

Université de Montréal

**Trois essais sur les problèmes d'engagement  
dans les contrats dynamiques de partage de  
risque en finance**

par

Karine Gobert

Département des sciences économiques  
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures  
en vue de l'obtention du grade de  
Philosophiæ Doctor (Ph.D.)  
en sciences économiques

Octobre 1998

©Karine Gobert, 1998

Université de Montréal  
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

**Trois essais sur les problèmes d'engagement dans les contrats  
dynamiques de partage de risque en finance**

présentée par :

Karine Gobert

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Président-rapporteur : Marcel Boyer  
Directeur de recherche : Michel Poitevin  
Membre du jury : Jacques Robert  
Examineur externe : Jonathan P. Thomas  
(University of Warwick)  
Représentant du doyen : Gérard Gaudet

Thèse acceptée le : 15 janvier 1999

# Sommaire

Cette thèse repose sur trois essais portant sur les contrats financiers de partage de risque en l'absence d'engagement. Les règlements judiciaires des litiges sur les contrats étant longs et coûteux, les parties y recourent rarement. Les contrats doivent donc intégrer des contraintes "auto-exécutoires" qui garantissent qu'aucun des signataires n'a jamais d'incitation à renier ses engagements. Ces contraintes rendent le partage de risque moins efficace.

Le premier essai décrit un contrat financier dynamique et auto-exécutoire entre une banque neutre vis-à-vis du risque et une firme riscophobe soumise à des revenus aléatoires. On suppose que la firme peut épargner une partie de ses revenus. Si l'épargne peut servir de garantie financière, le contrat l'utilise au mieux pour relâcher les contraintes d'engagement de la banque et améliorer le lissage. La dynamique du contrat repose alors sur une variable d'état qui est la différence entre le stock d'épargne et la dette accumulée envers la banque, c'est-à-dire l'actif net de la firme. Ces résultats dépendent de l'hypothèse que le compte d'épargne est parfaitement saisissable et que le taux d'escompte des agents est égal au taux d'intérêt. Sous ces conditions, le contrat atteint en un nombre fini de périodes un état stationnaire où les revenus de la firme sont parfaitement lissés.

Le deuxième essai étudie l'effet de la responsabilité des banques pour les dommages environnementaux causés par leurs clients. On étudie l'impact de la responsabilité bancaire sur les incitations à la prévention quand les contrats financiers

sont auto-exécutoires. La responsabilité bancaire détériore les conditions d'autarcie des banques. À la suite d'un accident environnemental, les banques légalement responsables sont plus enclines à refinancer la firme en cause. La responsabilité bancaire relâche donc les contraintes d'engagement des banques, améliorant ainsi le partage de risque obtenu par la firme. Mais, par là-même, elle diminue les incitations de la firme à investir dans la réduction des risques. On montre également que lorsqu'il y a responsabilité bancaire, le montant investi en prévention correspond à l'optimum de plein engagement. Si le niveau d'investissement socialement efficace est supérieur au niveau de plein engagement, la responsabilité bancaire peut ne pas être désirable.

Dans le troisième essai, on examine la structure de capital d'une firme risco-phobe financée par un contrat auto-exécutoire avec un investisseur. Financement par dette et financement par actions se distinguent, dans ce contrat, par la définition des droits de propriété sur les actifs. Ces droits influencent les conditions d'autarcie du financier et donc les contraintes auto-exécutoires. Un contrat de dette est tel que le financier ne peut pas emporter les actifs de la firme en autarcie. Par contre, des actionnaires sont propriétaires de l'entreprise et leurs contraintes auto-exécutoires sont plus serrées parce qu'ils peuvent bénéficier des actifs de la firme après avoir brisé le contrat. Comme l'efficacité des contrats auto-exécutoires en terme de lissage de la consommation est très liée aux conditions d'autarcie, un contrat de dette défini de cette manière est préférable à un contrat de financement par actions.

## Résumé

Cette thèse présente trois essais sur les problèmes d'engagement dans les contrats de partage de risque. Le but de ces essais est d'appliquer les modèles de contrats dynamiques auto-exécutoires en finance en élargissant le cadre déjà développé dans la littérature à des contrats avec opportunités supplémentaires d'assurance. On introduit des possibilités externes d'épargne pour la partie ris- cophobe et on détermine l'effet de ces opportunités sur la forme du contrat à l'optimum. Il est évident que l'accroissement du nombre des instruments dispo- nibles pour effectuer le partage de risque ne peut que favoriser le lissage de la consommation de l'agent riscophobe. Cependant on montre ici de quelle manière le contrat utilise ces opportunités pour atteindre une plus grande efficacité.

L'analyse se porte également sur l'influence de l'environnement du contrat sur l'efficacité du partage de risque. On montre que cette efficacité dépend fortement des conditions vécues par les parties à l'extérieur du contrat. Le coût pour une partie de renoncer au contrat est en effet la différence entre les gains offerts par le contrat et les gains obtenus en autarcie. La définition des conditions d'autarcie est donc cruciale pour la performance du contrat optimal en terme de partage de risque. On développe ici des applications des contrats auto-exécutoires en finance qui soulignent l'influence de l'environnement sur les conditions d'autarcie. Cette thèse permet donc de mieux comprendre les déterminants du partage de risque dans les contrats et en raffine l'application au domaine de la finance.

La thèse est introduite par une revue de littérature qui compare les modèles de lissage de la consommation par les contrats dynamiques auto-exécutoires et les modèles de choix de consommation en incertitude, qu'on peut trouver en macroéconomie. Ce survol se concentre sur les contraintes de liquidité subies par les consommateurs et qui les empêchent d'obtenir un lissage parfait de leur consommation par le jeu des prêts et emprunts sur les marchés financiers. Il fait le lien entre les modèles macroéconomiques d'épargne avec contrainte de liquidité et les modèles de contrats auto-exécutoires, en soulignant comment les problèmes d'engagement qui existent dans les contrats endogénéisent les contraintes de liquidité.

Le premier essai présenté dans la thèse s'interroge sur la forme du contrat quand l'agent riscophobe possède une opportunité externe d'assurance par le biais d'un compte d'épargne. On suppose qu'un agent riscophobe qui a des revenus aléatoires iid chaque période (cet agent peut être une firme) entre dans un contrat de partage de risque auto-exécutoire avec une banque neutre vis-à-vis du risque. Cet agent peut par ailleurs accumuler de l'épargne sur un compte de réserves sur lequel il existe une contrainte de liquidité (il ne peut pas emprunter par le biais de ses réserves). La question qui sous-tend le problème est de savoir dans quelle mesure la coexistence des deux moyens d'assurance (contrat financier et épargne) influence l'efficacité du partage de risque à l'optimum. On montre que le partage de risque obtenu peut être parfait à deux conditions. D'abord, le financier doit être capable de saisir le stock d'épargne accumulé quand l'agent renie le contrat et refuse d'exécuter un transfert. Ensuite, le partage de risque ne peut être complet que si le taux d'intérêt sur l'épargne est égal au taux d'escompte des deux agents. Si l'épargne peut être saisie par la banque, elle a valeur de garantie. Un stock élevé d'épargne ne peut pas inciter l'agent à briser la relation et à s'assurer par lui-même si le bris de contrat entraîne la perte de ses réserves. Les transferts vers le compte d'épargne peuvent alors se substituer aux transferts vers le financier et ceci permet de conserver un stock de dette suffisant (des perspectives de versements

futurs suffisantes) pour que la banque reste intéressée par le contrat. À l'optimum, il existe une complémentarité entre le stock de dette et le stock d'épargne et dans les périodes où le revenu de l'agent est faible, sa consommation est soutenue à la fois par un accroissement de la dette et par ponction sur l'épargne de façon à conserver un équilibre entre ces deux variables. La valeur future du contrat pour l'agent dépend alors de sa richesse nette, c'est-à-dire de la différence entre le stock d'épargne accumulé et la dette envers la banque. Le contrat optimal est tel que ni la contrainte auto-exécutoire qui s'applique à la banque ni la contrainte de liquidité sur l'épargne ne sont contraignantes. Finalement, il est possible d'obtenir un lissage parfait de la consommation de l'agent riscophobe après un nombre fini de périodes. Cependant, cet équilibre n'est possible que si le taux d'intérêt sur l'épargne est égal au taux d'escompte, qui représente le coût du financement auprès de la banque. Si le taux d'intérêt est plus faible que le taux d'escompte, l'épargne est relativement coûteuse pour l'agent. Le contrat limite alors au maximum le recours à l'épargne et il y a arbitrage entre le coût que représente l'épargne et le coût d'un partage de risque imparfait.

Dans une deuxième partie de cet essai on suppose que le revenu aléatoire de la firme est endogène et dépend de la réalisation d'investissements périodiques. Le contrat spécifie alors non seulement les transferts vers la banque et vers le compte d'épargne mais également les montants qui doivent être investis chaque période afin de garantir un revenu pour la période suivante. On montre dans ce cas que l'investissement est déterminé de manière efficace tant que l'épargne et les transferts peuvent suffire à garantir le lissage parfait de la consommation de la firme. Quand ce n'est pas possible (quand le taux d'intérêt est plus faible que le taux d'escompte) les décisions (réelles) d'investissement sont affectées par la préoccupation d'assurance de la firme. Dans ce cas, il y a surinvestissement dans les périodes où la firme prévoit que le contrat ne pourra pas lui offrir des transferts suffisants dans l'éventualité d'un revenu faible à la période suivante. Les

conditions de financement de la firme affectent donc ses décisions de production dans la mesure où son objectif est d'obtenir des revenus aussi lisses que possibles.

Les deux essais suivants sont des applications de ce modèle à deux problèmes particuliers. Ces applications soulignent l'importance des conditions d'autarcie des agents sur les réalisations d'un contrat auto-exécutoire. Les conditions d'autarcie sont déterminantes parce qu'elles conditionnent la punition infligeable pour bris de contrat. Les contrats auto-exécutoires imposent comme punition pour bris de contrat, le retour irrévocable à l'autarcie. Plus les conditions d'autarcie sont favorables aux agents et plus les contraintes imposées par l'absence d'engagement limitent les transferts et donc l'efficacité du partage de risque.

Le second essai étudie les conséquences des règles de partage des responsabilités pour les dommages environnementaux causés par les firmes et, plus particulièrement, de la responsabilité des banques pour ces dommages. Dans le cas où la firme en cause est financée par un contrat de partage de risque avec absence d'engagement, l'imposition ou non de la responsabilité bancaire détermine les conditions d'autarcie de la banque. On suppose que la firme est dotée d'un revenu périodique aléatoire et que son activité entraîne le risque d'un accident causant des dommages d'un montant  $X$  à l'environnement. Cet accident a une probabilité de réalisation qui dépend négativement du montant investi en prévention au début de la relation et financé par la banque. Il n'y a pas d'épargne dans ce modèle. À cause de l'incapacité de la banque à se commettre à refinancer la firme après un accident, le partage de risque possible à l'optimum du contrat est incomplet en l'absence de responsabilité bancaire. Si le Législateur impose une responsabilité à la banque en cas d'accident, il détériore les conditions d'autarcie de celle-ci. En effet, si la banque refuse de refinancer la firme après un accident, celle-ci fait faillite et la banque doit payer pour les dommages (en l'absence de responsabilité bancaire, la firme fait faillite mais la banque ne paie rien). La responsabilité bancaire relâche donc les contraintes auto-exécutoires de la banque et rend possible une



assurance parfaite contre les accidents environnementaux par le biais du contrat de financement. Cependant, quand la firme est parfaitement assurée contre les accidents, ses incitations à la prévention sont diminuées. On montre donc que l'effet de l'introduction par le Législateur de la responsabilité bancaire en matière d'environnement peut être préjudiciable pour les incitations à la prévention si les contrats de financement des firmes incorporent une part d'assurance et que les banques ne sont pas commises dans ces contrats.

Le troisième essai s'intéresse à une question classique en finance qui est celle de la détermination de la structure optimale de capital. On remarque que, dépendamment des conditions d'autarcie du financier, le contrat peut être interprété comme un contrat de dette ou comme un financement par actions. Le terme de contrat est à prendre au sens large dans ce cas. Le contrat de dette de long terme n'a pas exactement la forme d'un contrat de dette standard puisque les transferts peuvent être contingents à la situation financière de la firme. Le financement par actions peut être, quant à lui, interprété comme un contrat implicite entre les actionnaires et l'entrepreneur. En fait, les actionnaires s'attendent à percevoir des dividendes conditionnels aux performances de la firme. Ils ne sont pas commis à toujours refinancer celle-ci et ils peuvent même la liquider. L'entrepreneur de son côté ne verse des dividendes que dans la mesure où il veut satisfaire les actionnaires et être en mesure de faire appel à leurs investissements dans le futur. La distinction entre ces deux interprétations provient de la différence qui existe sur les droits de propriété sur le capital de la firme dans les deux cas. Ces droits de propriété déterminent les conditions d'autarcie des financiers et donc l'efficacité du partage de risque. Par définition, le financement par actions implique que les financiers sont propriétaires de la firme. Un bris de contrat de leur part entraîne alors qu'ils retournent en autarcie avec la totalité du capital de la firme. Si la firme est financée entièrement par la dette au contraire, le financier n'est pas propriétaire des actifs et il n'emporte rien s'il retourne en autarcie après avoir refusé de

refinancer la firme.

Le contexte est ici le même que celui développé dans le premier essai, c'est-à-dire que la firme est financée par un contrat auto-exécutoire et qu'elle a la possibilité d'épargner. Ses réserves peuvent être saisies si elle brise le contrat. On montre alors que le rôle important du compte d'épargne dans le lissage de son revenu ne peut plus jouer si le financier est un actionnaire. En effet, la complémentarité entre le montant dû au financier et le stock d'épargne ne peut plus servir à relâcher la contrainte du financier parce qu'un accroissement du stock d'épargne améliore les conditions d'autarcie du financier, auquel il appartient et l'incite donc à briser la relation. Accroître l'épargne ne permet plus, dans ce cas, de préserver la consommation future sans resserrer les contraintes du financier. Le contrat de dette par contre est exactement celui décrit dans le premier essai. Les opportunités de partage de risque à travers un contrat auto-exécutoire sont donc fortement dépendantes des conditions des parties en autarcie et l'interprétation qu'on donne du financier est importante pour la détermination de l'optimum.

# Table des matières

Sommaire	iii
Résumé	v
Table des matières	xiii
Remerciements	xiv
Introduction générale	1
<b>1 Lissage de la consommation, contraintes de liquidité et engagement incomplet : un survol de la littérature</b>	<b>10</b>
1.1 Introduction . . . . .	10
1.2 Modèles de consommation avec agent représentatif . . . . .	15
1.2.1 Pertinence de l'hypothèse des contraintes de liquidité . . . . .	15
1.2.2 Modèles de consommation avec contrainte de liquidité . . . . .	19
1.3 Contrats de partage de risque . . . . .	26
1.3.1 Contrats sans engagement . . . . .	26

	xii
1.3.2	Contrats avec revenu endogène . . . . . 34
1.3.3	Contrats avec opportunités externes . . . . . 40
1.4	Conclusion . . . . . 43
<b>2</b>	<b>Non-Commitment and Savings in Dynamic Risk-Sharing Contracts 45</b>
2.1	Introduction . . . . . 45
2.2	The model . . . . . 48
2.3	The risk-sharing contract with non-commitment . . . . . 52
2.3.1	The value functions . . . . . 56
2.3.2	Optimal consumption and savings . . . . . 57
2.4	The model with capital accumulation . . . . . 65
2.5	Discussion . . . . . 70
2.6	Conclusion . . . . . 71
<b>3</b>	<b>Environmental Risks : Should Banks Be Liable? 78</b>
3.1	Introduction . . . . . 78
3.2	The model . . . . . 84
3.3	The no-bankruptcy case . . . . . 88
3.3.1	The full-commitment contract . . . . . 88
3.3.2	The self-enforcing contract . . . . . 90
3.4	The bankruptcy case . . . . . 95
3.4.1	No bank liability . . . . . 96

	xiii
3.4.2 Bank liability . . . . .	98
3.4.3 Discussion . . . . .	98
3.5 Social optimum . . . . .	99
3.6 Conclusion . . . . .	102
<b>4 Contrat de partage de risque et structure de capital en absence d'engagement</b>	<b>107</b>
4.1 Introduction . . . . .	107
4.2 Environnement . . . . .	112
4.2.1 Entrepreneur . . . . .	112
4.2.2 Financement . . . . .	115
4.3 Contrat . . . . .	119
4.3.1 Contrat optimal . . . . .	123
4.4 Partage de risque et type de contrat . . . . .	125
4.4.1 Droits de propriété non saisissables . . . . .	128
4.4.2 L'investissement optimal . . . . .	129
4.5 Discussion . . . . .	131
4.6 Conclusion . . . . .	135
<b>Conclusion générale</b>	<b>141</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>144</b>

# Remerciements

Je remercie mon directeur de thèse, Michel Poitevin<sup>1</sup>, pour sa patience et pour les heures, innombrables, qu'il a consacrées à mon apprentissage. Je lui dois la plus grosse partie de mes connaissances et il ne dépend que de moi qu'il en reste encore tant à apprendre.

J'ai également beaucoup profité de mes collègues durant ces quelques années passées au département de sciences économiques. Merci Lars Vilhuber, Stefan Ambec, Patrick González, Louis Hotte, Marcel Rindisbacher, Norma Kozhaya, Stéphanie Lluís, Paul Johnson, Christian Tritten et les autres, pour vos conseils informatiques, techniques et théoriques. Et surtout, merci pour ces merveilleux moments.

Enfin, un gros merci à Yves Richelle qui m'a si bien conseillée et sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour.

---

<sup>1</sup>Michel Poitevin est coauteur des deux premiers essais, qui correspondent aux chapitres 2 et 3 de la thèse.

# Introduction générale

La théorie des contrats se distingue en économie parce qu'elle s'intéresse aux relations bilatérales plutôt qu'aux transactions entre un nombre indénombrable de consommateurs. Les contrats sont des arrangements entre deux agents qui spécifient des obligations pour chacun d'eux : obligation de vendre un bien à un certain prix, obligation d'effectuer un certain effort en échange d'une rémunération donnée ou obligation d'effectuer des transferts à l'autre partie dans certaines conditions de l'environnement. Les contrats sont exécutés quand les parties réalisent effectivement les obligations qui leur sont données. Il peut arriver cependant que les agents n'exécutent pas leurs obligations. Si cela se produit, c'est que les parties sont imparfaitement engagées dans le contrat, qu'elles ne peuvent se commettre, au moment de la signature de l'accord, à toujours respecter les spécifications du contrat. C'est le problème de l'impossibilité d'engagement qui est au coeur de cette thèse.

Les problèmes d'engagement proviennent de l'absence de mécanismes d'exécution qui fait que si l'une des parties refuse de suivre les obligations qui lui sont données par le contrat, l'autre ne peut la forcer à le faire. En général, l'absence d'engagement est causée par le fait que les parties sont les seules à observer les réalisations des états du monde qui conditionnent le contrat. On dit que ces états du monde sont observables par les deux parties mais non vérifiables par une cour de justice ce qui rend impossible l'exécution des contrats par les cours. La non

vérifiabilité absolue n'est pas indispensable pour voir émerger les problèmes d'engagement. En fait, une cour de justice peut être capable de connaître la réalisation de l'état du monde après enquête. Ceci suppose que les contingences du contrat sont vérifiables à un certain coût. On sait de plus que le traitement juridique du litige entre deux parties demande du temps parce que l'appareil judiciaire lui-même n'est pas parfait. La partie qui brise le contrat tente d'influencer le jugement de la cour en interprétant à son avantage les observations que celle-ci peut obtenir. Il est donc inévitable que, même si le problème peut finalement être tranché et le contrat exécuté, il ne le sera qu'à un coût élevé et après un délai. Or les délais d'exécution sont préjudiciables pour des agents riscophobes qui ont une aversion envers la variabilité de leurs revenus. Pour toutes ces raisons, les parties qui entrent dans un contrat bilatéral préfèrent écrire un contrat *auto-exécutoire*, c'est-à-dire un contrat qui ne nécessite pas d'arbitrage extérieur pour être exécuté. Pour être auto-exécutoire, un contrat doit spécifier des obligations qu'il est dans l'intérêt de chaque partie de respecter.

Dans la littérature classique sur les contrats et, en particulier, dans les modèles de principal-agent, les parties sont supposées parfaitement engagées. C'est ce qui explique que les contrats à une ou deux périodes sont exécutés alors même que les parties n'ont aucun intérêt à respecter leurs obligations en dernière période. Pour obtenir des contrats auto-exécutaires, il est nécessaire de signer les ententes sur des horizons infinis. C'est la possibilité de percevoir des gains du contrat dans le futur qui donne aux parties un intérêt à continuer la relation en exécutant les obligations courantes. Il faut donc qu'il y ait toujours un futur pour qu'elles respectent toujours leurs obligations. L'hypothèse d'horizon infini peut paraître extravagante, cependant, elle est un moyen technique d'exprimer le fait que les relations sont durables et que la décision d'exécuter ou non ses obligations est toujours prise dans le contexte où la relation peut continuer plus tard. Les événements qui peuvent terminer l'horizon, comme le décès ou la faillite d'une



des parties, sont des événements aléatoires, ce qui ne permet pas aux agents de connaître la date de la fin de l'horizon. Ceci revient à supposer que cet horizon est infini. Si la durée de la relation n'est pas infinie, il faut supposer que l'engagement est parfait dans la dernière période et que les parties ont toutes intérêt à atteindre cette dernière période.

Si l'une des parties a de l'aversion pour le risque, le rôle du contrat est d'arranger des transferts monétaires qui offrent à cet agent une assurance contre l'incertitude de son environnement. Autrement dit, le contrat permet un partage de risque entre les deux parties. Les transferts spécifiés par le contrat doivent être contingents aux réalisations des états du monde qui conditionnent les revenus de l'agent riscophobe. Les contrats sont efficaces quand ils offrent une assurance parfaite contre les variations de ces revenus. Une assurance parfaite dans un contrat bilatéral est rare en pratique. L'asymétrie d'information qui peut exister entre les parties est une cause d'inefficacité qui est développée dans la littérature. Si l'un des agents ne peut observer directement les réalisations de l'état de la nature que l'autre connaît, celui qui a plus d'information a une incitation à mentir sur la vraie réalisation afin d'obtenir du contrat un transfert en sa faveur. Les contrats signés dans un tel environnement doivent intégrer des mécanismes de révélation de l'état du monde par l'agent informé. Ces mécanismes réduisent généralement les réalisations du contrat en terme de partage de risque. L'absence d'engagement ne suppose pas d'asymétrie d'information entre les agents. Cependant, la nécessité de conserver pour les parties un intérêt à respecter le contrat impose, sur les transferts réalisables, des contraintes qui compromettent également l'efficacité du partage de risque.

Dans un article de 1988, Thomas et Worrall développent les problèmes d'engagement dans les contrats de partage de risque de long terme et proposent une méthode de résolution pour ces problèmes dynamiques complexes. Ils étudient un contrat de travail dynamique auto-exécutoire et décrivent le comportement de la

consommation d'un travailleur riscophobe qui bénéficie d'un tel contrat avec son employeur. Ils montrent que le travailleur ne peut pas obtenir un lissage parfait de sa consommation quand ni lui, ni l'employeur, ne peuvent se commettre à respecter leurs obligations de transferts. Ligon, Thomas et Worrall (1998) utilisent ce cadre pour étudier une relation d'assurance mutuelle entre les habitants riscophobes d'un même village. Dans cette thèse, on applique les contrats dynamiques auto-exécutoires au domaine de la finance, c'est-à-dire qu'on analyse les relations financières quand emprunteur et financier ne peuvent pas s'engager à respecter les contrats. Ceci ne suppose pas qu'une banque peut subtiliser les dépôts de ses clients ; seulement, elle peut décider de cesser de refinancer un client qui devient moins intéressant, alors même qu'elle avait promis de le faire. L'hypothèse de l'existence de problèmes d'engagement dans les relations financières est pertinente parce que les investisseurs aussi bien que les firmes ont de multiples relations de ce genre à gérer. Ils veulent éviter le plus possible la répétition de recours coûteux à l'arbitrage extérieur et préfèrent écrire des contrats auto-exécutoires, au prix de l'efficacité du partage de risque.

Les relations étudiées ici sont des contrats financiers particuliers dans la mesure où ils incorporent une offre d'assurance. On étudie dans cette thèse le comportement de firmes riscophobes qui n'ont pas seulement besoin de financement pour démarrer leurs projets mais qui demandent aussi une forme d'assurance contre la variabilité de leurs revenus. Dans les modèles classiques de finance, les firmes sont généralement décrites comme neutres vis-à-vis du risque. Ceci provient du fait que les firmes sont assimilées à leurs actionnaires qui peuvent personnellement s'assurer en diversifiant leurs portefeuilles sur les marchés. Il est cependant admis que les firmes sont dirigées par des gestionnaires riscophobes dont les revenus dépendent des performances de l'entreprise. De plus, les décisions prises à l'intérieur de la firme sont influencées par les obligations qu'elle a envers ses employés et ses fournisseurs. Elle doit donc être gérée dans le but d'éviter la faillite et d'obtenir

des revenus suffisamment stables et prévisibles afin d'être en mesure de respecter ses obligations envers ses partenaires riscophobes. Les contrats syndicaux, les obligations de paiement envers les fournisseurs et la riscophobie du gestionnaire induisent donc un comportement riscophobe dans la firme. Les investisseurs, par contre, sont neutres vis-à-vis du risque parce qu'ils ont un grand nombre d'opportunités d'investissement en dehors du contrat avec la firme considérée. Ils peuvent donc diversifier efficacement leurs portefeuilles d'investissements et se comporter comme des agents neutres vis-à-vis du risque. La relation de financement engendre des surplus, des gains à l'échange, parce que les financiers neutres vis-à-vis du risque peuvent supporter sans coût les risques des agents riscophobes qui, eux, sont prêts à sacrifier aux financiers un peu de revenu en espérance, en échange d'un certain lissage. Dans ce contexte, les possibilités de refinancement qu'offrent les banques et les investisseurs en général, incorporent une part d'assurance contre les réalisations défavorables des états du monde.

L'interprétation d'échange de transferts contingents entre deux parties comme un contrat financier peut paraître étrange parce qu'elle diffère des modèles de finance traditionnels comme les contrats de dette standards. Il faut considérer ici que la relation est vue dans le long terme. Dans chaque période, un transfert peut être décomposé comme la différence entre le remboursement d'une dette ancienne et un nouveau prêt. L'ensemble de la relation est donc en quelque sorte une suite de contrats de dette de court terme dans laquelle le montant total dû par le débiteur évolue conditionnellement aux réalisations de ses revenus dans le passé, parce que le contrat offre aussi une assurance contre ces réalisations. On n'obtient pas la forme d'un contrat de dette standard parce que le créancier peut toujours observer le revenu de la firme. Quand celui-ci est faible et que la firme ne peut pas rembourser sa dette accumulée, le financier est toujours prêt à la refinancer tant qu'il existe des gains au partage de risque dans le futur. Il n'y a donc pas de faillite à l'optimum du contrat quand la valeur de la firme reste positive.

Les contrats de partage de risque sont donc, pour la firme, un moyen imparfait d'obtenir de l'assurance quand ni elle, ni son partenaire financier, ne peuvent s'engager dans la relation. L'absence d'engagement impose des limites sur les transferts qui sont exigibles de chacune des parties parce que le contrat doit être calibré de sorte que les deux agents aient toujours intérêt à le respecter. Les transferts nécessaires pour garantir un partage de risque complet ne sont pas soutenables parce qu'ils entraînent le bris du contrat par ses signataires. Les bornes imposées aux transferts pour les rendre auto-exécutoires sont assimilables à des contraintes de liquidité. Dans la littérature sur les choix intertemporels de consommation en incertitude, les contraintes de liquidité sont introduites dans les modèles pour représenter l'hypothèse que les consommateurs ne peuvent pas emprunter autant qu'il est nécessaire pour assurer le lissage de leur consommation. On suppose qu'ils peuvent épargner afin de se composer une réserve leur permettant de financer la consommation dans les périodes où leur revenu est faible, mais ils ne peuvent emprunter plus qu'ils n'ont d'épargne accumulée. Ces contraintes de crédit sont en effet observables dans la pratique, elles sont cependant introduites de manière exogène dans les modèles de consommation. L'intérêt de l'étude des contrats financiers avec absence d'engagement est qu'ils élargissent les possibilités de financement de la consommation. Les contraintes imposées aux contrats financiers par l'absence d'engagement, qui limitent les transferts réalisables, endogénéisent les contraintes de liquidité. Les contrats auto-exécutoires sont donc un moyen réaliste de représenter l'environnement financier des consommateurs riscophobes. On commence la thèse par une revue de la littérature qui présente des modèles de financement de la consommation par les contrats auto-exécutoires et des modèles de choix de consommation en incertitude avec contrainte de liquidité. Ce survol compare les prédictions du comportement de la consommation données par les deux types de modèles.

Cette thèse présente trois essais sur les problèmes d'engagement dans les

contrats de partage de risque. Le but de ces essais est d'appliquer les modèles auto-exécutoires en finance, en élargissant le cadre déjà développé par Thomas et Worrall (1988) à des possibilités supplémentaires d'assurance. On relie ainsi la littérature macroéconomique sur les choix intertemporels de consommation en incertitude et la littérature microéconomique sur les contrats auto-exécutoires, en permettant à l'agent riscophobe d'utiliser deux moyens de lissage qui sont un contrat de partage de risque et un compte d'épargne. Il est bien évident que l'accroissement du nombre des instruments disponibles pour lisser la consommation ne peut que favoriser le lissage. Cependant, on montre ici de quelle manière le contrat utilise les opportunités externes pour améliorer ses performances en terme d'efficacité. On introduit donc des possibilités externes d'épargne dans un contrat de partage de risque auto-exécutoire et l'on détermine l'effet de ces opportunités sur la forme du contrat à l'optimum.

L'analyse théorique du contrat ainsi obtenu est faite dans le premier essai. Elle montre que, sous certaines conditions, l'existence de l'opportunité externe permet au contrat financier d'offrir un lissage parfait de sa consommation à l'agent riscophobe. Ce premier essai élargit également l'environnement de l'agent en étudiant le cas où celui-ci a un revenu endogène qui dépend de ses décisions d'investissement. Cette hypothèse permet d'assimiler plus réalistement l'agent riscophobe à une firme, dont les revenus dépendent des décisions de production. On suppose alors que le contrat spécifie non seulement les transferts vers le financier et vers le compte d'épargne mais aussi les montants qui doivent être investis chaque période pour garantir un revenu pour la période suivante. On montre alors que les conditions de financement de la firme n'affectent les décisions réelles d'investissement que dans le cas où la combinaison de l'épargne et des transferts contingents ne suffit pas à offrir une assurance contre l'incertitude des revenus.

Les deux essais suivants sont des applications de ce modèle à deux problèmes particuliers. Ces applications soulignent l'importance des conditions d'autarcie des

agents sur les réalisations d'un contrat auto-exécutoire. Les conditions d'autarcie sont déterminantes parce qu'elles conditionnent la punition infligeable pour bris de contrat. Les contrats auto-exécutoires imposent le retour irrévocable à l'autarcie comme punition pour bris de contrat. Plus les conditions d'autarcie sont favorables aux agents, plus ceux-ci ont d'incitations à renoncer à leur obligations et à quitter le contrat. Dans ce cas, les contraintes imposées par l'absence d'engagement limitent d'autant plus les transferts et donc l'efficacité du partage de risque. Les conditions d'autarcie sont donc cruciales pour la solution optimale du contrat.

Dans le second essai, on considère une relation de financement entre une banque et une firme dont les activités de production comportent un risque d'accident entraînant des dommages environnementaux coûteux pour la société. Dans la pratique, le Législateur peut imposer la responsabilité du paiement des dommages à la banque si la firme fait faillite après un accident. Ceci est important pour la forme du contrat car la responsabilité bancaire détériore les conditions d'autarcie de la banque. Cette dernière a alors plus d'incitations à refinancer la firme (moins d'incitations à briser le contrat) et le partage de risque est meilleur. Ceci a des répercussions sur la prévention contre les accidents environnementaux car une firme mieux assurée contre les accidents fait moins de prévention. Le second essai souligne donc l'importance pour le Législateur de connaître l'environnement financier des firmes afin d'éviter de tels effets.

Enfin, le troisième essai applique le modèle de contrat auto-exécutoire avec épargne à la question de la structure optimale de capital de la firme. La définition des conditions d'autarcie du financier peut influencer l'interprétation qu'on donne d'un contrat auto-exécutoire en terme de mode de financement. Lorsque le financier en autarcie a un surplus nul, il peut être considéré comme un détenteur de dette. Si le financier emporte les actifs de la firme en autarcie après avoir brisé le contrat, il peut être interprété comme l'actionnaire de la firme. Or, dans ce

cas, les conditions d'autarcie de l'actionnaire sont meilleures que celles du créancier. Le contrat de financement par actions offre de moins bonnes opportunités de lissage à la firme riscophobe parce que les contraintes imposées par l'absence d'engagement sont plus contraignantes dans le cas d'un financier/actionnaire (qui a des conditions d'autarcie favorables) que dans le cas d'un financier/créancier.

La thèse se présente de la façon suivante. Un survol de la littérature sur les modèles de contrats dynamiques auto-exécutoires et les modèles de consommation en incertitude constitue le chapitre 1. Les chapitres 2, 3 et 4 sont respectivement les premier, deuxième et troisième essais de la thèse. Une conclusion générale est apportée à la fin pour faire la synthèse des résultats.

# Chapitre 1

## Lissage de la consommation, contraintes de liquidité et engagement incomplet : un survol de la littérature

### 1.1 Introduction

Les comportements de consommation reflètent les attitudes des individus face à leur environnement. Dans un cadre dynamique, si le consommateur planifie sa consommation sur tout son horizon de vie en fonction de ses anticipations de ressources, il répartit ses dépenses de façon à égaliser ses utilités marginales d'une période à l'autre. Il effectue ainsi un lissage optimal de sa consommation. Cela suppose qu'il est capable de déplacer des ressources d'une période à l'autre, c'est-à-dire de prêter et d'emprunter sur les marchés, sans coûts et sans limites. Si ses revenus sont soumis, chaque période, à des chocs aléatoires, le consommateur



riscophobe a, en plus du soucis de lisser sa consommation intertemporellement, celui de l'assurer à l'intérieur des périodes, contre les réalisations des états de la nature. Les possibilités de prêt et d'emprunt permettent aussi, d'une certaine manière, de se prémunir contre l'incertitude des revenus. Le lissage et l'assurance de la consommation dépendent alors des anticipations sur les revenus futurs. Les modèles de cycle de vie avec agent représentatif, qui se généralisent aux modèles de revenu permanent, décrivent ce comportement de lissage/assurance. D'après ces modèles, l'individu consomme chaque période son revenu permanent qui est la valeur par période des ressources qu'il obtient, en espérance, dans toute sa vie. La consommation courante ne dépend donc pas du revenu courant, mais de la somme escomptée de tous les revenus futurs anticipés.

Or, les observations empiriques réfutent ces prédictions. En pratique la consommation agrégée a un taux de croissance positif et elle varie avec le revenu, quoique moins fortement. De plus, les conditions d'Euler décrivant le lissage des utilités marginales dans le temps, qui sont les conditions d'optimalité de ces modèles, sont rejetées par les tests sur les données. Plusieurs raisons ont été apportées pour expliquer ces rejets. Zeldes (1989a, 1989b) avance que le rejet des équations d'Euler provient du fait que les modèles de cycle de vie ignorent les motifs de précaution des agents. Les comportements de consommation ne sont pas complets s'ils ne prennent pas en compte l'épargne de précaution décrite par Kimball (1990). Une seconde explication réside dans l'agrégation des données. Les tests du modèle d'agent représentatif sont faits sur des données macroéconomiques dans lesquelles une part de l'information peut être perdue. La non-additivité des fonctions d'utilité qui entraîne des effets de mémoire et des réactions asymétriques aux variations de revenu, est une raison supplémentaire pour que les équations d'Euler ne soient plus valides en théorie. Enfin, la myopie des agents qui anticipent mal leurs revenus peut également expliquer ces rejets.

Nous nous intéressons ici à une explication qui découle de l'environnement

exogène des consommateurs. Un individu parfaitement rationnel et doté d'une fonction d'utilité séparable, ne peut pas respecter la condition d'Euler s'il n'est pas capable de transférer du revenu d'une période à l'autre de façon optimale. Cette situation est fréquente dans la réalité car les individus sont soumis à des contraintes de liquidité. Hayashi (1987) donne plusieurs interprétations de ce que peuvent être ces contraintes de liquidité. Elles peuvent être des contraintes de "cash-in-advance" qui obligent les consommateurs à détenir en ressources exactement le montant de leurs dépenses, à chaque période. Elles peuvent aussi exprimer le fait que les consommateurs sont limités dans le montant de leurs emprunts ou encore que ces emprunts leurs sont accessibles à un taux plus élevé que celui auquel ils pourraient prêter. Dans tous les cas, elles limitent l'accès des consommateurs au crédit et les empêchent d'ajuster leur consommation aux variations positives de leurs revenus futurs anticipés. Ces contraintes expliquent pourquoi les jeunes gens qui étudient dans des domaines ouvrant sur des professions à revenu élevé n'empruntent pas, durant leurs études, l'équivalent de leur revenu permanent sur cette période. Outre le fait que cette hypothèse de contrainte de liquidité est très réaliste, elle permet aux modèles théoriques de consommation d'approcher d'assez près les caractéristiques des données réelles (Zeldes, 1989b; Deaton, 1991).

Nous nous intéressons dans ce survol, au caractère imparfait de l'assurance offerte aux agents par les possibilités de prêt (épargne) et d'emprunt. Malgré les contraintes de liquidité, les agents parviennent à effectuer un certain lissage de leur consommation en accumulant des stocks d'épargne qui leur servent de tampon contre les baisses de revenu. La consommation fluctue moins fortement que les revenus mais reste variable. Cependant, les consommateurs devraient tâcher d'échapper aux contraintes de liquidité en considérant d'autres modes d'assurance contre les variations du revenu. Ils devraient ainsi tirer partie des possibilités de partage de risque que permettent les échanges sur les marchés financiers. Ces échanges peuvent être modélisés comme des contrats dynamiques bilatéraux entre

consommateurs ou encore entre un consommateur et une institution qui représente le marché. Ces contrats stipulent des transferts entre les agents, conditionnels aux états de la nature, c'est-à-dire aux chocs exogènes sur les revenus. Ils sont donc un autre cadre d'étude des comportements de lissage et d'assurance de la consommation.

Cependant, à cause de l'environnement dans lequel ils sont signés, les contrats de partage de risque offrent également une assurance imparfaite. Par exemple, ils peuvent être soumis à des problèmes d'information asymétrique entre les signataires. Dans ce cas, les contrats peuvent toujours incorporer des mécanismes de révélation de l'information mais c'est au prix de l'efficacité de l'assurance offerte. Thomas et Worrall (1990) décrivent un contrat de ce genre. Les problèmes d'asymétrie d'information apparaissent surtout dans les cas où les contrats sont offerts sur des marchés à des consommateurs anonymes, ils ont été décrits par Rothschild et Stiglitz (1976).

Dans le cas où les deux parties sont parfaitement informées l'une sur l'autre, leur incapacité à s'engager dans le contrat constitue un autre facteur d'imperfection. Les contractants sont en effet la plupart du temps incapables de faire exécuter le contrat par les institutions légales parce que les frais de justice sont trop élevés par rapport aux intérêts en jeu, parce que les contingences du contrat ne sont pas toujours parfaitement vérifiables ou parce que les délais imposés par les procès rendent les décisions inopérantes pour les victimes. Pour toutes ces raisons, les contrats doivent inclure des procédures qui dissuadent les signataires de violer l'une ou l'autre de leurs clauses, évitant ainsi les recours à la justice. Ces procédures sont modélisées par des contraintes auto-exécutoires (contraintes d'engagement) incorporées dans le processus de détermination des contrats optimaux. On peut voir ces contraintes comme une autre forme de contrainte de liquidité dans la mesure où elles limitent les transferts réalisables entre les agents dans chaque période, de façon qu'aucun des deux ne soit jamais incité à briser le

contrat à la suite d'un transfert en sa faveur.

Les contrats de partage de risque sont donc une autre forme d'environnement possible pour étudier les comportements de consommation. Ce sont des environnements plus riches dans la mesure où ils n'interdisent pas l'épargne personnelle, tout en élargissant les possibilités d'assurance. Les contraintes auto-exécutoires endogénéisent les contraintes de liquidité en les faisant découler directement du comportement des agents et de la forme de leurs processus de revenus. En même temps, elles laissent la possibilité d'une forme d'emprunt entre les agents.

Dans ce survol nous présentons des études sur le comportement de lissage de la consommation dans les deux environnements décrits ci-dessus : d'abord celui où le consommateur peut épargner mais est soumis à des contraintes de liquidité, ensuite celui où il lisse sa consommation par le biais d'un contrat de partage de risque soumis à des contraintes d'engagement. Dans la section 1.2 nous énonçons les principes de la théorie du revenu permanent et expliquons dans la sous-section 1.2.1 comment les études justifient l'existence des contraintes de liquidité. La sous-section 1.2.2 présente des modèles intertemporels de consommation et d'épargne avec contrainte de liquidité et leurs prédictions en terme de consommation. La section 1.3 se consacre aux modèles de partage de risques avec contraintes auto-exécutoires. La sous-section 1.3.1 présente les contrats de référence. Dans la sous-section 1.3.2 nous décrivons des modèles particuliers dans lesquels les revenus sont endogènes. Enfin, la sous-section 1.3.3 introduit les contrats de partage de risque avec opportunités externes qui permettent l'auto-assurance à l'intérieur d'une relation bilatérale de partage de risque. Cette revue de littérature ne prétend pas être exhaustive. Elle compare les prédictions de la dynamique de la consommation apportées par différents cadres théoriques.

## 1.2 Modèles de consommation avec agent représentatif

### 1.2.1 Pertinence de l'hypothèse des contraintes de liquidité

La théorie du cycle de vie suppose que le consommateur fait ses choix de consommation de façon à optimiser son utilité intertemporelle sur un horizon de vie infini, étant donné un flux de revenus dont il connaît les caractéristiques. Tout consommateur doté d'une fonction d'utilité  $u$  concave va chercher à lisser sa consommation en opérant des transferts de revenu de façon à égaliser ses utilités marginales entre les périodes. Si ce consommateur peut prêter et emprunter au même taux  $r$  et qu'il escompte le futur au taux  $\delta$  alors le modèle général s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\{c_t\}_{t=0 \dots \infty}} \quad & E\left[\sum_{t=0}^{\infty} (1 + \delta)^{-t} u(c_t)\right] \\ \text{s/c} \quad & A_{t+1} = (1 + r)(A_t + y_t - c_t) \text{ pour tout } t. \end{aligned}$$

$A_t$  représente le stock d'épargne ou de dette que le consommateur a pu accumuler dans les périodes précédentes. Le processus des revenus  $y_t$  est connu mais ses réalisations dans les périodes sont inconnues si bien que le problème est écrit en espérance. Le consommateur fait ses choix de consommation pour la période  $t$  de façon à respecter la condition de premier ordre suivante, appelée condition d'Euler :

$$u'(c_t) = E_t\left[\frac{1+r}{1+\delta} u'(c_{t+1})\right]. \quad (1.1)$$

Même en l'absence d'incertitude, un consommateur qui a de l'aversion pour le risque prête et emprunte afin de satisfaire cette condition de lissage.

La condition d'Euler a plusieurs implications sur la consommation, selon les hypothèses que l'on retient sur l'environnement du consommateur. Ainsi, si le

consommateur est doté d'une fonction d'utilité quadratique, on obtient la propriété d'équivalent certain :  $E_t u'(c_{t+1}) = u'(E_t c_{t+1})$ . Alors pour  $\delta = r$ , la condition d'Euler implique que la consommation suit une martingale :  $E_t c_{t+1} = c_t$ . Dans ce cas, la consommation à chaque période est égale à une fraction de la somme escomptée de tous les revenus futurs anticipés et de la richesse de début de période. Ceci est compatible avec la théorie du revenu permanent de Friedman (1957) selon laquelle la consommation à chaque période est égale au revenu permanent, qui est déterminé par la valeur espérée de toutes les ressources sur l'horizon de vie.

Les prédictions du modèle sont donc que la variation de la consommation entre les périodes  $t - 1$  et  $t$  est non prévisible en  $t - 1$  et ne dépend que de l'arrivée d'information en  $t$  sur l'évolution du processus des revenus. Le revenu permanent ne varie donc qu'avec les anticipations du consommateur sur ses revenus futurs. La variation de la consommation est non corrélée avec les variables retardées et en particulier avec les variations retardées du revenu (condition d'orthogonalité). Elle n'est pas sensible à la réalisation courante du revenu mais à tous les revenus espérés futurs. La consommation moyenne doit être constante. Enfin, Deaton (1992) explique que la réponse de la consommation à des chocs non anticipés de revenu dépend des caractéristiques du processus considéré pour ce dernier. Ses estimations sur les revenus agrégés du travail aux Etats-Unis révèlent des processus fortement persistants pour lesquels la consommation doit être plus volatile que le revenu.

Or, les tests empiriques rejettent ces implications. Les données agrégées révèlent en effet une "croissance excessive" et une "sensibilité excessive" de la consommation au revenu courant, par rapport aux prédictions théoriques du modèle de revenu permanent. Dans les données en effet, la consommation américaine croît à un taux de 2% par année environ et varie avec le revenu courant. Pour expliquer cela, Pischke (1995) affirme que, la théorie du revenu permanent étant fondée sur un modèle d'agent représentatif, elle peut être valide sur des données

microéconomiques mais ne tient plus en agrégé. Mais dans ce cas, les données microéconomiques devraient retrouver les prédictions du modèle de revenu permanent. Or Carroll (1994) montre que ce n'est pas le cas. Il montre que la consommation des ménages américains dépend du revenu courant mais pas des variations du revenu futur. Flavin (1981) met en évidence une corrélation entre les variations de la consommation et les variations retardées du revenu qui viole la condition d'orthogonalité et il montre que la consommation répond à des variations prévisibles du revenu. L'hypothèse de revenu permanent ne correspond donc pas aux données américaines.

Zeldes (1989a) explique que l'hypothèse d'équivalent certain est trop forte et qu'elle omet un facteur déterminant du comportement des agents qui est l'épargne par motif de précaution. Les consommateurs ont en effet une préoccupation de se couvrir contre les risques de chocs sur les revenus futurs qui va au-delà du simple lissage intertemporel. Carroll et Samwick (1995) montrent l'existence dans les données américaines d'un "buffer-stock", c'est-à-dire d'un stock d'épargne tampon qui sert de recours contre les chocs négatifs imprévisibles de revenu. Kimball (1990) décrit cet effet comme le "motif de précaution" qui entraîne que le niveau des variables de décision des agents (comme l'épargne ou la consommation) est influencé par le niveau de risque qu'ils subissent. Ce motif de précaution apparaît chaque fois que l'utilité de l'agent concerné a une dérivée troisième positive, c'est-à-dire une utilité marginale convexe. Cependant, les tests empiriques rejettent l'hypothèse que la condition d'Euler (1.1) soit respectée dans les données, même pour des spécifications de fonctions d'utilité avec motif de précaution (Hansen et Singleton, 1983; Mankiw, Rotemberg et Summers, 1985).

Le rejet de l'équation d'Euler (1.1) a amené à penser qu'il existe des imperfections sur le marché qui pourraient justifier la violation de cette condition de premier ordre. L'imperfection que nous retenons ici est celle des contraintes de liquidité que les agents subissent sur les marchés. Ces contraintes de liquidité cor-

respondent à une réalité sur la difficulté qu'ont les agents à obtenir du crédit. Même si un consommateur possède la certitude que son revenu va considérablement augmenter dans le futur, il est rare qu'une banque accepte de lui prêter de l'argent avant que la hausse de revenu se soit réellement produite. Si on introduit dans le modèle précédent une contrainte de liquidité de la forme :

$$A_t \geq 0 \quad \forall t = 0, 1, 2, \dots,$$

qui signifie que le consommateur peut épargner mais ne peut jamais emprunter, alors la condition d'Euler devient :

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\delta} E_t u'(c_{t+1}) + (1+r)\lambda_t,$$

où  $\lambda_t$  est le multiplicateur de la contrainte de liquidité au temps  $t$ . On a alors comme condition de premier ordre :

$$u'(c_t) \geq \frac{1+r}{1+\delta} E_t u'(c_{t+1}). \quad (1.2)$$

La contrainte de liquidité implique que l'équation d'Euler (1.1) ne peut pas être respectée quand le consommateur est contraint sur son crédit ( $\lambda_t > 0$ ). Zeldes (1989b) teste la condition (1.2) sur des données microéconomiques américaines. Il trouve que pour les ménages ayant les revenus les plus faibles, c'est-à-dire pour ceux qui ont la plus grande probabilité d'avoir besoin d'emprunter et de frapper la contrainte de liquidité, la condition (1.2) tient avec inégalité stricte. Pour les ménages les plus riches, la condition d'Euler est respectée avec égalité. Ces tests soutiennent l'hypothèse de l'existence de contraintes de crédit qui empêchent les consommateurs les plus pauvres de soutenir leur niveau de consommation en cas de réalisation d'un choc négatif sur leur revenu. Cette incapacité à consommer aujourd'hui des revenus qu'ils toucheront en espérance plus tard, oblige les consommateurs à restreindre leur consommation dans les périodes où leur revenu est faible et où leur stock d'épargne est insuffisant pour en assurer le niveau optimal.



Garcia, Lusardi et Ng (1995) testent également l'existence de la contrainte de liquidité mais utilisent des variables socio-économiques pour séparer la population en un groupe plus susceptible d'être contraint et un groupe d'individus non-contraints. Ils s'assurent de retrouver la caractéristique soulignée par Flavin (1981) que la différence première sur la consommation est positivement corrélée avec la différence première retardée du revenu. Réalisant plusieurs estimations du modèle de consommation, ils mettent en évidence que les contraintes de liquidité sont une explication plus plausible de cette sensibilité excessive de la consommation par rapport au revenu, que l'hypothèse de myopie des agents ou l'hypothèse de non-séparabilité temporelle des préférences. Les contraintes de liquidité constituent donc un autre motif d'accumulation d'épargne : les consommateurs accumulent des actifs afin de se constituer un substitut au crédit et de pouvoir soutenir un niveau satisfaisant de consommation en désépargnant en cas de baisse future du revenu. Cette raison et le motif de précaution justifient l'observation de réserves d'épargne dans les données. Elle explique aussi pourquoi le lissage de la consommation est imparfait. Nous allons voir dans la section suivante comment les modèles intertemporels de consommation avec contraintes de liquidité décrivent les mouvements de la consommation.

### 1.2.2 Modèles de consommation avec contrainte de liquidité

Les études du comportement de consommation et d'épargne en présence de contraintes de liquidité sont nombreuses. Nous présentons ici celles qui orientent leurs résultats vers la description du comportement de consommation.

Schechtman (1976) étudie le cas d'un consommateur représentatif qui est soumis à des revenus aléatoires  $w$  à chaque période, revenus qui sont identiquement et indépendamment distribués (iid). Le revenu disponible  $y_t$  de l'agent dans une

période est constitué de ce revenu du travail et de son épargne de la période précédente :  $y_t = w + x_{t-1}$ . Dans la période  $t$  il partage ce revenu disponible entre sa consommation et son épargne pour la période suivante :  $c_t + x_t = y_t$ . La contrainte de liquidité provient d'un rationnement de crédit : le consommateur ne peut jamais emprunter, si bien que le montant d'épargne  $x_t$  ne doit jamais être négatif. Le consommateur est doté d'une fonction d'utilité  $u(c_t)$  invariante et séparable dans le temps et strictement concave. Il réalise ses choix de consommation et d'épargne de façon à maximiser l'espérance de la somme de ses utilités périodiques sur son horizon de vie. Le consommateur risicophobe souhaite limiter les variations de sa consommation entre les périodes. Pour cela il doit réaliser des transferts de revenu d'une période à l'autre, transferts qui sont limités dans un sens par l'existence de la contrainte de crédit. Dans ce modèle, le taux d'intérêt et le taux de préférence pour le présent sont nuls. Schechtman résout le problème analytiquement sans spécifier la fonction d'utilité. Ses résultats sont donc indépendants de la forme des préférences du consommateur, exception faite de son aversion pour le risque. En utilisant la récursivité du modèle et une fonction de valeur selon le principe des équations de Bellman, il prouve l'existence de fonctions de consommation et d'épargne,  $c(y)$  et  $x(y)$ , invariantes quand l'horizon de vie est infini. Ces fonctions sont continues et non décroissantes dans le revenu disponible. Schechtman peut alors montrer que la consommation dans les premières périodes n'est jamais lisse et a tendance à croître, dans une période, avec la réalisation du revenu courant. La consommation évolue dans un intervalle borné inférieurement par 0 et supérieurement par la plus grande réalisation possible du revenu aléatoire  $w$  et Schechtman montre que, à l'infini, elle tend vers la moyenne des revenus. La consommation limite est donc constante. Le stock  $y$  de revenu disponible, c'est-à-dire en fait le stock d'épargne, tend, dans le temps, vers l'infini. Il apparaît donc qu'à la limite, la consommation est bien lisse mais que pour assurer ce lissage il est nécessaire d'accumuler à l'infini afin de se prémunir contre une éventuelle série infinie de

réalisations faibles de revenus.

Les résultats de Schechtman sont intéressants dans la mesure où ils sont obtenus analytiquement, sans recours à des hypothèses sur la forme des préférences. Cependant ils sont peu réalistes. Les données réelles américaines montrent que la consommation fluctue toujours avec le revenu, quoique moins fortement, et que jamais les consommateurs n'accumulent des montants infinis d'épargne. En réalité, l'épargne est procyclique et varie avec le revenu agrégé. Ces résultats limites peuvent toutefois être dus aux hypothèses particulières du modèle et ne remettent pas en cause l'influence des contraintes de liquidité sur la variabilité de la consommation.

Deaton (1991) effectue une analyse plus systématique du comportement d'épargne en présence de contraintes de liquidité. Il caractérise les fonctions de consommation pour différentes hypothèses de comportement des revenus puis il effectue des simulations numériques des comportements de la consommation, de l'épargne et des revenus que lui donne son analyse théorique afin de comparer ses résultats avec les données réelles.

Deaton (1991) discute d'abord le choix du taux d'escompte du futur (taux de préférence pour le présent) et du taux d'intérêt. Appelons  $\delta$  le taux d'escompte et  $r$  le taux d'intérêt. Si  $\delta \leq r$ , le taux d'intérêt sur les placements est élevé et le consommateur a une faible préférence pour le présent. Il accumule très vite un stock d'épargne qui tend, dans le temps, vers l'infini. Comme il a toutes les incitations à épargner, la contrainte de liquidité n'est pas contraignante et le modèle manque de cohérence. C'est pourquoi Deaton considère que  $\delta > r$ . Avec cette hypothèse, il devient coûteux pour le consommateur de détenir de l'épargne, celle-ci a donc uniquement pour rôle de protéger la consommation contre des baisses de revenu dans le contexte où le consommateur ne peut pas emprunter. Si la fonction d'utilité pour une période est non seulement concave mais possède

aussi une dérivée convexe, alors le consommateur a un motif de précaution pour épargner qui renforce l'effet de la contrainte de liquidité et qui assure que l'individu va se constituer un stock d'épargne malgré le taux d'intérêt élevé. À ces quelques hypothèses près, Deaton a le même modèle que Schechtman et résout le problème :

$$\max_{\{c_t\}_{t=0 \dots \infty}} E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} (1 + \delta)^t v(c_t) \right]$$

sujet à :

$$\begin{cases} A_{t+1} = (1 + r)(A_t + y_t - c_t) & i) \\ A_t \geq 0 & ii) \end{cases} \quad \forall t = 0 \dots \infty$$

Le revenu  $y_t$  est aléatoire iid, tiré d'une loi normale.  $A_t$  est le stock d'épargne au début de la période  $t$ . La contrainte de liquidité est représentée par *ii*). La fonction d'utilité pour une période,  $v(c_t)$ , est invariante dans le temps et strictement concave. Notons  $x_t = A_t + y_t$  le revenu disponible à la période  $t$ , alors il existe une fonction de consommation stationnaire  $f(x)$  qui donne la consommation optimale en fonction de  $x_t$ . Cette fonction est telle qu'il existe un  $x^*$  unique tel que  $c = f(x) = x$  si  $x \leq x^*$  et  $c = f(x) < x$  si  $x > x^*$ . Ainsi, si le revenu disponible est élevé, le consommateur en épargne une partie, mais s'il est trop faible, il préfère sauvegarder sa consommation de la période en sacrifiant son épargne. Le revenu de la période suivante est alors constitué uniquement de la partie aléatoire  $y$  et en cas de réalisations consécutives de mauvais états de la nature, le stock d'épargne reste nul et la consommation ne peut pas être convenablement lissée. Sous ces conditions le stock d'épargne ne tend jamais vers l'infini et peut régulièrement tomber à zéro quand la réalisation du revenu est trop faible.

Deaton réalise des simulations sur son modèle en posant  $v(c_t) = \frac{1}{1-\rho} c_t^{1-\rho}$ . Il trouve un chemin de consommation plus lisse que les réalisations du revenu aléatoire et un niveau d'épargne plutôt faible, ce qui correspond assez aux données américaines. On voit donc que le seul changement de l'hypothèse sur les taux d'escompte et d'intérêt permet de changer la conclusion sur le comportement du stock d'épargne.

Cependant les données générées par cette simulation ne permettent pas de retrouver, entre les variations de la consommation et les variations retardées du revenu, la corrélation que Flavin (1981) trouve dans les données américaines. Deaton ne remet pas en question le fait que les contraintes de liquidité soient une bonne explication de la variabilité de la consommation. Cependant il semble que l'hypothèse de revenus aléatoires iid ne soit pas appropriée pour retrouver les caractéristiques des données réelles. En pratique, il existe toujours dans le processus des revenus, une certaine corrélation qu'on devrait prendre en compte. Deaton reprend donc ensuite le même modèle mais pour un processus de revenu autorégressif d'ordre 1 (AR(1)) :  $y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + \epsilon_t$ . A présent le stock d'épargne n'est plus la seule variable contenant de l'information sur l'histoire passée, le revenu  $y_t$  est également déterminé par les réalisations précédentes des états de la nature et est déterminant dans le calcul de l'espérance des revenus futurs. Aussi la fonction de consommation optimale va dépendre de  $y_t$  autant que du stock d'épargne, on la note  $c = f(x, y)$ . Alors, il existe un  $x^*$  tel que  $c = x$  si  $x \leq x^*$  et  $c < x$  si  $x > x^*$ . Mais la valeur  $x^*$  dépend à présent de la réalisation de  $y$ . Si le coefficient d'autorégression  $\phi$  est positif, alors  $x^*$  et la fonction  $f(x, y)$  sont plus élevés pour des valeurs plus élevées de  $y$ . Ceci s'explique bien par le fait que quand  $\phi > 0$ , un revenu élevé en  $t$  a de grandes chances d'entraîner des revenus élevés dans les périodes suivantes, aussi l'épargne devient moins nécessaire et comme elle est par ailleurs coûteuse, le montant de revenu disponible au-dessus duquel le consommateur commence à épargner va être relativement élevé.

Les simulations à partir de ce modèle donnent un chemin de consommation un peu plus lisse que le revenu. L'épargne varie dans le même sens que le revenu et il peut exister de grands stocks positifs aussi bien que des périodes assez longues où l'épargne est nulle. La conclusion importante est ici que plus le coefficient d'autorégression  $\phi$  est proche de 1 et moins le lissage de la consommation est efficace. Dans le cas des revenus iid ( $\phi = 0$ ), l'écart type de la consommation est

la moitié de celui du revenu. Dans le cas où  $\phi$  est proche de 1 les deux écarts types sont pratiquement les mêmes. C'est que l'autocorrélation positive des revenus entraîne qu'il faut plus d'actifs pour couvrir efficacement la consommation, ce qui est plus coûteux. Ainsi le lissage de la consommation est toujours possible quand les revenus sont corrélés mais il est plus efficace si la corrélation est négative ou faiblement positive.

Précisant avec encore plus de détails les comportements possibles des revenus, Deaton étudie ensuite un modèle avec revenus non stationnaires. L'hypothèse que les consommateurs considèrent que leur revenu est croissant dans le temps à un taux de croissance stationnaire, est réaliste. Dans ce cas, le consommateur qui veut lisser sa consommation sur son horizon devrait emprunter dans le début de sa vie. Le fait que les données ne montrent pas que les jeunes gens s'endettent dans la mesure de leur espérance de revenus futurs souligne la pertinence de l'hypothèse de contraintes de liquidité.

Deaton obtient des résultats différents selon qu'il considère que le taux de croissance du revenu est iid ou autocorrélé. Dans le cas où le taux de croissance des revenus est iid, toutes les simulations finissent par atteindre un état où le stock d'épargne est nul et par y rester. Dans les périodes où la croissance du revenu est élevée l'individu pourrait épargner, mais l'épargne est coûteuse et le consommateur préfère accroître sa consommation pour se rapprocher du niveau qu'il aurait pu atteindre s'il n'avait pas été contraint sur les emprunts au début de sa vie. Le stock d'épargne est nul ou disparaît très vite et la consommation se retrouve suivre le chemin des revenus.

Dans le cas où le taux de croissance des revenus est corrélé, les simulations permettent de mettre en évidence des stocks d'épargne non nuls. L'épargne varie alors en fonction des cycles de croissance. En début de période d'expansion le consommateur désépargne et finance sa consommation uniquement par son revenu,

mais dès que le taux de croissance du revenu diminue, le consommateur anticipe une période de récession et commence à épargner. Si bien que l'épargne est nulle dans les périodes d'expansion et qu'elle devient positive en début de période de récession pour diminuer tranquillement pendant ces périodes.

Cependant les données réelles ne se comportent pas selon ces schémas. Dans les données le stock d'épargne est assez faible et plutôt procyclique. Le problème vient du fait que lorsqu'on cherche à approcher au mieux le mouvement des variables, on observe les caractéristiques des données macroéconomiques. Ces données agrègent les comportements de tous les agents, contraints ou non sur leurs emprunts. C'est donc le modèle d'agent représentatif que Deaton remet en cause et non l'existence de l'effet des contraintes de liquidité sur les comportements de consommation.

Cet article de Deaton est une étude très complète du modèle d'épargne avec contrainte de liquidité. Il montre que la variabilité de la consommation peut être expliquée de façon satisfaisante par le fait que les consommateurs ont un accès restreint au crédit. Il apparaît qu'un processus de revenus stationnaire iid est suffisant pour générer des comportements de consommation et d'épargne proches des comportements réels agrégés. Les processus sophistiqués de revenus croissants entraînent des difficultés de résolution et d'interprétation. Les processus stationnaires avec autocorrélation donnent une bonne intuition des phénomènes mais n'offrent pas de résultats beaucoup plus proches des données réelles agrégées que les processus iid.

## 1.3 Contrats de partage de risque

### 1.3.1 Contrats sans engagement

Les modèles de consommation avec agent représentatif comme ceux qu'on vient de décrire, considèrent que les consommateurs effectuent un lissage intertemporel de leur consommation par le biais de leur accumulation d'épargne sans risque. Pour généraliser l'étude du comportement de la consommation, il est nécessaire de sortir de ce contexte d'agent représentatif pour modéliser les interactions entre agents sur les marchés financiers. Dans ce cadre, la consommation est lissée par l'échange de risque entre les agents. Dans une étude empirique, Mace (1991) soutient que le partage de risque est déterminant dans la consommation américaine. Les consommateurs s'assurent entre eux contre les risques idiosyncratiques si bien que leurs consommations individuelles sont reliées à la consommation agrégée et non plus aux caractéristiques de leurs revenus personnels. Mace (1991) estime un modèle dans lequel les variations de la consommation individuelle sont expliquées par les variations de la consommation agrégée et par les variations du revenu individuel. Si les données sont caractérisées par du partage de risque, le coefficient des variations de la consommation agrégée devrait être significativement égal à un et celui des variations de revenu, non significativement différent de zéro. Cette hypothèse tient pour la plupart des catégories de biens de consommation. Les risques idiosyncratiques peuvent encore expliquer une partie des variations de la consommation individuelle. Mace (1991) conclue donc à l'existence d'un partage de risque incomplet entre les consommateurs.

Cette conclusion renforce l'intérêt que l'on porte ici à l'étude des contrats de partage de risque rendus imparfaits par les contraintes d'engagement. Quand les agents ne peuvent pas s'engager parfaitement à respecter leurs contrats, ceux-ci doivent prendre en compte des contraintes auto-exécutoires (ou contraintes d'en-



gagement) qui garantissent le respect du contrat par chaque participant, à chaque période. Ces contraintes sont assimilables à des contraintes de liquidité dans la mesure où elles limitent l'étendue des transferts réalisables entre les agents. Dans ce cas, ce sont des contraintes de liquidité endogènes, qui sont dues au comportement des consommateurs dans le contrat, à leur incapacité à s'engager pleinement. Les contrats de partage de risque avec contraintes d'engagement sont donc un moyen d'endogénéiser les contraintes de liquidité dans l'étude des comportements de consommation.

Thomas et Worrall (1988) analysent un contrat de partage de risque avec contraintes auto-exécutoires dans le contexte du marché du travail. Ils supposent un environnement dans lequel un travailleur a le choix entre s'embaucher au salaire de marché aléatoire ou s'entendre avec son employeur dans un contrat qui fixe le salaire pour chaque période en fonction de la réalisation du salaire de marché. Le salaire de marché suit un processus iid. Le travailleur a de l'aversion pour le risque alors que l'employeur est neutre vis-à-vis du risque, aussi le travailleur est prêt à accepter une baisse de son espérance de salaire par rapport au marché en échange d'une moins grande variabilité. L'employeur, lui, est prêt à supporter le risque à la place du travailleur pourvu que le salaire soit en moyenne inférieur à celui du marché. Il y a donc des gains à l'échange, des surplus à tirer du contrat. Ici, le salaire prévu par le contrat détermine la consommation du travailleur, les transferts entre les agents sont la différence entre le salaire de marché et le salaire de contrat. Si cette différence est négative, le paiement va de l'employeur vers le travailleur, si elle est positive, c'est le contraire.

Si les coûts d'exécution sont nuls, c'est-à-dire si les agents peuvent s'engager parfaitement, on peut trouver un contrat à salaire fixe qui fait reposer tout le risque sur l'employeur et assure parfaitement le travailleur. Thomas et Worrall (1988) trouvent la forme du contrat quand aucun des deux participants ne peut s'engager dans la relation. Les coûts d'exécution du contrat à salaire fixe sont alors

très élevés : le travailleur veut toujours le briser quand le salaire de marché est supérieur au salaire prévu par le contrat et l'employeur dans le cas contraire. Aussi le modèle doit prendre en compte des contraintes auto-exécutoires qui garantissent qu'à chaque période, aucun des participants n'a intérêt à sortir du contrat. Ces contraintes peuvent empêcher le contrat d'atteindre sa solution de premier rang, c'est-à-dire le contrat à salaire fixe.

La relation a lieu sur un horizon infini, ce qui permet la réalisation des gains à l'échange. Sur un horizon infini, il est en effet possible de compenser toutes les pertes de court terme des agents à rester dans le contrat, par des gains de long terme. La solution va dépendre du facteur d'escompte des agents : plus celui-ci est faible (plus la préférence pour le présent est élevée) et plus il est difficile de compter sur les gains futurs pour garder les agents fidèles au contrat.

Le modèle est le suivant. On a un nombre infini de périodes et un ensemble discret d'états de la nature. A chaque état de la nature  $s \in \{1, \dots, S\}$  correspond un salaire de marché  $y(s)$  tel que  $y(1) < \dots < y(S)$ . Les états de la nature sont identiquement et indépendamment distribués entre les périodes. Les coûts d'embauche et de débauche sont nuls si bien que le travailleur et l'employeur peuvent à chaque période retourner sans coût sur le marché. Les deux parties ont le même facteur d'escompte  $\alpha \in [0, 1]$ . On fait l'hypothèse que dès que l'une des deux parties brise le contrat, elle est condamnée pour toujours à l'autarcie, c'est-à-dire au salaire de marché.

Le contrat est négocié en  $t = 0$  et spécifie un salaire conditionnel à l'état de la nature pour chaque période. Un contrat  $\delta$  est donc une séquence de fonctions  $\{w(h_t)\}_{t=1}^{\infty}$  où  $h_t$  est l'histoire des états passés  $h_t = (s_1, s_2, \dots, s_t)$  et  $w(h_t)$  le salaire prévu par le contrat. On note  $U(\delta, h_t)$  et  $V(\delta, h_t)$  les espérances de surplus futurs

escomptés, respectivement du travailleur et de l'employeur. Ainsi :

$$U(\delta, h_t) = u(w(h_t)) - u(y(s_t)) + E_t \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \alpha^{\tau-t} [u(w(h_\tau)) - u(y(s_\tau))],$$

$$V(\delta, h_t) = y(s_t) - w(h_t) + E_t \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \alpha^{\tau-t} [y(s_\tau) - w(h_\tau)],$$

où  $u$  est la fonction d'utilité strictement concave du travailleur. Dans ces conditions, les contraintes auto-exécutoires que l'on doit imposer au contrat sont :

$$U(\delta, h_t) \geq 0 \quad \forall h_t,$$

$$V(\delta, h_t) \geq 0 \quad \forall h_t.$$

Alors les participants au contrat sont assurés de toujours avoir au moins autant aujourd'hui et dans le futur en restant dans le contrat qu'en le brisant et en retournant en autarcie sur le marché. Un contrat est auto-exécutoire s'il satisfait ces deux contraintes pour toutes les périodes et pour toutes les réalisations possibles de  $s$  dans ces périodes. Le contrat optimal doit maximiser les surplus des agents sous les contraintes auto-exécutoires et être efficace au sens de Pareto. Le problème de maximisation prend la forme d'une équation de Bellman qui détermine une fonction de valeur. Cette fonction donne le surplus espéré futur maximal de l'agent neutre vis-à-vis du risque comme une fonction du surplus accordé à l'agent riscophobe. Ces surplus sont bornés par les contraintes d'engagement. Le partage des surplus entre les deux agents au moment de la signature en  $t = 0$  est exogène et dépend du pouvoir de négociation de chacun à cette date.

Les résultats de Thomas et Worrall (1988) sont les suivants. Pour toute histoire  $(h_t)$  où l'état  $s$  s'est réalisé en  $t$ , le salaire  $w(h_t)$  dans un contrat efficace est contenu dans un intervalle  $[\underline{w}_s, \bar{w}_s]$  indépendant du temps :

$$w(h_t) = w(h_{t-1}, s) = \begin{cases} \bar{w}_s & \text{si } w(h_{t-1}) > \bar{w}_s \\ w(h_{t-1}) & \text{si } w(h_{t-1}) \in [\underline{w}_s, \bar{w}_s] \\ \underline{w}_s & \text{si } w(h_{t-1}) < \underline{w}_s \end{cases}$$

Le contrat lisse donc le salaire au maximum en l'égalisant d'une période à l'autre chaque fois que c'est possible. Mais les contraintes auto-exécutoires imposent des bornes sur le salaire en fonction de la réalisation de l'état de la nature. Dans chaque état, le salaire ne peut pas descendre trop en dessous du salaire de marché sans que le travailleur soit incité à quitter le contrat et ne peut pas monter trop au-dessus sans que l'employeur ne résilie à son tour. Le salaire, qui est ici la consommation du travailleur, suit donc un processus de Markov stationnaire : le salaire en  $t$  ne dépend que de l'état de la nature en  $t$  et du salaire en  $t - 1$ . On peut montrer aussi que pour tout salaire de marché  $y(k) > y(q)$  on a  $\underline{w}_k > \underline{w}_q$  et  $\bar{w}_k > \bar{w}_q$  avec  $y(s) \in [\underline{w}_s, \bar{w}_s]$ . Les intervalles contiennent donc les salaires de marché et sont croissants dans les états de la nature. Enfin, le contrat optimal exige que  $\underline{w}_1 = y(1)$  et  $\bar{w}_S = y(S)$ , ce qui limite les fluctuations du salaire de contrat à l'intérieur des bornes offertes par le marché.

Thomas et Worrall (1988) donnent des résultats de statique comparée. On peut montrer que les intervalles  $[\underline{w}_s, \bar{w}_s]$  pour  $s = 1, \dots, S$ , sont croissants dans le facteur d'escompte  $\alpha$  ( $\underline{w}_s$  est non croissant et  $\bar{w}_s$  non décroissant en  $\alpha$ ). Il existe un  $\alpha^* < 1$  tel que pour  $\alpha \in (\alpha^*, 1)$  on a  $\bar{w}_1 > \underline{w}_S$ , ce qui signifie que si le facteur d'escompte est suffisamment grand, l'intersection des intervalles de salaire est non vide. Alors il est possible d'atteindre dans le long terme une situation où le salaire constant est auto-exécutoire. Par exemple si le salaire de première période est compris dans l'intersection de tous les intervalles alors le salaire est constant dès la première période. Si le salaire de première période est inférieur à la plus faible borne  $\underline{w}_1$ , alors l'évolution des réalisations des états de la nature ne peut que le faire augmenter. Dès que l'état  $S$  se réalise, le salaire atteint le niveau  $\underline{w}_S$  et reste à ce niveau pour toujours. Enfin on peut montrer l'existence d'un  $\alpha_* \in (0, \alpha^*)$  tel que si le facteur d'escompte  $\alpha$  des deux agents appartient à  $(0, \alpha_*]$ , alors  $\underline{w}_s = \bar{w}_s = y(s) \quad \forall s$  et si  $\alpha$  appartient à  $(\alpha_*, 1)$  alors  $\underline{w}_s < \bar{w}_s \quad \forall s$ . Ainsi, si le taux de préférence pour le présent est trop grand (le facteur d'escompte

$\alpha$  est trop faible) alors les intervalles se réduisent tous à un point et le seul contrat possible est celui qui offre le salaire de marché à chaque période. C'est que les agents ne valorisent pas suffisamment le futur pour que le contrat puisse les retenir aujourd'hui sur la promesse de surplus élevés plus tard.

Le modèle de contrat dynamique auto-exécutoire de Thomas et Worrall (1988) met donc en évidence une corrélation entre la consommation courante et l'histoire passée des revenus qui s'approche de ce que l'on trouve dans les données américaines. Cependant, il montre aussi que pour des taux d'escompte assez élevés, un lissage parfait de la consommation peut être atteint en un nombre fini de périodes, ce qui est moins proche de la réalité.

Kocherlakota (1996) reprend en substance le modèle de Thomas et Worrall (1988) mais en considérant le partage de risque entre deux individus riscophobes. Les revenus aléatoires des deux agents sont indépendants et suivent le même processus de Markov. Dans ce cas, le partage de risque de premier rang est atteint quand le rapport des utilités marginales des deux agents est constant, mais le lissage parfait des consommations est impossible puisqu'aucun des agents riscophobes n'est prêt à supporter tout le risque de l'autre. Kocherlakota (1996) définit le contrat comme un jeu dynamique et en cherche l'équilibre parfait en sous-jeu. Il montre que cet équilibre est la solution de l'équation de Bellman décrite dans Thomas et Worrall (1988). Dans son modèle, l'autarcie est encore la punition pour bris de contrat et il introduit les mêmes contraintes auto-exécutoires. Kocherlakota (1996) étudie le chemin des utilités espérées futures à l'optimum. Il note  $u_t$  l'utilité espérée allouée par le contrat à l'un des agents après l'histoire en  $t$ .

$$u_t \equiv E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^{\tau} u(c_{t+\tau}).$$

Le facteur d'escompte est ici  $\beta$ . Cette utilité est bornée inférieurement, pour chacun des agents, par l'utilité en autarcie à cause des contraintes d'engagement. Elle est bornée supérieurement par le total des gains à l'échange en  $t$ . Comme dans

Thomas et Worrall (1988), si le taux d'escompte est suffisamment faible (c'est-à-dire si  $\beta$  est suffisamment élevé), il est possible d'atteindre le premier rang. Au premier rang les deux agents peuvent obtenir la même utilité si le contrat répartit toujours également le revenu agrégé entre eux, mais l'un des deux peut aussi toujours obtenir plus que l'autre. Il existe donc un intervalle d'utilités espérées possibles pour un agent au premier rang, quand le premier rang peut être atteint à l'équilibre. Si l'utilité  $u_0$  accordée à un agent dans la première période est inférieure (resp. supérieure) à la borne inférieure (resp. supérieure) des utilités possibles au premier rang, alors la dynamique du contrat est telle que  $u_t$  converge dans le temps vers cette borne. L'utilité espérée accordée à un individu après une histoire donnée dépend alors du partage des gains à l'échange en première période. Par contre, si  $\beta$  est faible et que le premier rang ne peut pas être atteint à l'équilibre, Kocherlakota (1996) montre que la distribution de probabilité sur  $u_t$  converge vers une distribution qui est indépendante du partage initial des gains à l'échange.

Enfin, le processus markovien des revenus introduit une persistance dans la consommation. Là où Thomas et Worrall (1988) montrent que la consommation dans une période dépend du revenu courant et de la consommation de la période précédente, Kocherlakota (1996) met en évidence une corrélation positive entre la consommation courante et tous les revenus passés, quand le premier rang n'est pas atteint à l'équilibre. Il propose alors une méthodologie de test empirique basée sur ces corrélations pour déterminer si la dynamique de la consommation observée s'explique plutôt par la présence d'asymétrie d'information ou par des problèmes d'engagement. Dans les modèles avec asymétrie d'information, la répartition des utilités entre deux agents dans une période n'est pas corrélée avec l'histoire de la relation comme c'est le cas dans les modèles avec absence d'engagement. Il propose donc de régresser les consommations courantes avec les rapports d'utilité marginales courants et passés et de rejeter la présence d'information asymétrique

si on trouve un effet des variables passées.

Kletzer et Wright (1996) reprennent le modèle de Thomas et Worrall (1988) dans le cadre des contrats de dette entre pays souverains. Les transferts stipulés par le contrat sont des prêts ou des remboursements. Les relations de financement entre pays souverains sont une bonne application des contrats sans engagement parce qu'il n'existe vraiment pas d'institution supra-nationale capable de faire exécuter les contrats internationaux. Dans l'environnement de Kletzer et Wright (1996), l'agent riscophobe est un emprunteur et il y a plusieurs prêteurs neutres vis-à-vis du risque. Ils interprètent le contrat comme un jeu répété dont ils cherchent l'équilibre parfait en sous-jeu et ils montrent que malgré la multiplicité des prêteurs, il est possible de trouver un équilibre qui soit à l'épreuve des coalitions et de la renégociation. L'intérêt de cet article est de démontrer que le retour à l'autarcie en cas de bris de contrat est une punition crédible qui résiste aux possibilités de renégociations et de formations de coalitions.

Gauthier, Poitevin et González (1997) montrent dans un modèle de contrat avec deux agents riscophobes, comment il est possible d'améliorer le partage de risque en permettant aux parties d'effectuer des transferts ex ante. Ces transferts sont faits, dans chaque période, avant la réalisation de l'état de la nature, c'est-à-dire avant que les agents soient en mesure de décider s'ils veulent briser le contrat. Ils relâchent les contraintes auto-exécutoires car ils permettent aux parties d'effectuer ex ante des transferts qui améliorent le lissage de leur consommation mais qu'ils ne pourraient faire ex post dans des états de la nature où leurs contraintes d'engagement sont contraignantes. Ces transferts ex ante sont donc équivalents à un relâchement de la contrainte de liquidité. Les auteurs les interprètent d'ailleurs comme des possibilités de garanties qui améliorent les possibilités futures de crédit.

Dans les modèles de référence qu'on vient de décrire, les agents en autarcie reçoivent un revenu exogène chaque période. Dans la sous-section qui suit, on

décrit deux modèles dans lesquels la situation des agents riscophobes en autarcie dépend de leurs décisions d'investissement. Le revenu est endogène et dépendant des choix passés de consommation et d'épargne.

### 1.3.2 Contrats avec revenu endogène

Marcet et Marimon (1992) introduisent dans le contrat de partage de risque une technologie de production accessible à l'agent qui a de l'aversion pour le risque. Ce dernier ventile chaque période ses revenus entre consommation et investissement. Cet investissement va accroître un stock de capital qui génère le revenu de la période suivante. Le contrat stipule des transferts entre cet agent producteur et un agent neutre vis-à-vis du risque qui a une dotation constante, par exemple une banque. Marcet et Marimon (1992) supposent que la banque peut toujours être parfaitement engagée dans le contrat, seul l'entrepreneur n'est pas engagé. Dans ce cadre ils simulent les chemins de la consommation, de l'accumulation de capital et des transferts entre l'entrepreneur riscophobe et la banque.

Le stock de capital détenu par l'individu à la période  $t$  est égal au stock de la période précédente déprécié d'un coefficient  $d$ , plus une certaine fonction de l'investissement  $i$  réalisé en  $t - 1$  :  $k_t = dk_{t-1} + g(i_{t-1}; \theta_t, s_t)$  où  $(\theta_t, s_t)$  représente les chocs exogènes de productivité de l'investissement. C'est contre ces chocs que l'individu qui a de l'aversion pour le risque veut s'assurer par le biais du contrat. La fonction  $g$  qui transforme l'investissement en capital est concave. La consommation à chaque période est :  $c_t = f(k_t) - i_t + \tau_t$ , où  $\tau_t$  est le transfert de la banque à l'agent prévu par le contrat, il peut être positif ou négatif. La fonction de production  $f$  est concave. Marcet et Marimon (1992) considèrent le problème comme celui d'un planificateur central qui maximise l'espérance escomptée d'une somme pondérée



des utilités des deux agents. Avec plein engagement, le problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \max_{\{i_t, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}} & E_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t [\lambda u(c_t) + (-\tau_t)] \right] \\ \text{s/c} & c_t + i_t - \tau_t = f(k_t), \\ & k_t = dk_{t-1} + g(i_{t-1}; \theta_t, s_t), \\ & c_t \geq 0, i_t \geq 0, k_0 \text{ donné.} \end{aligned}$$

Où la fonction d'utilité instantanée de l'agent,  $u(\cdot)$ , est concave. Le facteur d'escompte est  $\delta$  et  $\lambda \in R^+$  est le poids de l'agent qui a de l'aversion pour le risque dans la fonction d'utilité du planificateur central. Le problème incorpore une contrainte d'irréversibilité des investissements :  $i_t \geq 0$ .

Quand l'agent ne peut pas s'engager à respecter le contrat, il faut introduire dans le problème une contrainte qui garantit que dans chaque période, l'espérance des utilités futures de l'agent s'il reste dans le contrat est toujours supérieure à l'utilité escomptée de briser le contrat. Comme dans Thomas et Worrall (1988), ils supposent que la punition de l'entrepreneur pour bris de contrat est le retour à l'autarcie pour le reste de l'horizon. Cependant, en autarcie, l'entrepreneur conserve son stock de capital et peut continuer à consommer une part de sa production risquée. Les conditions d'autarcie dépendent donc de l'utilité que l'entrepreneur peut s'assurer en investissant optimalement. Ils définissent une fonction de valeur  $V^a(k, \theta)$  qui donne la valeur optimale en autarcie de la somme espérée des utilités futures de l'agent quand le stock de capital et la réalisation du choc en  $t$  sont  $k$  et  $\theta$ . Les contraintes d'engagement doivent donc s'écrire en fonction de cette fonction de valeur :

$$E_t \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j u(c_{t+j}) \right] \geq V^a(k_t, \theta_t) \quad \forall t, \forall \theta_t.$$

Où  $c_t$  est la consommation offerte par le contrat en période  $t$  et  $\theta_t$  l'état de la nature.

Dans ce modèle le stock de capital  $k_t$  s'écrit en terme de toutes les valeurs

passées de  $i$  et la contrainte auto-exécutoire comprend toutes les valeurs futures optimales de  $c$ . Marcet et Marimon récrivent leur modèle dans la forme standard des programmes dynamiques, c'est-à-dire de sorte que le problème écrit pour une période  $t$  ne prenne en compte que les variables des périodes  $t$  et  $t - 1$ . Le programme de maximisation peut se récrire :

$$\begin{aligned} \max \mathcal{L} = & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \{ (\lambda + M_{t-1}) u(c_t) - \tau_t + \mu_t [u(c_t) - V^a(k_t, \theta_t)] \} \\ s/c & c_t + i_t - \tau_t = f(k_t) \\ & k_t = dk_{t-1} + g(i_{t-1}; \theta_t, s_t) \\ & \mu_t \geq 0 \\ & M_t = M_{t-1} + \mu_t \\ & M_{-1} = 0 \end{aligned}$$

$\mu_t$  est le multiplicateur de la contrainte auto-exécutoire. Chaque fois que celle-ci est serrée dans une période, le multiplicateur est positif.  $M_t$  représente l'accumulation des  $\mu_t$  courant et passés, il est élevé si la contrainte auto-exécutoire a été souvent serrante dans le passé. Or on voit que  $M_{t-1}$  vient s'ajouter à  $\lambda$ , le poids de l'agent dans le problème de maximisation du planificateur central. Ceci signifie que chaque fois que le contrat est contraint dans une période, c'est-à-dire chaque fois que l'individu est tenté de sortir du contrat, la maximisation dans la période suivante doit lui donner un poids supérieur. Pour retenir l'entrepreneur dans le contrat en  $t$ , il faut lui octroyer une plus grande part des surplus dans les périodes suivantes. C'est ce qui est exprimé par la borne inférieure sur la consommation dans le modèle de Thomas et Worrall (1988).

Avec cette dernière formulation on obtient une série de conditions de premier ordre qui vont servir de base pour des simulations. Marcet et Marimon (1992) effectuent des simulations de la dynamique de la consommation, du capital et des transferts dans le cas de l'autarcie ( $\tau_t = 0 \forall t$ ), du contrat avec plein engagement ( $\mu_t = 0 \forall t$ ) et du contrat auto-exécutoire. Ils montrent que dans le contrat

avec plein engagement, l'individu est pleinement assuré et que sa consommation est constante. En autarcie au contraire, la consommation est croissante dans le stock de capital et fluctue avec les chocs exogènes. Dans le cas où l'individu est pleinement assuré on voit qu'il accumule le capital plus rapidement dans les premières périodes en se servant de la capacité d'emprunt que lui offre le contrat. Les transferts  $\tau$  dans le contrat avec plein engagement sont donc très positifs dans les premières périodes où l'individu investit fortement et deviennent négatifs dans le long terme. Le contrat finit par atteindre un état stationnaire dans lequel les stocks de capital sont à peu près semblables à ceux de l'autarcie, à cela près que la moyenne en est plus élevée dans le cas de l'autarcie puisque c'est alors le seul moyen d'assurance de l'agent.

Dans le contrat où l'entrepreneur n'est pas engagé, le chemin d'accumulation du capital se comporte dans les premières périodes comme dans le cas de l'autarcie. L'entrepreneur ne peut pas se servir du contrat pour investir beaucoup dans les premières périodes et augmenter le taux de croissance de son stock de capital parce qu'il ne peut pas se commettre à rembourser plus tard ses emprunts. Par contre l'existence du contrat lui permet de réduire la variance de sa consommation entre les périodes. Cependant, si la variabilité de la consommation est réduite par rapport à l'autarcie, on ne peut tout de même pas atteindre la pleine assurance et la consommation suit la tendance croissante du capital au lieu d'être constante. Les transferts sont très faibles dans toutes les périodes. Le contrat joue donc un très faible rôle de lissage de la consommation.

Le partage de risque est limité ici par le fait que lorsque l'agent brise le contrat, il retourne en autarcie avec tout son stock de capital. La punition infligée pour bris de contrat est donc faible puisqu'elle ne comprend pas la saisie des réserves et cela limite beaucoup ce que l'on peut demander à l'agent dans le contrat. Le contrat doit limiter l'accumulation de capital dans les premières périodes pour ne pas inciter l'entrepreneur à briser la relation quand son stock est élevé.

En autarcie l'entrepreneur ne subit pas seulement la variabilité due aux chocs mais doit aussi sacrifier sa consommation dans les premières périodes afin de permettre la croissance du capital et donc des productions pour le futur. L'intérêt du contrat dans ce cas est donc de lui permettre de consommer dans les premières périodes les produits de l'accumulation qu'il devrait toucher plus tard. S'il ne peut pas s'engager dans le contrat il est certain qu'il le brisera dans le long terme au moment où il lui faudra rembourser ses emprunts. L'introduction des contraintes d'engagement détruit donc les possibilités d'emprunt de début de vie et ne permet que l'assurance contre les chocs périodiques.

Sigouin (1997) s'intéresse lui aussi à un modèle dans lequel le revenu de l'agent dépend de ses décisions d'investissement périodiques. Il décrit un contrat dans lequel un entrepreneur riscofobe entre dans un contrat de financement avec un investisseur neutre vis-à-vis du risque. Dans Sigouin (1997) l'investissement est directement incorporé au stock de capital et le choc exogène affecte la fonction de production qui est notée  $g(K_t, \theta_t^s)$  dans l'état de la nature  $s$ . Les états de la nature suivent un processus de Markov.

A la différence de Marcet et Marimon (1992), Sigouin (1997) suppose que l'absence d'engagement est bilatérale. De plus, si l'entrepreneur brise le contrat, l'investisseur saisit le stock d'épargne. L'entrepreneur entre donc en autarcie avec un stock minimal de capital  $\eta$  qui est son propre capital humain inalienable. La fonction de valeur du problème de l'entrepreneur en autarcie est  $v(\eta, \theta_t^s)$ . Par contre, l'investisseur représente l'ensemble des marchés, c'est-à-dire l'actionnariat de l'entreprise. Il récupère donc le stock de capital quand il brise le contrat. Toutefois, ce stock n'a pas de valeur future pour lui parce que la production ne peut avoir lieu sans le capital humain spécifique de l'entrepreneur. Les contraintes auto-exécutoires se notent pour chaque période et chaque état de la nature  $s$  possible,

dans le contrat  $\delta$  :

$$U(\delta, h_t) \geq v(\eta, \theta_t^s) \quad \forall h_t = (h_{t-1}, s),$$

$$V(\delta, h_t) \geq (1 - d)(k_t - \eta) \quad \forall h_t = (h_{t-1}, s),$$

où  $d$  est le taux de dépréciation du capital et où  $U(\delta, h_t)$  et  $V(\delta, h_t)$  ne représentent plus des surplus mais des utilités espérées escomptées.

Sigouin (1997) reprend l'approche de programmation dynamique de Thomas et Worrall (1988) et retrouve les intervalles et la dynamique de consommation créés par les contraintes auto-exécutoires. Cependant, les bornes sur la consommation sont à présent croissantes dans le stock de capital disponible. Sigouin (1997) étudie la dynamique de l'investissement dans ce contexte en posant une fonction d'utilité logarithmique pour l'entrepreneur et une fonction de production de type Cobb-Douglas. Dans le cas où les investissements ne sont pas irréversibles, il met en évidence du surinvestissement dans le contrat optimal. Le surinvestissement intervient quand l'entrepreneur est "financièrement contraint" pour les périodes à venir, c'est-à-dire en fait quand les contraintes auto-exécutoires de l'investisseur peuvent être serrées dans le futur. Des contraintes serrées pour l'investisseur en période  $t + 1$  signifient que l'entrepreneur ne peut pas lui faire un trop grand transfert en  $t$  parce qu'il ne sera pas prêt à le refinancer en  $t + 1$ . Pour augmenter sa consommation en  $t + 1$  l'entrepreneur doit donc accroître son investissement en  $t$  au dessus du niveau efficace. Sigouin (1997) obtient par simulations, le même résultat de surinvestissement dans le cas où les investissements sont irréversibles.

Le surinvestissement ici est un moyen de diminuer la variabilité de la consommation dans le cas où l'absence d'engagement rend le lissage imparfait. Il n'y a pas de surinvestissement dans le modèle de Marcet et Marimon (1992) parce que l'investisseur est parfaitement engagé dans leur cas. L'entrepreneur n'est donc jamais financièrement contraint au sens de Sigouin (1997). La croissance du stock de capital est par contre contrainte par le fait qu'elle resserre les contraintes auto-

exécutoires de l'entrepreneur dans leur cas.

Ces modèles avec revenus endogènes permettent de considérer des possibilités de corrélations dans les revenus. Ils permettent de retrouver la corrélation entre la consommation courante et les revenus passés et courant puisque les choix d'investissement dépendent du revenu courant et déterminent les revenus et consommations futurs. La sous-section suivante présente des modèles qui élargissent encore l'environnement des contrats sans engagement étudiés jusqu'ici en offrant à l'agent risco-phobe des possibilités de lissage à l'extérieur du contrat. Ces possibilités externes peuvent s'offrir sous la forme de contrats d'assurance ou sous la forme d'un accès à l'épargne.

### 1.3.3 Contrats avec opportunités externes

Bulow et Rogoff (1989) étudient un contrat de dette dynamique dans le contexte des prêts aux pays en voie de développement. Dans les relations de prêt entre pays, il n'existe aucune institution qui puisse garantir l'exécution des contrats ; les pays sont souverains et il n'y a pas de recours si l'un d'eux refuse de rembourser sa dette. Bulow et Rogoff (1989) supposent qu'un pays qui cesse d'effectuer les transferts exigés par sa dette, perd sa réputation de bon payeur et ne peut plus jamais obtenir de financement dans le futur. Ils appellent donc ces contrats dynamiques des contrats de réputation, et c'est pour sauvegarder cette réputation et les possibilités futures de financement que les pays remboursent leurs emprunts malgré l'absence de mécanismes exécutoires.

Le contrat de dette défini dans Bulow et Rogoff (1989) stipule, comme ceux que l'on a décrit jusque là, des transferts contingents aux chocs périodiques subis par la production nationale. Les auteurs ne supposent pas que le pays emprunteur a de l'aversion pour le risque et le prêteur est parfaitement engagé. La seule contrainte sur les transferts est que la valeur future de la dette dans chaque période (la

somme espérée de tous les transferts) doit être inférieure à la valeur future de la production nationale, ce qui revient, dans le cas d'agents neutres vis-à-vis du risque, à une contrainte auto-exécutoire.

Bulow et Rogoff (1989) supposent qu'il existe pour les pays emprunteurs, d'autres possibilités de financement. Ceux-ci peuvent par exemple acheter des titres obligataires sur les marchés internationaux ou des contrats d'assurance de court terme. Dans ce cas, le pays fait un paiement ex ante et touche en contrepartie, dans la période qui suit, un transfert conditionnel à l'état de sa production. De tels contrats d'assurance sont équivalents à de l'épargne et les auteurs stipulent d'ailleurs qu'ils doivent rapporter en moyenne le rendement du marché. Bulow et Rogoff montrent alors qu'il est impossible de construire des contrats de dette de réputation si les pays ont la possibilité de s'assurer sur les marchés internationaux. Ceci signifie qu'il est impossible de satisfaire des contraintes auto-exécutoires lorsque les pays emprunteurs peuvent accumuler des réserves de titres sans risque.

Cependant Bulow et Rogoff (1989) ne déterminent pas le contrat de dette optimal. C'est-à-dire qu'ils ne cherchent pas les flux de transferts optimaux qui pourraient dominer une suite de contrats de court terme, qui ne permettent que l'épargne et pas l'emprunt. Il semble, de plus, que si les paiements ex ante réalisés dans le cadre de ces contrats d'assurance pouvaient servir de collatéral, c'est-à-dire si le pays prêteur pouvait geler les avoirs à l'étranger du mauvais payeur, un contrat de dette de réputation pourrait être viable. C'est ce qui est montré dans l'article qui est présenté dans ce qui suit.

Ligon, Thomas et Worrall (1998) présentent un contrat de partage de risque sans engagement comme un système d'assurance mutuelle entre les habitants d'un village. Il y a un bien unique dans le village ; dans chaque période, chaque habitant reçoit une dotation aléatoire exogène de ce bien. Les dotations sont indépendantes

et tirées de la même distribution iid. Chaque période, les individus font des transferts aux autres agents et en reçoivent. Ces transferts doivent être auto-exécutoires parce qu'aucun d'eux ne peut se commettre dans la relation. Si l'un des individus brise la relation, celle-ci cesse pour tout le monde. Le retour à l'autarcie est donc la punition pour bris de contrat.

Les agents disposent d'une technologie de stockage du bien qui leur permet d'en transférer une partie d'une période à l'autre. Pour une unité du bien stockée en  $t$ ,  $1/\rho$  unités sont disponibles en  $t + 1$ . Si  $\rho < 1$ , le bien s'apprécie ( $1/\rho$  est l'intérêt sur l'épargne), si  $\rho > 1$ , le bien se déprécie.

Les conditions d'autarcie pour les agents dépendent des droits de propriété sur les stocks. Si les stocks de bien sont détenus par la communauté, l'individu qui brise la relation ne peut emporter sa part de l'épargne. Par contre, si les stocks sont individuels, chacun retrouve en autarcie ce qu'il a accumulé par le passé. Ceci influence les incitations à briser le contrat. Les conditions d'autarcie pour un individu sont représentées par une fonction de valeur qui donne son utilité maximale espérée pour tout le futur, étant donné la dotation de la période dans laquelle il se retrouve en autarcie et son stock d'épargne à ce moment. Les contraintes auto-exécutoires demandent que l'utilité future espérée offerte par la relation à chaque agent soit toujours supérieure à cette fonction.

Ligon, Thomas et Worrall (1998) décrivent l'optimum en terme des rapports d'utilités marginales des individus pris deux à deux. Avec plein engagement, ces rapports sont constants. Sans engagement possible, ils évoluent avec les réalisations des vecteurs de dotations, selon les contraintes auto-exécutoires. Ainsi, si la contrainte pour la période  $t + 1$  est serrée pour l'agent  $i$  et pas pour l'agent  $j$ , on aura  $u'_i(c_i(t))/u'_j(c_j(t)) < u'_i(c_i(t+1))/u'_j(c_j(t+1))$ . Le contrat est obligé d'accorder plus de consommation à l'agent  $i$  en  $t + 1$  que le premier rang ne le recommande. Ainsi, l'efficacité du lissage en autarcie dépend des contraintes



auto-exécutoires et donc des conditions d'autarcie.

La possibilité de mettre les biens en réserve pour le futur offre une possibilité d'auto-assurance aux individus et favorise le lissage des consommations. Quand les transferts aux autres agents sont limités par les contraintes d'engagement, les individus peuvent en effet transférer une part de leur dotation dans les réserves pour assurer leur consommation future. Cependant, Ligon, Thomas et Worrall (1998) soulignent que dans le cas où les réserves de biens ne sont pas détenues pas la communauté, l'accroissement des stocks de réserve améliore les conditions d'autarcie et augmente donc les incitations à briser la relation. Dans ce cas, l'existence de la technologie de stockage peut réduire le bien-être dans le village, comme c'est le cas dans Bulow et Rogoff (1989).

## 1.4 Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté deux approches théoriques de modélisation qui permettent de rationaliser l'imperfection du lissage de la consommation sous l'hypothèse d'anticipations rationnelles. D'abord nous avons décrit les modèles de revenu permanent en marchés incomplets, où l'incomplétude est liée à l'existence de contraintes de liquidité. Ensuite nous avons vu les modèles de partage de risque bilatéral sans engagement qui permettent d'endogénéiser ces contraintes. Chacune des deux approches explique que la consommation courante individuelle dépend des revenus retardés, comme on peut l'observer dans les données américaines. Cependant, aucune ne permet de retrouver complètement les caractéristiques des données réelles de consommation. Deux types d'explication sont possibles. D'un côté, ces caractéristiques sont difficiles à cerner sur des données de panel et on a tendance à comparer les résultats des modèles de consommateur représentatif avec les données agrégées. Or, les caractéristiques des données agrégées ne sont

peut-être pas explicables par des modèles microéconomiques. D'un autre côté, les environnements décrits sont incomplets. Une des allées de recherche que nous suggérons ici est d'introduire dans l'environnement du consommateur la double possibilité du contrat de partage de risque et d'une auto-assurance par l'épargne, comme l'ont introduit Ligon, Thomas et Worrall (1998), mais dans un contexte financier où l'une des parties au contrat est neutre vis-à-vis du risque. L'élargissement du champ d'action du consommateur doit permettre de dégager des comportements de consommation plus proches des comportements réels. C'est ce qui est fait dans le chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Non-Commitment and Savings in Dynamic Risk-Sharing Contracts

### 2.1 Introduction

Market incompleteness can explain why risk-averse agents cannot perfectly insure themselves against idiosyncratic risk. With complete markets, it is always possible to buy state-contingent securities that ensure that consumption is perfectly insured and smoothed. Macro and micro data show, however, that consumption is variable : the hypothesis that agents consume their permanent income each period is rejected by the data. Agents cannot perfectly insure themselves.

Liquidity constraints have been used to represent some form of market incompleteness. They limit an agent's access to credit, who can therefore not expect to smooth out all income risk. These constraints seem empirically plausible. Many agents cannot borrow because they cannot offer the creditor a significant collateral. Others can only borrow at a very high interest rate. Models with a

representative agent have used these constraints to explain the empirical failure of the permanent-income hypothesis. Garcia, Lusardi and Ng (1995) show, using micro data, that liquidity constraints represent the most plausible explanation of the sensitivity of consumption to current income. Deaton (1991) has simulated consumption and savings paths close to aggregate series using various liquidity-constraint models.

Liquidity constraints are only a “reduced-form” expression for market imperfections that cause market incompleteness. These imperfections can be caused by informational problems such as adverse selection and moral hazard. These informational asymmetries limit the extent of trading with the consequence that all risks cannot be fully diversified (Green, 1987; Thomas and Worrall, 1990). Informational asymmetries have also been used to explain the empirical failure of the permanent-income hypothesis (Pischke, 1995).

Another source of market imperfections is the lack of commitment by the parties engaged in a financial relationship. If the costs of enforcing a financial contract are high, agents may elect to breach the contract rather than obey all its terms and conditions. Thomas and Worrall (1988) have characterized the optimal risk-sharing labor contract where neither the risk-neutral firm, nor the risk-averse worker could commit to the contract. They show that the firm cannot generally fully smooth the worker’s wage. In all periods, the wage varies depending on the last-period wage and the worker’s current productivity. In this context, Gauthier, Poitevin and González (1997) show that, if the agents can make a transfer before the realization of the state of nature, the commitment problem is alleviated.

Building on the liquidity-constraint literature, our model seeks to endogenize this constraint. In the liquidity-constraint model of Schechtman (1976), we explicitly introduce the possibility for the risk-averse agent to borrow from a risk-neutral financier. Such borrowing is assumed to be subject to non-commitment.

The assumption of non-commitment has the following interpretation. The role of the financier is to provide financing to the risk-averse agent when he experiences a negative shock to his income. A contract with full commitment would require that the financier always make a loan to the risk-averse agent regardless of the likelihood that he reimburses. Without commitment, the financier may refuse to refinance the borrower if it is likely that the borrower never reimburses. Alternatively, non-commitment on the part of the risk-averse agent can be interpreted as limited liability, that is, the borrower cannot be forced into reimbursing a loan if his utility is higher when defaulting. The assumption of non-commitment implies that the risk-averse agent cannot fully finance his consumption, and therefore, he cannot fully diversify his income risk with the bank.

Borrowing under non-commitment can therefore be used to endogenize the liquidity constraint in the model of Schechtman. The first goal of the paper is then to characterize the optimal consumption path in the liquidity-constraint model of Schechtman when market incompleteness (the liquidity constraint) is endogenized by an assumption of non-commitment on financing with a financier.

The second goal is to use this model to assess whether non-commitment in financial markets can have an impact on the real decisions of the risk averse agent, namely, its investment decisions. Following Modigliani and Miller's (1958) result on the irrelevance of financial structure to real decisions, there has been a large literature seeking to explain how imperfections in financial markets can influence investment decisions. For example, Ambarish, John and Williams (1987) show that informational asymmetries in financial markets can induce firms to over- or under-invest in order to signal their value. We follow Sigouin (1997) in introducing investment decisions in a dynamic model of financing under non-commitment. As opposed to his analysis, however, we study the interaction between real and financial investment as savings are also incorporated in the analysis.

The model is presented in the next section. Section 3 presents our main results on the dynamics of financing and consumption. The impact of non-commitment in financing on investment decisions is studied in Section 4. We discuss some of our assumptions in Section 5 to illustrate the robustness or sensitivity of our results to some key assumptions. The conclusion follows.

## 2.2 The model

Agent 1 has a stochastic exogenous income  $y^s$  which depends on the realization of the state of nature  $s$ . There exists a time-independent discrete set of possible states  $\mathcal{S} = \{1, \dots, S\}$ . The time-independent probability of state  $s$  is  $p^s$ , with  $\sum_{s \in \mathcal{S}} p^s = 1$ .<sup>1</sup> We assume that  $y^1 < \dots < y^S$ . Agent 1 is risk averse with preferences represented by a state- and time-independent concave utility function  $u$ . This function is defined and bounded over the interval  $[0, \gamma]$ . Formally, we assume that  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$ , and  $u'(0) = \infty$ . Agent 1 has an infinite-horizon life span.

Agent 1 has access to a savings account in which he can make deposits in every period. His savings at the end of period  $t - 1$  is denoted by  $A_t$ . Savings earn a time-independent interest rate  $r$  per period. In any period, agent 1 can withdraw any savings he may have. Agent 1 is, however, liquidity constrained in the sense that he cannot borrow at this rate  $r$ . This amounts to assuming that savings must be non negative at all time, that is,  $A_t \geq 0$  for all  $t$ .

Agent 1 can, however, borrow from agent 2. Agent 2 is an infinitely-lived risk-neutral financier with a linear utility function  $v(b) = b$ .<sup>2</sup> His endowment is  $e$  per

---

<sup>1</sup>Most of our results hold if income follows a first-order Markov process. Additional details along these lines are available from the authors upon request.

<sup>2</sup>Our analysis is in a partial-equilibrium context. The assumption of risk neutrality for agent 2 means that agent 2 is “big” compared to agent 1. For example, agent 2 may represent a large

period. Without loss of generality, we assume that  $e = 0$ . Both agents discount the future by a common factor  $\beta = 1/(1 + \delta)$ . We also assume that  $r \leq \delta$ .<sup>3</sup>

There are gains from trade to be exploited by these two agents as agent 1 can hope to transfer some of his income risk to the risk-neutral agent 2. The relationship between these two agents is governed by a contract signed at date 1. This risk-sharing contract specifies transfers from agent 1 to agent 2, and savings for agent 1 for all dates. Transfers and savings can depend on the date  $t$ , the state  $s$  realized at that date, and more generally on the whole history of states prior to date  $t$ . Transfers can be either positive or negative, while savings must remain non negative. Note that we implicitly assume that savings are verifiable and can thus be controlled by the contract. We relax this assumption in Section 5.

Formally, denote by  $h_t = (s_1, \dots, s_t)$  the history of realizations of states of nature for all periods through period  $t$ , and by  $H_t$ , the set of possible histories at date  $t$ . Denote by  $\pi$  agent 1's consumption plan. A plan  $\pi$  is a set of functions  $\pi_t$ , one for each period  $t$ , such that  $\pi_t : H_t \rightarrow R_+ \times R$  with  $\pi_t(h_{t-1}, s_t) = (A_{t+1}^{\pi s_t}, b_t^{\pi s_t})$ . For each period  $t$ , a plan  $\pi$  specifies a level of savings  $A_{t+1}$  to start with in period  $t+1$  and a contemporaneous transfer  $b_t$  as a function of the current state of nature and the history up to period  $t$ . Denote by  $\mathcal{U}_t(\pi, h_t)$  and  $\mathcal{V}_t(\pi, h_t)$  the expected utility of agents 1 and 2 respectively from period  $t$  on under consumption plan  $\pi$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_t(\pi, h_t) &= u(c_t^{\pi s_t}) + E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau u(c_{t+\tau}^{\pi s_t+\tau}) \\ \mathcal{V}_t(\pi, h_t) &= b_t^{\pi s_t} + E_t \sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau b_{t+\tau}^{\pi s_t+\tau}\end{aligned}$$

where  $E_t$  is the expectation operator conditional on the available information in period  $t$ ,  $h_t$ . Consumption is determined by  $c_t^{\pi s_t} = y^{s_t} + (1+r)A_t^{\pi s_t-1} - A_{t+1}^{\pi s_t} - b_t^{\pi s_t}$ .

Suppose that the two agents can commit to a long-term contract. The consumption bank, while agent 1 represents a typical borrower.

<sup>3</sup>If  $r > \delta$ , the agent has a strong incentive to sacrifice its current consumption and save. Savings are no more accumulated in a smoothing interest but for further consumption. It is of no interest in our context.

tion of agent 1 solves the following maximization problem :

$$\max_{\pi} \mathcal{U}_1(\pi, s_1) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{V}_1(\pi, s_1) \geq V \quad (2.1)$$

$$c_{\tau}^{\pi s_{\tau}} = y^{s_{\tau}} + (1+r)A_{\tau}^{\pi} - A_{\tau+1}^{\pi s_{\tau}} - b_{\tau}^{\pi s_{\tau}} \quad \forall h_{\tau}, \forall \tau \quad (2.2)$$

$$A_{\tau+1}^{\pi s_{\tau}} \geq 0 \quad \forall h_{\tau}, \forall \tau \geq 0. \quad (2.3)$$

where  $V$  is the reservation utility of agent 2. It is easy to show that the optimal contract yields a constant consumption to agent 1 in all states and all periods, and that savings do not have to be used to support the optimal consumption path. A crucial assumption for these results is that the two agents can fully commit to the transfers prescribed by the contract. This may be an unreasonable assumption since, following a given history, an agent may prefer to breach the contract rather than make the prescribed transfer. For example, agent 2 may prefer not to refinance agent 1 in a low-income state when agent 2 expects not to be fully reimbursed in the future. Alternatively, agent 1 may prefer to declare bankruptcy rather than reimburse agent 2 when his debt becomes too large. If enforcement costs are high, it is not possible to bind the agents to the contract in all circumstances. It is therefore relevant to study the optimal contract in an environment where agents cannot commit.

The possibility of savings, as an outside opportunity for agent 1, is likely to affect the solution to the non-commitment contracting problem. Before solving this problem, however, it is helpful to characterize the solution to the simpler problem in which agent 1 can save but cannot borrow from agent 2. It turns out that this problem represents the autarky environment that agent 1 can attain if he rejects or breaches the contract.

In autarky, agent 1 seeks to maximize his lifetime utility by choosing his consumption and savings in each period. At the beginning of period  $t$ , he has accumulated savings of  $(1+r)A_t$  and he receives an endowment of  $y^s$ . These financial resources are then shared between current consumption and future savings



to satisfy his budget constraint :  $c_t^s + A_{t+1}^s = y^s + (1 + r)A_t$ . The fact that agent 1 cannot borrow is represented by the liquidity constraint  $A_{t+1}^s \geq 0$ .

Formally, agent 1 chooses  $\{c_t^s\}_{t=1}^{\infty}$  and  $\{A_{t+1}^s\}_{t=1}^{\infty}$ ,  $\forall s \in S$  to solve the following Bellman equation :<sup>4</sup>

$$g(A_t, y^s) = \max_{A_{t+1}^s \geq 0} u(y^s + (1 + r)A_t - A_{t+1}^s) + \beta E_z g(A_{t+1}^s, y^z). \quad (2.4)$$

The value function  $g(A_t, y^s)$  represents agent 1's maximized expected utility at the beginning of period  $t$  given that he has savings of  $A_t$  and state  $s$  has been realized. Under our assumptions,  $g(\cdot, y^s)$  is continuous, strictly increasing, strictly concave, and continuously differentiable. Furthermore, the optimal saving and consumption policies can be described by continuous functions  $a(A_t, y^s) = A_{t+1}^s$ , and  $c(A_t, y^s) = c_t^s = y_t^s - A_{t+1}^s + (1 + r)A_t$ .

First-order conditions and the envelope condition at period  $t$  can be derived from program (2.4) and the following equation obtains for all  $s$  in  $S$  :

$$u'(c_t^s) = \beta(1 + r)E_z u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s$$

where  $\mu_t^s$  is the multiplier on the liquidity constraint. This is the Euler equation determining the optimal consumption smoothing, taking into account the liquidity constraint.

From the first-order and Euler conditions, it is possible to describe the dynamics of consumption and savings. Savings  $a(A_t, y^s)$  and consumption  $c(A_t, y^s)$  are both increasing in  $A_t$ . A higher stock of savings means more resources at hand which are then shared between current consumption and savings for the next period. It can be shown that for  $y^s > y^z$ ,  $c(A_t, y^s) > c(A_t, y^z)$  and  $g(A_t, y^s) > g(A_t, y^z)$ ; consumption is then imperfectly smoothed and utility varies across states of nature. Although agent 1 withdraws from his savings account to finance consumption in bad states, consumption remains variable.

<sup>4</sup>See Schechtman (1976) for formal proofs of most of the results that follow.

Imperfect smoothing through liquidity-constrained savings is described in the literature on consumption/savings models. Schechtman (1976) shows that if the interest rate  $r$  is equal to the discount rate  $\delta$ , consumption can only reach a stationary state in the limit, when the savings stock tends to infinity. Deaton (1991) suggests that, when  $r < \delta$ , that is, when savings are relatively costly, the consumer is reluctant to save, even in the good states of nature; therefore, savings do not tend to infinity. In general, consumption will be equal to the resources at hand (savings + income) as long as they are not higher than a certain level. From that level up, the consumer starts to save, but the savings stock remains low. Finally, whatever the interest rate, consumption smoothing is poorly realized. There are, therefore, gains from trade to be realized in signing a risk-sharing contract with a financier. This possibility is introduced in the next section.

## 2.3 The risk-sharing contract with non-commitment

We study the optimal risk-sharing contract when neither agent can commit itself to respect the contract in any contingency. Each agent can decide to renege on the contract if the payment to be made is greater than the future surplus it expects. To make sure no such incentives are present, we introduce self-enforcing constraints into the contracting problem. These constraints impose that, in each period, following any history, agents have no incentives to renege on the contract.

We assume that, if an agent reneges on the contract, he gets his autarkic utility level forever.<sup>5</sup> For agent 2, autarky means a zero income (and utility) forever. Agent 1 still earns his stochastic income in autarky, and he can still partially

---

<sup>5</sup>Asheim and Strand (1991) show that this punishment is renegotiation-proof in the repeated-game formulation of a related model.

smooth his consumption with savings. In his case, autarky is represented by the solution to the savings model with liquidity constraints characterized in the previous section. The value function  $g(A, y^s)$  yields the expected discounted utility of agent 1 if he breaches the contract having savings of  $A$  and current income of  $y^s$ . We assume that agent 2 can seize agent 1's financial assets (his savings) if agent 1 breaches the contract. It is as if savings are put up as a collateral against agent 1's borrowing from agent 2. Agent 1's autarcic life therefore starts with no savings. Under these assumptions, self-enforcing constraints can be written as :

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t(\pi, (h_{t-1}, s)) &\geq g(0, y^s) \quad \forall (h_{t-1}, s) \in H_t, \quad \forall t, \\ \mathcal{V}_t(\pi, (h_{t-1}, s)) &\geq 0 \quad \forall (h_{t-1}, s) \in H_t, \quad \forall t. \end{aligned}$$

The optimal contract solves an optimization problem in  $t = 1$  which prescribes a consumption plan  $\pi$ , that is, a sequence of savings and transfers for each date and possible histories :  $\{A_{t+1}^{\pi s_t}, b_t^{\pi s_t}\}_{t=0,1,\dots}$ . A first property of the optimal contract is that it must be efficient starting in any period following any history. Suppose the contrary that the optimal contract is not efficient in period  $t$  following a given history. It would then be possible to change transfers in period  $t + 1$  in such a way as to increase agent 2's expected utility, while maintaining constant that of agent 1. These new transfers would satisfy all self-enforcing constraints since they increase agent 2's utility, thus reducing his incentives to renege on the contract. These new transfers would then increase agent 2's expected utility in  $t = 1$ , while leaving that of agent 1 constant, thus implying that the original contract could not have been optimal. Consequently, an optimal contract maximizes at each date  $t$  the expected utility of one agent subject to a participation constraint for the other agent and subject to self-enforcing and liquidity constraints. For each date

$t$ , the program must then be :

$$\max_{\pi^t} \mathcal{U}_t(\pi^t, h_t) \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{V}_t(\pi^t, h_t) \geq V_t^{s_t} \quad (2.5)$$

$$\mathcal{U}_\tau(\pi^t, h_\tau) \geq g(0, y^{s_\tau}) \quad \forall h_\tau, \forall \tau \geq t \quad (2.6)$$

$$\mathcal{V}_\tau(\pi^t, h_\tau) \geq 0 \quad \forall h_\tau, \forall \tau \geq t \quad (2.7)$$

$$c_\tau^{\pi^t s_\tau} = y^{s_\tau} + (1+r)A_\tau^{\pi^t} - A_{\tau+1}^{\pi^t s_\tau} - b_\tau^{\pi^t s_\tau} \quad \forall h_\tau, \forall \tau \geq t \quad (2.8)$$

$$A_{\tau+1}^{\pi^t s_\tau} \geq 0 \quad \forall h_\tau, \forall \tau \geq t \quad (2.9)$$

where  $\pi^t$  is the continuation of consumption plan  $\pi$  following history  $h_t$ . Denote by  $\Gamma(h_t)$  the set of instruments that satisfy constraints (2.6)–(2.9). It represents the set of continuation contracts from period  $t$  on that are self-enforcing and for which savings are non-negative. If there are gains from trade,  $\Gamma(h_t)$  is non-empty because at least one agent can have more than autarky in each period. Furthermore, it is easy to show that  $\Gamma(h_t)$  is compact and convex.<sup>6</sup>

In (2.5), the parameter  $V_t^{s_t}$  is the minimum surplus that agent 1 must yield to agent 2 when state  $s_t$  is realized in  $t$ . This surplus allowed to agent 2 is bounded by the existing gains from trade in the contract. If  $V_t^{s_t} = 0$ , there exists a self-enforcing continuation in  $t$  consisting of a sequence of zero transfers to agent 2. If  $V_t^{s_t} > 0$ , the surplus cannot be greater than total gains from trade available in  $t$ . Here, gains from trade increase with the amount of savings. Since savings can be used as a collateral, agent 1 can borrow more if he has savings than if he has not any. The maximum surplus to agent 2 is then denoted by  $\bar{V}_t(A_t)$ . If there are gains from trade, then there exists a sequence of  $\{b_\tau\}_{\tau=t, \dots, \infty}$  that yields  $\bar{V}_t(A_t)$  to agent 2 and the autarky utility to agent 1. This sequence satisfies all constraints to the problem.<sup>7</sup>

<sup>6</sup>See Thomas and Worrall (1988) for a formal proof in a related model.

<sup>7</sup>Thomas and Worrall (1988) show that the surplus  $V_t^s$  allowed to agent 2 in state of nature  $s$  in a self-enforcing contract belongs to a compact interval  $[0, \bar{V}^s]$ . In our case, this proof is valid for  $V_t^s \in [0, \bar{V}^s(A_t)]$ .

Following Spear and Srivastava (1987), in period  $t$ , the surplus to agent 2 can be given using a current transfer  $b_t^{\pi^t s_t}$  and a future expected surplus  $V_{t+1}^{\pi^t}$ . Solving the problem therefore amounts to picking a current transfer  $b_t^{s_t}$  to agent 2, future surpluses to be conceded to agent 2 next period contingent on next period realized state  $\{V_{t+1}^{s_{t+1}}\}_{s_{t+1} \in \mathcal{S}}$ , and a level of savings  $A_{t+1}^{s_t}$  to start next period.

The compactness and convexity of  $\Gamma(h_t)$  imply that there exists a unique value function which provides agent 1 with the maximum of  $\mathcal{U}_t(\pi^t, h_t)$  in each period as a function of  $A_t$ ,  $V_t$ , and the state  $s$  realized in  $t$ . We denote this value function by  $f^s(A_t, V_t)$ . It represents the Pareto frontier that can be reached in state  $s$  via a self-enforcing contract for given values of savings and surplus to be conceded to agent 2. This value function can be used to maximize agent 1's expected future utility by an appropriate choice of  $A_{t+1}$  and  $\{V_{t+1}^z\}_{z \in \mathcal{S}}$  as a function of  $A_t$  and  $V_t$ . The optimal contract then solves the following Bellman equation:<sup>8</sup>

$$f^s(A_t, V_t^s) = \max_{A_{t+1}^s, b_t^s, \{V_{t+1}^z\}_{z=1}^{\mathcal{S}}} u(y^s + (1+r)A_t - A_{t+1}^s - b_t^s) + \beta E_z f^z(A_{t+1}^s, V_{t+1}^z)$$

$$\text{s.t. } f^z(A_{t+1}^s, V_{t+1}^z) \geq g(0, y^z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.10)$$

$$V_{t+1}^z \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.11)$$

$$b_t^s + \beta E_z V_{t+1}^z \geq V_t^s \quad (2.12)$$

$$A_{t+1}^s \geq 0. \quad (2.13)$$

In period  $t$ , the solution prescribes optimal values for the current transfer  $b_t^s$ , savings  $A_{t+1}^s$ , and future surpluses  $\{V_{t+1}^z\}_{z \in \mathcal{S}}$  for period  $t+1$ . Constraints (2.10) and (2.11) represent the self-enforcing constraints of agents 1 and 2 respectively. The constraint (2.12) ensures the intertemporal consistency of the optimal solution.

<sup>8</sup>Denote by  $s$ , the realized state in  $t$ , and by  $z$ , the state in  $t+1$ .

### 2.3.1 The value functions

We now characterize the value functions  $f^s$  that solve the Bellman equations presented above.<sup>9</sup>

**Proposition 1.** *For all  $s$ , the functions  $f^s(A, V)$  are increasing in  $A$ , decreasing in  $V$ , concave and continuously differentiable in  $(A, V)$ .*

An immediate implication of this proposition is that the maximization problem on the right-hand side of the Bellman equation is a concave program. First-order conditions are therefore sufficient to characterize the optimal solution. The variables  $\beta p^z \theta_t^z$  and  $\beta p^z \lambda_t^z$  represent the Lagrange multipliers of the self-enforcing constraints (2.10) and (2.11) respectively, for all  $z \in \mathcal{S}$ . We denote by  $\psi_t^s$  the multiplier of constraint (2.12), and by  $\mu_t^s$ , the multiplier of the liquidity constraint (2.13). First-order conditions with respect to  $A_{t+1}^s$ ,  $b_t^s$  and  $V_{t+1}^z$  for all  $z$ , and the envelope conditions yield the following equations :

$$u'(c_t^s) = \beta E_z(1 + \theta_t^z) f_A^z(A_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \mu_t^s \quad (2.14)$$

$$u'(c_t^s) = \psi_t^s \quad (2.15)$$

$$(1 + \theta_t^z) f_V^z(A_{t+1}^s, V_{t+1}^z) = -\lambda_t^z - \psi_t^s \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.16)$$

$$f_A^s(A_t, V_t^s) = (1 + r) u'(c_t^s) \quad (2.17)$$

$$f_V^s(A_t, V_t^s) = -\psi_t^s. \quad (2.18)$$

We use the envelope conditions (2.17) and (2.18) for period  $t + 1$  in every possible states  $z$  and introduce them in (2.14), (2.15), and (2.16) to obtain :

$$u'(c_t^s) = \beta(1 + r) E_z(1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s \quad (2.19)$$

$$u'(c_t^s) = (1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z \quad \forall z \in \mathcal{S}. \quad (2.20)$$

Equation (2.19) is the Euler equation modified to take into account the liquidity constraint and self-enforcing constraints of period  $t$ . It implicitly determines the

<sup>9</sup>All proofs are relegated to the Appendix.

optimal choice of savings for agent 1. Note that this equation does not depend on agent 2's self-enforcing constraints. Only agent 1's constraints affect his choice of savings. Equation (2.20) implicitly determines agent 1's consumption smoothing through the choice of the current transfer  $b_t^s$  and the future surpluses to agent 2,  $V_{t+1}^z$ . The extent of consumption smoothing depends on the set of self-enforcing constraints of both agents since these constraints limit the choice of  $b_t^s$  and  $V_{t+1}^z$ .

**Proposition 2.** *For all  $s \in \mathcal{S}$ , the function  $f^s(A, V)$  can be written as :*

$$f^s(A, V) = h(y^s + (1 + r)A - V),$$

*where  $h$  is increasing and concave.*

This proposition states that each value function  $f^s$  can be rewritten as a function of a single variable  $y^s + (1 + r)A - V$  which represents agent 1's net assets following the realization of the current state of nature  $s$ . The term  $y^s + (1 + r)A$  is agent 1's endowment of financial assets (his savings) and income. The variable  $V$  represents the surplus of agent 2, and can be interpreted as the value of the debt agent 1 has contracted with agent 2. This property of the value functions implies that the solution is unique only to the point of having a constant net asset value  $y^s + (1 + r)A - V$ . This property has been derived using the envelope conditions (2.17) and (2.18) which can be rewritten, using condition (2.15), as :  $f_A^s(A, V) = -(1 + r)f_V^s(A, V)$  for all  $(A, V)$  and all  $s$  in  $\mathcal{S}$ . This is a differential equation whose solution must be the functional form in the proposition. We give more intuition on this result below once the optimal consumption has been characterized. Finally, the function  $h$  inherits the properties of the functions  $f^s$ , namely their monotonicity and concavity.

### 2.3.2 Optimal consumption and savings

In a self-enforcing contracting model without savings, Thomas and Worrall (1988) have shown that, in each state, consumption is contained in a time-

independent interval. For example, in state  $s$ , period- $t$  consumption,  $c_t^s$ , belongs to the interval  $[\underline{c}^s, \bar{c}^s]$ . These consumption bounds are increasing with the state of nature  $s$  and are determined by the presence of the self-enforcing constraints. The bound  $\bar{c}^s$  ( $\underline{c}^s$ ) is the maximum (minimum) consumption agent 1 can receive in state  $s$ . A higher (lower) consumption would necessitate a larger transfer by agent 2 (1) which would violate his self-enforcing constraint in that state. Given these intervals, the dynamics of consumption follow a simple rule. In period  $t$  and state  $s$ , consumption is equal to period- $(t - 1)$  consumption,  $c_{t-1}$ , if  $c_{t-1}$  is included in the self-enforcing interval of consumption  $[\underline{c}^s, \bar{c}^s]$ . If not,  $c_t^s$  is equal to the bound of the interval that is the closest to  $c_{t-1}$ . This means that the contract tries to smooth consumption as much as possible subject to self-enforcing constraints. When all self-enforcing intervals have a non-empty intersection, consumption can be perfectly smoothed in finite time. This is possible for a high enough discount factor.

The introduction of savings in that model modifies the characterization of the optimal consumption path. The first effect is on the self-enforcing consumption bounds.

**Proposition 3.** (i) *In each period, the consumption of agent 1 is included in an interval of the form  $c_t^s \in [\underline{c}^s, \bar{c}^s(A_t)]$  where the lower bound  $\underline{c}^s$  is constant, and the upper bound  $\bar{c}^s(A_t)$  is increasing in the amount of savings.*

(ii) *Consumption bounds are increasing in current income,  $y^s$ , that is,*

$$\begin{aligned}\bar{c}^s(A_t) &> \bar{c}^z(A_t) \text{ for } s > z \\ \underline{c}^s &> \underline{c}^z \text{ for } s > z.\end{aligned}$$

The introduction of savings implies that the upper consumption bound of Thomas and Worrall (1988) is now dependent on agent 1's savings. In their model, this upper bound is determined by agent 2's self-enforcing constraint. When agent 1 has some savings, however, he does not need to rely only on borrowing in order



to increase his consumption as he can now draw upon his savings. This effectively allows him to consume more. This is why the upper bound on consumption depends positively on savings. The lower bound represents a minimal consumption level for agent 1 and is determined by his autarky consumption. Since, by assumption, agent 1 loses his savings if he breaches the contract, this lower bound is independent of savings.

The combination of savings and borrowing through the contract has important effects on the interaction of the self-enforcing constraints of agent 2 and the liquidity constraint.

**Proposition 4.** *i) If  $r = \delta$ , the self-enforcing constraints of agent 2 and the liquidity constraint are not binding, that is,  $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0 \quad \forall z \in \mathcal{S}$  and  $\forall t$ .*

*ii) If  $r < \delta$ , either the liquidity constraint or at least one self-enforcing constraint of agent 2 must be binding, that is,  $\sum_z p^z \lambda_t^z + \mu_t^s > 0$ .*

In the model without savings, the upper consumption bound is likely to be binding when (1) there is a negative income shock, that is, when  $y_{t+1} < y_t$ , and (2) agent 2 expects a low future surplus from the relationship. In that case, agent 2 has low incentives to refinance agent 1, and consequently, agent 2 makes a low transfer to agent 1 and consumption decreases. In period  $t$ , agent 1 would like to reimburse agent 2 more than his accumulated debt, that is, save through agent 2, so that agent 1 can consume more tomorrow if his income drops. This is not possible since agent 2 cannot commit to refund the saved amount next period. The non-commitment severely limits the possibility for agent 1 to smooth consumption through lending to agent 2.

With savings, however, this need not be the case. Agent 1 can save today, and draw upon his savings tomorrow to increase his consumption if he experiences a negative income shock. The extent to which agent 1 relies on his savings account depends on the assumption on the interest rate  $r$ .

Suppose first that  $r = \delta$ . Because the interest rate on savings is exactly equal to the discount rate, accumulating savings is as profitable as lending to agent 2. Since the savings account is not subject to self-enforcing constraints, savings effectively increase the self-enforcing upper bound on consumption to the point where it does not bind anymore. Therefore, the introduction of a savings account relaxes all agent 2's self-enforcing constraints.

The liquidity constraint is not binding because agent 1 can effectively save negative amounts by borrowing from agent 2. There is, however, an upper bound on the amount agent 1 can borrow. This amount is contingent on the amount of savings which act as a collateral in case of default by agent 1. This borrowing constraint has real consequences because the self-enforcing constraints of agent 1 can be binding, that is, in a high income state, agent 1 may be tempted to not reimburse agent 2 and renege on the contract, even if this means losing his savings. This effectively limits the amount agent 2 is willing to lend to agent 1. But, as long as savings are pledged as collateral, agent 2 is always willing to lend some positive amount to agent 1, and the liquidity constraint is therefore not binding.

Without a binding liquidity constraint and self-enforcing constraints for agent 2, our model with savings has some similarities with that of Harris and Holmström (1982), where agent 2 can fully commit to a long-term contract. We show below that the dynamics of consumption are similar to the dynamics they derive in their model.

One interpretation of these results is that borrowing and saving become perfect complement since each financial instrument helps relaxing the constraint on the other instrument. This perfect complementarity is not, however, as trivial as it may seem. These two instruments yield very different consumption paths when taken in isolation. When only savings are considered, consumption becomes perfectly smoothed only in the limit when savings tend to infinity. When agent 1 does

not have access to a savings account (but can contract with agent 2), consumption varies within the self-enforcing bounds of Thomas and Worrall (1988). It may become perfectly smoothed or not depending on the discount factor. These two different instruments complement each other in our model to the point of relaxing the liquidity constraint and the self-enforcing constraints of agent 2.

The effect of savings is completely different, however, when  $r < \delta$ . In that case, because the interest rate on savings is relatively low, agent 1 prefers to consume rather than save. In fact, saving through agent 2 becomes less costly than saving through the savings account, and agent 1 would like to borrow at rate  $r$  (save negative amounts) and then lend to agent 2 through the contract. This is not possible because of the liquidity constraint. Agent 1 then minimizes his savings and tries to save the most possible through agent 2, until agent 2's self-enforcing constraints become binding.

If the liquidity constraint is not binding, that is, if  $\mu_t^s = 0$ , then it must be that at least one self-enforcing constraint of agent 2 is binding, that is,  $E_z \lambda_t^z > 0$ . Hence, if agent 1 saves a part of its revenue, at least one self-enforcing constraint of agent 2 is binding. The intuition is that, if agent 1 is not liquidity constrained, it must be the case that agent 1 has no incentives in borrowing at rate  $r$  to save through agent 2. This can only be true when at least one self-enforcing constraint of agent 2 is binding, thus making additional saving through him impossible. Even though savings are relatively costly, agent 1 can still save if (1) savings through agent 2 is impossible due to agent 2's self-enforcing constraint and (2) it is necessary for agent 1 to save in order to smooth consumption. In fact, agent 1 saves as much as possible through agent 2 and then may use his savings account if required for smoothing purposes.

If no self-enforcing constraint of agent 2 is binding, that is, if  $\lambda_t^z = 0$  for all  $z$ , it must be that the liquidity constraint is binding, that is,  $\mu_t^s > 0$ . This means

that when the self-enforcing constraints of agent 2 are not binding, agent 1 holds no savings as he would, in fact, like to borrow at rate  $r$ . We now turn to the characterization of optimal consumption.

Using the results of Proposition 2, first-order conditions can be rewritten as :

$$\begin{aligned} u'(c_t^s) &= \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)h'(y^z + (1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) + \mu_t^s \\ u'(c_t^s) &= (1+\theta_t^z)h'(y^z + (1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) - \lambda_t^z \quad \forall z \in \mathcal{S} \\ u'(c_t^s) &= h'(y^s + (1+r)A_t - V_t^s). \end{aligned} \quad (2.21)$$

The last condition implies that consumption is constant for a given level of net assets  $X_t^s \equiv y^s + (1+r)A_t - V_t^s$ , that is, along an indifference curve of  $f^s$ . There exists a function describing consumption  $c_t^s = C(y^s + (1+r)A_t - V_t^s)$  where  $C(y^s + (1+r)A_t - V_t^s) = u'^{-1}[h'(y^s + (1+r)A_t - V_t^s)]$ . Consumption in period  $t$  and state  $s$  is an increasing function of the net asset value  $X_t^s = y^s + (1+r)A_t - V_t^s$ .

**Proposition 5.** (i) For all states  $s$  and  $z$  realized in  $t$  and  $t+1$  :

$$\begin{aligned} \lambda_t^z = \theta_t^z = 0 &\Rightarrow c_{t+1}^z = c_t^s \\ \theta_t^z > 0 &\Rightarrow c_{t+1}^z = \underline{c}^z > c_t^s \\ \lambda_t^z > 0 &\Rightarrow c_{t+1}^z = \bar{c}^z(A_{t+1}^s) < c_t^s. \end{aligned}$$

(ii) All things equal, if  $y^s > y^z$ , then  $c_t^s \geq c_t^z$ .

When  $r < \delta$ , the optimal contract bears some similarities to that of Thomas and Worrall (1988).<sup>10</sup> It is no longer optimal to relax the self-enforcing constraints of agent 2 and the upper bound of consumption can be binding. Furthermore, if  $\beta$  is close enough to one, the self-enforcing intervals have a non-empty intersection. It is then possible to have a stationary consumption reached in finite time. In that case, savings become useless and  $A_t = 0$  for all periods  $t$ . It is then only when  $\beta$  is not too large that savings can play a useful role. Savings improve the

<sup>10</sup>When  $r = -1$ , our model collapses to theirs as savings generate no returns and thus become useless.

possibility for smoothing as it allows to raise consumption in low-income states. Savings are never enough, however, to maintain agent 1's consumption when a self-enforcing constraint of agent 2 binds in a subsequent period. Consumption can then decrease in time, that is,  $c_{t+1}^z < c_t^s$  if  $\lambda_t^z > 0$ . Since savings are relatively costly, it is possible that consumption reaches the self-enforcing upper bound. Smoothing is achieved only imperfectly as agent 1 trades off improved smoothing possibilities and the high cost of savings. The main difference with the model of Thomas and Worrall is that upper bounds on consumption are not constant in time as they depend on the level of savings.

When  $r = \delta$ , consumption reaches a stationary state in a finite number of periods. First, because  $\lambda_t^z = 0$  for all  $z$ , consumption in period  $t$  is equal to consumption in period  $t+1$  unless a self-enforcing constraint for agent 1 is binding in period  $t+1$ . In that case, consumption in  $t+1$  is higher than that in period  $t$ . Second, the minimum level of consumption that satisfies agent 1's self-enforcing constraint is increasing in the current income for given values of savings and accumulated debt. Hence, a self-enforcing constraint can only be binding following a positive income shock. This implies that consumption cannot decrease in time.

**Proposition 6.** *Suppose that  $r = \delta$ .*

- (i) *If state  $s$  is realized in  $t$ , then agent 1's self-enforcing constraint in that state cannot be binding in subsequent periods. Formally,  $s_t = s \Rightarrow \theta_{t+\tau}^s = 0 \quad \forall \tau \geq 0$ .*
- (ii) *If state  $S$  is realized in period  $t$ , then from  $t+1$  on, no self-enforcing constraint for agent 1 is ever binding. Formally,  $s_t = S \Rightarrow \theta_{t+\tau}^s = 0 \quad \forall s, \forall \tau \geq 0$ .*

Perfect consumption smoothing is then achieved in finite time, that is, following the realization of state  $S$ . With a positive income shock, consumption increases and the required level of net assets to support this higher consumption increases also. Once state  $S$  is realized, consumption remains constant.

The level of consumption is closely related to the level of the value function

as can be seen in the first-order conditions (2.21). Consequently, following the realization of state  $S$ , the value function  $h$  attains the same level in all states and all periods. Suppose that state  $S$  is realized for the first time in period  $t$ . Then,  $h(y^S + (1+r)A_t^{s_{t-1}} - V_t^S)$  determines the stationary level of  $h$  which, in turn, determines the stationary level of consumption.

In the subsequent periods following the realization of  $S$ , the solution is unique in terms of net assets of agent 1, that is, conditional on current income, savings and accumulated debt are chosen to maintain a constant level of net assets  $X$ , for the function  $h$ . The stationary solution is, however, not unique in terms of  $(A, V^s)_{s \in \mathcal{S}}$ . For a given  $X_t$ , in any state, one can set  $A_{t+1}^s = A_t$  and  $V_{t+1}^z = V_t^z$  for all  $z \in \mathcal{S}$  to obtain  $X_{t+1}^z = X_t$  for all  $z$ . In that case,  $h(y^s + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^s) = h(y^z + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^z)$  implies that  $V_{t+1}^s > V_{t+1}^z$  for  $y^s > y^z$ . Hence, for a given level of savings  $A_t$  at the beginning of period  $t$  and maintained in period  $t+1$ , the values of  $V_{t+1}^z$  conditional on the income realized in  $t+1$  are such that  $V_{t+1}^1 < \dots < V_{t+1}^S$ . Alternatively, any other combination such that  $y^s + (1+r)A_t - V_t^s = y^z + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^z$  for all  $z \in \mathcal{S}$  also maintains a constant level for  $h$ , and thus yields a constant consumption. Note, however, that in all cases, it must be that debt is increasing in the states of nature, that is,  $V_{t+1}^1 < \dots < V_{t+1}^S$ . Even though, there exists an infinity of solution in  $(A, V)$ , an interesting characterization is that which sets  $A_t^s = A$  and  $V_t^s = V^s$  (increasing in  $s$ ) for all  $s$  and  $t$ . This characterization implies that savings do not need to tend to infinity to achieve perfect income smoothing as opposed to models of savings with liquidity constraints where, if  $r = \delta$ , savings must tend to infinity to achieve an optimal smoothing of consumption.

## 2.4 The model with capital accumulation

In this section, we investigate whether non-commitment in financial contracting can distort a firm's investment policy or not. We therefore assume that the random revenue is no longer exogenous, that is, agent 1 must invest a portion of its current revenue in order to generate the next period revenue through a production function. In that case, the investment decision influences both the expected income and the smoothing of consumption.

Denote by  $K(k_t; s)$  the production function that gives the available amount of revenue for period  $t$  given  $k_t$ , the stock of capital available at the beginning of period  $t$ , and  $s \in \mathcal{S}$ , the realization of the state of nature in period  $t$ . We assume that the function  $K$  is strictly increasing in  $k$  and  $s$ , and strictly concave in  $k$ , that is,  $K'(\cdot; s) > 0$ ,  $K''(\cdot; s) < 0$  for all  $s$ , and  $K(k, s) > K(k, z)$  for all  $s > z$ . Capital depreciates at rate  $d$  per period. Agent 1's consumption can now be written as :

$$c_t^s = K(k_t; s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - k_{t+1}^s - A_{t+1}^s - b_t^s.$$

In each period, agent 1 receives the product of its outstanding capital  $k_t$ , the undepreciated capital, and the savings from previous period. This income is shared between consumption for the current period, capital and savings for the next period, and a contractual transfer to agent 2.

We assume that, if agent 1 breaches the contract in one period, agent 2 can seize its savings as well as its accumulated capital. Agent 1 is left with a minimum unseizable amount of capital  $\underline{k} \geq 0$  that can be interpreted as his human capital and a zero stock of savings. Denote by  $G(A, k, s)$  the maximum utility level that agent 1 can obtain in autarky in state  $s$ , when  $A$  and  $k$  are respectively the stocks of savings and capital accumulated at the end of the preceding period.<sup>11</sup> Agent

<sup>11</sup>The autarky problem can be represented as a Bellman equation :

$$G(A_t, k_t, s) = \max_{\{A_{t+1}, k_{t+1}\} \in \Delta(A_t, k_t, s)} u(K(k_t; s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - A_{t+1} - k_{t+1}) +$$

1 then gets a maximum utility equal to  $G(0, \underline{k}, s)$  if he breaches the contract in state  $s$ . If agent 2 breaches the contract, he returns to his autarky level of utility  $V = 0$ .

The introduction of the production process does not transform the mathematical property of the model : it can still be written as a Bellman equation. The capital stock  $k_t$  accumulated through period  $t$  represents a third state variable. The Bellman equation can be written as :

$$F^s(A_t, k_t, V_t^s) = \max_{\substack{A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, \\ b_t^s, \{V_{t+1}^z\}_{z=1}^S}} u(K(k_t; s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - k_{t+1}^s - A_{t+1}^s - b_t^s) +$$

$$\beta E_z F^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z)$$

$$\text{s.t.} \quad F^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) \geq G(0, \underline{k}, z) \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.22)$$

$$V_{t+1}^z \geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.23)$$

$$b_t^s + \beta E_z V_{t+1}^z \geq V_t^s \quad (2.24)$$

$$A_{t+1}^s \geq 0 \quad (2.25)$$

$$k_{t+1}^s - (1-d)k_t \geq 0. \quad (2.26)$$

Constraint (2.26) is an irreversibility constraint on capital. It means that agent 1 cannot make negative investment, that is, destroy some of its assets. The only way of reducing the capital stock is to invest zero and let the capital depreciate. All other constraints can be interpreted as previously.

It can be shown that the maximization problem on the right-hand side of the Bellman equation is a concave program. First-order conditions are therefore necessary and sufficient to the determination of the optimal solution. We still denote by  $\beta p^z \theta_t^z$ ,  $\beta p^z \lambda_t^z$ ,  $\psi_t^s$  and  $\mu_t^s$  the Lagrange multipliers for the self-enforcing, intertemporal and liquidity constraints. The multiplier for the irreversibility constraint  $\beta E_z G(A_{t+1}, k_{t+1}, z)$ , where  $\Delta(A_t, k_t, s)$  is the feasible set defined by a liquidity constraint on  $A$  and a non-reversibility constraint on  $k$ .



(2.26) is denoted by  $\eta_t^s$ . The first-order and envelope conditions for the program in period  $t$  are :

$$u'(c_t^s) = \beta E_z(1 + \theta_t^z) F_A^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \mu_t^s \quad (2.27)$$

$$u'(c_t^s) = \beta E_z(1 + \theta_t^z) F_k^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \eta_t^s \quad (2.28)$$

$$u'(c_t^s) = \psi_t^s \quad (2.29)$$

$$(1 + \theta_t^z) F_V^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) = -\lambda_t^z - \psi_t^s \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (2.30)$$

$$F_A^s(A_t, k_t, V_t^s) = (1 + r)u'(c_t^s) \quad (2.31)$$

$$F_k^s(A_t, k_t, V_t^s) = [K'(k_t; s) + 1 - d]u'(c_t^s) - (1 - d)\eta_t^s \quad (2.32)$$

$$F_V^s(A_t, k_t, V_t^s) = -\psi_t^s. \quad (2.33)$$

As before, the envelope conditions (2.31) and (2.33) imply that :

$$F^s(A_t, k_t, V_t^s) = H^s(k_t, (1 + r)A_t - V_t^s).$$

The introduction of the production process does not interfere with the complementarity between savings and contractual transfers in smoothing consumption. Savings and indebtedness are strongly related at the optimum.

To better understand the effects of non-commitment, it is useful to characterize the first-best solution, that is, the solution to the full-commitment problem (where  $\theta_t^z = \lambda_t^z = 0$  for all  $z \in \mathcal{S}$ ). In that case, consumption is constant across time and states of nature as given by conditions (2.29), (2.30) and (2.33) :<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} u'(c_t^s) = \psi_t^s &= -F_V^s(A_t, k_t, V_t^s) \\ &= -F_V^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) = \psi_{t+1}^z = u'(c_{t+1}^z). \end{aligned}$$

Substituting for  $c_t^s = c_{t+1}^z = c$  in conditions (2.28) and (2.32) yields :

$$[1 - \beta(E_z K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)]u'(c) = \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z \eta_{t+1}^z.$$

<sup>12</sup>There is a slight abuse of notation in the following conditions as the (endogenous) value functions should not have the same notation as in the non-commitment case.

If capital were reversible, then  $\eta_t^s = 0$  for all  $t$  and all  $s$ , and the efficient level of capital would be  $k^*$  such that  $E_z K'(k^*; z) + 1 - d = 1 + \delta$ . Here, however, capital is irreversible. This implies that either the initial capital stock  $k_0 < k^*$ , and then irreversibility is not a constraint and the first-best contract sets the capital stock at  $k^*$  for the whole relationship, or  $k_0 > k^*$ , and the irreversibility constraint is binding, and the first-best contract prescribes no investment until the earliest period  $t$  for which  $k_t \leq k^*$ . In all subsequent periods, the capital stock is at  $k^*$ . In the full-commitment case, consumption is constant and the capital stock is and remains at its first-best level  $k^*$  as soon as the irreversibility constraint becomes relaxed. We now go back to the non-commitment case.

First-order and envelope conditions for the self-enforcing contract give the following equalities :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s \quad (2.34)$$

$$= \beta E_z(1+\theta_t^z)(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)u'(c_{t+1}^z) + \eta_t^s - \beta(1-d)E_z(1+\theta_t^z)\eta_{t+1}^z \quad (2.35)$$

$$= E_z(1+\theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - E_z\lambda_t^z. \quad (2.36)$$

Agent 1's self-enforcing constraints multipliers  $\theta_t^z$  enter the condition for the capital level  $k_{t+1}^s$  in (2.35) through the irreversibility constraint for next period :  $k_{t+2} - (1-d)k_{t+1} \geq 0$ . When the irreversibility constraint for tomorrow is binding, agent 1 would like to decrease its capital today ( $k_{t+1}^s$ ) in order to relax it. But this is costly to do in states for which agent 1's self-enforcing constraints bind as decreasing capital reduces the available surplus tomorrow, thus exacerbating the commitment problem in those states.

**Proposition 7.** *i) If  $r = \delta$ , neither the liquidity constraint nor the self-enforcing constraints of agent 2 are binding ( $\mu_t^s = \lambda_{t+1}^z = 0$  for all  $z$ ). The capital stock is the same as under full commitment.*

*ii) If  $r < \delta$ , at least one of agent 2's self-enforcing constraints or the liquidity*

*constraint is binding. The capital stock is larger than  $k^*$  when at least one of agent 2's self-enforcing constraints is binding.*

When  $r = \delta$ , capital accumulation does not interfere with consumption smoothing. The savings account can complement perfectly borrowing from agent 2 in the achievement of a perfectly smoothed consumption profile for agent 1. In that case, investment in productive capital has no role to play in consumption smoothing, and investment follows the full-commitment rule. In that case, imperfections in the financial environment play no role in the productive investment decision.

When  $r < \delta$ , however, the existence of a savings account is not sufficient to ensure perfect consumption smoothing. Agent 1 is then left with some residual risk to bear. Any other decision variable can be used to reduce this risk. The capital stock then has a role to play in smoothing consumption.

Suppose that, for tomorrow, some self-enforcing constraints for agent 2 are binding. Agent 1 would like to save more today in order to relax these constraints tomorrow. When  $r < \delta$ , saving is costly and lending to agent 2 is restricted by the binding self-enforcing constraints. In that case, tomorrow's consumption can be increased by investing today more than is efficient. Overinvestment is costly however, and there is a trade-off between savings and overinvestment. First-order conditions say that, if there are positive savings in one period ( $\mu = 0$ ), then it must be the case that some agent 2's self-enforcing constraints bind ( $E\lambda > 0$ ). There is then overinvestment. Savings and overinvestment are jointly used in order to partially relax the self-enforcing constraints of agent 2. So, when  $r < \delta$ , imperfections in financial markets can distort the investment decision by inducing agent 1 in overinvesting.<sup>13</sup>

---

<sup>13</sup>A similar result has been derived in Sigouin (1997) in a model without savings.

## 2.5 Discussion

Our results depend on two key assumptions : (1) savings act as a collateral and (2) savings are observable. We now discuss these two assumptions in turn.

We assume that savings act as a collateral since agent 1 loses them if he ever breaches the contract. This implies that the value of debt can become arbitrarily large as long as savings increase proportionately. If agent 1 could breach the contract and keep his savings, the contract would have to limit the size of savings in order to ensure that agent 1 has no incentives to breaching the contract and running away with his savings. In that case, the self-enforcing constraints of agent 2 may become binding as agent 1 may have to save through agent 2 to limit these incentives to breach the contract.

We also assume that the contract can control the amount of savings agent 1 accumulates, that is, savings are verifiable. We show that, if savings are not verifiable, agent 1 has incentives to deviate from the savings level prescribed by the contract in which savings are verifiable. These savings implicitly satisfy the following condition :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1+\theta_t^z)h'(y^z + (1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) + \mu_t^s.$$

To understand the incentives of agent 1 to deviate from the prescription of the optimal contract with verifiable savings, consider the effect of a marginal reduction in savings,  $dA_{t+1}^s < 0$ , on the expected utility of agent 1 at this optimal contract.<sup>14</sup> Such deviation immediately violates the self-enforcing constraints of agent 1 that were binding before the deviation, since agent 1 now reduces the amount of resources to be available tomorrow by saving less and consuming more

---

<sup>14</sup>We assume that savings can still serve as a collateral, which means that savings cannot be verified when there is no default, but become verifiable if agent 1 defaults. Audits could reveal the amount of savings. Auditing costs are irrelevant since default would never occur.

today. In these binding states tomorrow, however, agent 1 does not lose anything from decreasing his savings since he then breaches the contract to obtain the autarkic level of utility, which is equal to the level of utility he would have obtained had he not reduced his savings and stayed in the contract. Denote

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathcal{S} / h(y^z + (1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^z) = g(0, y^z)\},$$

the set of period  $t$  states for which the self-enforcing constraint of agent 1 is binding, that is, for which  $\theta_t^z$  is positive. The net utility gain of changing the level of savings is then :

$$dU_1 = [-u'(c_t^s) + \beta(1+r) \sum_{w \notin \mathcal{Z}} p^w h'(y^w + (1+r)A_{t+1}^s - V_{t+1}^w)] dA_{t+1}^s.$$

Using the first-order conditions for an optimal contract, it is easy to show that this expression is positive. Agent 1 then has an incentive to save less than what is prescribed by the contract since, by doing so, he does not support the full cost of reducing his saving in binding states.

The assumption that savings are verifiable is not innocuous. As long as agent 1 is constrained in one state, he has incentives to reduce his savings. An optimal contract in this environment would have to take such incentives into account by specifying lower levels of savings. This would affect the ability of agent 1 to finance with agent 2 and, hence, his smoothing of consumption. Solving for the optimal contract in that case is beyond the scope of this paper.

## 2.6 Conclusion

The endogenization of the liquidity constraint in the model of Schechtman (1976) has significant effects on the optimal path of consumption. When the interest rate on savings is equal to the discount rate on time preference, the liquidity

constraint is completely relaxed, while the financier's commitment problem disappears. Consumption is increasing in time, and perfect smoothing is achieved in finite time, as soon as the highest income state is reached. When the savings rate is smaller than the rate of time preference, savings become relatively costly. The risk-averse agent must therefore trade off accumulating costly savings to smooth his consumption and not saving at all.

These results imply that it may be important to endogenize market imperfections in models that seek to explain why agents are imperfectly insured against income risk. While we have used a non-commitment assumption to do so, other assumptions would also be plausible. For example, it would be interesting to assume that the financier cannot observe the income of the risk-averse agent (as in Green, 1987; and Thomas and Worrall, 1990) to see whether predictions are significantly different from those of Schechtman (1976).

We have so far interpreted our model as one where a risk-averse borrower (entrepreneur) seeks financing from a risk-neutral financier and accumulates financial assets in a savings account. Another interpretation would be that where agent 1 is a worker and agent 2 is a firm. Savings can then be interpreted as a pension plan which is controlled by the contract between the worker and the firm. With that interpretation, our model would predict that pensions should not be transferable when the worker quits the firm as it acts as a collateral to alleviate the worker's commitment problem. Note, however, that we have no matching problem which could make the breach of contract efficient.

Such models with non-commitment have also been used to explain sovereign debt financing. In that case, savings would imply that countries could also invest in international financial markets. Finally, Ligon, Thomas and Worrall (1997) discuss the possibility of savings in a risk-sharing self-enforcing contracting model of insurance of groups of individuals in village economies. They do not, however,

provide a characterization of consumption paths with savings.

## Appendix

### Proof of Proposition 1 :

The utility function  $u$  is increasing in  $A$  and so is the value function  $f^s$ . An increase in  $V$  shrinks the set of feasible contracts and, hence the maximum utility agent 1 can obtain in the maximization program. The function  $f^s$  is then decreasing in  $V$ .<sup>15</sup>

The set of constraints (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) and (2.9) is strictly convex and  $u$  is strictly concave and continuously differentiable. It follows that  $f^s$  is concave and differentiable in  $(A, V)$ .  $\square$

### Proof of Proposition 2 :

The envelope conditions (2.17) and (2.18) can be written :  $f_A^s + (1+r)f_V^s = 0$ . This is a homogeneous linear differential equation for which the general solution is  $f^s(A, V) = h^s((1+r)A - V)$ . Here  $f^s(A, V)$  could be denoted  $f(y^s, A, V)$  with  $f_{y^s}(y^s, A, V) = u'(c_t^s) = -f_V(y^s, A, V)$ , then by the same argument,  $f(y^s, A, V) = \phi(A, y^s - V)$  and  $h^s((1+r)A - V) = h(y^s + (1+r)A - V)$ . The function  $h$  must verify the following conditions on the derivatives of  $f^s$  :

$$f_A^s(A, V) = (1+r)h'(y^s + (1+r)A - V) > 0$$

$$f_V^s(A, V) = -h'(y^s + (1+r)A - V) < 0$$

$$f_{AA}^s(A, V) = (1+r)^2 h''(y^s + (1+r)A - V) < 0$$

$$f_{VV}^s(A, V) = h''(y^s + (1+r)A - V) < 0$$

$$f_{AV}^s(A, V) = -(1+r)h''(y^s + (1+r)A - V) > 0$$

It follows that  $h' > 0$  and  $h'' < 0$ .  $\square$

### Proof of Proposition 3 :

(i) The surplus share given to agent 2 is bounded by the self-enforcing constraints.

<sup>15</sup>A more detailed proof can be found in Thomas and Worrall's (1988) Lemma 1.

$V_t^s \in [0, \bar{V}^s(A_t)]$  with  $\bar{V}^s(A_t)$  such that  $h(y^s + (1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t)) = g(0, y^s)$ , hence,  $\bar{V}^s(A_t) = y^s + (1+r)A_t - h^{-1}[g(0, y^s)]$ . The upper bound on  $V_t^s$  is an increasing linear function of  $A_t$ . The bounds on agent 1's consumption depend on the surplus given to agent 2 through the first order condition :  $u'(c_t^s) = h'(y^s + (1+r)A_t - V_t^s)$ . This gives the minimum value for  $c_t^s$  when  $V_t^s = \bar{V}^s(A_t)$  :  $\underline{c}^s = u'^{-1}[h'(y^s + (1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t))] = u'^{-1}[h'(h^{-1}[g(0, y^s)])]$ . The maximum value for  $c_t^s$  is found for  $V_t^s = 0$  :  $\bar{c}^s(A_t) = u'^{-1}[h'(y^s + (1+r)A_t)]$ . It is an increasing function of  $A_t$ .

(ii) It is clear that  $\bar{c}^s(A_t) = u'^{-1}[h'(y^s + (1+r)A_t)]$  is an increasing function of  $y^s$  because  $u'^{-1}$  and  $h'$  are decreasing. Furthermore, as  $g(0, y^s) > g(0, y^z)$  and  $h^{-1}$  is increasing,  $\underline{c}^s = u'^{-1}[h'(h^{-1}[g(0, y^s)])]$  is increasing in  $y^s$ .  $\square$

**Proof of Proposition 4 :**

Conditions (2.19) et (2.20) entail  $(1 - \beta(1+r))E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = \sum_z p^z \lambda_t^z + \mu_t^s$ .

(i) If  $r = \delta$ , that is,  $\beta(1+r) = 1$ , then  $\sum_z p^z \lambda_t^z + \mu_t^s = 0$ . Since the Lagrange multipliers are all non-negative, it must be that :  $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0 \forall z \in \mathcal{S}$ .

(ii) If  $r < \delta$ , then  $\sum_z p^z \lambda_t^z + \mu_t^s > 0$ . At least one of the multipliers must be positive.  $\square$

**Proof of Proposition 5 :**

(i) Given the existence of a surplus in the contract, self-enforcing constraints of both agents cannot bind together in the same state of nature. With  $\lambda_t^z = 0$ , condition (2.20) becomes  $u'(c_t^s) = (1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z)$ . With  $\lambda_t^z > 0$  (i.e.  $\theta_t^z = 0$ ), condition (2.20) becomes  $u'(c_t^s) = u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z$ . The concavity of the utility function  $u$  yields the result.

(ii) The following lemma helps proving the second part of the proposition.

**Lemma 1.** *If  $y^s > y^z$ , then it is not possible to have  $\theta_t^z > 0$  and  $\theta_t^s = 0$  together, nor  $\lambda_t^z = 0$  and  $\lambda_t^s > 0$ .*

*Proof of Lemma 1 :*

Suppose  $\theta_t^z > 0$  and  $\theta_t^s = 0$  with  $y^s > y^z$ . Then,  $f^z(A_{t+1}, V_{t+1}^z) = g(0, z) <$



$g(0, s) \leq f^s(A_{t+1}, V_{t+1}^s)$ , and  $c_{t+1}^s < c_{t+1}^z$  by (i). Let  $(A_{t+2}^*, \{V_{t+2}^{*w}\}_{w \in S})$  and  $(A'_{t+2}, \{V'_{t+2}{}^w\}_{w \in S})$  be the optimal instruments for states  $s$  and  $z$  respectively. Then,

$$\begin{aligned} f^s(A_{t+1}, V_{t+1}^s) &= u(c_{t+1}^s) + \beta E_w f^w(A_{t+2}^*, V_{t+2}^{*w}) \\ &< u(c_{t+1}^z) + \beta E_w f^w(A_{t+2}^*, V_{t+2}^{*w}) \\ &\leq u(c_{t+1}^z) + \beta E_w f^w(A'_{t+2}, V'_{t+2}{}^w) \\ &= f^z(A_{t+1}, V_{t+1}^z) \end{aligned}$$

which contradicts the inequality above.

Suppose  $\lambda_t^s > 0$  and  $\lambda_t^z = 0$  with  $y^s > y^z$ . Then,  $c_{t+1}^s < c_{t+1}^z$  by (i) and  $V_{t+1}^z \geq V_{t+1}^s = 0$ . This means that

$$\begin{aligned} y^z + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^z &< y^s + (1+r)A_{t+1} \\ h'(y^z + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^z) &> h'(y^s + (1+r)A_{t+1}) \\ u'(c_{t+1}^z) &> u'(c_{t+1}^s), \end{aligned}$$

which contradicts, by the concavity of  $u$ , that  $c_{t+1}^s < c_{t+1}^z$ .  $\square$

Condition (2.20) gives  $(1 + \theta_t^s)u'(c_{t+1}^s) - \lambda_t^s = u'(c_t) = (1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z$ .

a) If  $\theta_t^s = 0$  and  $\lambda_t^z = 0$ , Lemma 1 ensures that  $u'(c_{t+1}^s) = u'(c_{t+1}^z)$  and, hence,  $c_{t+1}^s = c_{t+1}^z$ .

b) If  $\theta_t^s > 0$  and  $\theta_t^z > 0$ ,  $\Rightarrow h(y^z + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^z) = g(0, z) < g(0, s) = h(y^s + (1+r)A_{t+1} - V_{t+1}^s)$  and, hence,  $c_{t+1}^z < c_{t+1}^s$  because consumption is increasing in net wealth.

c) If  $\lambda_t^s > 0$  and  $\lambda_t^z > 0 \Rightarrow V_{t+1}^s = V_{t+1}^z = 0$ ,  $y^s + (1+r)A_{t+1} > y^z + (1+r)A_{t+1}$  and  $c_{t+1}^z < c_{t+1}^s$ .

d) If  $\theta_t^s > 0$  and  $\lambda_t^z \geq 0$ , or  $\theta_t^s \geq 0$  and  $\lambda_t^z > 0$ , then  $c_{t+1}^z < c_{t+1}^s$ .  $\square$

### Proof of Proposition 6 :

(i) Recall that for  $r = \delta$ ,  $\lambda_t^z = 0$  for all  $t$  and all  $z$ . Let  $X_t^s \equiv y^s + (1+r)A_t - V_t^s$  be agent 1's net assets. In period  $t$ , agent 1's self-enforcing constraint holds for state  $s$  and consumption is optimal, (a)  $h(X_t^s) \geq g(0, y^s)$  and (b)  $u'(c_t^s) = h'(X_t^s)$ . Suppose that  $\theta_{t+\tau}^s > 0$  for  $\tau \geq 0$ . Then, (c)  $h(X_{t+\tau+1}^s) = g(0, y^s)$  and (d)  $u'(c_{t+\tau+1}^s) = h'(X_{t+\tau+1}^s)$ . Proposition (5) for  $\theta_{t+\tau}^s > 0$  yields (e)  $c_{t+\tau+1}^s > c_{t+\tau}^s \geq c_t^s$ .

And,

$$(1) : (a) \text{ and } (c) \Rightarrow h(X_t^s) \geq h(X_{t+\tau+1}^s)$$

$$(2) : (b), (d) \text{ and } (e) \Rightarrow h'(X_t^s) > h'(X_{t+\tau+1}^s),$$

which is incompatible with the concavity of  $h$ .

(ii) This part of the proposition is derived from the preceding propositions. Lemma 4 involves  $(\theta_t^s = 0 \Rightarrow \theta_t^z = 0)$  for all  $y^s > y^z$  and part (i) of this proposition  $(s_t = s \Rightarrow \theta_\tau^s = 0)$  for all  $\tau \geq t$ .  $\square$

### Proof of Proposition 7 :

Conditions (2.34) and (2.36) give  $[1 - \beta(1 + r)]E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = E_z\lambda_t^z + \mu_t^s$ .

• If  $r = \delta$ , then  $\mu_t^s = \lambda_t^z = 0$  for all  $z$ . Conditions (2.35) and (2.36) then entail  $E_z(1 + \theta_t^z)[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)]u'(c_{t+1}^z) = \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z$ .

If capital is reversible,  $\eta_t^s = \eta_{t+1}^z = 0$  for all  $z$  and  $k_{t+1}^s = k^*$  for all  $t$  and all  $s \in S$ .

If capital is irreversible,  $\eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z$  cannot be negative because it would imply that  $k_{t+1}^s < k^*$ ; in that case, an increase in  $k_{t+1}^s$  today would increase  $\eta_{t+1}^z$ , make the expression even more negative and, hence, the capital level even more sub-optimal. This is a contradiction. If  $\eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z > 0$  the optimal contract prescribes  $k_{t+1}^s = k_t$  until the capital level returns to  $k^*$  through depreciation. From that level on, capital is at first-best level for the rest of time.

• If  $r < \delta$ , then  $E_z\lambda_t^z + \mu_t^s > 0$ . Condition (2.35) and (2.36) give :

$$E_z(1 + \theta_t^z)[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)]u'(c_{t+1}^z) = E_z\lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z,$$

and condition (2.36) can be written as  $(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = u'(c_t^s) + \lambda_t^z$ . Then,

$$\begin{aligned} E_z[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)](u'(c_t^s) + \lambda_t^z) &= E_z\lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z, \\ u'(c_t^s)E_z[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)] \\ &= E_z\lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z - E_z[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)]\lambda_t^z \\ &= \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_t^z)\eta_{t+1}^z + E_z\beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)\lambda_t^z. \end{aligned}$$

The right-hand term is positive each time there is a positive  $\lambda_t^z$ , which means that there is over-investment each time there is a binding self-enforcing constraint for

agent 2.



## Chapitre 3

# Environmental Risks : Should Banks Be Liable ?

### 3.1 Introduction

In the last ten years, many court settlements in the United States have been imposing a transfer of liability for environmental damages to banks.<sup>1</sup> These court decisions were made possible by the Comprehensive Environmental Response, Compensation and Liability Act (CERCLA). This law allowed judges to turn against any party that could be considered as an “owner” or an “operator” of the firm responsible for the polluting accident. Therefore, banks that have close relationships with their debtor firms and that can have a say in their administrative decisions can therefore be considered as “operators”. The legislator’s objective in designing CERCLA was primarily to allow courts to find a party who could pay for environmental damages when liable firms go bankrupt.<sup>2</sup> This avoids resorting

---

<sup>1</sup>For more details on these settlements, see Goble (1992) or Boyer and Laffont (1995) for Canadian cases.

<sup>2</sup>For more details on the CERCLA, see Olexa (1991) or Henderson (1994).

to public funds to compensate victims and repair damages after environmental accidents caused by insolvent firms' negligence. In fact, the legislator wishes to declare liable, the deep-pocket stakeholders who benefited from firms' dangerous activities. Vertically related firms and financial partners can then be considered as "operators" and held liable for damages.

The obligation, however, to turn against firms' partners underlines the fact that firms are not fully insured against environmental risks. If firms can assume small environmental accidents without going bankrupt, it is more difficult to deal with large accidents that can have catastrophic consequences that could lead to the liable firm's bankruptcy. Such accidents are classified as "major technological risks" which have low probabilities of realization but highly prejudicial consequences on social welfare. For example, industrial accidents involving nuclear, oil, or chemical spills are major technological risks. One problem with such risks is that the effects of an accident can be detected only years after it happened (think of a chemical spill) or be harmful kilometers away (if pollution is transported by a river for example). It may then be difficult to find the liable firm and/or evaluate precisely the damages. Moreover, firms protected by limited liability have low incentives to buy insurance for the value of damages when these are greater than their asset value. Consequently, firms are often not or incompletely insured against major environmental accidents and liabilities have to be determined ex post and settled by court judgments.

A second objective for making banks liable for their clients' negligence is to incite them into giving their clients strong incentives for taking greater care for the environment. If banks have a seat on firms' administrative boards, it can be useful to give them concern about environmental care. The legislator then expects banks to monitor firms' activities and especially their environmental risk prevention policy. The reason why firms have not themselves the right incentives for environmental risk reduction is that their liability for environmental accidents

is limited by the bankruptcy possibility. In case of bankruptcy, victims' compensation has priority over creditors' claims. But the amount of damages that can be claimed from firms by courts cannot be higher than their asset value. Then, the incentives they have to take preventive measures are limited to this value. In the case of major risks, it is usually lower than the social value of damages. Firms then only take into account the reduction of a loss risk of the asset value and not of the entire value of social damages. They are, therefore, not internalizing completely the consequences of environmental accidents. Imposition of environmental liability to banks can be seen as a way to relax the firm's limited liability constraint by allowing the internalization of damages by the bank/firm duo. For this to be efficient, financial contracts between banks and firms have to give appropriate incentives to those who take environmental decisions.

Imposition of proper incentives through financial contracts depends on the informational environment contracts are signed in. Suppose, first, that the risk reduction investment is observable and verifiable by banks. This implies that covenants in financial contracts can impose a specific level of investment. Beard (1990) shows that, when no bank is involved, limited liability can have two opposite effects on firms' incentives to invest in risk reduction technologies.<sup>3</sup> On one hand, as the expected payment, due to limited liability, is less than the real expected damage, the marginal benefit of prevention is too small and the firm underinvests. But, on the other hand, because less resources are invested in productive activity, more risk reduction investment decreases the amount the firm loses in case of bankruptcy. This effectively entails overinvestment. This second effect is very dependent on the form of the ex post damages distribution and the dominant effect is generally the underinvestment one. In this case, the introduction of financial contracts has to provide incentives in order to avoid this limited liability effect. Segerson and Tietenberg (1992) show that, in a complete information-no

---

<sup>3</sup>In this model, the amount of damages as well as the accident's realization are random.

bankruptcy environment, liability could be imposed as well on the bank as on the firm to generate optimal incentives.<sup>4</sup> This means that transfers between the parties can offset adverse liability effects in order to preserve incentives as well as participation interest.

When the risk reduction investment cannot be observed by the bank, financial contracts can no longer include covenants that would specify a level of investment. In that case, liability has to be given to the firm. If not, the contract is not able to preserve incentives. This result highlights two important points. First, moral hazard on prevention efforts will annihilate the incentive effects of bank liability. Second, the principle of firms' limited liability prevents the legislator from providing incentives by giving liability to firms. Moral hazard and limited liability are the two reasons given in the literature to explain why bank liability is not the perfect mechanism for providing risk reduction incentives. Boyer and Laffont (1994) show that, in a moral hazard environment, partial bank liability is preferable to complete liability. They use a two-period model with preventive effort to be made by the firm in the first period, a possible accident taking place in the second, and financing required in both periods. If effort is fully observable, complete bank liability entails the socially optimal prevention effort and financing behavior at the Nash equilibrium of the contract. But if effort is not observable, the monopoly bank has to abandon rents to the firm. The usual trade-off between rent extraction and incentives leads to sub-optimal levels of financing and effort. The authors then show that the equilibrium allocation could be closer to first best, if bank liability could be restricted to a fraction of the damages. Pitchford (1995) also finds that partial bank liability is the best solution. In a one period-moral hazard model, bank liability induces financial contracts to impose risk premia to firms in the no-accident states. This reduces the firms' incentives to reach those

---

<sup>4</sup>In fact they consider a principal-agent contract between a firm and its manager but it is easy to transpose it to the case of a bank/firm relationship.

states, hence it reduces their effort. Pitchford concludes that the efficient level of bank liability is equal to the firm's asset value. This is equivalent to recommending a no bank liability solution.

In this paper, we also show that bank liability is not necessarily a good way to provide incentives for risk reduction efforts. Our conclusion, however, does not rest on the firm's limited liability constraint, nor on the asymmetric information environment. It results from the parties' incapacity to commit in contracts. Risk averse firms have incentives to smooth their income through time as well as through states of nature.<sup>5</sup> Because of the incompleteness of markets, firms cannot perfectly insure through the use of financial securities. But they can enter into long-term relationships with financial intermediaries in order to achieve some smoothing of their payoffs. These long-term relationships emerge through contractual agreements that allow the financing of firms' projects as well as share their risks. Note that it is highly relevant to study the problem of bank liability with long-term contracts because they imply a close relationship between the bank and the firm and therefore justify the fact that a court can ex post consider the bank as a firm "operator".

We assume that the bank cannot commit to maintain the relationship if it is not in its interest to do so. This implies that the bank accepts to refinance the firm in states of nature where its income is low only if this refinancing is marginally profitable. Contracts that satisfy this constraint are called "self-enforcing contracts". Self-enforcing financial arrangements cannot usually implement the first-best allocation.

Under such contracts, the extent of risk-sharing and consumption smoothing depends on the bank's autarcic opportunities. We show that bank liability trans-

---

<sup>5</sup>When managers as well as workers are risk averse, they influence the management decisions either directly (for the manager) or indirectly through labor contract negotiations. Consequently, firms behave as if they were risk-averse.



forms its autarcic payoff. Bank liability effectively relaxes its self-enforcing constraints, thus providing a better risk-sharing to the firm. This implies that the firm gets reduced incentives for environmental risk reduction investment. The intuition is that, under imperfect financial contracts, financial transfers and the risk reduction investment become imperfect substitute. As the bank can provide better insurance, the firm reduces its investment.

Bank liability cases observed in real life are cases following the bankruptcy of responsible firms. Unable to recover damage costs from the bankrupt firm, judges have put the burden on deep-pocket partners, as soon as they can be partially responsible for the accident. In fact, when the firm can pay for damages or when its liquidation value is sufficient to cover the damages, creditors are not called for (but in fact they always lose their priority as victims of environmental accidents are paid before creditors after the firm's bankruptcy). Then, the apparent role of laws as CERCLA appears only in case of bankruptcy. But in fact, because of the possibility of bank ex post liability, sealed in the law, the ex ante form of contracts has to take bank liability into account. This is why there is no need of real bankruptcy to see the effects of bank liability on financial contracts. But it is nevertheless interesting to observe what happens in the case where the ex post firm value becomes negative after an accident. Particularly, it seems important to see how a self-enforcing contract deals with limited liability in terms of incentives to invest in risk reduction.

In the following section, we present the model. Section 3 gives the contract solution when the environmental accident cannot cause the firm's bankruptcy. It first describes the privately optimal solution, that means the risk-sharing and level of prevention obtained in the contract when there are no self-enforcing constraints. Then, it presents the self-enforcing contract's solution as a function of the level of bank liability. Section 4 discusses the same contract when the environmental accident can cause the firm's bankruptcy. In a last section, we discuss bank

liability by making a link between the risk reduction investment achievement in self-enforcing contracts with bank liability and what could be desired socially. All proofs are relegated to the Appendix.

### 3.2 The model

There are three periods over which a bank and a firm interact. In period  $t = 1$ , the firm faces two sources of risks. First, the net income  $y^s$  that the firm receives is stochastic. There are  $S$  possible states of income indexed by  $s \in \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, S\}$ . Denote by  $q^s$  the probability of state  $s$  and assume that  $0 < y^1 < y^2 < \dots < y^S$ . We note  $\bar{y} = \sum_{s=1}^S q^s y^s = E_s y^s$  the expected value of income. The second risk is an environmental risk. In the case of an environmental accident, the firm is potentially liable for an amount  $X$  for reparation of the damages (decontamination, compensation of the possible victims, ...). The probability of the environmental accident is  $p(I)$  where  $I \in R^+$  is an investment in prevention technology made by the firm in period  $t = 0$ . The probability  $p(I)$  is decreasing and convex :  $p' < 0$  and  $p'' > 0$ . We suppose that the absence of investment cannot make the accident systematic, that is,  $p(0) < 1$ . On the other hand, the risk cannot be completely eliminated, that is,  $p(I) > 0$  for all  $I$ . The investment cost is  $K(I)$  and we assume that  $K$  is strictly increasing and convex :  $K' > 0$  and  $K'' > 0$ , with  $K(0) = 0$ . We suppose that damages  $X$  are large relative to income but have a relatively low probability of realization, that is,  $X > y^s$  and  $p(0)X < y^s$  for all  $s \in \mathcal{S}$ . A state of nature in period  $t = 1$  is then represented by a pair  $(s, x)$  with  $s \in \mathcal{S}$  and  $x \in \{0, X\}$ . There are  $2S$  possible realizations. Note that under our assumptions,  $y^1 - X < \dots < y^S - X < y^1 < \dots < y^S$ .

In period  $t = 2$ , the firm faces only an income risk where  $y^z$ ,  $z \in \mathcal{S}$ , denotes its income. In this period, its income is identically and independently distributed

as that in the first period.<sup>6</sup>

The firm is risk-averse and its preferences over dividends<sup>7</sup> are represented by a separable utility function  $u$ , strictly increasing and strictly concave :  $u' > 0$  and  $u'' < 0$ . The bank is risk neutral and its utility is equal to its income. The two parties discount the future by a factor  $\beta$ .

There are gains to trade between the firm and the bank because the risk averse firm has an interest in sharing its risk and smoothing its dividends with the bank. To achieve this, the bank and the firm sign a financial contract in period  $t = 0$  which specifies the investment level and the firm's contingent dividend. Denote by  $c_1^{sx}$  the firm's dividend in period  $t = 1$  in state  $(s, x)$  and by  $c_2^z(s, x)$ , its second period dividend level when income  $y^z$  is realized in period 2 and state  $(s, x)$  occurred in the first period. In periods  $t = 1$  and  $t = 2$ , the expected income  $\bar{y}$  is split between the bank and the firm. If  $c$  is the dividend level allowed to the firm by the contract in one period, then the bank is given the difference between  $c$  and the realized level  $y$  of income if there is no environmental accident. In the case of an accident, the bank gets the difference between  $c$  and  $y - X$ . We assume that the bank operates in a competitive environment. Initially, it therefore accepts every contract that yields a non-negative expected surplus. Finally, we must assume that the firm's net actual value  $NAV$  is positive for all investment levels of interest, that is,

$$NAV = \beta(1 + \beta)\bar{y} - K(I) - \beta p(I)X > 0.$$

This condition ensures that the firm can secure some initial financing for its investment  $I$ .

Informally, a contract specifies the amount which is initially financed by the

---

<sup>6</sup>The period  $t = 2$  is introduced to make non trivial the decision to bankrupt or not the firm following an environmental accident in the first period.

<sup>7</sup>Here, the dividend is equal to the net income  $y^s$  plus financial transfers.

bank in period  $t = 0$ , and the schedule of reimbursement over the next two periods,  $t = 1$  and  $t = 2$ . At the end of period  $t = 1$ , the firm realizes its income  $y^s - x$ . For smoothing purposes, it may refinance with the bank with a scheduled reimbursement in period  $t = 2$ .

The solution for the optimal financial contract depends on the liability rules and the ex post value of the firm following an accident. Depending on the size of  $X$ , the accident can entail ex post bankruptcy or not. If  $y^s - X + \beta\bar{y} < 0$ , then, in a state where an accident occurs, the value of the firm becomes negative. In the absence of rules making either the bank or the firm liable for the environmental damages  $X$ , the firm goes bankrupt to avoid paying for the damages and society supports the environmental costs. Bankruptcy is then privately optimal. The introduction of bank liability reverses the decision as damages have to be paid for regardless of whether the firm goes bankrupt or not. In this case, bankruptcy is not privately optimal since  $y^s + \beta\bar{y} > 0$ .

When the accident is not sufficiently harmful, that is, when  $y^s - X + \beta\bar{y} \geq 0$ , bankruptcy is not optimal regardless of liability rules since it is always efficient to keep the firm operating. We show below, however, that the liability rules announced by the legislator in period  $t = 0$  have consequences for the optimal financial contract, even when bankruptcy is not optimal (the no-bankruptcy case). We present our results in two steps. First, we study the no-bankruptcy case, then we discuss the case where bankruptcy would be privately optimal in the absence of liability rules (the bankruptcy case).

In a world of perfect financial markets, liability rules only serve to internalize environmental damages, and the identity of the liable party is not important per se. We therefore assume that markets are imperfect in the sense that the bank cannot commit to the contract if it is not in its interest to do so. As a consequence, if the bank's expected surplus from the contract at the beginning

of period  $t = 1$ , when the state of nature has been realized, is lower than what it can get outside of the contract (in autarky), it will break its relationship with the firm. Consequently, the optimal contract has to specify transfers that give the bank incentives to stay in the contract. Formally, *self-enforcing constraints* are introduced in the design of the optimal contract. These constraints guarantee that, in each possible state of nature, the transfer is such that the bank prefers to make it than to breach the contract and return to autarky. These constraints have the following general form :

$$y^s - x - c_1^{sx} + \beta[\bar{y} - E_z c_2^z(s, x)] \geq aut(s, x).$$

The term  $y^s - x - c_1^{sx}$  represents the bank's current net transfer while  $\beta\bar{y} - \beta E_z c_2^z(s, x)$  represents its expected discounted reimbursement. The left-hand side of the constraint therefore represents what the bank gets by staying in the contract following state  $(s, x)$ . For the bank to stay in the contract, this has to be greater than what it can get in autarky in the same state, denoted by  $aut(s, x)$ . There are as many self-enforcing constraints as states of nature in period  $t = 1$ , that is,  $2S$ . Note that these constraints are more likely to be binding when the current net transfer is negative, that is, when the bank provides additional financing to the firm.

Liability rule affects what the bank can get in autarky. In the absence of bank liability,  $aut(s, x) = 0$ , where 0 is the assumed reservation utility for the bank. When the bank is liable, the legislator can oblige it to pay an amount  $k$  as compensation or penalty after an accident due to the project it finances. Then, even if the bank decides not to refinance the firm after the accident, and hence to "breach" the contract, a court can still force it to remain liable since it was an "operator" of the firm at the time of the accident. This obligation transforms the autarky condition to  $aut(s, x) = -k$ . Bank liability therefore relaxes the bank's self-enforcing constraint.

The object of the paper is to compare the levels of investment in environmental prevention under alternative liability rules and bankruptcy assumptions. Before proceeding to the analysis, we make another assumption. We suppose that, in period  $t = 2$ , both parties are fully committed to the terms of the contract. This assumption allows us to keep the model tractable and focus on the role of non-commitment (in the first period) on the investment in environmental prevention.<sup>8</sup>

The next section focuses on the no-bankruptcy case, that is,  $y^s - X + \beta\bar{y} > 0$  for all  $s$ . The bankruptcy case is studied in Section 3.4.

### 3.3 The no-bankruptcy case

In this section, we study liability rules under the assumption that the accident is not harmful enough to involve a negative firm value, therefore that bankruptcy is privately non-optimal. We then have  $y^s - X + \beta\bar{y} > 0$  for all  $s$ . For the purpose of later comparisons, it is useful to first determine the optimal contract when bank can commit to it.

#### 3.3.1 The full-commitment contract

In this sub-section, we present the “first-best” case where the bank can commit to the contract. In period  $t = 0$ , the amount  $K(I)$  is lent by the bank to the firm and invested in the technology. With full commitment, the optimal contract maximizes the firm’s expected utility subject to the bank’s participation constraint. The bank’s participation constraint guarantees that its expected surplus from the

---

<sup>8</sup>This formulation is meant as a reduced form for an infinite-horizon model in which future surplus are used to keep parties bound to the contract. See for example Thomas and Worrall (1988).

relationship is non-negative. The problem can be written as :

$$\begin{aligned}
& \max_{c_1^{sx}, c_2^z(s,x)} (1 - p(I))\beta \left[ \sum_s q^s (u(c_1^{s0}) + \beta \sum_z q^z u(c_2^z(s, 0))) \right] + \\
& \quad p(I)\beta \left[ \sum_s q^s (u(c_1^{sX}) + \beta \sum_z q^z u(c_2^z(s, X))) \right] \\
\text{s.t.} \quad & -K(I) + (1 - p(I))\beta \sum_s q^s [y^s - c_1^{s0} + \beta \sum_z q^z (y^z - c_2^z(s, 0))] + \\
& p(I)\beta \sum_s q^s [y^s - X - c_1^{sX} + \beta \sum_z q^z [y^z - c_2^z(s, X)]] \geq 0. \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Denote by  $\lambda$ , the Lagrange multiplier associated with the bank's participation constraint. Characteristics of the optimal dividend are given by the first-order conditions :

$$\lambda = u'(c_1^{sx}) = u'(c_2^z(s, x)) \quad \forall s, z \in \mathcal{S}, \forall x \in \{0, X\}.$$

Hence, the firm's dividend is perfectly smoothed by the contract. Denote by  $c^* = c_1^{sx} = c_2^z(s, x)$  for all  $s \in \mathcal{S}$  and all  $x \in \{0, X\}$ , the constant dividend level offered by the first-best contract. Using this result, the first-order condition for investment can be written as :

$$\begin{aligned}
& -\lambda K'(I) + \lambda \beta p'(I) [(1 + \beta)\bar{y} - X - (1 + \beta)c^* - ((1 + \beta)\bar{y} - (1 + \beta)c^*)] = 0 \\
& \Leftrightarrow K'(I) + \beta p'(I)X = 0.
\end{aligned}$$

At the first-best solution, the firm invests until the marginal cost of investment is equal to its marginal benefit (represented by the diminishing expected loss). The optimal levels of dividend,  $c^*$ , and investment,  $I^*$ , are jointly determined by :

$$\begin{cases} K'(I^*) + \beta p'(I^*)X = 0 \\ \beta(1 + \beta)c^* = \beta(1 + \beta)\bar{y} - K(I^*) - \beta p(I^*)X, \end{cases}$$

where this last equality is the bank's participation constraint. Hence, when the bank's surplus is zero, the firm's discounted dividend is equal to the firm's value.

### 3.3.2 The self-enforcing contract

We now derive the optimal financial contract assuming that the bank cannot commit to the contract. Bank liability is represented by the penalty  $k^s$  imposed to the bank in state  $(s, X)$ . This penalty can depend on the state  $s$  because it should be possible for the legislator to make the bank's liability contingent on the firm's wealth. In particular, courts should be able to recover from the firm some of the damages before it appeals to the bank's contribution. For example,  $k^s = X - y^s$  represents the case where the court seizes the firm's income, that is, it liquidates the firm, and makes the bank pay for the difference between  $y^s$  and  $X$ .

The penalty  $k^s$  affects the bank's autarcic opportunity because it is still liable to pay  $k^s$  even if it breaches the contract. Here, we assume that  $k^s \in [0, X]$ , therefore encompassing full ( $k^s = X$  for all  $s$ ), partial ( $k^s < X$ ) or no liability ( $k^s = 0$ ).

The optimal contract is the solution to the following maximization problem.

$$\max_{c_1^s, c_2^z(s, x)} \beta(1 - p(I))E_s[u(c_1^{s0}) + \beta E_z u(c_2^z(s, 0))] + \beta p(I)E_s[u(c_1^{sX}) + \beta E_z u(c_2^z(s, X))]$$

$$\text{s.t.} \quad -K(I) + \beta(1 - p(I))E_s[y^s - c_1^{s0} + \beta E_z(y^z - c_2^z(s, 0))] + \beta p(I)E_s[y^s - X - c_1^{sX} + \beta E_z(y^z - c_2^z(s, X))] \geq 0 \quad (3.2)$$

$$y^s - c_1^{s0} + \beta E_z(y^z - c_2^z(s, 0)) \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (3.3)$$

$$y^s - X - c_1^{sX} + \beta E_z(y^z - c_2^z(s, X)) \geq -k^s \quad \forall s \in \mathcal{S} \quad (3.4)$$

Let us associate the constraint (3.2) with the Lagrange multiplier  $\lambda$  and the set of constraints (3.3) and (3.4) for all  $s \in \mathcal{S}$  with multipliers  $\beta q^s \theta^{s0}$  and  $\beta q^s \theta^{sX}$  respectively. The first-order conditions for this problem give an immediate result on the intertemporal smoothing of dividend.<sup>9</sup>

<sup>9</sup>All proofs are relegated to the Appendix.



**Proposition 8.** *Whatever the liability rule, intertemporal smoothing of the firm's dividend is always perfectly achieved, that is, for all  $s \in \mathcal{S}$  and all  $x \in \{0, X\}$  :*  
 $c_2^z(s, x) = c_1^{sx} \quad \forall z.$

The contract always specifies that the dividend in period  $t = 2$  depends only on the realization of period  $t = 1$  state of nature. Full insurance is provided against shocks to the second period income because we assume that the bank can fully commit to second period transfers. We note  $c_2^z(s, x) = c_1^{sx} = c^{sx}$  and rewrite the self-enforcing constraints :

$$y^s + \beta \bar{y} - (1 + \beta)c^{s0} \geq 0 \quad \text{for all } s \in \mathcal{S}$$

$$y^s - X + \beta \bar{y} - (1 + \beta)c^{sX} \geq -k^s \quad \text{for all } s \in \mathcal{S}.$$

Given this result on dividends, the first-order condition on investment is :

$$K'(I) + \beta p'(I)X = \frac{1}{\lambda} \beta p'(I)(1 + \beta) E_s(u(c^{sX}) - u(c^{s0})) - \beta p'(I)(1 + \beta) E_s(c^{sX} - c^{s0})$$

$$\Leftrightarrow K'(I) + \beta p'(I)X = \beta p'(I)(1 + \beta) E_s \left[ \left( \frac{u(c^{sX})}{\lambda} - c^{sX} \right) - \left( \frac{u(c^{s0})}{\lambda} - c^{s0} \right) \right].$$

The liability rule does not influence directly the investment level. There is, however, an indirect effect. Bank liability affects risk-sharing which, in turn, influences the investment level. It is then important to characterize the solution for dividend before we can solve for the optimal investment level.

### Risk-sharing and dividends

First-order conditions for dividends are given by the following equations that hold for all  $s$  in  $\mathcal{S}$ .

$$u'(c^{s0}) = \lambda + \frac{\theta^{s0}}{1 - p(I)} \quad (3.5)$$

$$u'(c^{sX}) = \lambda + \frac{\theta^{sX}}{p(I)} \quad (3.6)$$

The bank liability's effect on risk-sharing implicitly appears through the multipliers  $\theta^{sx}$ . A binding self-enforcing constraint in state  $(s, x)$  ( $\theta^{sx} > 0$ ) means that it is not possible to make the bank provide the firm with a dividend higher than  $c^{sx}$  which satisfies the self-enforcing constraint  $y^s + \beta\bar{y} - (1 + \beta)c^{s0} = 0$  or  $y^s - X + \beta\bar{y} - (1 + \beta)c^{sX} = -k^s$ , without having the bank leaving the contract. A higher level of  $c^{sx}$  would actually make autarky more interesting for the bank. Then, depending on whether the self-enforcing constraint binds or not, the dividend may be limited by bank liability or not. If no self-enforcing constraint binds, the firm is perfectly insured and the solution is the same as in the full-commitment case.

The next proposition provides some basic properties of the optimal dividends.

**Proposition 9.** *Dividends  $c^{sx}$  are weakly increasing in  $y^s - x + k^s \frac{x}{X}$ .*

An optimal contract smooths dividends across states of nature as much as possible. This is achieved by having dividends lower than income in high income states and higher than it in low income ones when self-enforcing constraints allow it. These constraints can be written as  $(1 + \beta)c^{sx} \leq y^s - x + k^s \frac{x}{X} + \beta\bar{y}$ .<sup>10</sup> The l.h.s. represents the dividend payment from the bank to the firm while the r.h.s. represents what the bank foregoes if it breaches the contract and does not refinance the firm. They are more likely to be binding for low levels of  $y^s - x + k^s \frac{x}{X}$ . Because of the contingent liability  $k^s$ , this is not necessarily in low income states  $y^s - X$  that self-enforcing constraints are more likely to be binding. When a self-enforcing constraint is binding, the dividend satisfies the expression with equality. For states in which the constraint is not binding, dividends are constant and higher than the highest level for binding states. Dividends are then weakly increasing in  $y^s - x + k^s \frac{x}{X}$ . This result allows us to examine the effect of bank liability on dividends and risk-sharing.

<sup>10</sup>If  $x = 0$ , this reduces to  $(1 + \beta)c^{s0} \leq y^s + \beta\bar{y}$ .

- Corollary 1.**
1. *With no bank liability, dividends are increasing with  $y^s - x$ ;*
  2. *With full bank liability,  $c^{s0} = c^{sX}$  for all  $s$ ;*
  3. *With partial bank liability,  $c^{s0} \geq c^{sX}$  for all  $s$ .*

This corollary follows directly from Proposition 9. In the first part, since  $y^s - x + k^s \frac{x}{X} = y^s - x$  for  $k^s = 0$ , it is immediate that dividends increase with net income  $y^s - x$ . When there is full bank liability, that is,  $k^s = X$  for all  $s$ , all self-enforcing constraints reduce to  $(1 + \beta)c^{sx} \leq y^s + \beta\bar{y}$ . These are independent of  $x$ , which implies that  $c^{s0} = c^{sX}$  for all  $s$ . With full bank liability, an environmental accident does not worsen the refinancing problem in period  $t = 1$  as the bank has to pay for the environmental damage whether it breaches the contract or not. This implies that dividends are not affected by the occurrence of an accident. As soon as the bank becomes less liable, however, its self-enforcing constraints are more likely to become binding because the incentives to stay in the relationship are weaker. The firm then earns a (weakly) higher dividend when there is no accident than when there is one.

The next subsection uses the properties of optimal dividends to characterize the optimal period  $t = 0$  investment.

### Investment

The insurance possibilities of the contract determine the firm's incentives to invest in environmental risk prevention. The next proposition shows that investment behavior depends on the bank liability rule.

- Proposition 10.**
1. *If there is partial, or no bank liability, the firm overinvests in the risk-reducing technology, compared to the full-commitment optimal level;*

2. *If there is full bank liability, the firm invests at the full-commitment optimal level  $I^*$ .*

We only provide here a sketch of the proof. The first-order condition for investment is :

$$K'(I) + \beta p'(I)X = \frac{1}{\lambda} \beta p'(I)(1 + \beta) E_s(u(c^{sX}) - u(c^{s0})) - \beta p'(I)(1 + \beta) E_s(c^{sX} - c^{s0})$$

The sign of the right-hand-side term determines the importance of the investment level  $I$  compared to the full-commitment optimal level  $I^*$  implicitly defined by  $K'(I^*) + \beta p'(I^*)X = 0$ . The right-hand-side term is directly related to the efficiency of risk-sharing between accident and no-accident states. We see immediately that full bank liability ( $k^s = X$ ), which allows perfect insurance against environmental accident ( $c^{s0} = c^{sX}$ ), entails an optimal level of investment as the first-order condition for investment becomes  $K'(I) + \beta p'(I)X = 0$ . As soon as insurance against states  $x = X$  is not complete ( $c^{s0} > c^{sX}$ ), the right-hand-side term is not zero and the level  $I$  is different from  $I^*$ .

This result is very intuitive. In fact, the firm's incentives are directly related to the firm's wealth in each state of nature. When the firm is perfectly insured against accident states, it has no incentives to make special effort to avoid those states. The bank is risk neutral and, hence, cares only about expected firm value. Since the firm is perfectly insured against the accident, it behaves in a risk-neutral fashion with respect to the choice of the contractual investment level. The investment level is then calculated in order to reduce the risk of loss  $X$  that affects the firm's value.

As soon as dividends cannot be perfectly smoothed between states of accident and no accident, however, the firm considers more than the reduction in firm's value entailed by an environmental accident. It supports a disutility due to the difference in dividends between different states and has an incentive to avoid

the states of low dividends. The firm then increases its investment in order to reduce the probability of accident. Since the overinvestment reduces the firm value compared to the full-commitment optimum, the bank reduces the firm's expected level of dividends. Since the firm is risk-averse, it is always willing to diminish marginally its level of dividends in exchange for a decrease in the risk it supports.

When the environmental accident does not cause the firm's bankruptcy, the exogenous introduction of bank liability in financial contracts relaxes the bank's self-enforcing constraints, therefore improving the firm's dividend smoothing. The better insured firm has lower incentives to reduce risk and hence it does not distort its investment as much. This makes the investment level closer to the full-commitment optimal one.

### 3.4 The bankruptcy case

In the preceding section, we suppose that there is no possibility of bankruptcy. Even after an accident, taking the damage costs into account, the firm value remains positive. We could, however, imagine that such an important accident would cause the firm's ex post value to be negative. In that case, the accident annihilates the expected surplus and autarky may become better than any form of contract with the firm (depending on the liability rule).

This is the case we analyze in this section, that is, we assume that  $y^s - X + \beta\bar{y} < 0$  for all  $s$ . This means that whatever the firm's income, the occurrence of an accident yields a negative firm value. In the absence of bank liability, it is not possible to construct a self-enforcing contract in the accident states. Actually, the self-enforcing constraints should be written as (3.3) and (3.4), but the only way to keep the bank in the contract in states  $x = X$ , would be to have  $c_1^{sX} + \beta E_z c_2^z(sX) < 0$  in (3.4). Firm's limited liability prevents such a solution.

The relationship will then inevitably end after an accident.

If there is a form of bank liability, it is possible to have the bank refinancing the firm after an accident in states  $s$  such that  $y^s - X + k^s + \beta\bar{y} \geq 0$ . Depending on the specifications of  $\{k^s\}_s$ , this can be satisfied in some states and not in others. The contract would then end after an accident in those states  $s$  where it is not satisfied, and continue in the other states. As the problem must integrate constraints and transfers only for states in which the relationship continues, its specification is dependent on the form of the liability rule. In order to limit the number of specifications (that depend on exogenous specifications), we concentrate here only on the polar cases  $k^s = 0$  (no bank liability) or  $k^s = X$  (full bank liability) for all  $s$ . When  $k^s = 0$  for all  $s$ ,  $y^s - X + k^s + \beta\bar{y} < 0$  and the contract ends following an accident. When  $k^s = X$  for all  $s$ ,  $y^s - X + k^s + \beta\bar{y} > 0$  and the bank always refinances the firm following an accident.

### 3.4.1 No bank liability

In this case where  $k^s = 0$ , the contract takes no account of the accident states. The optimal contract solves the following maximization problem.

$$\begin{aligned} & \max_{c_1^{s0}, c_2^z(s,0)} \beta(1-p(I))E_s[u(c_1^{s0}) + \beta E_z u(c_2^z(s,0))] + \beta p(I)(1+\beta)u(0) \\ \text{s/c} \quad & -K(I) + \beta(1-p(I))E_s[y^s - c_1^{s0} + \beta E_z(y^z - c_2^z(s,0))] \geq 0 \\ & y^s - c_1^{s0} + \beta[\bar{y} - E_z c_2^z(s,0)] \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

If we associate Lagrange multipliers  $\lambda$  and  $\theta^{s0}$ , for all  $s \in \mathcal{S}$ , respectively to these constraints, the first-order conditions give for all  $s$  in  $\mathcal{S}$  :

$$c_2^z(s,0) = c_1^{s0} = c^{s0} \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (3.7)$$

$$u'(c^{s0}) = \lambda + \frac{\theta^{s0}}{1-p(I)} \quad (3.8)$$

$$K'(I) + \beta(1+\beta)p'(I)[\bar{y} + E_s(\frac{u(c^{s0}) - u(0)}{\lambda} - c^{s0})] = 0. \quad (3.9)$$

The optimal contract is similar to that found in the preceding section. Self-enforcing constraints cannot bind all together. Constraints bind in higher-income states, and dividends are higher in those states. One can then write :  $\lambda = u'(c^{s_0}) \leq u'(c^{s_0})$  for all  $s$ .

Conclusions about the effect of non-commitment on investment call for a comparison of the optimal  $I$  given by equation (3.9) with the level  $\hat{I}$  obtained in the full-commitment environment.<sup>11</sup> In the full-commitment optimum,  $\theta^{s_0} = 0$  and the dividend is constant for all  $s$ . The optimal level of investment is  $\hat{I}$  such that

$$K'(\hat{I}) + \beta(1 + \beta)p'(\hat{I})[\bar{y} + (\frac{u(c) - u(0)}{u'(c)} - c)] = 0. \quad (3.10)$$

The comparison between the investment levels that respectively solve (3.9) and (3.10) is ambiguous. We can show that there exist some specifications of the firm's utility function such that the self-enforcing contract involves overinvestment compared to the level an enforceable contract would entail.

**Proposition 11.** *If the firm's utility function is CARA or CRRA or if it is any thrice continuously differentiable strictly increasing and concave function  $u$  such that  $u''' < 0$ , and if  $K(\cdot)$  and  $p(\cdot)$  are such that  $K(I)/(1 - p(I))$  is increasing in  $I$ , then the self-enforcing contract involves (weak) overinvestment compared to the full-commitment optimal level  $\hat{I}$ .*

<sup>11</sup>Note that the full-commitment optimum is now dependent on the liability rule, which was not the case in the preceding section. Now, even the committed bank does not refinance after an accident since the firm value is negative. If there is a kind of liability rule, however, the bank can have an interest in refinancing the firm in some states. States  $(s, X)$  that appear in the full-commitment problem are then the same as those appearing in the self-enforcing problem for the same liability rule.

### 3.4.2 Bank liability

Let us consider now the full bank-liability case. The bank has to pay  $X$  after an accident independently of what happens in the contract. Self-enforcing constraints in accident states are then :

$$y^s - X + \beta\bar{y} \geq c_1^{s0} + \beta E_z c_2^z(sX) - X \quad \forall s \in \mathcal{S}$$

In all states, the bank has incentives to refinance the firm since  $y^s + \beta\bar{y} > 0$ . Since the firm does not go bankrupt after an accident, the resolution will be exactly the same as for the no-bankruptcy-full-liability case. When the bank's full liability prevents the bank from taking advantage of the firm's limited liability, the accident cost is fully internalized. The contract then has the form described in the preceding section when there is full bank liability. Hence, investment is at the (no-bankruptcy) full-commitment level  $I^*$ .<sup>12</sup>

### 3.4.3 Discussion

The effect of the introduction of bank liability in financial contracts when environmental accidents can involve bankruptcy can be seen in the comparison of investment levels with and without bank liability. We then compare the level  $\bar{I}$  obtained from equation (3.9) (no liability) with  $I^*$  (full liability).

$$K'(\bar{I}) + \beta p'(\bar{I})X = \beta p'(\bar{I})[X - (1 + \beta)\bar{y}] + \beta(1 + \beta)p'(\bar{I})E_s\left[\left(\frac{u(0)}{u'(c^{s0})} - 0\right) - \left(\frac{u(c^{s0})}{u'(c^{s0})} - c^{s0}\right)\right] \quad (3.11)$$

$$K'(I^*) + \beta p'(I^*)X = 0. \quad (3.12)$$

In the bankruptcy case,  $(1 + \beta)\bar{y} < X$ , and the first term in the right-hand side of (3.12) is always negative. In the proof of Proposition 10 we show that the second

---

<sup>12</sup>It should be clear that partial liability would produce an intermediate case between the two polar cases analyzed in this section.



term is positive. Hence, the sign of equation (3.12) is indeterminate. The total effect of bank liability on investment is ambiguous, the absence of bank liability entails either under- or overinvestment compared to  $I^*$ , the full bank liability investment.

Because the firm does not go bankrupt when full bank liability is introduced, the investment level  $I^*$  can be interpreted as the investment when there is no limited liability for the firm ( $X$  is fully internalized in the investment decision). The level  $\hat{I}$  can then be interpreted as the limited liability investment level. The general intuition suggested in the literature is that limited liability reduces incentives to invest in environmental protection. Here, this is not necessarily the case. What is new in this model is the introduction of risk-averse behavior for the firm. The first term of equation (3.12) represents the general effect of limited liability, that is, bankruptcy possibilities after accidents reduce the considered loss from  $X$  to  $(1 + \beta)\bar{y}$ , which reduces ex ante incentives to invest. The second term expresses the fact that the risk-averse firm being imperfectly insured against the accident (because its revenue falls to zero in that case) has an incentive to invest to avoid this state. The sum of these two opposite effects cannot be signed here but when  $X$  is not too high compared to  $(1 + \beta)\bar{y}$  and the firm is highly risk-averse, we may observe a greater investment in environmental prevention when there is no bank liability as compared to when the bank is fully liable.

### 3.5 Social optimum

We have shown that bank liability induces the efficient investment behavior as it relaxes its self-enforcing constraints in accident states. We also showed that a non-liable bank induces a higher investment than when it is liable. From a social point of view, one has to determine the socially optimal level of investment before

deciding whether banks should be liable or not.

The level of investment  $I^*$  depends on the anticipated cost  $X$  of an accident. The loss  $X$  is what the bank and the firm view ex ante as the cost of damages for the risk they both recognize. It represents what they anticipate a court will ask for damages after an accident, given that they both know what type of accident they are dealing with. A part of this cost can be calculated without error : it is the value of lost equipments and the actual cost of repair and clean-up entailed by the accident. The other part is an evaluation of the prejudice suffered by outside victims : it is the amount of money representing a "fair" compensation for the environmental losses due to the accident. Such compensation can cover losses which can be directly evaluated using market prices (as in the case of economic-activity losses for the fishery or tourism industry after an oil spill) and losses which cannot be directly evaluated due to the absence of relevant prices (as in the case of the disappearance of animal species or natural sites). There are then two problems for the calculation of compensation. First, the evaluation of losses can be based on statistical estimation which yields only an approximation of the true value. Second, if the loss has an impact in the future (it is still the case for the disappearance of animal species), it is necessary to agree on the choice of an appropriate discount rate.

The evaluation of non-market losses is usually based on the contingent valuation method that relies on the survey evaluation of the willingness to pay for the conservation of a particular environmental service (or the willingness to accept a compensation for the disappearance of that environmental service).<sup>13</sup> Statistical computations assign a value for environmental services from the estimated willingness to pay of the entire population. This method, however, involves a certain

---

<sup>13</sup>It is the most common method because it even takes into account the evaluation of people who never use the environmental service. This is often called the "passive value". For a description of that and other methods, see Hanley and Spash (1993).

number of biases that make the measured cost imprecise. On top of the usual econometrics and aggregation biases, surveyed respondents often have a tendency to overstate their willingness to obtain compensation and to understate their willingness to pay. The contingent valuation method may then over- or underestimate the value of a particular environmental service and, hence, the monetary loss to be paid in compensation.

There is a debate among economists about the choice of an appropriate discount rate for evaluating environmental services.<sup>14</sup> The market rate of interest is generally used as the discount rate for evaluation of future contingencies. Weitzman (1994) argues, however, that the discount rate used should be lower than the marginal productivity of capital (the market rate of interest) because any reduction in today's consumption to finance investment and, hence, yield a greater production tomorrow, also entails a greater level of pollution. In that case, the resources that must be devoted to pollution reduction in the next period reduce the gains of investment in terms of future consumption, and therefore, the increase in future consumption is not as large as in a model with no environmental consideration. The discount rate used to evaluate projects with environmental concerns should then be lower than the marginal productivity of capital that is generally used for discounting. Weitzman's (1994) argument is based on the premise that some future costs in terms of pollution are not taken into account when evaluating projects with environmental concerns. This implicitly supposes that courts cannot correctly value the costs of environmental accidents when imposing compensating and punitive damages to polluters. In that case, compensation payments underestimate the environmental loss, that is, the real social cost is  $X + A$  with  $A > 0$ . The socially optimal level of investment is then  $I^{**}$  such that :

$$K'(I^{**}) + \beta p'(I^{**})(X + A) = 0$$

<sup>14</sup>See Hanley and Spash (1993) for the argumentation about the discount rate for environmental evaluations.

where  $I^{**} > I^*$ .

If the social loss  $X+A$  is large compared to the monetary loss  $X$ , the imposition of bank liability yielding investment  $I^*$  is not desirable as it keeps investment away from its socially efficient level. On the other hand, if banks are not liable, firms overinvest and, hence, may pick an investment level closer to  $I^{**}$ . In a more detailed model, one could determine the optimal level of bank liability as a function of  $A$ . For example, if the contractual investment  $I$  when there is no bank liability is larger than the socially optimal level  $I^{**}$ , the introduction of partial bank liability could become efficient. If  $I^{**}$  is known by the legislator, it is possible to calibrate the optimal degree of bank liability such that the bank and the firm agree to invest exactly  $I^{**}$ . If  $A$  is low, however,  $I^{**} \simeq I^*$ , and bank liability is a good policy in that it improves the risk-sharing obtained by firms and keeps investment close to the socially efficient one.

We only make the point here that if courts underestimate the social costs of environmental accidents, bank liability may have unsuspected costs in terms of underinvestment in environmental protection. The legislator has to keep in mind that bank liability reduces the incentives for risk reduction investments. The legislator must then be aware of the difference between the compensation courts can impose ex post ( $X$ ) and the real and unknown consequences of accidents ( $X + A$ ).

### 3.6 Conclusion

Court judgments that followed the introduction of CERCLA actually justified the imposition of bank liability by the fact that banks had close and long relationships with firms and, hence, possibly an influence on their decisions. Firms and banks entering in contractual relationships take into account bank liability when

writing contracts, and therefore, the consequences of past court decisions have an impact on environmental prevention.

When firms are risk averse, the usual limited liability reducing effect on incentives is mitigated by the will to smooth dividends through states of nature. Giving a part of the environmental risk to firms can then have a positive effect on their risk reducing behavior. Hence, even if environmental accidents cause bankruptcy, firms have an incentive to avoid the bankruptcy states and can invest more (in the absence of bank liability) than what risk-neutral firms with limited liability would do.

Laws such as CERCLA seek to apply the principle that polluters should pay for the pollution they generate. These laws reduce then the social burden of environmental risks in two ways : first, because compensation payments do not have to be supported by tax-payers' money ; second, because they provide better incentives for prevention. If the search for a payer entails the legislator to turn against banks, however, the financial system can suffer distortions whose consequences on the pollution level are uneasily quantifiable. As is shown here, bank liability reduces the part of risk that firms incur (which is an efficient consequence) and their incentives to prevent such risks (which is an inefficient consequence). Whether bank liability is a good policy or not depends in part on the evaluation courts make of the social costs of environmental accidents. The effects of bank liability characterized here have to be weighted against benefits in terms of monitoring and auditing of firms' prevention activities when such activities are not directly enforceable in a contract (see, for example, Boyer and Laffont, 1994).

## Appendix

### Proof of Proposition 8 :

The first-order conditions for dividends are :

$$(1 - p(I))u'(c_1^{s0}) = (1 - p(I))\lambda + \theta^{s0} \quad \forall s$$

$$p(I)u'(c_1^{sX}) = p(I)\lambda + \theta^{sX} \quad \forall s$$

$$(1 - p(I))u'(c_2^z(s, 0)) = (1 - p(I))\lambda + \theta^{s0} \quad \forall z$$

$$p(I)u'(c_2^z(s, X)) = p(I)\lambda + \theta^{sX} \quad \forall z.$$

These conditions clearly imply that  $c_1^{sx} = c_2^z(s, x)$  for all  $z$ . Furthermore, they do not depend on the assumptions for  $k^s$ .  $\square$

### Proof of Proposition 9 :

Self-enforcing constraints imply that  $(1 - \beta)c^{sx} \leq y^s - x + k^s x/X + \beta\bar{y}$ . The upper bound on dividends is then  $(y^s - x + k^s x/X + \beta\bar{y})/(1 - \beta)$ . It is increasing in  $Y^{sx} \equiv y^s - x + k^s x/X$ .

Suppose that there are two states such that  $Y^{s'x'} > Y^{sx}$  with  $c^{s'x'} < c^{sx}$ . By first-order conditions, it cannot be the case that  $\theta^{s'x'} = \theta^{sx} = 0$ , since this would imply  $c^{s'x'} = c^{sx}$ . It cannot also be the case that  $\theta^{s'x'} > 0$  and  $\theta^{sx} > 0$ , since dividends would be equal to their respective upper bound, and would thus be increasing in  $Y$ . Since  $c^{s'x'} < c^{sx}$ , it must therefore be the case that  $\theta^{s'x'} > 0$  and  $\theta^{sx} = 0$ . But this implies that

$$c^{s'x'} = (Y^{s'x'} + \beta\bar{y})/(1 - \beta) > (Y^{sx} + \beta\bar{y})/(1 - \beta) \geq c^{sx},$$

a contradiction of our initial assumption. This proves that dividends are weakly increasing in  $y^s - x + k^s x/X$ .  $\square$

### Proof of Corollary 1 :

1. This is an immediate corollary of Proposition 9 when  $k^s = 0$ .

2. When  $k^s = X$ ,  $Y^{s0} = Y^{sX}$ . Then, both  $\theta^{s0} = \theta^{sX} = 0$  and  $\theta^{s0} > 0$  and  $\theta^{sX} > 0$  imply  $c^{s0} = c^{sX}$ . Either assumption  $c^{s0} > c^{sX}$  or  $c^{s0} < c^{sX}$  leads to a contradiction.
3. This is an immediate corollary of Proposition 9 when  $k^s \in (0, X)$ .

□

### Proof of Proposition 10 :

1. We first show that  $\theta^{s0} = 0$ . Suppose not. Then,  $\theta^{sx} > 0$  for all states  $(s, x)$  (since dividends are increasing in  $Y^{sx}$ ). We can then characterize the dividend level in each state using self-enforcing constraints :

$$(1 + \beta)c^{s0} = y^s + \beta\bar{y} \quad \forall s$$

$$(1 + \beta)c^{sX} = y^s - X + k^s + \beta\bar{y} \quad \forall s.$$

Substituting dividends in the bank's participation constraint yields :

$$-\frac{K(I)}{\beta} - p(I)E_s k^s < 0.$$

For any values for  $\{k^s\}_s$ , the bank's participation constraint cannot hold if all self-enforcing constraints bind. Then, at least one self-enforcing constraint does not bind. Hence,  $\theta^{s0} = 0$  by Proposition 9. This implies that  $u'(c^{s0}) = \lambda$ .

The first-order condition for investment is then :

$$K'(I) + \beta p'(I)X = \beta(1 + \beta)p'(I) \left[ \frac{E_s[u(c^{sX}) - u(c^{s0})]}{u'(c^{s0})} + E_s(c^{s0} - c^{sX}) \right],$$

which implies :  $K'(I) + \beta p'(I)X = \beta(1 + \beta)p'(I)E_s \left[ \left( \frac{u(c^{sX})}{u'(c^{s0})} - c^{sX} \right) - \left( \frac{u(c^{s0})}{u'(c^{s0})} - c^{s0} \right) \right]$ .

Define  $f(c^{sx}) = \frac{u(c^{sx})}{u'(c^{s0})} - c^{sx}$ . Then,  $f'(c^{sx}) = \frac{u'(c^{sx})}{u'(c^{s0})} - 1$ .

Since  $c^{s0} \geq c^{sx}$  for all  $(s, x)$ ,  $\frac{u'(c^{sx})}{u'(c^{s0})} \geq 1$ , and the function  $f$  is weakly

increasing. Given  $c^{sX} \leq c^{s0}$  we have  $f(c^{sX}) \leq f(c^{s0})$  for all  $s \in \mathcal{S}$ . It follows that :

$$K'(I) + \beta p'(I)X = \beta(1 + \beta)p'(I)E_s[f(c^{sX}) - f(c^{s0})] \geq 0.$$

Since the l.h.s. is increasing, this implies that there is overinvestment compared to the full-commitment optimal level.

2. If there is full liability,  $c^{sX} = c^{s0}$  for all  $s$ , and then  $K'(I) + \beta p'(I)X = 0$ , which means that investment is at its full-commitment optimal level.

□

### Proof of Proposition 11 :

Denote  $c^{s0} = c^s$  for all  $s$  and remember that  $\lambda = u'(c^S) \leq u'(c^s)$  for all  $s$ . Assume that  $K(I)/(1 - p(I))$  is increasing in  $I$ . The bank's participation constraint is binding at the optimum in the non-commitment problem, that is :  $\beta(1 + \beta)E_s c^s + \frac{K(\bar{I})}{1-p(\bar{I})} = \beta(1 + \beta)\bar{y}$ , and in the full commitment problem :  $\beta(1 + \beta)c + \frac{K(\hat{I})}{1-p(\hat{I})} = \beta(1 + \beta)\bar{y}$ . Hence,  $\beta(1 + \beta)E_s c^s + \frac{K(\bar{I})}{1-p(\bar{I})} = \beta(1 + \beta)c + \frac{K(\hat{I})}{1-p(\hat{I})}$ .

Now suppose that  $\bar{I} < \hat{I}$ . This implies  $K(\bar{I})/(1 - p(\bar{I})) < K(\hat{I})/(1 - p(\hat{I}))$  since  $K(I)/(1 - p(I))$  is increasing, and then,  $E_s c^s > c$ .

The ratio  $(\frac{u(c) - u(0)}{u'(c)} - c)$  is increasing and convex in  $c$  if  $u(c) = -e^{-rc}$  with  $r < 1$  or if  $u$  is any increasing concave thrice continuously differentiable function such that  $u''' < 0$ . It is linear if  $u(c) = \frac{1}{r}c^r$ ,  $r < 1$ . Then,

$$\begin{aligned} \frac{u(c) - u(0)}{u'(c)} - c &< \frac{u(E_s c^s) - u(0)}{u'(E_s c^s)} - E_s c^s \\ &\leq E_s \left[ \frac{u(c^s) - u(0)}{u'(c^s)} - c^s \right] \leq E_s \left[ \frac{u(c^S) - u(0)}{u'(c^S)} - c^s \right] \end{aligned}$$

Then, evaluating equation (3.10) for the allocations  $\{c^s\}$  gives  $\frac{1}{\beta}K'(\hat{I}) + (1 + \beta)p'(\hat{I})[\bar{y} + E_s(\frac{u(c^s) - u(0)}{u'(c^s)} - c^s)] < 0$ . That is,  $\bar{I} > \hat{I}$  and this contradicts the initial assertion. Then it must be that  $\bar{I} \geq \hat{I}$ , that is, the self-enforcing contract involves overinvestment compared to the full commitment optimal level  $\hat{I}$ . □



## Chapitre 4

# Contrat de partage de risque et structure de capital en absence d'engagement

### 4.1 Introduction

Le choix de la structure optimale de capital est un sujet important de la recherche en finance corporative. Pour Modigliani et Miller (1958), si les marchés des capitaux sont parfaits, la question de la structure optimale ne se pose pas parce que la valeur de la firme est indépendante de son mode de financement. La question qui motive la recherche sur la structure de capital depuis cet article est de savoir, si cette proposition ne tient pas, quels sont les déterminants de la structure de capital. Harris et Raviv (1991) offrent un survol de l'imposante recherche sur ce sujet. Ils décrivent les différentes théories qui expliquent pourquoi le financement par dette peut être préféré au financement par actions ou, en tout cas, pourquoi ces deux modes de financement peuvent avoir des implications différentes pour la

firme. Dans leur survol, ils distinguent quatre grands groupes de déterminants de la structure de capital<sup>1</sup>.

En premier lieu, la structure de capital peut alléger des problèmes d'agence à l'intérieur de la firme. Les théories qui reposent sur les problèmes d'agence expliquent que le financement par dette peut donner des incitations aux gestionnaires et ainsi réduire des conflits d'intérêt entre gestionnaires et actionnaires (Jensen et Meckling, 1976 ; Harris et Raviv, 1990).

La seconde théorie est que le financement par dette peut envoyer un signal positif aux marchés financiers dans un monde où les firmes ont, sur leur valeur, de l'information privée qu'elles veulent signaler (Ross, 1977 ; Myers, 1984 ; Myers et Majluf, 1984 ). Une firme qui a de bonnes espérances de rendements s'endette pour signaler qu'elle ne craint pas la liquidation. C'est un signal positif sur sa valeur et elle évite la sous-évaluation par les marchés.

En troisième lieu, une branche de la littérature a souligné l'influence de la structure de capital sur la compétition sur les marchés des produits (Brander et Lewis, 1986). Comme les actionnaires des firmes endettées ont tendance à avoir des comportements plus risqués, ils sont plus agressifs dans leur choix de production dans un duopole à la cournot. En s'endettant, ces actionnaires se commettent donc à être agressifs sur le marché des biens, ce qui leur donne un avantage sur leur concurrent.

Enfin, un quatrième groupe de modèles montre que la structure de capital influence les possibilités de prise de contrôle hostiles. Ces théories reposent sur le fait que les actions comportent des droits de vote alors que la dette n'en comporte

---

<sup>1</sup>Harris et Raviv (1991) ignorent dans ce survol les articles sur l'effet des distorsions fiscales qui incitent au financement par la dette ainsi que les modèles qui se concentrent sur les particularités des différents titres financiers. Dans ce papier, c'est également la distinction pure entre dette et financement par actions qui m'intéresse.

pas. La dette protège donc les actionnaires en place contre les prises de contrôle (Harris et Raviv 1988).

Les théories qui se sont centrées sur les modèles d'agence sont celles qui nous intéressent particulièrement ici. Ces modèles expliquent que l'existence du contrat de dette dans la firme peut donner à son gestionnaire des incitations à se comporter comme les actionnaires l'attendent. On suppose que le gestionnaire a un comportement opportuniste que les actionnaires de la firme veulent décourager. Il a en particulier une tendance à détourner des fonds à son profit ou à investir dans des projets non rentables pour accroître le capital qui est sous son contrôle. Si ces comportements sont observables mais non vérifiables, les actionnaires ne peuvent pas assigner contractuellement des actions au gestionnaire. Dans ce cas, le rôle du contrat de dette est d'imposer au gestionnaire des paiements vers l'extérieur qui diminuent la masse des fonds qu'il peut détourner à son profit. Le gestionnaire effectue ces paiements parce qu'un défaut de sa part entraîne la saisie des actifs par les créanciers et donc la perte du bénéfice de ces actifs. Hart et Moore (1994, 1998) développent un modèle dans lequel les rendements de la firme ne sont pas vérifiables. Il n'est donc pas possible de spécifier contractuellement les dividendes que le gestionnaire doit verser à ses actionnaires. Le gestionnaire ne peut alors pas se commettre à verser ces dividendes. Dans ce cas, le moyen d'empêcher, au moins en partie, le gestionnaire de s'accaparer les rendements de la firme est de lui imposer un paiement exogène, avec la menace de lui retirer le contrôle des rendements si ce paiement n'est pas exécuté, ce qui est vérifiable. Le contrat de dette remplit ces conditions. La faillite, qui entraîne la saisie des actifs par les créanciers, constitue une punition suffisante pour inciter le gestionnaire à verser ce qu'il doit.

Dans ce travail on s'intéresse également aux problèmes d'engagement et aux punitions nécessaires pour forcer l'exécution des contrats. Cependant, l'hypothèse d'absence d'engagement est élargie à toutes les parties en jeu. On présente un

modèle dynamique dans lequel le gestionnaire a besoin de refinancement dans certaines périodes. Un contrat de financement est signé au début de la relation mais le gestionnaire ne peut pas s'engager à payer son financier et le financier ne peut pas s'engager à le refinancer. Dans Hart et Moore (1998), l'absence d'engagement provient de la non vérifiabilité des rendements. Ici, tout est parfaitement vérifiable et le contrat de financement est contingent aux réalisations des rendements. L'absence d'engagement est exogène, elle se justifie par des coûts élevés d'exécution des contrats. En cas de bris en effet, les frais judiciaires et les délais de traitement dissuadent les parties de faire exécuter les contrats par les cours. Finalement, elles ont intérêt à écrire les contrats de sorte qu'ils ne soient pas reniés ex post. On dit alors de ces contrats qu'ils sont auto-exécutoires.

L'auto-exécution du contrat dépend des punitions imposées en cas de défaut. On suppose que le défaut de l'une ou l'autre des parties entraîne la fin de la relation et la perte des surplus futurs qu'elle promet. La punition maximale pour bris du contrat est donc un retour à l'autarcie et les conditions d'autarcie sont déterminantes pour les incitations à respecter le contrat. Dans le cas du gestionnaire, on suppose toujours que le défaut entraîne aussi la saisie de ses droits de propriété sur les actifs, qui sont la garantie du contrat. Mais le financier ne met rien en garantie. Les conditions d'autarcie, pour lui, dépendent de la répartition initiale des droits de propriété. On montre ainsi que la différence entre un contrat de dette et un financement sur le marché repose sur le fait que le financier/créancier n'est pas propriétaire des actifs de la firme alors que le financier/actionnaire l'est.

On suppose ici que le gestionnaire est riscophobe. Si les investisseurs peuvent être considérés comme neutres vis-à-vis du risque parce qu'ils possèdent en général des portefeuilles diversifiés, le gestionnaire, qu'il soit propriétaire de sa firme ou non, a de l'aversion pour le risque. Cette hypothèse n'est pas courante dans les modèles en finance parce que les gestionnaires sont souvent interprétés comme les investisseurs eux-mêmes. Il existe pourtant des modèles qui reposent sur l'aver-

sion au risque. Leland et Pyle (1977) développent un modèle de signal dans lequel un entrepreneur individuel doit trouver du capital pour financer un projet risqué. L'entrepreneur riscophobe préfère un financement par émission d'actions qui n'entraîne pas de risque de défaut. Cependant, comme les marchés ne connaissent pas la valeur du projet, l'entrepreneur doit la signaler en prenant une part de risque, c'est-à-dire en émettant de la dette. Dans ce modèle, la riscophobie du gestionnaire rend le signal plus coûteux pour lui, et donc plus efficace.

Il n'y a pas d'asymétrie d'information dans notre cas. Le gestionnaire est riscophobe et la dynamique des refinancements doit assurer le lissage de ses consommations. Le contrat de financement a donc valeur d'assurance, c'est un modèle dynamique de partage de risque entre un financier et un entrepreneur. Contrat de dette et financement par les marchés sont alors comparés sur la base de l'efficacité du partage de risque qu'ils offrent.

Les modèles dynamiques de partage de risque sans engagement sont peu utilisés en finance. Le modèle qu'on va utiliser ici s'inspire de celui de Thomas et Worrall (1988). Ces auteurs développent le modèle dans le cadre des contrats de travail entre des firmes neutres vis-à-vis du risque et des employés riscophobes. Ils caractérisent les chemins de consommation de l'employé quand le contrat de partage de risque ne peut engager aucune des parties. Gobert et Poitevin (1998) reprennent ce modèle dans un environnement financier et introduisent des possibilités d'épargne pour l'agent riscophobe. Ils montrent que si l'épargne peut être saisie par le financier en cas de défaut du gestionnaire, le partage de risque est amélioré par rapport à ce qui peut être atteint dans le modèle de Thomas et Worrall (1988). Ligon, Thomas et Worrall (1998) étendent ce modèle à  $N$  individus riscophobes et l'interprètent comme une relation d'assurance communautaire au sein d'un village. L'épargne est alors une part de la production stockée pour la période suivante. Ils ont la même conclusion que Gobert et Poitevin (1998), c'est-à-dire que si l'épargne est commune et que l'individu qui brise la relation

d'assurance perd le droit à sa part, le partage de risque obtenu est efficace. Par contre, quand l'épargne est individuelle et insaisissable, le partage de risque qui peut être offert par le contrat est moins bon que s'il n'y a pas de possibilité de stockage.

Le modèle qu'on présente ici est le contrat avec épargne de Gobert et Poitevin (1998), dans lequel les conditions d'autarcie du financier sont définies plus précisément. Ces conditions déterminent l'efficacité du contrat. La section suivante présente l'environnement financier du modèle et celle qui suit donne la formulation du contrat optimal. La section 4.4 énonce les conclusions sur la distinction entre dette et financement par les marchés. Enfin, la section 4.5 replace ces conclusions dans le contexte de la littérature sur la structure de capital. Toutes les preuves sont données dans l'appendice.

## 4.2 Environnement

### 4.2.1 Entrepreneur

Un entrepreneur vit une infinité de périodes notées  $t = 0, \dots, \infty$ . Il bénéficie d'une technologie qui, chaque période, génère un revenu aléatoire à partir d'un investissement. Il y a  $S$  états du monde possibles qu'on note  $s \in \mathcal{S} = \{1, 2, \dots, S\}$  dont les réalisations sont identiquement et indépendamment distribuées chaque période. On note  $p^s$  la probabilité de l'état  $s$  quelle que soit la période considérée et on a  $p^s > 0$  pour tout  $s$  et  $\sum_{s \in \mathcal{S}} p^s = 1$ .

Chaque période, le revenu aléatoire de l'entrepreneur est généré par la fonction de production  $K(k_t; s)$  où  $k_t$  est le stock de capital productif disponible au début de la période  $t$ . Ce stock de capital se déprécie au taux  $d$  et l'entrepreneur réinvestit en fin de période  $t$ , une partie de la production et du capital restant. L'investissement

en  $t$  est donc  $i_t = k_{t+1} - (1 - d)k_t$ . La fonction  $K$  est strictement croissante et concave dans le stock de capital, on note  $K'(\cdot; s) > 0$  et  $K''(\cdot; s) < 0$  ses dérivées premières et secondes par rapport au stock de capital pour tout  $s$ . De plus on ordonne les états de la nature de sorte que  $K(k; 1) < K(k; 2) < \dots < K(k; S)$  pour tout  $k$ .

L'entrepreneur peut accumuler des réserves sur un compte d'épargne qui rapporte le taux  $r$  par période. Les réserves sont soumises à une contrainte de liquidité dans la mesure où l'entrepreneur peut déposer et retirer des montants sur ce compte mais ne peut en aucun cas emprunter (retirer plus qu'il n'a accumulé.). On note  $A_t$  le stock de réserves accumulées à la fin de la période  $t - 1$ ; au début de la période  $t$  la firme dispose de  $(1 + r)A_t$ . La contrainte de liquidité impose  $A_t > 0$ . L'entrepreneur escompte le futur à un taux  $\delta$  et on note  $\beta = \frac{1}{1+\delta}$  le facteur d'escompte.

On suppose que l'entrepreneur est riscophobe. Il possède une fonction d'utilité  $u(c)$  strictement croissante ( $u' > 0$ ) et concave ( $u'' < 0$ ). Cette fonction est définie sur le revenu résiduel  $c$  de la firme qui est la consommation ultime de l'entrepreneur. Ce revenu résiduel est composé à chaque période de la production réalisée et du stock d'épargne, diminués de l'investissement et de ce qui est gardé en réserve pour la période suivante. La consommation en période  $t$  dans l'état  $s$  est donc :

$$c_t^s = K(k_t; s) + (1 - d)k_t - k_{t+1} + (1 + r)A_t - A_{t+1}.$$

L'entrepreneur étant riscophobe, il tient à lisser autant que possible sa consommation et donc les revenus de la firme, dans le temps et sur les états de la nature. Lisser sa consommation revient pour lui à réinvestir et épargner efficacement de façon à maintenir constant le revenu résiduel qui lui revient. Les réserves de la firme constituent une forme d'auto-assurance contre les réalisations des états de la nature. L'entrepreneur peut épargner du revenu dans les bonnes périodes et désépargner pour investir dans les mauvaises, de façon à maximiser son utilité

espérée intertemporelle. L'entrepreneur résout donc un problème de programmation dynamique standard qui donne pour chaque période, les investissements et les montants à épargner optimaux étant donnés les stocks de réserve et de capital disponibles au début de la période. Le problème de l'entrepreneur est le suivant :

$$\begin{aligned}
 g^s(A_t, k_t) &= \max_{k_{t+1}^s, A_{t+1}^s} u(c_t^s) + \beta E_z g^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s) & (4.1) \\
 \text{s/c } c_t^s &= K(k_t; s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - k_{t+1}^s - A_{t+1}^s \\
 k_{t+1}^s - (1-d)k_t &\geq 0 \\
 A_{t+1}^s &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Ce problème inclut, outre la contrainte de liquidité sur le stock d'épargne, une contrainte d'irréversibilité sur le capital. On suppose donc que les actifs productifs ne peuvent pas être détruits.

L'entrepreneur n'a pas de richesse initiale ; si  $K(0; s) = 0$  pour tout  $s$ , l'entrepreneur ne peut pas générer de revenu s'il ne trouve pas un financier pour lui prêter le capital nécessaire au démarrage de son projet. On peut cependant supposer que la fonction  $K$  incorpore le bénéfice d'un capital humain spécifique de l'entrepreneur qui fait en sorte que le projet peut voir le jour sans apport de capital initial. Dans ce cas,  $K(0, s) > 0$ . On ne pose pas ici de restriction sur les conditions initiales et on suppose que  $g^s(0, 0) \geq 0$  sans affecter les résultats du modèle.

Les fonctions de valeur  $g^s(A, k)$ , obtenues à la solution du problème de programmation dynamique (4.1), sont croissantes et concaves dans leurs deux arguments. Les chemins optimaux du capital et de l'épargne sont donnés par les conditions suivantes :

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z u'(c_{t+1}^z) + \mu_t^s, \quad (4.2)$$

$$u'(c_t^s) = \beta E_z [K'(k_{t+1}; z) + 1 - d] u'(c_{t+1}^z) - \beta E_z \eta_{t+1}^z + \eta_t^s, \quad (4.3)$$

où  $\mu_t^s$  et  $\eta_t^s$  sont les multiplicateurs des contraintes de liquidité et d'irréversibilité



respectivement, pour le problème en période  $t$  et dans l'état  $s$ . La première condition est la condition d'Euler transformée pour un problème avec contrainte de liquidité. Les études sur la consommation avec épargne et contrainte de liquidité (Schechtman, 1976 ; Deaton, 1991) ont déjà analysé ce problème. Elles montrent que, du fait de la contrainte de liquidité, le compte d'épargne n'est pas suffisant pour permettre un lissage parfait de la consommation. Le chemin optimal du stock de capital ne peut donc pas être stable et la productivité marginale moyenne varie dans le temps.

Même si  $K(0, s) > 0$  pour tout  $s$  et qu'il n'a pas besoin de financement initial, l'entrepreneur risco-phobe est imparfaitement assuré contre les variations du revenu résiduel de la firme. Il cherche par conséquent un partenaire financier qui pourrait le refinancer dans les périodes où son revenu est faible en échange de paiements quand son revenu est élevé. Il existe des gains à l'échange entre l'entrepreneur et un financier neutre vis-à-vis du risque puisque l'entrepreneur risco-phobe est disposé à transférer une part de consommation moyenne au financier en échange d'un certain lissage.

#### 4.2.2 Financement

Un financier neutre vis-à-vis du risque peut gagner à assumer le risque qui repose sur le revenu résiduel de l'entrepreneur. On supposera que le financier est doté de la fonction d'utilité  $v(b) = b$ . Il a une richesse  $e$  à chaque période qu'on normalise à  $e = 0$  sans perte de généralité.

En période  $t = 0$ , le financier avance un montant  $I$  à la firme et un contrat de financement est signé qui stipule des transferts entre les deux agents pour toutes les périodes futures<sup>2</sup>. Outre ce financement initial  $I$ , le contrat financier doit offrir

<sup>2</sup>Le montant  $I$  peut être égal à zéro, ici, quand  $K(0, s) > 0$  pour tout  $s$ . Cependant, un financement initial peut permettre une croissance plus rapide du stock de capital.

à l'entrepreneur une assurance contre la variabilité de ses revenus. C'est un contrat de partage de risque. On suppose ici que les revenus de la firme sont observables par les deux agents, le contrat financier peut donc être contingent à l'histoire des réalisations des états de la nature. On suppose aussi que le financier se trouve en situation de concurrence sur le marché, le contrat optimal va donc maximiser l'utilité espérée de la firme sous la contrainte de participation du financier. Dans ces conditions, le contrat stipule non seulement des transferts contingents  $b_t^s$  entre les deux agents mais aussi les investissements et épargnes contingents optimaux, puisque l'utilité de la firme dépend des chemins d'épargne et de capital.

Il est impossible de forcer l'exécution des contrats dans cet environnement. Les cours de justice ne peuvent pas forcer les financiers à refinancer les firmes quand il n'est pas dans leur intérêt de le faire. De même, les financiers ne comptent pas sur les cours pour forcer leurs débiteurs à s'acquitter de leurs paiements parce que les traitements juridiques sont longs et coûteux et qu'ils sont de plus inutiles quand les débiteurs sont insolvables. Dans n'importe quelle période, l'entrepreneur ou le financier peut donc briser la relation en refusant d'effectuer le transfert stipulé par le contrat. Le contrat de partage de risque doit donc être auto-exécutoire. Ceci signifie que les transferts et les stocks d'épargne et de capital doivent être calibrés de sorte que les parties préfèrent toujours respecter le contrat. Comme il existe des gains à l'échange, il doit toujours être possible de les répartir de sorte que les parties aient intérêt à rester dans le contrat. Cependant, cet intérêt dépend, dans chaque état de la nature, de ce que les parties peuvent obtenir en brisant la relation. Le contrat optimal dépend donc des punitions qui peuvent être infligées en cas de bris. La punition qu'on considère ici est maximale; c'est l'impossibilité de recontracter dans le futur. Celle des deux parties qui brise le contrat dans une période perd donc le bénéfice de la part des gains à l'échange que le contrat lui promet, en espérance, dans le futur<sup>3</sup>. Après un bris de contrat, les parties se

---

<sup>3</sup>Une renégociation du contrat après un bris pourrait être envisageable mais on suppose ici

retrouvent donc en autarcie pour le reste de l'horizon. Il est donc nécessaire de définir ces conditions d'autarcie pour déterminer le contrat optimal.

L'entrepreneur a le choix entre deux types de financement. Il peut en effet choisir entre un financement par actions et un financement par dette. Ces deux types de financement ont des incidences différentes sur la répartition des droits de propriété sur les actifs de l'entreprise et, par là-même, sur les conditions d'autarcie.

Si l'entrepreneur opte pour un financement par actions, les actionnaires sont propriétaires des actifs de la firme et il n'en est lui-même que le gestionnaire. Les actionnaires qui investissent un montant  $I$  en période 0 attendent en retour des dividendes dont la valeur future soit égale en espérance à  $I$ . Les transferts stipulés par le contrat s'interprètent alors comme des dividendes ou des rachats d'actions s'ils vont de la firme vers les actionnaires. Quand les transferts s'effectuent en sens contraire, c'est que les actionnaires refinancent la firme. La valeur espérée des dividendes futurs attendue par les actionnaires évolue donc avec les refinancements et les rachats d'actions, selon les réalisations du revenu de la firme. Si, dans une période, cette valeur devient inférieure à ce que les actionnaires peuvent obtenir en autarcie, alors ils brisent le contrat pour retourner en autarcie. Le bris du contrat dans le cas d'un financement par actions est réalisé par la liquidation de la firme. Comme on l'a mentionné plus haut, la fonction de production  $K$  repose sur le capital humain de l'entrepreneur ; quand les actionnaires brisent le contrat, ils ne peuvent pas simplement changer de gestionnaire, ils perdent le bénéfice des rendements de la production  $K$  et ne récupèrent que la valeur de liquidation des actifs de la firme, c'est-à-dire son stock de capital et de réserves. Le contrat auto-exécutoire doit donc calculer les transferts et les stocks de capital et d'épargne de qu'après avoir brisé le contrat, une partie a acquis une mauvaise réputation sur le marché et ne peut recontracter qu'avec le minimum de pouvoir de négociation. Finalement, à la renégociation du contrat, la partie fautive ne peut obtenir que la part minimale des gains à l'échange, pour laquelle elle avait initialement décidé de le briser. Voir Asheim et Strand (1991).

sorte que dans chaque période et dans chaque état de la nature, la somme espérée des dividendes futurs soit supérieure à la valeur de liquidation des actifs.

Si l'entrepreneur choisit de se financer par la dette, le financier est un créancier et n'a aucun droit de propriété sur les actifs. Les transferts représentent alors les flux de remboursements et de refinancements et la valeur espérée de ces flux en période 0 doit être égale au montant  $I$  prêté. Par la suite, la valeur de la dette évolue avec l'histoire des refinancements. Si dans une période, la valeur espérée des transferts futurs devient négative, il n'est plus profitable pour le financier de refinancer l'entrepreneur et il brise la relation. Dans ce cas, il retourne en autarcie avec sa dotation  $e = 0$ . Pour être auto-exécutoire, le contrat doit donc garantir que la valeur espérée des transferts future reste supérieure à 0.

Quant à l'entrepreneur, il brise le contrat si, dans une période, il renonce à honorer son paiement (de dividende ou de remboursement). On suppose que le financier, qu'il soit actionnaire ou créancier, peut dans ce cas saisir le capital et les réserves de la firme qui sont la garantie du contrat. Ceci suppose que ces stocks sont non seulement observables par le financier mais aussi vérifiables par une cour de justice. La vérifiabilité des variables n'implique pas que le contrat lui-même peut être exécuté par une cour puisqu'on a justifié par l'existence de coûts élevés d'exécution que les parties préfèrent écrire des contrats auto-exécutoires. Cependant, si finalement le contrat était brisé, le financier pourrait, même à un certain coût, récupérer les actifs en garantie. La firme est donc liquidée si l'entrepreneur brise le contrat. L'entrepreneur en autarcie à partir de la période  $t$  et dans l'état  $s$  peut alors au mieux obtenir une utilité intertemporelle égale à  $g^s(0, 0)$ .

La détermination analytique du contrat optimal n'est pas dépendante du type de financement considéré. Cependant la solution obtenue à l'optimum va l'être parce que ces deux environnements conditionnent les contraintes qui rendent le contrat auto-exécutoire. La section suivante décrit la détermination du contrat

optimal.

### 4.3 Contrat

On note  $H_t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$  l'histoire des réalisations des états de la nature jusqu'à la date  $t$  et  $\mathcal{H}_t$  l'ensemble des histoires possibles en  $t$ . Un contrat  $\Delta$  est un ensemble  $\{\mathcal{A}_t, \mathcal{K}_t, \mathcal{B}_t\}_{t=0}^{\infty}$  de fonctions telles que  $\mathcal{A}_t : \mathcal{H}_t \rightarrow R^+$ ,  $\mathcal{K}_t : \mathcal{H}_t \rightarrow R^+$  et  $\mathcal{B}_t : \mathcal{H}_t \rightarrow R$  donnent les stocks optimaux d'épargne et de capital et les transferts optimaux, pour la période  $t$ . On note  $A_{t+1}^s = \mathcal{A}_t(H_{t-1}, s)$ ,  $k_{t+1}^s = \mathcal{K}_t(H_{t-1}, s)$  et  $b_t^s = \mathcal{B}_t(H_{t-1}, s)$ . Quand  $b_t^s$  est positif, le transfert est fait par l'entrepreneur au financier, quand il est négatif c'est le contraire et on a alors un refinancement. Dans une période  $t$ , les utilités futures espérées de l'entrepreneur et du financier respectivement, étant donné le contrat  $\Delta$ , sont donc :

$$\mathcal{U}(\Delta, (H_{t-1}, s)) = u(c_t^s) + E\left[\sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau u(c_{t+\tau}) | H_t\right],$$

$$\mathcal{V}(\Delta, (H_{t-1}, s)) = b_t^s + E\left[\sum_{\tau=1}^{\infty} \beta^\tau b_{t+\tau} | H_t\right],$$

avec  $c_t^s = K(k_t, s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - k_{t+1}^s - A_{t+1}^s - b_t^s$ .

Étant donné que les parties ne peuvent s'engager à respecter le contrat, les fonctions  $\mathcal{A}_t$ ,  $\mathcal{K}_t$  et  $\mathcal{B}_t$ ,  $t = 0, \dots, \infty$ , doivent donc être telles que les agents préfèrent toujours le respecter. Ceci suppose que le contrat intègre des contraintes *auto-exécutoires*, c'est-à-dire des bornes minimales sur les utilités futures  $\mathcal{U}(\Delta, (H_{t-1}, s))$  et  $\mathcal{V}(\Delta, (H_{t-1}, s))$  pour chaque période  $t$  et chaque état de la nature  $s$  possible dans cette période. Ces bornes minimales sont définies par les conditions d'autarcie décrites dans la section précédente. Les contraintes auto-exécutoires s'écrivent alors :

$$\mathcal{U}(\Delta, (H_{t-1}, s)) \geq g^s(0, 0), \quad \forall s \in \mathcal{S}, \forall t = 1, \dots, \infty \quad (4.4)$$

$$\mathcal{V}(\Delta, (H_{t-1}, s)) \geq a[(1-d)k_t + (1+r)A_t], \quad \forall s \in \mathcal{S}, \forall t = 1, \dots, \infty \quad (4.5)$$

Les contraintes doivent tenir pour chaque état de la nature parce que c'est après la réalisation du revenu  $K(k_t; s)$ , qui conditionne les transferts, que les parties vont décider ou non de briser le contrat. Les contraintes auto-exécutoires de l'entrepreneur – l'ensemble de contraintes (4.4) – garantissent que le contrat lui offre toujours plus d'utilité qu'il ne peut en obtenir en autarcie après avoir brisé le contrat et perdu les actifs. Dans l'ensemble (4.5) des contraintes auto-exécutoires du financier, le paramètre  $a$  distingue les deux types de financement. Quand  $a = 0$ , les contraintes garantissent que le contrat offrent toujours une utilité positive au financier. C'est ce qui est nécessaire pour garder un créancier dans le contrat. Quand  $a = 1$ , on considère un financement par actions et alors le contrat doit toujours offrir plus que la valeur de liquidation de l'entreprise. Cette valeur de liquidation est égale à la valeur des actifs dans la période et l'état de la nature considérés, c'est-à-dire au stock de capital déprécié et au montant total de réserves :  $(1 - d)k_t + (1 + r)A_t$ <sup>4</sup>.

En période  $t = 0$ , le contrat est signé après la réalisation de l'état de la nature. Le contrat optimal maximise l'utilité espérée de l'entrepreneur,  $\mathcal{U}(\Delta, H_0)$ , sous l'ensemble des contraintes définies par (4.4) et (4.5), sous les contraintes de liquidité et d'irréversibilité de l'investissement et sous la contrainte de participation du financier. Cette dernière contrainte stipule que  $\mathcal{V}(\Delta, H_0)$  promise au financier en  $t = 0$  doit être au moins égale à  $I$ . Le contrat doit donc être efficace en  $t = 0$  conditionnellement aux contraintes. Toutes les continuations possibles du contrat dans les périodes suivantes doivent cependant aussi être efficaces. En effet, supposons que le contrat est efficace en  $t = 0$  mais que la continuation du contrat qui suit une histoire  $H_t$ , n'est pas efficace. Il est donc possible de faire varier les

<sup>4</sup>En fait, quand les actionnaires décident de liquider la firme à la période  $t$ , les actifs se montent à  $K(k_t; s) + (1 - d)k_t + (1 + r)A_t$ . On suppose ici que la production  $K(k_t; s)$  de la période est perdue en frais de liquidation. C'est une hypothèse technique qui est nécessaire pour conserver la convexité de l'ensemble des contraintes.

transferts dans les périodes  $t$  et  $t + 1$  sans changer l'utilité  $\mathcal{V}(\Delta, (H_{t-1}, s))$  du financier mais de façon à augmenter celle de l'entrepreneur. Mais alors dans ce cas l'utilité de l'entrepreneur augmente aussi en période  $t = 0$  et c'est que le contrat initial n'était pas efficace.

La détermination du contrat optimal doit donc intégrer la détermination des continuations efficaces pour toutes les périodes. Pour chaque période  $t$ , on doit trouver l'utilité maximale de l'entrepreneur dans l'état de la nature  $s$  comme une fonction de l'utilité  $V_t^s$  promise au financier à la période passée. Le montant  $V_t^s$  évolue avec l'histoire du contrat. Il représente la somme espérée des transferts présents et futurs dus au financier en  $t$  étant donné l'histoire des refinancements passés. Chaque période, la réalisation de l'état de la nature conditionne le transfert courant et la réévaluation des sommes espérées  $V_{t+1}^z$ ,  $z \in \mathcal{S}$ , qui seront dues à la période suivante dans chacun des états  $z$  possibles. La continuation du contrat en  $t$  peut donc être représentée comme une frontière de Pareto dans chaque état de la nature possible à cette période.

Dans chaque période, les utilités qu'il est possible d'accorder aux deux parties dépendent des richesses disponibles, c'est-à-dire des stocks d'actifs. Les frontières de Pareto sont déterminées par une équation de Bellman qui donne l'utilité maximale de l'entrepreneur comme une fonction de variables d'état qui sont la somme espérée  $V_t^s$  de tous les transferts dus au financier et les stocks de capital  $k_t$  et d'épargne  $(1 + r)A_t$  disponibles au début de la période. Dans une période  $t$  et un état  $s$ , l'équation de Bellman détermine les stocks d'actifs  $k_{t+1}^s$  et  $A_{t+1}^s$  optimaux pour  $t + 1$  ainsi que le transfert optimal  $b_t^s$  entre les deux agents et les utilités minimales à accorder au financier pour la période suivante,  $\{V_{t+1}^z\}_{z \in \mathcal{S}}$ . Pour une raison de cohérence temporelle, ces grandeurs doivent être telles que la somme du transfert courant  $b_t^s$  et de l'espérance d'utilité future  $EV_{t+1}^z$  soit au moins égale à l'utilité qui était promise au financier pour la période courante,  $V_t^s$ . La frontière de Pareto est donc définie pour tout  $t$  et tout  $s \in \mathcal{S}$ , par la fonction de valeur

suivante :

$$f^s(A_t, k_t, V_t^s) = \max_{\substack{A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, \\ b_t^s, \{V_{t+1}^z\}_{z=1}^S}} u(K(k_t; s) + (1-d)k_t + (1+r)A_t - k_{t+1}^s - A_{t+1}^s - b_t^s) +$$

$$\beta E_z f^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z)$$

$$\text{s.t. } f^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) \geq g^z(0, 0) \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (4.6)$$

$$V_{t+1}^z \geq a[(1-d)k_{t+1}^s + (1+r)A_{t+1}^s] \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (4.7)$$

$$b_t^s + \beta E_z V_{t+1}^z \geq V_t^s \quad (4.8)$$

$$A_{t+1}^s \geq 0 \quad (4.9)$$

$$k_{t+1}^s - (1-d)k_t \geq 0. \quad (4.10)$$

Dans ce problème, la fonction de valeur intervient dans la définition de l'ensemble des contraintes, ce qui n'est pas standard. Cependant, on peut montrer que le programme de maximisation a toutes les bonnes propriétés et que les conditions de premier ordre sont nécessaires et suffisantes pour un maximum<sup>5</sup>. On affecte les multiplicateurs  $p^z \beta \theta_t^z$  et  $p^z \beta \lambda_t^z$  aux ensembles de contraintes auto-exécutoires (4.6) et (4.7) respectivement. La contrainte (4.8) est la contrainte de cohérence temporelle qui garantit que l'utilité promise au financier en  $t$  va être effectivement distribuée en un transfert  $b_t^s$  aujourd'hui et une espérance  $E_z V_{t+1}^z$  pour le futur. On associe le multiplicateur  $\psi_t^s$  à cette contrainte. Enfin, les multiplicateurs  $\mu_t^s$  et  $\eta_t^s$  correspondent à la contrainte de liquidité (4.9) et à la contrainte d'irréversibilité (4.10) respectivement. On dérive ce programme par rapport aux variables  $A_{t+1}^s$ ,  $k_{t+1}^s$ ,  $b_t^s$  et  $V_{t+1}^z$  pour obtenir, pour la période  $t$  et l'état de la nature  $s$ , l'ensemble des conditions de premier ordre qui suit.

$$u'(c_t^s) = \beta E_z (1 + \theta_t^z) f_A^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) - \beta a(1+r) E_z \lambda_t^z + \mu_t^s \quad (4.11)$$

$$u'(c_t^s) = \beta E_z (1 + \theta_t^z) f_k^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) - \beta a(1-d) E_z \lambda_t^z + \eta_t^s \quad (4.12)$$

$$u'(c_t^s) = \psi_t^s \quad (4.13)$$

$$(1 + \theta_t^z) f_V^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \lambda_t^z = -\psi_t^s \quad \forall z \in \mathcal{S} \quad (4.14)$$

<sup>5</sup>Voir Thomas et Worrall (1988), Sigouin (1997) et Gobert et Poitevin (1998).



Les conditions enveloppe sont obtenues en dérivant le problème par rapport aux variables d'état  $A_t$ ,  $k_t$  et  $V_t$ .

$$f_A^s(A_t, k_t, V_t^s) = (1 + r)u'(c_t^s) \quad (4.15)$$

$$f_k^s(A_t, k_t, V_t^s) = (K'(k_t; s) + 1 - \delta)u'(c_t^s) - (1 - d)\eta_t^s \quad (4.16)$$

$$f_V^s(A_t, k_t, V_t^s) = -\psi_t^s \quad (4.17)$$

On peut trouver dans Gobert et Poitevin (1998) la solution de ce modèle de contrat financier auto-exécutoire avec épargne dans le cas décrit ici comme un contrat de dette. L'objectif du présent travail est de discuter l'importance de la distinction entre contrat de dette et actionnariat dans le cadre des contrats de partage de risque. Il est nécessaire pour cela de connaître non seulement la solution du contrat optimal mais surtout le rôle particulier joué par les réserves. La sous-section suivante décrit la solution du contrat et discute du rôle de l'épargne. La distinction entre les deux types de financement est discutée dans la section qui suit.

### 4.3.1 Contrat optimal

Les fonctions  $f^s(A, k, V)$  sont croissantes en  $A$  et  $k$  et décroissantes en  $V$  et elles sont concaves dans leurs trois arguments. Le contrat optimal lisse au mieux le revenu résiduel de la firme en coordonnant les deux mécanismes d'assurance de l'entrepreneur, c'est-à-dire les transferts avec le financier et les mouvements d'épargne et de désépargne. Cette coordination implique, à l'optimum, une complémentarité entre le stock de réserve et le montant dû au financier. La propriété suivante découle de cette complémentarité.

**Propriété 1.** *Dans n'importe quelle période et pour tous les états  $s$  possibles, on peut écrire :  $f^s(A, k, V^s) = h^s(X^s, k)$ , avec  $X^s = (1 + r)A - V^s$ .*

Cette propriété implique qu'un accroissement  $dA$  de la valeur de  $A$  accompagné d'un accroissement  $dV^s = (1+r)dA$  de  $V^s$  ne change pas l'utilité espérée de l'entrepreneur. Dans ce modèle, le compte de réserve sert de garantie puisque le financier peut le saisir quand l'entrepreneur ne paie pas le remboursement dû. Les montants dus au financier peuvent donc augmenter sans que l'entrepreneur soit incité à briser le contrat, à la condition que les réserves augmentent proportionnellement. Finalement, le véritable déterminant de l'utilité de l'entrepreneur est la richesse nette, c'est-à-dire le montant des réserves moins ce qui est dû au financier :  $(1+r)A - V^s$ .

Le lissage à l'optimum est donné par la relation suivante qui provient des conditions (4.14) et (4.17) :

$$u'(c_t^s) = (1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{S}.$$

Dans un environnement où l'engagement des deux parties est possible ( $\theta_t^z = \lambda_t^z = 0$ ), le contrat contingent peut lisser parfaitement la consommation de l'entrepreneur. Quand les parties peuvent résilier le contrat, celui-ci doit assurer que les utilités futures sont supérieures aux utilités en autarcie afin de les inciter à rester dans la relation. Selon que la contrainte auto-exécutoire du financier ou celle de l'entrepreneur est serrée dans l'état  $z$ ,  $\lambda_t^z$  ou  $\theta_t^z$  est positif. La consommation de l'entrepreneur est dépendante des contraintes et ne peut plus être constante. Les contraintes auto-exécutoires déterminent des bornes sur la consommation de l'entrepreneur, la propriété suivante en décrit le comportement.

**Propriété 2.** *Pour tout  $t$ , la consommation  $c_t^s$  dans l'état  $s$  est telle que :*

$$c_t^s = \begin{cases} \bar{c}^s(A_t, k_t) & \text{if } c_{t-1} \geq \bar{c}^s(A_t, k_t) \\ c_{t-1} & \text{if } \underline{c}^s(k_t) \leq c_{t-1} \leq \bar{c}^s(A_t, k_t) \\ \underline{c}^s(k_t) & \text{if } c_{t-1} \leq \underline{c}^s(k_t) \end{cases}$$

*Les bornes  $\bar{c}^s(A_t, k_t)$  et  $\underline{c}^s(k_t)$  sont croissantes en  $k_t$  et  $s$ ,  $\bar{c}^s(A_t, k_t)$  est croissante en  $A_t$ .*

Les bornes de consommation dépendent du stock de capital disponible au début de la période parce que ce stock détermine le niveau de revenu espéré et donc l'ensemble des possibilités de consommation. Le stock de réserves influence quant à lui le partage de risque. La contrainte auto-exécutoire du financier limite le transfert à l'entrepreneur et impose une borne supérieure à sa consommation. Cependant, comme la consommation peut être financée par un prélèvement sur les réserves, cette borne supérieure augmente avec le stock  $A$  disponible.

La consommation est bornée inférieurement par la contrainte auto-exécutoire de l'entrepreneur. Comme les conditions d'autarcie de l'entrepreneur sont indépendantes du stock d'épargne, la borne inférieure ne dépend pas de  $A$ .

Les bornes de consommation sont croissantes dans les états de la nature, le partage de risque peut donc être imparfait. Cependant, comme les bornes supérieures sont croissantes dans le stock d'épargne, les possibilités de consommation peuvent s'améliorer dans le temps. Gobert et Poitevin (1998) montrent que dans le cas d'un contrat de dette et si le taux d'intérêt sur les réserves est égal au taux d'escompte, un lissage parfait de la consommation peut être atteint en un nombre fini de périodes. On va voir dans la section suivante comment ce résultat est dépendant du type de contrat que l'on suppose, c'est-à-dire du paramètre  $a$ .

#### 4.4 Partage de risque et type de contrat

Gobert et Poitevin (1998) montrent que si le taux d'intérêt est égal au taux d'escompte, le revenu résiduel de l'entrepreneur peut être parfaitement lissé par un contrat de dette au bout d'un nombre fini de périodes. Ce résultat repose sur la substituabilité entre les transferts et l'épargne. Si le taux d'intérêt est égal au taux d'escompte, l'entrepreneur est indifférent entre augmenter ses réserves ou faire des transferts au financier. Dans ce cas les contraintes du financier ne

sont jamais serrées parce que le contrat peut maintenir le montant qui lui est dû suffisamment élevé en privilégiant les transferts vers le compte d'épargne plutôt que les remboursements de la dette. Si le montant qui lui est dû dans le futur est élevé, le financier n'a pas intérêt à quitter le contrat. A l'optimum, le stock d'épargne et la valeur de la dette sont grands, le financier n'est pas tenté de briser le contrat et les bornes supérieures sur la consommation de l'entrepreneur sont suffisamment élevées pour que celle-ci puisse être constante. D'un autre côté, même si la valeur de la dette est élevée, l'entrepreneur n'a pas d'incitation à briser le contrat parce que les réserves qui en sont la garantie sont proportionnelles à cette dette.

La distinction entre un contrat de dette et un financement par les marchés, dans ce modèle, porte uniquement sur la situation du financier en autarcie et donc sur sa contrainte auto-exécutoire. On voit ici que le fait que les actionnaires puissent liquider la firme et en récupérer les actifs annule l'effet de garantie de l'épargne.

**Proposition 12.** 1. Dans le contrat de dette ( $a = 0$ ), les contraintes auto-exécutoires du financier et la contrainte de liquidité ne sont jamais serrées si  $r = \delta$  ;

2. Dans le contrat de financement par actions ( $a=1$ ), les contraintes auto-exécutoires du financier restent serrantes.

Quand le financier est propriétaire des actifs de la firme, les réserves mises en garantie dissuadent l'entrepreneur de briser le contrat mais incitent le financier à le faire. L'effet de la garantie est annulé par l'amélioration des conditions d'autarcie du financier. La contrainte auto-exécutoire du financier est  $V_{t+1}^z \geq a[(1+r)A_{t+1}^s + (1-d)k_{t+1}^s]$ . Si l'entrepreneur accroît les réserves  $A_{t+1}^s$  et le montant dû aux actionnaires dans l'état  $z$ ,  $V_{t+1}^z$  dans une proportion de  $1$  à  $1+r$ , l'effet sur la contrainte est nul puisque les deux membres de l'inégalité augmentent du même

montant. Mais si le montant dû aux actionnaires augmente proportionnellement plus que les réserves, c'est la contrainte de l'entrepreneur qui risque d'être violée. Il n'est donc pas possible, dans ce type de contrat, de relâcher les contraintes du financier. Quand le financier n'est pas propriétaire des actifs, on peut toujours augmenter les réserves chaque fois que l'on accroît la dette. On peut donc relâcher simultanément les deux contraintes et atteindre un partage de risque efficace en un nombre fini de périodes.

Il est important de souligner que l'efficacité du partage de risque dans le contrat de dette ne tient que si le taux d'intérêt  $r$  est égal au taux de préférence pour le présent. Si ce taux d'intérêt est plus faible, en effet, les réserves deviennent moins intéressantes et l'entrepreneur n'est plus indifférent entre faire des versements sur son compte d'épargne ou faire des transferts au financier. Il serait souhaitable pour lui d'emprunter au taux  $r$  afin de placer auprès du financier. Le différentiel des taux d'intérêt sur les deux modes de placement pousse donc les variables  $A$  et  $V$  dans le sens contraire de ce qui est nécessaire pour relâcher les contraintes. Quand  $r < \delta$  il y a un arbitrage entre la volonté de relâcher les contraintes auto-exécutoires et celle de ne pas utiliser un mode d'épargne trop coûteux.

Bien que la spécification du modèle et la distinction entre les deux modes de financement impliquent que le paramètre  $a$  ne prend que les valeurs 0 ou 1, il est intéressant de souligner que la proposition précédente peut s'étendre aux cas où  $a$  prend des valeurs intermédiaires.

**Proposition 13.** *Pour toute valeur du paramètre  $a \in (0, 1)$  et pour  $r = \delta$ , ni les contraintes auto-exécutoires du financier, ni la contrainte de liquidité ne sont contraignantes à l'optimum.*

Une valeur du paramètre  $a$  comprise entre 0 et 1 suppose que les actionnaires ne détiennent pas la totalité du capital. Pour permettre une telle situation, il faudrait supposer que l'entrepreneur possède une richesse initiale qu'il peut investir dans

son projet et donc qu'il peut retenir une part des actions. Même si cette possibilité entre mal dans le cadre analytique parce qu'elle suppose que  $a$  devient endogène et varie chaque fois que l'entrepreneur se refinance sur les marchés, elle peut être considérée comme une remarque aux résultats précédents. Elle implique que le financement par actions devient efficace si les actionnaires n'ont pas accès à la totalité du capital. En effet, l'épargne peut retrouver son rôle dans le relâchement de la contrainte auto-exécutoire du financier parce qu'un accroissement de  $A_{t+1}^s$  et  $V_{t+1}^z$  dans des proportions de 1 à  $1 + r$  augmente le membre de gauche de la contrainte plus que le membre de droite, quand  $a < 1$ . Comme les actionnaires ne peuvent pas quitter le contrat avec la totalité du capital, il est plus aisé de les inciter à le respecter.

#### 4.4.1 Droits de propriété non saisissables

Pour souligner à quel point la menace de saisie des actifs est importante pour garantir l'exécution du contrat par l'entrepreneur, on discute brièvement le cas où ce dernier peut briser le contrat et partir en autarcie avec le stock de réserves. On suppose que ceci ne peut se produire que quand l'entrepreneur est propriétaire des actifs et on se place donc dans le cadre d'un contrat de dette. Dans ce cas, les contraintes auto-exécutoires de l'entrepreneur dans le problème à la période  $t$  deviennent :

$$f^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) \geq g^z(A_{t+1}^s, 0) \quad \forall z \in \mathcal{S}.$$

L'ensemble des contraintes n'est plus convexe et on ne peut plus garantir que la solution donnée par les conditions de premier ordre est un maximum global. Il est cependant intéressant d'observer la condition de premier ordre sur l'épargne pour voir comment l'hypothèse agit pour rendre l'efficacité impossible. La condition de premier ordre sur l'épargne devient :

$$u'(c_t^s) = \beta E_z f_A^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) + \beta E_z \theta_t^z [f_A^z(A_{t+1}^s, k_{t+1}^s, V_{t+1}^z) - g_A^z(A_{t+1}^s, 0)] + \mu_t^s,$$

où l'on suppose que  $a = 0$  parce que c'est l'entrepreneur qui est propriétaire des réserves. On peut simplifier cette expression comme dans la preuve de la proposition 12 en :

$$[1 - \beta(1 + r)]E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = E_z\lambda_t^z + \mu_t^s - \beta E_z\theta_t^z g_A^z(A_{t+1}, 0)$$

On voit donc que même si  $\beta(1 + r) = 1$ , il faut que l'un au moins des  $\lambda_t^z$  ou bien  $\mu_t^s$  soit positif. Il n'est plus possible de relâcher les contraintes auto-exécutoires du créancier et la contrainte de liquidité en même temps en gardant une proportion constante de dette et de réserves. En effet, les réserves ne pouvant plus servir de garantie, la croissance du stock de dette est limitée par la contrainte de l'entrepreneur. Il n'y a plus de complémentarité entre dette et épargne à l'optimum et la consommation ne peut pas être soutenue par l'accroissement simultané de l'emprunt et de l'épargne. Ceci signifie qu'on ne peut plus retrouver un partage de risque efficace à l'optimum.

Cependant il faut insister sur le fait que ces expressions ne peuvent constituer une preuve formelle puisque les conditions nécessaires de premier ordre dont elles sont tirées ne sont pas suffisantes. En règle générale, on s'attend tout de même à trouver que les contraintes auto-exécutoires de l'entrepreneur sont moins serrantes quand l'autarcie est définie par la punition maximale, c'est-à-dire par la saisie du stock complet d'actifs.

#### 4.4.2 L'investissement optimal

Le stock de capital optimal dépend du type de contrat à travers les contraintes auto-exécutoires du financier mais indépendamment des conditions d'autarcie.

**Proposition 14.** *Il y a surinvestissement dans le contrat de financement par actions. Dans un contrat de dette, si  $r = \delta$ , le niveau de capital est efficace après un nombre fini de périodes.*

Le stock de capital efficace est tel que la productivité marginale espérée du capital est égale à son coût marginal qui est 1. L'analyse des conditions enveloppe et des conditions de premier ordre montre que, quelle que soit la valeur du paramètre  $a$ , la productivité marginale espérée du capital est plus faible que son coût dès qu'un multiplicateur  $\lambda$  est positif. Il y a donc surinvestissement quand les contraintes auto-exécutoires du financier peuvent être serrées. D'après la proposition 12, si  $r = \delta$ , on a donc surinvestissement dans un contrat de financement par actions et investissement efficace dans le contrat de dette.

Le comportement de l'investissement ne dépend pas des droits de propriété sur les actifs mais de l'efficacité du partage de risque offert par le contrat. Dans cet environnement, le rendement du capital est aléatoire et celui de l'épargne est certain. L'épargne est donc l'instrument privilégié pour transférer du revenu d'une période à l'autre. Tant qu'il est possible d'effectuer le lissage des revenus de l'entrepreneur en utilisant les réserves et les transferts contingents, il est optimal de maintenir le stock de capital à un niveau efficace. Quand le lissage est imparfait cependant, l'entrepreneur a tendance à sur-investir dans les périodes où il prévoit que sa consommation future risque d'être bornée<sup>6</sup>. Le surinvestissement est un moyen d'augmenter l'ensemble des possibilités de consommation, c'est-à-dire toutes les bornes supérieures de consommation en même temps, pour échapper à la contrainte due au problème d'engagement. Dans ce cas, si le contrat de dette permet d'obtenir un niveau de capital optimal dans toutes les périodes c'est parce qu'il permet d'assurer le lissage par le jeu des réserves et des transferts.

---

<sup>6</sup>Ce résultat est aussi décrit dans Sigouin (1997).



## 4.5 Discussion

Il y a plusieurs conclusions de ce modèle que l'on peut mettre en rapport avec des résultats de la littérature. En particulier, l'environnement présenté ici partage beaucoup des caractéristiques des modèles de Hart et Moore. La question qui motive leurs travaux est de savoir pourquoi les firmes s'engagent dans des contrats de dette qui peuvent entraîner leur liquidation alors qu'elles pourraient être aussi bien financées par les marchés. On reprend ici plusieurs de leurs articles dont les résultats vont dans le sens de ce que l'on a analysé plus haut<sup>7</sup>.

Hart et Moore (1989, 1998)<sup>8</sup> mettent en évidence l'importance des contrats de dette dans un environnement comparable à celui décrit ici, c'est-à-dire avec information symétrique mais sans possibilité d'engagement. Dans un environnement où les rendements sont non vérifiables, l'entrepreneur a une incitation à détourner ces rendements à son profit au lieu de les redistribuer aux investisseurs. Les auteurs expliquent alors le rôle de la dette par la possibilité de liquidation qu'elle entraîne en cas de défaut. La menace de la perte de ses droits de propriété sur les rendements futurs incite l'entrepreneur à effectuer des paiements à une partie externe au lieu de se les faire à lui-même. C'est exactement cet effet que l'on prend en compte dans les contraintes auto-exécutoires de l'entrepreneur dans notre modèle.

Hart et Moore (1998) supposent un modèle à trois périodes. Un montant est emprunté en période 0 pour investir dans un projet qui rapporte en périodes 1 et 2. Les rendements sont incertains en période 0 mais l'incertitude est résolue en période 1. Le contrat de dette définit un montant emprunté en période 0 et un montant à rembourser en période 1. Le remboursement ne peut pas être contin-

---

<sup>7</sup>On peut trouver dans Hart (1995) un résumé de la plupart de ces papiers ainsi qu'une bonne analyse de la littérature sur la structure optimale de capital.

<sup>8</sup>L'article de 1998 reprend le modèle de 1989 et y développe plus formellement le cas où les rendements sont incertains.

gent aux réalisations des rendements puisque celles-ci ne sont pas vérifiables. Si l'entrepreneur fait défaut en période 1, la firme est liquidée et il perd le rendement de période 2. Cependant, l'entrepreneur possède un capital humain spécifique qui fait que la valeur de liquidation est toujours inférieure au rendement de dernière période, il y a donc possibilité de renégociation. Les auteurs supposent que l'entrepreneur a tout le pouvoir de négociation si bien que le créancier ne peut demander plus que la valeur de liquidation en remboursement de la dette.

Comme les deux parties au contrat sont neutres vis-à-vis du risque, l'efficacité repose non pas sur les propriétés de lissage mais sur les liquidations effectives à l'équilibre. Le rendement de période 2 étant toujours supérieur à la valeur de liquidation et la valeur nette du projet étant toujours positive, l'efficacité est définie par la mise en oeuvre du projet et l'absence de liquidation à l'équilibre. Or, il peut arriver que le rendement de la période 2 soit inférieur au paiement dû en période 1. Dans ce cas, l'entrepreneur préfère toujours liquider la firme et garder le rendement de la période 1 pour lui-même. Le financier ne pouvant forcer le paiement de la dette, le contrat n'est pas signé et le projet n'est pas entrepris. Ceci n'est pas efficace si le projet a une valeur nette positive. Ou bien, si le rendement de la période 2 est élevé, l'entrepreneur peut liquider lui-même une partie des actifs à la valeur de liquidation, de façon à obtenir des liquidités pour effectuer son remboursement et toucher le rendement de la période 2 sur la partie des actifs qui reste. Ici encore ce n'est pas efficace puisqu'il serait préférable qu'aucune part des actifs ne soit liquidée. Le résultat en terme d'efficacité dépend du montant qu'il faut emprunter au départ pour démarrer le projet et des rendements. Si le montant nécessaire n'est pas trop élevé et que le rendement de période 2 est assez grand pour dissuader l'entrepreneur de faire défaut, un contrat de dette efficace peut être trouvé et il n'est pas forcément unique. L'étude du contrat optimal repose dans Hart et Moore (1998) sur les propriétés de l'environnement en incertitude.

Cependant, ce n'est pas tant la forme du contrat de dette optimal que la jus-

tification de l'optimalité de la dette elle-même qui nous intéresse. Dans Hart et Moore (1998), le financement par les marchés correspond au cas où l'entrepreneur peut impunément détourner les rendements de la firme. Pour les auteurs, les actionnaires ne peuvent pas réagir, comme un créancier, par la liquidation si les dividendes versés en période 1 ne correspondent pas à la valeur attendue de la firme. Cependant, il devrait être possible pour les actionnaires d'échapper à la non vérifiabilité des rendements en faisant signer à l'entrepreneur un contrat de travail qui ressemble au contrat de dette. En période 0 l'entrepreneur accepte de payer un montant fixe en période 1, sans quoi il est licencié et perd le contrôle de la firme. Le contrat optimal aurait alors la même forme que le contrat de dette décrit par Hart et Moore (1998). Ce qui rend le contrat de dette intéressant dans le cas où les rendements sont non vérifiables, c'est la possibilité de saisir les actifs en cas de défaut. Si la relation de financement par actions spécifie que des actionnaires ont la même possibilité envers leur gestionnaire, comme c'est le cas dans notre modèle, il n'y a plus de réelle distinction entre le contrat de dette et le financement par actions.

Le modèle à deux périodes de Hart et Moore (1998) suppose que le créancier est parfaitement commis dans le contrat. Comme il n'existe pas de besoin de refinancement en seconde période, il revient au même que le financier soit parfaitement engagé ou non. Or, dans notre cas, on voit que c'est l'incapacité du financier de se commettre à refinancer le projet qui détermine le résultat. Et c'est également la définition du financier comme créancier (sans droit de propriété sur les actifs) ou comme actionnaire (propriétaire des actifs) qui établit la distinction et l'efficacité du contrat de dette. Comme Hart et Moore (1998) ne spécifient pas ce que serait un financement par actions, on ne peut pas comparer l'effet de l'hypothèse d'engagement complet du financier dans les deux environnements.

Hart et Moore (1994) étendent le modèle précédent à un environnement à  $T$  périodes avec des rendements certains. Le contrat de dette stipule un montant

emprunté en période 0 et des remboursements pour chacune des périodes consécutives. Les auteurs supposent qu'il n'y a pas de refinancement, il n'y a donc pas de problème d'engagement pour le créancier. Dans chaque période, la firme a une valeur de liquidation et cette valeur décroît dans le temps. Hart et Moore (1994) cherchent à caractériser le contrat optimal (qui évite les liquidations inefficaces) et en particulier l'échéancier des remboursements. Ce contrat doit être à l'épreuve de la renégociation et satisfaire la contrainte de participation du financier. Hart et Moore montrent qu'il y a une infinité de contrats optimaux, c'est-à-dire une infinité d'échéanciers possibles. Ils en définissent deux en particulier. L'échéancier le plus rapide est celui dans lequel l'entrepreneur emprunte juste le minimum requis pour permettre l'investissement et rembourse le plus vite possible en versant tous les rendements jusqu'à ce que la dette soit payée. L'échéancier le plus lent est celui dans lequel l'entrepreneur emprunte le plus possible, c'est-à-dire un montant égal à la valeur de liquidation en période 1. Dans cet équilibre, des remboursements minimum sont faits dans les premières périodes. Les paiements sont tels qu'ils font juste compenser le financier pour la perte de valeur de liquidation d'une période à l'autre. Ces deux modes de remboursement ainsi que tous les équilibres intermédiaires sont optimaux. Ce résultat ne tiendrait pas si les parties n'étaient pas neutres vis-à-vis du risque. Cependant, l'hypothèse que le financier est parfaitement engagé est aussi une explication à cette indifférence entre les échéanciers de remboursement. Dans le modèle avec contraintes d'engagement qu'on a développé plus haut, l'efficacité du partage de risque est atteinte quand l'existence du compte d'épargne permet de conserver une valeur élevée de la dette, même après une série de bonnes réalisations des états de la nature. Le chemin des remboursements a donc une importance dans notre cas. Si la dette est payée trop vite, le financier n'a plus d'incitation à rester en relation avec l'entrepreneur et quitte le contrat. On voit encore une fois que l'hypothèse d'engagement du financier est donc cruciale pour les résultats.

Hart et Moore (1994) ajoutent que la condition pour que la solution, en terme d'échéancier de remboursement, devienne unique est que l'une des parties puisse épargner à un taux supérieur au taux du marché qu'ils ont supposé nul et égal au taux d'escompte. Supposons par exemple que le créancier ait accès à une telle possibilité. Ceci revient à supposer que  $r < \delta$ , c'est-à-dire que le taux sur les placements de l'entrepreneur est inférieur au taux sur ceux du créancier. Dans ce cas, l'échéancier le plus rapide devient optimal. C'est aussi le cas dans notre modèle puisqu'on a vu dans la proposition 12 que si  $r < \delta$ , il est relativement coûteux d'utiliser le compte d'épargne. Il y a alors arbitrage entre la nécessité de garder un niveau de dette élevé pour relâcher les contraintes du financier (qui fait appel à un échéancier lent) et le désir de ne pas accumuler de réserves (qui favorise un échéancier rapide).

## 4.6 Conclusion

L'environnement décrit dans ce travail possède deux caractéristiques qui le distinguent de l'environnement des modèles de Hart et Moore. D'abord l'entrepreneur a de l'aversion pour le risque, ce qui donne un rôle d'assurance au contrat. Ensuite, la relation a lieu sur un horizon infini, ce qui permet d'avoir toujours des surplus futurs à offrir aux parties pour les garder dans le contrat. Cela rend possible l'écriture de contrats contingents. Ces différences ne sont pourtant pas celles qui distinguent le plus les résultats. L'hypothèse de Hart et Moore que le financier est parfaitement engagé est bien plus décisive sur le résultat de la non pertinence des échéanciers de remboursement à l'équilibre. Hart et Moore (1994) considèrent un modèle de dette à long terme sans prendre en compte d'éventuels besoins de refinancements intermédiaires. Même sans riscophobie pourtant, on peut supposer que des refinancements intermédiaires sont nécessaires ; pour financer des investissements par exemple. Dans ce cas, il devient important de spécifier le degré

d'engagement du créancier. Enfin, Hart et Moore (1989, 1998) ne font pas de comparaison entre le contrat de dette et le financement par les marchés. Si une telle comparaison était introduite dans leur modèle, il faudrait justifier pourquoi l'actionnariat est incapable de licencier son gestionnaire quand les dividendes ne lui sont pas versés.

Le modèle qu'on a introduit ici définit précisément les conditions d'autarcie parce que ce sont ces conditions qui distinguent entre un financier/créancier et un financier/actionnaire. On peut ainsi vraiment souligner que l'intérêt des contrats de dette est qu'ils autorisent la saisie des actifs de l'entrepreneur par le financier sans encourager celui-ci à faire défaut, parce qu'il ne peut pas saisir les actifs si c'est lui qui résilie le contrat. La répartition initiale des droits de propriété est donc importante pour l'efficacité des contrats.

On doit cependant souligner que les résultats de ce modèle ne sont valides que pour une comparaison entre des structures de capital qui sont entièrement par dette ou par actions. En général, la structure de capital des firmes est mixte. Dans notre modèle la structure mixte ne peut pas tenir parce que tant que le paramètre  $a$  est égal à 1, un financement par dette est optimal. Cependant, si l'entrepreneur pouvait retenir une partie des actions, le paramètre  $a$  serait inférieur à 1 et l'effet de garantie du stock de réserve dominerait le rôle négatif qu'il joue sur les incitations des actionnaires. Dans ce cas les deux modes de financement pourraient coexister. Cependant, il faudrait alors endogénéiser le paramètre  $a$  car l'évolution des refinancements par actions ferait évoluer la part du capital détenue par l'entrepreneur.

## Appendix

### Preuve de la propriété 1

Les conditions enveloppe (4.15) et (4.17) se récrivent comme une équation différentielle linéaire homogène :  $f_A^s(A, k, V^s) + (1+r)f_V^s(A, k, V^s) = 0$  pour tout  $(A, k, V^s)$ . La solution d'une telle équation transforme la fonction de  $(A, k, V^s)$  en une fonction de  $((1+r)A - V^s, k)$ . Alors,  $f^s(A, k, V^s) = h^s((1+r)A - V^s, k)$ . Notons  $h_X^s$  la dérivée de  $h^s$  par rapport à son premier argument  $X^s = (1+r)A - V^s$ , alors  $h_X^s((1+r)A - V^s, k) = \frac{1}{1+r}f_A^s(A, k, V^s) = -f_V^s(A, k, V^s)$  et  $h_k^s((1+r)A - V^s, k) = f_k^s(A, k, V^s)$ .  $\square$

### Preuve de la propriété 2

L'utilité du financier est bornée à chaque période par les conditions d'autarcie de chacune des parties,  $V_t^s$  est donc toujours compris dans un intervalle  $[\underline{V}^s(A_t, k_t), \bar{V}^s(A_t, k_t)]$ . Ces bornes sont telles que :

$$\begin{aligned}\underline{V}^s(A_t, k_t) &= a[(1-d)k_t + (1+r)A_t] \\ h^s((1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t, k_t), k_t) &= g^s(0, 0).\end{aligned}$$

Les bornes sur  $V$  déterminent les bornes sur la consommation par les conditions enveloppe (4.15) and (4.17) qui se résument en :

$$h_X^s((1+r)A_t - V_t^s, k_t) = u'(c_t^s)$$

Donc, pour des valeurs données de  $A_t$  et  $k_t$ , la consommation est décroissante en  $V_t^s$  et ses bornes peuvent être définies par :

$$u'(\underline{c}^s(A_t, k_t)) = h_X^s((1+r)A_t - \bar{V}^s(A_t, k_t), k_t) \quad (4.18)$$

$$u'(\bar{c}^s(A_t, k_t)) = h_X^s((1-a)(1+r)A_t - a(1-d)k_t, k_t) \quad (4.19)$$

On montre facilement que  $\underline{c}(A_t, k_t)$  ne dépend pas de  $A_t$ . Notons d'abord que  $d\bar{V}^s(A, k) = (1+r)dA - \frac{h_k^s((1+r)A - \bar{V}^s(A, k), k)}{h_X^s((1+r)A - \bar{V}^s(A, k), k)} dk$ . En différenciant la condition (4.18)

par rapport à  $A$  and  $k$ , on voit que le membre de droite varie de

$$h_{XX}^s(\cdot)[(1+r)dA - d\bar{V}^s(A, k)] + h_{Xk}^s(\cdot)dk,$$

c'est-à-dire

$$h_{XX}^s(\cdot)[(1+r)dA - (1+r)dA + \frac{h_k^s(\cdot)}{h_X^s(\cdot)}dk] + h_{Xk}^s(\cdot)dk.$$

Une variation  $dA$  telle que  $V$  reste à son maximum entraîne une variation  $d\bar{V}^s = (1+r)dA$  mais aucune variation de  $k$ . De telles variations laissent la variable  $X$  inchangée et donc la dérivée  $h_X^s(\cdot)$  aussi. Ainsi, une variation de  $A$  n'entraîne pas de changement dans  $\underline{c}^s(A, k)$  et on peut écrire  $\underline{c}^s(k)$ . Une variation de  $k$  cependant, implique une variation de  $X$  de façon à conserver  $h^s(X^s, k) = g^s(0, 0)$ . Ainsi, une variation de  $k$  fait varier  $h_X^s(\cdot)$  et donc  $\underline{c}^s$ .

La borne supérieure  $\bar{c}^s(A, k)$  est une fonction de  $A$  parce que  $\underline{V}^s(A, k)$  est exogènement défini par  $A$  et  $k$ . Une variation de  $A$  implique une variation de  $\underline{V}^s$  non contrainte par la valeur de  $h^s$ . Alors  $h_X^s$  et  $\bar{c}^s$  varient directement en réponse à une variation de  $A$ .  $\square$

### Preuve de la proposition 12

Les conditions (4.13) et (4.17) pour la période  $t$  et  $t+1$  ainsi que (4.14) donnent  $u'(c_t^s) = (1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - \lambda_t^z$ . Ceci est vrai pour tout  $z$  en  $t+1$ , on a donc :

$$u'(c_t^s) = E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - E_z\lambda_t^z. \quad (4.20)$$

Les conditions (4.11) et (4.15) pour la période  $t+1$  permettent d'écrire

$$u'(c_t^s) = \beta(1+r)E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) - \beta a(1+r)E_z\lambda_t^z + \mu_t^s$$

Cette égalité combinée avec (4.20) donne :

$$[1 - \beta(1+r)]E_z(1 + \theta_t^z)u'(c_{t+1}^z) = [1 - a\beta(1+r)]E_z\lambda_t^z + \mu_t^s \quad (4.21)$$



- Si  $r = \delta$ , c'est-à-dire si  $\beta(1+r) = 1$ , la condition (4.21) entraîne  $(1-a)E_z \lambda_t^z + \mu_t^s = 0$ . Donc, si  $a = 0$  cette condition signifie que les multiplicateurs  $\lambda_t^z$  pour tous les états  $z$ , ainsi que le multiplicateur de la contrainte de liquidité  $\mu_t^s$ , sont tous nuls. Ainsi, ni les contraintes auto-exécutoire du financier ni la contrainte de liquidité ne sont serrées à l'équilibre.
- Si  $r = \delta$  et  $a = 1$ , la condition (4.21) devient  $\mu_t^s = 0$ . La contrainte de liquidité n'est jamais serrée. Les contraintes auto-exécutoires du financier peuvent l'être.
- Pour  $r < \delta$ , la condition (4.21) est  $[1 - a\beta(1+r)]E_z \lambda_t^z + \mu_t^s > 0$ . Donc, quelsoit  $a$ , on a  $E_z \lambda_t^z > 0$  et/ou  $\mu_t^s > 0$ .  $\square$

### Preuve de la proposition 13

Cette preuve découle de celle de la proposition 12. La condition (4.21) pour  $a < 1$  et  $r = \delta$  entraîne que  $\lambda_t^z = \mu_t^s = 0$  pour tout  $z$ .  $\square$

### Preuve de la proposition 14

Les conditions (4.12) et (4.16) pour  $t$  and  $t + 1$  donnent

$$u'(c_t^s) = \beta E_z (K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)(1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) - a\beta(1-d)E_z \lambda_t^z - \beta(1-d)E_z (1 + \theta_t^z) \eta_{t+1}^z + \eta_t^s,$$

c'est-à-dire, si on considère (4.20),

$$E_z [1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)](1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) = E_z \lambda_t^z - a\beta(1-d)E_z \lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1-d)E_z (1 + \theta_t^z) \eta_{t+1}^z.$$

Comme  $(1 + \theta_t^z) u'(c_{t+1}^z) = u'(c_t^s) + \lambda_t^z$  pour chaque état  $z$ , ceci peut s'écrire :

$$u'(c_t^s) E_z [1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)] = [1 - a\beta(1-d)] E_z \lambda_t^z - E_z [1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)] \lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1-d) E_z (1 + \theta_{t+1}^z) \eta_{t+1}^z.$$

C'est-à-dire,

$$u'(c_t^s)E_z[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)] = E_z\beta[(K'(k_{t+1}^s; z) + (1 - a)(1 - d))\lambda_t^z + \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_{t+1}^z)\eta_{t+1}^z]. \quad (4.22)$$

Les conditions du problème avec plein engagement sont  $E_z[1 - \beta(K'(k_{t+1}^s; z) + 1 - d)] = \eta_t^s - \beta(1 - d)E_z(1 + \theta_{t+1}^z)\eta_{t+1}^z$ , où tous les multiplicateurs  $\eta$  deviennent nuls après un nombre fini de périodes. Quelqueroit la valeur de  $a$ , c'est seulement quand tous les multiplicateurs  $\lambda$  sont nuls en même temps que l'on peut obtenir le niveau de capital de plein engagement. Or, cette situation est possible dans un contrat de dette, pas dans un financement par les marchés.  $\square$

## Conclusion générale

Les trois essais développés dans cette thèse ont permis de mettre en lumière des aspects importants des contrats dynamiques de partage de risque en l'absence de possibilités d'engagement. Le premier essai apporte une contribution théorique en offrant la solution d'un contrat dynamique auto-exécutoire avec possibilité externe d'épargne. L'introduction des possibilités externes est importante parce qu'une firme risco-phobe dont les possibilités de financement sont limitées à l'intérieur d'un contrat auto-exécutoire doit forcément penser à un autre moyen d'assurer ses revenus. Le compte d'épargne est un autre moyen disponible d'assurance qu'il faut prendre en compte. Les modèles de contrat avec épargne complètent aussi l'étude de la littérature sur les choix de consommation en incertitude qui eux, se limitent à la possibilité d'épargne pour le lissage de la consommation. Ils sont donc un cadre plus complet pour l'étude du comportement de la consommation.

Les résultats du premier essai permettent de définir les conditions sous lesquelles l'introduction d'une possibilité externe d'assurance pour l'agent risco-phobes permet d'améliorer le lissage de sa consommation. Ces conditions sont les suivantes. D'abord, le contrat doit parfaitement contrôler l'utilisation du compte d'épargne et celui-ci doit être saisissable en cas de bris de contrat par l'agent. En d'autre terme, le compte d'épargne doit servir de garantie au contrat. Ensuite, le taux d'intérêt sur l'épargne ne doit pas être inférieur au taux d'escompte des agents. Le taux d'escompte représente le taux d'intérêt implicite sur les place-

ments auprès du financier, s'il est plus élevé que le taux d'intérêt sur l'épargne, l'agent ne veut plus épargner (ou veut épargner le moins possible) et le contrat ne peut plus utiliser cette opportunité externe pour améliorer le lissage. Si ces deux conditions sont vérifiées, épargne et stock de dette, substituables pour la firme s'ils ont le même coût, sont rendus complémentaires à l'optimum. C'est le stock net d'actifs de la firme qui détermine la valeur future de la relation et ce stock est étroitement contrôlé de façon à relâcher les contraintes du financier.

Le premier essai montre aussi que les décisions réelles de la firme (ses décisions de production) ne sont pas affectées par les conditions de financement de la firme, à moins que celles-ci ne permettent pas le lissage complet de la consommation. Ainsi, si l'épargne peut être saisie et si le taux d'intérêt est égal au taux d'escompte, le contrat offre une assurance parfaite de la consommation (au bout d'un nombre fini de périodes) et l'investissement est toujours décidé de façon efficace.

Le second point qui est souligné dans cette thèse est l'importance des conditions d'autarcie pour l'efficacité du partage de risque. Ces conditions d'autarcie étaient jusqu'à présent peu discutées dans la littérature et étaient normalisées à la possibilité d'un surplus nul à l'extérieur du contrat. On a montré ici que la répartition des droits de propriété sur les actifs entre les parties et la définition des règles de responsabilité imposées par le Législateur influencent les réalisations du partage de risque par le biais des conditions d'autarcie. Le second essai souligne que l'imposition à la banque d'un paiement si la firme fait faillite, détériore ses conditions d'autarcie et rend le partage de risque plus efficace. Ce résultat doit être pris en compte dans le cas de la prévention environnementale parce que si le lissage des consommations de la firme peut être effectué à un coût plus faible à cause de la détérioration des conditions d'autarcie de la banque, les incitations à la prévention sont diminuées pour les deux parties. À l'inverse, si les conditions d'autarcie du financier sont améliorées par rapport à la possibilité d'un surplus nul, le lissage offert par un contrat auto-exécutoire est moins bon. C'est le cas

quand on suppose que le financier a des droits de propriété sur les actifs de la firme. Ces résultats peuvent être élargis à bon nombre d'applications et l'environnement dans lequel sont signés les contrats auto-exécutoires doit toujours être considéré avec soin parce qu'il définit les conditions d'autarcie.

Bien entendu, chacun de ces essais ouvre la voie à des recherches supplémentaires. On note que l'étude des comportements de la consommation dans le cadre des contrats dynamiques auto-exécutoires pourrait être poursuivie pour prendre en compte des processus de revenu plus complexes incorporant, en particulier, des corrélations positives entre les réalisations. Ces corrélations permettraient de considérer des environnements plus réalistes puisqu'aussi bien les chocs sur les revenus des consommateurs que les chocs sur les revenus des firmes sont dépendants des cycles macroéconomiques qui induisent des persistances.

On doit noter aussi qu'au delà de l'introduction des opportunités d'épargne dans les contrats, la volonté d'élargir les possibilités de financement des firmes devrait mener à l'augmentation du nombre des financiers considérés. Ainsi, dans le troisième essai, on peut faire coexister des financements par dette et actions. Cette hypothèse très réaliste demande des ajustements au modèle afin qu'il conserve ses propriétés de concavité et que le calcul de la part des actifs détenue par les actionnaires puisse être endogénéisé. Cette modification apporterait néanmoins une vision plus générale des relations financières observées à travers les contrats dynamiques auto-exécutoires.

## Bibliographie

- [1] AMBARISH, R., K. JOHN, AND J. WILLIAMS (1987) "Efficient Signalling with Dividends and Investments," *The Journal of Finance* **XLII**(2), 321–343.
- [2] ASHEIM, G. AND J. STRAND (1991) "Long-term Union-Firm Contracts," *Journal of Economics* **53**(2), 161–184.
- [3] BEARD, R.T. (1990) "Bankruptcy and Care Choice," *Rand Journal of Economics* **21**(4), 626–634.
- [4] BOYER, M. AND J.J. LAFFONT (1995) "Environmental Protection, Producer Insolvency and Lender Liability," CIRANO scientific series, 95s–50, Montréal.
- [5] ———(1997) "Environmental Risks and Bank Liability," *European Economic Review* **41**(8), 1427–1459.
- [6] BRANDER, J. A. AND T. R. LEWIS (1986) "Oligopoly and Financial Structure : The Limited Liability Effect," *American Economic Review* **76**, 956–970.
- [7] BULOW, J. AND K. ROGOFF (1989) "Sovereign Debt : Is to Forgive to Forget?," *American Economic Review* **79**(1), 43–50.
- [8] CARROLL, C.D. (1994) "How Does Future Income Affect Current Consumption?," *Quarterly Journal of Economics* **109**, 111–147.
- [9] CARROLL, C.D. AND A.A. SAMWICK (1995) "The Nature of Precautionary Wealth," Mimeo.

- [10] DEATON, A. (1991) "Saving and Liquidity Constraints," *Econometrica* **59**, 1221-1248.
- [11] ——— (1992) *Understanding Consumption*. Clarendon Press, Oxford.
- [12] FLAVIN, M. (1981) "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income," *Journal of Political Economy* **89**, 974-1009.
- [13] FRIEDMAN, M. (1957) *A Theory of the Consumption Function*. Princeton University Press, Princeton.
- [14] GARCIA, R., A. LUSARDI, AND S. NG (1995) "Excess Sensitivity and Asymmetries in Consumption : an Empirical Investigation," Mimeo, Centre de Recherche et Developpement en Economique, Université de Montréal.
- [15] GAUTHIER, C., M. POITEVIN, AND P. GONZÁLEZ (1997) "Ex Ante Payments in Self-Enforcing Risk-Sharing Contracts," *Journal of Economic Theory* **76**, 106-144.
- [16] GOBERT, K. AND M. POITEVIN (1998) "Non-Commitment and Savings in Dynamic Risk-Sharing Contracts," C.R.D.E., cahier 0898. Département de sciences économiques, Université de Montréal.
- [17] GOBLE, R. A. (1992) "EPA's CERCLA Lender Liability Proposal : Secured Creditors "Hit the Jackpot" . Comment," *Natural Resources Journal* **32**(3), 653-679.
- [18] GREEN, E. J. (1987) "Lending and the Smoothing of Uninsurable Income," in Prescott, E. C. and N Wallace, eds., *Contractual Arrangements for Intertemporal Trade*, pages 3-25. Minnesota Press, Minneapolis.
- [19] HANLEY, N. AND C.L. SPASH (1993) *Cost-Benefit Analysis and the Environment*. Edward Elgar Publishing Limited, Aldershot, England.

- [20] HANSEN, L.P. AND K.J. SINGLETON (1983) "Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns," *Journal of Political Economy* **91**, 249–265.
- [21] HARRIS, M. AND B. HOLMSTRÖM (1982) "A Theory of Wage Dynamics," *Review of Economic Studies* **49**, 315–333.
- [22] HARRIS, M. AND A. RAVIV (1988) "Corporate Governance," *Journal of Financial Economics* **20**, 203–231.
- [23] ——— (1990) "Capital Structure and the Informational Role of Debt," *Journal of Finance* **45**(2), 321–349.
- [24] ——— (1991) "The Theory of Capital Structure," *Journal of Finance* **46**(1), 297–355.
- [25] HART, O. (1995) *Firms, Contracts, and Financial Structure*. Oxford University Press.
- [26] HART, O. AND J. MOORE (1989) "Default and Renegotiation : A Dynamic Model of Debt," M.I.T. Working Paper No. 520 ; revised as University of Edinburgh Discussion Paper, August 1989.
- [27] ——— (1994) "A Theory of Debt Based on the Inalienability of Human Capital," *Quarterly Journal of Economics* **109**(3), 841–879.
- [28] ——— (1998) "Default and Renegotiation : A Dynamic Model of Debt," *Quarterly Journal of Economics* **113**(1), 1–41.
- [29] HAYASHI, F. (1987) "Tests for liquidity constraints : a critical survey and some new observations," *Advances in Econometrics : Fifth World Congress* **2**, 91–120.



- [30] HENDERSON, D. A. (1994) "Environmental Liability and the Law of Contracts," *The Business Lawyer* **50**, 183-266.
- [31] JENSEN, M. AND W. MECKLING (1976) "Theory of the Firm : Managerial Behavior, Agency Costs, and Capital Structure," *Journal of Financial Economics* **3**, 305-360.
- [32] KIMBALL, M.S. (1990) "Precautionary Saving in the Small and in the Large," *Econometrica* **58**, 53-73.
- [33] KLETZER, K.M. AND B.D. WRIGHT (1996) "Sovereign Debt as Intertemporal Barter," University of California, Santa Cruz and University of California, Berkeley, mimeo.
- [34] KOCHERLAKOTA, N .R. (1996) "Implications of Efficient Risk Sharing without Commitment," *Review of Economic Studies* **63**, 595-609.
- [35] LELAND, H. AND D. PYLE (1977) "Information asymmetries, Financial Structure, and financial Intermediation," *Journal of Finance* **32**, 371-388.
- [36] LIGON, E., J. THOMAS, AND T. WORRALL (1997) "Informal Insurance Arrangements in Village Economies," Mimeo, University of California, Berkeley. [http ://are.Berkeley.EDU/ ligon/](http://are.Berkeley.EDU/ligon/).
- [37] —(1998) "Mutual Insurance, Individual Savings and Limited Commitment," Mimeo, University of California, Berkeley. [http ://are.Berkeley.EDU/ ligon/](http://are.Berkeley.EDU/ligon/).
- [38] MACE, B. (1991) "Full Insurance in the Presence of Aggregate Uncertainty," *Journal of Political Economy* **99**, 928-956.
- [39] MANKIW, N.G., J.J. ROTEMBERG, AND L. SUMMERS (1985) "Intertemporal Substitution in Macroeconomics," *Quarterly Journal of Economics* **100**, 225-251.

- [40] MARCET, A. AND R. MARIMON (1992) "Communication, Commitment and Growth," *Journal of Economic Theory* **58**, 219-249.
- [41] MODIGLIANI, F. AND M. MILLER (1958) "The Cost of Capital, Corporate Finance, and the Theory of Investment," *American Economic Review* **48**, 261-297.
- [42] MYERS, S. C. (1984) "The Capital Structure Puzzle," *Journal of Finance* **39**, 575-592.
- [43] MYERS, S. C. AND N. S. MAJLUF (1984) "Corporate Financing and Investment Decisions when Firms Have Information That Investors Do Not Have," *Journal of Financial Economics* **13**, 187-221.
- [44] OLEXA, M. T. (1991) "Contaminated Collateral and Lender Liability : CERCLA and the New Age Banker," *American Journal of Agricultural Economics* **73**(5), 1388-1393.
- [45] PISCHKE, J-S (1995) "Individual Income, Incomplete Information, and Aggregate Consumption," *Econometrica* **63**, 805-840.
- [46] PITCHFORD, R. (1995) "How Liable Should a Lender Be ? The Case of Judgment-Proof Firms and Environmental Risk," *The American Economic Review* **85**(5), 1171-1186.
- [47] ROSS, S. (1977) "The Determination of Financial Structure," *Bell Journal of Economics* **8**, 23-40.
- [48] ROTHSCHILD, M. AND J. STIGLITZ (1976) "Equilibrium in Insurance Markets," *Quarterly Journal of Economics* **90**, 629-649.
- [49] SCHECHTMAN, J. (1976) "An Income Fluctuation Problem," *Journal of Economic Theory* **12**, 218-241.

- [50] SEGERSON, K. (1992). "Lender Liability for Hazardous Waste Cleanup," in Tietenberg, T., ed., *Innovation in Environmental Policy*, pages 195–212, Aldershot, England and Brookfield, USA. Edward Elgar.
- [51] ——— (1993) "Liability Transfers : An Economic Assessment of Buyer and Lender Liability," *Journal of Environmental Economics and Management* **25 (Part 2)**, S46–S63.
- [52] SEGERSON, K. AND T. TIETENBERG (1992) "The Structure of Penalties in Environmental Enforcement : An Economic Analysis," *Journal of Environmental Economics and Management* **23**, 179–200.
- [53] SIGOUIN, C. (1997) "Investment Decisions, Financial Flows and Self-Enforcing Contracts," Mimeo, University of British Columbia.
- [54] SPEAR, S. AND S. SRIVASTAVA (1987) "On Repeated Moral Hazard with Discounting," *Review of Economic Studies* **LIV**, 599–617.
- [55] THOMAS, J. AND T. WORRALL (1988) "Self-enforcing Wage Contracts," *Review of Economic Studies* **55**, 541–554.
- [56] ——— (1990) "Income Fluctuation and Asymmetric Information : An Example of a Repeated Principal-Agent Problem," *Journal of Economic Theory* **51**, 367–390.
- [57] WEITZMAN, M.L. (1994) "On the "Environmental Discount Rate"," *Journal of Environmental Economics and Management* **26**, 200–209.
- [58] ZELDES, S.P. (1989a) "Optimal Consumption with Stochastic Income : Deviations from Certainty Equivalence," *Quarterly Journal of Economics* **104**, 275–298.
- [59] ——— (1989b) "Consumption and Liquidity Constraints : An Empirical Investigation," *Journal of Political Economy* **97**, 305–346.