RÉSUMÉ

La théorie classique de la demande considère que les quantités demandées par un consommateur sont fonctions des prix et de son revenu. Marshall a montré dans son cadre d'analyse particulier que cette relation de demande exprimait également les prix que le consommateur accepte de payer pour différentes quantités de biens. Cette dimension a été oubliée par les développements modernes de la théorie de la demande. Nous montrons que les hypothèses habituelles de la demande, parmi lesquelles on explicite celle définissant le système de prix comptables, permettent de construire une théorie de l'évaluation parfaitement générale et duale de celle de la demande. La première partie de la thèse développe les résultats théoriques. La seconde partie amène conjointement les deux théories jusqu'aux tests empiriques. Tant la méthodologie que les résultats montrent que la théorie de l'évaluation doit être considérée comme une facette de la théorie de la consommation qui est aussi importante que celle de la demande.

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DUALITÉ DES THÉORIES DE LA DEMANDE ET DE L'ÉVALUATION: RÉSULTATS THÉORIQUES ET APPLICABILITÉ

PAR

Daniel LEBLANC

DÉPARTEMENT DE SCIENCES ÉCONOMIQUES
FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES

THÈSE PRÉSENTÉE À LA FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU
PHILOSOPHIAE DOCTOR (ÉCONOMIQUE)

AVRIL 1976

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

S O M M A I R E

Cette thèse comprend deux parties: la première dégage les résultats obtenus par les théories de la demande et de l'évaluation ainsi que leurs liens, la seconde s'intéresse à l'applicabilité de ces résultats.

Pour la première partie, après que certains concepts de base aient été repris en introduction, le Chapitre I étudie la dualité étroite des théories de la demande et de l'évaluation en construisant un difféomorphisme entre l'espace des biens et celui des valeurs. Le Chapitre II développe les deux théories de façon parallèle à partir du schéma classique de l'utilité. Le Chapitre III est consacré à deux prolongements: le premier est une interprétation analytique des résultats obtenus précédemment, le second donne la forme générale des fonctions de demande et d'évaluation marginale agrégées sur les consommateurs.

Dans la seconde partie, le Chapitre IV étudie les conditions d'agrégation empirique des fonctions de demande et d'évaluation marginale sur les trois composantes: individus, biens, temps. Le Chapitre V est une première application des résultats avec une estimation des fonctions de demande et d'évaluation marginale sur des données canadiennes.

La conclusion envisage rapidement certaines conséquences de ces résultats et des extensions.

INTRODUCTION

La demande réalisée d'un bien [*1] par un consommateur est la quantité de ce bien qu'il a acquis dans un environnement donné dont le prix est l'un des éléments.

La théorie statique de la demande interprète ce phénomène comme la réalisation d'une des situations possibles que le consommateur envisage et qui sont représentables par un barême exprimant les quantités qu'il achèterait dans divers environnements dont la série des prix est l'un des éléments.

Pour que ce comportement soit possible, il est nécessaire que le consommateur soit capable d'évaluer les biens. La base de cette évaluation est à préciser, mais existe nécessairement dès qu'il y a calcul économique.

Les formulations modernes de la théorie de la demande ne mettent cependant pas l'accent sur cette facette du phénomène. On y considère surtout les quantités comme dépendant *directement* des prix fixés et de l'environnement via les préférences du consommateur.

Il n'en a pas toujours été ainsi. Marshall (1920) insiste dans son Chapitre III sur le fait que le barême de demande représente *et* les quantités que le consommateur prendra à un prix donné, *et* les prix qu'il sera prêt à payer pour des quantités données. Ceci implique en particulier que, pour la demande réalisée, l'évaluation qu'il a du bien selon la quantité considérée est égale au prix exigé. Comme corollaire ceci

---

*1 Le terme bien est pris comme synonyme de biens et services économiques.

implique qu'il est capable d'évaluer les biens dans l'unité de valeur du marché ou de toute autre institution à laquelle il est confronté. Ceci traduit bien l'expérience de chacun: nous sommes capables de mettre un prix sur les biens.

Développer l'aspect évaluation dans la demande donnera des résultats dont il existera toujours le pendant du côté de la théorie usuelle *2 puisque l'on analyse le même phénomène avec les mêmes hypothèses. Mais examiner cette dimension est intéressant à plusieurs titres. Elle permet au plan théorique d'analyser le phénomène de la demande sous un angle différent, et de donner à la théorie toute sa généralité et sa puissance. Les conséquences sont aussi importantes pour les domaines connexes: l'étude des équilibres non-concurrentiels, les procédures de planification , les mécanismes d'ajustement... font souvent appel à l'aspect évaluation de la demande. Au plan explicatif, cet aspect permet de couvrir certains champs faibles de la théorie usuelle: la demande de biens ayant de fortes indivisibilités - la décision d'achat d'un automobile...- s'explique directement par l'évaluation qu'en font les consommateurs. Comme le note Hicks (1956, p. 83), au niveau agrégé, considérer les prix comme fonction des quantités est plus pertinent pour expliquer les mouvements de prix conduisant à l'ajustement de la demande à une offre donnée. Cette remarque est peut être particulièrement évidente pour les marchés agricoles.

---

*2 Le terme usuel qualifie la facette de la théorie de la demande que l'usage a consacrée, où les quantités demandées sont fonctions des prix et revenus.

L'historique des travaux traitant de l'aspect évaluation dans la théorie de la demande n'est pas aisé à faire, car cette question est présente à l'état diffus dans quasiment toute la littérature économique. Mais à notre connaissance, les essais de formulation et de systématisation restent cependant assez rares et ils reposent sur des motivations très diverses.

Dès 1886, Antonnelli (1886) construit des fonctions inverses de demande où les prix sont fonctions des quantités - et d'une normalisation avec un numéraire - pour résoudre l'intégrabilité des fonctions de demande. Cette méthode a été suivie dans une longue série de travaux où Samuelson (1950) représente une étape importante. Cependant ces fonctions inverses de demande sont surtout des instruments de calcul pour résoudre un problème spécifique, et reposent en particulier sur des normalisations avec numéraire. De même, Hotelling (1932) analyse un paradoxe sur la taxation et dégage les premières propriétés des fonctions inverses de demande. Hicks (1934), Allen (1934), en donnant leur premier critère de substitution - complémentarité dans l'espace des biens, c'est-à-dire en se basant sur les évaluations du consommateurs, semblent les premiers à traiter de façon systématique cet aspect comme une composante importante de la demande. Ils ont cependant abandonné ce critère ensuite, étant donné sa variabilité par rapport au choix du numéraire dans la classe particulière de normalisations qu'ils avaient choisie. Nous en verrons les raisons profondes à la fin de notre Chapitre I.

Wold (1943, ch. 8) développe les premières propriétés des fonctions inverses de demande dans son traité sur la demande. Nous montrerons dans le Chapitre II comment ses résultats se transforment, et sont en fait la base d'une théorie plus générale.

Par la suite Hicks(1956, ch. 9) étudie les fonctions inverses de demande pour elle-mêmes, et développe une approche de la demande par les évaluations dans le sens où nous l'envisagerons ici. Nous suivrons entre autres sa terminologie pour nommer la forme générale des fonctions inverses de demande, des fonctions d'évaluation marginale. Son exposé repose cependant toujours sur le choix d'un numéraire.

Pearce (1964) n'a pas fourni une formulation de l'approche de Hicks qui permette de donner à ses fonctions de "demande martienne" le même niveau de généralité qu'aux fonctions usuelles de demande: cependant sa méthodologie, consistant à border le système de demande, est à la base de nos résultats.

L'approche plus récente de la dualité a permis de systématiser les propriétés qui caractérisent les deux facettes de la demande selon l'espace dans lequel on la considère. En particulier, Bronsard (1971) donne une typologie des résultats mais en conservant l'hypothèse du numéraire.

C'est en généralisant cette hypothèse que nous dégagerons d'abord les propriétés des fonctions d'évaluation marginale, et que nous montrerons comment cet aspect de la demande a le même niveau de généralité que celui de la théorie usuelle.

Dans sa première partie, cette thèse développera les résultats théoriques tant pour les fonctions de demande - usuelles - que pour les fonctions d'évaluation marginale.

Ayant précisé dans l'introduction les concepts de base sur lesquels repose l'évaluation, nous procéderons d'abord par dualité étroite, c'est-à-dire que nous montrerons comment tout résultat de la théorie usuelle de la demande se projette sur les évaluations. La méthode utilisée consiste à construire un difféomorphisme entre l'espace des valeurs (sur lequel sont définies les fonctions de demande - usuelles -), et l'espace des biens sur lequel sont définies les fonctions d'évaluation marginale . La seconde étape développera de façon parallèle la théorie usuelle de la demande et celle de l'évaluation en partant du schéma classique de la maximisation de l'utilité. Nous donnerons finalement deux types d'extension à ces résultats: nous interpréterons analytiquement les matrices de Slutsky et d'Antonnelli généralisée, qui sont deux éléments-clefs de notre analyse, et nous examinerons les contreparties agrégées des formes significatives obtenues dans les chapitres précédents. Ceci constituera un premier pas vers l'application des résultats.

Dans la seconde partie, nous envisagerons l'applicabilité des deux théories. Nous considérerons d'abord les problèmes posés par l'agrégation effective des formes théoriques obtenues dans la partie précédente. Nous donnerons en particulier une formulation unifiée du problème posé par l'agrégation sur les consommateurs, ainsi que les résultats principaux. Le second volet appliquera à des données canadiennes les deux formes significatives de la demande. Cette estimation imposera en particulier la contrainte de semi-définition négative sur les matrices de Slutsky et d'Antonnelli. Dégagés sur huit (8) biens agrégés, ces résultats sont comparables à ceux de Barten- Geyskens(1975) obtenus pour cinq (5) biens avec l'estimation de la théorie usuelle de la demande. Nous proposons finalement un essai de comparaison des deux modèles.

"La science peut se définir par sa méthode: partir d'hypothèses bien explicitées, déduire de ces hypothèses toutes les conséquences et rien que les conséquences, confronter ces conséquences avec les données de l'observation, accepter la théorie au moins provisoirement, ou la rejeter, suivant qu'il y a accord ou désaccord, telle est la méthode scientifique. C'est la méthode qu'autrefois Henri Poincaré a commentée si valablement à propos des sciences physiques, et que Vilfredo Pareto a eu le mérite d'étendre aux sciences sociales". Ce raccourci éloquent d'Allais (1968, p. 6) résume les aspirations de beaucoup de chercheurs. Pour ses avantages comparés, nous avons choisi l'outil mathématique pour tenter de satisfaire aux deux premières conditions. Nous n'en avons cependant pas utilisé toute la puissance en n'employant que des mathématiques de niveau élémentaire - c'est-à-dire le nôtre -. Outre le niveau de qualification, ceci correspond également à l'arbitrage que doit faire toute théorie entre la simplicité et le degré d'approximation.

Pourtant vitales, les deux dernières phases restent cependant faibles dans notre approche - et nous sommes en bonne compagnie sur ce point ! - : ainsi que nous le montrerons, les résultats négatifs de l'agrégation et les moyens disponibles ne permettent pas un test pertinent pour les *deux* modèles. Le plus que l'on puisse dire est qu'ils ne peuvent être rejetés sur ces tests. *3

---

*3 Rappelons que les deux dernières étapes sont certainement les points faibles dans la méthode scientifique telle que décrite ci-dessus, lorsqu'elle est appliquée aux Sciences humaines: les hypothèses du modèle de test se veulent en général aussi importantes que celles du modèle théorique. Thuillier (1971) donne un exposé approfondi de cette question pour les théories scientifiques prises en général.

P A R T I E I

DUALITÉ DES THÉORIES DE LA DEMANDE ET DE L'ÉVALUATION: RÉSULTATS THÉORIQUES

INTRODUCTION

La théorie de la consommation a pratiquement délaissé la "théorie de l'évaluation" pour la "théorie de la demande". Comme nous l'avons mentionné précédemment, rares sont les études qui ont envisagé la théorie de l'évaluation avec le même esprit que celui qui a prévalu dans les travaux sur la théorie de la demande. Hoteling (1932), Wold (1943), Hicks (1956) et, dans le courant de la dualité, Bronsard (1971) ont dégagé les premières propriétés utilisant des normalisations avec un numéraire. Ils ont insisté en particulier sur la variabilité de leurs résultats par rapport au choix de ce numéraire. Ceci a des conséquences importantes au niveau des applications: Hicks-Allen, après avoir défini leur critère de substitution-complémentarité entre les biens d'abord dans l'espace des valeurs - Hicks (1934), Allen (1934) -, l'ont abandonné ensuite pour cette raison: Hicks (1937), (1946) lui substitue son correspondant dans l'espace des biens où ce problème disparait - nous en donnons l'explication en conclusion du Chapitre I -. Bronsard, Salvas-Bronsard, Zarra (1973) rencontrent le même problème pour caractériser et calculer une structure de taxation optimale pour l'économie canadienne. L'allocation finale d'un équilibre de monopole - Bronsard (1973, p. 265) - et celle d'un équilibre d'oligopoles - Gabszewick et Vial (1972) - dépendent aussi du choix du numéraire. Le même problème se rencontre au niveau des propriétés de stabilité d'un équilibre *1 - voir par exemple Mukherji (1973)-. Décri-

*1 Cette liste n'est pas exhaustive; on peut pratiquement affirmer que cette question apparaît dès que l'on quitte l'équilibre concurrentiel.

re l'ensemble de ces solutions est donc important.

L'existence de normalisation est en fait à la base du mécanisme d'évaluation. Tout système de valeur nécessite un ancrage sur la réalité pour être opérationnel et sa définition conditionne directement tous les calculs qui l'emploient. Ce point est souvent négligé (car supposé acquis), ce qui explique certainement en partie la faiblesse de la théorie de l'évaluation. Il nous semble donc pertinent de reprendre ici certaines définitions de base.

Quelques définitions

Dans son ouvrage fondamental Allais (1943) distingue deux systèmes pour représenter l'état et l'évolution de l'économie - (1943, p. 64 et suivantes) -:

i) le système des biens qui est une représentation physique - qualifiée réelle - de la circulation et de l'accumulation des biens,

ii) les systèmes des valeurs qui sont des représentations abstraites du système des biens en utilisant la notion de "valeur".

Ces derniers sont des comptabilités du système des biens et sont donc nécessairement des représentations biaisées. Ils permettent par contre de comparer dans des bases homogènes les éléments hétérogènes contenus dans le premier.

Toutefois cette comptabilité ne sera opérationnelle que si on définit une correspondance stable entre les unités des systèmes des valeurs et un ou plusieurs éléments du système des biens. Cette correspondance peut cependant avoir une forme très générale, comme nous le verrons.

Notons de suite que nous retiendrons une définition fonctionnelle [*2] de la "valeur". En particulier la valeur d'un élément du système des biens est la grandeur qu'on lui associe dans le système des valeurs correspondant, et la valeur de l'unité d'un bien est appelée son *prix.*

L'unité de valeur doit donc être définie en *dimension* et en *mesure*. Cette double définition de l'unité de valeur a un rôle essentiel dans les mécanismes d'évaluations et d'échanges dans la société. Elle lui donne le rôle de référentiel dans l'espace et le temps, pour les individus et la collectivité. En particulier elle permet aux agents de communiquer dans la même base. Cet avantage est particulièrement sensible pour les économies ayant dépassé le niveau du troc, et explique en partie cette évolution.

---

*2 Ainsi que le remarquent entre autres, dans des contextes différents, Allais (1943), Robinson (1962), la discussion de la nature de la valeur a fort peu de chances de déboucher sur des notions opérationnelles. Notons cependant que la méthode employée ici pour l'éviter est de la même nature que celle utilisée dans les sciences physiques et est fondamentalement tout aussi rigoureuse.

La "condition de référence" d'une économie de compte

Choisissons, parmi les systèmes des valeurs, le système des valeurs comptables pour présenter en première approximation les états de l'économie - c'est-à-dire que l'on ne reconnaît à la monnaie que le rôle d'unité de compte -. La définition en *dimension* et *mesure* de l'unité de compte constitue la "condition de référence" de l'économie dans la terminologie d'Allais (1943, p. 67). La *dimension* de l'unité de compte - et ses fractions - sont définies par la loi. Rappelons qu'historiquement la dimension de la monnaie circulant et celle de la monnaie de compte n'ont pas toujours été confondues [*3].

La définition de la *mesure* de l'unité de compte est moins simple. Une solution consiste à fixer le prix comptable du médium d'échange de l'économie. Si celui-ci est un bien (ou plusieurs biens dans le cas de l'écu d'argent et du louis d'or), la fixation de son prix comptable suffit à fonder le système des valeurs comptables. Faire varier cette définition est un instrument de politique monétaire de ces économies [*4]. Si ce moyen d'échange n'est pas un bien ayant une utilité directe pour les agents, fixer son prix comptable n'est pas suffisant [*5]. La contrain-

*3 En France, de la fin du règne de Charlemagne à la Révolution, la livre tournois et ses divisions jouaient le rôle de monnaie de compte cependant que l'écu d'argent et le louis d'or servaient de monnaie circulante. Sans contrepartie physique cette monnaie de compte a été appelée aussi "monnaie imaginaire" - voir Einaudi (1936)-.

*4 Les difficultés du bimétallisme - voir Marchal (1968) - peuvent s'interpréter également en ces termes.

*5 Le prix comptable du dollar est *un* dollar.

te de sa disponibilité crée une relation sur les prix monétaires et ainsi une relation sur les prix comptables. Cette relation suffit à fonder la *mesure* de l'unité de compte. Cette définition de l'unité de compte est donc sensible à tout phénomène affectant la liquidité de l'économie. Nous isolerons cet effet sous le terme d'inflation pure sur la forme significative des fonctions d'évaluation marginale . Renvoyant cependant au Chapitre I pour des notations plus précises, nous pouvons formaliser dès maintenant la définition de la *mesure* s de l'unité de compte, dans sa forme la plus générale, comme une fonction des prix comptables p, que nous écrirons sous la forme:

(1) $$s = \omega' p$$

où ω est un vecteur de poids. La *dimension* de l'unité de compte est décrite par l'équation dimensionnelle associée. Par exemple,

$$\begin{aligned} 1 &= (0,\ldots,\ 1/32) \quad (p_1,\ldots,\ p_{or})' \\ \$ &= (?,\ldots,\ \text{once}) \quad (?,\ldots,\ \$/\text{once})', \end{aligned}$$

est une définition de l'unité de compte dollar par rapport au bien-or du système des biens.

Cette condition de référence, ou normalisation collective, est une contrainte que chaque agent doit respecter mais qu'il n'est pas obligé par contre d'utiliser dans ses calculs personnels. Le touriste dans un pays étranger n'effectue certainement pas ses calculs personnels à l'aide de la condition de référence du pays visité, mais il la respecte dans ses actions sur le marché.

Prix personnels et évaluations marginales

Ceci nous amène à distinguer entre *prix personnels* et *évaluations marginales*.

Pour tout complexe de biens, les *prix personnels* de l'individu sont définis en même temps que les utilités marginales et ne sont qu'une transformation sur ces dernières. Si u_x^h est son vecteur d'utilités marginales pour un complexe de biens, α^h un scalaire, le vecteur π^h des prix personnels de l'individu h vérifie donc,

(2) $$\pi^h = \alpha^h u_x^h.$$

La dimension de ces prix personnels peut être celle de l'économie dans laquelle il évolue, celle d'une autre économie - dans le cas du touriste par exemple -, celle d'une unité de compte disparue - après 1959 et l'opération nouveaux francs, de nombreux Français ont continué d'évaluer en anciens francs -, ou même celle d'autres biens - travail, avoirs personnels -. La normalisation qui soutient ce système lui est fournie par son expérience dans un contexte institutionnel quelconque. Formalisons cette normalisation par:

(3) $$s^h = \omega^{h'} \pi^h ,$$

où ω^h est un vecteur de pondérations, s^h la mesure de l'unité de compte personnelle. Avec (2) et (3), le système de prix personnels se définit alors aussi par:

$$(4) \qquad \pi^h(x^h,s^h) = (s^h/\omega'^h u_x^h)\, u_x^h.$$

Les *évaluations marginales* sont l'expression des prix personnels dans l'unité de compte de l'économie. Celles-ci respectent (1), la condition de référence de l'économie. Notons p^h le vecteur d'évaluations marginales du consommateur h; celles-ci vérifient avec (1),

$$(5) \qquad p^h = (s/\omega' u_x^h)\, u_x^h .$$

Ce système est proportionnel à celui des prix personnels. Par s il est exprimé dans la dimension de l'unité de compte; la règle de conversion entre prix personnels et évaluations marginales, est donnée avec (4) et (5), par:

$$(6) \qquad p^h = (s/s^h) \quad (\omega'^h u_x^h/\omega' u_x^h)\, \pi^h.$$

(s/s^h) supporte le changement de dimension entre prix personnels et évaluations marginales lorsque celles-ci sont différentes.

Rappellons qu'à l'équilibre du consommateur, les évaluations marginales sont égales aux prix d'équilibre de l'économie considérée.

Par la suite nous étudierons seulement les évaluations marginales du consommateur,et ce pour différentes raisons:

i) (6) permet de les relier au plan théorique au système de prix personnels,

ii) elles sont l'aboutissement du processus d'évaluation du consommateur,en ce sens qu'elles seules lui permettent de communiquer avec les autres agents,

iii) elles sont observables et leurs propriétés testables empiriquement ainsi que nous le montrerons,

iv) elles ont le même niveau de généralité que les fonctions de demande,comme nous le montrerons également.

C H A P I T R E I

LE DIFFEOMORPHISME DE LA DEMANDE

I N T R O D U C T I O N

Ainsi que nous l'avons mentionné en introduction, les travaux portant sur l'évaluation n'ont pas fourni une théorie qui, basée sur des définitions suffisamment générales, permettait de dériver des résultats opérationnels dont le domaine de validité soit très large.

Cette absence de généralité est illustrée en particulier par la variété des appellations qui ont été utilisées. Hurwicz (1971 ch. 9) propose "prix-demandés" versus "quantités-demandées" pour la demande usuelle mais reste dans le cadre d'une normalisation spécifique. Malinvaud (1971b) emploie "propension marginale à payer". Pearce (1964) les qualifie de "fonctions de demande martienne ". Il insiste cependant sur leur utilité pour les planificateurs *1. Finalement Hicks (1956) utilise "évaluations marginales". Nous reprendrons sa terminologie car la définition que nous avons donnée à ce concept dans l'introduction généralise son approche. Le terme fonction inverse *2 de demande sera un synonyme de fonction d'évaluation marginale.

---

*1 Voulant d'abord traduire formellement le chapitre IX de Hicks (1956)-voir Pearce (1964 p. 57) - Pearce développe ensuite des résultats que nous ne pourrons cependant pas interpréter comme cas particuliers de ceux de notre étude, qui veut mettre l'accent sur la dualité dans la théorie de la consommation.

*2 Le présent chapitre fera les hypothèses nécessaires à l'existence de fonctions de demande. Ces hypothèses ne sont cependant pas essentielles à notre démarche. Le second chapitre, où l'on dérivera directement les fonctions d'évaluations marginales, sera compatible avec l'existence de correspondances de demande.

L'absence de généralité illustrée par cette variété d'appellations est due au fait que ces travaux se sont heurtés au problème de l'inversion des systèmes de fonctions de demande qu'ils ont contourné avec des solutions spécifiques.

N'intégrant pas la condition de référence du système des valeurs explicitement - et sous une forme générale -, ces démarches conduisent à exprimer des évaluations en prix relatifs, et non en prix comptables. Même s'il leur est toujours possible de revenir aux évaluations marginales (exprimées en termes de l'unité de compte, mais avec la normalisation particulière qu'ils ont posée), elles ne montrent pas comment ces évaluations marginales sont une facette différente du phénomène de la demande.

Nous mettons l'accent dans ce chapitre sur la dualité étroite existant entre les deux théories sous de bonnes conditions analytiques. Après avoir construit un difféomorphisme entre l'espace des valeurs et celui des biens avec les fonctions d'évaluation marginale et les fonctions de demande, nous préciserons les propriétés de leurs formes différentielles. Partant de leurs différentielles directes dont les propriétés théoriques et empiriques sont faibles, nous donnerons finalement des formes ayant des propriétés théoriques et empiriques plus consistantes.

Nous progresserons en faisant des hypothèses sur les fonctions de demande et en montrant comment leurs propriétés se transposent sur les évaluations marginales. L'opposé peut être également fait - à condition d'avoir déjà une théorie des évaluations marginales -.

La Section I formalisera d'abord le problème et montrera en particulier les approches habituelles et l'impasse dans laquelle elles s'engagent. Nous proposerons une solution générale permettant de montrer comment, sous de bonnes conditions analytiques, on peut passer des fonctions d'évaluation marginale aux fonctions de demande et vice versa. Finalement nous considérerons les premiers résultats sur les formes différentielles de ces fonctions.

Dans la Section II nous continuerons de caractériser de façon duale les formes différentielles de ces fonctions: la définition de la matrice d' Antonnelli généralisée et sa caractérisation relativement à la matrice de Slutsky déboucheront sur les formes différentielles significatives des fonctions de demande et des fonctions d'évaluation marginale .

SECTION I. CONSTRUCTION ET PREMIERS RÉSULTATS

Le premier paragraphe précise au plan formel notre problème. Dans le paragraphe deux, après y avoir développé les approches classiques, nous présenterons notre alternative. Le troisième paragraphe donnera les relations de dualité brutes.

§1. Notations, premières hypothèses et positions vis-à-vis du problème

Notons $x = f(p,m)$ la transformation représentant le système de fonctions de demande, définie de $P \times M$ dans X. P est l'espace des n prix strictement positifs, $P = \{p \in \mathbb{E}^n | p >> 0\}$[*3], M est l'espace revenu, $M = \{m \in \mathbb{E} | m > 0\}$. X, l'espace quantité est une partie convexe, fermée et bornée inférieurement de $\mathbb{E}^n$. X contient le vecteur nul de $\mathbb{E}^n$ et tout vecteur x tel que $x \geqslant x^*$ où x^* appartient à X.

Nous supposerons dans ce chapitre que ce système de demande épuise toujours le revenu du consommateur c'est-à-dire que $p'x = m$.

Nous supposons également que:

(H2) *Le consommateur n'est pas sujet à l'illusion comptable*

---

*3 IE désigne l'espace euclidien. Nous noterons $x >> y$ la relation entre deux vecteurs x et y de $\mathbb{E}^n$ lorsque $x^i > \forall i$, $= 1,\ldots,n$; $x > y$ lorsque $x^i \geqslant y^i$, $\forall\, i = 1,\ldots,n$ et $x \neq y$; $x \geqslant y$ lorsque $x^i \geqslant y^i$, $\forall\, i = i,\ldots,n$. x' est le vecteur transposé de x.

Cette hypothèse résume toute la signification de celle d'absence d'illusion monétaire. Une variation équiproportionnelle des prix comptables et des revenus nominaux n'affecte pas le choix du consommateur.

Ne prétendant pas être général dans nos hypothèses techniques, nous nous donnerons toujours de bonnes conditions analytiques. Nous supposerons donc que:

(H1 a) f *est une fois continuement différentiable sur* $P \times M$. ($f \in C^1(P \times M)$)

X étant de dimension n, $P \times M$ de dimension n + 1, la transformation f n'est pas inversable - voir Spivak (1965 p. 39). Il n'est donc pas possible d'obtenir des fonctions exprimant les prix et revenus en fonction des quantités en inversant directement f.

Pour lever cet obstacle, la théorie classique utilise comme forme équivalente à l'hypothèse d' ''absence d'illusion monétaire", la proposition que les consommateurs effectuent leurs calculs en termes réels.

La version la plus ancienne et la plus répandue de ceci consiste à supposer l'existence d'un numéraire dont le prix est fixé. Ceci permet de traduire les calculs du consommateur à partir des prix relatifs à ce numéraire.

Si n est l'indice du bien numéraire, définissons P* l'espace des prix relatifs à n et M* l'espace des revenus réels normalisés par n où $P^* = \{p_* \in \mathbb{E}^{n-1} \mid [p_*,1] \times p_n \in P\}$ et $M^* = \{m_* \in \mathbb{E} \mid m_* \times p_n \in M\}$. Le système des quantités demandées s'écrira alors

$$x = f\,(p_*,1,m_*).$$

f est alors définie de $P^* \times \{1\} \times M^*$ sur X, c'est-à-dire encore par f_*, sa restriction à $P^* \times M^*$ définie par

$$f_*\,(p_*,\, m_*) = f\,(p_*,1,m_*).$$

Si on suppose que:

(H3') f_* *est une fois continuement différentiable sur* $P_* \times M_*$ *et de plus appartient à l'ensemble des* C^1 *-difféomorphismes de* X *et* $P^* \times M^*$,

la structure d'hypothèses ((H2), (H3')) est cohérente.

Le système de demande peut s'inverser et respecter (H2). Il existe alors des fonctions g_* et h_* définies de $P^* \times M^*$ dans X telles que

$$p_* = g_*\,(x)$$
$$m_* = h_*\,(x),$$

et telles que $f\ (g_*\ (x),1,h_*\ (x)) = x$. Alors (g_*,h_*) forme le système classique d'évaluations en prix relatifs.

Il est nécessaire de spécifier en plus la nature et le prix du numéraire si on désire transposer ces évaluations dans les prix comptables, afin qu'elles contiennent l'information suffisante pour que les agents économiques puissent communiquer entre eux [*4].

On n'aura cependant pas donné aux évaluations marginales la même généralité qu'aux fonctions de demande. Leurs propriétés dépenderont en particulier de l'existence du numéraire et de son identification.

Une autre approche est possible pour lever l'obstacle de l'existence de fonctions d'évaluations marginales via l'inversion des systèmes de fonctions de demande.

Elle consiste à border le système de demande f par une $n + 1^{\text{ième}}$ relation permettant ainsi de faire disparaître du même coup le problème de dimension et celui de singularité dû à l'homogénéité de degré zéro de f. Les approches classiques n'ont pas développé cette possibilité de manière significative et c'est sur le choix de cette $n + 1^{\text{ième}}$ relation et sa portée que repose notre travail.

---

*4 Pearce (1964 p. 58) ainsi que la littérature centrée sur la dualité (Lau (1970) Diewert (1973a)...) utilisent la normalisation p/m qui conduit à la même indétermination.

Lorsqu'on dérive les fonctions de demande f des conditions du premier ordre de la maximisation d'une fonction d'utilité sous contrainte, par l'application du théorème des fonctions implicites [*5], on est amené à dégager le système

$$x = f\ (p,m)$$
$$\lambda = \lambda\ (p,m)$$

où λ est l'utilité marginale du revenu. Ce système est inversable, mais comme le note Pearce (1964 p. 58) le système inverse présente peu d'intérêt car il dépend par λ de l'indice d'utilité choisi.

Cependant cette approche suggère une alternative plus significative qui consiste à border le système de demande f par la solution de référence définissant l'unité de compte.

Dans un environnement de prix comptables et de revenu donnés, le consommateur détermine les quantités demandées. Cependant ce système de prix comptables vérifie nécessairement la condition de référence qui le définit. La prise en compte de cette règle de normalisation nous fournira une relation supplémentaire significative qui nous permettra de dériver directement les évaluations marginales en prix comptables.

---

*5 Nous reprendrons ce calcul dans le Chapitre II.

§ 2. Les systèmes de demandes et d'évaluations marginales

Nous formalisons la condition de référence que doit respecter le système de prix comptables dans sa forme la plus générale par une fonction e définie de $P \times M$ dans S par $s = e(p,m)$ avec $S = \{s \in \mathbb{E} \mid s > 0\}$.

Cette normalisation sur le système de prix provient des contraintes institutionnelles. Dépendant de ce cadre elle peut être la même pour tous les individus, et peut avoir les formes rencontrées habituellement dans la littérature: $s = p_n$, $s = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, p_i$, où les α_i sont des pondérations...
La forme générale proposée ici prend ces formes comme cas particuliers.

Notons que cette normalisation peut être individualisée dans certains cadres institutionnels (pour certaines procédures de planifications par exemple - voir Malinvaud (1971a ch.8)). Cependant la forme $s = m$ rencontrée fréquemment en théorie de la dualité appliquée à la structure des fonctions d'utilité (Houthakker(1960), Samuelson (1965) (1969), Lau (1969), Diewert(1973a)...) n'est pas une forme très significative pour une condition de référence d'un système de prix comptables d'une économie de marché. Elle doit être interprétée comme définissant le système de prix personnels du consommateur. De plus, Blackorby, Primont, Russel,(1975a) ont montré que la normalisation n'était pas essentielle à l'étude de la structure des fonctions d'utilité.

Pour être effective la règle de normalisation doit être indexée sur les prix (et possiblement les revenus). Nous supposons donc que

(H4) e (p,m) *est homogène de degré* r *positif en* p *et* m.

Dans ce cadre d'hypothèses le système complet de demande prend la forme

$$(1.1) \qquad \begin{aligned} x &= f\,(p,m) \\ s &= e\,(p,m) \end{aligned}$$

L'hypothèse de différentiabilité sur f((H1 a)) peut être complétée par celle de e((H1 b)) et on notera (H1):

(H1 a) f *est une fois continuement différentiable sur* $P \times M$

(H1 b) e *est une fois continuement différentiable sur* $P \times M$

Notons $J_{(f,s)}$ la matrice jacobienne de (f,s)

$$J_{(f,s)} = \begin{bmatrix} \partial f/\partial p & \partial f/\partial m \\ \partial s/\partial p & \partial s/\partial m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & f_m \\ e'_p & \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

où F est la matrice des effets-prix (effets de substitution bruts selon Green (1971), effets de substitution apparents selon Solari (1971)...),

f_m est le vecteur des effets-revenus,

e_p est le vecteur des pondérations brutes des prix de biens dans la normalisation,

ε_m est la pondération du revenu dans la normalisation.

Sous (H4), (e_p, e_m) peuvent être interprétés également comme des coefficients d'indexation pour les évaluations marginales.

Par (H1 a), (H4) et $m = p'x$ la condition de référence peut également s'écrire avec le théorème d'Euler (voir par exemple Lancaster (1968)),

$$s = (1/r)(e_p' + x'\varepsilon_m)\ p$$

que nous noterons aussi

$$s = \omega' p$$

avec,

$$\omega' = (1/r)(e_p' + x'\varepsilon_m).$$

Par ailleurs (H1) peut être aussi renforcée par,

(H3) (f,e) *appartient à l'ensemble des* C^1 *-difféomorphismes de* X × S *et* P × M

La structure d'hypothèses((H2), (H3), (H4)) est cohérente et il existe alors une transformation inverse de (1.1) définie de $X \times S$ dans $P \times M$, telle que

$$(1.2) \qquad \begin{aligned} p &= g(x,s), \\ m &= h(x,s). \end{aligned}$$

g est le système d'évaluations marginales du consommateur. Elles sont fonctions des quantités offertes et de l'unité de compte qui définit la dimension et la normalisation. h est l'évaluation par le consommateur de son revenu nominal en termes de l'unité de compte.

La matrice jacobienne de (g,f) existe par (H3) et sera notée

$$J_{(g,h)} = \begin{bmatrix} \partial g/\partial x & \partial g/\partial s \\ \partial h/\partial x & \partial h/\partial s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & g_s \\ h'_x & \eta_s \end{bmatrix}$$

où G est la matrice des effets-quantités,

g_s est le vecteur des effets d'une variation de la normalisation sur les évaluations marginales, c'est-à-dire des effets d'échelle sur les évaluations marginales,

h_x est le vecteur des recettes marginales,

η_s est l'effet d'une variation de la normalisation sur l'évaluation du revenu nominal.

Considérons les propriétés des formes différentiées de ces fonctions de demande et fonctions d'évaluation marginale .

La différentiation directe de $x = f\ (p,m)$ donnée par

$$dx = Fdp + f_m dm, \tag{1.1'}$$

permet de décomposer une variation de la demande en un effet - prix et un effet-revenu.

De même la différentiation de $p = g\ (x,s)$ donnée par

$$dp = Gdx + g_s ds, \tag{1.2'}$$

permet de décomposer une variation des évaluations marginales en un effet-quantité et un effet de variation de normalisation.

Ces deux formes se prêtent mal à des tests empiriques. Voyons cependant les implications empiriques qu'on peut en tirer.

Considérons la différentiation de $m \equiv p'x$ dans l'espace $P \times M$: on a sous (H1),

$$0 \equiv x' + p'F, \tag{1.3}$$

$$1 \equiv p'f_m. \tag{1.4}$$

Par (1.3) une variation des prix laissant le revenu nominal de l'individu inchangé va modifier son allocation entre les biens via les effets - prix.

(1.4) est la propriété classique d'agrégation sur les biens: "le dollar marginal est intégralement dépensé sur les biens".

Finalement sous (H1) avec le théorème d'Euler, l'hypothèse d'absence d'illusion comptable (H2) se traduit par

$$Fp + f_m m \equiv 0. \tag{1.3'}$$

Ainsi (1.3), (1.3'), (1.4) sont les restrictions portant sur la forme différentiée

$$dx = Fdp + f_m dm, \tag{1.1'}$$

des fonctions de demande.

La différentiation de $m \equiv p'x$ dans l'espace $X \times S$ donne sous (H 3):

$$h'_x \equiv p' + x'G, \tag{1.5}$$

$$\eta_s \equiv x'g_s \tag{1.6}$$

qui ne peuvent être directement transposés sur

$$(1.2') \qquad dp = Gdx + g_s ds .$$

Complémentairement à la structure des préférences du consommateur, la théorie de la demande a développé d'autres propriétés de symétrie et convexité, qui ne peuvent être testées sur la forme différentielle (1.1'). Comme il est classique de le faire nous dégagerons une alternative à (1.1') basée sur la matrice de Slutsky qui supportera toutes ces propriétés. Nous montrerons comment on peut faire de même pour la différentielle des fonctions d'évaluations marginales et (1.2').

Ainsi on définira dans la suite par

$$K \equiv F + f_m x'$$

la matrice de Slutsky que l'on identifiera à la matrice des effets de substitution nette de Hicks (voir appendice A).

Sous (H1) cette matrice vérifie la propriété $p'K = 0$ dont la démonstration est évidente par (1.3) et (1.4).

De plus sous (H1) et (H2)- la propriété d'homogénéité- la matrice K vérifie $Kp \equiv 0$ qui est équivalente à (1.3').

La même argumentation nous amènera à définir dans la section suivante la matrice d'Antonnelli généralisée. Considérons d'abord les premières propriétés découlant du difféomorphisme de la demande.

§ 3. Relations de dualité brute

Sous (H3) les matrices jacobiennes des transformations (f,e) et (g,h), vérifient

$$J_{(f,e)} \cdot J_{(g,h)} \equiv I_{n+1},$$

$$J_{(g,h)} \cdot J_{(f,e)} \equiv I_{n+1}.$$

Explicitons successivement ces deux relations de dualité entre les deux transformations. On a alors

$$FG + f_m h'_x \equiv I_n, \tag{1.7}$$

$$Fg_s + f_m \eta_s \equiv 0, \tag{1.8}$$

$$e'_p G + \varepsilon_m h'_x \equiv 0, \tag{1.9}$$

$$e'_p g_s + \varepsilon_m \eta_s \equiv 1, \tag{1.10}$$

puis,

(1.11) $$GF + g_s e'_p \equiv I_n,$$

(1.12) $$Gf_m + g_s \varepsilon_m \equiv 0,$$

(1.13) $$h'_x F + \eta_s e'_p \equiv 0,$$

(1.14) $$h'_x f_m + \eta_s \varepsilon_m \equiv 1.$$

De ces relations de dualité brute découlent un ensemble de résultats:

Résultat (1.1): Sous (H3), la matrice des effets-quantités G est g-inverse [*6] de la matrice de Slutsky. Sous (H3) et $\varepsilon_m = 0$ elles sont g - inverses réflexives. Sous (H3) et $\varepsilon_m = 0$ la matrice des effets -prix F est g - inverse de la matrice des effets-quantités G.

Preuve: Par (1.7) et (1.5) on a

(1.15) $$[F \;\; f_m] \begin{bmatrix} G \\ h'_x \end{bmatrix} \equiv [F \;\; f_m] \begin{bmatrix} G \\ p' + x'G \end{bmatrix} \equiv I_n$$

---

*6 Une matrice A est g-inverse d'une matrice B si BAB = B. Elle est g-inverse réflexive si de plus ABA = A. Elle est inverse généralisée au sens de Moore - Penrose si elle est g- inverse réflexive et si (AB)' = (AB) et (BA)' = BA (voir Rao-Mitra (1971)).

que l'on peut encore écrire comme $KG + f_m p' \equiv I_n$. Ceci implique avec $p'K \equiv 0$,

$$KGK \equiv K. \tag{1.16}$$

Si $\varepsilon_m = 0$, compte tenu de (1.12), $KG + f_m p' \equiv I_n$ prémultiplié par G s'écrit

$$GKG \equiv G. \tag{1.16)'$$

Si $\varepsilon_m = 0$, compte tenu de (1.12), (1.7) prémultiplié par G implique $GFG \equiv G$. ▲

Rappelons que le cas $\varepsilon_m = 0$ correspond à une classe de conditions de références significatives pour une économie de marché.

<u>Résultat (1.2):</u> Sous ((H2), (H3)) et $\varepsilon_m = 0$, les évaluations marginales sont colinéaires aux effets d'échelles g_s et plus précisément $p = (e_p' \, p) \, g_s$.

<u>Preuve:</u> (1.11) postmultipliée par p donne avec $Kp \equiv 0$,

$$-mGf_m + g_s e_p' \, p \equiv p. \tag{1.17}$$

Si $\varepsilon_m = 0$, on a alors directement par (1.12)

$$p = (e'_p\ p)\ g_s . \blacktriangle \tag{1.18}$$

<u>Résultats (1.3)</u>: Sous ((H2), (H3), (H4)), les fonctions d'évaluations marginales sont homogènes de degré 1/r en s - et donc $p = (rs)\ g_s$ -, les évaluations du revenu sont également homogènes de degré (1/r) en s - et donc $m = (rs)\eta_s$ -.

<u>Preuve</u>: Reprenons de la preuve précédente l'expression

$$-mGf_m + g_s e'_p\ p \equiv p.$$

Compte tenu de (1.12), on a alors

$$g_s\ (\varepsilon_m\ m + e'_p\ p) \equiv p.$$

Cependant (H4) implique $\varepsilon_m m + e'_p p = r\omega' p$ et

$$p \equiv (r\ s)\ g_s . \tag{1.19}$$

Une variation dans le niveau de l'unité de compte - la loi double le prix de l'or par exemple - entraine une variation proportionnelle des évaluations marginales. On remarquera que les résultats (1.18) et (1.19) sont cohérents avec l'absence d'illusion comptable de l'individu.

Il enregistre automatiquement dans ses évaluations marginales toute variation dans la condition de référence, l'ampleur de cet ajustement dépendant de r.

La fin du résultat (1.3) s'obtient directement en prémultipliant (1.19) par ω'.En tenant compte de $s = \omega' p$,on a en effet:

(1.20) $$1 = r\ \omega' g_s,$$

qui est la contrepartie duale de (1.4). (1.19) dans (1.6) fournit directement la relation sur l'évaluation du revenu:

(1.21) $$m = (r\ s)\ \eta_s. \blacktriangle$$

SECTION II. LA MATRICE D'ANTONNELLI GÉNÉRALISÉE ET LA CARACTÈRISATION RELATIVE DU SYSTÈME D'ÉVALUATIONS MARGINALES

Ainsi que nous l'avons noté en introduction, un certain nombre de travaux ont abordé la caractérisation des fonctions d'évaluations marginales avec les règles de normalisation spécifiques. Les travaux les plus complets dans cette approche sont certainement ceux de Bronsard (1971), Katzner (1970 ch. 3) qui utilisent la normalisation $p_n = 1$ et ceux de Diewert (1973a) avec la normalisation $m = 1$. Rappelons que les propriétés dérivées par Pearce (1964) avec cette dernière normalisation ne sont que partiellement duales de celles de la demande.

Ayant défini - paragraphe 1 - une matrice d'Antonnelli généralisée, nous caractériserons ses propriétés relativement à celles de la matrice de Slutsky. Nous dégagerons dans le second paragraphe la forme différentielle significative des fonctions d'évaluation marginale .

§ 1. La matrice d'Antonnelli généralisée

Par (1.3) la matrice de Slutsky peut s'écrire sous la forme

(1.22) $$K = (I_n - f_m p')\ F.$$

Définissons la matrice d'Antonnelli généralisée comme la matrice formellement duale dans l'espace $X \times S$.

(1.23) $$H = G\,[I_n - (1/s)\,\omega p'].$$

On remarquera que $[I_n - (1/s)\,\omega p']\omega = 0$ implique

(1.24) $$H\omega = 0$$ *7.

La matrice d'Antonnelli - Hicks - Allen définie à partir de la normalisation $p_n = 1 = s$ appartient bien à la classe des matrices H. -Voir par exemple Karzner (1970), Bronsard (1971)...- De même la matrice $\hat{K}$ définie par Diewert (1973a) avec la normalisation $m = 1$ y appartient aussi - au facteur m près -.

La première définition de l'effet de substitution - Hicks (1934), Allen (1934) -, basée sur la matrice d'Antonnelli - Hicks - Allen, permet de justifier déjà partiellement l'interprétation de H comme une matrice d'effets de substitutions généralisée caractérisant une structure de substitution - complémentarité définie sur les évaluations marginales.

Nous étaierons cette interprétation en conclusion à ce chapitre et au cours des Chapitres II et III.

Montrons d'abord que la dualité entre H et K n'est pas seulement formelle. Ceci se traduit dans la série suivante de résultats.

---

*7 Dans le cas $\omega = x$ cette propriété a la forme $Hx = 0$ qui est formellement duale de $p'K = 0$. Utilisée abondamment en théorie de la dualité, elle présente cependant peu d'intérêt par la normalisation qu'elle implique.

Résultat (1.4): Sous (H3), H est g - inverse de K. Sous (H3) et $\varepsilon_m = 0$, elle est g - inverse réflexive de K.

Preuve: $KHK = KG\,[I_n - (1/s)\omega p']K$ par $p'K = 0$ et le résultat (1.1), s'écrit

(1.25) $$KHK = KGK = K.$$

$HKH = G\,[I_n - (1/s)\omega p']\,KG\,[I_n - (1/s)\omega p']$ s'écrit avec $p'K = 0$,

$HKH = GKG\,[I_n - (1/s)\omega p']$ qui s'écrit, avec $\varepsilon_m = 0$ et le résultat (1.1),

$$HKH = G\,[I_n - (1/s)\omega p'] = H. \blacktriangle$$

Remarquons que ce résultat ne requiert pas les hypothèses (H4) et (H2).

Résultat (1.5): Sous ((H3), (H4)), H est g - inverse réflexive de K - c'est-à-dire que HKH = H et KHK = H -, et de plus $\omega'H = 0$.

Preuve: (1.9) combiné avec (1.5) donne $e_p' G + \varepsilon_m (p' + x'G) = 0$. la définition de ω par (H4) implique alors

(1.27) $$\omega' G = -(1/r)\varepsilon_m p'.$$

Comme on a

(1.28) $$p'\,[I_n - (1/s)\omega p'] = 0\,,$$

ceci implique aussi avec (1.27),

(1.29) $$\omega' H = 0.$$

Compte tenu de $p'K \equiv 0$, le produit HK s'écrit $HK = GK = GF + Gf_m x'$. (1.11) et (1.12) permettent de le récrire $HK = I_n - g_s\ (e'_p + \varepsilon_m x')$. Avec (1.19) et la définition de ω, on obtient finalement:

(1.30) $$HK = I_n - (1/s)\ p\omega'.$$

Il suffit de reprendre (1.29) pour construire

(1.31) $$HKH = H.$$

H étant déjà g - inverse de K par (H3) - résultat(1.4)-, elles sont g - inverses réflexives avec (H4) et (1.31). ▲

On remarquera la propriété (1.27) sur les effets - quantités et sa forme $\omega' G = 0$ lorsque $\varepsilon_m = 0$. La pròpriété (1.30) est à la base de la dualité des deux théories ainsi que l'illustrera la construction des fonctions d'évaluations marginales sous forme différentiée.

<u>Résultat (1.6)</u>: Sous ((H3), (H4)), l'équation fondamentale de la dualité de la demande est donnée par

(1.32) $$\begin{bmatrix} H & (1/s)p \\ (1/s)p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & \omega \\ \omega' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Preuve</u>: Elle est immédiate, compte tenu de (1.30), $H\omega = 0$, $p'K = 0$ et de la définition de s. ▲

Malgré le fait que H puisse être définie comme l'inverse g - réflexive de K (comme étant donc une classe de matrices), on remarquera que, pour ω donné, H est unique car appartenant à l'inverse de

$$\begin{bmatrix} K & \omega \\ \omega' & 0 \end{bmatrix}.$$ [*8]

Ce point devient clair avec le résultat (1.7).

<u>Résultat (1.7)</u>: Sous ((H3), (H4)),

i) la matrice de Slutsky est de rang n-1,

ii) la matrice d'Antonnelli est de rang n-1.

<u>Preuve</u>: Cette preuve s'appuie sur un lemme.

<u>Lemme 1</u>. (Barten - Kloek - Lempers (1969, lemme 2)):

*8 Ce point nous a été mentionné par un arbitre anonyme de la revue Econometrica.

$$\text{Si la matrice } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & a \\ \\ a' & b \end{bmatrix}$$

est d'ordre $(n + 1)\times(n + 1)$ et non singulière, alors A d'ordre $n \times n$ est au moins de rang $n - 1$.

<u>Preuve du lemme</u>: Supposons A de rang n-2, alors il existe ξ_1 et ξ_2 deux vecteurs non colinéaires non nuls, tels que

et/ou i) $\xi_1'A = 0$ et $\xi_2'A = 0$ est vrai,

et/ou ii) $A\xi_1 = 0$ et $A\xi_2 = 0$ est vrai,

et/ou iii) $A\xi_1 = 0$ et $\xi_2 A = 0$ ou son opposé est vrai.

On a de plus $\xi_1'\ a \neq 0$ et $\xi_2'\ a \neq 0$ nécessairement, sinon $[\xi_1',0]$ et $[\xi_2',0]$ "annuleraient" $\mathcal{A}$ dans au moins un des cas i), ii), iii).

Considérons $\xi_3 = (\xi_1'\ a)\xi_2 - (\xi_2'\ a)\xi_1$, alors $(\xi_3,0)$ "annulerait" $\mathcal{A}$ dans l'un des cas i), ii), iii) avec $\xi_3 \neq 0$ et $\mathcal{A}$ ne serait pas de rang $n + 1$. ▲

Appliqué à K dans l'équation (1.32) ce lemme implique que K soit de rang supérieur à $n - 2$. Par $p'K \equiv 0$, K est de rang $n - 1$. La même démonstration donne le résultat pour H. ▲

Après la première formulation donnée par Slutsky (1915) dans le cas de deux biens, Samuelson (1947) a rassemblé les implications empiriques de la théorie de la demande sous la série de propriétés:

$p'f_m \equiv 1$, $p'K = 0$ (propriété d'additivité),

$Kp \equiv 0$ (homogénéité des fonctions de demande),

$K \equiv K'$ (symétrie des effets de substitution nets),

$\zeta' K \zeta \leqslant 0, \forall\ \zeta \in \mathbb{E}^n$ (convexité des préférences).

A l'aide des hypothèses de difféomorphisme ((H3)), et d'homogénéité de la normalisation ((H4)), nous avons développé les relations de dualité directes entre H et K et les conséquences de l'homogénéité des fonctions de demande (H2) sur celles-ci. Il nous reste à considérer maintenant les propriétés correspondantes aux deux dernières propriétés significatives des fonctions de demande pour la matrice d'Antonnelli généralisée. Nous poserons ces propriétés par hypothèses sur K c'est-à-dire:

(H5) *La matrice des effets de substitutions nets est symétrique,*

(H6) *La matrice des effets de substitutions nets est semi définie négative.*

On obtient alors la série suivante de résultats:

Résultat (1.8): Sous ((H3), (H4), (H5)), la matrice d'Antonnelli généralisée H est symétrique - c'est-à-dire $H \equiv H'$ -.

Preuve: Il suffit de remarquer sur (1.32) que l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique. ▲

Résultat (1.9): Sous ((H3), (H4), (H5), (H6)), la matrice d'Antonnelli généralisée est semi définie négative - c'est-à-dire $\zeta' H \zeta \leqslant 0, \quad \forall\ \zeta \in \mathbb{E}^n$ -.

Preuve: Par le résultat (1.5) on a $HKH = H$. K étant symétrique semi définie négative, HKH l'est aussi (voir Balestra (1972 p. 180)), et donc H l'est également. ▲

En résumé les propriétés classiques de la demande ont leurs correspondants duaux sur la matrice d'Antonnelli généralisée. On remarquera que si l'on avait fait les hypothèses de symétrie et de négativité sur la matrice H, elles se seraient transposées de la même manière sur K.

Il nous reste donc à montrer en quoi ces propriétés sur H sont bien des propriétés sur les évaluations marginales.

§ 2. Les fonctions d'évaluations marginales sous leur forme différentiée

Soit

$$(1.33) \qquad \begin{bmatrix} dx \\ ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ e'p \end{bmatrix} dp + \begin{bmatrix} f_m \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} dm,$$

la forme différentielle de (1.1) le système de demande bordé.

Compte tenu de $dm = p'dx + x'dp$, la forme significative du système de demande sous forme différentiée s'écrit

$$(1.34) \qquad dx = Kdp + f_m p' dx.$$

Une variation des quantités demandées due à une variation de prix et revenu se décompose comme la somme d'un effet de substitution net (Kdp), et d'un effet de revenu réel ($f_m p'dx$). (1.34) supporte les implications empiriques de la demande (Samuelson (1947)).

On a de même pour la condition de référence:

$$(1.35) \qquad ds = e'_p dp + \varepsilon_m dm.$$

Une variation dans les prix comptables et/ou dans le revenu nominal peut être provoquée par une variation dans la normalisation.

Prémultiplions (1.34) par H, compte tenu de

(1.30) $$HK = I_n - (1/s)p\omega',$$

on obtient

(1.36) $$dp = Hdx + (1/s)p\omega'dp - Hf_m p'\ dx.$$

(1.36) est la forme significative des évaluations marginales sous forme différentiée.

Une variation des évaluations marginales peut être due à trois effets:

i) un effet de substitution net (Hdx), traduisant l'impact d'une variation dans l'offre, compte tenu de la structure de substitution - complémentarité au sens de Hicks (1934) et Allen (1934),

ii) un effet d'inflation pur ($(1/s)p\omega'dp$) provenant d'une variation dans la condition de référence,

iii) un effet de revenu réel ($-Hf_m\ p'dx$) traduisant une variation dans l'évaluation des biens provoquée par une variation réelle du revenu, et tenant compte de la structure d'Engel des biens (biens supérieurs, normaux ou inférieurs).

(1.36) est la contrepartie duale de (1.34). Cette forme est testable empiriquement avec

$$\omega' H f_m = 0,\ \omega' H = 0,\ H = H' \quad \text{et} \quad \zeta' H \zeta \leqslant 0,\ \forall\, \zeta \in \mathbb{E}^n,$$

comme restrictions sous les hypothèses (H2), (H3), (H4), (H5), (H6).

On obtient une forme voisine de (1.36) avec (1.2'), le résultat (1.3) et la définition (1.23) de H, c'est-à-dire

$$(1.37) \qquad dp = H dx + (1/s)\ G\, \omega p' dx + (1/rs) p\ ds.$$

Cette forme ne s'identifie cependant pas terme à terme avec (1.36) lorsque $\varepsilon_m \neq 0$. En effet, avec (1.35) et sa forme développée

$$ds = e'_p\ dp + \varepsilon_m p' dx + \varepsilon_m x' dp,$$

(1.37) se réécrit:

$$(1.38) \qquad dp = H dx + (1/s)\ [G\omega + (1/r) p \varepsilon_m]\ p' dx + (1/s)\ (\omega' dp)\ p$$

qui est une autre version de (1.36). Notons que compte tenu de (1.27), on a bien $\omega' \,[G\omega + 1/r\ p\varepsilon_m] = 0$.

On a également comme conséquence de (H5), (H6):

<u>Résultat (1.10)</u>: Sous ((H3), (H4), (H5), (H6)), la matrice G des effets-quantités vérifie la relation $\zeta\, G\, \zeta < 0$ pour tout vecteur non nul ζ de $\mathbb{E}^n$, tel que $\zeta' p = 0$.

<u>Preuve:</u> Par le résultat (1.7), K est de rang (n-1) et admet p comme vecteur propre associé à 0, et le résultat (1.1) montre que K = KGK. Tout vecteur ζ dans l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}^n$ orthogonaux à p peut donc s'écrire $\zeta = K\,\zeta$ où ζ est un vecteur choisi adéquatement dans cet ensemble. Ainsi quelque soit ζ de $\mathbb{E}^n$ non nul et orthogonal à p on a $\zeta' G\, \zeta = \zeta' KGK\, \zeta = \zeta' K\, \zeta < 0$ par (H5) et (H6). ▲

Ce résultat est la forme générale de la propriété obtenue par Wold (1943 p. 72) dans le cadre de la normalisation $s = p_n$. Ainsi que nous le montrerons dans le second chapitre, cette propriété est une conséquence directe de la stricte quasi-concavité de la fonction d'utilité qui sous-tend les fonctions de demande et d'évaluation. En effet, nous savons que, pour les fonctions de demande, la différentabilité, (H5) et (H6) suffisent à assurer leur intégrabilité et l'existence de cette fonction d'utilité. La même implication existe au niveau des fonctions d'évaluation marginale: ce sera l'un des résultats du Chapitre II.

C O N C L U S I O N

La dualité étroite que nous avons établie entre les formes et propriétés des fonctions de demande et celles des fonctions d'évaluation marginale montre bien que les deux concepts ont le même niveau de généralité et recouvrent le même phénomène. Ainsi il est évident que si l'on avait postulé les hypothèses sur les fonctions d'évaluations marginales plutôt que sur les fonctions de demande, elles se seraient transposées directement sur celles-ci, en employant la même méthode.

Notons que le fait d'introduire les hypothèses "au compte-gouttes" sur les fonctions de demande et de considérer leurs conséquences sur les évaluations est important par son interprétation au niveau de la demande collective. On sait *9 qu'en général les contreparties agrégées testables des restrictions sur K n'existent pas: notre méthodologie permet de voir les implications pour les fonctions d'évaluation marginale agrégées dans chaque cas.

Par ailleurs nous avons rassemblé et généralisé une première partie des résultats fragmentaires de la théorie des fonctions inverses de demande. Il reste encore à discuter de l'intégrabilité de ces fonctions: ce sera l'objet d'une partie du Chapitre II.

Finalement, (1.36) confirme déjà que H est une matrice d'ef-

---

*9 La section I du chapitre IV en donne un exposé.

fets de substitution nets: à niveau de vie constant ($p'dx = 0$) et condition de référence invariante ($\omega'dp = 0$), on a alors

$$dp = H^{(p'dx = 0)}_{(\omega'dp = 0)} dx.$$

Il est clair par ailleurs qu'en spécifiant ω on peut retrouver sur H certaines formes des matrices d'Antonnelli classiques. Avec $s = p_n$, cette forme correspond à celles d'Antonnelli (1886, p. 347), Hicks (1934) et Allen (1934), bien que ceux-ci donnent leur critère sous forme d'élasticité de substitution, Samuelson (1950 p. 377), Katzner (1970, p. 45), Bronsard (1971, p. 19), Hurwicz (1971, p. 194). Avec $s = m$ on obtient la "matrice inverse de Slutsky " de Diewert (1973a, p. 20) au coefficient m près.

Entre autres Hicks (1946), (1956 ch. 16), et Samuelson (1947, ch. 7) ont déploré que les définitions de substitution basées sur H et K ne concordaient pas. Katzner (1970 p. 49) et Bronsard (1971, p. 21) ont montré que si on construit H_{**} et K_{**} les matrices d'Antonnelli et de Slutsky, privées de la ligne et de la colonne correspondantes au numéraire, on a alors $K_{**}^{-1} = H_{**}$. Il est clair qu'à moins de spécifier la structure des préférences de façon adéquate ou d'un cas numérique spécial, il n'y a aucune raison pour que la structure de signes de K_{**} et de son inverse H_{**} coincident. Ainsi certaines paires de biens qui sont complémentaires dans l'espace des valeurs (p - complémentaires dans la terminologie de Hicks (1956, p. 156)) deviennent substituts dans l'espace des biens (c'est-à-dire q - substituts). Si de plus on change la nature du numéraire, certains éléments de la nouvelle matrice H_{**} auront un signe différent de ceux correspondants dans la première. Ainsi certains couples de biens q-substituts avec le premier numéraire deviendront p- complémentaires avec le second.

La synthèse de ces deux points est donnée par la relation de g - inverse réflexive existant entre H et K:

i) Pour une même normalisation les définitions de p et q - substituts satisfont à une "concordance faible" décrite par les structures de signes de K = KHK et H = HKH,

ii) sur l'ensemble des normalisations, la structure des q- substituts varie par la construction de H mais vérifie cependant une concordance affaiblie: si ω^1 et ω^2 représentent deux normalisations différentes et H^1 et H^2 les matrices d'Antonnelli associées, on aura,

Structure de signe de K = structure de signe de KH^1K
= structure de signe de KH^2K.

Remarquons finalement que l'invariance de la définition basée sur K provient de l'homogénéité de degré 0 en (p,m) des fonctions de demande. En effet (F, f_m) est alors homogène de degré (-1) en (p,m) ainsi que $(F + f_m x') = K$. Toute variation proportionnelle des prix et revenus nominaux laisse K inchangé (à un scalaire près). Cette robustesse a motivé le choix final de Hicks pour K comme base du critère de substitution - complémentarité. C'est ce qu'il souligne par "l'effet de substitution se rapporte à une variation des prix relatifs" - Hicks (1946 p. 45) -.

C H A P I T R E   I I

DÉRIVATION ET INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DE DEMANDE ET D'ÉVALUATION MARGINALE

I N T R O D U C T I O N

L'expression "implications empiriques" - meaningfull theorems - de Samuelson (1947 p. 107) s'adresse à la matrice de Slutsky et aux fonctions de demande sous forme différentiée. Ces propriétés sur les fonctions de demande permettent de faire le "pont" entre les théories de la demande et de l'utilité dans la théorie de la consommation. Sous de "bonnes" conditions analytiques, Samuelson (1947) montre qu'elles sont des conditions nécessairement satisfaites par les fonctions de demande lorsqu'elles sont obtenues d'une fonction d'utilité classique; puis il montre que ces conditions sont également suffisantes - Samuelson (1950) -. Ces travaux de Samuelson font en fait le point d'une littérature antérieure [*1] fort abondante. Dès le début du courant ordinaliste, la recherche de résultats indépendants du choix de l'indice d'utilité a induit des travaux sur les conditions suffisantes: Antonnelli (1886) présente les premiers résultats dès 1886.

Après avoir repris dans la première section la théorie de la demande dans une économie de compte, nous dégagerons dans la section II les propriétés des fonctions d'évaluations marginales en partant d'une fonction d'utilité. Nous étudierons alors l'intégrabilité de ce système d'évaluations marginales dans la section III. Avant soulignons deux points importants.

---

*1 En plus de sa contribution personnelle avec Uzawa (Hurwicz - Uzawa (1971 ch. 6)), Hurwicz (1971 ch. 9) donne une synthèse remarquable des développements modernes de cette question. Nous nous proposons d'appliquer la même méthodologie avec les fonctions d'évaluation marginale.

Premièrement, la discussion (voir par exemple Katzner (1970 p. 56)) centrée sur la définition de l'effet de substitution mentionne l'approximation que l'on commet lorsqu'on identifie la définition de l'effet de substitution (dite de Slutsky) basée sur une compensation en termes de pouvoir d'achat ($p'dx = 0$), à la définition basée sur une compensation en termes de satisfaction (dite de Hicks (1946 p. 41 et suivantes)).

Comme nous le montrons dans l'appendice A, les deux définitions sont équivalentes si on considère des variations proportionnelles des prix ou/et des variations très faibles de ces prix.

Afin de relier aisément les chapitres I et II (entre autres au niveau des définitions de H et K), il nous faut donc accepter l'hypothèse supplémentaire que les variations de prix et quantités sont faibles dans le voisinage de l'équilibre initial. Cette hypothèse aura par ailleurs l'avantage de simplifier considérablement le problème mathématique de l'intégration, en permettant de considérer seulement l'intégrabilité locale du système d'évaluations marginales.

Pour justifier cette hypothèse - ou s'en consoler -, on peut accepter avec Samuelson (1974 p. 126) que tout compte fait les variations observées dans la pratique sont toujours faibles, et que lorsqu'elles sont plus importantes elles correspondent aussi à des changements dans la structure des préférences [*2].

Le second point sur lequel nous voulons insister est que les Sections II et III restent encore valides si l'on considère des fonctions d'utilité seulement quasi concavesplutôt que strictement quasi concaves. Les surfaces d'indifférences peuvent présenter alors des portions planes qui cependant n'empêchent pas l'existence de fonctions d'évaluation marginale. Le consommateur peut évaluer de la même façon des complexes de biens différents. Dans ce cas, on a des correspondances de demande et non des fonctions. On remarquera cependant que l'hypothèse de continue différentiabilité de u nous est nécessaire dans ces sections: l'individu ne pourra pas évaluer différemment le même complexe de bien comme c'est possiblement le cas lorsque les courbes d'indifférence sont "cassées".

Ce second point ne sera toutefois pas isolé dans ce chapitre afin d'éviter de compliquer un corps d'hypothèse déjà trop touffu. L'extension à l'hypothèse de quasi concavité des résultats de ces deux dernières sections est immédiate.

---

*2 Il est intéressant de remarquer que le même type d'argument est utilisé par Barten (1971) lorsqu'il définit son effet de substitution comme une approximation de celui de Hicks - Allen (voir Charette - Bronsard (1976)) ainsi que dans sa justification pour tester les propriétés empiriques de la demande. Ces arguments vont cependant à l'encontre des aspirations usuelles des économètres sur les données... La marge de manoeuvre est donc étroite entre les deux.

SECTION I. LES FONCTIONS DE DEMANDE DANS UNE ÉCONOMIE DE COMPTE

§ 1. Les hypothèses et la formulation du problème.

Notre objectif n'étant pas de développer la théorie de la consommation dans son cadre le plus général, nous retiendrons ici un corps d'hypothèses assez fortes.

Supposons que les préférences de l'individu sur les biens sont représentables par une fonction d'utilité u *3 - ou toute transformation monotone croissante de celles-ci -, satisfaisant à de "bonnes" conditions analytiques, et dont les propriétés sont résumées par (H7):

(H7 a) u *est définie sur* X, *continue et croissante dans ce sens que pour tout* x^1 et x^2 de X *satisfaisant* $x^1 > x^2$, *alors* $u(x^1) > u(x^2)$,

(H7 b) u *est deux fois continuement différentiable sur* X - $u \in C^2(X)$ -, *et ses dérivées premières ne sont jamais toutes simultanément nulles,*

---

*3 Hicks (1956 p. 166-67), Lancaster (1966), (1971) ont considéré les biens comme étant des moyens pour atteindre des objectifs ou satisfaire des besoins définis sur des caractéristiques. Si on suppose une technologie appropriée (concave) pour passer des biens aux caractéristiques, les propriétés de la fonction d'utilité définie alors sur les caractéristiques sont conservées sur celle définie sur les biens. (par application directe du théorème I de Berge (1966 p. 217)). Les deux approches sont alors également significatives.

(H7 c) u *est strictement quasi concave sur* X *et telle que si* U *est la matrice hessienne,* u_x *le gradient de* u *en un point de* X, *alors la relation*

(2.1) $\xi' U \xi < 0$ avec $\xi \in E^n$, $\xi \neq 0$ et tel que $\xi' u_x = 0$, est vérifiée.*4

En d'autres termes (H7 c) implique que u est fortement quasi concave - dans la terminologie de Ginsberg (1973)-. Notons cependant que la stricte quasi concavité de u suffit à imposer que les surfaces d'indifférence soient strictement convexes.

Compte tenu de cette fonction d'utilité, le consommateur choisit dans un environnement de prix et revenu donnés le complexe de biens qui lui apporte la plus grande satisfaction. Formellement ceci revient à déterminer le vecteur x de X qui maximise la fonction d'utilité sous la contrainte de budget, c'est-à-dire la solution du problème:

maximiser u (x)

sous les contraintes $p'x \leq m$, $x \in X$.

---

*4 Pour une synthèse des définitions et les interprétations de la quasi concavité, on peut consulter Fenchel (1953), Arrow-Enthoven (1961), Katzner (1970), Diewert (1973b).... La classe de fonctions d'utilité caractérisée par (H7 c) a l'avantage de permettre une dérivation aisée de tous les résultats usuels de la demande - et des évaluations marginales -, tout en restant assez générale.

Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que

(H8) *Le consommateur demande de tous les biens.*

Les consommations d'équilibre de l'individu ne se situent pas sur la frontière de X, l'espace des consommations physiquement possibles. Cette hypothèse technique permet d'éviter les "solutions de coin" du problème de programmation associé et permet d'obtenir des conditions du premier ordre qui soient simples. Celles-ci ont alors la forme usuelle:

$$\partial\Lambda_{x,\lambda}/\partial x = u'_x(x^*) - \lambda p = 0 \tag{2.2}$$

$$\partial\Lambda_{x,\lambda}/\partial\lambda = p'\, x^* - m = 0 \tag{2.3}$$

où $\Lambda_{x,\lambda}$ est le lagrangien associé au problème, λ le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de budget.

Par la quasi concavité et la croissance de u, x^* la solution de (2.2), (2.3) est nécessairement un maximum sous contrainte de u.

Sous (H7 c), la matrice bordée $\begin{bmatrix} U & -P \\ -P' & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas singulière.

En effet, supposons que cette matrice soit singulière; alors il existe un vecteur d'ordre n et un scalaire γ tels que $[c',\gamma] \neq 0$ et tel que $Uc + p\gamma = 0$ et $p'c = 0$. Alors $c'Uc + c'p\gamma = c'Uc = 0$ qui contredit (H7 c) - compte tenu de $\lambda p = u_x$ -, à moins que $c = 0$. Mais $c = 0$ implique $p\gamma = 0$ et donc $\gamma = 0$, qui n'est pas possible par hypothèse sur $[c',\gamma]$. ▲

Ce résultat et sa démonstration sont empruntés à Barten, Kloek, Lempers (1969, lemme I).

Par l'application au système (2.2), (2.3) de la première partie du théorème des fonctions implicites - voir Dieudonné (1960 p. 275-77) -, on prouve l'existence locale d'un système de fonctions de demande définies sur un voisinage [*5] de (p,m) de $P \times M$ dans X et continuement différentiables sur ce voisinage - voir Katzner (1968) -, qui s'écrivent,

(2.4) $$x = f(p,m)$$

et $$\lambda = \lambda(p,m).$$

---

*5 Le terme voisinage est pris dans son interprétation topologique classique: $N = \{(p,m) \in P \times M \mid \|(p_0, m_0) - (p,m)\| < \rho\}$ est un voisinage de $(p_0,m_0) \in P \times M \subset \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}$, si $\rho > 0$. Dans sa forme la plus générale, un voisinage n'est pas nécessairement sphérique mais contient nécessairement de tels voisinages. Une proposition P est vraie sur un voisinage de (p_0, m_0) s'il existe un voisinage N de (p_0, m_0) tel que P soit vraie sur tout voisinage de (p_0, m_0) inclusdans N.

λ a été interprété comme l'utilité marginale du revenu (Roy (1942)), et dépend par construction - voir (2,2) - de l'indice d'utilité choisi.

Remarquons que si on ne spécifie pas la fonction d'utilité u, on ne peut connaître l'équation des fonctions de demande. On peut montrer cependant qu'elles sont homogènes de degré 0 en (p,m).

En effet, supposons que tous les prix et revenus soient simultanément multipliés par un même nombre positif. Ni la fonction à maximiser sur X, ni le domaine défini sur X par la contrainte de budget ne sont modifiés, et en conséquence l'équilibre ne sera pas modifié.

§ 2. La première forme des fonctions de demande différentiées et ses propriétés

Si on ne spécifie pas la fonction d'utilité, les investigations empiriques directes sur f ne sont pas possibles. Cependant on peut dériver des propriétés sur la différentielle de ces fonctions. Considérons donc la forme différentielle de celles-ci - qui existe par la première partie du théorème des fonctions implicites -, c'est-à-dire

$$dx = F dp + f_m dm, \tag{2.5}$$

où $F = [\partial f / \partial p]$ est la matrice des effets-prix et $f_m = [\partial f / \partial m]$ le vecteur des effets-revenus.

L'homogénéité de degré 0 en (p,m) de f se traduit sur (2.5) avec le théorème d'Euler - Lancaster (1968) - par

(2.6) $$0 = Fp + f_m m.$$

Par ailleurs, les fonctions de demande satisfont à la seconde condition du premier ordre, c'est-à-dire

$$m \equiv p'f\ (p,m),$$

dont la différentiation par rapport à p donne

(2.7) $$0 \equiv x' + p'F$$

et celle par rapport à m,

(2.8) $$1 \equiv p'f_m .$$

(2.8) est la propriété d'agrégation sur les biens.

Ainsi (2.6), (2.7), (2.8) sont les restrictions que l'on peut poser sur (2.5), la première forme différentiée des fonctions de demande.

§ 3. La seconde forme des fonctions de demande différentiées et l'équation fondamentale de la demande

Ce système de restrictions peut cependant être complété par d'autres, dont la signification est plus riche, en modifiant la forme de (2.5).

Considérons la différentiation de la seconde condition du premier ordre,

(2.9) $$dm = p'dx + x'dp.$$

Soit $K = F + f_m x'$ la matrice de Slutsky. Compte tenu de (2.9), (2.5) s'écrit alors

(2.10) $$dx = Kdp + f_m p'dx.$$

Sur (2.10), K s'interprète directement comme un effet de substitution compensé en termes de pouvoir d'achat, par

$$dx = Kdp.$$
$$(p'dx = 0)$$

Compte tenu de $m \equiv p'x$, la propriété d'homogénéité de degré 0 des fonctions de demande – i.e. (2.6) – se traduit sur K par

(2.11) $$Kp \equiv 0.$$

La propriété (2.8), d'agrégation sur les biens, reste valide sur (2.10).

(2.7) est modifiée et remplacée par

(2.12) $$p'K \equiv 0.$$

Il suffit pour cela de substituer (2.8) dans (2.7) et de tenir compte de la définition de K.

Il est possible de compléter cet ensemble de propriétés sur K en remontant à celles de la fonction d'utilité.

La seconde partie du théorème des fonctions implicites (Dieudonné (1960 p. 275-77)) pose que les différentielles des fonctions f et λ vérifient (sous forme matricielle ici),

$$(2.13)\qquad \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & f_m \\ \lambda'_p & \lambda_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda I_n & 0 \\ x' & -1 \end{bmatrix} \quad {}^{*4}$$

où $\lambda_p = \partial\lambda / \partial p$ et $\lambda_m = \partial\lambda / \partial m$.

(2.13) est l'Equation Fondamentale de la Demande dérivée par Barten (1964) qui la présente cependant sous un arrangement légèrement différent.

Le membre de droite de cette équation est de rang n + 1. Postmultiplions (2.13) par l'inverse de ce terme c'est-à-dire par

$$\begin{bmatrix} (1/\lambda)\, I_n & 0 \\ (1/\lambda)\, x' & -1 \end{bmatrix}.$$

---

*4 Il faut souligner l'importance de la seconde partie du théorème des fonctions implicites - Dieudonné (1960 p. 275-77) -, qui permet de caractériser directement la matrice des effets - prix , le vecteur des effets-revenus ainsi que λ_p, λ_m, par

$$\begin{bmatrix} F & f_m \\ \lambda'_p & \lambda_m \end{bmatrix} \equiv - \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda I_n & 0 \\ -x' & 1 \end{bmatrix}$$

Cette équation est méconnue dans la littérature économique où le théorème des fonctions implicites n'est utilisé que comme théorème d'existence - voir p.e. Katzner (1968) -.

On obtient alors

$$(2.14)\qquad \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/\lambda)\ (F + f_m x') & -f_m \\ \lambda_p'/\lambda + (\lambda_m/\lambda)x' & -\lambda_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on prend en compte la définition de la matrice de Slutsky ($K = F + f_m x'$), et la symétrie des trois matrices (l'inverse d'une matrice systématique), cette équation se réécrit:

$$(2.15)\qquad \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/\lambda)K & -f_m \\ -f_m' & \lambda_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On en déduit d'abord que la fonction d'utilité marginale du revenu $\lambda = \lambda\ (p,m)$ est homogène de degré (-1) en p et m.

En effet, $f_m = (1/\lambda)\ (\lambda_p + x'\lambda_m)$ postmultipliée par p' se réécrit: $(-1)\lambda = \lambda_p'\ p + \lambda_m m$ compte tenu de $p'x = m$. La réciproque du théorème d'Euler-Lancaster (1968) achève la preuve.

(2.15) permet de compléter les propriétés classiques des fonctions de demande telles que rassemblées sous le terme "d'implications empiriques de la théorie" par Samuelson (1947). Ainsi, sur (2.10), ces propriétés se résument par:

i) l'homogénéité des fonctions de demande en (p,m) qui se traduit sur (2.10) par

$$Kp \equiv 0. \tag{2.11}$$

ii) la symétrie des effets de substitution qui se traduit par

$$K \equiv K'. \tag{2.16}$$

En effet, sur (2.15) la symétrie de l'inverse d'une matrice symétrique implique (2.16).

iii) la semi-définition négative de la matrice des effets de substitution qui se traduit par

$$\zeta' K \zeta \leqslant 0, \qquad \forall\ \zeta \in \mathbb{E}^n. \tag{2.17}$$

Montrons ce point: à tout vecteur ξ de $\mathbb{E}^n$ correspond son transformé $\zeta = K\xi$. Par la symétrie de K et $Kp \equiv 0$, cette classe de vecteur est orthogonale à p, c'est-à-dire que $p'\zeta = 0$. De (2.15), on obtient $(1/\lambda)\ UK + pf'_m \equiv I_n$ qui, prémultiplié par K, s'écrit alors $K\ (1/\lambda)\ UK \equiv K$ en tenant compte de (2.11). Comme $\xi' K\ \xi \equiv \xi' K\ (1/\lambda)\ UK\xi \equiv \zeta'(1/\lambda)\ U\zeta$ et

ζ' $(1/\lambda)$ $U\zeta$ < 0(par (H7 c) et $\lambda > 0$), la forme quadratique $\zeta' K\xi$ est semi définie négative. Notons que K est de rang (n-1) car appartenant dans (2.15) à une matrice négative, symétrique, d'ordre $(n+1)\times(n+1)$ et vérifiant $Kp \equiv p'K \equiv 0$ - pour la preuve voir Chapitre I, section II, résultat (1.7)-. Ce point a également été démontré par cette approche, par Barten, Klock, Lempers (1968, proposition 2).

iv) la propriété d'agrégation sur les biens, c'est-à-dire

$$p'f_m \equiv 1. \tag{2.8}$$

i), ii), iii), et iv) sont les propriétés empiriques du système de demande sous la forme (2.10). ii) et iii) sont des conditions nécessaires - voir Samuelson (1947), Hicks (1946) ...-, et suffisantes - voir Samuelson (1950), Hurwicz (1971 ch. 9) ... - pour fonder la théorie de la demande sur la théorie de l'utilité à partir de notre corps d'hypothèses.

Complémentairement, l'environnement donné de prix (et revenu ...) satisfait à la condition de référence de l'unité de compte de l'économie, c'est-à-dire,

$$s \equiv e\,(p,m)$$

qui sous ((H1 b), (H4)), s'écrit encore,

(2.18) $$s = \omega' p$$

avec,

(2.19) $$\omega = (1/r)\ [e'_p + x'\varepsilon_m].$$

Dans un cadre de statique comparative, on peut admettre que tous les prix et revenus varient, de même que la mesure de l'unité de compte. La différentielle de $s = e\ (p,m)$ peut s'écrire alors, compte tenu de (2.19),

(2.20) $$ds = r\omega' dp + \varepsilon_m p' dx.$$

Une variation dans la définition de l'unité de compte peut se décomposer en une variation du niveau des prix - et des revenus nominaux -, et/ou du niveau du revenu réel.

SECTION II. LES FONCTIONS D'ÉVALUATION MARGINALE DANS UNE ÉCONOMIE DE COMPTE

§ 1. La forme implicite des fonctions d'évaluation marginale

Ainsi que nous l'avons vu dans l'introduction, les évaluations marginales d'un complexe de biens par le consommateur sont colinéaires aux utilités marginales définies sur ce complexe (et colinéaires également aux prix personnels), c'est-à-dire que

(2.21) $$p = \theta u_x ,$$

où θ est un terme positif.

A l'équilibre du consommateur et sous l'hypothèse de divisibilité des biens, ces évaluations marginales sont égales aux prix du marché et de plus l'évaluation du revenu est égale au revenu réel, c'est-à-dire

(2.22) $$m = p'x.$$

Complémentairement, les évaluations marginales respectent la condition de référence de l'unité de compte de l'économie, c'est-à-dire la relation $s = e(p,m)$. Sous ((H1 b), (H4)) cette normalisation s'écrit encore

(2.18) $$s = \omega' p$$

avec

$$\omega' = (1/r)\ [e_p' + \varepsilon_m x']. \tag{2.19}$$

Compte tenu de (2.19), les évaluations marginales données par (2.21) vérifient encore

$$p = (s/\omega' u_x)\ u_x \tag{2.23}$$

avec $\theta = (s/\omega' u_x)$ dans (2.21).

De même,(2.22) prend la forme

$$m = (s/\omega' u_x)\ u_x'\ x. \tag{2.24}$$

Il faut souligner que,sauf en cas particulier où ω est un vecteur de constantes, (2.23) n'est pas l'équation explicite - forme de Monge - des fonctions d'évaluations marginales. En effet si dans (2.23) s est exogène, ω peut être fonction de p. La même remarque s'applique à l'évaluation du revenu - (2.24) -. En conséquence,si on note

$$p = g(x,s), \tag{2.25}$$

$$m = h(x,s), \tag{2.26}$$

le système des fonctions d'évaluation, elles vérifient par (2.23) et (2.24),

(2.27) $$p = g(x,s) = (s/\omega' u_x)\, u_x = \phi(x,s,p)$$

(2.28) $$m = h(x,s) = (s/\omega' u_x)\, u_x'\, s = x'\phi(x,s,p).$$

§ 2. La première forme des fonctions d'évaluation marginale différentiées et ses propriétés

A moins d'expliciter la règle de normalisation, il n'est donc pas possible de spécifier la forme des fonctions d'évaluation. Considérons cependant leur forme différentiée, c'est-à-dire

(2.29) $$dp = Gdx + g_s ds$$

où $G = [\partial g / \partial x]$ est la matrice des effets-quantités et $g_s = \partial g / \partial s$. (2.29) n'est pas observable avec ds à moins de spécifier ω. Il est cependant possible de dériver des propriétés sur (2.29).

Résultat (II.1): Sous ((H1 b), (H4), (H7)), les effets d'échelle sur les évaluations vérifient la relation $\omega' g_s = (1/r)$.

Preuve: La différentiation implicite (voir Buck (1956 p. 254-55)) par rapport à s de (2.27) donne

(2.30) $$g'_s = (1/\omega' u_x)\, u'_x - s\, (1/\omega' u_x)^2\, u'_x\, (g'_s W u_x)$$

où $W = [\partial\omega/\partial p + (\partial\omega/\partial m)\, x']$.

Cependant avec (H1 b) et (H4) s est homogène de degré r en (p,m) et $\omega = (1/r)\, (e'_p + x'\varepsilon_m)$ est homogène de degré (r-1) en p. On a alors par le théorème d'Euler - Lancaster (1968)-,

(2.31) $$(r - 1)\, \omega = (\partial\omega/\partial p)p + (\partial\omega/\partial m)m = Wp.$$

Reportant (2.31) dans (2.30) et tenant compte de (2.23), on obtient

(2.30') $$g'_s = (1/s)p' - (1/s)p'\, (g'_s\, \omega)\, (r - 1),$$

qui, postmultiplié par ω, donne le résultat :

(2.32) $$g'_s\, \omega = (1/r) \quad ▲.$$

<u>Résultat (II.2)</u>: Sous ((H1 b), (H4), (H7)), les fonctions d'évaluation marginale sont homogènes de degré (1/r) en s (et donc $p = (rs)g_s$), de même la fonction d'évaluation du revenu est homogène de degré (1/r) en s (et donc $\omega = (rs)\eta_s$).

<u>Preuve</u>: Reprenons l'expression (2.30') qui s'écrit maintenant avec (2.32),

(2.33) $$g_s's = (1/r)\ p'.$$

Prémultiplier $p = (1/rs)g$ par x' suffit à prouver le résultat sur m avec $x'g_s = \eta_s$ ▲.

Une variation dans la valeur de l'unité de compte n'affecte pas les évaluations marginales relatives et se traduit uniquement par un phénomène d'indexation des évaluations.

<u>Résultat (II.3)</u>: Sous ((H1 b), (H4), (H7)), la matrice des effets quantités vérifie $\omega'G = -(1/r)\ \varepsilon_m p'$. Si $\varepsilon_m = 0$, on a $\omega'G = 0$

<u>Preuve</u>: En prémultipliant (2.29) par ω', on obtient, en tenant compte de (2.32),

(2.34) $$\omega'dp = \omega'Gdx + (1/r)ds.$$

Cette expression identifiée à $ds = r\omega'dp + \varepsilon_m\ p'dx$ fournit

(2.35) $$\omega'G = -(1/r)\varepsilon_m\ p'.$$ ▲

(2.32) et (2.35) sont les restrictions sur la première forme différentiée (2.29), des fonctions d'évaluation marginale.

Notons que les résultats (II.1), (II.2), (II.3) ont déjà été dérivés (différemment) dans le premier chapitre. Remarquons également que seules les composantes (H7 a), (H7 b) de (H7) ont été nécessaires pour dériver ces résultats: elles sont donc très générales, et ne requièrent pas la convexité des préférences.

§ 3. La seconde forme des fonctions d'évaluation marginale différentiées et ses propriétés

Comme pour les fonctions de demande, il est possible de modifier la forme de (2.29) - et de (2.32), (2.35) -, afin de faire apparaître des propriétés plus significatives sur les différentielles des fonctions d'évaluation marginale .

Par différention implicite de (2.27) par rapport à x et en réarrangeant les termes, on obtient;

$$[I_n - (1/s)p\omega']G = (s/\omega'u_x)\ [I_n - (1/s)p\omega']\ U. \tag{2.36}$$

Si la matrice d'Antonnelli généralisée est définie par $H = G\ [I_n - (1/s)\omega p']$, elle est alors reliée à la matrice hessienne de la fonction d'utilité par, (2.37) $$[I_n - (1/s)p\omega']H = (s/\omega' u_x)\ [I_n - (1/s)p\omega']U\ [I_n-(1/s)\omega p'].$$

Compte tenu de (2.35) et de $p[I_n - (1/s)\omega p'] = 0$, la matrice d'Antonnelli généralisée vérifie

(2.38) $$\omega' H = 0,$$

et par $[I_n -(1/s)\omega p']\omega = 0$,

(2.39) $$H\omega = 0.$$

Finalement, H s'exprime en fonction de la matrice hessienne de u comme,

(2.40) $$H = (s/\omega' u_x)\ [I_n - (1/s)p\omega']U\ [I_n - (1/s)\omega' p].$$

H est indépendante de toute transformation monotone croissante sur la fonction d'utilité. En effet, si on considère la transformation monotone $\phi(u)$ sur u, (2.40) s'écrit

$$H = (s/\phi_u \omega' u_x)\ [I_n -(1/s)p\omega']\ [\phi_u U+\phi_u^2 u_x\ u_x']\ [I_n -(1/s)\omega' p]$$

qui, sous $u_x = \theta p$ et $p\,[I_n - (1/s)\omega' p] = 0$, laisse (2.40) inchangé.

L'interprétation de H comme matrice d'effet de substitution - complémentarité est directe sur (2.40). (2.40) explicite également les causes de la variabilité de la substitution - complémentarité (Hicks (1956 p. 156)) par rapport à la normalisation choisie, malgré que sa base soit directement la matrice hessienne de u (ce en quoi elle se rapproche du critère cardinaliste d'Edgeworth-Pareto - voir Allen (1934 p. 196)-) .

On constate directement sur (2.40) que H est symétrique, c'est-à-dire,

(2.41) $$H = H'$$

et on a de plus:

<u>Résultat (II.4)</u>: Sous ((H1 a), (H4), (H7)), la matrice d'Antonnelli généralisée est semi-définie négative.

<u>Preuve</u>: Tout vecteur ξ non nul de IE^n et non colinéaire à ω peut se décomposer comme la somme

$$\xi = \xi_1 + (1/s)\,(p'\xi)\,\omega,$$

où ξ_1 est un vecteur de $\mathbb{E}^n$ tel que $\xi_1' p = 0$ – c'est-à-dire aussi $\xi_1' u_x = 0$ –. Compte tenu de $(1/s)p'\omega = 1$, cette décomposition implique avec (2.39),

$$\xi' H \xi = \xi_1' U \xi_1 \ (s/\omega' u_x).$$

Le terme $(s/\omega' u_x)$ étant toujours positif et $\xi_1' U \xi_1 \lesssim 0$ par (H7 c), on a

- soit $\xi' H \xi < 0$ pour tout ξ' non nul et non colinéaire à ω ,

- soit $\xi' H \xi = 0$ pour ξ colinéaire à ω (par (2.38)).

La matrice H est donc semi-définie négative . ▲

Reprenons avec (2.29) les fonctions d'évaluation marginale sous leur forme différentiée. En tenant compte de la définition de H, elle s'écrivent maintenant

$$dp = H dx + g_s ds + (1/s)\ G\omega p'\ dx$$

qui est observable si on connait ds. Toutefois cette expression se réécrit encore avec (2.34), Ce résultat a été obtenu avec la normalisation $s = p_n$, par Wold (1943 p. 72).

Nous avons retrouvé ainsi toutes les propriétés obtenues précédemment sur les fonctions marginales avec l'hypothèse de difféomorphisme. Ceci confirme que ces fonctions sont des entités indépendantes de l'existence des fonctions de demande. En particulier, tous les résultats développés dans cette section restent valides si on relâche l'hypothèse (H7 c) de forte quasi-concavité pour celle de faible quasi-concavité.

Il est en effet évident que l'existence de ces fonctions d'évaluation marginale est préservée avec des surfaces d'indifférence "plates" localement ou globalement (et convexes). Rappelons que dans ce cas les fonctions de demande n'existent plus et que l'on a seulement des correspondances de demande - voir par exemple Katzner (1970 p. 51-52) -.

SECTION III. INTÉGRABILITÉ DU SYSTÈME D'ÉVALUATIONS MARGINALES

Nous venons de dériver des conditions *nécessaires* pour qu'un système d'évaluations marginales soit généré par une fonction d'utilité. Nous nous intéressons maintenant aux conditions *suffisantes* pour qu'il ait cette propriété.

Les travaux portant sur l'intégrabilité ont surtout considéré ce problème pour les fonctions de demande. On peut les classer selon leur méthodologie :

i) inversion du système de demande puis intégration des fonctions inverses de demande (avec normalisation particulière), sur une fonction d'utilité - ou sur les surfaces d'indifférence -,

ii) intégration directe du système de demande sur une fonction d'utilité indirecte et "inversion" de celle-ci.

Cette seconde méthode, en permettant d'éviter les hypothèses nécessaires à l'inversion du système de demande, est plus générale. Elle a été développée en particulier par Hurwicz-Uzawa (1971, ch. 6).

La première est la plus ancienne et s'applique directement à notre problème car elle se ramène en fait à l'intégration d'un système d'évaluations marginales. Hurwicz (1971, ch. 9), outre sa contribution, donne une excellente synthèse de cette approche.

Antonnelli est le premier à avoir donné une réponse à cette question, Samuelson (1950) et Wold (1943), (1951) y ont donné simultanément la première solution complète.

Techniquement, la résolution passe par deux étapes :

i) "l'intégrabilité mathématique" qui, dans la terminologie d'Hurwicz, consiste à utiliser les conditions nécessaires et suffisantes d'intégration de la forme différentielle $p' \, dx$ = constante. Cette solution s'appuie sur le théorème d'existence de Frobenius - Goursat (1929, p. 552), Dieudonné (1960, p. 34)-.

ii) "l'intégrabilité économique" spécifie les conditions suffisantes pour que l'intégrale-solution soit compatible avec un système de courbes d'indifférence convexes ou une fonction d'utilité quasi-concave.

§ 1. "L'intégrabilité mathématique" d'un système d'évaluations marginales

Les conditions (2.38), (2.41) et la négativité de H sont satisfaites lorsqu'un système d'évaluations marginales est dérivé d'une fonction d'utilité. Ces propriétés constituent donc les conditions *nécessaires* d'intégrabilité "mathématique et économique" pour un système d'évaluations marginales.

La recherche de conditions *suffisantes* peut être abordée de différentes manières. Nous proposons de considérer ici l'intégration locale sur une surface d'indifférence. La forme différentielle d'une surface d'indifférence au voisinage d'un complexe $x = x^*$ de X, est donnée par

$$(2.43) \qquad u'_x dx = 0.$$

Considérons sous quelles conditions la forme

$$(2.44) \qquad g'(x,s)dx = 0,$$

admet localement les mêmes intégrales-solutions que (2.43).

Il faut d'abord préciser quand une forme comme (2.44) est intégrable - problème de l'intégrabilité mathématique -. Cette question est exposée en détail par Goursat (1929 p. 592). Ainsi la forme différentielle $g(x,s)'dx = 0$ est localement intégrable dans un voisinage x^* de X si et seulement si les expressions P_{ijk} définies par

$$(2.45) \qquad P_{ijk} = p_i(g_{jk}-g_{kj}) + p_j(g_{ki}-g_{ik}) + p_k(g_{ij}-g_{ji}),$$

sont nulles pour tout i,j,k allant de 1 à n et où $p_i = g_i(x,s)$ et g_{kj} est l'élément correspondant de G évaluée en x*. Cette forme du théorème de Frobenius est employée par Hotteling (1932), Wold (1943 p. 114), Samuelson (1950 p. 380)..., avec la normalisation $s = p_n$. Sous quelles conditions a-t-on, pour une normalisation quelconque,

$$P_{ijk} = 0, \quad i, j, k = 1,\ldots,n \; ? \tag{2.46}$$

Notons $\tau = -G\omega$ un vecteur dont l'élément caractéristique s'écrit

$$\tau_i = -\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\omega^k \text{ pour i allant de 1 à n.}$$

L'élément h_{ij} de la matrice d'Antonnelli généralisée s'écrit alors

$$h_{ij} = g_{ij} - (1/s)\tau_i p_j.$$

Si H est symétrique, on aura donc les égalités

$$g_{ij}-g_{ji} = (1/s)(\tau_j p_i - \tau_i p_j),$$

$$g_{jk}-g_{kj} = (1/s)(\tau_k p_j - \tau_j p_k),$$

$$g_{hi}-g_{ik} = (1/s)(\tau_i p_k - \tau_k p_i),$$

pour toute permutation i, j, k. La condition (2.45) se met alors sous la forme du déterminant,

$$P_{ijk} = -(1/s) \begin{vmatrix} p_i & p_j & p_k \\ \tau_i & \tau_j & \tau_k \\ p_i & p_j & p_k \end{vmatrix}$$

qui est nul puisque la première et la dernière ligne sont identiques.

La symétrie de la matrice d'Antonnelli généralisée est donc une condition *suffisante* à l'intégrabilité mathématique de $g'(x,s)dx = 0$. Elle est également *nécessaire* comme nous l'avons vu dans la section précédente.

§ 2. "L'intégrabilité économique" d'un système d'évaluations marginales

Nous avons donné des conditions *suffisantes* pour que la forme $g'(x,s)dx = 0$ soit intégrable. Il faut spécifier maintenant des conditions *suffisantes* pour que l'intégrale-solution soit compatible avec une surface d'indifférence. "L'intégrabilité économique" se ramène donc à étudier la courbure de la solution donnée par l'intégration mathématique.

Notons $\phi\,(t(x))$ = constante, la famille d'intégrales-solutions (au voisinage de $x = x^*$), de la forme $p'dx = 0$. $\phi(t(x))$ est deux fois continuement différentiable sur ce voisinage et vérifie en particulier

$$(2.46)\qquad (\partial\phi/\partial t)(\partial t/\partial x)|_{x = x^*} = g(x^*,s),$$

$$(2.47)\qquad [(\partial^2\phi/\partial t\,\partial t)\ (\partial t/\partial x)\ (\partial t/\partial x)' + (\partial\phi/\partial t)\ (\partial^2 t/\partial x\partial x)|_{x = x^*}] = G(x^*,s).$$

Une condition *suffisante* pour que $\phi\ (t(x))$ = constante soit convexe sur un voisinage de x^*, est que $z = \phi\ (t(x))$ soit fortement quasi-concave, c'est-à-dire que

$$(2.48)\qquad \xi'[(\partial^2\phi/\ \partial t\partial t)\ (\partial t/\partial x)\ (\partial t/\partial x)' + (\partial\phi/\partial t)(\partial^2\ t/\partial x\partial x)]\ \ \xi\ < 0$$

pour tout vecteur ξ non nul de $\mathbb{E}^n$ tel que $\xi'\ (\partial\phi\ /\partial t)\ (\partial t/\partial x) = 0$.

Par (2.46), (2.47), cette condition s'exprime aussi comme

$$(2.49)\qquad \xi' G \xi < 0$$

pour tout vecteur ξ non nul de $\mathbb{E}^n$ tel que $\xi' p = 0$.

On peut montrer que H semi-définie négative et de rang n-1, est une condition *suffisante* pour assurer (2.49). En effet, si H est semi-définie négative et de rang n-1, on a $\xi' H \xi < 0$ tout vecteur ξ' non nul de

$\mathbb{E}^n$ qui n'est pas colinéaire à ω. C'est-à-dire encore,

$$\xi' G \, [I_n - (1/s)\omega p'] \, \xi < 0.$$

Sur le sous-espace défini par $p'\zeta = 0$, on a alors $\zeta' G \zeta < 0$. Comme par ailleurs si $\xi = \lambda\omega$ et $\lambda = 0$, on a $\xi' p = 0$, le résultat est démontré: H semi-définie négative est suffisant pour assurer (2.49).

Ainsi la semi-définition négative de H, la matrice d'Antonnelli généralisée (lorsqu'elle est symétrique), est une condition *suffisante* *5 à l'intégrabilité économique du système d'évaluations marginales.

La condition *nécessaire* est donnée par (2.40) et le résultat (II.4) obtenus dans la section précédente.

---

*5 Dans la Section I du Chapitre III on montrera que H est reliée très directement à la matrice hessienne de la surface d'indifférence. La relation entre la négativité de H et la convexité de cette surface deviendra alors évidente.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons considéré en fait deux propositions.

Premièrement, si l'individu est confronté à un environnement donné de prix-revenu, alors il est capable de déterminer le complexe de biens qu'il consommera - sous réserve ici que ses préférences soient représentées par une fonction d'utilité ayant de bonnes propriétés analytiques -. C'est ce que nous enseigne la théorie usuelle de la demande. Nous avons donné un exposé rapide et homogène des principaux résultats en utilisant le théorème des fonctions implicites et ses conséquences [*6].

La seconde proposition établit que, si l'agent est en présence d'un complexe de biens, alors il est également capable d'évaluer ces biens en terme de l'unité de compte de l'économie - sous la réserve, due à la méthode employée, que les préférences de l'individu soient représentées par une fonction d'utilité ayant de bonnes propriétés analytiques -. Nous avons alors développé cette théorie de l'évaluation et dérivé ses propriétés significatives dans un cadre très général.

---

*6 Ainsi que de nombreuses autres, je dois cette idée à C. Bronsard. On notera que dans son article classique, Katzner (1968) ne fait qu'appliquer la proposition d'existence donnée par le théorème des fonctions implicites. Les conséquences directes de ce théorème - voir Dieudonné (1962 p. 275-77) - étaient restées inexploitées par les économistes.

CHAPITRE III

DEUX COMPLÉMENTS

INTRODUCTION

Par leur clarté et leur puissance suggestive, les représentations géométriques ou graphiques sont utilisées dans tous les domaines. La terminologie de la géométrie les pénètre même souvent: en économie on parle couramment de courbes d'indifférence et de droites de budget...

Il est intéressant pour renforcer notre compréhension de donner l'interprétation géométrique des deux principaux éléments de notre analyse, la matrice de Slutsky et la matrice d'Antonnelli généralisées, ainsi que celle de leurs propriétés principales. L'hypothèse de différentiabilité qui est à la base de notre méthode nous permet cette interprétation dans les termes de la géométrie différentielle.

Ainsi, nous montrerons dans la première section que la matrice d'Antonnelli est, à une transformation près, la matrice hessienne d'une surface d'indifférence dans l'espace des biens, et que sa négativité implique la convexité de cette surface. De même lorsque la fonction d'utilité est fortement quasi-concave, la matrice de Slutsky est la matrice hessienne d'une surface d'indifférence dans l'espace des valeurs, et sa négativité implique la concavité de cette surface. Nous donnerons finalement le lien existant entre les matrices hessiennes évaluées au même équilibre pour ces surfaces.

Ces résultats indiquent que les matrices H et K sont des indices de courbure des surfaces d'indifférence, et satisfont en cela l'une des interprétations fondamentales des critères de substitution - complémentarité (voir Hicks (1934 p. 58), Allen (1934 p. 199, p. 204), Allais (1943 p. 139)...).

La seconde section de ce chapitre étudie l'agrégation *faible* sur les individus des formes significatives des fonctions de demande et d'évaluation marginale ainsi que ses interprétations. Pour cela nous nous situerons dans un cadre institutionnel où les prix d'équilibre ne sont pas différentiés entre les individus.

Il est bien connu que l'agrégation des fonctions de demande est l'un des points épineux pour rendre cette théorie opérationnelle. La forme d'agrégation que nous envisagerons ici est une agrégation parfaite mais elle sera dite *faible* car elle n'est pas opérationnelle: les formes qu'elle donne nécessitent en général de l'information sur chaque individu pour être utilisables. Nous réservons au chapitre suivant l'étude de résultats plus puissants.

Toutefois, l'étude de l'agrégation *faible* est intéressante car elle permettra d'éclairer les résultats de l'agrégation *forte*. Elle permet en particulier de dégager un concept intermédiaire entre les contours de Scitowski (Scitowski (1942 p. 365-67), de Graaff(1957 p. 46)), et les courbes d'indifférence collectives (voir par exemple Leontief(1933), Samuelson (1956 p. 3-5)). En effet, la somme des matrices de Slutsky individuelles pour un vecteur de prix et une distribution des revenus donnés est la matrice hessienne d'un contour de Scitowski - Debreu dans l'espace des valeurs. Ce concept est défini et étudié dans l'appendice B.

Ces contours sont convexes, donc plus spécifiques que les contours de Scitowski[*1], mais ils peuvent se couper si la distribution des revenus varie et, en cela, ils sont donc moins spécifiques que les courbes d'indifférence collectives.

Pour les fonctions d'évaluation marginale nous avons rencontré deux difficultés. Premièrement nous avons été incapable d'agréger *directement* ces fonctions en leur conservant leur dualité avec les fonctions de demande agrégées par l'agrégation *faible*. Nous avons contourné cet obstacle en supposant l'invertibilité des fonctions de demande agrégées et en considérant les fonctions d'évaluation correspondantes. Notons que la matrice "d'Antonnelli" ainsi construite n'est pas la somme des matrices individuelles, mais elle conserve cependant leurs propriétés caractéristiques. Comme conséquence, la seconde difficulté que nous avons rencontrée a été l'interprétation de cette matrice. Il est probable qu'elle soit reliée aux contours de Scitowski-Debreu dans l'espace des biens mais nous avons été incapable de le démontrer.

---

*1 Notons que dans une économie où le système de prix n'est pas différentié, contour de Scitowski et contour de Scitowski-Debreu seront identiques dans l'espace des valeurs. Les deux concepts sont différents dans l'espace des biens.

SECTION I. INTERPRETATION ANALYTIQUE DES MATRICES H ET K

Pour l'approche ordinaliste, la relation d'indifférence est un invariant particulièrement significatif. Elle permet de caractériser des comportements indépendamment de toute distance définie sur la relation de préférence.

Par ailleurs nous avons vu que la matrice d'Antonnelli généralisée définie par

$$(2.37) \qquad H = (s/\omega' u_x)\ [I_n - (1/s)p\omega']\ U\ [I_n - (1/s)\omega p']$$

est indépendante de toute transformation monotone sur la fonction d'utilité.

A partir de ces remarques, examinons le lien existant entre H et la matrice hessienne d'un contour d'indifférence.

Soit l'équation implicite d'un contour d'indifférence,

$$(3.1) \qquad u(x) = \bar{u}$$

où $\bar{u}$ désigne le niveau d'utilité assigné. Une méthode plus rigoureuse de noter (3.1) serait

$$u(x) = u(x^*), \tag{3.2}$$

où x^* serait un complexe de biens donné, et ainsi l'équation (3.2) serait fondée pour tous les indices d'utilité. Nous nous contenterons de (3.1) en remarquant que tous nos résultats seront indépendants du choix de cet indice.

Par l'hypothèse ((H7 a), (H7 b)) sur la fonction d'utilité il existe n tel que $u_{x_n} \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites permet alors d'écrire (3.1) relativement à la variable x_n, sous la forme

$$x_n = \mu_n (x_{(n)}, \bar{u}) \tag{3.3}$$

où $x_{(n)}$ est le vecteur x privé de sa $n^{\text{ième}}$ composante. μ_n est une fonction définie sur un voisinage de $x^*_{(n)}$ - un point de la restriction de X engendrée par $x_{(n)}$ - vers un voisinage de x^*_n qui est un point de la restriction de X engendrée par x_n. μ_n est continuement différentiable au voisinage de $x^*_{(n)}$. Il faut souligner que le choix de n correspond seulement à une normalisation mathématique pour exprimer la courbe d'indifférence repérée par (3.2) en fonction de n-1 variables.

Par différentiation implicite de (3.2), le gradient de (3.3) s'écrit

(3.4) $$\partial\mu_n / \partial x_i = -u_{x_i} / u_{x_n}$$

où i va de 1 à n-1,

(3.5) $$\partial\mu_n / \partial x_n = 1/u_{x_n} .$$

Par (2.21), (3.4) vérifie donc également:

(3.4') $$\partial\mu_n / \partial x_i = -p_i / p_n$$

où i va de 1 à n-1. On obtient de même la matrice hessienne de μ_n dont l'élément type s'écrit,

(3.6) $$\partial\mu_n/\partial x_i \partial x_j = - \frac{\partial^2 u/\partial x_i \partial x_j}{u_{x_n}} + \frac{\partial^2 u/\partial x_i \partial x_n}{(u_{x_n})^2} u_{x_j} + u_{x_i} \frac{\partial^2 u/\partial x_n \partial x_j}{(u_{x_n})^2} - u_{x_i} \frac{\partial^2 u/\partial x_n^2}{(u_{x_n})^3} u_{x_j},$$

où i et j vont de 1 à n-1. Si on note B_n la matrice hessienne de μ_n, la forme (3.6) s'écrit sous forme matricielle [*2],

(3.7) $$B_n = -[I_{n-1}, -u_*/u_n]\, U\, [I_{n-1}, -u_*/u_n]'(1/u_n)$$

où u_* est le vecteur des utilités marginales privées de sa $n^{\text{ième}}$ composante et $u_n = \partial u/\partial x_n$. On peut montrer que,

<u>Résultat (III.1)</u>: Sous ((H4), (H7a),(H7 b)), la matrice hessienne exprimée relativement à la composante n, en un point d'un contour d'indifférence, s'obtient à partir de la matrice d'Antonnelli généralisée - évaluée en ce point -, par la transformation

(3.8) $$B_n = -[I_{n-1},-p_*/p_n]H[I_{n-1},-p_*/p_n]'(1/p_n).$$

<u>Preuve</u>: considérons l'expression

(3.9) $$[I_{n-1},-p_*/p_n]H[I_{n-1},-p_*/p_n]'(-1/p_n).$$

Par une partition adéquate des matrices on obtient directement la relation

---

*2 L'expression de la matrice hessienne d'une courbe donnée en forme implicite, relativement à l'une des variables, a été proposée par Camille Bronsard au cours de discussions au S.I.T.E.

(3.10) $$[I_{n-1},-p_*/p_n][I_n-(1/s)p\omega'] = [I_{n-1},-p_*/p_n].$$

Or H s'exprime encore comme

(2.37) $$H = (s/\omega'ux)[I_n-(1/s)p\omega']U[I_n-(1/s)\omega p']$$

qui, reportée dans (3.9) compte tenu de (3.10), donne

(3.9') $$[I_{n-1}, -p^*/p_n]\ U\ [I_{n-1},-p^*/p_n]\ (-1/p_n)\ (s/\omega'u_x).$$

$(s/\omega'u_x)$ s'exprime encore avec (2.23) comme

$$(s/\omega'u_x) = p_n/u_n.$$

La forme (3.9') de (3.9) est bien identique à (3.7) et (3.8) est vérifiée. ▲

On remarquera que cette relation est indépendante de la normalisation ω choisie - ainsi que de toute transformation monotone sur la fonction d'utilité.

Par (3.10) et la définition de H, (3.8) s'écrit encore

(3.11) $$B_n = -[I_{n-1},-p^*/p_n]G[I_{n-1},-p^*/p_n]'(1/p_n).$$

On réalise sur (3.8) ou (3.11) que si la (stricte) quasi-concavité de u(x) est vérifiée, la matrice hessienne B_n est (définie positive) semi-définie positive et les courbes d'indifférences (strictement) convexes. Et inversement, si H est définie non-positive et de rang (n-1), B_n est définie non-négative (positive) et la surface d'indifférence (strictement) convexe.

Un résultat semblable existe dans l'espace des valeurs, $P \times M$. Au problème usuel défini par $(u(x), \lambda, f(p,m))$ où $f(p,m)$ est le système de fonctions de demande, λ un multiplicateur de Lagrange, on associe la fonction d'utilité indirecte définie par

$$v = v(p,m) = u(f(p,m)),$$

pour tout (p,m) de $P \times M$. Différentions v par rapport à p et m:

$$(3.12) \qquad v'_p = (\partial v/\partial p)' = (\partial u/\partial f)' \; (\partial f/\partial p)' = u'_x F = \lambda p' F$$

$$= \lambda'(K - f_m x') = -\lambda x',$$

$$(3.13) \qquad v_m = \partial v/\partial m = (\partial u/\partial f)' \; (\partial f/\partial m) = u'_x f_m = \lambda p' f_m = \lambda.$$

(3.12) et (3.13) donnent directement les identités de Roy (1942 p. 24), (3.14) $$x = -v_p/v_m.$$

V, la matrice hessienne de la fonction d'utilité indirecte s'écrit alors directement comme

(3.15) $$V = \begin{bmatrix} -x\lambda_p' - \lambda F & \lambda_p \\ \lambda_p' & \lambda_m \end{bmatrix}.$$

On définit une courbe d'indifférence dans l'espace des valeurs par l'équation implicite

$$v\,(p,m) = \bar{u} = u(x^*)$$

ou par son équation explicite relativement à la variable revenu par

(3.16) $$m = \gamma\,(p,\bar{u}).$$

Si on note A_m la matrice hessienne évaluée en un point (p,m) du contour d'indifférence dans l'espace des valeurs, on peut montrer que:

Résultat (III.2): Sous (H7), la matrice de Slutsky est la hessienne d'une courbe d'indifférence dans l'espace $P \times M$, C'est-à-dire

$$(3.18) \qquad A_m = K,$$

où les deux matrices sont évaluées au même point (p,m.)

Preuve: Par une transformation de même type que (3.7), A_m s'exprime en fonction de V comme

$$(3.17) \qquad A_m = [I_{n-1}, -v_p/v_m]V[I_{n-1}, -v_p/v_m]'(-1/v_m).$$

Il suffit de reprendre les identités de Roy, (3.14) et (3.13) pour obtenir directement avec (3.15),

$$(3.18) \qquad A_m = K \quad \blacktriangle$$

Ce résultat est dual de celui obtenu sur H. On remarquera qu'il repose sur l'hypothèse (H7) au complet cependant que celui sur H s'appuie sur (H7a), (H7b)

Finalement par (H7 c), la semi définition négative de K implique que les surfaces d'indifférence dans l'espace $P \times M$ sont concaves. De plus, sous de bonnes conditions analytiques - (H7) -, il existe une relation directe entre les matrices hessiennes des courbes d'indifférences duale .

Notons K_{**}, la sous matrice de K amputée de ses $n^{ième}$ ligne et $n^{ième}$ colonne et $(A_m)_{**}$ la même transformation sur A_m;

<u>Résultat (III.3)</u>: Sous (H4),(H7) les matrices hessiennes des courbes d'indifférence duales vérifient

$$p_n B_n (A_m)_{**} = I_{n-1} . \tag{3.21}$$

<u>Preuve</u>: Compte tenu de (3.8), formons le produit $K_{**}B_n$,

$$K_{**}B_n = -K_{**} [I_{n-1}, -p^*/p_n] H [I_{n-1},-p^*/p_n]'(1/p_n)$$

qui s'écrit encore,

$$K_{**}B_n = -[K_{**},-(1/p_n) p_* K_{**}] H [I_{n-1},-p_*/p_n]' (1/p_n). \tag{3.19}$$

Sous $p'K = 0$ et en notant K_{*n} la $n^{ième}$ colonne de K sans son $n^{ième}$ élément, on a .

$$p_*' K_{**} = -p_n K_{*n} .$$

Substitué dans (3.19), ceci permet

$$K_{**}B_n = [K_{**}, K_{*n}] H [I_{n-1}, -p_*/p_n]' (1/p_n).$$

Par ailleurs, $KH = [I_n - (1/s)\omega p']$ permet d'écrire

$$[K_{**}, K_{*n}]\, H = [I_{n-1} - (1/s)\omega_* p_*', \ (1/s)\omega_* p_n] \ .$$

Compte tenu de (3.10), (3.19) s'écrit finalement

$$K_{**} B_n = (1/p_n)\, I_{n-1} \qquad (3.20)$$

qui n'est autre que

$$p_n\, B_n\, (A_m)_{**} = I_{n-1} \ . \ \blacktriangle \qquad (3.21)$$

Ceci achève l'interprétation analytique des matrices de Slutsky et d'Antonnelli généralisées. Il est intéressant de noter que le lien existant entre H et B_n, la matrice hessienne du contour d'indifférence dans X, est invariant par rapport au choix de la normalisation. (Ceci est illustré par le fait que cette transformation tient également pour la matrice des effets - quantités avec (3.11)). Cette transformation (3.8) permet donc de construire à partir de H un critère de substitution - complémentarité indépendant de la règle de normalisation - et en particulier de sa spécification qui peut rester inconnue -.

On peut construire ainsi n structures de substitution - complémentarité — autant que de normalisations mathématiques de base — dans l'espace des biens et n'ayant aucune variabilité économique.*3

*3 Complémentairement à cette remarque, il est peut être possible de construire une critère de q - complémentarité - substitution invariant et dual de celui de p - complémentarité - substitution à partir de (3.21) et de l'inverse généralisée au sens de Moore-Penrose de K.

SECTION II. FONCTIONS DE DEMANDE ET D'ÉVALUATION MARGINALE AGRÉGÉES

La modélisation d'un phénomène - i.e. la description et l'explication de la réalité à l'aide d'un schéma logique - est indissociable de l'agrégation.

C'est sur l'agrégation que reposent pour une bonne part la valeur descriptive (ou degré d'approximation) et la valeur explicative (par le réalisme des hypothèses faites) du modèle. Dépendant du phénomène étudié, l'agrégation est à faire dans différents espaces. La théorie de la demande distingue habituellement trois composantes,

- l'agrégation sur les individus
- l'agrégation sur les biens
- l'agrégation sur le temps.

L'agrégation sur le temps est un élément nécessaire à tous les modèles puisque tous les phénomènes ont une dimension temporelle et qu'il est alors nécessaire de spécifier la base structurelle *4 du modèle.

---

*4 La relation entre structure et modèle est prise dans le sens décrit par Malinvaud (1964 p. 61). "On utilise structure pour désigner la forme que prend un modèle lorsque sont fixées toutes ses caractéristiques, y compris celles qui n'étaient pas données a priori".

L'agrégation sur les biens est nécessaire d'abord si on met en place des tests sur les hypothèses de la théorie et si on désire rendre le modèle opérationnel.

L'agrégation sur les individus intervient aussi lors du test des hypothèses et traite en particulier des problèmes de l'identification et de l'explication au niveau collectif, des implications de notre théorie des comportements individuels moyens. Nous ne considérons dans cette section que cette composante de l'agrégation d'abord pour sa nature théorique, et ensuite parce que ses résultats seront à la base de résultats plus spécifiques que nous développerons dans le Chapitre IV.

Notons cependant que l'agrégation sur le temps a été spécifiée en partie par les hypothèses de notre modèle théorique - par (H7) par exemple - et notre méthodologie. Nous achèverons de la spécifier avec l'agrégation sur les biens et celle sur les individus, en fonction des buts et moyens de la seconde partie en posant des hypothèses complémentaires à celles du modèle théorique considéré ici.

Ainsi nous nous préoccuperons de savoir si, au niveau collectif, on peut dégager et *caractériser* des fonctions agrégées de demande et d'évaluation marginale dans le cadre de notre modèle du consommateur.

Le premier paragraphe montre comment se reportent au niveau agrégé les résultats obtenus sur la demande individuelle. En acceptant encore l'hypothèse de difféomorphisme entre les deux espaces, nous montrerons comment le "même" résultat peut être atteint sur les fonctions d'évaluation marginale agrégées - paragraphe 2-.

§ 1. L'agrégation des différentielles des fonctions de demande

Notons

$$dx^b = K^b dp + f_m^b p' dx^b, \tag{3.22}$$

le système de demande du consommateur b dans une population de l individus [*5]. Ce système peut vérifier dans notre théorie - et en particulier sous (H7) -

$$K^b p = 0, \tag{3.23}$$

$$K^b = K'^b, \tag{3.24}$$

$$\xi' K^b \xi \lesssim 0; \quad \forall\, \xi \in \mathbb{E}^n \text{ et rang } K^b = n-1, \tag{3.25}$$

$$p' f_m^b = 1. \tag{3.26}$$

La variation de la demande collective est la somme des variations de demandes individuelles. Considérant maintenant une économie où

*5 Dans le but de simplifier les notations, nous noterons $(\partial f^{\ell} / \partial m^{\ell}) = f_m^{\ell}$ le vecteur d'effets revenus de f^{ℓ} individu ℓm^{ℓ}. Au sens strict, nous aurions dû noter celui-ci $f^{\ell}_{m^{\ell}}$.

il y a unicité des prix, la variation de demande collective s'écrit encore

(3.27) $$dx = Kdp + \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b \, p'dx^b ,$$

où $$dx = \sum_{b=1}^{\ell} dx^b , \quad K = \sum_{b=1}^{\ell} K^b .$$

(3.27) explique donc les variations de la demande totale face à une variation des prix - la même pour tous -, et face à des variations des revenus individuels. Il est évident que l'on a sur (3.27) les restrictions,

(3.28) $$Kp = 0 ,$$

(3.29) $$K = K' ,$$

(3.30) $$\xi' K \xi \leqslant 0 ; \quad \forall \xi \in \mathbb{E}^n , \quad \text{rang } K = n-1 ,$$

(3.31) $$p' \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b p'dx^b = p'dx ,$$

qui correspondent sur la demande agrégée [*6] aux restrictions sur les demandes individuelles.

---

*6 On remarquera que ces restrictions agrégées peuvent être encore valides si on a des correspondances de demande plutôt que des fonctions. En particulier, on pourra avoir K de rang n-1 sans que tous les K^b le soient. Dans la suite cependant, nous conserverons l'hypothèse (H7) ou alternativement celle de difféomorphisme sur le modèle individuel.

Précisons le sens de cette agrégation: si chaque individu b est à un niveau d'utilité préassigné $u^b(x^b) = \bar{u}^b$ – correspondant localement à une variation de revenu réel $(p'dx^b)$ nulle–, alors dans l'espace $P \times M$, K^b est la matrice hessienne de la surface d'indifférence $m^b = \gamma^b(p,\bar{u}^b)$. $K = \sum_b K^b$ est alors la matrice hessienne de $\sum_b m^b = \sum_b \gamma^b(p,\bar{u}^b)$.

Ainsi $K = \sum_b K^b$ est la matrice hessienne d'un contour de Scitowski-Debreu dans l'espace $P \times M$. Nous définissons un tel contour et ses propriétés dans l'appendice B. Cette agrégation dépend des niveaux d'utilité $\bar{u}^b$ préassignés, mais ne suppose pas l'existence d'une fonction d'utilité collective dont les arguments seraient les quantités globales.

En particulier, les contours de Scitowski- Debreu dans $P \times M$, qui sont localement concaves par la semi-définition négative de K (avec (3.25)), peuvent se couper si on fait varier la distribution des niveaux d'utilité entre les individus.

Lorsqu'on dispose de données pour différentier les catégories de consommateurs, la forme (3.27) est testable. Si les données utilisées sont agrégées sur l'ensemble des individus, la forme (3.27) doit être modifiée avec des hypothèses supplémentaires pour être testable. Ceci fera l'objet du Chapitre IV.

§ 2. L'agrégation des différentielles des fonctions d'évaluation marginale

Dans ce paragraphe, nous dérivons les fonctions d'évaluation marginale agrégées par inversion du système de fonctions de demande agrégées, c'est-à-dire avec un corps d'hypothèses assez restrictif ((H3) et/ou (H7)) sur les comportements individuels. Ceci en particulier a pour conséquence,

Lemme: Si les préférences de chaque consommateur satisfont l'hypothèse (H7) et si la règle de normalisation collective est de la forme $s = \omega' p$ sous (H4), alors la matrice

(3.28)
$$\begin{bmatrix} K & \omega \\ \omega' & 0 \end{bmatrix}$$

est de rang $n + 1$ et inversible.

Preuve: En effet, s'il existe $[\xi, \theta]$, un vecteur non nul de $\mathbb{E}^n \times \mathbb{E}$ tel que

(3.29)
$$\begin{bmatrix} K & \omega \\ \omega' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

alors

(3.30) $$K\xi + \omega\theta = 0,$$

(3.31) $$\omega' \xi = 0.$$

Prémultiplions (3.30) par p' ; alors, compte tenu de (3.28), (3.29) et (H4), on obtient $s\theta = 0$ qui implique donc $\theta = 0$. Cependant $\theta = 0$ implique $K\xi = 0$ par (3.30), et nécessairement $\xi = \lambda p$ (λ étant un scalaire non nul), puisque K est de rang n-1 et $Kp = 0$. Cependant $\lambda\omega' p$ est différent de 0 et contredit (3.31). ▲

Remarquons d'abord qu'il n'est pas nécessaire que toutes les fonctions d'utilité satisfassent (H7) pour que cette propriété soit vérifiée - voir également la note 6 de ce chapitre -.

Notons $\begin{bmatrix} T & t \\ t' & \tau \end{bmatrix}$ l'inverse de $\begin{bmatrix} K & \omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix}$. Alors on a nécessairement $t = (1/s)p$ et $\tau = 0$.

En effet, la relation d'inverse entre ces deux matrices implique

(3.32) $$TK + t'\omega = I_n .$$

(3.33) $$t'K + \tau\omega' = 0.$$

Postmultiplions (3.32) par p, compte tenu de $s = \omega' p$ et $K\, p = 0$: on obtient $t = (1/s)p$. Dès lors, il est direct que $\tau = 0$.

Les relations d'inversion en forme partagée, entre ces deux matrices, sont données alors par

(3.34) $$TK + (1/s)\, p\omega' = I_n ,$$

(3.35) $$\omega' T = 0 ,$$

(3.36) $$\omega' (1/s) p = 1 ,$$

(3.37) $$K (1/s) p = 0.$$

On remarquera d'abord que T s'écrit nécessairement de la forme

(3.38) $$T = S\, [I_n - (1/s)\, \omega p'].$$

En effet si la matrice T vérifie (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), la matrice $T\, [I_n - (1/s)\omega p']$ vérifie également ce système, compte tenu de $p'K = 0$. Cependant l'inverse d'une matrice étant unique, il existe donc nécessairement une matrice S d'ordre $n \times n$ et une matrice idempotente $[I_n - (1/s)\, \omega p']$ telles que $T = S\, [I_n - (1/s)\omega p']$. Par (3.35) on a de plus soit $\omega' S = 0$, soit $\omega' S = \lambda p'$ avec λ un scalaire non nul. Et finalement S est g - inverse de K. En effet, par (3.34) et (3.38), on a $KSK = KTK = K$. *7

La matrice T est également g - inverse réflexive de K; en effet (3.34), postmultipliée par T, fournit avec (3.35):

(3.39) $$TKT = T.$$

Avec (3.37), (3.34), prémultipliée par K, donne

(3.40) $$KTK = K.$$

Finalement T vérifie les propriétés:

(3.35) $$\omega' T = 0,$$

(3.41) $$T = T',$$

(3.42) $$\xi' T \xi \leqslant 0, \text{ pour tout } \xi \text{ de } \mathbb{E}^n \text{ et } T \text{ de rang } n-1.$$

(3.35) est vérifiée par construction. La symétrie de T est obtenue de celle de K, lors de l'inversion des matrices bordées. (3.42) est directe avec (3.39) -voir Balestra (1972 p. 180) - et (3.30).

---

*7 Ceci correspond aux résultats (I.1) et (I.5).

Revenons maintenant aux fonctions de demande agrégées dont nous prémultiplions l'équation (3.27) par T, c'est-à-dire

$$Tdx = TKdp + T \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b \, p'dx^b$$

qui, compte tenu de (3.34), peut s'écrire

$$dp = Tdx - T \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b \, p'dx^b + (1/s)\omega'dp \; p. \tag{3.43}$$

(3.43) est la forme différentielle du système de fonctions d'évaluation marginale agrégé sur les consommateurs.

Si (H7) est vérifié par toutes les préférences des individus et si la règle de normalisation collective vérifie (H4), une variation dans les prix comptables de l'économie peut être induite et/ou:

- par une variation dans l'offre,

- par une variation dans les revenus réels via leur niveau ou leur distribution,

- par un phénomène "d'inflation pure" provenant de variation dans la condition de référence de l'économie.

De plus, avec l'hypothèse de difféomorphisme, (3.43) vérifie

$$\omega' T = 0, \tag{3.35}$$

$$T = T', \tag{3.41}$$

$$\xi' T \xi \leqslant 0 \text{ pour tout } \xi \text{ de } \mathbb{E}^n, \text{ et } T \text{ est de rang } n-1, \tag{3.43}$$

$$\omega' T \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b = 0. \tag{3.44}$$

Nous testerons une forme voisine de (3.43) avec (3.35), (3.41), (3.42), (3.44) dans la seconde partie de ce travail en ajoutant des hypothèses nécessaires à l'agrégation des effets revenus individuels.

Plusieurs questions restent cependant en suspend ici. Il est tentant d'interpréter T comme la matrice hessienne transformée d'un contour de Scitowski-Debreu dans l'espace des quantités. Il est fort probable que ce soit le cas. Cependant l'agrégation directe des fonctions d'évaluation marginale individuelles n'est pas une simple sommation et nous avons été incapable de le vérifier. Celle-ci nous aurait permis en plus d'échapper à l'hypothèse d'inversion du système de demande et, en particulier, de retrouver sur la forme agrégée la généralité que nous avons obtenue dans le Chapitre III sur les évaluations marginales individuelles.

PARTIE II

APPLICABILITÉ DES THÉORIES DE LA DEMANDE ET DE L'ÉVALUATION

INTRODUCTION

Ainsi que le souligne Malinvaud (1957 p. 72), "il est peu de modèles utilisés en économie qui ne se traduisent pas par une agrégation plus ou moins poussée".

La théorie classique de la consommation est l'un des domaines où cette proposition est particulièrement vraie, par les fondements même du modèle et l'information qu'il nécessite pour être opérationnel.

Les résultats que nous avons développés jusqu'à présent sont basés sur des comportements idéaux (ou moyens). Comme le souligne Hicks*1 (1956 p. 55) et (1969 p. 12), "On ne prétend pas par exemple que la théorie de la demande permette d'avancer la moindre hypothèse intéressante sur le comportement d'un consommateur particulier: celui-ci peut être dominé par des motivations qui lui sont tout à fait propres; mais par contre cette théorie permet d'affirmer un certain nombre de choses sur le comportement global du marché - c'est-à-dire de l'ensemble des consommateurs d'un certain produit". Les tests et l'opérationnalité de nos résultats sont donc à envisager au niveau collectif.

Cette agrégation n'est cependant pas directe et rencontre un obstacle théorique important. L'agrégation des choix transitifs différents - qui sous-tendent les fonctions individuelles (moyennes) de deman-

*1 Marschak (1952) discute également ce point pour la théorie de la consommation.

de et d'évaluation –, fait perdre en général cette propriété au choix collectif *2. Il est donc pertinent de dégager dans notre cadre d'analyse les conditions conservant aux fonctions collectives les caractérisations des fonctions individuelles.

Cette question devient essentielle au niveau des tests et de l'opérationnalité du modèle. En plus des tests qu'elles permettent sur la théorie, les restrictions théoriques sont un moyen pour diminuer le nombre de paramètres à estimer.

Cependant lorsqu'on sait que l'information disponible est constituée la plupart du temps de données très agrégées, il est certain que la variance du comportement moyen est élevée et que les hypothèses d'agrégation des caractérisations seront très restrictives.

Hicks (1956 ch. 6) illustre la nature et l'ampleur de cette question. On peut distinguer par ailleurs deux approches à ces problèmes. La plus ancienne cherche des conditions *suffisantes* sous lesquelles on peut agréger: dès 1886, Antonnelli (1886 p. 334) s'est interressé à ce problème dans le cadre de la théorie de la demande. Nataf (1953), Gorman (1953) donnent le résultat de base de cette approche. Une appro-

---

*2 Le paradoxe de Condorcet est une illustration simple de ce phénomène. Arrow (1963 p. 59) synthétise ce résultat dans son théorème général des possibilités.

che plus récente recherche des conditions *nécessaires* d'agrégation. Ayant montré qu'il existait des fonctions de demande excédentaires d'une économie walrasienne qui n'étaient pas décomposables en une somme de fonctions individuelles - Sonnenshein (1973a), Debreu (1974) ...-,cette approche étend ce résultat aux fonctions de demande d'une économie de marché - Sonnenshein (1973b). Nous donnerons une autre preuve de ce résultat dans la section I du Chapitre IV.

Face à cette situation, différentes attitudes existent: certains économètres, comme Barten - voir par exemple Barten (1975 p. 33) -, acceptent des approximations des conditions locales d'agrégation, par contre certains théoriciens préconisent l'abandon des caractérisations de la demande au niveau agrégé.

Complémentairement à l'agrégation sur les individus, l'agrégation sur les biens et le temps sont nécessaires.

Pour l'agrégation sur les biens, des solutions théoriques et une solution pratique coexistent. Ces premières passent par la spécification des relations de préférences, les secondes par des formes du théorème de Hicks - Hicks (1937 p. 17) -, comme celle proposée par Diewert (1974).

Notre approche est essentiellement statique. Nous serons cependant obligé de considérer la meilleure approximation à faire pour approcher nos variations infinitésimales à l'aide d'équilibres intertemporels. Celle-ci repose sur un résultat obtenu par Theil (1967 p. 223).

Ces questions d'agrégation feront l'objet du Chapitre IV.

Le chapitre V sera une application de nos modèles théoriques avec des données canadiennes. Nous accepterons alors les hypothèses qui permettent toutes les agrégations. Deux questions techniques seront envisagées: la paramétrisation du modèle d'évaluation et la prise en compte de la contrainte de négativité sur les matrices de Slutsky et d'Antonnelli généralisées.

Ce chapitre doit être considéré comme un test très sévère de notre modèle théorique. Bien que nous utiliserons déjà la paramétrisation de Rotterdam pour l'estimation des fonctions de demande, il est certain qu'il faut penser à des formes utilisant la distribution des revenus pour avoir des résultats vraiment significatifs. Pour les fonctions d'évaluation, la même remarque est valable mais en plus il faudrait "investir" maintenant dans des paramétrisations avec normalisation monétaire pour utiliser toute la puissance explicative du modèle.

C H A P I T R E   I V

AGRÉGATION ET APPLICABILITÉ DES THÉORIES DE LA DEMANDE ET DE L'ÉVALUATION

INTRODUCTION

La théorie de la demande est l'un des domaines privilégiés où la théorie économique et l'économétrie se rejoignent pour permettre une approche relativement unifiée de la théorie, de ses tests et de ses applications. Ainsi que le note Barten (1974 p.1): "constructing complete demand system is an example of the ideal type of econometrics. It uses a well developped theory, an extensive set of data and a refined estimation technique. In particular, a strong relationship between theory and estimation distinguishes it from other empirical economic studies". Il nuance cependant cet optimisme en remarquant que "this strong relationship is at the same time a source of possibilities and a source of problems".

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à décrire ces problèmes et à montrer comment ils ont été, ou peuvent être résolus. Ils reposent sur le fait que l'on ne dispose généralement pas de l'information nécessaire pour tester ou appliquer au niveau agrégé les conséquences d'un modèle basé sur des comportements individuels [*1]. Nous serons donc amené à envisager les conditions et conséquences de l'agrégation de comportements individuels moyens. Cette agrégation présente trois composantes

---

*1 Rappelons qu'il ne serait certainement pas intéressant de le faire si on le pouvait; notre modèle prétend représenter des comportements moyens et ne peut retirer son opérationnalité que de ceci.

i) l'agrégation sur les individus,

ii) l'agrégation sur les biens,

iii) l'agrégation sur le temps

Les trois sections de ce chapitre les examineront successivement. Avant, quelques remarques sont à faire.

Nous avons mentionné les tests de la théorie comme l'un des objectifs de l'estimation. En réalité ces tests portent avant tout sur les hypothèses qui ont permis de mettre les résultats théoriques dans des formes testables et non nécessairement sur les hypothèses du modèle théorique lui -même [*2].

L'agrégation demande de renforcer notre corps d'hypothèses: on rencontre en général deux attitudes face à ce problème selon les objectifs visés.

La première cherche des solutions exactes: elle accepte de poser des restrictions sur les fonctions d'utilité afin de caractériser

---

*2 Les tests d'hypothèses d'agrégation n'étant pas l'objet de ce travail, dans le Chapitre V nous proposons une estimation avec l'ensemble des restrictions avec un test global, sans procéder "pas à pas" dans l'imposition des contraintes. Ceci serait l'objet d'une (ou plusieurs!) thèse.

des formes finales des fonctions de demande - ou d'évaluation -, testables sans erreur d'agrégation.

La seconde accepte des solutions approchées: plus pragmatique, elle cherche à isoler des situations vraisemblables pour lesquelles les biais d'agrégation sont faibles au voisinage des équilibres considérés.

SECTION I. L'AGRÉGATION SUR LES CONSOMMATEURS

Les relations (3.27) et (3.43) donnent les formes agrégées sur les consommateurs des systèmes de demandes et d'évaluations marginales dans le cadre du modèle théorique. Un test ou une utilisation directe de ces formes (avec les restrictions qui portent sur elles) suppose de l'information sur chaque consommateur - par $\sum_{b=1}^{\ell} p'dx^b$ -. Ceci n'est évidemment pas envisageable - ni à envisager -.

Définissons d'abord la demande *collective* (moyenne) d'une économie comme la relation reliant les quantités moyennes demandées,

$$\bar{x} = (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} x^b,$$

aux prix p avec la dépense moyenne $\bar{m} = (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} m^b$. Cette demande collective sera représentée par la fonction ϕ une fois continuement différentiable sur $P \times M$, c'est à dire encore

$$\bar{x} = \phi\ (p, \bar{m})\,. \tag{4.1}$$

Nous supposerons également que cette demande collective satisfait la contrainte budgétaire collective (moyenne), c'est-à-dire $p'\bar{x} = \bar{m}$. Nous verrons que ceci implique une propriété d'additivité sur (4.1). Soulignons cependant que, dans la définition, il n'est pas fait référence aux demandes individuelles, ni à l'homogénéité de degré 0 en p et $\bar{m}$ de ϕ .

Définissons maintenant la demande *agrégée* (moyenne) d'une économie comme la moyenne des demandes individuelles des consommateurs qui constituent cette économie, compte tenu des prix et distribution de revenus qui y prévalent, c'est-à-dire

$$(4.2) \qquad \bar{x} = (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} x^b = (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f^b (p, m^b).$$

$f^b (p, m^b)$ est là demande du consommateur b dans l'environnement des prix p et de son revenu b. Par sommation des contraintes de budget individuelles, la demande agrégée vérifie toujours la contrainte budgétaire collective.

Chaque fonction individuelle f^b étant homogène de degré 0 en p et m^b, la somme de ces fonctions est homogène de degré 0 en p, m^1,... m^b. Ainsi que nous le montrerons, ces fonctions de demande agrégées ne vérifient pas en général l'homogénéité de degré 0 en p et $\bar{m}$.

A l'aide de ces définitions, on peut envisager deux types de questions:

- pour une fonction de demande collective donnée, existe-t-il toujours une économie - définie par les préférences des consommateurs et leurs revenus - dont la fonction de demande agrégée est identifiable à cette fonction de demande collective ? Cette propriété est-elle encore vraie si on postule une distribution de revenus donnée ? Notre fonction de demande collective, ayant ces propriétés, sera dite décomposable.

- lorsqu'elle sont décomposables, quelles propriétés vérifient les fonctions de demande collectives ? Quelles sont les conditions suffisantes pour obtenir les propriétés usuelles de la demande sur la demande collective ?

Ces deux classes de questions seront les objets des deux paragraphes suivants. Notons que les propriétés dégagées ici dans l'espace des valeurs pour les fonctions de demande ont leur correspondant dans l'espace des biens pour les fonctions d'évaluation. Salvas - Leblanc - Bronsard (1975) donnent une démonstration pour la décomposabilité dans l'espace des biens dans l'appendice I de leur étude.

§ 1. Décomposabilité des fonctions de demande collective

Une fonction de demande collective est dite localement décomposable - au voisinage d'un point $(p,\bar{m})$ de $P \times M$ - s'il existe ℓ consommateurs dont la fonction de demande agrégée est telle que

$$(4.3) \qquad d\bar{x} = \Phi \, dp + \phi_m d\bar{m} \equiv (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} \dot{F}^b \, dp + (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b \, dm^b$$

avec $\Phi = [\partial\phi/\partial p], \phi_m = [\partial\phi/\partial\bar{m}]$.

Sonnenschein (1973a, théorème 1) montre que, dans une économie comprenant deux biens - $n = 2$ -, si ϕ satisfait une condition de

Lipchitz sur m et est homogène de degré 0 en p et $\bar{m}$, alors cette fonction de demande collective est localement décomposable avec une fonction de demande agrégée générée par deux consommateurs ($\ell = 2$) se partageant le revenu total égalitairement [*3]. Dans (1973 b, 404), il étend *partiellement* ce résultat au cas de n biens en montrant que ϕ est toujours localement décomposable avec un nombre *fini* de consommateurs se partageant le revenu égalitairement. Il conjecture (1973 b, p. 408) que pour certaines fonctions de demande collective - vérifiant de plus la condition d'homogénéité -, le nombre minimal de consommateurs se partageant égalitairement le revenu qui est nécessaire à décomposer ces fonctions est égal au nombre des biens. De plus, toute fonction de demande collective - homogène - serait décomposable sur n tels consommateurs. Il prouve également la première partie de la conjecture [*4]. Le résultat suivant généralise cette conjecture.

<u>Résultat (IV. 1)</u>: Quelque soit l'équilibre $(p, \bar{m})$ de $P \times M$, quelque soit la distribution des revenus dans l'économie et quelquesoit la fonction de demande collective ϕ continuement différentiable sur $P \times M$, il existe ℓ consommateurs, avec ℓ supérieur ou égal au nombre de biens ($\ell \geqslant n$), sur lesquels cette fonction est

---

*3 Ce résultat ne suppose évidemment pas qu'il n'y a pas d'autres décompositions possibles - voir par exemple Mantel (1975)-.

*4 Debreu (1974) montre que la décomposition générale de certaines fonctions de demande collective excédentaires d'une économie d'échange walrasienne n'est possible que si le nombre des consommateurs est supérieur ou égal au nombre des biens. Complémentairement, toute fonction de demande excédentaire collective est décomposable sur n consommateurs. De plus ces propriétés sont globales sur $P \times M$.

décomposable localement. Par contre, il existe de telles fonctions non décomposables sur moins de n consommateurs.

Preuve: Montrons d'abord la seconde partie du résultat. Définissons par $\tilde{K} = \Phi + \phi_m \bar{x}'$, une matrice formellement semblable à une matrice de Slutsky. Si on différentie la contrainte de budget collective $p'\bar{x} = \bar{m}$, la condition (4.3) de décomposabilité se réécrit:

$$d\bar{x} = \tilde{K}\, dp + \phi_m\, p'd\bar{x} \equiv (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b dp + (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b\, p\, dx^b, \tag{4.4}$$

où K^b est la matrice de Slutsky du consommateur b, définie au point d'équilibre (p, m^b), avec $\sum_{b=1}^{\ell} m^b = m$.

Par l'unicité des différentielles et (4.3), on obtient aussi

$$\Phi \equiv (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} F^b, \tag{4.5}$$

$$\phi_m\, d\bar{m} \equiv (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f_m^b\, dm^b. \tag{4.6}$$

Notons $\delta(a) = [(1/\ell)\ dm^i/dm]$ *5, le vecteur d'ordre $\ell \times 1$ représentant tout mécanisme de distribution des revenus dans la collectivité, F la matrice d'ordre $n \times \ell$ formée avec les ℓ vecteurs f_m^b, et χ la matrice

*5 Le paramètre "a" traduit les politiques de distribution du revenu dans la société. Il sera omis lorsque l'on ne fait aucune hypothèse sur ces mécanismes.

d'ordre ℓ x n formée avec les ℓ vecteurs x^b. (4.6) peut alors se réécrire

(4.7) $$\phi_m = F\, \delta,$$

compte tenu de (4.5) et (4.7). On a alors

(4.8) $$\tilde{K}-(1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b \equiv F\,(\delta\, \bar{x}' - \chi).$$

Comme la propriété d'additivité est vérifiée par ϕ et $(1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f^b$, on a aussi

(4.9) $$p'\,[\tilde{K} -(1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b\,] = 0.$$

$[\tilde{K} - (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b\,]$ est de rang maximal n-1. La matrice $F\,(\delta\bar{x}' - \chi)$ est de rang maximal $(\ell - 1)$ par construction ($p'F = \tau'$ et $\tau'\,(\delta\bar{x}' - \chi) = 0$*6). Il suffit alors de choisir ϕ tel que $\tilde{K}$ soit de rang n - 1 et définie positive pour rendre la décomposabilité impossible lorsque $\ell < n$: en effet, $\tilde{K} - (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b$ est alors de rang n-1 et $F\,(\delta\bar{x}' - \chi)$ de rang $(\ell - 1)$, ce qui contredit (4.8) et (4.4).

Considérons maintenant le premier point. Pour toute matrice $\tilde{K}$, il existe une matrice A telle que $p'A = 0$, et telle que $\tilde{K} + A$ soit de rang (n - 1), symétrique et semi-définie négative.

---

*6 τ' est le vecteur unitaire d'ordre $\ell \times 1$.

Supposons $\ell \geqslant n > 1$ avec $\ell > 2$ et notons par ρ le vecteur d'ordre $\ell \times 1$ représentant la répartition des revenus dans la société — c'est-à-dire tel que $\rho^1 = m^1$ et tel que $\tau'\rho = m$ –. Alors il existe une matrice $F = [f^b_m]$ d'ordre $n \times \ell$, une matrice $\chi = [x^b]$ d'ordre $\ell \times n$ et un vecteur $\delta = [\delta^b]$ d'ordre $\ell \times 1$, qui sont solutions du système de $(n+1)^2 + \ell$ équations à $\ell(2n+1)$ inconnues,

(4.10) $$A - \phi_m x' = F\chi,$$

(4.11) $$\phi_m = F\delta,$$

(4.12) $$\bar{x}' = \gamma'\chi,$$

(4.13) $$\rho = \chi p,$$

(4.14) $$1 = \tau'\delta.$$

La première partie de (4.4) se réécrit alors avec (4.10) et (4.11),

(4.15) $$d\bar{x} = (\tilde{K} + A)\, dp + F\, p' d\bar{x} - F\, (\delta\bar{x}' + \chi)\, dp.$$

Il suffit de poser $\delta^b = (1/\ell)\, dm^b/dm$ et $dm^b = p' dx^b + x^{b'} dp$ pour obtenir finalement

(4.16) $$d\bar{x} = (\tilde{K} + A)\, dp + (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} f^b_m\, p'\, dx^b.$$

Décomposer $(\tilde{K} + A)$ en une somme de ℓ matrices symétriques, semi-définies négatives, $(1/\ell)\ K^b$ vérifiant $p'K^b = 0$, achève la démonstration dans ce cas. Le cas $n = \ell = 2$ est démontré avec le lemme de Sonnenshein (1973 b p.406). Le cas $dm = 0$ n'est pas intéressant car il impose des restrictions supplémentaires sur ϕ et peut être traité directement avec $\Phi \equiv (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} F^b$ et $p'\ (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} F^b = -\bar{x} = p'\Phi$. ▲

Soulignons que le résultat (4.1) n'implique pas qu'il n'existe pas de fonction ϕ décomposable sur moins de consommateurs que n. Notons également que nous n'avons pas restreint la répartition initiale des revenus avec ρ, mais que nous avons contraint la distribution des revenus par δ, les préférences par F (et complémentairement A) et les consommations individuelles χ. Le nombre des degrés de liberté – $\ell\ (2n + 1) - (n + 1)^2 - \ell$ – augmente rapidement avec ℓ et n croissants $(\ell \geqslant n)$ mais il semble impossible cependant de décomposer plusieurs fonctions ϕ sur une économie complètement déterminée (en ce sens que l'on fixerait les préférences, la répartition initiale des revenus et leur distribution). Il est par contre possible de décomposer une fonction ϕ sur un nombre croissant d'économies différentes avec ℓ augmentant. Rappelons finalement que les résultats développés ici ne sont valables que localement a priori.

Diewert (1973a) a donné une forme particulière des résultats sur la non-décomposabilité de certaines fonctions de demande collective sur moins de n consommateurs (n étant toujours le nombre de biens).

<u>Corollaire</u>: Si $\ell < n$ et la fonction ϕ décomposable, il existe une matrice Z d'ordre $n \times \ell$, orthogonale aux vecteurs f_m^b, et une matrice V d'ordre $n \times \ell$, orthogonale aux vecteurs x^b avec b allant de 1 à ℓ, telle que $Z'\Phi\ Z = Z'\tilde{K}Z$ et $V'\ \Phi\ V = V'\ \tilde{K}V$, soient symétriques et semi-définies négatives.

<u>Preuve</u>: $Z'\ f_m^b = 0$, pour tout b allant de 1 à ℓ ($\ell < n$), implique avec (4.5) et (4.6),

$$(4.17) \qquad Z'\ (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b Z = Z'\Phi\ Z = Z'\ [\tilde{K} - \phi_m\ \bar{x}']\ Z = Z'\tilde{K}\ Z.$$

Les propriétés de $\sum_{b=1}^{\ell} K^b$ se transportent sur $Z'\ (1/\ell) \sum_{b=1}^{\ell} K^b\ Z$ et $Z'\tilde{K}\ Z$. Une telle matrice Z existe nécessairement si $\ell < n$. La même démonstration avec V achève la preuve. ▲

Lancaster (1975 p. 8) interprète ce résultat pour distinguer entre rationalité des consommateurs et quasi-rationalité des ménages - considéré comme un groupe de consommateurs -.

Ces résultats conditionnent l'utilisation des contraintes obtenues des théories pour l'estimation des fonctions de demande et d'évaluation. Cependant, comme le résultat (4.1) l'indique, les conditions de non-décomposabilité sont assez contraignantes. Elles indiquent par contre que la classe des fonctions ϕ satisfaisant aux conditions usuelles de la demande est assez étroite. Ce résultat avait été mis en lumière d'une façon originale par Hicks (1956, ch. 6 et 11) et les résultats précédents peuvent être considérés comme des systématisations de son approche. Toutefois les résultats classiques de l'agrégation dans la théorie de la demande laissaient déjà peu d'espoir sur ce point ainsi que nous allons le démontrer maintenant.

§ 2. Propriétés générales des fonctions de demande collective décomposables

Il est bien connu que l'agrégation de préordres de préférences est quasiment impossible. Une littérature abondante traite de ce problème et de ses solutions en théorie de la demande: dès 1886, Antonnelli (1886, page 344) donnait une solution partielle, Wold (1953 p. 143, exercice 27), Nataf (1953) (1964), Gorman (1953), Pearce (1964, ch. 3), Chipman (1974), ... semblent être les autres étapes importantes. Ces contributions se sont attachées à dégager des conditions suffisantes sur les mécanismes de distribution de revenus et/ou les préférences permettant de transporter sur les fonctions de demande collective décomposables, les propriétés des fonctions de demande agrégées -

celles des fonctions de demande individuelles - qui les sous-tendent

Formellement la question qui se pose est: existe-t-il des propriétés correspondantes à (3.23), (3. 24), (3. 25), (3. 26), sur le membre de gauche de (4.4) ? Considérons ces propriétés successivement

i) la propriété d'additivité

Cette propriété est vérifiée dès que l'on suppose que la fonction de demande collective ϕ satisfait la contrainte de budget $\bar{m} = p'\bar{x}$ - c'est-à-dire par définition ici -.

ii) la propriété d'homogénéité.

Il est intuitif que pour des économies quelconques cette propriété n'est pas transportée ou générale sur les fonctions de demande collective. Il suffit de remarquer qu'une augmentation proportionnelle des prix et du revenu total dans l'économie ne s'accompagne pas nécessairement d'une augmentation proportionnelle de chaque revenu individuel (dépendant du mécanisme de distribution des revenus). Ainsi certaines quantités demandées par les individus varieront et ne se compenseront pas nécessairement dans l'économie. Le résultat (4.2) montre formellement ce point et dégage les conditions nécessaires et suffisantes qui permettent l'agrégation.

Notons $\alpha = (\alpha^1 (a,m), \ldots, \alpha^\ell(a,m))$, le vecteur représentant tout mécanisme de distribution et redistribution des revenus dans la société, c'est-à-dire tel que

$$m^b = \alpha^b (a,m)\, m \,, \tag{4.18}$$

b allant de 1 à ℓ. a est un paramètre servant à décrire toute action possible sur les revenus. Ce vecteur est tel que $\alpha^b (a,m) > 0$ pour tout b et tel que $\tau'\alpha = 1$. Les fonctions de demande individuelles s'écrivent alors

$$x^b = f^b (p, \alpha^b (a,m)\, m). \tag{4.19}$$

Elles sont homogènes de degré 0 en $(p, \alpha^b (a,m)\, m)$, c'est-a-dire telles que

$$F_p^b + f_m^b \alpha^b (a,m)\, m = 0. \tag{4.20}$$

On a alors sur les fonctions de demande agrégées,

$$(1/\ell) \sum_b F^b p + (1/\ell) \sum_b f_m^b \alpha^b (a,m)\, m = 0 \tag{4.21}$$

et sur les fonctions de demande collectives,

<u>Résultat (4.2)</u>: Une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions de demandes collectives décomposables soient homogènes de degré 0 en $(p, \bar{m})$, est que la distribution des revenus et/ou les préférences vérifient

$$\phi_{\bar{m}} = \sum_{b=1}^{\ell} \alpha^b (a, m) f_m^b . \tag{4.22}$$

<u>Preuve</u>: Si les fonctions de demande collectives sont homogènes de degré 0 en $(p, \bar{m})$ on aura,

$$\Phi p + \phi_{\bar{m}} \bar{m} = 0 \tag{4.23}$$

qui, avec (4.5) et (4.21), impliquent (4.22). La réciproque est évidente. ▲

Si on tient compte de (4.6) et de la définition de α, cette condition se réécrit également

$$\sum_{b=1}^{\ell} [\alpha^b (a, m) - \delta^b (a)] f_m^b = 0. \tag{4.24}$$

Toute distribution des revenus maintenant la répartition initiale des revenus implique l'homogénéité des fonctions de demande collective – indépendamment des préférences des individus –.

iii) la propriété d'intégrabilité mathématique et économique.

Ainsi que le soulignent Pearce(1964 ch. 3), Hurwicz (1971 p. 177),l'intégrabilité mathématique - c'est-à-dire la symétrie de la matrice de Slutsky associée - n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'une fonction d'utilité dont la maximisation sous contrainte génère la fonction de demande considérée: l'intégrabilité économique - c'est-à-dire une matrice de Slutsky semi-définie négative - est nécessaire. Ceci reste vrai pour les fonctions de demande collective décomposables et l'existence d'une fonction d'utilité collective $w = w\cdot(\bar{x})$ dont la maximisation sous contrainte du revenu total génère la dite fonction. On a ainsi les conditions suivantes,

<u>Résultat (4.3)</u>: Une condition nécessaire et suffisante à l'intégrabilité mathématique d'une fonction de demande collective est que la matrice $[\sum_b f_m^b (x'^b - \bar{x}'\alpha^b (a,m)]$ soit symétrique. Une condition suffisante pour que cette fonction de demande collective soit intégrable économiquement est que cette matrice soit définie non négative.

<u>Preuve:</u> La symétrie de $\tilde{K}$ est une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité mathématique de $d\bar{m} - \bar{x}\, dp = 0$ - par le théorème de Frobenius voir Goursat (1929 p. 592), Dieudonné (1960 p. 134)-.

Comme $\sum_b K^b$ est symétrique par construction, avec $\Phi \equiv (1/\ell) \sum_b K^b$, $\tilde{K}$ est symétrique si, et seulement si

$$(4.25) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = [(1/\ell) \sum_b f_m^b \, x'^b - \phi_{\bar{m}} \, \bar{x}']$$

est symétrique. Remarquons que si $\tilde{K}$ est symétrique, l'homogénéité de degré 0 en p et $\bar{m}$ de la fonction de demande collective est satisfaite nécessairement. Dans ce cas avec (4.22), (4.25) peut s'écrire

$$(4.26) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell) [\sum_b f_m^b \, (x'^b - x'\alpha^b (a,m)].$$

Ceci achève la démonstration de la première partie du résultat. Si on écrit $\tilde{K}$ comme $\tilde{K} = (1/\ell) \sum_b K^b - [(1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K}]$, étant donné que $(1/\ell) \sum K^b$ est semi-définie négative, une condition suffisante pour que $\tilde{K}$ soit aussi semi-définie négative est que $(1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K}$, c'est-à-dire (4.26), soit définie non négative. ▲

Nataf (1953 p. 21), Gorman (1953) ont donné une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions de demande collective décomposables soient intégrables mathématiquement et économiquement, si l'on ne fait aucune hypothèse sur les mécanismes de distribution et de redistribution de revenus *7. Katzner (1970 p. 139-140), Chipman (1974 théorème 3)... ont reformulé cette condition en tenant compte de la re-

*7 Dès 1886, Antonnelli (1886, pages 344-345) avait dégagé ce résultat en partie.

marque de Samuelson (1956 note p. 5), à l'effet qu'elle implique que toutes les courbes d'Engel sont linéaires confondues et passent par l'origine. Remarquons que ce point reste vrai même si on ne considère que l'intégrabilité *locale* des fonctions de demande collective: en effet, fixer $d\bar{m}$, mais laisser α (a,m) libre, oblige à considérer pour chaque consommateur les cas où il dispose d'un revenu nul et où il dispose du revenu total. Après avoir exposé ce point (résultat 4.4), nous verrons ensuite comment des restrictions sur α (a,m) permettent de le modifier (résultat 4.6).

Considérons d'abord la définition suivante et ses conséquences. Des préférences sont dites homothétiques si pour tout couple de complexes de biens (x_1, x_2) où x_1 est préféré (indifférent) à x_2, alors pour tout scalaire λ tel que λx_1 et λx_2 soient dans X, on a λx_1 préféré (indifférent) à λx_2. Ainsi que l'ont montré Gorman (1959) Lau (1970), Chipman (1974) ..., des fonctions de demande générées par des préférences homothétiques ont des élasticités - revenus unitaires *8. En effet, x = f (p,m) est générée par une relation de préférence si:

1. $p'x = m$

2. $\forall\, x^* \neq x \in X$ tel que $p'x^* \leq m$, est tel que x est préféré à x^*.

Si la relation de préférence est homothétique, alors quelque soit λ tel

*8 la réciproque est également vraie.

que λx appartienne à X, on a

1. $p' \lambda x = \lambda m$

2. $\forall x^* \neq x \in X$ tel que $p' \lambda x^* \leqslant \lambda m$, est tel que λx est préféré à λx^*. On a donc alors $\lambda x = f(p, \lambda m) = \lambda f(p,m)$. Si f est différentiable, le théorème d'Euler permet d'écrire,

$$f_m m = x. \tag{4.27}$$

Soulignons la signification de telles préférences: une augmentation du revenu entraine une augmentation proportionnelle de la consommation de tous les biens. Gorman (1959) et Nataf (1953 p. 26) ont insisté sur ce point dans des contextes différents. Notre définition permet d'exprimer le résultat suivant:

<u>Résultat (4.4) (Nataf - Gorman)</u>: Si chaque fonction de demande individuelle est générée par la même relation de préférences homothétique, alors la fonction de demande collective est donnée par

$$\bar{x} = (1/\ell) \sum_b f^b(p, m^b) = \phi(p, \bar{m}) = (1/\ell) f^j(p, \sum_b m^b),$$

où j est l'indice d'un consommateur quelconque - et vérifie donc les restrictions usuelles de la demande.

<u>Preuve:</u> Procédons en deux étapes:

1. Condition nécessaire et suffisante à l'intégrabilité mathématique: ainsi que nous l'avons déjà mentionné, le fait que l'on n'impose aucune restriction sur α implique que, dans certains cas limites, on a $\bar{x} = f^j\,(p, (1/\ell)\sum_b m^b)$. Comme les préférences individuelles sont homothétiques et identiques, on a alors $f^j_m = \phi_{\bar{m}}$ pour tout j allant de 1 à ℓ et ϕ est homothétique. En conséquence avec (4.27), on aura:

$$(4.28) \qquad (1/\ell)\sum_b K^b - \tilde{K} = [(1/\ell)\sum_b f^b_m\, f^{b'}_m\, m^b - \phi_{\bar{m}}\,\phi_{\bar{m}}\,\bar{m}\,],$$

qui est symétrique.

2. Condition suffisante à l'intégrabilité économique: (4.28) s'écrit encore en tenant compte de $\phi_{\bar{m}} = f^j_m$ pour tout j allant de 1 à ℓ,

$$(4.29) \qquad (1/\ell)\sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell)[\phi_{\bar{m}}\,\phi'_{\bar{m}}\sum_b (m^b - m\,)] = 0,$$

qui achève la preuve avec le résultat (4.3). ▲

Remarquons que dans ce cas $(1/\ell)\sum_b K^b = \tilde{K}$, l'intégration sur un contour de Scitowski - Debreu revient à celle sur une courbe d'indifférence collective. Rappelons également que dans ce cas l'homogénéité de degré 0 en $(p, \bar{m})$ est vérifiée par ϕ. Nous avons donné le résultat (4.4) au voisinage d'un point $(p,\bar{m})$ dans $P \times M$: il est clair que la propriété locale définie ici est vraie globalement dans $P \times M$ avec $f^j(p,\bar{m}) = \phi(p, \bar{m})$, pour tout consommateur.

Si on pose maintenant des restrictions sur le mécanisme de distribution et redistribution des revenus, on connait d'autres conditions suffisantes d'intégrabilité mathématiques et économiques. La plus simple est donnée par Wold (1953, théorème 1, p. 117);

<u>Résultat(4.5)</u>: Si les consommateurs ont les mêmes préférences (quelconques) et disposent du même revenu, alors les fonctions de demande collective sont intégrables.

<u>Preuve:</u> Elle est ~~immédiate~~ puisqu'alors $\bar{x} = \phi(p, \bar{m}) = f^j(p, m)$ où j est n'importe quel consommateur. ▲

Dans ce cas, on a aussi $(1/\ell) \sum_b K^b = \tilde{K}$, mais remarquons cependant que si les consommateurs ont tous les mêmes revenus mais des préférences différentes, ceci n'est pas suffisant à assurer l'intégrabilité, ainsi que l'a noté Hicks (1956 ch. 6 et 11).

Une condition suffisante plus générale est de supposer qu'il n'y a pas de mécanisme de redistribution des revenus, c'est-à-dire que α est indépendant de a – Roy (1970), Chipman (1974), ... –, Résultat (4.6): Si chaque consommateur a des préférences homothétiques mais non nécessairement identiques et s'il n'y a pas de mécanisme de redistribution du revenu, c'est-à-dire que $\alpha\ (a, m) = [\alpha^1 (m), \ldots, \alpha^\ell (m)]$, avec $\alpha^b (m) \geqslant 0$ pour tout consommateur b, alors les fonctions de demande collective sont intégrables. La fonction d'utilité collective qui génère cette fonction de demande collective est également homothétique.

Preuve: Procédons en deux étapes:

1. Intègrabilité mathématique: si chaque consommateur a des préférences homothétiques, alors sa fonction de demande est telle que $f^b_m = x^b (1/m^b)$ par (4.27), et

$$(4.30) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell) \left[\sum_b x^b x^{b'} (1/m^b) - \phi_{\bar{m}} \sum_b f^{b'}_m m^b \right].$$

Cependant, comme $m^b = \alpha^b (m)\ m$ et que l'homogénéité est une condition nécessaire à l'intégrabilité, (4.22) permet d'écrire,

$$(4.31) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell) \left[\sum_b x^b x^{b'} (1/m^b) - \phi_{\bar{m}} \phi'_{\bar{m}}\ m\right]$$

qui est symétrique. Il est clair que l'on a également $\phi_{\bar{m}} \bar{m} = \bar{x}$ avec (4.25).

2. Intégrabilité économique:

Sous l'homogénéité - (4.22) - de la demande et l'homothétie des préférences-(4.27)-, (4.31) se réécrit encore:

$$(4.32) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = \bar{m} \left[\sum_b \frac{\alpha^b x^b}{m^b} \frac{x^{b'}}{m^b} - \sum_b \frac{x^b \alpha^b}{m^b} \sum_b \frac{x^{b'} \alpha^b}{m^b} \right].$$

Si on note $\hat{\alpha}$ la matrice diagonale d'ordre $\ell \times \ell$, formée avec α, C la matrice $\ell \times m$ ayant pour vecteurs - colonnes les vecteurs x^b / m^b, on a

$$(4.33) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = \bar{m} \left[C' \hat{\alpha} C - C' \alpha \alpha' C \right]$$

que l'on réécrit,

$$(4.34) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = \bar{m} \left[C' (I - \alpha \alpha' \hat{\alpha}^{-1}) \hat{\alpha} (I - \hat{\alpha}^{-1} \alpha \alpha') C \right]$$

compte tenu de $(I - \alpha \alpha' \hat{\alpha}^{-1}) \hat{\alpha} (\hat{\alpha}^{-1} \alpha \alpha') = 0$. Comme $\hat{\alpha}$ est définie non négative - avec $\alpha^b \geqslant 0$ pour tout b -, $(1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K}$ l'est également. Finalement, l'intégrabilité et $\phi_{\bar{m}} \bar{m} = \bar{x}$ impliquent que la fonction d'utilité collective est homothétique. ▲

Il est clair que les conditions suffisantes d'agrégation des propriétés des fonctions de demande individuelle sur les fonctions de demande collective, telles que nous venons de les décrire, sont très restrictives par leurs implications sur les préférences. Cependant, comme le notent Nataf (1953, p. 70-71), Malinvaud (1957 p. 72-73), l'agrégation doit être définie en considération de l'objet auquel elle s'applique. Ainsi il est parfois pertinent d'accepter des erreurs d'agrégation - lorsqu'elles sont faibles - pour bénéficier des implications empiriques de la théorie dans les études économétriques. Barten (1974) développe cette idée pour la théorie de la demande. Il insiste en particulier sur le fait que l'on cherche seulement des conditions locales, ce qui permet d'accepter les approximations. Toutefois les résultats qu'il développe ensuite sont encore des cas particuliers du résultat général (4.3), comme nous allons le montrer.

Corollaire 1 du résultat (4.3): $[(1/\ell) \sum_b (f_m^b - \phi_{\bar{m}}) (x^{b'} - \alpha^b (a,m)x')]$ symétrique est une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité mathématique de la fonction de demande collective. $[(1/\ell) \sum_b (f_m^b - \phi_{\bar{m}}) (x^{b'} - \alpha^b (a,m)x')]$ symétrique et définie non positive est une condition suffisante d'intégrabilité mathématique et économique de la fonction de demande collective.

Preuve: On a

$$(4.35) \qquad (1/\ell) \sum_b (f_m^b - \phi_{\bar{m}}) (x^{b'} - \alpha^b (a, m)x') =$$

$$(1/\ell) \sum_b f_m^b (x^{b'} - \alpha^b (a, m) x') - (1/\ell) \phi_{\bar{m}} \sum_b (x'^b - \alpha^b (a,m) x')$$

Comme $\sum_b (x'^b - \alpha^b (a,m)\, x') = 0$, (4.35) se ramène à (4.26) et le résultat (4.3) s'applique.

<u>Corollaire 2 du résultat (4.3)</u>: Si $d\bar{m} \neq 0$, c'est-à-dire si le revenu total varie, la symétrie de la matrice $(1/\ell) \sum_b f_m^b (x_i' - \delta (a)\, x')$ est une condition nécessaire et suffisante à l'intégrabilité mathématique totale, sa semi définition positive est une condition suffisante - lorsqu'elle est symétrique - à l'intégrabilité économique.

<u>Preuve</u>: Si $d\bar{m} \neq 0$ et la fonction ϕ décomposable, par (4.5), (4.6) et la définition de δ (a), on a

$$(4.36) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell) \sum_b f_m^b (x^{b'} - \delta (a)\, x').$$

La preuve s'achève en reprenant les arguments des résultats précédents. ▲

Notons que le cas $d\bar{m} \neq 0$ est significatif au plan économétrique puisqu'il est peu concevable en pratique de ne pas avoir de variations de revenu - nominal et/ou réel -.

En remarquant que $\phi_{\bar{m}} [(1/\ell) \sum_b (x^{b'} - x'\delta^b)] = 0$ compte tenu de $\tau' \delta = 1$, (4.36) se réécrit encore

$$(4.37) \qquad (1/\ell) \sum_b K^b - \tilde{K} = (1/\ell) \sum_b (f_m^b - \phi_{\bar{m}}) (x^{b'} - \delta^b x').$$

Barten (1974, p. 7) prend le cas particulier oû cette expression est nulle pour exprimer sa condition suffisante d'agrégation.

SECTION 2. L'AGRÉGATION SUR LES BIENS

Supposons que l'agrégation sur les consommateurs est résolue. La taille du système de demande - ou d'évaluations - que nous estimons est fonction du nombre d'observations dont nous disposons, des restrictions dégagées sur les modèles théoriques et des restrictions supplémentaires propres à l'agrégation sur les biens *9.

La prise en compte des restrictions théoriques dans le calcul de la taille du système à estimer se fait aisément: l'estimation d'un système de n fonctions de demande revient à dégager n^2 paramètres pour la matrice de Slutsky et n paramètres pour le vecteur d'effets-revenus. Ces (n + 1)n paramètres ne sont pas tous à estimer: même sans information supplémentaire, la propriété d'additivité - $p'\phi_{\bar{m}} = 1$, $p'\tilde{K} = 0$ -, en enlève n + 1. Si l'homogénéité est vérifiée, alors $\tilde{K}p = 0$ permet de calculer (n - 1) paramètres et donc de n'en estimer plus que n (n - 1). La symétrie de la matrice de Slutsky fait baisser ce nombre à (n - 1) (n - 2) /2.

Pour les fonctions d'évaluation marginale *10, il y a n^2 paramètres dans la matrice d'Antonnelli généralisée, n paramètres pour $\tilde{H}\phi_{\bar{m}}$ et n pour le vecteur w. La propriété $\tilde{H}w = 0$ permet de calculer n coefficients et de n'en estimer plus que $n^2 + n$. La symétrie de $\tilde{H}$ permet de n'en estimer plus que (n - 1) (n + 2) /2 + n

---

*9 Notons que la question de l'agrégation sur les biens est toujours présente, que l'on considère la demande d'un seul bien ou celle de l'ensemble des biens.

*10 Nous supposerons w connu dans la paramétrisation que nous utiliserons; il faudra donc enlever n aux calculs faits ici pour obtenir les degrés de liberté.

Notons que la définition de $\tilde{K}$ et $\tilde{H}$ est de l'information sur la spécification des fonctions à estimer mais ne diminue pas le nombre des paramètres dans l'estimation. Les restrictions que nous venons d'examiner restent souvent insuffisantes pour permettre l'estimation de modèles de taille importante vuela carence de données. La diminution du nombre de coefficients à estimer passe donc par des hypothèses d'agrégation sur les biens dont le choix dépend des objectifs de l'étude.

Si l'on désire estimer les demandes pour un grand nombre de biens, deux solutions au moins se présentent:

- retenir des variantes quasiment additives de la fonction d'utilité et employer de l'information a priori sur la structure des préférences,

- retenir des procédures de budgétisation avec des indices de prix et de quantités.

Examinons rapidement ces possibilités. Ces variantes s'appuyant sur des fonctions d'utilité cardinalistes permettent la décomposition proposée par Houttaker (1960) de l'effet de substitution en un effet de substitution spécifique - basé sur l'inverse de la matrice hessienne de la fonction d'utilité - et un effet de substitution générale - défini entre autres à l'aide des effets - revenus -.

Quand W^{*11} est inversible, on obtient ainsi à partir de (2.15),

$$\tilde{K} = \lambda W^{-1} - (\lambda / (\partial\lambda / \partial m)) \phi_{\bar{m}} \phi_{\bar{m}}' . \tag{4.38}$$

L'avantage de ces formes réside dans les spécifications possibles de W et W^{-1}, diminuant ainsi le nombre de paramètres à estimer *12. Par exemple, le modèle linéaire de dépenses - développé par Stone (1954) -, a la forme

$$p_i x_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j + b_i m + c_i , \tag{4.39}$$

où i est l'indice du bien. Ce modèle s'appuie sur une fonction d'utilité de type

$$W(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{n} (\bar{x}_i + a_{ii} / (b_i - 1))^{bj} \quad {}^{*13} \tag{4.40}$$

qui se ramène par la transformation logarithmique à une fonction additive. Ce cas a été assoupli par Frisch (1959) en introduisant la notion d'indépendance des préférences pour un bien - ici le bien 1 -, et en montrant ses implications sur la demande. Ceci revient à considérer des

---

*11 W est la matrice hessienne de la fonction d'utilité collective associée à l'agrégation sur les individus. Le même raisonnement tient avec U si l'on a un seul consommateur.

*12 Remarquons que cette décomposition requiert a priori une méthode d'estimation non linéaire sur le premier membre de (4.4).

*13 Voir par exemple Champsaur-Milleron (1971, exercice 5) où en particulier $a_{ij} = b_j a_{ij} / (b_j - 1)$.

fonctions d'utilité du type

$$(4.41) \qquad W(\bar{x}) = t_1(\bar{x}_1) + t_2(\bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

avec $\partial W_{\bar{x}_1} / \partial_{\bar{x}_j} = 0$ pour $j = 1$ et t_1 , t_2 des fonctions adéquates.

Barten (1964) et Theil (1967) ont généralisé cette hypothèse en considérant des fonctions d'utilité presqu'additives ou indépendnates par blocs dans des versions du modèle de Rotterdam. En bref, ces formes ont l'avantage de faire apparaître une structure d'éléments nuls servant d'information a priori pour l'estimation de W^{-1} - voir par exemple Theil (1967 p. 199) et Barten (1964 p. 4). Le Système Indirect Addilog basé sur l'article de Houttaker (1960) obéit au même principe. Les travaux de Jorgenson-Lau (1975) présentent une généralisation de ces approches en utilisant une classe plus générale de fonctions d'utilité - fonctions d'utilité transcendentales logarithmiques directes et indirectes -.

Les variantes qui s'orientent vers des procédures de budgétisation s'appuient sur des versions renforcées des arborescences de choix. Induite par les travaux de Sono (1943), Leontieff (1947), une littérature abondante a caractérisé les différentes nuances des relations de préférence séparable [*14]. Geary - Morishima (1973, partie 2) et Blackorby, Primont, Russel(1975b) donnent les principales définitions et propriétés de ces fonctions.

Si on désire conserver un grand nombre de biens, cette approche implique que l'on construise des indices de prix permettant d'allouer le revenu entre des "enveloppes" m_{N_j} ($j = 1, \ldots, k$), affectées à chaque classe de N respectivement, puis dans un second temps de réallouer ces enveloppes sur les biens élémentaires de leurs classes respectives.

La faible séparabilité est une condition nécessaire et suffisante pour permettre la seconde étape, c'est-à-dire l'allocation intra-classe des enveloppes m_{N_j} ($j = 1, \ldots, \rho_2$), compte tenu des seuls prix pertinents aux classes correspondantes. Si *complémentairement* on veut affecter le revenu m entre les enveloppes m_{N_j} ($j = 1, \ldots, k$), à l'aide d'indices de prix et de quantités définies pour chaque classe, la séparabilité homogène de la fonction d'utilité est nécessaire et suffisante - Gorman (1959), Blackorby, Lady, Nissen, Russell (1970) -.

---

*14 Une fonction d'utilité u (x) est dite faiblement séparable relativement à une partition $N = \{N_1, \ldots, N_k\}$ de l'ensemble des biens, si et seulement si elle est de la forme $u(x) = \gamma(u^1(x^1), \ldots, u^k(x^k))$, où $(x^1, \ldots, x^k)$ est la partition correspondante à N des complexes de biens x, $\gamma(u^1, \ldots, u^k)$ est une fonction de k variables et pour $h = 1, \ldots, k, u^h(x^h)$ est une fonction de sous-vecteur x^h seulement. Elle est dite fortement séparable par rapport à cette partition si et seulement si u (x) est de la forme - avec $k > 2$ -, $u(x) = \gamma(u^1(x^1) + \ldots + u^k(x^k))$ où γ est une fonction monotone croissante d'une variable. On appelle $u^h(x^h)$, fonction d'utilité spécifique au sous-vecteur x^h de x. Les propriétés des fonctions d'utilités spécifiques permettent de nuancer la séparabilité de u.

En s'orientant vers les structures de choix récursives - voir Blackorby, Primont, Russel (1975 b)-, cette seconde approche semble prometteuse en ce qu'elle permet entre autres de rejoindre les approches de Hicks (1956 p. 166-67), Lancaster (1966), (1971), où l'on sépare par une technologie l'objet des préférences de leurs manifestations sur le marché.

Remarquons toutefois que ces méthodes impliquent avec l'agrégation sur les individus que toutes les fonctions d'utilité soient séparables selon la même partition des biens lorsqu'on définit les biens composites.

Alternativement, si l'objectif est d'estimer des systèmes de demandes de taille plus modeste sans faire d'hypothèses additionnelles trop contraignantes sur les fonctions d'utilité - du moins globalement -, l'approche proposée par Hicks (1937), (1946) semble plus pertinente. Elle consiste à grouper sous le même bien composite les biens dont les prix varient proportionnellement.

Si on considère deux *15 classes de biens: ceux dont les prix sont liés et que nous désignerons par I et les autres que nous grouperons dans la classe R, avec card (I) + card (R) = n. Si p_I^o est un état du sous-vecteur des prix des biens dans I, alors tout autre état p_I de ce vecteur se décrit par

---

*15 La même démonstration tient avec k ($2 \leqslant k \leqslant n$) classes de biens.

$$(4.42) \qquad p_I = \eta\, p_I^o ,$$

où η est un scalaire que l'on peut interpréter comme un indice de prix. Une variation des prix dans I se traduit alors par

$$(4.43) \qquad dp_I = p_I^o \; d\eta \, .$$

Considérons le système de demande différentié sous forme partagée selon les classes I et R, c'est-à-dire

$$(4.44) \qquad \begin{bmatrix} d\,\bar{x}_I \\ d\,\bar{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IR} \\ \tilde{K}_{RI} & \tilde{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_I \\ dp_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{\bar{m}\,I} \\ \phi_{\bar{m}\,R} \end{bmatrix} p'd\bar{x}$$

où $\tilde{K}_{IR}$ est la sous-matrice de $\tilde{K}$ d'ordre card (I) × card (R), ... Compte tenu de (4.43), on peut réécrire (4.44) sous la forme

$$(4.45) \qquad \begin{bmatrix} d\bar{x}_I \\ d\bar{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IR} \\ \tilde{K}_{RI} & \tilde{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_I^o & 0_{IR} \\ 0_{RI} & I_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\eta \\ dp_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{\bar{m}I} \\ \phi_{\bar{m}R} \end{bmatrix} p'd\bar{x}$$

où 0_{IR} est une matrice nulle d'ordre card (I) × card (R) et I_{RR} la matrice identité d'ordre card (R) × card (R). Si on définit comme bien composite sur I l'indice de volume

$$(4.46) \qquad \bar{q} = p_I^{o'} \bar{x}_I ,$$

alors une variation de cet indice, induite par des variations des quantités des biens élémentaires, sera donnée par

$$(4.47) \qquad d\bar{q} = p_I^{o} d\bar{x}_I .$$

Le système de demande (4.45) devient alors, en tenant compte de la demande pour le bien composite,

$$(4.48) \quad \begin{bmatrix} d\bar{q} \\ dx_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_I^{o'} & 0_{1R} \\ 0_{RI} & I_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IR} \\ \tilde{K}_{RI} & \tilde{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_I^{o} & 0_{IR} \\ 0_{R1} & I_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\eta \\ dp_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_I^{o'} & \phi_{\bar{m}I} \\ & \phi_{\bar{m}R} \end{bmatrix} p'd\bar{x}$$

Si on note

$$(4.49) \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1R} \\ B_{R1} & B_{RR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_I^{o'} \tilde{K}_{II} p_I^{o} & p_I^{o'} \tilde{K}_{IR} \\ \tilde{K}_{RI} p_I^{o} & \tilde{K}_{RR} \end{bmatrix},$$

la matrice de Slutsky agrégée sur les biens, où B_{11} est d'ordre (1×1) et B_{RR} d'ordre card (R) × card (R), on obtient finalement

$$(4.50)\quad \begin{bmatrix} d\bar{q} \\ d\bar{x}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1R} \\ B_{R1} & B_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\eta \\ dp_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_I^{o'} & \phi_{\bar{m}I} \\ & \phi_{\bar{m}R} \end{bmatrix} p'd\bar{x} ,$$

qui est l'équation du système de demande agrégée sur les biens. On vérifie directement sur (4.49) et (4.50) que,

i) la propriété d'agrégation sur les biens est conservée, c'est-à-dire que

$$(5.41)\quad \begin{bmatrix} \eta, & p_R \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} p_I^{o'} & \phi_{\bar{m}I} \\ & \phi_{\bar{m}R} \end{bmatrix} = 1,$$

ii) la propriété d'homogénéité est conservée sur le système agrégé avec la forme

$$(4.52)\quad \begin{bmatrix} B_{11} & B_{1R} \\ B_{R1} & B_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ p_R \end{bmatrix} = 0,$$

iii) la symétrie de la matrice de Slutsky est transportée sur la matrice agrégée sur les biens,

$$(4.53)\quad B = B',$$

iv) la matrice B est semi définie négative par conséquence de cette propriété sur $\tilde{K}$: on a prémultiplié et posmultiplié $\tilde{K}$ par une matrice et sa transposée. Donc

$$\zeta' \, B \, \zeta \leqslant 0 \text{ pour tout } \zeta \text{ de } \mathbb{E}^{\text{card}(R)+1}. \tag{4.54}$$

Le même raisonnement reste valide si on considère plusieurs classes de biens. Ainsi que le montrent Champsaur et Milleron (1971 , exercice 2), une telle agrégation sur les biens revient à considérer en fait une transformation de la fonction d'utilité - qui n'est pas séparable a priori - du type,

$$\gamma \, (\bar{x}_R \, , \bar{q}) = W \, (\bar{x}_I \, (\bar{x}_R, \bar{q}), \bar{x}_R) \tag{4.55}$$

avec la contrainte

$$\eta\bar{q} + p_R' \, \bar{x}_R = m, \tag{4.56}$$

où $\bar{x}_I \, (\bar{x}_R, \bar{q})$ est une fonction vectorielle obtenue par application du théorème des fonctions implicites au sous-système de conditions du premier ordre,

$$W_{\bar{x}_I} - \lambda \, p_I^o = 0, \tag{4.57}$$

(4.58) $$p'_I \; \bar{x}_I - \hat{q} = 0.$$

Remarquons finalement que cette forme d'agrégation sur les biens est très compatible avec celle sur les individus par l'unicité du système des prix - et le fait qu'elle n'implique pas la même séparabilité pour toute les fonctions d'utilité -. Par contre, elle peut conduire à grouper ensemble des biens très hétéroclites. De plus, rien ne guarantit a priori que cette méthode permettra de réduire suffisamment la taille du système. Cependant, Diewert (1974) a montré qu'il suffisait que les prix varient de manière approximativement proportionnelle pour que cette méthode reste valide sans erreurs d'agrégation importantes.

SECTION III. L'AGRÉGATION SUR LE TEMPS

Au moins trois questions apparaissent dans l'ajustement des données chronologiques aux modèles théoriques développés *16 en première partie. La première est parfaitement générale aux estimations des modèles statiques à l'aide de séries chronologiques: l'hypothèse de constance dans le temps de la structure du modèle - c'est-à-dire ici la structure des préférences - est-elle acceptable ? En second lieu une estimation linéaire fournit des paramètres constants pour des équilibres différents: ceci réduit encore les structures des préférences envisageables même si les paramétrisations affaiblissent cet inconvénient. Finalement le modèle théorique est exprimé en variations infinitésimales alors que nos observations génèrent des différences finies.

Relativement au premier point, nous supposons que les préférences moyennes des consommateurs sont restées quasiment stables dans le temps et que les seules modifications qu'elles ont subies sont de nature tendancielle et peuvent être prises en compte dans les séries par des paramètres de tendance *17. Alors la matrice de Slutsky (ou d'Antonnelli généralisée) ainsi que le vecteur d'effets-revenus (ou d'effets-revenus duaux) que l'on estime sont supposés obtenus à partir de structures de préférences corrigées de leur tendance.

---

*16 Rappelons la nature statique de ceux-ci.

*17 Dans l'application, nous n'utiliserons pas un tel paramètre: les expériences précédentes de Barten (1969), Barten-Geyskens (1975), semblent montrer que ce facteur n'est pas indispensable.

La seconde question relève de la forme du modèle estimé: l'estimation directe du modèle théorique en forme différentiée - ou son approximation en différences fixées - ne permet pas de prendre en compte complètement le fait que les paramètres sont fonctions des équilibres considérés. Si on fait abstraction de la nature temporelle des séries, à chaque équilibre correspond une matrice de Slutsky (d'Antonnelli) et un vecteur d'effets-revenus (duaux) qui sont différents de ceux des autres équilibres. L'ignorer revient à supposer une classe de fonctions d'utilité assez spéciale ainsi que l'indique (2.15) ou (2.37). Plusieurs approches permettent de contourner ce problème:

i) comme dans les cas des agrégations précédentes, il existe une solution en spécifiant la forme de la fonction d'utilité: il serait possible alors de faire dépendre $\bar{K}$ et ϕ_m de (p,m) - $\tilde{H}$ et $\tilde{H}$ $\phi_{\bar{m}}$ de x ;

ii) on peut accepter que l'agrégation sur les biens et sur les individus assouplissent cette restriction: seules les matrices agrégées satisfont à cette particularité;

iii) on paramétrise le modèle théorique - comme ce sera le cas avec le modèle de Rotterdam pour la fonction de demande -: ce sont alors des transformations de $\tilde{K}$ et de $\phi_{\bar{m}}$ qui sont constantes par rapport aux équilibres;

iv) on choisit un équilibre parmi ceux observés et on estime les paramètres attachés à cet équilibre en se servant des autres équilibres comme observations des déviations dans le voisinage de cet équilibre. Cette méthode est d'autant plus performante que les équilibres observés sont proches les uns des autres.

Si pour le système de demandes la paramétrisation de Rotterdam permet de contournerce problème, pour le système d'évaluations la paramétrisation que nous utiliserons nous placera dans le cas le plus restrictif.

. . . .

Le troisième point est celui du passage des modèles en variations infinitésimales aux modèles endifférences finies. Il est nécessaire de supposer que les voisinages sur lesquels se font ces variations infinitésimales autour de chaque équilibre soient assez larges pour approcher au moins un autre équilibre observé. Barten (1967), Theil (1967, p. 223) évaluent l'approximation que l'on commet lorsqu'on remplace ainsi ces variations infinitérimales par des variations finies. Si on prend une approximation de Taylor - que l'on suppose exister et être convergente - d'une fonction vectorielle réelle $t = t(z)$ au voisinage de $z = z*$, on obtient

$$(4.59) \quad \Delta t = t(z + \Delta_z) - t_{(z)} = \partial t/\partial_z \Big|_{z=z*} \Delta_z + (\tfrac{1}{2}) [\Delta_z' (\partial^2 t/\partial_z \partial_z) \Big|_{z=\dot{z}} \Delta_z] + R^3$$

où Δ_z est une variation autour de $z = z^*$ et R^3 un polynôme du troisième degré au moins en Δ_z. Une approximation du même type permet d'écrire:

$$(4.60)\quad \partial t/\partial_z \Big|_{z = z^* + \Delta_z} = \partial t/\partial_z \Big|_{z = z^*} \Delta_z + (\tfrac{1}{2})\,[\Delta_z'(\partial^2 t/\partial_z\, \partial_z)\Big|_{z=z^*} \Delta_z] + R^2$$

où R^2 est un polynôme du deuxième degré au moins en Δ_z. Reportant cette seconde expression dans (4.59), on obtient avec l'élimination de la matrice hessienne de t,

$$(4.61)\quad \Delta t = (\tfrac{1}{2})\left[\partial t/\partial_z \Big|_{z=z^* + \Delta_z} + \partial t/\partial_z \Big|_{z=z^*}\right] \Delta_z + R^3 + \Delta_z'\; R^2$$

où $R^3 + \Delta_z'\; R^2$ est un polynôme du troisième degré au moins en Δ_z.

Cette approximation s'applique directement aux différentielles des fonctions de demande ou d'évaluation marginale: on peut passer aux différences finies, c'est-à-dire remplacer dp par Δp, dx par Δx, les matrices jacobiennes - transformées - des fonctions considérées, par les moyennes de celles obtenues en (p,x) et ($p + \Delta p$, $x + \Delta x$), en commettant une erreur du troisième ordre seulement *18.

Ces approximations seront utilisées dans le cadre des paramétrisations sur les fonctions de demande et d'évaluation marginale dans le Chapitre V.

*18 On peut illustrer également ce point de la manière suivante: la différentielle de $\bar{x} = \phi(p,\bar{m})$ autour de $(\bar{x}_1, p_1, \bar{m}_1)$ s'écrit: $d\bar{x} = \Phi\Big|_{p=p_1} dp + \phi_{\bar{m}}\Big|_{\bar{m}=\bar{m}_1} d\bar{m}$,

celle autour de $(\bar{x}_2, p_2, \bar{m}_2)$ dans le voisinage de $(\bar{x}_1, p_1, \bar{m})$ s'écrit: $d\bar{x} = \Phi\Big|_{p=p_2} dp + \phi_{\bar{m}}\Big|_{m=m_2} d\bar{m}$. Nos données ne nous permettent pas de discerner entre ces deux formes. On a donc approximé $d\bar{x}$ par $\pm(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$, dp par $\pm(p_1 - p_2)$, $d\bar{m}$ par $\pm(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)$, $\Phi\Big|_{p=p_1}$ et $\Phi\Big|_{p=p_2}$ par $\frac{1}{2}\left[\phi\Big|_{p=p_1} + \phi\Big|_{p=p_2}\right]$ en commettant une erreur du troisième ordre au maximum.

CONCLUSION

Il est reconnu que la théorie de l'agrégation contient plus de résultats d'impossibilité que de possibilité. L'autre face de la médaille est moins souvent explicitée, c'est-à-dire qu'en toute généralité les tests ou prolongements pratiques de la théorie passent par les mêmes exigences.

La théorie de la demande y fait exception et toute tentative est sévèrement analysée selon ces critères [*19]. La discussion que nous venons de faire illustre les principaux problèmes.

Par ordre d'exposition, l'agrégation sur les consommateurs d'une collectivité implique presque nécessairement l'homothétie des préférences individuelles. Une solution pour assouplir les hypothèses serait de considérer différentes classes de revenus avec l'hypothèse plus acceptable de consommateurs représentatifs pour chaque classe.

L'agrégation sur les biens est assez bien résolue par le critère de Hicks. Cependant il semble que les prolongements vers l'approche de Hicks - Lancaster et les arborescences de choix permettent des résultats plus significatifs. Ceci implique bien sûr une spécification - ou un élargissement selon le point de vue [*19] - du modèle théorique.

---

*19 Ceci révèle les préoccupations en partie différentes des théoriciens et des praticiens.

Dans le cadre du modèle théorique statique, l'agrégation sur le temps est également lourde de conséquences, car elle revient en fait à spécifier les formes fonctionnelles des fonctions d'utilité envisagées. Il semble donc peut être plus pertinent de partir avec des spécifications a priori assez générales des fonctions d'utilité directes ou indirectes, et de faire directement des estimations non linéaires des paramètres des fonctions de demandes correspondantes.

Même pris séparément, ces prolongements sont très ambitieux et nous ne nous y engagerons pas ici. Le chapitre suivant proposera simplement une première application de notre modèle théorique avec les hypothèses d'agrégation classiques.

C H A P I T R E   V

UNE ESTIMATION DES SYSTÉMES DE DEMANDES ET D'ÉVALUATIONS MARGINALES

INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est une première tentative pour tester et appliquer les résultats dérivés dans la première partie. Malgré son originalité, cette tentative est en fait limitée par les contingences usuelles de l'estimation des fonctions de demande et par les paramétrisations utilisées. En particulier nos données ne nous permettront pas d'échapper aux hypothèses d'agrégations les plus restrictives, exposées au chapitre précédent. L'hypothèse d'inversion entre les deux espaces que nous ferons transporté également cette situation sur l'estimation de fonctions d'évaluations marginales.

Si, pour les fonctions de demande, nous suivons la paramétrisation du modèle de Rotterdam, nous utiliserons pour les fonctions d'évaluations marginales une formulation qui repose sur le choix empirique d'une règle de normalisation. Il semble que cette formulation puisse être améliorée sans toutefois remettre en question la méthodologie appliquée ici.

La tradition du modèle de Rotterdam veut que l'on impose les contraintes une à une dans l'estimation afin de tester leur validité "pas à pas". Il faut cependant mentionner deux points:

i) les tests ne portent pas directement sur la théorie de la demande, mais sur son niveau agrégé, c'est-à-dire qu'ils sont d'abord des tests sur les hypothèses d'agrégation et ensuite des tests sur la théorie.

ii) Ne pas rejeter statistiquement une ou plusieurs contraintes et rejeter les autres,a fort peu de signification: les hypothèses faites sur l'agrégation montrent qu'en fait les situations qui permettent d'accepter l'homogénéité sont pratiquement suffisantes pour accepter les autres contraintes.

En somme, il semble donc fondé d'imposer simultanément toutes les contraintes et de les tester globalement.

La première section transformera les équations du modèle théorique afin de les rendre testables avec le minimum d'hypothèses, relativement à la nature des données dont nous disposons. Le problème essentiel ici sera celui de l'agrégation dans le temps. On dispose de données pour des équilibres différents, c'est-à-dire que les variations que nous construisons ne seront pas relatives au même équilibre. On envisagera donc des transformations des formes initiales afin de prétendre à des classes de fonctions d'utilité assez générales. Malheureusement, les résultats restent modestes et semblent justifier la démarche partant directement de spécifications de la fonction d'utilité *1.

---

*1 Signalons dans cette approche les premiers résultats de Jorgenson et Lau (1975).

La seconde section décrit l'estimation des formes paramétrisées: après avoir exposé la transformation des données utilisées, nous expliquerons surtout la formulation mathématique permettant d'incorporer les contraintes dans le processus de minimisation de l'estimation. Dans le troisième paragraphe de cette section, nous analyserons les résultats des deux modèles. Nous verrons que ces résultats sont positifs et que bien qu'une comparaison directe entre les deux modèles soit malaisée, il semble que la performance du modèle d'évaluation soit comparable à celle du modèle de demande.

SECTION I. PARAMÉTRISATION

Supposons que les données chronologiques dont nous disposons suffisent à prendre en compte la distribution de revenus dans la société, c'est-à-dire que le problème de l'agrégation sur les consommateurs est résolu. Si on a suffisamment de données pour estimer une fonction de demande - ou d'évaluation - on serait donc amené à estimer

$$(5.1) \qquad d\bar{x} = \tilde{K}\, dp + \phi_{\bar{m}}\ p'\, d\bar{x}\,,$$

et avec l'hypothèse d'inversion entre les deux espaces,

$$(5.2) \qquad dp = \tilde{H}\, d\bar{x} - \tilde{H}\, \phi_{\bar{m}}\ p' d\bar{x} + ((\omega'\, dp)/(\omega' p))\ p.$$

Il reste cependant que cette information est relative à des équilibres différents des consommateurs et qu'une estimation directe impliquerait des fonctions d'utilité polynomiales du second degré. Un des objectifs des paramétrisations sera d'alléger cette hypothèse: celle du modèle de Rotterdam implique des formes de Cobb-Douglas- voir Barten (1975 p. 44) -. Pour le système d'évaluations, la paramétrisation permet de rendre la forme testable en fixant ω a priori, mais restreint considérablement la classe des fonctions d'utilités envisagées.

§ 1. Le modèle de Rotterdam

Cette paramétrisation est due à Theil - Barten *2. Notons *3 $\hat{p}$ la matrice diagonale d'ordre $(n \times n)$, construite avec le vecteur p et prémultiplions (5.1) par $\hat{p}$, c'est-à-dire

$$\hat{p}\, d\bar{x} = \hat{p}\, \tilde{K}\, \hat{p}\ \check{p}\, dp \ + \ \hat{p}\, \phi_{\bar{m}}\, p' d\bar{x}. \tag{5.3}$$

Définissons par $\hat{w} = \hat{p}\, \hat{\bar{x}}\ (1/\bar{m})$, la matrice des parts budgétaires des dépenses sur chaque bien et w le vecteur correspondant. En divisant (5.3) par $\bar{m}$, on obtient aussi

$$(1/\bar{m})\ \hat{p}\ \ d\bar{x} \ = \ (1/\bar{m})\ \hat{p}\ \tilde{K}\ \hat{p}\ \check{p}\ dp + (1/\bar{m})\ \hat{p}\ \phi_{\bar{m}}\ p' \hat{\bar{x}}\ \check{\bar{x}}\ d\bar{x} \tag{5.4}$$

qui se réécrit avec $\check{\bar{x}}\, d\bar{x} = d\log \bar{x}$ et $\check{p}\, dp = d\log p$,

$$\check{w}\ d\log \bar{x} = \ B\ d\log p \ + \ b\ w'\ d\log \bar{x}, \tag{5.5}$$

où $B = (1/\bar{m})\ \hat{p}\ \tilde{K}\ \hat{p}$ est une transformation de la matrice de Slutsky et $b = \hat{p}\ \phi_{\bar{m}}$ s'interprète comme un vecteur de propensions marginales à consommer. (5.5) est la forme du modèle de Rotterdam. Si τ est le

---

*2 Nous nous appuyons dans cet exposé sur le cours polycopié du professeur Barten - Barten (1967, ch. 5) - et le document de travail du professeur Theil - Theil (1973)-.

*3 Cette notation sera générale dans ce chapitre: on notera $\hat{c}$ la matrice diagonale construite avec le vecteur c et $\check{c} = \hat{c}^{-1}$ son inverse (lorsqu'elle existe).

vecteur unitaire, les propriétés de (5.1) se transposent sur (5.5) par,

$$(5.6) \qquad \tau' b = 1, \quad \tau' B = 0$$

$$(5.7) \qquad B\tau = 0$$

$$(5.8) \qquad B = B'$$

$$(5.9) \qquad \xi' B \xi \leqslant 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{E}^n.$$

Avec cette paramétrisation des fonctions de demande, on a un modèle d'allocation de la dépense qui décrit les variations dans les dépenses sur les différents biens, en fonction des changements dans les prix et la dépense totale.

Considérons l'agrégation dans le temps de cette formulation. Avec $d\bar{m} = p'\, d\bar{x} + \bar{x}'\, dp$, la forme (5.5) se réécrit

$$(5.10) \qquad \hat{w}\, \mathrm{dlog}\, \bar{x} = B\, \mathrm{dlog}\, p + b\, (\mathrm{dlog}\, \bar{m} - w'\mathrm{dlog}\, p).$$

En prémultipliant (5.10) par $\check{w}$, on a aussi

$$(5.11) \qquad \mathrm{dlog}\, \bar{x} = \check{w}\, B\, d\log p + \check{w}\, b\, (d\log \bar{m} - w'\, d\log p),$$

qui est la forme différentielle d'une fonction en log p et log $\bar{m}$ et dont les dérivées s'écrivent,

$$\partial \log \bar{x} \;/\; \partial \log \bar{m} = \check{w}\, b, \tag{5.12}$$

$$\partial \log \bar{x} \;/\; \partial \log p = \check{w}\, (B - bw'). \tag{5.13}$$

Notre information porte sur $\bar{x}$ et p et par conséquent sur log $\bar{x}$, log p, $\bar{m}$ et log $\bar{m}$. d log $\bar{x}$ peut s'approximer par log $\bar{x}_{t+1}$ - log $\bar{x}_t$, d log p par log p_{t+1} - log p_t, d log $\bar{m}$ par log $\bar{m}_{t+1}$ - log $\bar{m}_t$, où t et t + 1 indiquent les périodes. Si on note $D\bar{x}_t$, Dp_t, $D\bar{m}_t$ ces différences finies, compte tenu de (4.68) et sous (5.12), (5.13), on peut approximer (5.11) avec nos données, par

$$\begin{aligned} D\bar{x}_t = {} & (\tfrac{1}{2}) \left[(\check{w}_{t+1} + \check{w}_t) B - \check{w}_{t+1}\, b\, w'_{t+1} - \check{w}_t\, b\, w'_t \right] Dp_t \\ & + (\tfrac{1}{2}) (\check{w}_{t+1} + \check{w}_t)\, b\, D\bar{m}_t + R^3, \end{aligned} \tag{5.14}$$

où R^3 est un résidu du troisième ordre en Dp_t, $D\bar{m}_t$. Remarquons que

$$\begin{aligned} (1/4)\, (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\, (\check{w}_{t+1} + \check{w}_t) = {} & (\tfrac{1}{2})[I + (\tfrac{1}{2})\, (\hat{w}_{t+1}\ \check{w}_t) \\ & + (\tfrac{1}{2})\, (\hat{w}_t - \check{w}_{t+1})\,], \end{aligned} \tag{5.15}$$

compte tenu des équations,

$$(5.16) \quad \hat{w}_{t+1} \; \check{w}_t = \hat{w}_t \; \check{w}_t + (\hat{w}_{t+1} - \check{w}_t) \; \check{w}_t$$

$$= I + (\hat{w}_{t+1} - \hat{w}_t) \; \check{w}_t,$$

$$\hat{w}_t \; \check{w}_{t+1} = \hat{w}_{t+1} \; \check{w}_{t+1} + (\hat{w}_t - \check{w}_{t+1}) \; \check{w}_{t+1}$$

$$= I + (\hat{w}_t - \hat{w}_{t+1}) \; \check{w}_{t+1},$$

s'écrit finalement :

$$(5.15') \quad (1/4) \; (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t) \; (\check{w}_{t+1} + \check{w}_t) = I + (1/4) \; (\hat{w}_{t+1} - \hat{w}_t) \; (\check{w}_t - \check{w}_{t+1})$$

$$= I + R^2,$$

où le terme résiduel est du deuxième ordre en $(p_{t+1} - p_t)$ et $(\bar{m}_{t+1} - \bar{m}_t)$. Postmultiplié par $B \; D \; p_t$ et $b \; D \; \bar{m}_t$, il passe au troisième ordre. Ainsi (5.14) prémultiplié par $(\frac{1}{2}) \; (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)$ s'écrit aussi

$$(5.17) \quad (\tfrac{1}{2}) \; (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t) \; D\bar{x}_t = B \; D \; p_t + b \; D \; \bar{m}_t$$

$$- (1/4) \; (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)(\check{w}_{t+1} \; bw'_{t+1} + \check{w}_t \; bw'_t) D p_t$$

$$+ R^3.$$

Dans cette équation, on peut encore écrire,

$$(1/4)\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ (\check{w}_{t+1}\ bw'_{t+1} + \check{w}_t\ bw'_t)\ \ Dp_t =$$

$$(1/4)\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ (\check{w}_{t+1}\ \ w'_{t+1} + \check{w}_t\ w'_t\ )\ Dp_t b, ^{*4}$$

ou encore, en ajoutant et retranchant $\check{w}_t\ \ w'_{t+1}$:

$$\ldots = [(1/4)\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)(\check{w}_{t+1} + \check{w}_t)\ w'_{t+1} - (1/4)(\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ \check{w}_t$$

$$(w'_{t+1} - w'_t)\ ]\ \ Dp_t\ b.$$

Compte tenu de (5.15'), on obtient alors

$$\ldots = [(I + R^2)\ w'_{t+1} - (1/4)\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ \check{w}_t\ (w'_{t+1} - w'_t)]\ Dp_t\ b.$$

Si on isole $(-\frac{1}{2})\ (w_{t+1} - w'_t)$ dans la seconde partie de cette expression, on a

$$\ldots = \ I + R^2)\ w'_{t+1} - (\tfrac{1}{2})\ (w'_{t+1} - w'_t) - (1/4)(\hat{w}_{t+1} - \hat{w}_t)\ \hat{w}_t\ (w'_{t+1} - w'_t)]Dp_t b.$$

---

*4 Dans cette forme, les dimensions des matrices ne concordent pas exactement. Nous aurions dû écrire:

$$(1/4)\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ [\check{w}_{t+1}\ (w'_{t+1}\ Dp_t) + \check{w}_t\ (w'_t\ \ Dp_t)]\ b,$$ afin de conserver les produits scalaires $(w'_{t+1}\ \ Dp_t)$ et $(w'_t\ \ Dp_t)$. Cependant la forme choisie allège l'exposé.

La dernière partie de cette expression est alors du second ordre en $p_{t+1} - p_t$. Postmultipliée par Dp_t, elle passe au troisième ordre, de même que $R^2\ w'_{t+1} \cdot Dp_t$. Finalement (5.17) se réécrit,

$$(5.17')\quad (\tfrac{1}{2})\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ D\bar{x}_t\ =\ BDp_t + b\ [D\bar{m}_t - \tfrac{1}{2}\ (w'_{t+1} + w'_t) Dp_t] + R^3,$$

qui est la forme agrégée sur le temps de (5.10).

Il est aussi possible de transformer (5.17') dans une forme correspondant à (5.5) en commettant une erreur du troisième ordre.

En effet, la différentielle de w,

$$dw\ =\ (1/\bar{m})\ \hat{p}\ d\bar{x}\ +\ (1/\bar{m})\ \hat{\bar{x}}\ dp\ -\ (1/\bar{m})\ w\ d\bar{m}$$

s'écrit encore,

$$dw\ =\ \hat{w}\ d\ \log\ \bar{x}\ +\ \hat{w}\ d\ \log\ p\ -\ w\ d\ \log\ \bar{m}.$$

Approximée par des différences finies, elle devient avec (4.68):

$$w_{t+1} - w_t\ =\ \tfrac{1}{2}\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ D\bar{x}_t + \tfrac{1}{2}\ (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t)\ Dp_t - \tfrac{1}{2}$$

$$(w_{t+1} + w_t)\ D\bar{m}_t + R^3,$$

où R^3 est un polynôme du troisième degré en $D\bar{x}_t$, Dp_t, $D\bar{m}_t$.

Cette expression, prémultipliée par le vecteur unitaire τ', s'écrit:

$$0 = (w_{t+1} + w_t)' \, D\bar{x}_t + (w_{t+1} + w_t)' \, Dp_t - 2 \, D\bar{m}_t + R^3.$$

On a alors finalement la forme agrégée sur le temps de (5.5):

$$(5.5') \qquad (\tfrac{1}{2}) \, (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t) \, D\bar{x}_t = BDp_t + b \, (\tfrac{1}{2}) \, (w'_{t+1} + w'_t) \, D\bar{x}_t + R^3.$$

Remarquons finalement que, compte tenu de $\tau'B = 0$, $\tau'b = 1$, $\tau' \, (\tfrac{1}{2}) \, (\hat{w}_{t+1} + \hat{w}_t) = 1$, on a aussi $\tau'R^3 = 0$. La propriété d'additivité est respectée par construction dans ce modèle. Nous utiliserons la forme (5.5') pour estimer les fonctions de demande. Notons aussi que $B = (1/\bar{m}) \, \hat{p} \, \tilde{K} \, \hat{p}$ constant sur les équilibres considérés, restreint considérablement la classe des fonctions d'utilité - en fait à des Cobb-Douglas, comme le note Barten (1975 p. 44)-, mais permet d'échapper à l'hypothèse de linéarité.

§ 2. La paramétrisation du modèle d'évaluation marginale

Sous l'hypothèse d'inversion entre les deux espaces et les problèmes d'agrégation sur les biens et les consommateurs supposées résolus, le système d'évaluations marginales prend la forme

$$(5.2) \qquad dp = \tilde{H}\, d\bar{x} - \tilde{H}\, \phi_{\bar{m}}\, p' d\bar{x} + ((\omega' dp) / (\omega' p))\, p,$$

sur laquelle on a les restrictions,

$$(5.18) \qquad \tilde{H}\, \omega = 0,$$

$$(5.19) \qquad \tilde{H} = \tilde{H}',$$

$$(5.20) \qquad \xi' \tilde{H}\, \xi \leqslant 0, \quad \forall\ \xi \in \mathbb{E}^n,$$

$$(5.21) \qquad \omega' \tilde{H}\, \phi_{\bar{m}} = 0 .$$

Cette forme n'est cependant pas estimable car $d\bar{x}$ et $p'd\bar{x}$ provoquent de la multicolinéarité entre les variables exogènes. Prémultiplions (5.2) par $\hat{\omega}$ et faisons apparaître $C = \hat{\omega}\, \tilde{H}\, \hat{\omega}$ et $c = \hat{\omega}\, H \phi_{\bar{m}}$, c'est-à-dire

$$(5.22) \qquad \hat{\omega}\, dp = C\, \check{\omega}\, d\bar{x} - c\, p d\bar{x} + ((\omega' dp) / (\omega p'))\hat{\omega}\, p.$$

Cette forme satisfait alors aux restrictions,

$$(5.23) \qquad C\ \tau = 0,$$

$$(5.24) \qquad C = C'$$

$$(5.25) \qquad \xi' C\ \xi \leqslant 0, \quad \forall\ \xi \in I\!E^n$$

$$(5.26) \qquad \tau' c = 0.$$

Toutefois cette paramétrisation requiert la spécification de la normalisation ω: nous choisirons x_o la consommation de l'année de base dans les séries - 1961 -, comme approximation. Le modèle se réécrit alors sous la forme finale,

$$(5.27) \qquad \hat{x}_o[I_n-(1/\ (x_o'\ p))\ p\ x_o']dp = C\ \check{x}_o\ d\bar{x} + cp'\ d\bar{x}$$

ou encore,

$$(5.28) \qquad \hat{x}_o[I_n-(1/\ (x_o'\ p))\ p\ x_o']\ \Delta p = C\ \check{x}_o\ \Delta\bar{x} + cp'\Delta\bar{x},$$

quand on passe aux différences finies. (5.28) supporte alors les restrictions (5.23), (5.24), (5.25), (5.26). Sous cette paramétrisation, toute variation de prix normalisée et nette d'inflation pure *5 se

* 5. Celle-ci étant provoquée par une variation dans la définition de l'unité de compte.

décompose en un effet de substitution provoqué par une variation d'offre et un effet de revenu.

Cependant, sous cette forme, l'agrégation dans le temps devient inutile: nous devons considérer C et c et donc $\tilde{H}$ comme constants par rapport aux différents équilibres considérés. Ceci restreint en pratique la classe des fonctions d'utilité envisageables aux fonctions polynomiales du second degré. Remarquons finalement que, sous cette paramétrisation, les contraintes $\tau C = 0$ et $\tau' c = 0$ sont respectées par construction.

SECTION II. L'ESTIMATION ET LES RÉSULTATS

Après avoir décrit les données et la construction des indices de prix et quantités employés - paragraphe 1 -, cette section expose l'estimation de (5.5') sous les contraintes (5.6), (5.7), (5.8), (5.9), et l'estimation de (5.28) sous les contraintes (5.23), (5.25), (5.26). Remarquons d'abord que les deux équations sont semblables formellement et qu'elles sont sujettes à des restrictions de même type. Ceci a facilité la mise au point de la procédure d'estimation. Toutefois les restrictions (5.8) et (5.25) sont de nature non linéaire: nous avons employé pour l'estimation une généralisation par Gallant (1975) des résultats classiques de Zellner (1962). La formulation de la contrainte de négativité et son intégration dans l'estimation utilisent la décomposition de Choleski des matrices - B et C en l'occurence -, ainsi que proposée par Lau (1974) et appliquée avec la méthode du maximum de vraisemblance par Barten - Geyskens (1975) pour le système de demande. Cette méthode minimise le nombre d'éléments à estimer.

Il est cependant à noter que les résultats obtenus ici pour le modèle de demande ne sont pas sensiblement différents de ceux obtenus par Salvas-Bronsard, Leblanc, Zarra, Bronsard (1973), avec une méthode linéaire pour imposer une condition suffisante de définition de la matrice B, à partir des mêmes données .

Finalement, les résultats obtenus par les deux modèles sont comparables statistiquement: les contraintes sont compatibles avec l'information contenue dans les données. Les résultats sont plus instables entre la phase sans contrainte et celle avec contraintes pour le système d'évaluation que pour le système de demande. Ceci s'explique certainement par le choix quasi-arbitraire de la normalisation et un degré plus élevé de co linéarité entre variables explicatives dans le modèle d'évaluation.

Hicks (1956, ch. 16) et nos résultats théoriques (voir pages 52-3-4) indiquent que les définitions de substitution-complémentarité diffèrent entre les deux espaces mais que la divergence entre les signes est plutôt l'exception que la règle. Les résultats obtenus par l'estimation de B et C concordent avec ces résultats théoriques: nous avons un seul cas de contradiction.

§ 1. Données et indices

Les données que nous utiliserons sont des séries chronologiques de dépenses au Canada de 1947 à 1971, pour 39 groupes de biens, évaluées en dollars courants et dollars constants (base 1961) - Cansim (1973), voir en annexe C la liste des groupes -. Les trois composantes de l'agrégation sont donc nécessaires.

Nous supposons que les conditions d'agrégation sur les consommateurs sont remplies, c'est-à-dire que ces données nous suffisent pour estimer les formes (5.5') et (5.28), sous les restrictions correspondantes. Ayant déjà résolu les problèmes d'agrégation sur le temps dans la section précédente grâce à ces formes, il nous reste à envisager l'agrégation sur les biens.

Ne disposant que de 25 observations pour 39 biens et n'ayant pas d'information a priori - autre que celle nécessaire aux agrégations précédentes - sur la forme des préférences, nous devons donc agréger ces 39 biens en biens composites. Nous avons choisi de ramener le système à 8 groupes. Ce nombre permet de construire des agrégats assez significatifs au plan économique tout en conservant suffisamment de degrés de liberté pour l'estimation et une taille manoeuvrable dans les calculs sur ordinateur [*6].

Pour cette agrégation, nous utiliserons le critère de Hicks: ayant construit un indice de prix de Paasche défini par $\Pi_t = p_t x_t / p_{1961} x_t$ pour chacun des 39 biens, on forme les vecteurs de différences $\Pi_{t+1} - \Pi_t$, $(t = 1, \ldots, 24)$, pour chacun des biens et on en calcule les coefficients de corrélation deux à deux. Sans obtenir directement une partition complète des 39 biens, on peut cependant construire nos 8 groupes en admettant un certain seuil de tolérance. On dégage alors les groupes suivants - voir en appendice C la composition

---

*6 Barten-Geyskens (1975) ne considèrent que des systèmes de 5 biens.

des groupes -:

1. Ameublement
2. Tabac et boisson
3. Habillement
4. Loyer et loisirs
5. Produits pétroliers et services
6. Soins médicaux et éducation
7. Transports publics et transports privés
8. Nourriture

Comme le note Diewert (1974), les erreurs d'agrégation restent minimes si les prix élémentaires varient quasi-proportionnellement dans un bien composite: ceci laisse donc une lattitude pour construire des agrégats significatifs *7. Notons de plus que cette procédure permet de réduire la multicolinarité possible entre les variables exogènes du modèle de demande. Par contre, rien de tel n'est garanti par cette procédure pour le système d'évaluation. Il semble que l'agrégation avec l'hypothèse de budgétisation aurait cette propriété pour le système d'évaluations, puisque l'agrégation se fait alors selon des dépenses par biens. Rappellons cependant que cette forme implique des préférences homothétiques. Désirant appliquer les deux modèles aux

*7 Il est intéressant de noter qu'une solution systématique de ce problème revient à chercher les cliques dans un graphe dont les arêtes indiquent des coefficients de corrélation supérieurs à un seuil donné entre les biens-sommets. La solution dépendra alors du seuil choisi.

mêmes agrégats, notre choix biaise donc la comparaison en faveur du modèle de demande.

Notons $N = \{N_1, \ldots, N_8\}$ la partition correspondante des indices de 39 biens obtenue par la phase précédente. Ayant additionné les séries de dépenses sur les biens-correspondants de chaque groupe N_j, $(j = 1, \ldots, 8)$, on construit comme indice de prix un autre indice de Paasche,

$$(5.29) \qquad \Pi_j^t = \left(\sum_{i \in N_j} p_t^i \; x_t^i \right) \Big/ \left(\sum_{i \in N_j} p_{1961}^i \; x_t^i \right), \text{*8}$$

pour $j = 1, \ldots, 8$ et $t = 1, \ldots, 25$. Comme indice de volume, on prend la dépense exprimée en dollars constants, c'est-à-dire

$$(5.30) \qquad q_j^t = \sum_{i \in N_j} p_{1961}^i \; x_t^i ,$$

pour $j = 1, \ldots, 8$ et $t = 1, \ldots, 25$. Remarquons que ces indices vérifient,

$$(5.31) \qquad \sum_{j=1}^{8} \Pi_j^t \; q_j^t = \sum_{j=1}^{8} \sum_{i \in N_j} p_t^i \; x_t^i = m_t ,$$

---

*8 Dans la suite Π^t sera toujours défini par (5.29).

pour t = 1, ..., 25, c'est-à-dire qu'ils traduisent exactement la contrainte de budget de chaque période.

§ 2. La méthode d'estimation

a) la position du problème

Il est clair que les équations (5.5') et (5.28) ont la même structure, c'est-à-dire que leur estimation se ramènera à celle du modèle

(5.32) $$y_t = Ax_t + az_t + e_t \,,$$

pour t = 1, ..., 24. Par ailleurs:

- A est une matrice d'ordre (8×8) sur laquelle portent les restrictions,

(5.33) $$\tau' A = 0, \; A\,\tau = 0$$

(5.34) $$A = A'$$

(5.35) $$\xi' A \,\xi \leqslant 0, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{E}^n$$

qui traduisent, selon le cas, (5.6), (5.7), (5.8), (5.9) ou (5.23), (5.24), (5.25),

- a est un vecteur d'ordre (8 × 1) satisfaisant

$$\tau' a = \alpha \tag{5.36}$$

qui traduit (5.6) avec $\alpha = 1$ ou (5.26) avec $\alpha = 0$,

- y_t est le vecteur d'ordre (8 × 1) des variables endogènes contemporaines à t (t = 1, ..., 24), construites avec Π_t, q_t, m_t, q_{1961} d'après (5.5') ou (5.28) selon le système envisagé,

- x_t est le vecteur d'ordre (8 × 1) des variables exogènes contemporaines à t (t = 1, ..., 24), construites avec Π_t, q_t, q_{1961}, d'après (5.5') ou (5.28) selon le cas,

- z_t est un scalaire décrivant la variation de revenu réel de la période t (t = 1, ..., 24), construite à partir de Π_t, q_t, q_{1961},

- e_t est le vecteur d'ordre (8 × 1) des résidus contemporains à t, (t = 1, ..., 24).

Rappelons que sur la forme (5.32) les contraintes $\tau'A = 0$ et $\tau'a = \alpha$ sont respectées par construction, avec les paramétrisations des modèles.

Pour le système de fonctions de demande, l'estimation du modèle (5.32) a été faite sous les contraintes d'homogéméité et de symétrie - c'est-à-dire (5.33), (5.34) -, avec la méthode du maximum de vraisemblance par Barten (1969) et avec la méthode des moindres carrés linéaires sous contraintes linéaires par Park (1969), Byron (1970), Theil (1971), Lluch (1971), Deaton (1972), (1974) [*9], en suivant la procédure de Zellner (1962). L'estimation du système de demande sous les contraintes d'homogénéité, symétrie et négativité a d'abord été faite par Salvas-Bronsard, Leblanc, Zarra, Bronsard (1973), en imposant la contrainte de négativité sous forme de condition suffisante avec une contrainte linéaire et la méthode de Zellner (1962). Barten - Geyskens (1975) ont imposé cette contrainte avec la paramétrisation utilisant la décomposition de Choleski, telle que proposée par Lau (1973), et la méthode du maximum de vraisemblance. Gallant (1975) a dégagé une méthode d'estimation des systèmes d'équations simultanées par moindres carrés non linéaires avec contraintes non linéaires qui généralise les résultats de Zellner (1962). Relativement à la méthode du maximum de vraisemblance, cette méthode ne nécessite pas le calcul analytique des dérivées secondes. Nous l'utiliserons ici pour l'estimation des deux modèles avec une variante de la méthode de Lau (1974) pour impo-

*9 Nous citons ici les études qui, à notre connaissance, utilisent la version (5.5') du modèle de Rotterdam.

ser la négativité.

b) Décomposition de Choleski et formulation des contraintes

Lau (1974) rassemble les définitions et résultats suivants: une matrice carrée symétrique A admet une décomposition de Choleski s'il existe une matrice L triangulaire unitaire inférieure - c'est-à-dire, ayant une diagonale formée de 1 - et une matrice diagonale Δ , telles que $A = L \Delta L'$. Les valeurs sur la diagonale de Δ sont les valeurs de Choleski de A. Si de plus la matrice A est semi-définie négative, cette décomposition existe toujours et toutes les valeurs de Choleski sont négatives ou nulles et leurs signes respectent la signature de A.

Comparée à celle utilisant les vecteurs propres, cette décomposition a l'avantage de diminuer le nombre des paramètres à estimer et à manipuler aux seuls éléments de L et Δ. De plus, si on désire imposer simultanément toutes les contraintes, il devient inutile d'isoler les valeurs de Choleski *10: les résultats précédents permettent d'écrire $A = - DD'$ où $D = L \sqrt{-\Delta}$ dans le cas d'une matrice semi-définie négative. D est alors une matrice triangulaire inférieure dont les éléments sont à estimer pour avoir simultanément la symétrie et la (semi) négativité. Compte tenu de ce que $\tau' A = \tau' (-DD') = 0$ est respecté par construction, ceci évite d'imposer $A\tau = 0$ - A étant symétrique -

*10 Barten - Geskens (1975) font une estimation pas à pas avec cette décomposition, et isolent donc ces valeurs.

et diminue encore le nombre des paramètres à estimer sur D - et donc sur A -. Nous choisirons ainsi de ne pas estimer les éléments diagonaux de D et de les calculer à partir de $\tau' D = 0$. Nous procéderons de même pour le vecteur a: on estimera 7 paramètres et on calculera le huitième avec $\tau' a = \alpha$.

Sous ces conditions,le modèle (5.32) se réécrit donc sous la forme,

(5.37) $$y_t = - DD' x_t + \delta z_t + e_t$$

pour t = 1, ..., 24 et où: - $d_{jj} = - \sum_{i=1}^{j-1} d_{ij}$ pour j = 1, ..., 8,

- $d_{ij} = 0$ pour $8 > j > i$ et i=1,...,8,

- $\delta_i = a_i$ pour i = 1, ..., 7,

- $\delta_8 = \alpha - \sum_{i=1}^{7} a_i = a_8$,

qui internalise toutes les contraintes. Notons que réciproquement par rapport à (5.32), on a défini ainsi des fonctions $A = A(d_{ij})$ et $a = a(\delta_i)$. On pose:

.E la matrice d'ordre (24×8) ayant pour vecteurs-lignes les vecteurs de résidus e_t, $(t = 1, \ldots, 24)$,

.Y le vecteur d'ordre (192×1) composé des vecteurs y_t de variables endogènes, $(t = 1, \ldots, 24)$,

.X la matrice d'ordre (24×9) ayant pour vecteurs-lignes les vecteurs x_t, $(t = 1, \ldots, 24)$, bordés en neuvième colonne par l'élément z_t correspondant. Cette matrice est donc une matrice de variables exogènes.

.T le vecteur d'ordre (72×1) composé des 8 séquences: vecteur ligne de A - élément de a de la ligne correspondante. Ce vecteur contient donc tous les paramètres à estimer. Par (5.37), ses éléments sont également de la forme $T_k\ (d_{ij}, \delta_i)$ pour $k = 1, \ldots, 72$.

Sous cette notation, l'estimation du modèle par moindres carrés se ramène à minimiser dans l'espace des paramètres (d_{ij}, δ_j), c'est-à-dire dans $\mathbb{E}^{35}$ *11, la forme quadratique

(5.38) $$Q\ (d_{ij}, \delta_i) = (1/24)[Y - (I \otimes X)\ T\ (d_{ij}, \delta_i)]'(\Sigma^{-1} \otimes I)\ [Y - (I \otimes X)\ T\ (d_{ij}, \delta_i)]$$

*11 Il y a en effet $(n-1)\ (n+2)\ /2 = (7 \times 10)/2$ paramètres $(dij, \delta i)$ à estimer pour $n = 8$ - voir page 150-.

où Σ^{-1} est l'inverse de la matrice des variances - covariances des résidus.

c) Les étapes de l'estimation

Elles se regroupent en deux phases: la première consiste à estimer $\hat{\Sigma}$ la matrice des variances - covariances des résidus, la seconde à estimer les paramètres par les moindres carrés généralisés avec $\hat{\Sigma}$ (méthode d'Aitken). L'algorithme de minimisation utilisée dans ces deux phases est une version de l'algorithme de Powell modifiée par Zangwill (1967), qui est disponible dans la bibliothèque des routines IMSL (1974) sous l'intitulé ZXPOWL. Cet algorithme, partant d'une solution initiale, s'arrête lorsqu'entre deux itérations les modifications faites sur les paramètres ne permettent plus de diminuer la valeur de la fonction d'un pourcentage choisi comme seuil de précision. Cette routine ne nécessite pas le calcul analytique des dérivées premières de la forme à minimiser. Cependant,afin de vérifier la précision des solutions obtenues,nous avons calculé analytiquement les dérivées partielles premières de (5.38) et construit la routine évaluant les conditions du premier ordre de minimisation de (5.38) à la solution donnée par ZXPOWL. *12

---

*12 Rappelons que ce problème de minimisation est également soluble par la solution du système d'agrégations homogènes construit avec les conditions du premier ordre - sous réserve que les conditions du second ordre soient vérifiées -.

Formellement, l'estimation a suivi la procédure suivante:

Phase I. Estimation de Σ.

i) estimation de la forme (5.32) par moindres carrés ordinaires sans contraintes. On obtient ainsi (A_{mco}, a_{mco}) et E_{mco} tel que $E_{mco}\ \tau=0$.

ii) symétrisation de A_{mco} en formant $\tilde{A} = (\frac{1}{2})\ (A_{mco} + A'_{mco})$.

iii) définition négative de $\tilde{A}$ en formant $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A} - kI$ (avec $k > 0$).

L'étape ii) construit une matrice symétrique à partir de A_{mco}, l'étape iii) transforme cette matrice en une matrice définie négative en construisant une matrice à diagonale dominante. Ces deux étapes permettent de construire une solution initiale vérifiant les contraintes, qui est assez voisine de la solution finale.

iv) minimisation de (5.38) avec $\Sigma = I$. On utilise $\tilde{\tilde{A}}$ comme solution initiale de ZXPOWL. Cette étape nous fournit d^* et δ^*.

v) construction de A^* (d^*), a^* (δ^*) et E^*, ainsi que $\Sigma^* = E'^*\ E^*$.

Phase II. Estimation de A (d_{ij}), a (δ_j).

vi) inversion généralisée de Σ*. Σ* est singulière car $E^*\tau = 0$. On utilise alors $\Sigma^+ = [\Sigma^* + k\ \tau\tau']^{-1} - (1/k)\tau\tau'$, ($k > 0$) - voir Theil (1971 p. 272) - pour construire l'inverse de Moore-Penrose de Σ*. La valeur $k = 1$ a toujours été assez grande.

vii) minimisation de (5.28) avec $\Sigma = \Sigma^*$. On utilise A* (d*) et a* (δ*) comme solution initiale de ZXPOWL. Cette étape fournit d**et δ**.

viii) construction de A** (d**), a** (δ**) et E**, ainsi que $\Sigma^{**} = E^{**'} E^{**}$.

Phase III. Construction des statistiques.

ix) calcul des variances-covariances des éléments d**, δ**.

x) calcul des variances-covariances des éléments A** (d**), a** (δ**).

xi) construction des t de Students et χ^2.

§ 3. Les résultats

Ils sont tabulés dans l'ordre suivant:

Tableau Ia: Structure de p - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés ordinaires sans contraintes

Tableau Ib: Structure de q - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés ordinaires sans contraintes

Tableau IIa: Structure de p - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés généralisés non linéaires avec contraintes

Tableau IIb: Structure de q - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés généralisés non linéaires avec contraintes.

Sous chaque coefficient est inscrit le t de Student calculé. Les coefficients de corrélation (R^2), les coefficients de corrélation corrigés des degrés de liberté (R^2 cor.) et les statistiques Durbin-Watson (D.W) sont notés dans les dernières colonnes pour les estimés par moindres carrés ordinaires sans contraintes.

T A B L E A U Ia. *Structure de p - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés ordinaires sans contraintes.*

	b	B								R^2	$R^2_{cor.}$	D.W.
Ameublement	.1331 (6.196)	-.1381 (-2.534)	.0083 (.465)	.0735 (2.689)	.0826 (2.772)	.0106 (.415)	-.0070 (-.213)	-.0123 (-.340)	.0015 (.075)	.79	.67	2.62
Boissons et tabac	.0438 (2.358)	-.0007 (-.015)	-.0394 (-2.548)	-.0068 (-.289)	-.0386 (-1.499)	.0333 (1.515)	.0623 (2.180)	-.138 (-.441)	.0066 (.380)	.64	.45	2.60
Habillement	0.779 (4.816)	0.740 (1.805)	.0179 (1.327)	-0.476 (-2.314)	-.0684 (-3.051)	.0167 (.874)	.0125 (.501)	-.0179 (-.660)	-.0079 (-.524)	.90	.84	1.90
Loyers et loisirs	.1696 (4.347)	-.0014 (-.014)	.0120 (.369)	-.0144 (-.291)	-.0798 (-1.476)	-.0167 (-.361)	-.1361 (2.265)	.0441 (.671)	.0109 (.298)	.28	-.09	2.00
Produits pétroliers et services	.0627 (4.727)	-.0792 (-2.353)	-.0037 (-.335)	-.0159 (-.943)	.0239 (1.304)	-.0742 (-4.722)	.0455 (2.228)	.0755 (3.383)	.0198 (1.593)	.62	.42	1.72
Soins médicaux et éducation	.0749 (3.451)	-.0101 (-.183)	.0126 (.699)	.0232 (.842)	.0054 (.178)	-.0521 (2.026)	-.0303 (-.906)	.0127 (.347)	.0205 (1.013)	.46	.17	1.35
Transports privés transports public	.3668 (6.116)	.1195 (.785)	-.0149 (-.299)	.0946 (1.240)	.0544 (.653)	.0550 (.775)	-.2018 (-2.188)	-.1590 (-1.576)	-.0022 (-.040)	.85	.77	1.78
Nourriture	.0713 (1.429)	.0359 (.284)	.0072 (.173)	-.1066 (-1.679)	.0206 (.297)	.0273 (.462)	-.0171 (-.223)	.0708 (.844)	-.0491 (-1.053)	.69	.53	2.45

TABLEAU Ib. *Structure de q - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés ordinaires sans contraintes.*

	c	C								R^2	R^2 cor	D.W.
Ameublement	-.0829 (-2.279)	.0075 (.730)	.0219 (2.757)	.0511 (3.043)	.0321 (1.591)	-.0044 (-.497)	.0069 (1.202)	.0244 (2.347)	.0206 (1.852)	.79	.69	1.87
Boissons et tabac	-.0807 (-1.199)	-.0083 (-.439)	-.0566 (-3.850)	.1157 (3.722)	.0454 (1.215)	.0035 (.215)	-.0045 (-.423)	.0164 (.854)	-.0078 (-.377)	.70	.54	2.21
Habillement	.2327 (3.286)	-.0306 (-1.529)	.0037 (.237)	-.1197 (-3.659)	-.0959 (-2.440)	-.0246 (-1.432)	.0111 (.993)	-.0414 (-2.047)	-.0589 (-2.718)	.67	.50	2.39
Loyers et loisirs	-.4084 (-3.226)	.1149 (3.209)	.0265 (.958)	.1238 (2.117)	.1173 (1.669)	.0192 (.626)	-.0042 (-.210)	.0827 (2.287)	.1742 (4.497)	.74	.60	1.62
Produits pétroliers et services	-.0266 (-.521)	.0246 (1.702)	.0183 (1.637)	.0201 (.851)	.0047 (.167)	-.0530 (4.278)	-.0068 (-.847)	-.0003 (-.019)	.0302 (1.933)	.64	.47	2.17
Soins médicaux et éducation	-.0243 (-.691)	-.0057 (-.576)	.0106 (1.380)	.0221 (1.358)	.0136 (.695)	.0092 (1.074)	-.0027 (-1.478)	.0067 (.670)	.0111 (1.027)	.61	.40	1.35
Transports privés transports publics	-.1008 (-.879)	.0047 (.146)	.0160 (.640)	-.0212 (-.400)	.0832 (1.309)	.0256 (.930)	-.0122 (-.674)	.0083 (.253)	.0559 (1.594)	.45	.15	2.05
Nourriture	.4910 (2.654)	-.1070 (-2.046)	-.0404 (-.999)	-.1919 (-2.244)	-.2004 (1.951)	.0245 (.547)	.0124 (1.424)	-.0969 (1.831)	-.2253 (-3.979)	.71	.56	1.75

T A B L E A U IIa. *Structure de p - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés généralisés non linéaires avec contraintes.*

	b	B								
Ameublement	.1460 (8.328)	-.1516 (-3.627)	.0045 (3.467)	.0547 (2.935)	.0817 (3.615)	-.0039 (-.241)	-.0169 (-.722)	.0169 (.627)	.0146 (.813)	
Boissons et tabac	.0468 (3.359)	.0045 (3.467)	-.0369 (-2.938)	.0120 (1.092)	-.0108 (-.640)	.0048 (.518)	1.0264 (2.062)	.0012 (.058)	-.0013 (-.092)	
Habillement	.0587 (3.908)	.0547 (2.935)	.0120 (1.092)	-.0369 (-1.887)	-.0194 (-.929)	-.0014 (-.113)	.0122 (.734)	.0010 (.043)	-.0222 (-1.382)	
Loyers et loisirs	.2522 (7.173)	.0817 (3.615)	-.0108 (-.640)	-.0194 (-.929)	-.1733 (-3.801)	.0140 (.784)	.0059 (.256)	.0744 (1.509)	.0275 (.918)	$\chi^2 = 1.59$
Produits pétroliers et services	.0381 (4.453)	-.0039 (-.241)	.0048 (.518)	-.0014 (-.113)	.0140 (.784)	-.0658 (-4.088)	-.0029 (-.197)	.0503 (2.412)	.0050 (.398)	
Soins médicaux et éducation	.0828 (4.588)	-.0169 (-.722)	.0264 (2.062)	.0122 (.734)	.0059 (.256)	-.0029 (-.197)	-.0405 (-1.497)	-.0105 (-.369)	.0266 (1.545)	
Transports privés transports publics	.3046 (6.745)	.0169 (.627)	.0012 (.058)	.0010 (.043)	.0744 (1.509)	.0503 (2.412)	-.0105 (-.369)	-.1755 (-2.115)	.0422 (.988)	
Nourriture	.0506 (1.458)	.0146 (.813)	-.0013 (-.092)	-.0222 (-1.382)	.0275 (.918)	.0050 (.398)	.0266 (1.545)	.0422 (.988)	-.0924 (-2.605)	

TABLEAU IIb. *Structure de q - substitution - complémentarité au Canada: Estimation par moindres carrés généralisés non linéaires avec contraintes*

	c	C								
Ameublement	-.0230 (2.994)	-.0114 (-1.589)	-.0075 (-1.186)	.0211 (2.241)	.0008 (.089)	.0015 (.210)	-.0063 (-1.674)	.0088 (1.246)	-.0070 (-.745)	
Boissons et tabac	-.0026 (-.217)	-.0075 (-1.186)	-.0563 (-3.757)	.0382 (2.688)	-.5069 (-.339)	.0169 (1.815)	.0000 (.005)	.0093 (.817)	.0045 (.311)	
Habillement	-.0131 (-.871)	.0211 (2.241)	.0382 (2.688)	-.0596 (-2.136)	-.0022 (-.115)	-.0126 (-.940)	.0149 (2.171)	.0005 (.034)	-.0003 (-.018)	
Loyers et loisirs	.0532 (2.200)	.0008 (.089)	-.5069 (-.339)	-.0022 (-.115)	-.0751 (-2.709)	-.0016 (-.132)	.0001 (.021)	.0058 (.362)	.0772 (3.048)	$\chi^2 = 4.8$
Produits pétroliers et services	-.0025 (-.300)	.0015 (.210)	.0169 (1.815)	-.0126 (-.940)	-.0016 (-.132)	-.0524 (-3.967)	.0028 (.559)	.0085 (.920)	.0369 (3.202)	
Soins médicaux et éducation	.0203 (3.681)	-.0063 (-1.674)	.0000 (.005)	.0149 (2.171)	.0001 (.021)	.0028 (.559)	-.0072 (-2.091)	-.0060 (-1.187)	.0016 (.239)	
Transports privés transports publics	.0276 (1.601)	.0088 (1.246)	.0093 (.817)	.0005 (.034)	.0058 (.362)	.0085 (.920)	-.0060 (-1.187)	-.0477 (-2.612)	.0207 (1.115)	
Nutrition	-.1059 (3.418)	-.0070 (-.745)	.0045 (.311)	-.0003 (-.018)	.0772 (3.048)	.0369 (3.202)	.0016 (.239)	.0207 (1.115)	-.1337 (-3.535)	

a) Le système de demande

Les moindres carrés ordinaires sans contraintes donnent des estimés positifs pour les huit propensions marginales à consommer des biens, dont sept le sont significativement (au seuil de 95%). Tous les biens sont normaux ou supérieurs. L'existence de biens inférieurs aurait été surprenante à ce niveau d'agrégation. La propension marginale à consommer des transports privés et publics est la plus élevée (.3668), celle des boissons et tabac, la plus faible (.0438). Tous les éléments diagonaux de la matrice de Slutsky (paramétrisée) sont négatifs; ceci est en accord avec le résultat fondamental de la théorie de la demande (à ce niveau d'agrégation). Parmi les éléments hors-diagonaux, habillement et ameublement sont significativement P - substituts. Seuls produits pétroliers et soins médicaux sont significativement divergents (.0455 et .0521). Nous donnerons une explication partielle à ceci dans la suite.

Ces résultats préliminaires encouragent à imposer les contraintes découlant de la théorie. L'estimation par moindres carrés généralisés avec contraintes confirme cette impression: on constate une remarquable stabilité générale dans les coefficients.

Tout d'abord, les propensions marginales à consommer restent toutes positives et leur ordre de grandeur diffère très peu par rapport à ceux de la première étape. Hormis celle pour la nourriture, elles sont toutes significatives.

On a maintenant 5 couples de biens significativement P-substituts.

- Ameublement et boissons-tabac (.0045),
- Ameublement et habillement (.0547),
- Ameublement et loyer-loisir (.0817),
- Boissons-tabac et soins médicaux - éducation (.0264),
- Transports et produits pétroliers - services (.0505).

L'interprétation de ces relations n'est pas directe. Nous n'avons pas construit les agrégats pour mesurer si tel groupe de biens très identifié est substitut de tel autre. - c'est-à-dire en faisant des hypothèses sur la structure de la séparabilité des préférences -. Le critère de Hicks conduit à grouper ensemble des biens de nature assez diverse: ceci explique en partie la cinquième relation et l'incohérence mentionnée plus haut.

Bien entendu, la contrainte de symétrie a fait disparaître toute divergence et celle de négativité a maintenu tous les coefficients diagonaux négatifs. Par ailleurs le test du χ^2,(χ^2 = 1.9), confirme notre première impression que l'information contenue dans les contraintes n'est pas incompatible avec celle contenue dans l'échantillon.

Notons un point intéressant à ce sujet. Il semble que plus le système est agrégé, plus les deux informations concordent. Theil (1971 p. 337), obtient directement des matrices de Slutsky, semi-définies en imposant seulement la symétrie sur des agrégations en 4 groupes de biens. Nous avons eu la même expérience avec nos données. Le fait que cette propriété se dilue avec la désagrégation n'est pas surprenant du point de vue statistique, mais a certainement aussi une interprétation économique [*13]. On peut se demander si, au niveau de 4 biens composites, il n'y a pas quasi-identité entre biens et caractéristiques, conformément à l'approche de Lancaster (1966), (1971), cependant que cette propriété s'affaiblirait naturellement avec l'accroissement du nombre de biens considérés. Notons que cette remarque va aussi dans le sens d'une justification des hypothèses de base du schéma classique de la théorie du consommateur.

b) Le système d'évaluation

Par moindres carrés ordinaires, on obtient 6 effets-revenus duaux négatifs dont 3 significativement, alors que 2 sont signifi-

---

*13 Cette question a été soulevée par un arbitre anonyme de la revue European Economic Review, au sujet des résultats de Salvas-Bronsard, Leblanc, Zarra, Bronsard (1973).

cativement positifs. Notons que l'interprétation de ces effets-revenus dans l'espace des quantités n'est pas directe: le signe négatif signifie une relation d'infériorité, mais celle-ci ne correspond pas à celle dans l'espace des valeurs. Par ailleurs, 5 éléments diagonaux de la matrice C sont négatifs et aucun n'est significativement positif: ceci donne donc un préjugé favorable aux résultats de la théorie de l'évaluation. Parmi les éléments hors-diagonaux, nourriture et habillement sont q - substituts, cependant que deux couples sont divergents:

- Habillement et loyer-loisir (-.0959 et .1238),

- Nourriture et loyer-loisir (.1742 et -.2004).

Avec l'estimation par moindres carrés généralisés et contraintes, la structure des effets-revenus duaux change. Cette instabilité peut provenir de la co linéarité entre $\check{\omega}$ dx' et p'dx, que la paramétrisation n'a pas réussi à atténuer suffisamment. (En fait, cinq des coefficients de corrélation partielle sont supérieurs à .6). La matrice C présente maintenant 5 couples de q - complémentaires:

- Ameublement et habillement (.0211),

- Boissons - tabac et habillement (.0382),

- Habillement et soins médicaux - éducation (.0149),
- Loyers - loisirs et nourriture (.0772),
- Produits pétroliers - services et nourriture (.0369).

La contrainte de symétrie a fait disparaître toute divergence et celle de définition de C a renforcé la négativité des éléments diagonaux. Là encore, l'information introduite avec ces contraintes n'est pas incompatible avec celle contenue dans l'échantillon: un χ^2 de 4.8 le confirme.

c) Une première comparaison des deux modèles

Le tableau III résume les résultats. Ils ne peuvent cependant pas être comparés directement pour différentes raisons. D'abord, les deux paramétrisations ne sont pas parfaitement duales. Ensuite, le choix de la normalisation a été très empirique, ce qui est une faiblesse du modèle d'évaluation. Finalement, Hicks (1956 ch. 16) souligne que les définitions de p et q - substitutions peuvent logiquement diverger. Il remarque cependant que ces cas devraient être peu fréquents. Hormis pour les éléments diagonaux, on constate que ce fait est assez bien vérifié ici. Un seul couple de biens s'oppose selon les deux définitions; pour les autres paires, les éléments significatifs s'évitent, mais ne se contredisent pas - voir tableau III. -

TABLEAU III. *Structure comparée de substitution - complémentarité*

	1	2	3	4	5	6	7	8
1. Ameublement		p-subst	p-subst q-compl	p-subst				
2. Boissons et Tabac	p-subst					p-subst		
3. Habillement	p-subst q-compl					q-compl		
4. Loyers et loisirs	p-subst							q-compl
5. Produits pétroliers et services							p-subst	q-compl
6. Soins médicaux et éducation		p-subst	q-compl					
7. Transports privés transports publics					p-subst			
8. Nourriture				q-compl	q-compl			

Compte tenu de cette dernière remarque, on peut estimer les résultats obtenus comme satisfaisants. Pour corroborer la remarque de Hicks, on peut noter que les contraintes d'homogénéité $\tau'B = 0$ et de négativité ont tendance à biaiser vers la p - substitution dans l'espace des valeurs, cependant que les contraintes correspondantes dans l'espace des biens biaisent vers la q - complémentarité. On a obtenu en effet 5 p - substitutions et 5 q - complémentaires significatifs.

C O N C L U S I O N

Le domaine de validité des résultats obtenus dans ce chapitre est limité par deux types d'hypothèses : les hypothèses du modèle théorique et celles nécessaires à son estimation. Nous discuterons ici des secondes.

D'abord les tests statistiques ne permettent pas de rejeter ces résultats comme n'étant pas une première approximation valable de la réalité. Plusieurs améliorations peuvent cependant être apportées qui permettraient de diminuer le poids des hypothèses d'estimation relativement à celle du modèle théorique dans le processus d'application.

L'estimation avec plusieurs séries de revenus permettrait d'alléger les hypothèses d'agrégation sur les consommateurs en reportant celles-ci sur des groupes homogènes, à partir de l'estimation des équations obtenues dans la dernière section du Chapitre III. - (3.27) et (3.43) -. Toute la procédure d'estimation resterait valable dans ce cas.

Le choix d'autres paramétrisations pour le système d'évaluations en utilisant peut-être de l'information extérieure pour aider à spécifier la règle de normalisation améliorerait certainement les performances de ce modèle.

Le choix d'autres formes fonctionnelles pour les fonctions d'utilité ou des mécanismes de choix à plusieurs étapes sont également prometteurs.

L'obtention de données concentrées sur une plus courte durée permettrait d'améliorer l'approximation.

Ces améliorations dans les estimations constituent un effort complémentaire à celui des perfectionnements du modèle théorique. Il semble cependant que ce soit de ce côté que l'on puisse attendre les progrès les plus intéressants.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Nous avons donc élaboré la théorie de l'évaluation et son applicabilité au même niveau de générabilité que la théorie de la demande. Utilisant le même corps d'hypothèses (dont l'une n'était pas explicitée), il était prévisible d'arriver à ce résultat.

Plusieurs directions de recherches prometteuses s'ouvrent si on sort de ce corps d'hypothèses. Certaines ont déjà été explorées avec le modèle de demande; toutefois, leur réexploration complémentaire avec le modèle d'évaluation sera certainement fructueuse. On peut citer entre autres:

- l'élargissement des hypothèses techniques nécessaires à l'existence de fonctions dans les deux espaces, en créant une dualité "souple" à l'aide de correspondances,

- l'extension vers le modèle de Hicks - Lancaster et la séparabilité assymétrique,

- l'extension du modèle d'évaluation vers les fondements microéconomiques de la courbe de Phillips,

- l'extension du modèle d'évaluation dans une économie monétaire. La contrainte de disponibilité de monnaie permettant de définir la condition de référence, il est possible de construire le modèle d'évaluation dual du modèle de demande de Bronsard – Lacroix (1973),

- la dynamisation du modèle et éventuellement la prise en compte des anticipations permettraient de construire un modèle explicatif - en équilibre partiel - du mécanisme d'inflation.

Ces extensions ne doivent cependant pas faire oublier que les résultats développés avec notre corps d'hypothèses permettent également de généraliser les résultats de certains modèles classiques d'équilibre général, comme nous l'avons indiqué en introduction à la première partie.

A P P E N D I C E   A

L'ÉQUIVALENCE A LA LIMITE DES EFFETS DE SUBSTITUTION DE SLUTSKY ET HICKS [*1]

Nous montrerons ce point en deux étapes. Nous verrons d'abord que l'effet-revenu compensatoire de Slutsky est un majorant de celui de Hicks, mais que la différence est du second ordre. Nous verrons ensuite que la matrice des effets de substitution au sens de Slutsky et celle au sens de Hicks sont identiques.

Pour Slutsky (1915 p. 42), "l'accroissement dp_i du prix, accompagné d'un accroissement du revenu égal à la perte apparente, peut être appelé variation compensée du prix". Dans le texte, "la perte apparente" est égale à $ds = p_i\ dx_i$. Etendue à n dimensions, la variation compensée de prix est définie comme dp telle que $p'dx = 0$, c'est-à-dire encore telle que $dm = x'dp$, soit la variation compensatoire de revenu. Notons dm_S cette variation compensatoire, c'est-à-dire

(A.1) $$dm_S = x'dp$$

Pour Hicks (1946 p. 45), "l'effet de substitution se rapporte à une variation du prix relatif. On peut isoler cet effet à condition de ne considérer que les variations qui laissent le consommateur sur la même courbe d'indifférence. Les autres variations peuvent se ramener à une variation de ce type combinée à une modification proportion-

*1 Katzner (1970 p. 56-57) développe aussi ce point. Schultz (1938), Bouchard (1972)... traitent également de cette question.

nelle de tous les prix; cette dernière, équivaut à un changement du revenu réel, induisant un pur effet de revenu".

Considérons la courbe d'utilité indirecte v définie par $v = v\ (p, m) = u\ (f(p, m))$. La courbe d'indifférence dans l'espace des valeurs correspondant à une courbe d'indifférence dans l'espace des quantités, c'est-à-dire

$$\text{(A.2)} \qquad \bar{u} = u\ (x) = v\,(x\ (p,m)),$$

peut s'écrire comme

$$\text{(A.3)} \qquad m = \gamma\ (p,\ \bar{u})$$

par application du théorème des fonctions implicites - Dieudonné (1960)-. Notant dm_H la variation compensatoire de revenu au sens de Hicks, on obtient par un développement de Taylor de (A.3), au voisinage d'un équilibre donné,

$$\text{(A.4)} \qquad dm_H = x'dp + (\tfrac{1}{2})\ dp'\Gamma dp + \varepsilon^3\ (dp).$$

En effet, on a par l'identité de Roy,

$$\partial\gamma\ /\partial p = -(\partial v\ /\partial p)\ /(\partial v/\partial m) = x.$$

Alors, $\Gamma = [\partial^2 \gamma / \partial p^2]$ est bien la matrice des effets de substitution au sens de Hicks. (A.1) et (A.4) permettent d'écrire

$$dm_H - dm_S = (\tfrac{1}{2})\, dp' \,\Gamma\, dp + \varepsilon^3 (dp). \tag{A.5}$$

Les deux définitions du revenu compensatoire diffèrent. Le revenu compensatoire au sens de Slutsky est un majorant de celui au sens de Hicks- par la semi définition de Γ. La différence est du second ordre en dp.

Reprenons maintenant les conditions du premier ordre de l'équilibre du consommateur,

$$ux - \lambda p = 0, \tag{A.6}$$

$$p'x - m = 0. \tag{A.7}$$

L'application du théorème des fonctions implicites - Dieudonné (1960, p. 275) permet d'écrire après quelques transformations - voir (2.13) -

$$\begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/\lambda)K & -f_m \\ -f'_m & \lambda_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & o \\ o & 1 \end{bmatrix} \tag{A.8}$$

où K est la matrice des effets de substitution au sens de Slutsky*2.

---

*2 Nous supposons que nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites.

Considérons maintenant ce système,

(A.6) $$u_x - \lambda p = 0,$$

(A.9) $$-u(x) + \bar{u} = 0,$$

où la seconde équation implique la conservation du niveau de satisfaction. L'application du théorème des fonctions implicites à ce système permet de construire des fonctions de demande $x = x(p, \bar{u})$ ainsi que $\lambda = \lambda(p, \bar{u})$. La seconde partie du théorème des fonctions implicites permet d'écrire [*2],

(A.10) $$\begin{bmatrix} \partial x(p,\bar{u}) / \partial p & \partial x(p,\bar{u}) / \partial u \\ \partial \lambda(p,\bar{u}) / \partial p & \partial \lambda(p,\bar{u}) / \partial u \end{bmatrix} \equiv - \begin{bmatrix} U & -p \\ -u'_x & o \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda & o \\ o & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire encore,

(A.11) $$\begin{bmatrix} I_n & o \\ o & 1/\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & -p \\ -u'_x & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x(p,\bar{u}) / \partial p & \partial x(p,\bar{u}) / \partial u \\ \partial \lambda(p,\bar{u}) / \partial p & \partial \lambda(p,\bar{u}) / \partial u \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & o \\ o & 1/\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I & o \\ o & -1 \end{bmatrix}.$$

---

* 2 Nous supposons que nous sommes dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites.

On obtient encore

$$(A.12)\quad \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x\ (p,\bar{u})/\partial p & \partial x\ (p,\bar{u})/\partial u \\ \partial \lambda\ (p,\bar{u})/\partial p & \partial \lambda\ (p,\bar{u})/\partial u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/\lambda)I & o \\ o & -\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & o \\ o & 1 \end{bmatrix}$$

qui s'écrit finalement

$$(A.13)\quad \begin{bmatrix} U & -p \\ -p' & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1/\lambda)\ \partial x\ (p,\bar{u})/\partial p & -\lambda\partial x\ (p,\bar{u})/\partial u \\ (1/\lambda)\ \partial \lambda\ (p,\bar{u})/\partial p & \lambda\partial \lambda\ (p,\bar{u})/\partial u \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_n & o \\ o & 1 \end{bmatrix} .$$

Par unicité de l'inverse, on obtient finalement avec (A.8) et (A:13),

$$(A.14)\qquad \partial x\ (p,\bar{u})\ /\ \partial p\ \equiv\ K$$

où $[\partial x\ (p,\bar{u})/\partial p]$ est la matrice des effets de substitution au sens de Hicks.

Ceci confirme que les deux définitions et les deux décompositions sont équivalentes à la limite.

APPENDICE B

CONTOURS DE SCITOWSKI - DEBREU

Définissons un contour de Scitowski-Debreu - voir Debreu (1959, p. 102) - dans l'espace desquantités, comme l'ensemble des consommations totales (minimales) telles que chaque individu ayant un niveau de satisfaction donné, se maximise sous des systèmes de prix non différentiés.

Ce contour est une hypersurface dans l'espace X. Ainsi si $\mathcal{D}^b$ définit la surface d'indifférence de niveau $\bar{u}^b$ de l'individu b, c'est-à-dire $\mathcal{D}^b = \{x^b \in X, | \; u(x^b) = \bar{u}^b\}$, alors $\mathcal{D} = \sum_{b=1}^{\ell} \mathcal{D}^b$.

$\mathcal{D}$ étant la somme ensembliste de courbes convexes dans X, est également convexe. Par contre $\mathcal{D}$ ne caractérise pas un système de surfaces d'indifférences collectives. Il suffit en effet de considérer des distributions différentes de niveaux de vie $\{u^1, \ldots, u^\ell\}$, pour obtenir des contours qui s'intersectent. $\mathcal{D}$ appartient également à la famille des contours de Scitowski - voir De Graaf (1957 p. 46)-, associés à la distribution $\{u^1, \ldots, u^\ell\}$, des niveaux d'utilités.

Considérons un processus de construction de $\mathcal{D}$. Si $(x^{*1}, \ldots, x^{*\ell})$ sont les consommations individuelles face à un système de prix p* unique avec la contrainte que chaque individu b a un niveau de vie pré-assigné, alors $x^* = \sum_{b=1}^{\ell} x^{*b}$ appartient au contour de

Scitowski-Debreu associé. Cependant comme les tangentes en x^{*1} à $\mathcal{D}^1$, x^{*2} à $\mathcal{D}^2$, ..., sont colinéaires car normales au vecteur prix p*, la tangente en x* à la surface-somme $\mathcal{D}$ est également normale au vecteur prix p*.

Cette construction revient donc à sommer vectoriellement dans X, les points des surfaces d'indifférences où les tangentes sont colinéaires.

Ce schéma de construction est également utilisé pour l'agrégation des ensembles de production en théorie de l'optimum (voir Malinvaud (1971 p. 87)). La figure I illustre ce principe dans le cas de deux biens et deux individus.

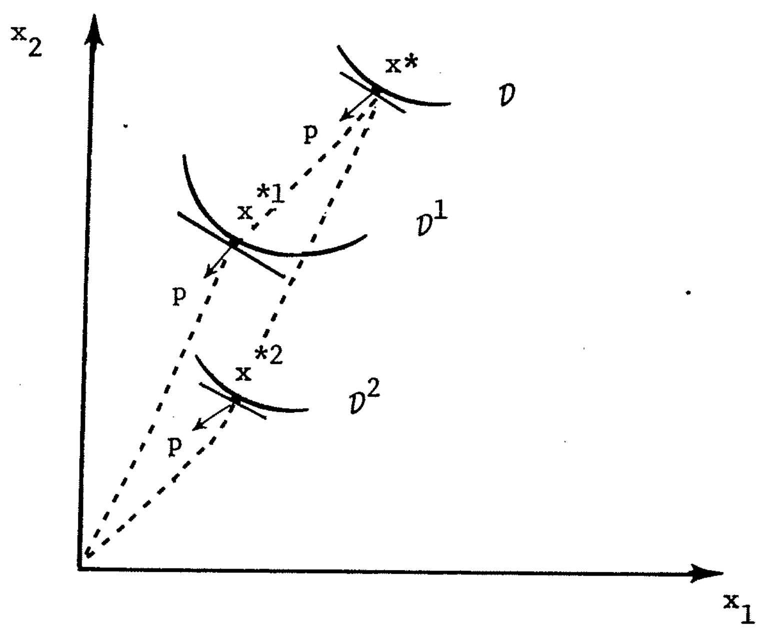

FIGURE I. *Cas de deux biens et deux individus.*

Sauf cas particulier, la matrice hessienne de $\mathcal{D}$ en x^* n'est pas la somme des matrices hessiennes B_n^h des contours d'indifférences $x_n^h(x) = \mu_n(x_{(n)}, \bar{u}^h)$ évalué en x^{*h} (dans les notations de la Section I du Chapitre III). On a en effet:

$$x_n^* = \sum_b x_n^{*b} = \sum_b \mu_n^b (x_{(n)}^{*b}, \bar{u}^b)$$

$$= \phi (x_{(n)}^{*1}, \ldots, x_{(n)}^{*\ell}, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\ell)$$

qui est différent en général de $\psi (\sum_b x_{(n)}^{*b}, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\ell)$.

Caractérisons $\mathcal{E}$, le contour dual de $\mathcal{D}$ dans l'espace des valeurs. Soit l'équation

$$u^b (f^b (p, m^b)) - \bar{u}^b = 0, \tag{B.1}$$

où $x^b = f^b (p, m^b)$ est le système de demande du consommateur b. On a

$$\frac{\partial u^b}{\partial m^b} = \frac{\partial u^b}{\partial x^b} \frac{\partial f^b}{\partial m^b} = \lambda \tag{B.2}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange différent de 0. Par le théorème des fonctions implicites (Dieudonné (1960)), il existe une fonction $m^b = \gamma^b (p, \bar{u}^b)$ définie dans un voisinage de $(p, \bar{u}^b)$, qui est solution en m^b de l'équation (B.1). De plus cette solution est unique et localement continuement différentiable, avec en particulier,

(B.3) $$\frac{\partial \gamma^b}{\partial p} = -x^b.$$

Notons $\mathcal{E}^b$, l'hypersurface de dimension (n+1) décrite dans $P \times M = \{(p, m), | \; p \in P, m \in M\}$ par $m^b = \gamma^b (p, \bar{u}^b)$. Comme par ailleurs $m^b = p'x^b$, γ^b est homogène de degré 1 en p. Ainsi à x^{*b} appartenant à $\mathcal{D}^b$, correspond un rayon $\theta (m^b, p) \in \mathcal{E}^b$, $(\theta > 0)$ dans $P \times M$. Cette correspondance est biunivoque par l'unicité de la solution de (B.1).

La figure II donne une illustration de cette correspondance dans le cas de deux biens:

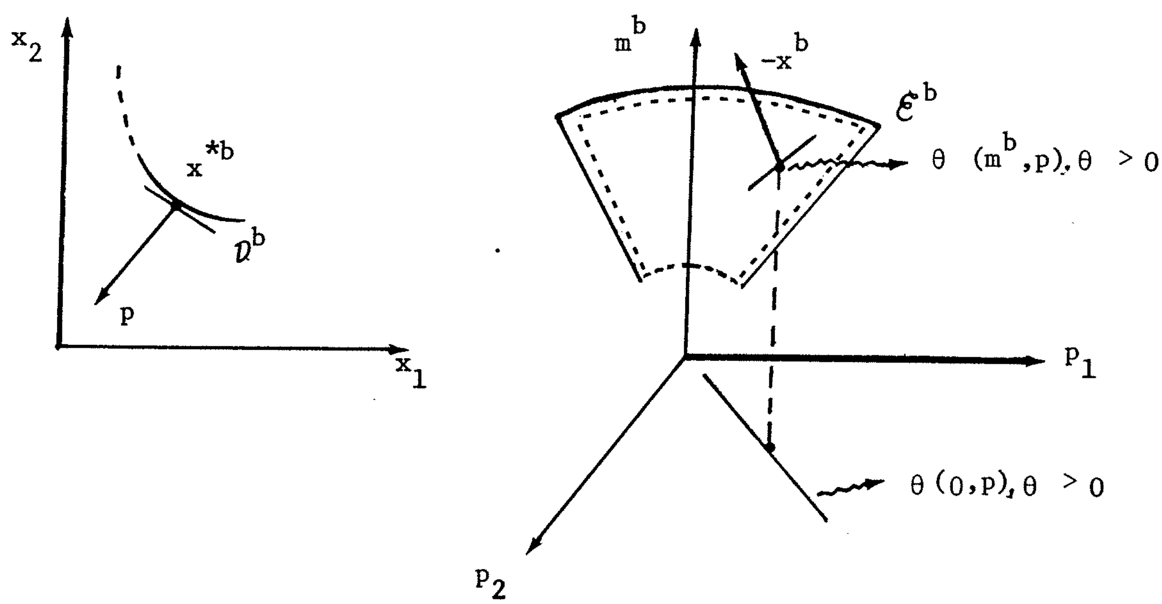

FIGURE II. *Correspondance entre $\mathcal{D}^b$ et $\mathcal{E}^b$.*

On peut donc construire ℓ surfaces d'indifférences $\mathcal{E}^b$ correspondant de façon biunivoque aux $\mathcal{D}^b$ avec l'ensemble $\{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\ell\}$. Au point $x^* = \sum_{b=1}^{\ell} x^{*b} \in \mathcal{D}$ correspond de manière biunivoque le rayon $\theta\ (p, \sum_b m^{*b})$ -par l'unicité de p -, de $\mathcal{E} = \sum_b \mathcal{E}^b$, décrit par $m^* = \sum_b m^{*b} = \sum_b \gamma^b\ (p, \bar{u}^b)$.

$\mathcal{E}$ est le contour - hypersurface de $P \times M$ -, de Scitowski-Debreu dans l'espace des valeurs correspondant à $\mathcal{D}$ le contour de Scitowski-Debreu dans l'espace des quantités. Cette correspondance est biunivoque par construction si la même distribution $\{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\ell\}$ est conservée.

Comme nous l'avons montré dans la Section I du Chapitre III, la matrice de Slutsky K^b évaluée en $\theta\ (p^*, m^{*b})$, $(\theta > 0)$, est la matrice hessienne de $\mathcal{E}^b$ sur ce rayon, de $m^b = \gamma^b\ (p, \bar{u}^b)$. Alors $K = \sum_b K^b$ est aussi la matrice hessienne de $\mathcal{E}$ sur le rayon $\theta\ (p^*, \sum_b m^{*b})$, $(\theta > 0)$ car on a bien par l'unicité du prix:

$$m = \sum_{b=1}^{\ell} m^b = \sum_{b=1}^{\ell} \gamma^b\ (p, \bar{u}^b) = \xi\ (p, \bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^\ell).$$

Sous la semi définition négative des K^b, les surfaces d'indifférence $\mathcal{E}^b$ sont concaves; sous celle de K, le contour de Scitowski-Debreu $\mathcal{E}$ est aussi concave.

A P P E N D I C E   C

LISTE DES BIENS ÉLÉMENTAIRES , COMPOSITION DES AGRÉGATS ET DONNÉES.

On distingue entre : Service (S), Non durable (N.D), Semi durable (S.D), Durable (D).

I. Liste des 39 biens élémentaires

1. Nourriture et boissons non alcooliques (N.D)
2. Boissons alcooliques (N.D)
3. Tabac (N.D)
4. Habits hommes et garçons (S.D)
5. Habits femmes et enfants (S.D)
6. Chaussures et entretien (S.D)
7. Loyer estimé (S)
8. Loyer payé (S)
9. Autres dépenses de logement (S)
10. Electricité (N.D)
11. Gaz (N.D)
12. Autres combustibles (N.D)
13. Meubles, tapis et autres revêtements du sol (D)
14. Appareils ménagers (D)
15. Equipement ménager, semi durable (S.D)
16. Equipement ménager non durable (N.D)
17. Blanchissage et teinturerie (S)
18. Services domestiques (S)

19. Autres services ménagers (S)
20. Soins médicaux (S)
21. Soins hospitaliers et assimilés (S)
22. Autres dépenses et soins médicaux (S)
23. Produits pharmaceutiques et articles divers (N.D)
24. Automobiles neuves et d'occasion (D)
25. Réparations et pièces détachées (D)
26. Essence, huile et graisse (N.D)
27. Autres services attachés à l'automobile (S)
28. Transports (S)
29. Autres moyens de communication (S)
30. Récréations, sports et équipement de camping (D)
31. Livres, journaux et magazines (S.D)
32. Services de récréation (S)
33. Education et services culturels (S)
34. Bijoux, montres et réparations (S.D)
35. Articles de toilette et cosmétiques (N.D)
36. Soins personnels (S)
37. Dépenses dans les restaurants et hotels (S)
38. Services financiers et services légaux (S)
39. Dépenses d'opération de société à but non lucratif (S).

II. Composition des agrégats

-Ameublement : 13-14-18-19-38

-Boissons et tabac : 2-3

-Habillement : 4-5-6-17-35-36

-Loyers et loisirs : 7-8-9-16-30-31-32-34

-Produits pétroliers et services : 10-11-12-26

-Soins médicaux et éducation : 20-21-22-23

-Transports privés et transports publics : 15-24-25-27-28-29-37

-Nourriture : 1

III. Données

Elles sont disponibles dans la banque de données C.A.N.S.I.M. (Système Canadien d'information socio-économique), construite par Statistique Canada. Les données utilisées apparaissent sous les intitulés:

- "Personal Expenditure on Consumer Goods and Services, Annually from 1947 in Millions of Current Dollars".

- "Personal Expenditure on Consumer Goods and Services, Annually from 1947 in Millions of Constant Dollars (base 1961)."

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été écrite sous la direction du professeur Camille Bronsard. Sa porte m'a toujours été ouverte et j'ai pu ainsi bénéficier de son enseignement de qualité, de nombreuses discussions stimulantes... et de sa patience remarquable.

J'ai eu l'occasion de travailler aussi avec le professeur Salvas-Bronsard et je tiens à l'assurer de l'intérêt que j'en ai retiré.

Mes camarades David MacDonald et Pierre Lefebvre furent de gais compagnons de route.

Joëlle mon épouse, et nos enfants ont largement contribué par leur affection de tous les jours.

Finalement, les Echanges France-Québec, le Conseil des Arts du Canada, le Département de Science Economique de l'Université de Montréal, ont aidé sous des formes diverses à différentes étapes de ce travail, à mon bien-être matériel. Le Centre de Calcul de l'Université de Montréal a supporté les coûts des travaux sur ordinateur.

Précédemment, le regretté professeur Georges Gaudot et les professeurs Pietro Balestra et Claude Ponsard ont participé à ma forma-

tion à l'Université de Dijon.

Mes parents ont fait beaucoup de sacrifices pour me donner ma chance et le regretté Michel Nestrigue m'a donné deux années.

M'excusant auprès de ceux que je n'ai pas cités mais que je n'oublie pas, je remercie tous et chacun pour le rôle qu'il a joué dans les conditions favorables dont j'ai bénéficié tout au long de ma formation.

Je suis reconnaissant aux professeurs Maurice Bouchard et Michel Truchon qui ont accepté d'être membres du jury de cette thèse. Qu'ils soient assurés que leurs critiques seront prises en considération pour l'amélioration de ce travail.

B I B L I O G R A P H I E

BIBLIOGRAPHIE

ALLAIS, Maurice (1943) - *Traité d'Economie pure* -, Imprimerie Nationale et Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1952. Seconde édition de - *l'Economie pure*-, Ateliers Industria, 1943.

ALLAIS, Maurice (1968), *L'Economie en tant que Science*, Revue d'Economie Politique, (janvier - février 1968), p. 5-30.

ALLEN, R.G.D. (1934), *A Reconsideration of the Theory of Value, II.* Economica N.S. 1, (mai 1934), p. 196-219.

ANTONNELLI, Giovanni B. (1886) - *Sulla Theoria Matematica della Economia Politica* -, Nella Tipografia del Folchetto, Pisa, 1886. Traduction anglaise, *On the Mathematical Theory of Political Economy*, par J.S. Chipman et A.P. Kirman, chapitre 16 de -*Preferences, Utility and Demand* - édité par J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenshein, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, 1971.

ARROW, K.J. et ENTHOVEN, A.C. (1961), *Quasi-concave Programming,* Econometrica, 29, (1961), p. 779-800.

ARROW, Kenneth (1963) - *Social Choice and Individual Values* -, Second Edition, Yale University Press, New Haven, (1963).

BARTEN, Anton (1964), *Consumer Demand Functions Under Conditions of Almost Additive Preferences,* Econometrica, 32, (1964), p. 1-38.

BARTEN, Anton (1967), -*The Econometrics of a Complete System of Demand Equations* -, cours polycopié, Université Catholique de Louvain, 1967.

BARTEN, Anton (1969), *Maximum Likelyhood Estimation of a Complete System of Demand Equations,* European Economic Review, 1, (1969), p. 7-73.

BARTEN, Anton (1971), *Preference and Demand Interactions Between Commodities,* Schaarste en Welwaart, Opstellen ongeboden ann Prof. Dr. P. Hennipman, H.E. Stenfert Ksoese, N.V., 1971.

BARTEN, Anton (1974), *Complete Systems of Demand Equations: Some Thoughts About Aggregation and Functional Form,* Recherches Economiques de Louvain, 40, (1974), p. 1-18.

BARTEN, Anton (1975), *The Systems of Consummer Demand Function Approach: A Review,* Communication au troisième Congrès Mondial de la Société d'Econométrie, Toronto,(1975).

BARTEN, A.P., KLOEK, T. et LEMPERS, F.B. (1969), *A Note on a Class of Utility and Production Functions Yielding Everywhere Differentiable Demand Functions,* Review of Economic Studies, 36, (1969), p. 109-111.

BARTEN, A.P. et GEYSKENS, E. (1975), *The Negativity Condition in Consumer Demand,* European Economic Review, 6, (1975), p. 227-260.

BALESTRA, Pietro (1972) - *Calcul Matriciel pour économistes-,* Editions Castella, Albeuve, Suisse, 1972.

BERGE, Claude (1966) - *Espaces Topologiques, Fonctions multivoques -,* Dunod, Paris, 1966.

BLACKORBY, C., PRIMONT, D., RUSSEL, R.R. (1975a), *Some Simple Remarks on Duality and the Structure of Utility Functions,* Journal of Economic Theory, 11, (1975), p. 155-160.

BLACKORBY, C., PRIMONT,D., RUSSEL, R.R. (1975b), *Budgeting, Decentralization and Aggregation,* Annals of Economic and Social Measurement, 4, (1975), p. 23-44.

BLACKORBY, C., LADY, G., NISSEN, D., RUSSEL, R.R., (1970), *Homothetic Separability and Consummer Budgeting,* Econometrica, 38, (1970), p. 468-472.

BOUCHARD, Maurice (1972), *Les diverses notions de l'effet de substitution,* Cahier 7201, Département des Sciences Economiques, Université de Montréal, miméographe, (1972).

BRONSARD, Camille (1971) - *Dualité microéconomique et théorie du Second Best-,* Vander, Louvain, 1971.

BRONSARD, Camille (1973), *Monopolistic Equilibrium, Compromise Benefit and the Theory of the Second Best,* Metroeconomica, 25, (1973), p. 250-271.

BRONSARD, C., SALVAS-BRONSARD, L., et ZARRA, Y., (1973), *Characterizing and Computing on Optimal Tax Subsidy Structure,* Cahier du Département de Sciences Economiques de l'Université de Montréal. Communication au Congrès de la Société d'Econométrie, New York, (1973).

BRONSARD, C., LACROIX, R., (1973), *L'équilibre du consommateur en économie monétaire,* Revue Canadienne d'Economique, 6, (1973), p. 332-343.

BUCK, R.C. (1956) - *Advanced Calculus* -, Mac Graw-Hill, Inc., New York, Seconde Edition, 1965.

BYRON, R.P. (1970), *The Restricted Aitken Estimation of Sets of Demand Relations,* Econometrica, 38, (1970), p. 816-830.

CANSIM (1973), *Système Canadien d'Information Socio-économique,* CANSIM, Statistique Canada, 23ième étage, Edifice R.H., Coats, Ottawa, K1A 0Z8.

CHAMPSAUR, P., MILLERON, J.C. (1971) -*Exercices de microéconomique; niveau avancé*-, Dunod, Paris, 1971.

CHARETTE, L. et BRONSARD, C. (1976), *Antonnelli - Hicks - Allen et Antonnelli - Allais - Barten: sur l'utilisation des conditions d'intégrabilité d'Antonnelli pour la caractérisation des substituts et des compléments,* Recherches économiques de Louvain, 42, (1976), p. 26-34.

CHIPMAN, J.S. (1974), *Homothetic Preferences and Aggregation,* Journal of Economic Theory, 8, (1974), p. 26-39

DEATON, Angus (1972), *The Estimation and Testing of Systems of Demand Equations: A Note,* European Economic Review, 3, (1972) p. 399-411.

DEATON, Angus, (1974), *The Analysis of Consumer Demand in the United Kingdom, 1900-1970,* Econometrica, 42, (1974), p. 341-367.

DEBREU, Gérard (1959) - *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrum* -, John Wily and Sons, Inc., New York, 1959. Traduction française: - *Théorie de la valeur: analyse axiomatique de l'équilibre économique* -, Dunod, Paris, 1966.

DEBREU. Gérard (1974), *Excess Demand Functions,* Journal of Mathematical Economics, 1, (1974), p. 15-22.

DIEUDONNE, J. (1960) -*Foundations of Modern Analysis*-, Academic Press Inc., New York, 1960. Traduction française: - *Eléments d'analyse , Tome 1: Fondements de l'analyse moderne* -, par D. Huet, Gauthier Villars, Editeurs, Paris, 1969.

DE V. GRAFF, J. (1957) -*Theoritical Welfare Economics*-, Cambridge University Press, Londres, 1957. Traduction française: -*Fondements théoriques de l'Economie du Bien-Être* - par G. Terny et F. Ettori, Dunod, Paris, 1970.

DIEWERT, W.E. (1973a) - *Generalized Slutsky Conditions for Aggregate Consumer Demand Functions-,* The Economic Series, no. 109, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1973.

DIEWERT, W.E. (1973b) - *Separability and a Generalization of the Cobb-Douglas Cost, Production and Indirect Utility Functions-,* The Economic Series, no. 86, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, 1973.

DIEWERT, W.E. (1974), *A Note on Aggregation of Elasticities of Substitution,* Revue Canadienne d'Economique, 7, (février 1974), p. 12-20.

EINAUDI, L. (1936), *Theoria della moneta imaginaria nel tempo da Carlomagno alla Rivoluzione frances,* Rivista di Storia Economica, (1936), p. 1-35. Traduction anglaise, *The Theory of Imaginary Money from Charlemagne to the French Revolution,* dans - *Enterprise and Secular Change-*, p. 229-261, édité par Laue et Riemersma, Readings in Economic Theory, R.D. Irwing Inc. Homewood Ill, 1953.

FENCHEL, W. (1953)- *Convex Cones, Sets, and Functions-,* Notes de cours, miméographe, Department of Mathematics, Princeton University, 1953.

FRISCH, R. (1959), *a Complete Schema for Computing all Direct and Cross Demand Elasticities in a Model with Many Sector,* Econometrica, 27, (1959), p. 177-196.

GABSZEWICK, J.J., VIAL, J.Ph. (1972), *Oligopoly à la Cournot in a General Equilibrium Analysis,* Journal of Economic Theory, 4, (1972), p. 381-400.

GALLANT, A.R. (1975), *Seemingly Unrelated Non-Linear Regressions,* Journal of Econometrics, 3, (1975), p. 35-50.

GEARY, P.T., MORISHIMA, M. (1973), *Demand and Supply Under Separability ,* dans - *Theory of Demand: Real and Monetary* -, édité par M. Morishima , At the Clarendon Press, Oxford, 1973.

GINSBERG, W. (1973), *Concavity and Quasiconcavity in Economics,* Journal of Economic Theory, 6, (1973), p. 596-605.

GORMAN, W. (1953), *Community Preference Fields,* Econometrica, 21, (1953), p. 63-80.

GORMAN, W. (1959), *Separable Utility and Aggregation,* Econometrica, 27, (1959), p. 469-481.

GOURSAT, E. (1929)- *Cours d'analyse mathématique-,* 5e édition, Gauthier Villars, Paris, 1929.

GREEN, John H., (1971)- *Consumer Theory-,* Penguin Books Ltd., Harmondsworth, Angleterre, 1971.

HICKS, John R., (1934), *A Reconsideration of the Theory of Value, I,* Econometrica N.S. 1 (février 1934), p. 52-75.

HICKS, John R., (1937)- *Théorie mathématique de la valeur en régime de libre concurrence-,* Herman et Cie., Editeurs, Paris, 1937.

HICKS, John R., (1946) -*Value and Capital-,* Seconde édition, At the Clarendon Press. Oxford, 1946. Traduction française, -*Valeur et Capital*-, par C. Mac Millan et C. Ménage, Dunod, Paris, 1968.

HICKS, John, R., (1956)- *A Revision of Demand Theory-,* At the Clarendon Press, Oxford, 1956.

HICKS, John, R., (1969),- *A Theory of Economic History-,* Oxford University Press, Londres, 1969. Traduction française,- *Théorie de l'histoire économique*-, par M. Berthold, éditions du Seuil, Paris, 1973.

HOTELLING, Harold (1932), *Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions,* Journal of Political Economy, 40, (octobre 1932), p. 577-616.

HOUTHAKKER, H.S. (1960), *Additive Preferences,* Econometrica, 28, (avril 1960), p. 244-257; *Errata,* 30, (juillet 1962), p. 633.

HURWICZ, L. (1971), *On the problem of Integrability of Demand Functions,* Chapitre 9 de - *Préférences, Utility and Demand*-, édité par J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenschein, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, (1971), p. 174-214.

HURWICZ, L. et UZAWA, H., (1971), *On the Integrability of Demand Functions,* Chapitre 6 de - *Preferences, Utility and Demand*-, édité par J.S. Chipman, L. Hurwicz, M.K. Richter, H.F. Sonnenschein, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, (1971), p. 114-148.

I.M.S.L. (1974), I.M.S.L., Library 3, Edition 4, (Fortran 2.4), CDC 6200/6400/6500/6600/6700. International Mathematical and Statistical Libraries, Inc., 1974.

JORGENSON, D., LAU, L., (1975), *The Structure of Consumer Preferences*, Annals of Economic and Social Measurement, 4, (1975), p. 49-102.

KATZNER, Donald, W.(1968), *A Note on the Differentiability of Consumer Demand Functions*, Econometrica,36,(avril 1968), p.415-418.

KATZNER, Donald, W. (1970)- *Static Demand Theory-*, the Mac Millan Company, New York, 1970.

LANCASTER, Kelvin (1966), *A New Approach to Consumer Theory*, Journal of Political Economy, 74, (1966), p. 132-157.

LANCASTER, Kelvin (1968) -*Mathematical Economics-*, The Mac Millan Company, New York, 1968.

LANCASTER, Kelvin (1971) - *Consumer Demand; a New Approach-*. Columbia University Press, New York, 1971.

LANCASTER, Kelvin (1975), *The Thoery of Household Behavior: Some Fundations*, Annals of Economic and Social Measurement, 4, (1975), p. 5-22.

LAU, L. (1970), *Duality and the Structure of Utility Functions*, Journal of Economic Theory, 1, (1970), p. 374-396.

LAU, L. (1974) -*Econometrics of Monotonicity, Convexity and Quasiconvexity-*, The Economics Series, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Standford University, Technical Report No. 123, Mars 1974.

LEONTIEF, W.W. (1933), *The Use of Indifference Curves in the Analysis of Foreign Trade*, Quaterly Journal of Economics, 47, (1933), p. 493-503.

LEONTIEF, W.W. (1947), *Introduction to a Theory of the Internal Structure of Functional Relationships*, Econometrica, 15, (1947), p. 361-373.

LLUCH, C., (1971), *Consumer Demand Functions, Spain 1950-1974*, European Economic Review, 2, (1971), p. 277-302.

MALINVAUD, E., (1957), *L'agrégation dans les modèles économiques*, Cahier du Séminaire d'Econométrie, No. 4, (1957), Paris, p. 69-146.

MALINVAUD, E., (1964)- *Méthodes Statistiques de l'Econométrie-*, Dunod, Paris, seconde édition, 1969.

MALINVAUD, E. (1971a)- *Leçons de théorie microéconomique-*, Dunod, Paris, 1971.

MALINVAUD, E. (1971b), *A Planning Approach to the Public Good Problem*, Swedich Journal of Economics, 73, (1971), p. 96-112.

MANTEL, Ralf, (1975), *Implications of Microeconomic Theory for Community Excess Demand Functions*, Communication au troisième Congrès Mondial de la Société d'Econométrie, Toronto, (1975).

MARCHAL, J. (1968)- *Monnaie et Crédit-*, Troisième édition, Editions Cujas, Paris, 1968.

MARSHALL,Alfred (1920)-*Principles of Economics-*, Huitième édition, Mac Millan and Co.Ltd., Londres, 1920. Réimpression, Mac Millan and Co. Ltd., Londres, 1964.

MARSCHAK, Jacob (1952), *Economics of Consumption: A Comment*, dans *A survey of Contemporary Economics-*, Volume II, édité par B.F. Haley, R.D. Irwing Inc., Homewood, Ill. 1952.

MUKHERJI, A. (1973), *On the Sensibility of Stability Results to the Choice of the Numeraire*, Review of Economic Studies, 40, (1973), p. 427-433.

NATAF, André. (1953), *Sur des questions d'agrégation en économétrie*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 2, (1953), p. 5-61.

NATAF, André (1964) -*Théorie des choix et fonctions de demande-*, Monographie du Centre d'Econométrie, C.N.R.S., Paris, 1964.

PARKS, R.W. (1969), *Systems of Demand Equations: an Empirical Comparison of Alternative Functionnal Forms*, Econometrica, 37, (1969), p. 629-650.

PEARCE, I.F. (1964) -*A Contribution to Demand Analysis-*, Oxford University Press, Londres, 1964.

RAO, C.R., MITRA, S.K. (1971) -*Generalized Inverse of Matrices and its Applications-*, John Wiley and Sons Inc., New York, (1971).

ROBINSON, J. (1962) - *Economic Philosophy-*, Seconde édition, Penguin Books, Ltd., Harwonds worth, 1964. Première édition, C.A. Watts, Angleterre, 1962.

ROY, René (1942) - *De l'Utilité, Contribution à la Théorie des choix-,* Herman et Cie., Editeurs, 1942.

ROY, René (1970) - *Eléments d'Econométrie-,* P.U.F., Thémis, Paris, 1970.

SALVAS, L., LEBLANC, D., BRONSARD, C., (1975), *Estimating Demand Equation: the Converse Approach,* Miméographe, Département de Sciences Economiques, Université de Montréal.

SALVAS-BRONSARD, L., LEBLANC, D., ZARRA, Y., Bronsard, C., (1973), *The Rotterdam Model and the Negativity of the Slutsky Matrix,* Cahier No. 7312, Département de Sciences Economiques, Université de Montréal, (1973).

SAMUELSON, Paul A. (1947) *-Foundations of Economic Analysis-,* Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1947.

SAMUELSON, Paul A. (1950), *The problem of Integrability in Utility Theory,* Economica, N.S., 17, (Novembre 1950), p. 355-385.

SAMUELSON, Paul A. (1956), *Social Indifference Curves,* The Quaterly Journal of Economics, (Février 1956), p. 1-22.

SAMUELSON, Paul A.(1965), *Using Full Duality to Shows that Simultaneously Additive Direct and Indirect Utilities Implies Unitary Price Elasticity of Demand,* Econometrica, 33, (Octobre 1965), p. 781-796.

SAMUELSON, Paul A. (1969), *Corrected Formulation of Direct and Indirect Additivity,* Econometrica, 37, (Avril 1969), p. 355-359.

SAMUELSON, Paul A. (1974), *Complementarity - An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks - Allen Revolution in Demand Theory* , Journal of Economic Literature, 22, (décembre 1974), p. 1255-1289.

SCHULTZ, Henry (1938),*-The Theory and Measurement of Demand-,* University of Chicago Press, Chicago, (1938).

SCITOWSKI, Tibor (1942), *A Reconsideration of the Theory of Tariffs,* Review of Economic Studies,9, (1941-42), p. 89-110. Réédité p. 358-392, dans - *Readings in the theory of International Trade-*, édité par H.S. Ellis et L.A. Metzler, R.D. Irwin Inc., Homewood, Ill., 1950.

SLUTSKY, Eugenio (1915), *Sulla teoria del bilancio del consumator,* Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica (3), 51, (juillet 1915), p. 1-26. Traduction anglaise, *On the Theory of the Budget of the Consumer,* Chapitre 2 dans - *Readings in Price Theory*-, édité par G.J. Stigler et K.E. Boulding, R.D. Irwing, Inc., Homewood, Ill., 1952.

SOLARI, Luigi (1971)- *Théorie des choix et fonctions de consommation semi-agrégées-,* Librairie Droz, Genève, 1971.

SONNENSHEIN, Hugo (1972), *Market Excess Demand Functions,* Econometrica, 40, (1972), p. 549-563.

SONNENSHEIN, Hugo (1973a), *Do Walras'Identity and Continuity Characterize the Class of Community Excess Demand Functions?,* Journal of Economic Theory, 6, (1973), p. 322-345.

SONNENSHEIN, Hugo (1973b), *The Utility Hypothesis and Market Demand Theory,* Western Economic Journal, 9, (1973), p. 404-410.

SONO, M., (1943), *The Effect of Price Changes on the Demand and Supply of Separable Goods,* International Economic Review, 2, (1961), p. 239-271. Paru en japonais dans Kokumin Keizai Zasshi en 1943.

SPIVAK, M. (1965) - *Calculus on Manifold-,* W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California, 1965.

STONE, J.R.N. (1954), *Linear Expenditure Systems and Demand Analysis: an Application to the Pattern of British Demand,* Economic Journal, 64, (1954), p. 511-527.

THEIL, Henri (1967) *-Economics and Information Theory-,* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

THEIL, Henri (1971) *-Principles of Econometrics-,* North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

THEIL, Henri (1973) *-Some Recent Developments in Consumer Demand Analysis-,* Report 7204 of the Center for Mathematical Studies in Business and Economics, The University of Chicago, 1973.

THUILLIER, Pierre (1971), *Comment se constituent les théories scientifiques,* La Recherche, 13, (1971), p. 537-554.

WOLD, Herman O. (1943), *A Synthesis of Pure Demand Analysis,* Skandinavisk Aktuarictidskrift, 26, (1943), p. 85-118 et p. 220-263, Skandinavisk Aktuarietidskrift, 27, (1944), p. 69-120.

WOLD, Herman O. (1951), *Demand Functions and the Integrability Condition,* Skandinavisk Aktuarietidskrift, 34, (Häft 3-4, 1951), p. 149-151.

WOLD, Herman O. (1953) -*Demand Analysis* -(en collaboration avec L. Jurêen), John Wiley and Sons Inc., New York, 1953.

ZANGWILL, W., (1967), *Minimizing a Function Without Calculating Derivatives,* Computer Journal, 10, (1967), p. 293-296.

ZELLNER, Arnold (1962), *An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias,* Journal of the American Statistical Association, 57, (1962), p. 348-368.