle du kink que celle du faux vide en l'absence de kinks, ainsi que des figures de l'article lui-même.

CHAPITRE 2

DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE

Peu de temps après l'explosion primordiale de l'univers (Big Bang), il se trouvait dans un état chaud et dense ; à mesure qu'il prend de l'expansion et se refroidit, une transition de phase se produit. Un exemple important de transition de phase cosmique est la théorie de grande unification (nous verrons plus tard, à la section 3.4, qu'il admet l'existence de monopôles) $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$ [7]. Il est alors possible que l'univers qui en résulte soit dans le faux vide, et que le faux vide qui en découle ait une longue durée de vie, mais nous verrons qu'éventuellement, l'univers va passer au vrai vide.

En cosmologie cordiste, le scénario inflationnaire obtenu en [8], ou scénario *KKLT*, donne lieu à un vide métastable, qui doit être de longue durée pour être d'importance cosmologique. Nous nous doutons bien que la désintégration du faux vide occupe une place centrale dans les travaux qui font l'objet de ce mémoire et que, par conséquent, il vaudrait la peine d'expliquer plus en détail ce que c'est que la désintégration du faux vide, tout en suivant la description de la désintégration du faux vide faite par Coleman [9], elle aussi expliquée dans plus de détails dans [1].

2.1 Préambule

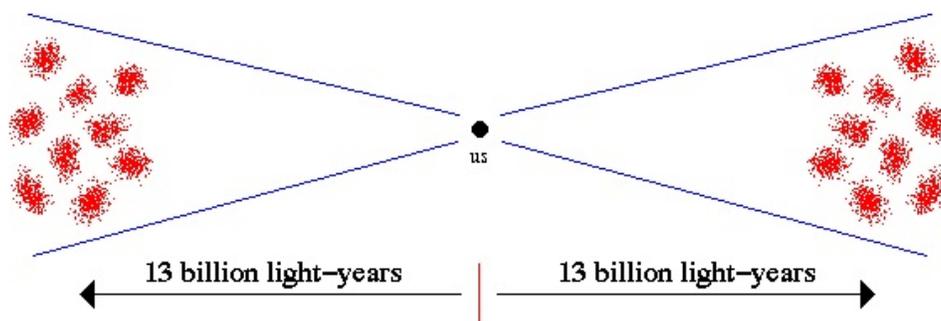
Trois grandes découvertes de la cosmologie posent de grands problèmes : l'expansion de l'univers [10], l'isotropie de l'univers, ainsi que la platitude de l'univers. Le problème d'isotropie de l'univers est tel que deux régions de l'univers ont l'air identiques tout en étant séparées par une distance plus grande que l'âge de l'univers fois la vitesse de la lumière. Ainsi, par la relativité restreinte, ces régions ne devraient pas avoir de lien de causalité entre eux. Une étude du "cosmic microwave background" a démontré que l'univers était isotrope, homogène et plat [11]. Or, le paradoxe vient du fait que la distribution d'énergie et de matière l'univers primordial était très hétérogène et que la courbure était très importante, et que l'expansion de l'univers ne pouvait pas expliquer toute seule l'homogénéité ou l'isotropie de l'univers [12].

L'inflation permet alors de résoudre ces problèmes en faisant dilater tout l'univers de telle sorte que l'énergie soit uniformément répartie, de rendre des régions causales l'une à l'autre et que la

courbure de l'univers disparaît [13].

Horizon Problem

the number and size of density fluctuations on both sides of the sky are similar, yet they are separated by a distance that is greater than the speed of light times the age of the Universe, i.e. they should have no knowledge of each other by special relativity



at some time in the early Universe, all parts of spacetime were causally connected, this must have happened after the spacetime foam era, and before the time where thermalization of matter occurred.

Figure 2.1 – Le problème d'isotropie (Tiré de [14])

La désintégration du faux vide fait partie intégrante de nombreux modèles d'inflation cosmique. Par contre, la tentative de déterminer le champ responsable du mécanisme de l'inflation cosmique, ou inflaton, demeure encore sans succès. Un des tout premiers modèles d'inflation cosmique fait intervenir une transition de phase qui s'accompagne de désintégration du faux vide ; l'univers, à un temps très court (la plupart des modèles inflationnaires placent le début de la période inflationnaire autour de 10^{-36} seconde après l'explosion primordiale) était coincé dans un faux vide métastable avec une densité d'énergie très élevée. À mesure qu'il se refroidissait, et, lorsque le vide s'est désintégré, 10^{-33} seconde plus tard, vers un vrai vide, ou à tout le moins un faux vide moins énergétique que l'ancien, l'univers s'est réchauffé par le relâchement d'une quantité incroyable d'énergie et qui a fait que l'univers ait augmenté de volume d'un facteur d'au moins 10^{26} (et que le rayon ait augmenté d'un facteur $\gtrsim 10^9$) pour que l'inflation cosmique puisse expliquer l'isotropie de l'univers à grande échelle [13].

Étant donné les implications de la désintégration du faux vide cosmique sur la physique des particules (certains modèles inflationnaires prédisent notamment la production de particules lors

de la phase inflationnaire [15]), alors ces travaux font partie d'un domaine plus large appelé la *cosmologie des particules*.

2.2 Considérations préliminaires

Classiquement, si une particule dans un faux vide ne possède pas suffisamment d'énergie pour franchir la barrière énergétique la séparant du vrai vide, alors la particule dans le faux vide va être dans un état d'équilibre stable. Par contre, quantiquement, l'état d'équilibre dans le faux vide est instable tant que la barrière énergétique est de hauteur finie. Le traitement de la désintégration du faux vide est exposé ici à partir de l'article classique de Coleman [9]. Considérons une théorie des champs quantique en 3+1 dimensions munie d'interactions non-dérivées

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad (2.1)$$

où U est un potentiel scalaire muni de plusieurs minima relatifs, lesquels peuvent être dégénérés, du moment qu'il y ait plus d'une valeur réelle à ces minima, auquel cas nous avons un minimum absolu. Comme mentionné auparavant, nous dirons alors que les vides sont faux ou vrais dépendant de si le minimum du potentiel scalaire associé aux vides est relatif ou absolu respectivement.

2.3 Nucléation des bulles de vrai vide

Par analogie au processus thermodynamique de nucléation des bulles de vapeur dans un fluide au-delà de la température critique, on a la présence de bulles de vrai vide dans la mer de faux vide, et que, si la bulle nouvellement formée est initialement trop petite, il serait énergétiquement favorable de se rétrécir et de se fondre dans le faux vide. Toutefois, si la bulle atteint une taille critique, il deviendra alors énergétiquement favorable pour la bulle de prendre de l'expansion.

Ainsi, la quantité d'importance à calculer devient la probabilité de désintégration du faux vide par unité de temps par unité de volume, Γ/V . Bien entendu, un tel calcul serait futile n'eut été de la cosmologie, et en particulier, de certains modèles inflationnaires qui font intervenir de la désintégration du faux vide. Pour commencer, un univers qui aurait un âge infini doit être dans le vrai vide, peu importe le rythme de désintégration du faux vide. Toutefois, l'univers ayant un âge

fini, la quantité d'intérêt devient le temps caractéristique (t_c) pour que la désintégration ait lieu. D'après Coleman [9],

$$\text{si } t_c = \begin{cases} \simeq 10^{-3}\text{s}, & \text{alors l'approximation de température nulle n'est pas valable} \\ \simeq 1\text{an}, & \text{alors il y aurait une explosion auxiliaire} \\ \simeq 10^{9-10}\text{ans}, & \text{alors il y a raison de s'inquiéter} \end{cases}$$

Examinons l'effet tunnel en mécanique quantique. L'effet tunnel quantique permet de franchir toute barrière d'énergie finie à partir d'un minimum local, si on laisse le temps approprié. Commençons par considérer une particule de masse unitaire se déplaçant en une dimension,

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - U(\phi), \quad (2.2)$$

où ϕ est la coordonnée de la particule et le potentiel inversé $-U(\phi)$ est illustré à la figure 2.2. Ici on fait le choix de placer le zéro de l'énergie au point d'équilibre métastable, ϕ_+ , à un zéro de U , auquel cas ϕ_1 est l'équipotentielle de ϕ_+ et ϕ_- est le minimum global.

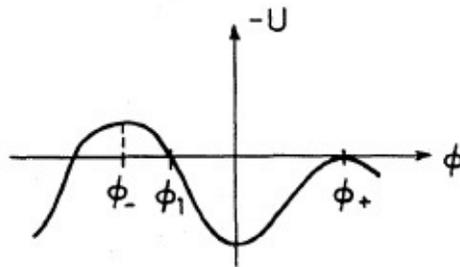


Figure 2.2 – Le potentiel inversé pour une théorie avec un faux état fondamental (Tiré de [9])

Il est bien connu qu'il n'y a pas d'état stable quantiquement qui correspond à l'équilibre stable classique du minimum local. En langage semi-classique (une bonne description effective lorsque $\hbar \rightarrow 0$), la particule pénètre la barrière de potentiel et se matérialise au point de libération, σ , après quoi il se propage classiquement. L'expression pour le taux de désintégration associée à un tel processus est de la forme

$$\Gamma = Ae^{-B/\hbar}[1 + O(\hbar)], \quad (2.3)$$

où A et B dépendent du modèle considéré.

Par contre, comme nous le verrons à la section 2.8, A est considéré comme moins important que B . Ainsi, toute la discussion qui suit va se concentrer sur la théorie qui sous-tend le terme B . Nous sommes dans un régime semi-classique, où $\hbar \rightarrow 0$. Nous verrons plus loin de quelle manière B est reliée à l'action euclidienne, et même pourquoi Γ prend la forme $Ae^{-B/\hbar}$. Dans un premier temps, suivant le formalisme de l'approximation WKB, l'amplitude de propagation d'une particule avec énergie E parcourant une trajectoire P dans un potentiel U vaut [16], avec δ dénotant la variation :

$$\frac{1}{N} \exp \left[- \int_P (U - E)^{1/2} \right], \quad (2.4)$$

où N est un facteur de normalisation qui ne dépend que des conditions aux frontières. Comme ici la particule est liée, la contribution dominante vient de la trajectoire associée au minimum de l'argument $U - E$, étant donné que chaque contribution d'une trajectoire dans l'intégrale décroît exponentiellement. La contribution dominante devient alors celle où $E = 0$ (l'énergie étant non-négative), auquel cas on intègre sur la trajectoire où B est un minimum. Nous aurions, selon Banks, Bender et Wu [16] que la variation est :

$$\delta \int d\phi (U)^{1/2} = 0. \quad (2.5)$$

La trajectoire ainsi décrite est celle de moindre résistance au mouvement. Il est bien connu que les solutions au problème variationnel

$$\delta \int d\phi [E - U]^{1/2} = 0 \quad (2.6)$$

sont les trajectoires dans l'espace des configurations qui solutionnent les équations d'Euler-Lagrange avec les conditions aux frontières fixées :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = - \frac{\partial U}{\partial \phi} \quad (2.7)$$

avec

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U = E. \quad (2.8)$$

Ici nous avons affaire à un problème du même genre, mais ici $E = 0$ et le signe de U est renversé.

Les équations d'Euler-Lagrange changent donc de forme à cause de la forme du problème ! Nous pouvons également se définir une quantité appelée le **Lagrangien euclidien**,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U = L_E, \quad (2.9)$$

qui va nous être utile pour calculer l'action euclidienne. Nous verrons plus tard que l'action euclidienne est le coefficient B et, de là, le taux de désintégration. Ce Lagrangien euclidien est obtenu en effectuant la substitution formelle $t \rightarrow -i\tau$, auquel cas nous pouvons en tirer le principe de Hamilton en temps imaginaire. Or, le point d'équilibre classique peut seulement être atteint asymptotiquement, lorsque $\tau \rightarrow -\infty$, auquel cas $U \rightarrow 0$:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi = \phi_+. \quad (2.10)$$

Par invariance sous translation temporelle, nous pouvons fort bien choisir le temps imaginaire où on atteint l'équipotentielle (et, par conséquent, le point de libération) ϕ_1 comme étant $\tau = 0$, auquel cas, on aura :

$$\left. \frac{d\phi}{d\tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (2.11)$$

Nous trouvons

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = \frac{\partial U}{\partial \phi}, \quad (2.12)$$

avec

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 - U = 0. \quad (2.13)$$

Et, encore par l'équation 2.13, on aura aussi

$$\int_{\phi_+}^{\phi_1} d\phi (2U)^{1/2} = \int_{-\infty}^0 d\tau L_E. \quad (2.14)$$

Notons que 2.12 est la version en temps imaginaire de 2.7.

2.4 Le bounce

Puisque la condition aux frontières a changée, de telle sorte que la variation de la nouvelle action est nulle, une seule extrémité de la frontière doit être fixée, c'est-à-dire le faux vide. Le fait que $d\phi/d\tau = 0$ en $\tau = 0$ permet aussi de dire que le mouvement pour τ négatif est simplement l'inverse de celui pour τ positif, rebondissant pour s'en aller à ϕ_+ , un faux vide, pour τ tendant vers l'infini. Ce mouvement est appelé le **bounce**. Le coefficient B devient alors l'action euclidienne totale pour le bounce :

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau L_E = S_E. \quad (2.15)$$

Comme au temps $\tau = 0$ la particule doit atteindre un point duquel elle peut, classiquement, s'échapper vers l'infini, la solution triviale, ϕ constant, n'est pas permise. Il peut y avoir plusieurs bounces, auquel cas celui avec l'action euclidienne la plus faible sera favorisée, et il peut même y avoir plusieurs bounces avec la même action (d'ordinaire, un tel cas se produit s'il y a une symétrie au système ; dans ce cas, on somme sur le groupe de symétrie qui en est à l'origine mais ça n'affecte que le coefficient A .) Ainsi, pour trouver le coefficient B et, de là, le taux de désintégration, à une constante près, on n'a qu'à trouver le bounce, la solution aux équations du mouvement en temps imaginaire qui obéissent aux conditions aux frontières 2.10 et 2.11.

2.5 Passage à la théorie des champs

Passons maintenant à la théorie des champs, utilisant un champ scalaire réel en 3+1 dimensions pour illustrer les points en commun et les différences entre la mécanique d'une particule et la théorie des champs. Soit le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi) = \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - U(\phi) \quad (2.16)$$

où $U(\phi)$ est tel qu'illustré dans la figure 2.2.

Une différence entre la mécanique quantique et la théorie des champs est qu'il faut faire attention de ne pas négliger *l'énergie de gradient* [17] dans le Lagrangien, Euclidien ou de Minkowski, et donc dans l'action qui en résulte. Ladite énergie revient à ajouter un terme de la forme $(\nabla \phi)^2$ au

terme de potentiel. Ainsi, l'équation euclidienne du mouvement devient

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nabla^2\right) \phi = U'(\phi), \quad (2.17)$$

où le prime dénote la différentiation par rapport à ϕ . Les conditions aux frontières pour le bounce sont données par

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi = \phi_+, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tau}(0, \vec{x}) = 0, \quad (2.18)$$

avec l'action euclidienne augmentée du terme de gradient, donc de l'énergie requise pour que le champ puisse exister, mais pour que l'action euclidienne puisse être finie en tout temps, il est nécessaire d'avoir

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \phi(\tau, \vec{x}) = \phi_+, \quad (2.19)$$

où ϕ_+ est le faux vide.

Il n'existe pas de solutions non-triviales qui soient invariantes sous les translations spatiales. Ainsi, comme toute solution translatée est aussi une solution, et pour obtenir le taux total, il faut intégrer sur le groupe des transformations spatiales (encore une fois, une telle intégration n'affecte que le coefficient A). Supposons que ϕ soit invariant sous les rotations euclidiennes en quatre dimensions. Lorsque l'on passe du temps imaginaire au temps réel, l'invariance $O(4)$ du bounce devient une invariance $O(3, 1)$ de la solution des équations de champ classique. En d'autres termes, la croissance de la bulle, après sa matérialisation, a l'air identique pour tout observateur de Lorentz. On aura alors

$$\phi = \phi(\rho), \quad \rho = \sqrt{\tau^2 + |\vec{x}|^2} \quad (2.20)$$

et les équations qui en découlent,

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho} \frac{d\phi}{d\rho} = U'(\phi) \quad (2.21)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_+ \quad (2.22)$$

$$B = S_E = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 + U \right] \quad (2.23)$$

$$\left. \frac{d\phi}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad (2.24)$$

auront toujours une solution. Notons ici que, si on interprète ϕ comme une position et ρ comme du temps, l'équation 2.21 est l'équation du mouvement d'une particule dans un potentiel $-U(\phi)$ assujettie à de la friction dans le mouvement, d'un type assez particulier, qui est inversement proportionnelle au temps, introduite à cause de l'équation du mouvement en coordonnées sphériques.

Soit ϕ , un champ scalaire réel invariant sous les rotations euclidiennes en \mathbb{R}^4 et $U(\phi)$ un potentiel scalaire dont son inversion $-U(\phi)$ comporte un maximum relatif à ϕ_+ et un maximum absolu à ϕ_- (tel qu'illustré à la figure 2.2). Soit également ϕ_1 tel que $U(\phi_1) = U(\phi_+)$ avec $\phi_+ > \phi_-$. Alors il va toujours exister un point dans l'intervalle $]\phi_-, \phi_1[$ où, au temps $\tau = 0$, on a $d\phi/d\tau = 0$ et pour lequel on peut trouver une solution bounce à l'équation 2.21 tel que $\phi(\pm\infty) = \phi_+$:

Preuve (Argument de continuité) : On va séparer toutes les possibilités en deux cas de figure :

Cas 1 : Supposons que la particule soit relâchée à partir de ϕ_1 , l'équipotentielle de ϕ_+ . La particule n'aura pas assez d'énergie pour aller jusqu'à ϕ_+ à cause de la friction. On aura alors visé trop bas. L'ajout du terme de viscosité dans l'équation du mouvement en coordonnées sphériques ne change pas l'argument parce que l'amortissement visqueux diminue l'énergie :

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right)^2 - U \right] = -\frac{3}{\rho} \left(\frac{d\phi}{d\rho} \right) \leq 0. \quad (2.25)$$

Cas 2 : Si on choisit ϕ pour être suffisamment près de ϕ_- , un maximum du potentiel, on peut s'arranger pour que la particule reste arbitrairement proche de ϕ_- pour un temps ρ arbitrairement grand. Mais, pour ρ suffisamment grand, le coefficient de frottement peut être négligé, auquel cas la particule va effectuer un dépassement.

Alors on peut toujours trouver une solution bounce ; dans la pratique, cependant, trouver une

solution bounce revient à trouver un point à partir duquel lancer une particule au repos pour qu'il aboutisse à ϕ_+ pour $\tau \rightarrow \infty$.

2.6 L'approximation du mur mince

En général, on ne peut pas résoudre analytiquement l'équation du mouvement. Par contre, nous verrons plus loin que si la différence d'énergie entre le faux et le vrai vide est petite, alors on peut le faire. Considérons une fonction symétrique de ϕ , $U_+(\phi)$, avec des minima à $\pm a$:

$$U'_+(\pm a) = 0, \quad (2.26)$$

avec

$$\mu^2 = U''_+(\pm a). \quad (2.27)$$

Par exemple, une fonction de cette forme est :

$$U_+ = \frac{\lambda}{8} \left(\phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2. \quad (2.28)$$

Maintenant, ajoutons à U_+ un petit terme qui brise la symétrie,

$$U = U_+ + \frac{\varepsilon}{2a}(\phi - a), \quad (2.29)$$

où ε est un nombre positif. Ceci décrit maintenant une théorie de la classe qu'on discutait ; à l'ordre non-trivial le plus bas en ε ,

$$\phi_{\pm} = \pm a, \quad (2.30)$$

et ε est la différence de densité d'énergie entre le faux et le vrai vide. Maintenant, nous montrerons que, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, il est possible de calculer le coefficient B analytiquement. Par ce qui précède, il est facile de voir la forme qualitative du bounce résultant. Le bounce ressemble alors à une bulle en \mathbb{R}^4 de rayon R , avec un mur mince séparant le vrai vide à l'intérieur du faux vide à l'extérieur. Pour continuer, nous aurons besoin de plus d'information sur le mur de la bulle. Pour ρ près de R , on peut négliger le terme de friction dans l'équation 2.21 ainsi que le terme dépendant

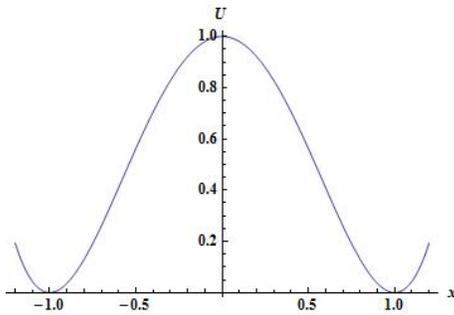
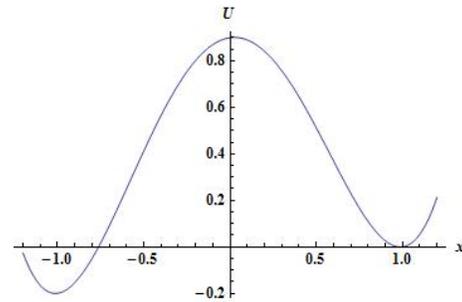
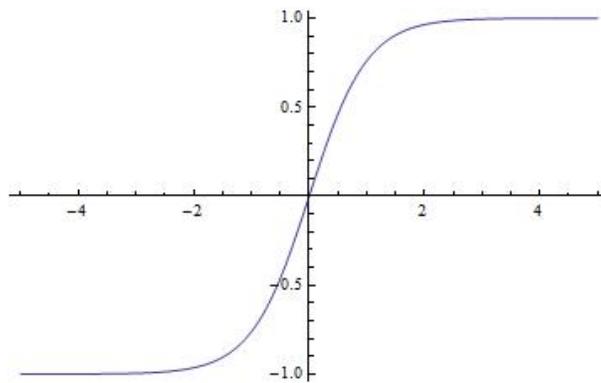
(a) Le potentiel 2.28 avec $\lambda = 8$, $\mu = \sqrt{8}$ (b) Le potentiel 2.29 avec $\lambda = 8$, $\mu = \sqrt{8}$ et $\varepsilon = 0.2$

Figure 2.3 – Le potentiel avant et après la brisure de symétrie

Figure 2.4 – La solution 2.33 pour $a = 1$, $\lambda = 8$, $\mu = \sqrt{8}$

sur ε dans U . Dans un tel régime, l'équation 2.21 devient :

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2} = U'(\phi), \quad (2.31)$$

qui n'est autre que l'équation du mouvement d'une particule dans un potentiel. La solution fondamentale à l'équation précédente est une fonction impaire de $\phi_1(x)$, définie par

$$x = \int_0^{\phi_1} \frac{d\phi}{\sqrt{2U_+(\phi)}} \quad (2.32)$$

ayant pour solution, si on prend U_+ comme dans l'équation 2.28 :

$$\phi = a \tanh\left(\frac{\mu x}{2}\right). \quad (2.33)$$

De manière générale, l'action est donnée par

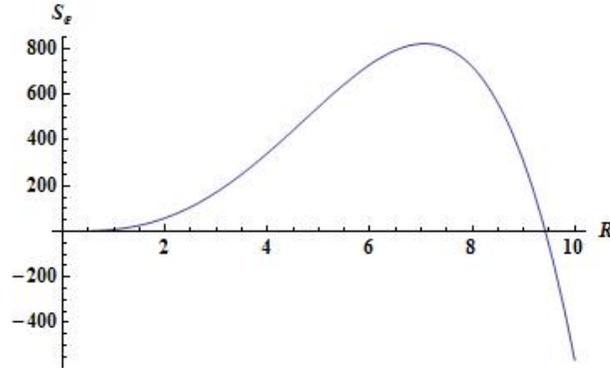


Figure 2.5 – L'action euclidienne de la bulle en fonction du rayon (équation 2.37)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{dx} \right)^2 + U_+ \right] \\
 &= \int_{-a}^a d\phi [2U(\phi)]^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

On trouve, pour la théorie décrite par l'équation 2.28,

$$S_1 = \mu^3 / 3\lambda. \tag{2.35}$$

En termes de ϕ_1 , on peut exprimer analytiquement notre description approximative du bounce,

$$\begin{aligned}
 \phi &= -a, & \rho \ll R \\
 &= \phi_1(\rho - R), & \rho \approx R \\
 &= a, & \rho \gg R.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

L'ingrédient manquant de cette description est R . On peut facilement l'obtenir par calcul variationnel en maximisant l'action euclidienne :

$$\begin{aligned}
 S_E &= 2\pi^2 \int_0^{+\infty} \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_1}{d\rho} \right)^2 + U \right] \\
 &= -\frac{\pi^2 R^4 \varepsilon}{2} + \pi^2 R^3 S_1.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ici, le premier terme vient de l'intérieur de la bulle et le deuxième terme provient du mur. En

faisant varier par rapport à R , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{dS_E}{dR} = 0 &= -2\pi^2 R^3 \varepsilon + 3\pi^2 R^2 S_1 \\ \Rightarrow R &= \frac{3S_1}{2\varepsilon}.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Cette expression est cohérente avec notre description qualitative, de telle sorte que $R \rightarrow +\infty$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On peut utiliser l'équation 2.38 pour donner une condition plus précise sur la validité de notre approximation, qui est que la largeur du mur est $1/\mu$, valable lorsque

$$R \gg \frac{1}{\mu}.\tag{2.39}$$

On trouve également que le coefficient B vaut, dans l'approximation du mur mince,

$$B = S_E = 27\pi^2 S_1^4 / 2\varepsilon^3.\tag{2.40}$$

Pour l'exemple de l'équation 2.28, la condition de validité de l'approximation est

$$\mu^4 / \varepsilon \lambda \gg 1\tag{2.41}$$

et l'action euclidienne vaut approximativement

$$B = \frac{\pi^2 \mu^{12}}{6\varepsilon^3 \lambda^4}.\tag{2.42}$$

2.7 Le destin du faux vide

Dans la section 2.6, une description de la désintégration du faux vide avait été donnée par la mécanique d'une particule : la particule fait le saut du faux minimum et en ressort, par effet tunnel, avec impulsion nulle au point de libération, et se propage classiquement par la suite. Après que les modifications nécessaires aient été apportées, cette description s'applique en théorie des champs.

Le champ classique effectue lui aussi un saut quantique (au temps $t = 0$) à l'état défini par :

$$\phi(t = 0, \vec{x}) = \phi_B(\tau = 0, \vec{x}) \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t = 0, \vec{x}) = 0. \quad (2.44)$$

Par la suite, il évolue selon l'équation classique de champ de Minkowski :

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = U'(\phi). \quad (2.45)$$

La première de ces équations, 2.43, implique que la même fonction, $\phi(\rho)$, qui donne la forme du bounce en \mathbb{R}^4 , donne aussi la forme de la bulle au moment de sa matérialisation en \mathbb{R}^3 . Puisque l'équation de champ de Minkowski est simplement la continuation analytique de l'équation euclidienne de champ, 2.17, au temps réel, la solution de 2.45 est simplement la continuation analytique du bounce en temps réel :

$$\text{si } \begin{cases} t < |\vec{x}|, & \phi(t, \vec{x}) = \phi\left(\rho = \sqrt{|\vec{x}|^2 - t^2}\right) \\ t > |\vec{x}|, & \phi(t, \vec{x}) = \phi\left(\rho = \sqrt{t^2 - |\vec{x}|^2}\right) \end{cases} \quad (2.46)$$

À cause de la symétrie de ϕ , on n'a pas à s'inquiéter du choix de la branche de la racine carrée ; on peut tirer quelques conclusions intéressantes de l'équation 2.46 :

- Il y a un mur, localisé à $\rho = R$ au temps $t = 0$ (figure 2.6) qui sépare les vides selon leur valeur. Alors que la bulle prend de l'expansion, ce mur trace l'hyperboloïde

$$|\vec{x}|^2 - t^2 = R^2, \quad (2.47)$$

où R représente le rayon initial de la bulle de vrai vide. Si la bulle atteint des dimensions macroscopiques, on s'attend à ce que la bulle s'étende à des vitesses ultra-relativistes.

- Comme la bulle de vrai vide s'étend à des vitesses ultra-relativistes, on n'aurait essentiellement aucun avertissement de son arrivée, car un observateur stationnaire ne peut savoir que la bulle s'est formée tant et aussi longtemps que l'observateur (la ligne verticale dans la

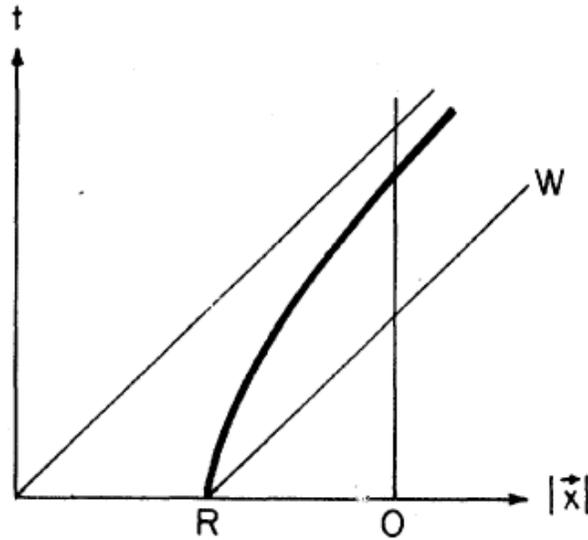


Figure 2.6 – Matérialisation de la bulle de vrai vide, tiré de [9] ; plus de détails dans le texte

figure 2.6) n'a pas intercepté le cône de lumière futur projeté à partir du cas maximal. À un temps R plus tard, l'observateur est dans la bulle.

- La bulle en expansion rapide transporte beaucoup d'énergie. Combien ? Supposons que la densité d'énergie de la bulle au repos soit S_1 par l'approximation du mur mince, l'équation 2.35. Par transformation de Lorentz, la densité surfacique d'énergie d'une bulle en mouvement à vitesse β vaut $S_1 \gamma$. Ainsi, à un temps où le rayon de la bulle vaut $|\vec{x}|$ l'énergie du mur est donnée par

$$E_{\text{mur}} = 4\pi|\vec{x}|^2 S_1 \gamma. \quad (2.48)$$

Par l'équation 2.47,

$$\beta = \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2 - R^2}}{x}. \quad (2.49)$$

Ainsi,

$$E_{\text{mur}} = 4\pi|\vec{x}|^3 S_1 / R = 4\pi\epsilon|\vec{x}|^3 / 3. \quad (2.50)$$

et que, dans l'approximation du mur mince, toute l'énergie relâchée lors du processus de désintégration du faux vide est utilisée à faire accélérer la bulle de vrai vide.

L'invariance $O(4)$ du bounce garantit que le bounce qui en résulte soit le minimum global de l'action euclidienne [18, 19].

2.8 Le coefficient A

Le modèle de la désintégration du faux vide de Coleman serait incomplet sans un traitement du coefficient A dans l'expression du taux de désintégration. Un second article [21] analyse ce coefficient, qui découle d'un traitement quantique qui va au-delà du traitement semi-classique. On ne donnera pas une dérivation détaillée de A ; ce qui suit est un aperçu/résumé de la dérivation.

On obtient le coefficient A par intégration fonctionnelle pour un temps $t \rightarrow \infty$, approximation du mur mince oblige, tout en considérant n bounces avec une séparation temporelle large. Comme l'intégration fonctionnelle requiert de sommer sur l'ensemble des configurations possibles, il est utile de se définir le centre du bounce comme un point où $dx/dt = 0$. L'intégrale fonctionnelle contient de multiples facteurs, dont un venant de l'intégration sur les centres des bounces, un autre qui tient compte qu'il y a n bounces, et un dernier facteur contenant un déterminant fonctionnel d'une matrice d'opérateurs.

La conclusion, dans un contexte de faux vide et dans le domaine de validité de l'approximation du mur mince, est :

$$A = \frac{B^2}{4\pi^2\hbar^2} \left| \frac{\det'[-\partial^2 + U''(\phi)]}{\det[-\partial^2 + U''(\phi_+)]} \right| \times [1 + O(\hbar)] \quad (2.51)$$

$$\Rightarrow \Gamma/V = \frac{B^2}{4\pi^2\hbar^2} \left| \frac{\det'[-\partial^2 + U''(\phi)]}{\det[-\partial^2 + U''(\phi_+)]} \right| e^{-B/\hbar} \times [1 + O(\hbar)], \quad (2.52)$$

où B est l'action du bounce, le déterminant primé de la matrice d'opérateurs représente le déterminant calculé avec les valeurs propres nulles omises, et (ϕ_+) représente le faux vide à partir duquel l'univers tunnelle.

À noter que le déterminant dans le numérateur de l'expression pour A ne peut s'exprimer exactement sous forme fermée. Seulement, si on se trouve dans le régime du mur mince, alors on peut approximer A pour un processus de tunneling [37] et A vaut approximativement

$$A = \eta M^d = \left(\frac{S_E}{2\pi} \right)^{d/2} M^d, \quad (2.53)$$

où M est la masse de la particule et d est le nombre de dimensions d'espace-temps du problème de tunneling traité.

CHAPITRE 3

DÉFAUTS TOPOLOGIQUES

Comme les défauts topologiques sont au coeur du projet de recherche dont le présent mémoire fait l'objet, il convient de parler plus en détail de ce que sont les défauts topologiques, ainsi que de leurs origines. Les défauts topologiques sont les enfants de symétries brisées en tous genres, du plus simple au plus compliqué. Comme nous travaillerons plus en détail avec les kinks, nous nous tâcherons de passer en revue les principales notions requises pour ce faire.

3.1 Brisure spontanée de symétrie

Pour comprendre ce que sont les défauts topologiques, attardons-nous d'abord à la notion de brisure spontanée de symétrie. Et, afin de bien comprendre ce qu'est la brisure spontanée de symétrie, une remarque doit être faite : les lois de la nature peuvent posséder des symétries qui nous ne sont pas manifestes parce que le vide n'est pas invariant sous ces symétries. Prenons, à titre d'exemple, une balle de tennis se trouvant en équilibre instable sur le haut d'un chapeau mexicain (voir la figure 3.1). C'est un état parfaitement symétrique : la balle n'a pas de préférence pour une direction quelconque. Par contre, une perturbation dans une direction donnée fera rouler la balle et plongera la balle dans un état asymétrique. L'invariance sous rotation a été brisée, sans que le système (le chapeau mexicain) soit asymétrique pour autant. Cette situation est appelée *brisure spontanée de symétrie*.

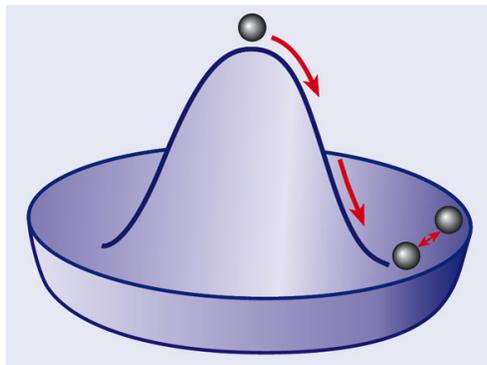


Figure 3.1 – Le potentiel en chapeau mexicain (tiré de [22])

Un autre exemple bien connu de brisure spontanée de symétrie est celui du matériau ferromagnétique. Les atomes d'un matériau ferromagnétique interagissent par une interaction entre les spins les plus proches de telle sorte qu'ils ont tendance à s'aligner pour une température plus basse que la température de Curie pour ce matériau. L'hamiltonien (le système) est invariant sous rotation des spins (le produit scalaire des spins est préservé sous rotation) mais l'état fondamental (où tous les dipôles sont alignés) ne l'est pas. Tel que présenté dans [23] par S. Coleman, un "petit expérimentateur" habitant un matériau ferromagnétique aurait beaucoup de difficulté à détecter l'invariance sous rotation des lois de la nature en raison de l'influence du champ magnétique qui s'exercerait sur toute expérience qu'il pourrait mener, auquel cas il n'aurait aucune raison de croire que l'invariance sous rotation est une symétrie exacte. Ainsi, dans une brisure spontanée de symétrie, la symétrie n'est pas vraiment "brisée", elle est seulement cachée.

C'est le même processus pour notre univers : il commence dans une phase plus symétrique et passe au travers d'une succession de transitions de phase jusqu'à ce que, à basse température, on retombe sur les particules et symétries qui nous sont familières. La symétrie connue des particules élémentaires provient donc d'un plus grand groupe de symétrie (un groupe G). Lors d'une transition de phase, une partie de la symétrie est brisée, alors la symétrie du groupe change : $G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)$. Dans cette expression, chaque flèche représente une transition de phase avec brisure de symétrie.

3.2 Solitons topologiques

Un soliton, ou onde solitaire, est une solution spéciale d'une équation d'onde non-linéaire ayant des propriétés particulières [33], à savoir :

1. La forme et la vitesse d'un paquet d'onde sont constantes
2. La forme et la vitesse sont asymptotiquement retrouvées après l'intersection de deux paquets d'onde

Pour fixer, prenons l'équation d'onde en 1+1 dimensions

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (3.1)$$

une équation linéaire et non-dispersive décrivant la propagation d'une onde. Toute fonction de la forme $f(x \pm vt)$ est une solution ; un exemple bien connu d'ensemble complet de fonctions respectant ces propriétés est celui des fonctions trigonométriques, à savoir $\cos(kx \pm \omega t)$ et $\sin(kx \pm \omega t)$, où $\omega = kv$. De plus, en choisissant une fonction f localisée, il est possible de se construire un paquet d'onde localisé voyageant à une vitesse uniforme $\pm v$ sans déformation dans sa configuration puisque toutes ses composantes se déplacent à la même vitesse $v = \omega/k$.

Également, la linéarité de l'équation rend possible la superposition de solutions de telle manière qu'une combinaison linéaire de solutions soit encore une solution ; on peut ainsi former un paquet d'onde à partir d'une superposition de sinus et de cosinus. À $t \rightarrow -\infty$ on aura alors deux paquets d'onde séparés, qui entreront en contact au temps $t = 0$, et qui retrouvent leurs géométries initiales à $t \rightarrow +\infty$.

Considérons un exemple un peu plus complexe, l'équation de Klein-Gordon en 1+1 dimensions :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + mc^2 \phi = 0. \quad (3.2)$$

Celle-ci est linéaire, mais possède un terme dispersif. Les ondes planes mentionnées précédemment sont encore un ensemble complet de solutions, mais ici : $\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4$ c'est-à-dire que les différentes longueurs d'onde voyagent à différentes vitesses et que, par conséquent, le paquet d'onde se dispersera dans le temps. Ce n'est donc pas un soliton.

Néanmoins, il est tout de même possible, pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à la fois non-linéaires et dispersives, qu'il y ait annulation des effets dispersifs et des effets de non-linéarité [33]. Lorsque des solutions à de tels systèmes possédant la propriété d'annulation des effets dispersifs existent, on parle d'ondes solitaires, qu'on appelle parfois à tort solitons. Si les solutions respectent également la propriété d'annulation des effets de non-linéarité, ce sont des solitons.

En termes de densité d'énergie, de telles solutions localisées ont une densité d'énergie localisée dans le temps et l'espace qui peut s'écrire $\mathcal{E}(x, t)$, qui prend des valeurs finies et qui tombe à zéro à $x \rightarrow \pm\infty$ suffisamment rapidement pour être intégré. De manière générale, un Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi), \quad (3.3)$$

dont son équation du mouvement peut s'écrire

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (3.4)$$

a une fonctionnelle d'énergie

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (3.5)$$

Ainsi, si $E[\phi]$ n'est zéro que lorsque $\phi_i(x,t) = 0$ une solution sera localisée dans l'espace. De cette façon, une onde solitaire est une solution localisée bien définie d'équations de champs non-linéaires dont la densité, en plus d'être localisée, est de la forme $\varepsilon(\vec{x}, t) = \varepsilon(\vec{x} - \vec{u}t)$ où \vec{u} est un vecteur de vitesse.

Un soliton est dit topologique lorsqu'il est une solution non-triviale de l'équation d'Euler-Lagrange d'un potentiel, qui respecte les propriétés précédemment énoncées des solitons. Le fait qu'il y ait plusieurs vides laisse ouverte la possibilité qu'il y ait des solutions d'énergie finie qui soient globalement non-triviales. De plus, si on travaille en plus d'une dimension spatiale, la recherche d'une telle solution pourrait s'avérer être fort compliquée. Ainsi, un défaut topologique survient lorsqu'un morphisme entre l'espace des vides et l'infini spatial n'est pas continûment déformable vers le vrai vide.

3.3 Un exemple : le kink en ϕ^4

Le traitement du kink produit par la brisure spontanée du groupe Z_2 reprend essentiellement Vaschaspati [20], en considérant un champ scalaire à 1+1 dimension avec la densité lagrangienne suivante, avec V illustré à la figure 3.2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - V(\phi) \\ &= \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $c = 1$. À partir du principe de moindre action, on en tire l'équation du mouvement,

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \lambda(\phi^2 - \eta^2)\phi = 0. \quad (3.7)$$

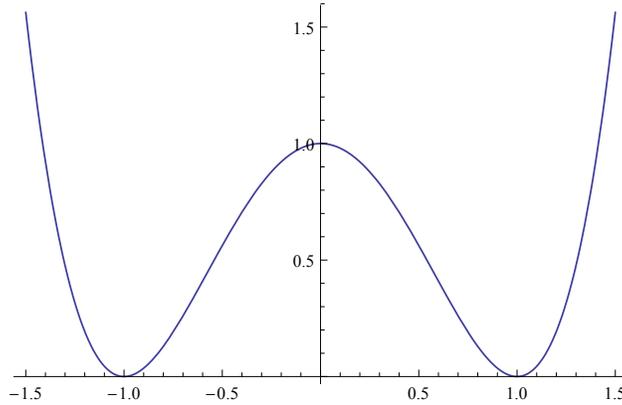


Figure 3.2 – Le potentiel ϕ^4 pour $\eta = 1$

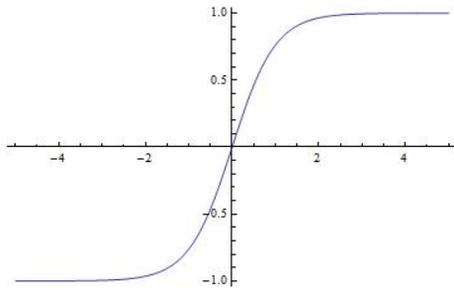
Cherchons des configurations d'énergie finie. Pour qu'une solution ait une énergie finie, il faut que la densité d'énergie soit nulle pour $x = \pm\infty$, écartant ainsi toutes les solutions triviales $\phi(t, x) = \text{cte}$, avec $\phi(t, x) \neq \pm\eta \forall x$. Les deux solutions triviales résiduelles sont $\phi(t, x) = \pm\eta$, ayant des densités d'énergie nulles. Mais cette situation est un peu simpliste et on va maintenant considérer le cas où on a des régions dans un vide et d'autres régions dans un autre vide, comme, par exemple, $\phi(t, -\infty) = -\eta$ et $\phi(t, +\infty) = +\eta$. Et les solutions statiques non-triviales devront respecter, tout en ayant une énergie finie,

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (3.8)$$

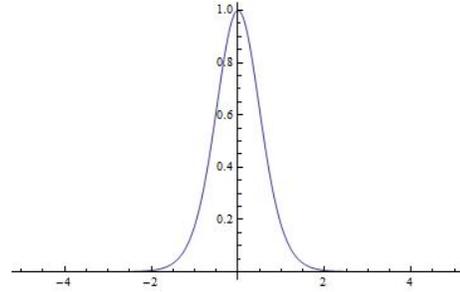
On peut interpréter 3.8 comme l'équation du mouvement d'une particule dans un potentiel $-V(\phi)$ selon la coordonnée ϕ dans le temps x . L'énergie totale d'un tel mouvement dans l'analogie mécanique est

$$W \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V(\phi). \quad (3.9)$$

Avec les conditions aux frontières qu'on impose (lorsque $x \rightarrow \pm\infty$, $V(\phi) \rightarrow 0$ et $\partial\phi/\partial x \rightarrow 0$), W ,



(a) L'équation 3.13 pour $\lambda = 2, \eta = 1, x_0 = 0$



(b) La densité d'énergie pour $\lambda = 2, \eta = 1, x_0 = 0$

Figure 3.3 – Le kink ϕ^4

conservé dans le temps x , est nul. Et maintenant, on multiplie 3.8 par ϕ' afin de la résoudre :

$$\begin{aligned}\phi' \phi'' &= \phi' \frac{dV}{d\phi} \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\phi'^2}{2} \right) &= \frac{dV}{dx} \\ \phi' &= \pm \sqrt{2V}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

On peut, à présent, intégrer l'équation différentielle qui en résulte :

$$\int_{x_0}^x dy = x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{dx}{\sqrt{2V(x)}}. \quad (3.11)$$

Pour le kink en ϕ^4 , la solution de l'équation 3.11 est, avec $x_0 = 0$:

$$\phi_k(x) = \pm \eta \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta x \right). \quad (3.12)$$

La solution avec le signe + est appelée le kink, alors que la solution avec le signe - est appelée l'anti-kink. Une famille de solutions peut être obtenue par translation spatiale de la solution 3.12 :

$$\phi_k(x) = \pm \eta \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta (x - x_0) \right). \quad (3.13)$$

On peut facilement vérifier que l'énergie est invariante sous translation spatiale. Calculons la

densité d'énergie d'un tel système :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = 2V(\phi) \quad (3.14)$$

$$= \frac{\lambda\eta^4}{2} \operatorname{sech}^4 \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta (x - x_0) \right). \quad (3.15)$$

Donc la densité d'énergie est localisée autour du point x_0 et son énergie est donc finie.

$$E = \int dx \varepsilon = \frac{\sqrt{8}m^3}{3\lambda} \quad (3.16)$$

où $m^2 = \lambda\eta^2$, autrement dit la masse des quanta de ϕ . Le kink et l'anti-kink sont donc des ondes solitaires. On peut finalement faire un boost à la solution 3.13 pour ainsi obtenir

$$\phi_k(x, t) = \pm\eta \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \eta \frac{(x - x_0) - \beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right), \quad (3.17)$$

où $\beta \in [0, 1[$ parce qu'on fait l'hypothèse que $\hbar = c = 1$ et que ce choix d'unités demeurera pour le reste de ce présent ouvrage.

3.3.1 Nombre de minima > 2

Considérons, comme dans Rajaraman [33], un potentiel muni d'un seul minimum à ϕ_1 , où $V(\phi_1) = 0$: dans le potentiel inversé, la particule ne verrait alors qu'un maximum à ϕ_1 . Si la particule doit quitter cette position à un temps $t = -\infty$ et y revenir à $t = +\infty$, il n'y a aucune trajectoire non-triviale possible, car dès qu'elle quitte cette position ϕ_1 elle ne pourra jamais y revenir. Maintenant, prenons un potentiel avec N minima dégénérés, où $V(\phi_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, N$, avec $N > 2$. (Le cas $N = 3$ est illustré dans la figure 3.4(a)) Du point de vue de la particule, il devient maintenant possible de, par exemple, passer de $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi_i$ à $\phi(x \rightarrow +\infty) = \phi_{i+1}$, ou le contraire. Il en va ainsi de n'importe quelle paire consécutive d'indices i , et alors il y aurait $2(N - 1)$ trajectoires non-triviales possibles, connectant des minima voisins. Les autres chemins, comme passer de ϕ_{i-1} à ϕ_i et ensuite retourner à ϕ_{i-1} , ou bien continuer vers ϕ_{i+1} , leur sont interdits, car,

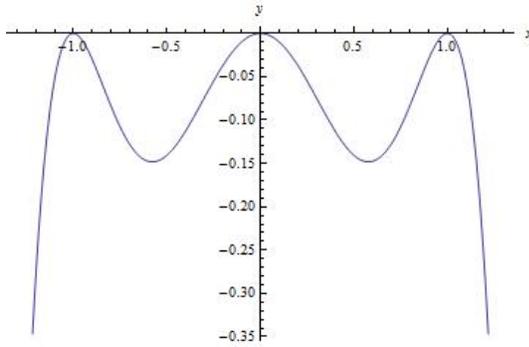
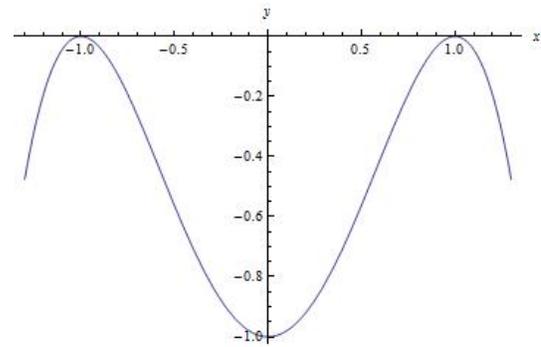
(a) Le potentiel inversé pour $N = 3$ (b) Le potentiel inversé pour $N = 2$

Figure 3.4 – Le potentiel inversé

à ϕ_i ,

$$V(\phi_i) = \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_i} = 0,$$

auquel cas on aura

$$\phi' = \pm \sqrt{2V(\phi_i)} = 0$$

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi}(\phi_i) = 0$$

$$\phi''' = \left. \frac{d(\phi'')}{dx} \right|_{\phi_i} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dV}{d\phi} \right) = \frac{d^2V}{d\phi^2} \phi' = 0$$

$$\phi'''' = \frac{d^2V}{d\phi^2} \phi'' + \frac{d^3V}{d\phi^3} \phi'^2 = 0$$

et ainsi de suite, car on dérive des expressions identiquement nulles à chaque fois qu'on passe à une dérivée d'ordre supérieur, étant donné qu'on peut exprimer toute dérivée d'ordre supérieur en termes de dérivées du potentiel par rapport à ϕ et de dérivées d'ordres inférieurs de ϕ ; bref, toutes les dérivées seront nulles en ϕ_i . La particule s'immobilise en ϕ_i à $x \rightarrow +\infty$ et ne peut ni retourner à ϕ_{i-1} , ni continuer à ϕ_{i+1} .

3.4 Contexte physique

Les défauts topologiques sont des configurations stables de matière formées lors de transitions de phase dans l'univers primitif (à noter que, par le mécanisme de Kibble, il y aurait *nécessairement* formation de défauts topologiques dans une transition de phase, auquel cas leur présence

ne serait pas simplement une possibilité mais une certitude [24]). À un temps t , les régions de l'univers séparées les unes des autres par une distance plus grande que $x = ct$ ne peuvent pas se communiquer entre elles. Dans une transition de phase où la symétrie est brisée, des régions de l'univers vont se retrouver dans différents minima de l'ensemble des états permis. Un défaut topologique est précisément une frontière entre des régions avec différents choix de minimum. Ainsi, leur formation est inévitable parce que, par causalité, différentes régions ne peuvent s'entendre sur leur choix de minimum.

Lorsque l'univers se refroidit et prend de l'expansion, les symétries dans les lois de la physique commencent à se briser dans des régions qui s'étendent à des vitesses ultra-relativistes. Les défauts apparaissent lorsque différentes régions entrent en contact les unes avec les autres. La matière contenue à l'intérieur de ces défauts est dans la phase symétrique originale, qui persiste après que la transition vers la phase asymétrique soit complétée. Selon la nature de la symétrie brisée, différents solitons auraient été formés à l'époque de l'univers primordial, par exemple :

1. Les monopôles, qui se forment lorsqu'une symétrie sphérique est brisée. On leur prédit généralement une charge magnétique non-nulle et que les *faux monopôles* n'aident pas beaucoup à faire que l'univers se désintègre vers le vrai vide avant que les monopôles atteignent le point d'instabilité classique [25]
2. Les vortex, qui se forment lorsqu'une symétrie cylindrique est brisée en 2+1 dimensions. Lorsque la différence entre les vides est suffisamment élevée, on atteint un *point de dissociation* au-delà duquel les solutions stables n'existent plus dans le modèle abélien de Higgs d'ordre 6 en 2+1 dimensions [26]. On ne peut pas modifier le nombre d'enroulement (c'est-à-dire le nombre de fois qu'on effectue le tour de l'infini spatial alors qu'on effectue une seule fois le tour de l'espace des vides) sans dépenser une quantité infinie d'énergie. Le nombre d'enroulement est donc un exemple d'*indice topologique*.
3. Lorsqu'une symétrie axiale ou cylindrique est brisée en 3+1 dimensions, on parlera alors de corde cosmique à cause de leur comportement essentiellement curviligne, dont leur rayon, initialement négligeable, augmente à mesure que le faux vide s'y désintègre [27]
4. Les murs de domaine, dont leur comportement rappelle celui des surfaces, se forment lors d'une brisure de symétrie discrète. Leur formation sépare l'espace en plusieurs régions. Un

cas particulier de murs de domaine est le cas en 1+1 dimension, appelé kink. Ce mémoire se concentre sur la désintégration du faux vide induite par les kinks.

On parlera de vrais ou de faux défauts topologiques selon la nature du vide dans lequel ces défauts sont plongés [25]. D'autres défauts peuvent apparaître lorsque des symétries émanant de groupes plus complexes sont brisés. Dans un contexte cosmologique, les défauts topologiques sont des phénomènes extrêmement énergétiques et les défauts topologiques émanant de la cosmologie (par exemple, les monopôles peuvent avoir des masses allant jusqu'à 10^{26} eV [7]) ne pourraient être reproduits dans un laboratoire sur Terre et pourraient, en théorie, être observés, mais n'ont pas encore été observés à ce jour. Certains défauts demeurent possibles : toute théorie de grande unification prédit l'existence de monopôles magnétiques produits avant la phase inflationnaire [7] alors que les cordes cosmiques [28] et possiblement les textures peuvent être des sources de gravité à l'origine des premières structures à grande échelle dans l'univers [29].

Par contre, ils existent, sous d'autres formes, dans un contexte de matière condensée. L'analogie en matière condensée des cordes cosmiques seraient des lignes de vortex, par exemple dans l'hélium-3 superfluide [30], ou de lignes de vortex dans des supraconducteurs de type II [31] alors qu'un système de murs de domaine peut aussi définir des domaines magnétiques [32] et les domaines magnétiques sont animés d'un moment magnétique qui diffère d'un domaine à l'autre, autant en norme qu'en orientation, afin de diminuer l'énergie interne de l'aimant.

On souhaite donc décrire mathématiquement une solution reliant deux minima différents d'un potentiel après une transition de phase brisant la symétrie de la phase initiale. Il se trouve que dans le modèle qui nous intéresse, les défauts topologiques seront des solutions de systèmes d'équations différentielles non-linéaires et non-dispersifs, des solitons.

CHAPITRE 4

LE MODÈLE ET SES SOLUTIONS

Ce chapitre va couvrir un modèle à deux champs couplés, ainsi que des solutions obtenues à partir de ce modèle.

4.1 Motivation

On veut un modèle avec un soliton qui interpole entre les faux vides afin d'obtenir une solution non-triviale d'énergie finie. Ainsi, on se définit V_1 comme un potentiel ϕ^6 avec le vrai vide à l'origine et des faux minima à $\phi = \pm a$. Ce terme du potentiel fait en sorte qu'on a, aux faux minima, $V_1(\pm a) = 0$ (voir la figure 4.1) :

$$V_1 = \frac{\lambda_1}{a^2}(\phi^2 - a^2)^2(\phi^2 - a^2\delta_1), \quad (4.1)$$

où λ_1, δ_1 sont sans dimension et a contient les unités d'une masse. On résoud l'équation statique

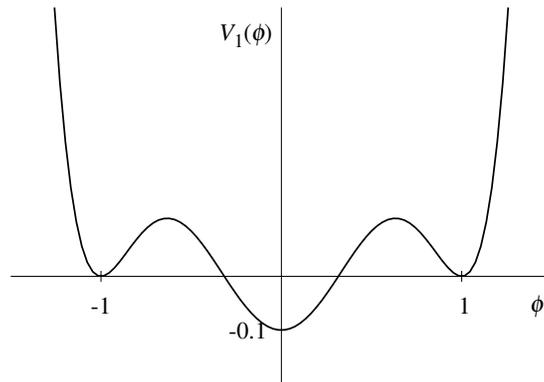


Figure 4.1 – V_1 pour $a = 1$, $\delta_1 = 0.1$ (Tiré de [6])

afin de déterminer la forme de la solution et, de là, de déterminer la présence ou l'absence de soliton :

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

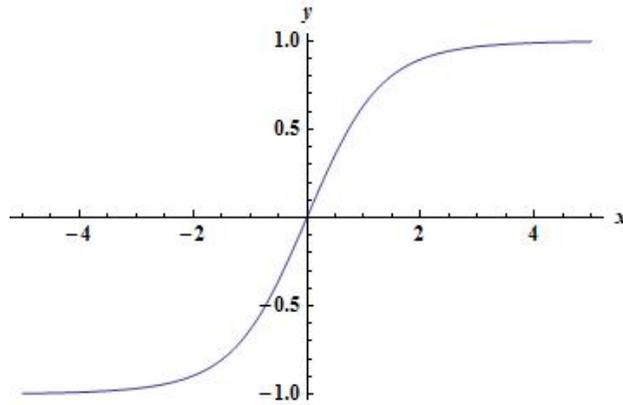


Figure 4.2 – Le kink ϕ^6 (équation 4.3 avec $C_1 = C_2 = 3$)

d'où on tire, pour $\delta_1 = 0$:

$$\begin{aligned}\phi' &= \pm\sqrt{2V} \\ \phi' &= \pm(\phi - \phi^3).\end{aligned}\tag{4.2}$$

La solution analytique pour l'équation 4.2 avec $x_0 = 0$ vaut (voir figure 4.2)

$$\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + C_1}} - \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^{-2x} + C_2}}.\tag{4.3}$$

Il appert que, pour $\delta_1 \neq 0$, les solutions de ce modèle ne produisent pas de solutions stables. Si on examine une configuration qui va de -1 à 1 , il est énergétiquement favorable que la configuration se sépare en deux moitiés qui s'éloignent l'une de l'autre. Or,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\phi'(x,t)^2}{2} + V(x) \right] = -\infty\tag{4.4}$$

alors on n'aura plus de solution d'énergie finie. Pour cette raison, on cherche un autre modèle plus complexe avec l'ajout d'un deuxième scalaire, dans l'espoir de solutions stables.

4.2 Le modèle

Comme nous sommes convaincus à présent qu'un modèle à un seul champ scalaire ne produit pas de solutions stables, nous devons nous tourner vers un modèle à deux champs scalaires, avec

un Lagrangien de la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{(\partial\chi)^2}{2} - V(\phi, \chi). \quad (4.5)$$

Dans ce modèle, ϕ est un champ antisymétrique qui comporte deux demi-kinks qui vont de $-a \rightarrow 0 \rightarrow a$ et χ , un champ symétrique qui se veut une enveloppe symétrique kink-antikink allant de $-b \rightarrow b \rightarrow -b$. On aimerait aussi avoir une bosse centrale suffisamment haute en $(\phi, \chi) \simeq (0, 0)$ pour que les solutions aient à contourner ladite bosse par un chemin qui passerait par $\chi > 0$. Le modèle ainsi proposé est décrit par le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{(\partial\chi)^2}{2} - \left(\frac{\lambda_1}{a^2} (\phi^2 - a^2)^2 (\phi^2 - a^2 \delta_1) + \frac{\lambda_2 a^2}{a^2 \gamma + \phi^2} \left[(\chi^2 - b^2)^2 - \frac{\delta_2}{4} (\chi - 2b)(\chi + b)^2 \right] \right), \quad (4.6)$$

où λ_2, δ_2 sont sans dimension et b porte les unités d'une masse. Ainsi, le potentiel peut s'écrire $V = V_1 + V_2 \lambda_2 a^2 / (a^2 \phi^2 + \gamma)$. Le potentiel est décomposé en deux composantes : V_1 , un potentiel scalaire qui est précisément l'équation 4.1, et V_2 , qui est un potentiel scalaire de la forme χ^4 . Le préfacteur qui se trouve devant V_2 est un terme qui est présent afin de coupler les deux champs. De plus, un des effets de ce préfacteur est de créer une barrière d'énergie importante à $\phi = 0$ et donc de forcer χ à quitter $\chi = -1$. Ainsi, V_2 vaut :

$$V_2 = (\chi^2 - b^2)^2 - \frac{\delta_2 b}{4} (\chi - 2b)(\chi + b)^2. \quad (4.7)$$

On peut comprendre intuitivement pourquoi il y aurait des solutions stables qui interpolent entre les deux faux vides $(\phi, \chi) = (\pm 1, -1)$. Considérons une configuration comme dans la figure 4.4, où ϕ contient deux demi-kinks en $\pm l_\phi$, et ces deux demi-kinks interpolent respectivement entre -1 et 0, et entre 0 et 1 respectivement, et χ , qui prend la forme d'un kink-antikink en $\pm l_\chi$, où $l_\chi > l_\phi$. (Pour simplifier la discussion, on va appeler tous ces objets des kinks) Il y a cinq régions où les champs sont approximativement constants, deux paires qui sont reliées par symétrie : ces régions sont dénotées (i) entre les deux kinks ϕ , (ii), les régions entre les kinks ϕ et χ et (iii), extérieur aux kinks χ . Dans ces régions, la densité d'énergie de gradient peut être négligé, donc

les trois densités d'énergie sont :

$$V_{(i)} = -\delta_1 + \frac{\delta_2}{\gamma}, \quad V_{(ii)} = \frac{\delta_2}{1+\gamma}, \quad V_{(iii)} = 0. \quad (4.8)$$

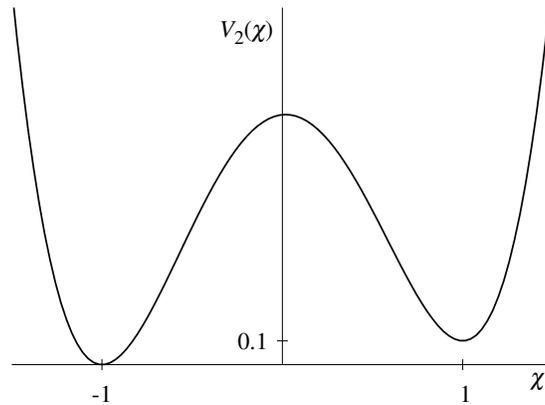


Figure 4.3 – V_2 pour $b = 1$, $\delta_2 = 0.1$ (Tiré de [6])

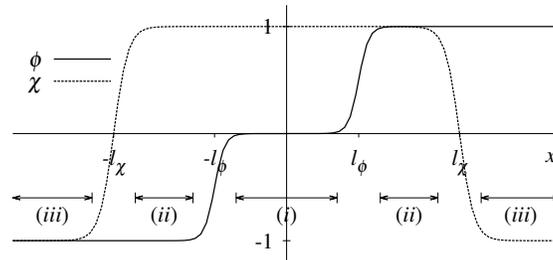


Figure 4.4 – Une configuration possible du système (Tiré de [6])

Il est facile de voir que la configuration décrite dans la figure 4.4 ne peut pas être une solution. Considérons une famille de telles configurations paramétrisées par l_ϕ, l_χ où les positions des transitions changent mais pas leurs positions. Pour que la configuration soit une solution, son énergie doit être stationnaire en tant que fonction de l_ϕ, l_χ . Pour des déplacements infinitésimaux dl_ϕ, dl_χ , la variation en énergie est :

$$\Delta E = 2(V_{(i)} - V_{(ii)})dl_\phi + 2(V_{(ii)} - V_{(iii)})dl_\chi. \quad (4.9)$$

Comme $V_{(iii)} < V_{(ii)}$, l'énergie n'est **PAS** stationnaire en l_χ ; en fait, si on le laisse évoluer dynamiquement, les deux kinks χ s'attireraient et s'écraseraient à l'origine pour réduire l'énergie statique. Similairement, comme $V_{(iii)} < V_{(i)}$, il serait énergétiquement avantageux pour la région (i) de s'écrouler à zéro, tout en convertissant du faux vide au vrai vide.

Cet argument variationnel n'est pas assez fort en soi pour déterminer si une configuration telle que décrite dans la figure 4.4 peut évoluer en une solution stable car une fois qu'il y a du recouplement entre les kinks, ils interagissent entre eux et l'énergie n'est plus une fonction analytique de l_ϕ, l_χ . Si la configuration peut être déformée vers une configuration instable sans qu'il n'y ait de barrière énergétique entre les deux, il n'évoluera pas en une solution stable.

Une manière évidente de passer de la figure 4.4 à une configuration instable serait de déformer χ vers une constante auquel cas les demi-kinks ϕ se repousseraient. On déformerait le kink de manière à ce que $\chi(0)$, la valeur entre les kinks ϕ passe de $+1$ à -1 , et alors les champs passeraient à travers la barrière énergétique en $(\phi, \chi) \simeq (0, 0)$ qui pourrait potentiellement être assez grande pour empêcher la déformation.

Bien entendu, cet argument ne fait que suggérer l'existence de solutions stables. En l'absence d'un argument analytique convaincant pour leur existence, on doit se résigner à résoudre numériquement les équations du mouvement, dont leur résolution sera décrite à la prochaine section.

4.3 Changement d'échelle

Maintenant, on souhaite éliminer des paramètres de 4.6 afin de simplifier l'analyse qui suit. Au début, il y a sept paramètres ; on peut en éliminer deux avec un changement d'échelle des coordonnées et des masses. D'une part, soit $\phi \rightarrow a\phi, \chi \rightarrow b\chi$ et $\partial \rightarrow \lambda^{\frac{1}{2}}a\partial$. On insère dans 4.6 :

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda_1 a^4 (\partial \phi)^2}{2} + \frac{\lambda_1 a^2 b^2 (\partial \chi)^2}{2} - \left(\lambda_1 a^4 (\phi^2 - 1)^2 (\phi^2 - \delta_1) + \frac{\lambda_2 b^4}{\gamma + \phi^2} \left[(\chi^2 - b^2)^2 - \frac{\delta_2 b}{4} (\chi - 2)(\chi + 1)^2 \right] \right). \quad (4.10)$$

Définissons une transformation supplémentaire, $b^2 = a^2 \frac{\alpha}{\beta}$, $\lambda_2 = \frac{\beta^2 \lambda_1}{\alpha}$ qui donne :

$$\mathcal{L} = \lambda_1 a^4 \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{\alpha(\partial\chi)^2}{2\beta} - \left((\phi^2 - 1)^2(\phi^2 - \delta_1) + \frac{\alpha}{\gamma + \phi^2} \left[(\chi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4}(\chi - 2)(\chi + 1)^2 \right] \right) \right]. \quad (4.11)$$

On a alors éliminé deux paramètres dans le processus de changement d'échelle 4.6 vers 4.11, les paramètres résiduels sont définis comme $\alpha, \beta, \gamma, \delta_1$ et δ_2 . Même si cela constitue une perte de généralité, à partir de ce point, on va présumer que $\alpha = \beta = 1$. Pour que notre potentiel ait les propriétés désirées (un exemple d'un tel potentiel est illustré à la figure 4.5), un calcul de dérivées nous donne qu'on doit avoir $\delta_1 \leq 1$ et $\delta_2 \leq 16/3$ sans quoi on aura un point-selle en $\chi = 1$ ou encore en $\phi \pm 1$, ce qui ferait en sorte qu'on ne pourrait pas avoir de soliton ou, pire encore, seulement un vrai vide et pas de faux vide.

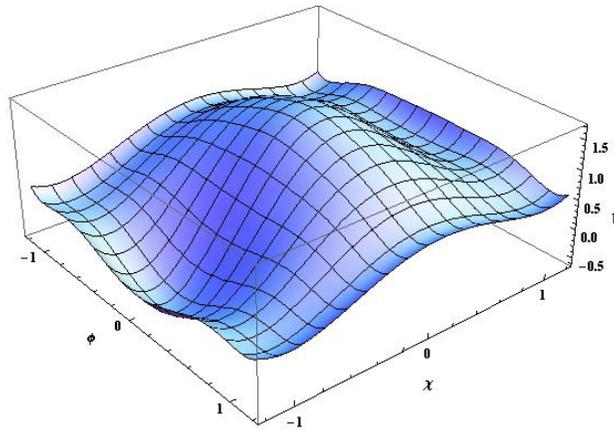


Figure 4.5 – Le potentiel pour $\gamma = 0.6, \delta_1 = 0.6, \delta_2 = 0.7$; ces valeurs ne produisent pas de solutions stables, mais on les a choisies pour illustrer les aspects importants du potentiel

4.4 Les méthodes numériques d'obtention des solutions statiques

Les équations du mouvement qui découlent de notre potentiel (avec $\alpha = \beta = 1$) sont :

$$\phi'' - 2\phi(\phi^2 - 1)(3\phi^2 - 1 - 2\delta_1) + \frac{2\phi}{(\phi^2 + \gamma)^2} \left[(\chi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4}(\chi - 2)(\chi + 1)^2 \right] = 0 \quad (4.12)$$

$$\chi'' - \frac{1}{(\phi^2 + \gamma)} (\chi^2 - 1)(4\chi - 3\delta_2/4) = 0. \quad (4.13)$$

Étant donné une solution statique, l'énergie est :

$$E[\phi, \chi] = \int dx \left(\frac{\phi'^2 + \chi'^2}{2} + V(\phi, \chi) \right). \quad (4.14)$$

On recherche des solutions de type kink qui interpolent entre les faux vides $(\phi, \chi) = (\pm 1, 1)$. On s'attend à ce que ϕ soit antisymétrique et χ symétrique sous la réflexion de l'espace de sorte qu'on puisse résoudre les équations pour la demi-droite $x \geq 0$ avec les conditions aux frontières suivantes :

$$\phi(0) = 0, \quad \chi'(0) = 0, \quad (4.15)$$

$$\phi(x) \rightarrow 1, \quad \chi(x) \rightarrow -1, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4.16)$$

Nous avons essayé, à l'aide de Mathematica, de résoudre analytiquement les équations du mouvement, mais nous n'y sommes pas parvenus. Comme une solution analytique n'a pas été trouvée, on utilise des méthodes numériques, comme le shooting ou la relaxation. Puisque la méthode du shooting s'est avéré être plus lourde en temps de calcul, alors on passe à une méthode numérique dite de *relaxation* afin de résoudre numériquement les équations du mouvement tirées du Lagrangien 4.11. En raison des propriétés de symétrie des solutions attendues, i.e. ϕ antisymétrique et χ symétrique, on a résolu le système d'équations pour la moitié positive de l'espace seulement.

4.4.1 La méthode de relaxation

Le traitement de la méthode de relaxation reprend essentiellement celui de Numerical Recipes [34]. C'est une méthode itérative bien utile pour résoudre numériquement des systèmes d'équations différentielles sur un domaine spatial avec un maillage à M points. Ces équations sont discrétisées sous la forme de problèmes aux différences finies. Dans la pratique, pour résoudre un système de N équations différentielles ordinaires couplées d'ordre J , il faut en tirer $J \times N$ équations aux différences finies du premier ordre. Par la suite, il faut appliquer la méthode sur chacune de ces équations avec les conditions aux frontières appropriées, ainsi qu'une estimation initiale aux $J \times N$ solutions du système.

Bien que la méthode de relaxation soit, à la base, une méthode pour résoudre un système carré

de n équations linéaires $A\vec{x} = \vec{b}$, l'adaptation au problème des équations différentielles couplées n'affecte que la forme prise par les coefficients de la matrice A . Si on veut que chaque solution à un système d'équations différentielles couplées soit définie sur un maillage de M points, alors la matrice A sera d'ordre $(J \times N \times M) \times (J \times N \times M)$ et \vec{b} contiendra $J \times N \times M$ éléments. La première composante de la matrice A est la matrice triangulaire inférieure L_* et la deuxième composante est la matrice triangulaire strictement supérieure U . On décompose alors une matrice A comme suit :

$$A = L_* + U, \quad (4.17)$$

où

$$L_* = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

La méthode de relaxation est définie par l'itération

$$L_*\vec{x}^{k+1} = \vec{b} - U\vec{x}^k, \quad (4.19)$$

où \vec{x}^k est la k -ième itération de \vec{x} , \vec{x}^{k+1} est la $(k+1)$ -ième itération de \vec{x} et la matrice A est décomposée en deux composantes définies précédemment. Le système d'équations linéaires peut être réécrit comme

$$L_*\vec{x} = \vec{b} - U\vec{x}. \quad (4.20)$$

La méthode de relaxation résout alors le côté gauche de cette expression pour \vec{x} , en utilisant les valeurs antérieures de \vec{x} sur le côté droit. L'expression analytique devient alors

$$\vec{x}^{k+1} = L_*^{-1}(\vec{b} - U\vec{x}^k). \quad (4.21)$$

Mais, en exploitant la forme triangulaire de L_* , les éléments de \vec{x}^{k+1} peuvent être calculés de

manière séquentielle en utilisant la substitution avant :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i = \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.22)$$

L'algorithme est généralement poursuivi jusqu'à ce que les changements faits par une itération soient en-deçà d'une certaine tolérance, préalablement choisie.

4.4.2 Linéarisation de l'équation du mouvement

Comme, pour résoudre l'équation différentielle à l'aide de méthodes numériques, on doit intégrer l'équation sur un domaine spatialement fini, on ne peut pas, en général, utiliser la condition aux frontières à l'infini ; on cherchera alors à trouver une condition aux frontières adoucie pour tenir compte du fait que le domaine est spatialement fini. Pour ce faire, on va linéariser l'équation du mouvement. Si la condition aux frontières $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_0(x) = g$ était transposée en un point de valeur finie, c'est-à-dire $f_1(x_f) = g$, il y aurait alors un danger à l'extrapolation, car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) \neq g$. En général, il y a deux possibilités lorsque l'extrapolation est faite au-delà de x_f : soit $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) > g$, ou bien $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) < g$.

Soit un problème aux frontières à l'infini tel qu'on a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_0(x) = \phi_l$ où ϕ_l est la valeur limite de la solution à l'infini. Par suite, on effectue la substitution $\phi \rightarrow \phi_l - \varepsilon(x)$ dans l'équation qui en résulte, et on élimine tous les termes non-linéaires en ε , de sorte qu'on puisse, de là, résoudre pour la constante d'intégration et, de là, en tirer une condition sur ϕ et ses dérivées. Prenons, à titre d'exemple, le potentiel ϕ^4 , avec l'exemple résolu plus loin. Dans ce cas, l'extrapolation au-delà de $x = x_f$ va mener à une explosion de ϕ si on impose $\phi(x_f) = 1$, en raison du fait que $\phi'(x_f) \neq 0$ (en fait $\phi'(x_f) > 0$) et que $\phi(x)$ va continuer à croître.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{(\partial\phi)^2}{2} - \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2 \\ \Rightarrow \phi'' &= \phi(\phi^2 - 1) \\ -\varepsilon'' &= (1 - \varepsilon)(-2\varepsilon + \varepsilon^2) \\ -\varepsilon'' &= -2\varepsilon, \end{aligned} \quad (4.23)$$

avec solution $\varepsilon = Ae^{\pm\sqrt{2}x}$ et on choisit la branche négative de la racine. Dès lors, comme on sait

que, à l'infini, $\phi = 1$, on peut fort bien dire

$$\begin{aligned} -1 + \phi &= -Ae^{-\sqrt{2}x} \\ \phi' &= \sqrt{2}Ae^{-\sqrt{2}x}. \end{aligned}$$

Donc la condition limite $\phi(\infty)$ est remplacée par :

$$\phi' + \sqrt{2}(\phi - 1) = 0. \quad (4.24)$$

Lorsqu'on applique la méthode ci-haute au problème défini par 4.6, on en tire, pour les variables dépendantes de notre problème, avec $\sigma_{1,2}$ les coefficients du terme indépendant de la dérivée, qui sont analogues à des masses caractéristiques :

$$\text{Équations linéarisées} = \begin{cases} \phi' + \sigma_1(\phi - 1) = 0, & \sigma_1 = \sqrt{8(1 - \delta_1)} \\ \chi' + \sigma_2(\chi + 1) = 0, & \sigma_2 = \sqrt{\frac{16 + 3\delta_2}{1 + \gamma}} \end{cases}$$

On peut également en tirer un élément déterminant de la longueur du domaine d'intégration à partir de la linéarisation du problème, via le calcul de la longueur caractéristique, qui revient simplement à calculer l'inverse multiplicatif des masses caractéristiques. Finalement, on peut se définir une longueur d'intégration comme suit :

$$x_{\max} = k_f \max \left(\frac{1}{\sqrt{8(1 - \delta_1)}}, \sqrt{\frac{1 + \gamma}{16 + 3\delta_2}} \right), \quad (4.25)$$

où k_f est un facteur multiplicatif ; pour les besoins du problème, on a souvent pris k_f compris entre 15 et 30 afin d'optimiser le temps de calcul. Bien entendu, allonger le domaine d'intégration (augmenter k_f) permet d'améliorer la qualité des solutions aux frontières, mais, ce faisant, il faut augmenter le nombre de points (et le temps de calcul) pour obtenir la même résolution spatiale.

4.5 L'obtention des solutions numériques

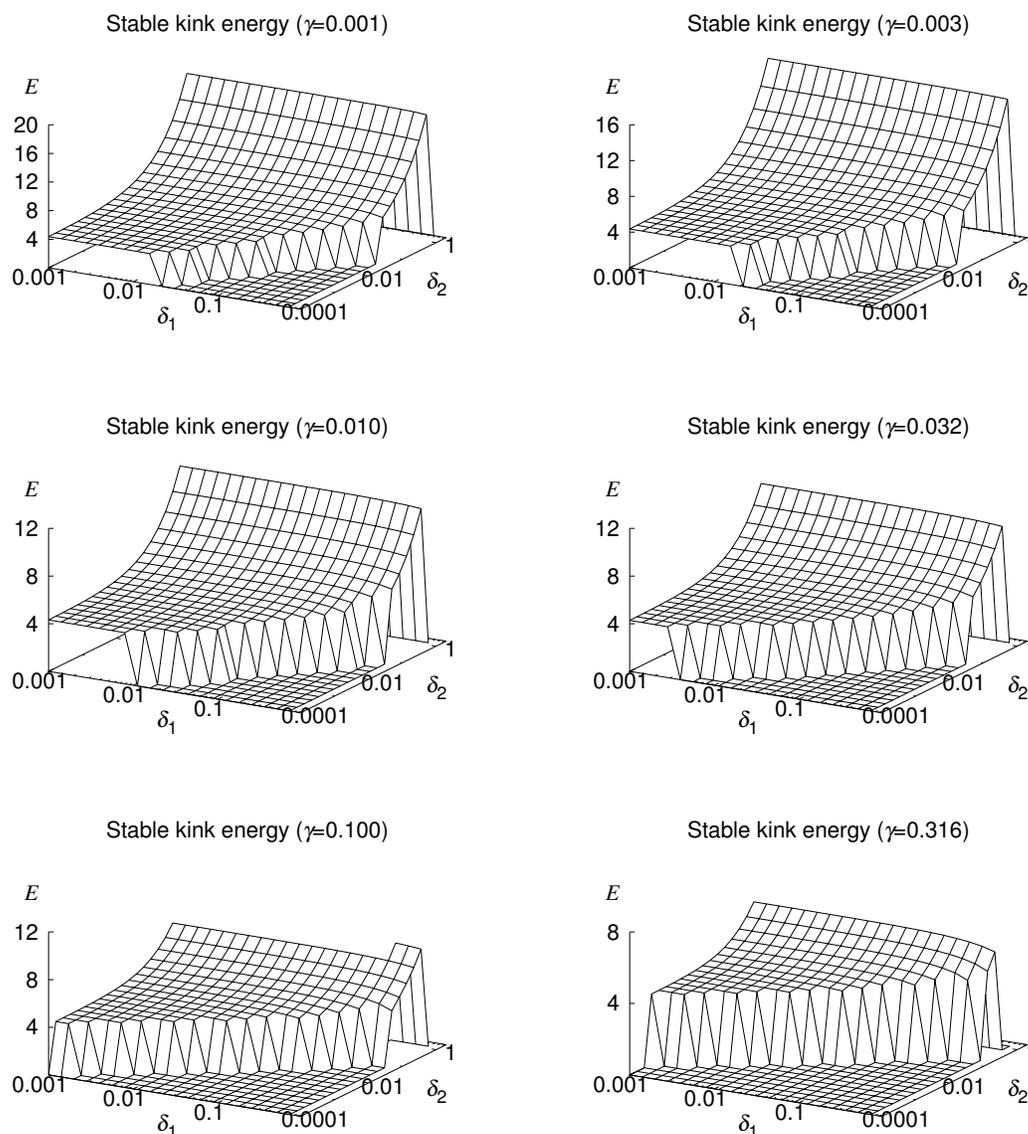


Figure 4.6 – L'énergie comme une fonction de δ_1 , δ_2 pour six valeurs de γ . Quand aucune solution n'a été trouvée, l'énergie est prise comme étant nulle. (Tirés de [6])

Un balayage de l'espace des paramètres pour des solutions stables a été entrepris sur une grande gamme de valeurs de δ_1 , δ_2 pour six valeurs de γ . Lorsque les solutions stables ont été détectées, en général, les solutions ressemblent aux solutions de la figure 4.7. L'énergie du kink est montrée à la figure 4.6. Même si les détails diffèrent d'un graphique à l'autre, ils partagent certaines

caractéristiques :

- L'énergie est presque indépendante de δ_1 et augmente en fonction de δ_2 .
- Pour δ_1 grand (approchant sa valeur maximale de 1) et $\delta_2 \ll 1$, il n'y a pas de solution ; cette région augmente avec γ . (La nature de cette transition stable/instable sera expliquée plus loin)
- Pour δ_2 dans le voisinage de 1 (la valeur dépend beaucoup plus fortement de γ que de δ_1), il n'y a pas de solution.

Ce qui ressort la plupart du temps, c'est que ϕ semble souvent faire une bosse par-dessus $\phi = 1$; ceci semble se produire bien souvent lorsqu'on est en présence de bonnes solutions, comme on peut le voir à la figure 4.7. En fait, cette bosse est parfaitement raisonnable puisque, dans l'analogie de la particule dans le potentiel inversé, le gradient de $V(\phi, \chi)$ dans l'axe des ϕ positifs pointe vers l'origine au-delà de $x = 1$. En d'autres termes, la particule de l'analogie mécanique ressent une force vers l'origine autour de $\chi = 0$.

On s'aperçoit aussi que la largeur du système semble se rétrécir à mesure qu'on augmente δ_2 (et comme on le verra plus loin avec la barrière d'énergie, δ_2 joue le rôle le plus important ici), car le coût en énergie potentielle de former un soliton plus long est plus grand que le coût d'énergie de gradient requis pour augmenter la pente autour de $x = 0$.

4.6 Les zones de stabilité

Une **zone de stabilité** est définie comme une région dans l'espace des paramètres où les solutions stables existent. Ceci arrive plus vraisemblablement lorsque le potentiel est suffisamment "à pic", c'est-à-dire où la bosse à $\phi = \chi = 0$ devient de plus en plus haute. Il n'est alors pas surprenant que, en raison du profil lorentzien que V_2 prend, les zones de stabilité s'élargissent à mesure que γ diminue car V_2 et le terme en χ^4 deviennent plus importants. On peut aussi augmenter la taille de la zone de stabilité en diminuant à la fois δ_1 et δ_2 , puisqu'une augmentation dans l'un ou dans l'autre va résulter en une diminution de la hauteur de la barrière à traverser par effet tunnel.

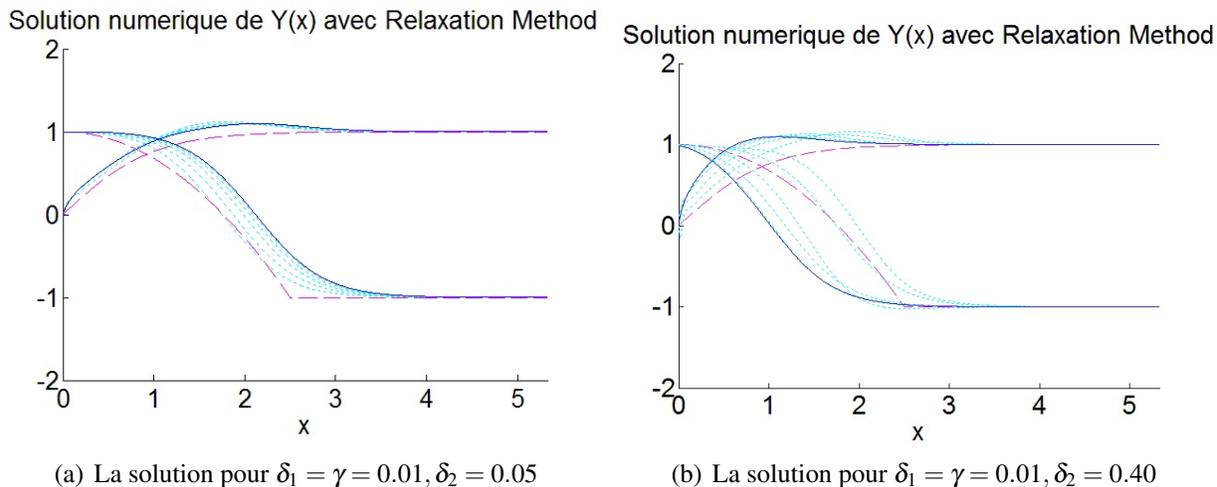


Figure 4.7 – Le système de kinks pour diverses valeurs des paramètres ; la ligne pointillée longue représente l'estimation initiale, les lignes pointillées courtes représentent les itérations de la relaxation et la ligne pleine représente la solution finale

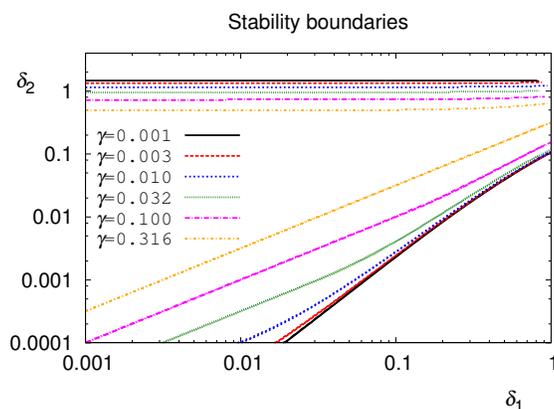


Figure 4.8 – Les zones de stabilité (Tiré de [6])

Un examen de la figure 4.8 révèle que la zone de stabilité est, pour une valeur donnée de γ comprise entre deux *zones de dissociation*, où les solutions stables n'existent plus. On a donc deux limites pour δ_2 : une supérieure, une inférieure. À la limite inférieure, les solitons semblent s'espacer de plus en plus, alors que la barrière d'énergie augmente en hauteur à mesure que δ_2 diminue. *A priori*, cela semble un peu contre-intuitif, mais, lorsqu'on examine plus attentivement le potentiel en $(\phi, 1)$ on s'aperçoit que les solutions ne semblent pas tendre vers le vrai vide. Ils semblent plutôt tendre vers un autre vide plus bas que le faux vide initial qui est néanmoins encore un faux vide. Si le Lorentzien est suffisamment large, et haut aussi, le potentiel va monter de

manière à ce qu'il n'y ait pas de point où $V(\phi, 1)$ est négatif. Dans le cas contraire, le potentiel en $(0, 1)$ est positif mais $V(\phi, 1)$ est minimisé en deux points, $(\pm\phi_m, 1)$, où $\phi_m \neq 0$, situés de part et d'autre de $\phi = 0$, et ayant des valeurs négatives. Dans le premier cas, $V(\phi, 1)$ est minimisé en $\phi = 0$ si la condition suivante est respectée :

$$\gamma > \frac{\delta_1}{1 + 2\delta_1} \quad (4.26)$$

auquel cas le minimum de $V(\phi, 1)$ est négatif si

$$\delta_2 < \delta_1 \gamma \quad (4.27)$$

et le kink instable qui en résulte est illustré dans la figure 4.9(a). Dans le cas contraire, c'est-à-dire si 4.26 n'est pas satisfait, l'analogue de l'équation 4.27 peut être calculé analytiquement mais le calcul explicite est un peu malcommode :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{32} - \frac{\delta_1}{16} - \frac{7\delta_1^2}{64} + \frac{9\delta_1^3}{64} - \frac{27\delta_1^4}{512} \right) + \gamma \left(\frac{1}{16} - \frac{13\delta_1}{32} + \frac{13\delta_1^2}{64} - \frac{9\delta_1^3}{128} \right) - \gamma^2 \left(\frac{7}{64} + \frac{13\delta_1}{64} + \frac{\delta_1^2}{256} \right) \\ & - \gamma^3 \left(\frac{9}{64} + \frac{9\delta_1}{128} \right) - \frac{27\gamma^4}{512} + \left\{ \left(-\frac{1}{64} + \frac{3\delta_1}{128} - \frac{11\delta_1^2}{256} + \frac{9\delta_1^3}{512} \right) - \gamma \left(\frac{3}{128} + \frac{5\delta_1}{128} - \frac{5\delta_1^2}{512} \right) \right. \\ & \left. - \gamma^2 \left(\frac{11}{256} + \frac{5\delta_1}{512} \right) - \frac{9\gamma^3}{512} \right\} \sqrt{(2 - 3(\gamma - \delta_1))^2 + 16(2\gamma\delta_1 + \gamma - \delta_1)} + \delta_2 < 0. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Le kink instable résultant est illustré dans la figure 4.9(b). Les solutions instables par le bas s'étirent horizontalement de plus en plus parce qu'il est énergétiquement favorable de le faire, car le faux vide à $(\phi, \chi) = (0, 1)$ ou à $(\phi, \chi) = (\pm\phi_m, -1)$, selon le cas, est plus bas que le faux vide en $(\phi, \chi) = (\pm 1, -1)$. Pour cette raison, ce qui se passe à cette ligne de stabilité ne nous intéresse plus. Lorsque ceci se produit, l'énergie libérée par la conversion du faux vide initial au faux vide final est telle que la conversion d'un faux vide à l'autre devienne rapide. Il convient de noter que les lignes inférieures sur la figure 4.8 sont un peu floues car il s'agit en fait de la superposition de deux lignes ; la première est la prédiction analytique (4.26 + 4.27 ou non-4.26 + 4.28) alors que la deuxième ligne de la même couleur est le résultat numérique. Comme ces deux lignes sont très rapprochées, on tire donc la conclusion que l'accord entre le calcul analytique et le calcul numé-

rique est très bon.

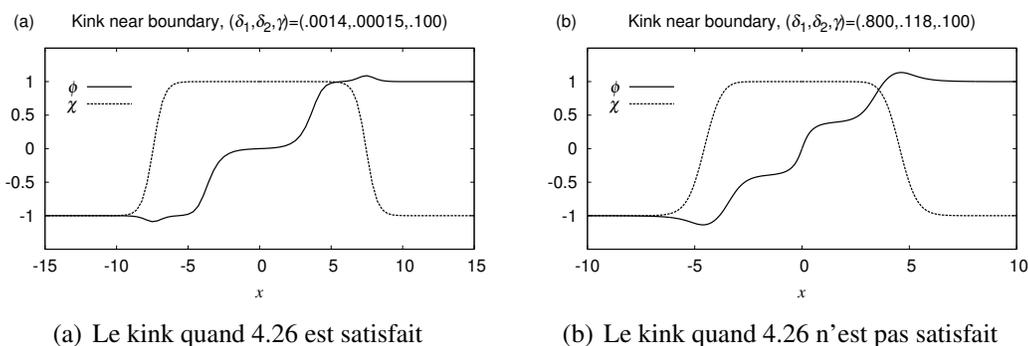


Figure 4.9 – Les solutions à la zone de dissociation inférieure (Tirés de [6])

L'instabilité qui découle du passage à la zone de dissociation supérieure est très différente de ce qui se passe à la zone inférieure. À mesure que δ_2 augmente, le potentiel devient de plus en plus asymétrique et la barrière entre $\chi = +1$ et $\chi = -1$ diminue. À cause de ceci, χ au centre du kink n'atteint plus $+1$ (cf. Fig. 4.10) et n'encercle plus la barrière énergétique moins imposante en $\phi = \chi = 0$ après quoi il est énergétiquement favorable de s'écraser à $\chi = -1 \forall x$, ce qui laisse le vrai vide au centre, qui, comme dans le cas précédemment traité, s'étend rapidement en convertissant le faux vide en vrai vide au passage.

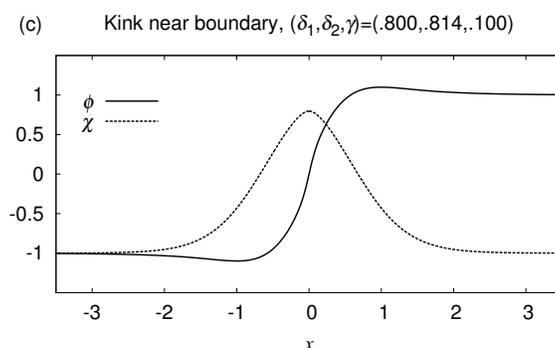


Figure 4.10 – Le kink près de la limite supérieure (Tiré de [6])

CHAPITRE 5

ZONES DE DISSOCIATION

Ici on cherche à savoir les mécanismes qui sous-tendent l'existence de la zone de dissociation supérieure, étant donné que l'instabilité tend alors vers le vrai vide, plutôt que vers un autre faux vide, comme ce serait le cas à la zone de dissociation inférieure. On étudiera le concept de stabilité sous déformation de la solution et, pour ce faire, on va utiliser une déformation linéaire continue de χ . De plus, la frontière supérieure trouvée au chapitre précédent sera réexaminée de deux façons supplémentaires.

5.1 Expression de l'action en termes de la variation

Soit une solution (ϕ_k, χ_k) à l'équation qui minimise l'énergie statique de la configuration, on peut alors calculer l'action euclidienne du kink

$$S_{B,k} = \int d^2x \left[\frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{(\partial\chi)^2}{2} + V(\phi, \chi) \right]. \quad (5.1)$$

Néanmoins, comme il est impossible de trouver la véritable forme du bounce pour le kink, l'action euclidienne trouvée numériquement avec la configuration de déformation

$$\phi(t, x) = \phi_k(x), \quad \chi(t, x) = h(t)(\chi_k + 1) - 1, \quad (5.2)$$

où h est un paramètre de déformation allant de 0 à 1, donne, au mieux, une borne supérieure sur la véritable action. Cette action donne donc une borne inférieure sur le taux de désintégration. Ce faisant, l'ajout de $\partial\phi$ ne fait qu'ajouter des constantes à l'action, parce que ϕ n'est pas déformé, on va alors calculer les dérivées spatiales et temporelles de $\chi(x, t) = h(t)(\chi_k(x) + 1) - 1$. Cela donne :

$$\dot{\chi} = f'(\xi(t))\dot{\xi}(\chi_k + 1), \quad \chi' = f(\xi)\chi'_k. \quad (5.3)$$

Insérant 5.3 dans l'action,

$$S_{B,k} = \int dt \left[\frac{(f' \dot{\xi})^2}{2} \int dx (\chi_k + 1)^2 + \frac{f^2}{2} \int dx \chi'^2 + \int dx V(\phi, \chi) \right]. \quad (5.4)$$

De nouveau, puisque

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= (\phi^2 - 1)^2 (\phi^2 - \delta_1) + \frac{1}{\phi^2 + \gamma} \left[(\chi^2 - 1)^2 - \frac{\delta_2}{4} (\chi - 2)(\chi + 1)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

on insère 5.5 dans 5.4. On trouve :

$$\begin{aligned} S_{B,k} &= \int dt \left[\frac{(f' \dot{\xi})^2}{2} \int dx (\chi_k + 1)^2 + \frac{f^2}{2} \int dx \chi'^2 + \int dx (\phi_k^2 - 1)^2 (\phi_k^2 - \delta_1) \right. \\ &\quad \left. + \int dx \frac{1}{\gamma + \phi_k^2} \left[(f^2 (\chi_k^2 + 1) - 2f(\chi_k + 1))^2 - \frac{\delta_2}{4} (f(\chi_k + 1) - 3)(f(\chi_k + 1))^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

puisque $\chi^2 - 1 = f^2(\chi_k + 1)^2 - 2f(\chi_k + 1)$, $\chi - 2 = f(\chi_k + 1) - 3$, $\chi + 1 = f(\chi_k + 1)$. Définissons M , le coefficient devant le terme cinétique et qui sert également de masse effective pour le système de kinks, et W , le potentiel effectif indépendant du temps mais qui dépend tout de même des champs eux-mêmes et qui donne lieu aux kinks ; ces quantités seront importantes pour ce qui suit :

$$M = \int dx (\chi_k + 1)^2 \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{f^2}{2} \int dx \chi'^2 + \int dx (\phi^2 - 1)^2 (\phi^2 - \delta_1) \\ &\quad + \int dx \frac{1}{\gamma + \phi^2} \left[(f^2 (\chi_k^2 + 1) - 2f(\chi_k + 1))^2 - \frac{\delta_2}{4} (f(\chi_k + 1) - 3)(f(\chi_k + 1))^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

On doit se garder à l'esprit que, par le théorème de Noether, s'il y a une symétrie dans l'action, on peut y associer une quantité conservée ; maintenant on souhaite se servir de l'équation du mouvement pour f afin de trouver une constante du mouvement. L'équation résultante pour le système

implique :

$$M\ddot{h} - \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0 \quad (5.9)$$

$$M\dot{h}\ddot{h} - \dot{U} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{M\dot{h}^2}{2} - \dot{U} = 0$$

$$\frac{M\dot{h}^2}{2} = U$$

$$\Rightarrow \dot{h} = \sqrt{\frac{2U}{M}}, \quad (5.10)$$

alors on peut réécrire 5.6 comme

$$\begin{aligned} S_{B,k} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{M\dot{h}^2}{2} + U \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sqrt{\frac{M}{2}} \dot{h} \left(\dot{h} \sqrt{\frac{M}{2}} + \sqrt{U} \right). \end{aligned}$$

Par l'équation 5.10 et, comme $d\tau\dot{h} = dh$, on peut passer à l'étape suivante, qui ajoute un facteur multiplicatif 2 à cause de la symétrie du problème. Alors

$$S_{B,k} = \sqrt{8M} \int_{h_+}^1 dh \sqrt{U(h) - U(1)}, \quad (5.11)$$

où h_+ est l'équipotentielle du faux minimum de l'énergie statique, tel que U , assimilable à une énergie statique, obéit à l'égalité $U(h_+) = U(1)$ (figure 5.1). Avec cette équation en main, on a calculé numériquement diverses valeurs de l'action euclidienne et, par suite, la probabilité de désintégration, pour une variété de valeurs des paramètres $0 < \delta_1 < 1$ et $< \delta_2 < 16/3$. Ce sont ces conditions sur les valeurs des paramètres qui déterminent où dans l'espace des paramètres on peut avoir des solutions stables ainsi que le comportement des solutions instables, au cas où les solutions sont effectivement instables.

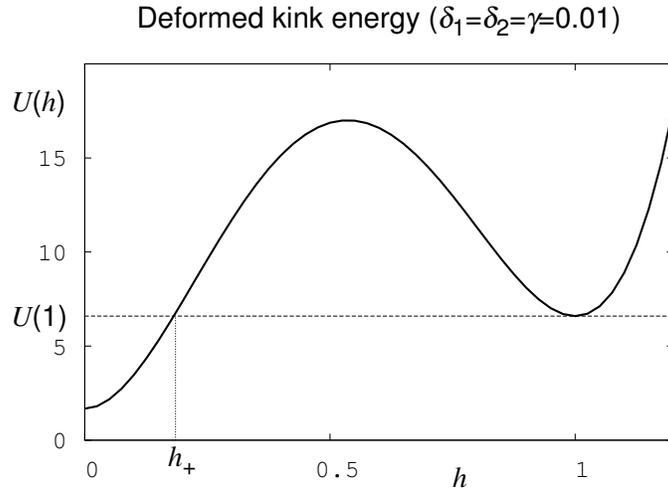


Figure 5.1 – L'énergie du kink en fonction du paramètre de déformation h (Tiré de [6])

5.1.1 La barrière énergétique

À la lumière d'un balayage numérique, on s'est aperçu que, après une déformation linéaire de χ , il y avait une barrière d'énergie $U(h)$, avec des minima à $h = 0$ et $h = 1$ mais dont le maximum intermédiaire semblait varier en hauteur selon la valeur des paramètres. Un comportement typique de $U(h)$ est donné à la figure 5.1. Dans le cas qui nous intéresse, le bounce en h interpole entre $h = 1$ et $h = h_+$.

Nous avons tracé les profils d'énergie du soliton (Fig. 5.2) tout en maintenant γ constant, et l'on trouve que ceux-ci dépendent plus fortement sur δ_2 . On a aussi trouvé qu'ils dépendaient très peu sur δ_1 mais, à cause de l'impact de γ sur la hauteur de la Lorentzienne au centre du plan (ϕ, χ) , ce dernier a un plus grand impact sur le profil d'énergie que δ_1 , mais moins que δ_2 .

Un calcul analytique de l'énergie statique (et, par ricochet, de l'action) révèle que la partie dépendante de la déformation de U peut s'écrire comme un polynôme de degré 4 de la forme

$$U(h) = Xh^4 - Yh^3 + Zh^2, \quad (5.12)$$

où

$$X = \int dx \frac{(\chi_k + 1)^4}{\phi_k^2 + \gamma}, \quad Y = \left(4 + \frac{\delta_2}{4}\right) \int dx \frac{(\chi_k + 1)^3}{\phi_k^2 + \gamma}, \quad Z = \frac{3Y}{2} - 2X. \quad (5.13)$$

On peut se demander où sont les extréma de U ; une analyse de la dérivée de premier ordre de

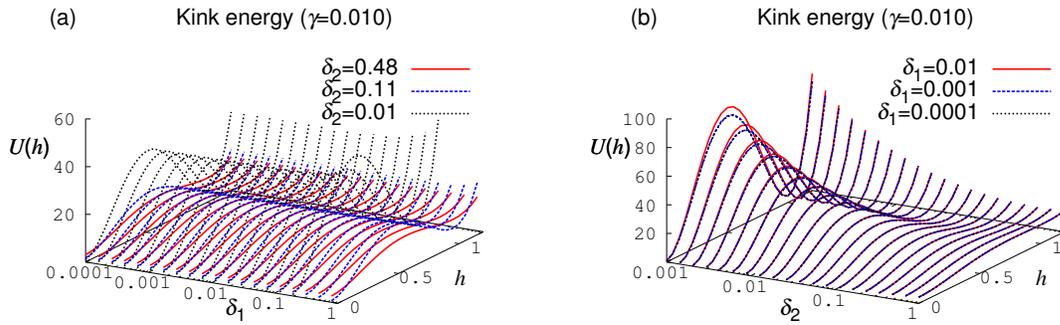


Figure 5.2 – L'énergie du kink en fonction du paramètre de déformation h pour divers potentiels (Tirés de [6])

$U(h)$ révèle qu'on a un minimum à 0, un autre à 1, mais que le maximum qui interpole entre les deux minima est donné par

$$h_- = \frac{3Y - 4X}{4X}. \quad (5.14)$$

Il est facile de voir que, pour que h_- soit compris entre 0 et 1, il faut que $4X/3 \leq Y \leq 8X/3$ (en fait il faudrait que $2X \leq Y \leq 8X/3$ parce qu'on doit aussi avoir que l'équipotentielle de $h = 1$ soit à $h \geq 0$, comme dans la figure 5.1). Il faut donc se demander quel est le comportement de $\hat{Y} = Y/X$ selon les valeurs des paramètres. Comme les intégrales sont seulement évaluables numériquement, on a procédé à une analyse numérique avec $\gamma = \delta_1 = 0.01$ et on a trouvé qu'on s'approchait de $\hat{Y} = 8/3$ de manière essentiellement linéaire jusqu'aux alentours de $\delta_2 = 0.9$. À noter que des artefacts numériques sont responsables du manque de points numériques dans certaines régions de la figure 5.3.

Au-delà de cette valeur, on perd le comportement linéaire sur \hat{Y} et le coût énergétique de l'écrasement diminue de manière drastique dès qu'on s'approche de $\delta_2 \simeq 1.17$. Le fait que $\hat{Y} \simeq 2.54$ à $\delta_2 \simeq 1.17$ plutôt que $\hat{Y} \simeq 8/3$ fait douter de la stabilité de la solution et de l'emplacement des zones de dissociation. Dans le but de clarifier la situation, une approche variationnelle est mise de l'avant à la section 5.2. En fait, une extrapolation linéaire de \hat{Y} à partir de $\delta_2 \simeq 1.17$ donne qu'on atteindrait $\hat{Y} = 8/3$ à $\delta_2 = (1.19 \pm 0.02)$ où la source d'incertitude vient de l'incertitude intrinsèque à l'usage des méthodes d'extrapolation.

Qualitativement parlant, on peut expliquer un comportement monotone décroissant de l'ac-

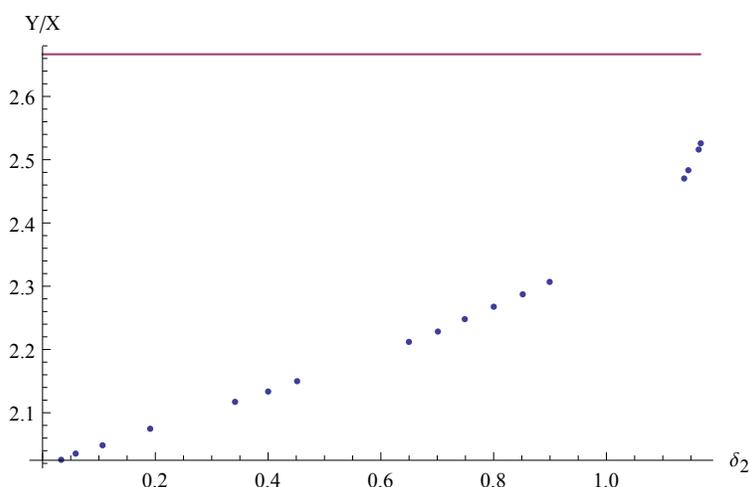


Figure 5.3 – La quantité \hat{Y} pour $\gamma = \delta_1 = 0.01$ en fonction de δ_2 ; les points représentent les données numériques et la ligne pleine représente $\hat{Y} = 8/3$

tion par le fait qu'une augmentation des dimensions de la barrière engendre des coûts plus élevés en énergie cinétique pour franchir cette même barrière. Non seulement le gradient du kink est plus escarpé mais aussi parce que l'intégrale de l'action en fonction du ratio de déformation h doit également couvrir une borne h_+ , qui, comme précédemment, serait l'équipotentielle de $U(h) = U(1)|_{h \neq 1}$. On a constaté que h_+ a tendance à se déplacer vers la droite à mesure que δ_2 (ou même δ_1, γ) augmente. La zone de dissociation est ainsi définie comme la zone dans laquelle une solution à l'équation $U(h) = U(1)|_{h \neq 1}$ n'existe pas pour $h \in [0, 1[$.

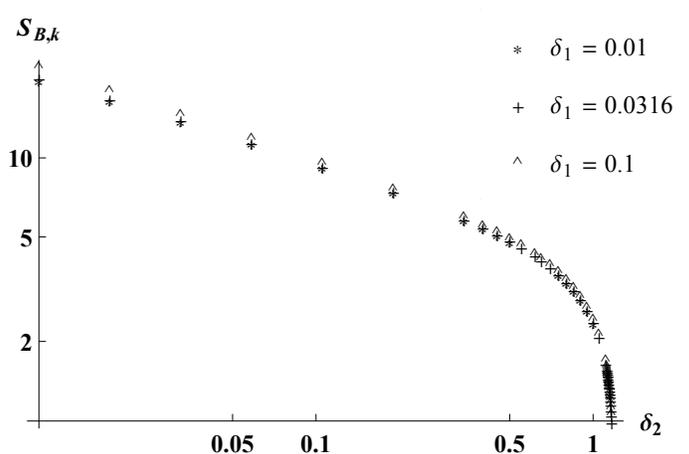


Figure 5.4 – L'action euclidienne du kink pour $\gamma = 0.01$ en fonction de δ_1, δ_2 (Tiré de [6])

La figure 5.4 examine le comportement de l'action euclidienne en fonction de δ_2 pour trois va-

leurs différentes de δ_1 tout en maintenant γ fixé. On trouve également que la valeur de δ_1 n'a que peu d'influence, quoique positive, sur l'action du kink. Il demeure possible que l'ajout d'une déformation horizontale sur χ peut faire diminuer l'action. Par conséquent, le taux de désintégration lié au soliton trouvé précédemment est une borne inférieure. De plus, on suspecterait que l'usage des déformations strictement verticales de χ soit de moins en moins approprié lorsque δ_2 s'éloigne de la zone de dissociation supérieure.

5.2 Deuxième variation

Jusqu'ici, toutes les solutions qu'on a trouvées étaient des extrémums de l'action. Par contre, rien n'exclut que l'extrémum trouvé soit en fait un maximum de l'action ou un point-selle. Le traitement de la deuxième variation reprend essentiellement le deuxième chapitre du Fox [35] et qu'on présume une connaissance du principe de moindre action, du Lagrangien et de la première variation, ainsi qu'une base de mécanique analytique. Dans le cas contraire, le lecteur peut consulter les chapitres I et V du Fox.

5.2.1 La théorie

Étroitement reliée à la notion de stabilité de la solution obtenue par l'équation d'Euler-Lagrange se cache une notion de calcul variationnel appelée la *deuxième variation*. Car l'équation d'Euler-Lagrange, qui se base sur la première variation d'une fonctionnelle $J[u]$, permet au plus de dire qu'une solution d'un problème variationnel donné est un extrémum de l'action, sans pour autant démontrer qu'il s'agit bel et bien là d'un minimum de l'action. On cherche l'analogie en termes de dérivées fonctionnelles du test hessien de la deuxième dérivée pour une fonction scalaire mais il faut d'abord démontrer la forme prise par la deuxième variation de la fonctionnelle $J[u]$.

Théorème 1. Soient $\vec{u} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable deux fois qui satisfait aux conditions aux frontières $\vec{u}(t_1) = \vec{x}_1, \vec{u}(t_2) = \vec{x}_2$, $L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t)$ son Lagrangien associé et $\vec{v} \in C^2$ une variation de \vec{u} . Alors la deuxième variation est donnée par

$$Q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathbf{v}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}^2} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + 2\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} \frac{\partial^2}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + \dot{\mathbf{v}}^2 \frac{\partial^2}{\partial \dot{\mathbf{u}}^2} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \right]. \quad (5.15)$$

Preuve. Par définition, la deuxième variation de $J[u]$ est donnée par la dérivée fonctionnelle

$$Q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \left. \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} J[\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}] \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{d}{d\lambda} \langle \nabla J[\mathbf{u}], \mathbf{v} \rangle \right|_{\lambda=0}. \quad (5.16)$$

Or, la première dérivée fonctionnelle est donnée par :

$$\langle \nabla J[\mathbf{u}], \mathbf{v} \rangle = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathbf{v} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})} \right] \Big|_{\lambda=0}, \quad (5.17)$$

alors l'équation 5.16 devient

$$Q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{d\lambda} \left[\mathbf{v} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})} + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})} \right] \Big|_{\lambda=0}. \quad (5.18)$$

En appliquant la règle de la dérivée en chaîne sur chaque terme, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left(\mathbf{v} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})} \right) \\ &= \mathbf{v}^2 \frac{\partial^2 [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v})^2} + \mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})}, \\ & \frac{d}{d\lambda} \left(\dot{\mathbf{v}} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})} \right) \\ &= \dot{\mathbf{v}} \mathbf{v} \frac{\partial [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) \partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})} + \dot{\mathbf{v}}^2 \frac{\partial^2 [L(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}}, t)]}{\partial (\dot{\mathbf{u}} + \lambda \dot{\mathbf{v}})^2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

En substituant 5.19 dans 5.18, et en l'évaluant à $\lambda = 0$, on obtient

$$Q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathbf{v}^2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{u}^2} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + 2\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial^2}{\partial \dot{\mathbf{u}} \partial \mathbf{u}} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) + \dot{\mathbf{v}}^2 \frac{\partial^2}{\partial \dot{\mathbf{u}}^2} L(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t) \right] \quad (5.20)$$

comme il se doit. Alternativement, si on fait une intégration par parties sur le terme croisé, tout en exploitant les conditions aux frontières, respectées par hypothèse, on peut aussi écrire 5.20 comme suit :

$$Q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\dot{\mathbf{v}}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{u}}^2} + \mathbf{v}^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u}^2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial \mathbf{u} \partial \dot{\mathbf{u}}} \right) \right) \right]. \quad (5.21)$$

5.2.2 La stabilité des solutions

On peut décomposer une variation en ses modes propres. Comme la solution (ϕ_k, χ_k) est supposée être une solution à l'équation d'Euler-Lagrange, on sait que la première variation est nulle. De la série de Taylor multidimensionnelle de l'énergie en sa variation autour de (ϕ_k, χ_k) , et du fait que la solution soit différentiable deux fois (donc obéit au théorème de Clairaut)¹, on a que la matrice hessienne qui lui est associée est symétrique et donc toutes ses valeurs propres sont réelles. Comme toute variation peut s'écrire $\delta\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n$ et qu'on peut prendre les \vec{v}_n orthonormés, on peut donc écrire la 2e variation de l'énergie comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta x_i \partial_i \partial_j f \delta x_j}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} c_m v_{m_i} \underbrace{\partial_i \partial_j f c_n v_{n_j}}_{c_n \lambda_n v_{n_i}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} c_m c_n \lambda_n \underbrace{v_{m_i} v_{n_j}}_{\delta_{mn}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 \lambda_n. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Le critère hessien devient alors :

$$\text{si } \lambda_n = \begin{cases} > 0 \quad \forall n, & \text{alors } f \text{ minimise l'action} \\ < 0 \quad \forall n, & \text{alors } f \text{ maximise l'action} \\ \text{certaines négatives, certaines positives,} & \text{alors c'est un point-selle} \\ 0 \quad \text{pour un } n \text{ donné,} & \text{il y a une direction plane au 2e ordre} \end{cases}$$

Il serait aussi intéressant de noter que, si on prend un vecteur composé de n solutions statiques, alors $\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \vdots \\ \phi'_n \end{pmatrix}$ est un mode nul de la 2e variation. Si de plus 0 est la plus petite valeur propre du système, on a que la solution est classiquement stable. Cependant, de telles solutions stables seront métastables en raison du processus de tunneling qui donne lieu à la désintégration du faux vide. Ici on va démontrer le cas d'un vecteur composé des solutions d'un système d'Euler-Lagrange à deux

¹Ce serait très embêtant, voire non-physique, si $V(\phi_k, \chi_k)$ ne satisfaisait pas aux conditions du théorème de Clairaut !

fonctions, comme ce sera le cas dans le problème qui suit. Soient les matrices

$$\delta_f = \begin{pmatrix} \phi'_k \\ \chi'_k \end{pmatrix}, H_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2} \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Mais

$$\begin{aligned} H_{ij} \delta_f &= \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'_k \\ \chi'_k \end{pmatrix} \\ &= -\frac{d^3 \phi_k}{dx^3} + V'' \phi'_k + V'' \chi'_k - \frac{d^3 \chi_k}{dx^3} + V'' \phi'_k + V'' \chi'_k \\ &= \frac{d}{dx} (-\phi'' + V'(\phi_k, \chi_k)) + \frac{d}{dx} (-\chi'' + V'(\phi_k, \chi_k)) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mais le passage à la dernière ligne n'était possible que parce qu'on dérivait une quantité qui était déjà en partant nulle, à savoir l'équation du mouvement. L'objectif visé, dans notre cas, est de déterminer si/quand il y a des valeurs propres négatives de H . Pour ce faire, on étudie une équation semblable à l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$i \frac{\partial f_m}{\partial t} = H_{mn} f_n, \quad (5.25)$$

avec la solution usuelle $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$ et ψ décomposable selon les vecteurs propres de H . Seulement, comme on s'attend à ce que le terme de moindre énergie domine, on aimerait calculer l'évolution temporelle de la norme du vecteur de "fonctions d'onde". Pour ce faire, on passe au temps imaginaire $t \rightarrow i\tau$. On peut donc écrire $e^{H\tau^*} = e^{-H\tau}$ car, si t était réel, il en allait autrement de τ qui devenait imaginaire sous cette transformation. Donc on peut écrire la décomposition en ses modes propres

$$N(\tau) = \langle \psi(\tau) | \psi(\tau) \rangle = \sum_n e^{-2E_n \tau} |c_n|^2 \quad (5.26)$$

$$\Delta E = \langle \psi(\tau) | H | \psi(\tau) \rangle = \sum_n E_n e^{-2E_n \tau} |c_n|^2. \quad (5.27)$$

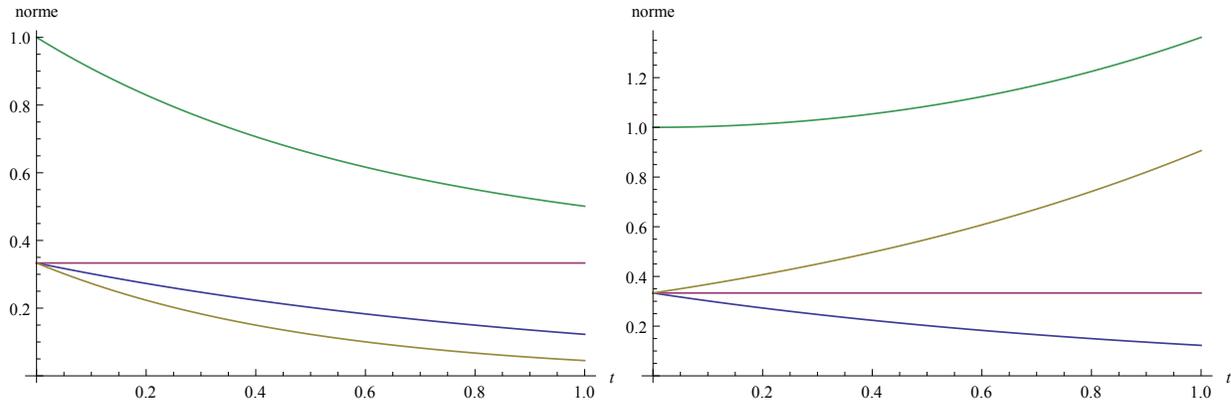


Figure 5.5 – La norme de deux systèmes à trois modes : le premier système a des énergies propres $0, E$ et $2E$, le deuxième a des énergies propres $0, \pm E$; la ligne supérieure représente la somme des normes des trois modes propres

Alors on pourra prendre l'évolution temporelle de ces quantités, respectivement la norme et l'énergie de la deuxième variation et en déduire, avec le comportement à long terme de celle-ci, l'existence ou l'absence de modes négatifs. S'il y a un mode négatif, alors on aura, pour un temps $\tau > 0$ donné, $N(\tau_c) \geq N(0)$, auquel cas la norme va diverger lorsque $\tau \rightarrow \infty$ et on aura alors démontré que la solution est instable. Dans le cas où les modes négatifs n'existent pas, N va tendre vers $|c_0|^2$ pour un temps grandissant et la stabilité de la solution sera alors indéniable dans le temps, car la norme de la fonction d'onde associée à la deuxième variation va demeurer finie, auquel cas on aura

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta E = 0 \quad (5.28)$$

à partir de la domination du mode nul de la deuxième variation à long terme. Ces comportements sont illustrés dans la figure 5.5 pour un cas "jouet".

5.2.3 La symétrie des solutions

Maintenant qu'on connaît pourquoi la deuxième variation de la solution nous est d'intérêt, on est prêt à se pencher davantage sur la forme de la solution représentant l'état fondamental qu'on cherche, ainsi que des coefficients de l'équation à laquelle elle obéit. Il est bien connu que, dans le cas d'une équation de Schrödinger à une composante avec un potentiel symétrique, la fonction d'onde qui en découle est symétrique ou antisymétrique. On aimerait étudier la symétrie des solutions de l'équation de type Schrödinger (l'équation 5.25) étant donné les symétries de

(ϕ_k, χ_k) .

Pour ce faire, il faut d'abord examiner les éléments de la matrice contenant les coefficients du système d'équations différentielles qu'on désire résoudre. On suppose ici que $V(\phi_k, \chi_k)$ satisfait aux conditions du théorème de Clairaut et donc qu'on puisse effectuer les deuxièmes dérivées croisées dans n'importe quel ordre :

$$H_{11} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2} \quad (5.29)$$

$$H_{12} = H_{21} = \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} \quad (5.30)$$

$$H_{22} = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2}. \quad (5.31)$$

Comme la deuxième dérivée d'une fonction préserve la symétrie d'une fonction, et que $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2}$ est symétrique, de même que $\frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2}$, alors on en déduit que les termes sur la diagonale sont symétriques. Il en va autrement de $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k}$; χ_k étant symétrique, toute puissance de cette fonction le sera ; or, ϕ_k est antisymétrique et, élevé à une puissance impaire, le demeurera. De plus, le terme contenant χ_k est multiplié par une dérivée par rapport à ϕ d'une lorentzienne, et celle-ci étant antisymétrique, alors les termes hors de la diagonale principale vont demeurer antisymétriques. Cependant, tout le traitement des termes hors diagonale se base sur l'hypothèse que $V(\phi_k, \chi_k)$ vérifie le théorème de Clairaut ; si ce n'était pas le cas, on aurait $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k} \neq \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k \partial \phi_k}$ et la matrice ne serait plus symétrique

Maintenant qu'on connaît la symétrie des éléments de la matrice des coefficients, on va chercher à faire agir la matrice sur un vecteur de solutions de symétrie quelconque afin d'en déterminer quelques propriétés. Soit un vecteur de solutions $\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ à notre système, avec une valeur propre λ . Afin d'examiner les comportements des équations sous réflexion spatiale, on insère, dans le

système d'équations, le vecteur de solutions $\begin{pmatrix} f_1(-x) \\ f_2(-x) \end{pmatrix}$ et qu'on ait également $H(-x)$. On aurait :

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2}\right) f_1(-x) + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k}\right) f_2(-x) \\ = & + \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k^2}\right) f_1(x) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k}\right) f_2(-x); \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k}\right) f_1(-x) + \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2}\right) f_2(-x) \\ = & - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_k \partial \chi_k}\right) f_1(-x) + \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_k^2}\right) f_2(-x). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Alors on aurait soit $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} antisym \\ sym \end{pmatrix}$ comme symétries possibles des fonctions propres de l'hamiltonien étudié. Ceci constitue la généralisation à deux composantes du résultat bien connu du problème de Schrödinger à une composante. On utilisera alors des conditions initiales qui aient l'une ou l'autre de ces propriétés.

Maintenant qu'on sait que $\begin{pmatrix} \phi'_0 \\ \chi'_0 \end{pmatrix}$ est le mode nul de notre équation, on pourrait penser que, si cette solution était l'état fondamental, alors l'état fondamental serait de la forme $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$. Étant donné les symétries des solutions au système couplé d'Euler-Lagrange dont on cherche la deuxième variation, qui sont $\begin{pmatrix} \phi_k \\ \chi_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} antisym \\ sym \end{pmatrix}$, si les énergies propres de la deuxième variation étaient non-négatives, alors la solution serait métastable sous la deuxième variation. Si, au contraire, on avait un état fondamental de la forme $\begin{pmatrix} antisym \\ sym \end{pmatrix}$ alors on pourrait être certain de l'existence d'un mode négatif, auquel cas la solution serait instable sous la deuxième variation. Même si la valeur de l'énergie propre d'un mode négatif est d'intérêt physique, l'essentiel de la physique est contenu dans l'existence ou l'absence d'un tel mode.

5.2.4 Résultats

Après une mise en oeuvre de la méthode énoncée ci-haut, il appert que, dans tous les cas, la solution globale converge vers la solution $c_0 \begin{pmatrix} \phi'_k \\ \chi'_k \end{pmatrix}$, où c_0 est le coefficient de l'état fondamental dans la décomposition de l'état en ses états propres, à mesure que $\tau \rightarrow +\infty$ tant et aussi longtemps qu'on a des solutions stables à l'équation du mouvement pour les kinks. Comme on a trouvé des modes négatifs uniquement au cas où les solutions stables n'existent pas, et en particulier pour δ_2 élevé, on a vérifié les résultats numériques trouvés précédemment par la méthode de la deuxième variation.

On a résolu le système hamiltonien deux fois pour chaque ensemble de paramètres, où les seules différences entre chaque tentative sont la symétrie de la condition initiale et les conditions aux frontières, conçues pour forcer une solution d'une symétrie particulière. Comme on s'y attendrait, les solutions ainsi trouvées sont de symétries différentes et qui dépendent de la symétrie de la condition initiale. Il appert néanmoins que, lorsqu'on est loin de la zone de dissociation, et qu'on choisisse une condition initiale de la forme $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$, on trouve

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} E(\tau) = 0. \quad (5.34)$$

Toutefois, puisque nous n'avons pas observé d'explosion exponentielle de la norme du vecteur-solution, $\langle \psi | \psi \rangle$, à mesure que $\tau \rightarrow +\infty$, on tire la conclusion qu'un mode négatif n'existe pas tant et aussi longtemps qu'on n'a pas atteint la zone de dissociation. Nous n'avons pas plus observé une divergence de la solution, comme ça aurait été le cas s'il y avait eu un mode d'énergie négative, avant d'atteindre une valeur δ_{2c} , où on ne trouve plus de solution stable. On a démontré que la solution aux équations du mouvement du soliton est stable, que l'action est bel et bien minimisée et que l'état fondamental en 2e variation est alors le mode nul.

On a également trouvé que, lorsque c_0 est suffisamment près de 1, on avait $E \simeq 0$ quand $\tau \rightarrow +\infty$, mais on a aussi que $|E| \ll 1$, même quand $c_0 \simeq 1$. Ceci serait attribuable à la courte durée de vie des états excités.

5.2.5 La symétrie des états propres

De la conclusion que l'état fondamental de la deuxième variation est le mode nul tant et aussi longtemps que la solution est stable, on tire la conclusion que l'état fondamental est de la symétrie $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$. Une analyse plus poussée a été effectuée avec les deux types de conditions initiales (pour un ensemble de paramètres donnés) par analyse des graphiques du logarithme des normes. Cette analyse révèle que la pente du segment qui subsiste le plus longtemps représente l'énergie la plus faible de la configuration. On tire, de cette analyse et du fait que les solutions de symétrie opposée sont orthogonales entre elles, la conclusion que seuls certains modes sont permis, tout dépendant de l'état de symétrie de la condition initiale et de la condition aux frontières. De plus, l'énergie la plus faible associée aux solutions de la forme $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$ est nulle alors que l'énergie la plus faible associée aux solutions de la forme $\begin{pmatrix} antisym \\ sym \end{pmatrix}$ est positive.

En poussant un peu plus l'analyse, on se rend compte que les énergies propres E_n associées aux $|\psi_n\rangle$ sont ordonnées par le nombre de noeuds, c'est-à-dire le nombre de points où on a $|\psi_n(x)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On constate également que les $|\psi_n\rangle$ sont de symétries alternées selon la parité de n : si $n = 2k$, alors le $|\psi_n\rangle$ qui lui est associé est de la forme $\begin{pmatrix} sym \\ antisym \end{pmatrix}$; dans le cas contraire, c'est-à-dire si $n = 2k + 1$, alors le $|\psi_n\rangle$ qui lui est associé est de la forme $\begin{pmatrix} antisym \\ sym \end{pmatrix}$. On s'aperçoit aussi que la durée de vie des termes $|\psi_n\rangle$ d'ordre supérieur est relativement courte, et que l'état de plus faible énergie survit à long terme, comme on s'y attendrait.

CHAPITRE 6

DÉSINTÉGRATION DU FAUX VIDE

Nous sommes intéressés par la comparaison du taux de désintégration d'un amoncellement de kinks, chacun d'entre eux se désintégrant selon $e^{-S_{B,k}}$, avec celui du vide ordinaire en l'absence de défauts topologiques. Pour ce dernier, on imagine que l'Univers est dans un faux vide avec $\chi = \phi = -1$. Le taux de désintégration par unité de volume est calculé selon la méthode de Coleman. Le bounce est la trajectoire dans l'espace des configurations de moindre action. On peut intuitivement s'attendre à ce que le bounce de la bulle de vrai vide demeure à $\chi = -1$. Reprenant l'analogie avec une particule, introduite dans la section 2.5, à mesure que le rebond s'effectue, toute déviation de cette droite dans le parcours de la particule à travers le potentiel inversé va la faire tomber de manière à augmenter l'action, aussi petite la déviation soit-elle. Pour cette raison, $\partial\chi$ est nul. Or, lorsque $\chi = -1$, on a $V_2 = 0$ et on tue toute dépendance du bounce du faux vide sur γ, δ_2 auquel cas on peut écrire $S_{B,v} = f(\delta_1)$. Ainsi, on va travailler avec le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial\phi)^2}{2} + \frac{(\partial\chi)^2}{2} - V(\phi) \quad (6.1)$$

$$= \frac{(\partial\phi)^2}{2} - V(\phi), \quad (6.2)$$

avec $V(\phi) = V(\phi, -1)$. De plus, on va présumer que le bounce du faux vide est une fonction de la coordonnée euclidienne $\rho = \sqrt{\tau^2 + x^2}$. L'action euclidienne et l'équation du mouvement deviennent

$$S_{B,v} = 2\pi \int_0^\infty d\rho \rho \left(\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right), \quad \phi'' + \frac{\phi'}{\rho} = V'(\phi). \quad (6.3)$$

Afin de trouver le bounce du faux vide de notre système, on a dû mettre en oeuvre la méthode exposée dans la section 2.5, et ce, en interpolant entre $(-1, -1)$ et $(\phi_+, -1)$ pour ensuite en calculer son action euclidienne. Pour ce faire, on a utilisé une méthode numérique basée sur le shooting [36]. Si on voit ϕ comme la position d'une particule sur une demi-droite et ρ comme une coordonnée temporelle, cette équation décrit une particule se déplaçant dans un potentiel $-V$ avec un terme de friction dépendant du temps. La solution "bounce" a $\phi(\rho = 0) \simeq 0$, avec la valeur exacte

du départ étant celle pour laquelle $\phi(\rho) \rightarrow -1$ quand $\rho \rightarrow +\infty$. On obtient, de manière générale, que l'action du faux vide diminue à mesure que δ_1 augmente, pour toutes les valeurs permmissibles de δ_1 et, par ricochet, le taux de désintégration augmente, de sorte que le taux de désintégration du faux vide est souvent plus élevé que celui du soliton.

6.1 Approximation du mur mince

Cette discussion se base sur la même idée que dans la section 2.6. Si on suppose que $\delta_1 \ll 1$, alors le bounce sera de type mur mince avec ϕ qui restera très près du vrai vide $\phi = 0$ pour une longue période et faire une transition rapide à $\phi = -1$, approchant asymptotiquement cette valeur alors que $\rho \rightarrow +\infty$. Puisque la transition se déroule à $\rho \gg 1$, le terme de friction peut être négligé, et on peut aussi prendre $\delta_1 = 0$ dans l'équation du mouvement tout en négligeant la contribution de γ . L'équation du mouvement devient alors celui d'un soliton comme celui du kink dans la théorie ϕ^4 (l'équation 3.10) :

$$\phi' = \sqrt{2V(\phi)} = \sqrt{2}\phi(1 - \phi^2). \quad (6.4)$$

On n'a nul besoin de la solution explicite ; on a seulement besoin de l'action. En raison de la symétrie par rapport à $\rho = 0$, on peut calculer, en prenant l'approximation $\delta_1 \simeq 0$:

$$\begin{aligned} S_{B,v} &= 4\pi \int_0^\infty d\rho \rho \left(\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right) \\ &= -2\pi R^2 \delta_1 + 4\pi R \int_0^\infty d\rho \phi'(\rho)^2. \end{aligned} \quad (6.5)$$

L'équation 6.4 permet, par le biais d'un changement de variable, d'écrire la dernière intégrale comme suit :

$$\int_0^\infty d\rho \phi'(\rho)^2 = \sqrt{2} \int_0^1 d\phi \phi(1 - \phi^2) = \frac{1}{\sqrt{8}}. \quad (6.6)$$

Ainsi

$$S_{B,v} = 2\pi \left(\frac{R}{\sqrt{2}} - R^2 \delta_1 \right). \quad (6.7)$$

En minimisant l'action par rapport à R , on obtient le rayon du bounce dans le régime du mur mince ainsi que son action :

$$R_b = \frac{1}{\sqrt{8}\delta_1}, \quad S_{B,v} = \frac{\pi}{4\delta_1}. \quad (6.8)$$

L'ajout d'un δ_1 non-nul induit des corrections qui font que le comportement global de $S_{B,v}$ change lorsque la condition $\delta_1 \ll 1$ n'est plus satisfaite, ce qui implique que l'approximation du mur mince n'est plus valide. Dans ce cas, il faut déterminer l'action numériquement. On trouve que $S_{B,v}$ décroît plus rapidement que dans l'approximation du mur mince. La concordance entre l'ex-

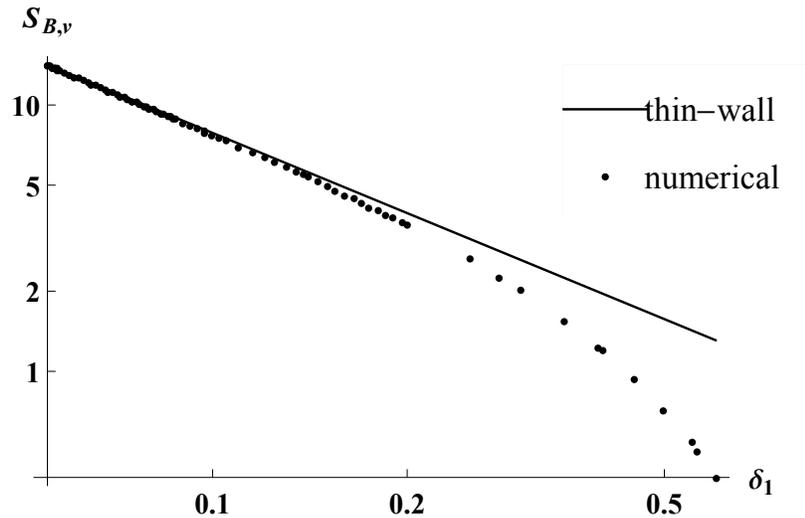


Figure 6.1 – L'action du faux vide en l'absence de kinks (Tiré de [6])

pression analytique et les valeurs numériques est très bonne alors qu'on a $\delta_1 \lesssim 1/8$. On ne peut plus négliger la contribution de δ_1 à l'équation du mouvement du bounce à mesure que l'approximation du mur mince perd de sa validité, via sa contribution au terme de potentiel.

Bien que le calcul de l'action dans l'approximation du mur mince ne présuppose aucune forme pour la solution bounce, il est intéressant de regarder l'allure des solutions pour diverses valeurs de δ_1 . La figure suivante illustre ce qui se passe avec la solution lorsque l'approximation du mur mince est valide (la figure 6.2(a)) et lorsque l'approximation du mur mince n'est plus valide (la figure 6.2(b)). On constate que le rayon du bounce a tendance à diminuer et le gradient du bounce a tendance à être moins concentré à mesure que δ_1 augmente. De plus, à mesure que δ_1 augmente, l'ordonnée à l'origine tend à diminuer parce que la quantité d'énergie requise pour surmonter la friction et la bosse a diminué dans l'analogie de la particule.

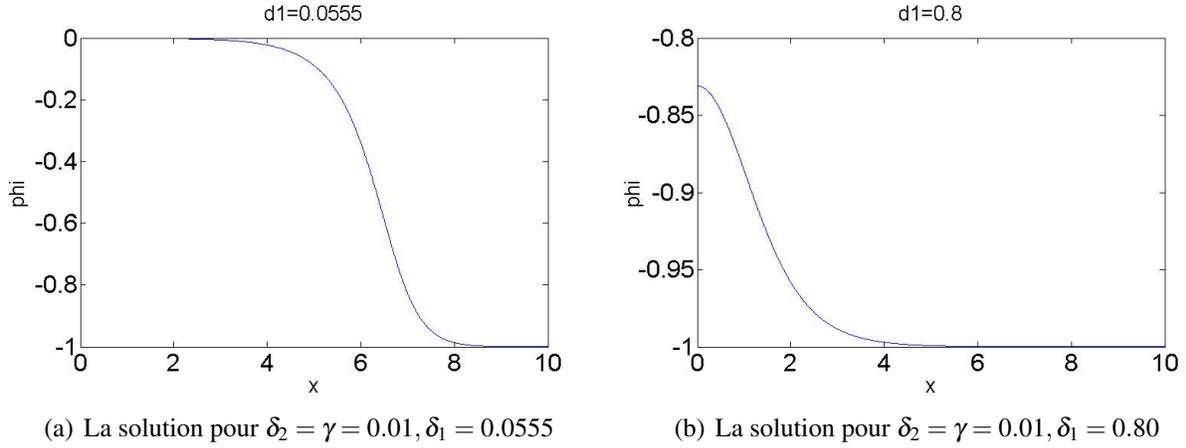


Figure 6.2 – Le bounce du faux vide pour deux valeurs de δ_1

6.2 Densité critique de kinks

Supposons qu'on veuille estimer la densité de kinks, autrement dit la quantité N de kinks compris dans un espace L . Une analyse standard pour estimer la densité de défauts topologiques pendant la transition de phase est basée sur le travail de Kibble [24] et de Zurek [40] ; cependant, cette analyse dépend fortement du modèle qui donne lieu à la transition de phase. Comme avec les faux vortex [26], notre modèle n'est fiable que bien après que la transition de phase soit terminée et alors ne devrait pas être utilisé pour estimer la densité de kinks. Si on atteint une densité critique dépendante des paramètres du potentiel, alors les effets des kinks sur le taux de désintégration sont plus importants que ceux du bounce lié au faux vide en l'absence de kinks. La probabilité de désintégration d'un kink et du bounce en l'absence de kinks sont respectivement

$$\Gamma_k = A_k e^{-S_{B,k}} \quad (6.9)$$

$$\frac{\Gamma_v}{L} = A_v e^{-S_{B,v}}, \quad (6.10)$$

avec $S_{B,k}$ défini par l'équation 5.11 et $S_{B,v}$ par l'équation 6.8 dans l'approximation du mur mince. Un calcul rapide qui néglige les effets des interactions entre kinks montre que, si on est en présence de N kinks n'interagissant pas entre eux dans une longueur L , la probabilité de désintégration totale par unité de longueur est, au premier ordre, $NA_k/L \times e^{-S_{B,k}}$. On peut alors se définir une densité critique de murs telle que $\rho_c A_k e^{-S_{B,k}} = A_v e^{-S_{B,v}}$, au-delà de laquelle on est assuré que les effets des

kinks vont dominer sur le faux vide nu. L'expression devient simplement :

$$\rho_c = \frac{A_v}{A_k} e^{S_{B,k} - S_{B,v}}. \quad (6.11)$$

Maintenant 6.11 présume que l'espacement entre les kinks est assez grand pour que la désintégration du faux vide nu ne soit pas étouffée, et qu'on néglige les interactions entre les systèmes de kinks. Il n'est pas clair comment les interactions entre les systèmes de kinks peuvent affecter le taux de désintégration, alors il serait intéressant de travailler sur la manière dont les interactions entre les multiples systèmes de kinks peuvent affecter l'action euclidienne. On verrait également, par extension, si le taux de désintégration des kink est affecté par les interactions entre kinks et ainsi voir si la densité critique 6.11 est soit une borne supérieure, soit une borne inférieure sur la véritable densité critique. De là, on peut déterminer une limite supérieure sur la densité de kinks qui auraient pu exister dans l'univers primitif. On pourrait aussi voir si la déformation requise sur χ pour minimiser ladite action dépend de la densité de systèmes de kinks dans l'univers.

L'équation 6.11 peut paraître douteuse parce que la densité doit avoir pour dimension L^{-1} alors que le côté droit de l'équation semble dépourvue d'unités. Les coefficients A n'ont été calculés que de manière approximative dans le cadre de ce travail, parce que, d'après Coleman et Callan [21], calculer ces coefficients A de manière exacte nécessite de trouver le spectre de perturbations. Dans la pratique, trouver le spectre de perturbations est assez encombrant. Cependant, les facteurs A_k, A_v sont proportionnels à des quotients de déterminants (équation 2.52), et on va donner un argument comme quoi ils ont des dimensions différentes, selon que l'on parle du kink ou du bounce du faux vide en l'absence de kinks.

Concentrons-nous sur les termes dépendants du déterminant. Ce sont les déterminants de la deuxième variation (comme à la section 5.2) de l'action euclidienne autour de la solution, bounce au numérateur, faux vide au dénominateur. Comme on retire d modes nuls du déterminant dans le calcul du déterminant primé (où d est le nombre de dimensions d'espace-temps), chacun comportant les unités de m^2 , on a donc que le déterminant vaut m^{-d} à cause de l'inverse multiplicatif de la racine carrée.

Les méthodes d'approximation exposées à la section avaient fonctionné pour les théories ϕ^4 et sine-Gordon (ϕ^∞); or le bounce du faux vide (ϕ^6) est un cas intermédiaire [38]. Dans le cas du

faux vide ($d = 2$ par invariance $O(2)$), M est donné par la masse caractéristique du bounce pour ϕ calculée à la sous-section 4.4.2, à savoir $M_\phi = \sqrt{8(1 - \delta_1)}$.

Par contre, dans le cas du kink, ce n'est pas le même processus physique qui gouverne l'effet tunnel. Ici, $d = 1$ parce que, en général, une déformation de χ n'est pas invariante sous translation spatiale, ainsi il ne reste plus que la translation temporelle. La masse caractéristique de l'écrasement de χ est plutôt donné par $M_h = \sqrt{V''(h)}\Big|_{h=1}$, où $V(h)$ est défini par l'équation 5.12. Donc $M_h = \sqrt{8X - 3Y}$, avec X et Y définis par l'équation 5.13. Nous frappons un écueil important lorsqu'on approche la zone de dissociation : la théorie de la nucléation des bulles ne fonctionne plus lorsque le taux de désintégration cesse d'être exponentiellement supprimée. Ceci se passe typiquement près de la ligne spinodale, autrement dit, lorsque le faux vide devient de plus en plus près d'être un point-selle du potentiel (donc $S \rightarrow 0$) [39].

Il n'y a aucune raison pour que les déterminants adoptent des comportements pathologiques, alors on peut s'imaginer qu'ils sont de l'ordre de la masse fondamentale du problème, $m = M_\phi^2/M_h$, à la puissance appropriée. Ainsi

$$\rho_c \simeq m \frac{S_{B,v}}{\sqrt{2\pi S_{B,k}}} e^{S_{B,k} - S_{B,v}}. \quad (6.12)$$

Il est clair que, à mesure que les paramètres varient et, conséquemment, les actions, l'effet dominant sur ρ_c sera la contribution exponentielle. En effet, c'est pour cette raison que la vaste majorité des discussions du tunneling ignorent le préfacteur. Dans la pratique, pour des valeurs de γ, δ_1 fixées (ici $\gamma = \delta_1 = 0.01$), si on prend $S_{B,v}$ comme en 6.8, alors la densité critique de kinks diminue lorsque δ_2 augmente, d'après la section 5.1.1, car l'action du kink va avoir diminué. On trouve donc que, pour $\gamma = \delta_1 = 0.01$ on suspecte que la désintégration du faux vide en l'absence de kinks est très fortement supprimée, car l'action du soliton est beaucoup plus petite que celle du bounce. Le faux vide y est alors très stable et donc la présence de kinks est importante.

CHAPITRE 7

DISCUSSION

Comme ces travaux se veulent des précurseurs à d'autres travaux plus approfondis, il serait approprié de mettre plus de jus autour du traitement du faux vide dans ce potentiel. J'ai ainsi identifié deux ouvertures pour approfondir les travaux reliés à ce potentiel et les kinks qu'il engendre, ainsi qu'une remarque importante au sujet du choix des unités.

7.1 L'introduction de la gravité

Les notions détaillées du modèle de désintégration du faux vide avec gravité sont hors du cadre de ces travaux. Néanmoins, un troisième article de Coleman et De Luccia [41] traite de l'ajout de la gravitation, et sa conclusion principale est valide lorsqu'on prend $\varepsilon \rightarrow 0$, où ε est la différence d'énergie entre le faux et le vrai vide. Lorsqu'on ajoute la gravité, il est important de définir la constante cosmologique initiale, et, par conséquent, le vide associé au zéro du potentiel. La gravité peut ralentir la désintégration du faux vide, voire le stabiliser complètement, si le zéro du potentiel est le faux vide, ou au contraire augmenter le taux de désintégration si le zéro du potentiel est le vrai vide.

Il serait intéressant de voir l'impact de la gravitation sur la désintégration du faux vide parce qu'il y a eu d'autres travaux effectués en ce sens parallèlement aux travaux qui ont mené à l'écriture de ce mémoire. Il y a eu des travaux effectués du côté des faux vortex avec gravité, qui reprennent essentiellement le modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions [26] mais en incluant la gravité. Cependant ces travaux demeurent encore, au moment de mettre sous presse, en cours.

On pourrait également se demander, si on plonge le système dans un champ gravitationnel, quelle intensité du champ gravitationnel serait nécessaire pour rendre le rayon de la bulle de faux vide fini. Pour ce faire, on pourrait utiliser la méthode décrite dans l'article de la désintégration du faux vide dans un champ gravitationnel de Coleman et De Luccia.

7.2 Des murs en dimensions supérieures

Finalement, comme on s'est concentré sur le kink en 1+1 dimensions, on peut se demander ce qui se passerait en 2+1 ou 3+1 dimensions tout en conservant ce modèle, par exemple. Bien entendu, un modèle produisant des kinks en 1+1 dimensions va produire des murs de domaine en 3+1 dimensions. On peut alors s'attendre, comme dans le cas des vortex, à ce que le mur va développer une ampoule, de manière analogue à ce qui se passe dans le cas du passage des vortex aux cordes cosmiques [27], où le rayon de la corde augmente à mesure que le faux vide s'y désintègre.

En parallèle, on peut étendre les méthodes exposées ici à un autre modèle donnant lieu à des multi-kinks [42].

CONCLUSION

Le but de cette recherche était d'étudier les effets de la présence de kinks sur la désintégration du faux vide. Pour ce faire, on a utilisé un modèle qui fait appel à un potentiel un peu compliqué qui fait intervenir deux champs couplés, ϕ et χ , et le Lagrangien qui en découle est l'équation 4.11, qui, après changement d'échelle, comporte cinq paramètres. Il va sans dire que, selon Coleman, le calcul central à cette recherche est le calcul du taux de désintégration, Ae^{-B} , où seul le coefficient B , qui est égal à l'action euclidienne du parcours considéré, le bounce, nous intéresse en raison de la nature semi-classique du calcul. Or, pour déterminer si la présence de kinks exerce une influence appréciable sur la désintégration du faux vide, il faut non seulement calculer l'action euclidienne du bounce du faux vide en l'absence de solitons, mais aussi celle des solitons. Et il faut aussi déterminer si on a des solutions stables préalablement à tout calcul d'action euclidienne.

On se doute bien que les solitons ainsi produits, des kinks, sont le résultat d'un système couplé d'équations du mouvement non analytiquement résolubles. Pour obtenir les solutions statiques stables, on a utilisé une méthode numérique dite de *relaxation* [34] et on trouve que les deux champs qui composent la solution, ϕ et χ , sont de symétrie opposée, antisymétrique et symétrique respectivement. On a calculé l'action euclidienne des solutions ainsi trouvées, et on trouve que δ_2 joue la plus grande influence dans l'action euclidienne du système de solutions, ce qui nous amène à nous définir des zones de dissociation dans l'espace des paramètres, c'est-à-dire des régions où les solutions stables n'existent pas.

Une zone de stabilité, comprise entre deux zones de dissociation, entre alors en ligne de compte (voir la figure 4.8). La première zone de dissociation, ou la zone inférieure, est caractérisée par des solutions instables causée par le passage du faux vide originel à un autre faux vide de densité moindre, mais qui n'est pas le vrai vide. Il existe également une deuxième zone de dissociation qui nous intéresse, ou zone supérieure, où on passe véritablement du faux vide au vrai vide et on a une absence de solutions stables.

Une méthode basée sur la deuxième variation, exposée à la section 5.2, a confirmé l'emplacement de la zone de dissociation supérieure. Si l'action était bel et bien minimisée, alors non seulement les kinks seraient des solutions à l'équation d'Euler-Lagrange et, de plus, l'équation de type Schrödinger qui caractérise la deuxième variation dans notre cas n'admettrait pas de mode

propre d'énergie négative. L'usage de la deuxième variation a permis de confirmer l'emplacement de la deuxième zone de dissociation initialement trouvée.

De plus, on peut se demander quand on peut avoir des solutions stables. On peut aussi être tenté de trouver la zone de dissociation en trouvant la valeur de δ_2 , pour γ, δ_1 donnés, qui va faire en sorte que h_- (équation 5.14) soit égale à 1. Or on trouve $\delta_2 = (1.19 \pm 0.02)$ pour $\gamma = \delta_1 = 0.01$ et on tire donc la conclusion que la zone de dissociation supérieure trouvée par les trois méthodes s'équivaut.

Il ne faut pas oublier que le bounce en l'absence de solitons joue un rôle aussi important que le soliton dans la description de la physique sous-jacente au problème : après tout, c'est au taux de désintégration de ce bounce auquel on compare celle du soliton. Comme le bounce reliant le faux vide initial à l'équipotentielle menant au vrai vide est à $\chi = -1$, l'action euclidienne du bounce ne dépend pas de δ_2 ou de γ , auquel cas on peut écrire $S_{B,v} = f(\delta_1)$.

La question initiale était de savoir quand est-ce que la présence de kinks a une influence sur la désintégration du faux vide. La réponse est qu'on peut exprimer la densité critique au-delà de laquelle les effets des kinks dominant sur les effets du bounce en l'absence de kinks par l'équation 6.11. En d'autres termes, ça dépend des valeurs des paramètres du modèle (et surtout de si on est dans le régime du mur mince pour le faux vide en l'absence de solitons). Des quatre termes que cette équation comporte, seuls trois sont sous contrôle. Il reste encore un terme qu'il faut mieux comprendre pour être en mesure d'effectuer un traitement quantitatif complet, c'est-à-dire A_k .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Marie-Lou Gendron Marsolais, *Énergie des vortex dans un modèle abélien de Higgs en 2+1 dimensions avec un potentiel d'ordre six*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal, 2015
- [2] *False vacuum*, Page consultée le 10 juillet 2015, <http://scienceblogs.com/startswithabang/2012/01/30/defending-physics-against-crack/>
- [3] P. Nordblad, *Magnetocaloric materials : Strained relations*, Nature Materials **12**, 11-12 (2013)
- [4] Philip W. Anderson, *Basic Notions of Condensed Matter Physics*, Perseus Books, Reading 1997
- [5] Collective, *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results*, Astronomy and Astrophysics, 2014
- [6] Éric Dupuis, Éric Gobeil, Luc Marleau, Richard MacKenzie, Manu Paranjape et Yvan Ung, *Tunneling decay of false kinks*, Physical Review D **92**, 025031 (2015), DOI : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.025031>
- [7] Paul Langacker et So-Young Pi, *Magnetic Monopoles in Grand Unified Theories*, Physical Review Letters **45**, 1 (1980)
- [8] S. Kachru, R. Kallosh, A. Linde et S. Trivedi, *deSitter vacua in String Theory*, Physical Review D **68**, 046005 (2003)
- [9] Sidney Coleman, *Fate of the false vacuum : semiclassical theory*, Physical Review D **15**, 2929 (1977)
- [10] Alan P. Lightman, *Ancient Light : Our Changing View of the Universe*, Harvard University Press, Cambridge, 1993
- [11] Anthony Challinor, *CMB anisotropy science : A Review* IAU Symposium **288**, 42 (2013)
- [12] V. F. Mukhanov, H.A. Feldman et R.H. Brandenberger, *Theory of Cosmological Perturbations*, Physical Report **215**, 203 (1992)

- [13] Alan Guth, *The inflationary universe : the quest for a new theory of cosmic origins*, Perseus Books, Reading, 1997
- [14] *Inflation*, Page consultée le 10 juillet 2015, <http://abyss.uoregon.edu/~js/ast123/lectures/lec18.html>
- [15] J. M. Bardeen, P. Steinhardt et M. S. Turner, *Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe*, Physical Review D **28**, 679 (1983)
- [16] Thomas Banks, Carl Bender et Tai Tsun Wu, *Coupled Anharmonic Oscillators. I. Equal-Mass Case*, Physical Review D **08**, 3346 (1973)
- [17] Michael E. Peskin et Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, Reading, 1995
- [18] S. Coleman, V. Glaser et A. Martin, *Action Minima among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations*, Communications in Mathematical Physics **58**, 211-221 (1978)
- [19] Indranil Dasgupta, *Estimating vacuum tunneling rates*, Physical Letters B **394**, 116-122 (1997)
- [20] Tanmay Vaschaspati, *Kinks and domain walls :An Introduction to Clasiscal and Quantum Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006
- [21] Curtis G. Callan Jr. et Sidney Coleman, *Fate of the false vacuum II : First quantum corrections*, Physical Review D **16**, 1762 (1977)
- [22] Steven Weinberg, *From BCS to the LHC*, Page consultée le 7 mai 2015, <http://cerncourier.com/cws/article/cern/32522>
- [23] Sidney Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [24] T.W. Kibble, *Topology of cosmic domains and strings*, J. Phys. A. **9**, 1387 (1976)
- [25] Brijesh Kumar, Manu Paranjape and Urjit Yajnik, *Fate of the false monopoles : induced vacuum decay*, Physical Review D **82**, 025022 (2010)

- [26] Bum-Hoon Lee, et al., *Tunneling decay of false vortices*, Physical Review D **88**, 085031 (2013)
- [27] Bum-Hoon Lee, et al., *Battle of the Bulge : Decay of the thin, false cosmic string*, Physical Review D **88**, 105008 (2013)
- [28] Tanmay Vaschaspati, *Cosmic Strings and the Large-Scale Structure of the Universe*, Physical Review Letters **57**, 1655 (1986)
- [29] David N. Spergel, et al, *Global texture as the origin of large-scale structure : Numerical simulations of evolution*, Physical Review D **43**, 1038 (1986)
- [30] A.J. Leggett, *A theoretical description of the new phases of liquid ^3He* , Rev. Mod. Phys **48**, 357 (1976)
- [31] A.A. Abrikosov, *The magnetic properties of superconducting alloys*, Journal of Physics and Chemistry of Solids **2**, 199 (1957)
- [32] A.P. Malozemoff et J.C. Slonczewski, *Magnetic Domain Walls in Bubble Materials*, Academic Press, New York, 1979
- [33] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 2006
- [34] Cleve B. Moler, *Numerical Computing with MATLAB*, Cambridge University Press, Cambridge 2004
- [35] Charles Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Oxford University Press, Londres, 2006
- [36] William H. Press, et al., *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing, 3rd edition*, Cambridge University Press, Cambridge 2007
- [37] Alan Guth et Erick J. Weinberg, *Cosmological consequences of a first-order phase transition in the SU_5 grand unified model*, Physical Review D **23**, 876 (1981)
- [38] A.W. Wipf, *Tunnel Determinants*, Nuclear Physics B **269**, 24-44 (1986)

- [39] A. Strumia, et al., *The Region of Validity of Homogenous Nucleation Theory*, Physics Letters B **467**, 279-288 (1999)
- [40] W.H. Zurek, *Cosmological experiments in liquid helium ?*, Nature **317**, 505 (1985)
- [41] Sidney Coleman et Frank De Luccia, *Gravitational effects on and of vacuum decay*, Physical Review D **21**, 3305 (1980)
- [42] Mareike Haberichter, et al., *Tunneling decay of false domain walls : the silence of the lambs*, Soumis au Journal of Mathematical Physics (UdeM-GPP-TH-15-242) 2015, arXiv : **1506.05838**