Université de Montréal

Allocations de coûts et stabilité : Etude théorique pour le cas d'un arbre

par

Karima Fredj
Département de Sciences Economiques
Faculté des Arts et des Sciences

Mémoire présenté à la faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences
en sciences économiques

Juillet, 1998

Université de Montréal
Faculté des études supérieurs

Ce mémoire intitulé

Allocations de coûts et stabilité : Etude Théorique pour le cas d'un arbre

présenté par :

Karima Fredj

sous la direction du professeur

Yves Sprumont

A été évalué par un jury composé par les pofesseurs :

Jaques Robert

et

Boyer Marcel

Mémoire accepté le : ……………………………………

ABSTRACT

Pour partager les coûts fixes d'un réseau disposé sous forme d'un arbre à source unique, on propose deux méthodes d'allocation possibles.

Selon la méthode d'allocation "incrémentale" on procède de la source vers les feuilles et on répartit les coûts de chaque segment de l'arbre sur tous ses utilisateurs (tous les joueurs qui utilisent ce lien pour rejoindre la source). Un cas particulier serait le partage égal du coût de ces liens. Il coïncide avec la méthode d'allocation connue sous le nom de "Valeur de Shapley".

En revanche, l'allocation de coûts du foyer à la source, attribue à chaque agent le coût qu'il doit payer sur la base d'un vecteur de taux de contribution pré-affecté au différents agents de ce réseau. Pour des taux de contribution identiques pour tous les joueurs, on retrouve l'allocation égalitaire de "Dutta et Ray".

Sachant que les allocations du noyau sont celles unanimement acceptées par toutes les coalitions possibles de ce réseau, on prouve qu'une allocation appartient au noyau si et seulement si il s'agit d'une allocation du foyer à la source ou d'une allocation incrémentale.

Mots clés : Partage de coûts, stabilité, valeur de Shapley, allocation égalitaire.

Table des matières

Annexes

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de recherche, monsieur Yves Sprumont, pour m'avoir introduit à ce sujet ainsi que pour ses judicieuses directives. Je remercie également messieurs Jaques Robert et Marcel Boyer de leurs contributions en tant que seconds lecteurs.

Mes remerciements les plus sincères s'adressent aux professeurs André Martens et Claude Monmarquette , pour la bourse de recherche qu'ils m'ont permis d'acquérir.

J'exprime aussi mes plus grandes gratitudes à mes parents ainsi que tous les autres membres de ma famille pour leurs encouragements et soutient.

Je remercie enfin d'une manière toute spéciale Atto et Leila ainsi que tous mes amis qui m'ont apporté un appui constant le long de mon travail.

À mes parents

INTRODUCTION

Par allocation de coûts, on entend la désignation des charges que chaque participant - d'un réseau, projet ou d'une organisation - doit payer en retour du bien ou service dont il bénéficie.

Le problème de partage de coûts est très fréquent dans la vie courante. En effet, même si les solutions proposées à ces problèmes d'allocation paraissent théoriques, ils puisent leurs sources dans des cas pratiques de la vie quotidienne. Ainsi, les coopérants d'un projet doivent se partager les coûts tout comme les bénéfices résultant de l'investissement commun; les agriculteurs se servant d'un même réseau d'irrigation ont besoin de répartir les coûts d'utilisation entre eux; les compagnies de téléphone et d'électricité recourent à la répartition des coûts de connexions et des services entre les clients; tout comme les entreprises publiques cherchent à appliquer les systèmes de prix ou de taxation optimaux pour récupérer les coûts des biens et services qu'elles produisent...

Ainsi, des situations les plus simples aux plus complexes, le problème de partage de coûts nécessite des solutions d'allocation adéquates et réalisables. Par ailleurs, l'application de méthodes d'allocation générales, déjà élaborées, peut être directe dans le cas des jeux coopératifs. Par contre, dans le cadre des jeux non coopératifs, des études particulières à chaque problème de partage de coût sont souvent nécessaires pour trouver des méthodes d'allocation qui leur sont spécifiques.

À ce propos, nous nous intéressons dans ce présent travail à un problème de partage de coûts relatif à un réseau pouvant représenter un réseau de téléphone, d'électricité ou d'irrigation. Ce réseau est disposé sous la forme d'un arbre décrit en termes de nœuds - au niveau desquels se localisent les agents - et de liens établissant la connexion entre les différents agents et la source, origine de l'arbre.

Pour introduire le problème d'allocation traité, le réseau ainsi que le problème de partage de coûts qui lui est associé, seront décrits dans le premier chapitre. Ensuite une méthode d'allocation de coûts selon un partage égal du coût marginal *"Equal Split of Incremental Cost"* sera analysée au niveau du deuxième chapitre. Par ailleurs, le lien entre cette méthode d'allocation de coûts et la solution élaborée par Shapley en 1953, appelée la valeur de Shapley, sera discuté lors du troisième chapitre. Enfin, on termine cette première partie avec une généralisation de cette méthode d'allocation de coûts incrémentale, dont nous analyserons l'importance en matière de stabilité.

Dans la deuxième partie, nous présenterons une méthode d'allocation de coûts duale à la valeur de Shapley, qui part des foyers (nœuds) vers la source et repose plus particulièrement sur des taux de contribution pré-affectés aux agents ainsi que sur le temps nécessaires au paiement des différents liens de cet arbre. Ainsi, dans le premier chapitre, nous aurons défini un algorithme supposant des taux de contribution identiques pour tous les agents qui permettera une allocation des coûts pour chaque agent en fonction de ce qu'il construit. L'allocation ainsi définie sera comparée , dans un deuxième chapitre à l'allocation égalitaire de Dutta et Ray. Enfin, dans un dernier chapitre, nous analyserons le cas général de l'allocation *du foyer à la source* définie pour des taux de contribution différents. Pour clore, nous récapitulerons avec les principales démarches et résultats de ce mémoire.

À travers ce travail, nous aurons présenté, pour le cas de notre réseau, une forme plus simple à calculer pour l'allocation de coût connue sous le nom de *la valeur de Shapley* (Shapley, 1953). D'un autre côté, nous aurons prouvé l'équivalence entre l'allocation de coût *du foyer à la source à taux de contributions identiques* et l'allocation de coûts égalitaire présentée par Dutta et Ray en 1989. Un autre résultat d'une grande importance se rapporte au noyau et se résume au théorème suivant : toute méthode d'allocation de coûts possible dans le cadre de cet arbre, est stable si et seulement si elle est *incrémentale* ou si elle est une méthode d'allocation *du foyer à la source*.

Toutefois, avant d'entamer la présentation de notre propre travail, un survol des travaux existant déjà dans ce domaine s'avère nécessaire pour introduire le problème de partage de coûts et les méthodes d'allocation proposées.

LA REVUE DE LA LITTÉRATURE

L'importance du problème de partage de coûts s'est reflétée sur les divers travaux élaborés dans ce domaine.

Pour commencer, un survol des papiers de Young (1985 et 1994) nous permettra d'introduire le problème de partage de coûts et de présenter les caractéristiques et propriétés essentielles relatives aux méthodes d'allocation possibles, dans le cadre des jeux coopératifs. Ensuite, on traitera du problème de partage des coûts en général , en étudiant quelques exemples d'application de partage dans le cadre de jeux non coopératifs.

A- Le problème d'allocation de coûts dans le cadre des jeux coopératifs

Soit $\mathrm{N} = \{1,2,\ldots\ldots,n\}$ l'ensemble des participants potentiels. La fonction de coût caractéristique d'un problème d'allocation de coûts, c, associe à chaque sous-ensemble S appartenant à N, un coût c(S) qui représente le coût minimum de servir les membres de la coalition S en utilisant les moyens les plus efficaces. Dans cet ordre d'idées, une méthode d'allocation ρ est une fonction définie pour tout N et toute fonction de coût c. Elle charge chaque participant i un montant x_i, de telle sorte que $\rho(c) = (x_1,\ldots\ldots,x_n) \in \Re^N$ et $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$.

Néanmoins, pour qu'une méthode d'allocation soit stable, il faudrait qu'elle avantage tous les participants par rapport à la situation où ils agissent seuls ou sous forme de petits groupes séparés, d'où la notion de noyau. Une allocation est, en effet, dans le noyau (ou stable) si elle satisfait le test du coût marginal ou le test équivalent, à savoir le "stand alone cost test". Le test du coût marginal vise un minimum d'équité et stipule que chaque participant - ou ensemble de participants - paie au moins le coût additionnel qu'entraîne son entrée dans tout le groupe, soit : $\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S),\ \forall S \subseteq N$. Mentionnons en outre que si $\sum_{i \in S} x_i < c(N) - c(N \setminus S)$, par l'opposé de ce qui précède, on dit que l'ensemble formé par N\S subventionne la coalition S. Le "stand-alone-cost-test" vise, quant à lui, une coopération plus volontaire entre tous les participants et implique que le coût chargé, par une méthode d'allocation x, à une coalition S ne doit pas dépasser le coût de cette dernière. Autrement dit : $\sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \subseteq N$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, ces deux tests sont équivalents en vertu de l'équilibre budgétaire, indispensable pour la réalisation de toute méthode d'allocation, à savoir $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$.

Par ailleurs, une définition plus restreinte du noyau, à savoir le semi-noyau, est présentée par Young (1994). Le semi-noyau est défini comme étant l'ensemble des allocations x telles que, pour tout i appartenant à N, $x_i \leq c(i);\ x(N-i) \leq c(N-i)\ et\ x(N) \leq c(N)$.

Parmi les méthodes d'allocation de coûts dans le cadre des jeux coopératifs, nous estimons important de nous attarder sur les méthodes d'allocation suivantes : la valeur de Shapley (Shapley, 1953), la solution du "Separable Cost Remaining Benefits" (James et Lee, 1971), celle du "Nucleolus" (Young, 1994), l'allocation égalitaire (Dutta et Ray, 1989) et les méthodes d'allocation par moyenne et s'equentielle (Aadlan, D. et Koplin, V.).

La valeur de Shapley (Shapley, 1953) attribue les coûts à chaque agent en fonction des coûts marginaux qu'occasionne son entrée à chacune des coalitions de joueurs possibles S. En supposant que les ordres d'adhésion dans les différentes coalitions sont équiprobables, le coût chargé à un agent représente alors la moyenne de ses coûts marginaux relativement à ces coalitions. Autrement dit : $x_i = \sum_{S:i \in S \subseteq N} \frac{|S-i|!|N-S|!}{|N|!} c^i(S)$, où $c^i(S)$ représente le coût marginal qu'occasionne l'entrée de l'agent i dans la coalition S, c'est-à-dire $c^i(S) = c(S) - c(S \setminus i)$.

Pour ce qui est de la méthode du "nucleolus", elle consiste à choisir - parmi les allocations stables - la méthode qui maximise le bien-être de la coalition la plus lésée. À ce propos, il est intéressant de noter que le critère de bien-être considéré par cette dernière méthode d'allocation repose, pour une coalition donnée S, sur l'écart entre le coût associé à cette coalition - $c(S)$- et la somme de ce que paient ses membres relativement à une méthode d'allocation de coûts x, soit $\sum_{i \in S} x_i$. Effectivement, la coalition S est considérée favorisée par rapport à la coalition T - relativement à une méthode d'allocation x - si cet écart calculé pour la première coalition est inférieur à celui calculé pour la deuxième; c'est à dire si $c(S) - \sum_{i \in S} x_i < c(T) - \sum_{i \in T} x_i$. La solution du "nucleolus" repose sur la minimisation de l'écart maximum sur tous les sous ensembles possibles de N. La solution de ce problème est alors obtenue en résolvant le problème linéaire suivant :

$\max \varepsilon$, sujet aux contraintes $c(S) - \sum_{i \in S} x_i \geq \varepsilon, \forall S \neq \phi, N$ et $\sum_{i \in N} x_i = c(\mathrm{N})$.

Signalons en passant qu'une variante de cette méthode est le nucleolus par tête où l'écart absolu $c(S) - \sum_{i \in S} x_i$ est remplacé par l'écart relatif $\frac{c(S) - \sum_{i \in S} x_i}{|S|}$. (Grotte, 1970).

La méthode du "Separable Cost Remaining Benefits" (James et Lee, 1971)[1], quand à elle, attribue à chaque participant son coût séparable - ou marginal - s_i ($s_i = c(N) - c(N-i)$) plus une fraction de son coût non séparable - $c(N) - \sum_{j \in N; j \neq i} s_j$ - proportionnelle à son bénéfice résiduel $r_i = c(i) - s_i$. Plus précisément chaque agent payera, selon cette méthode, le montant $x_i = s_i + \frac{r_i}{\sum_{j \in N} r_i}\left(c(N) - \sum_N s_j\right)$.

Il importe de signaler, à ce stade, qu'il est fréquent de se concentrer - dans les problème d'allocation - sur les gains que chaque coalition réalise au lieu de s'intéresser aux coûts directement. Si tel est le cas, le gain potentiel d'une coalition est égal à la réduction de coût qu'elle réalise quand ses membres coopèrent au lieu d'agir séparément. Ainsi le nouveau jeu est caractérisé par une fonction de gain v définie par $v(s) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S);\ \forall S \subseteq N\ et\ v(\phi) = 0$ (Young, 1985c). Tenant compte de cette équivalence, une méthode d'allocation appliquée à une fonction caractéristique de coûts ou une fonction de gains équivalente aboutit aux mêmes résultats. Notons à ce propos que deux fonctions caractéristiques u et v sont considérées équivalentes si pour un scalaire $\alpha \neq 0$ et un vecteur $b \in \Re^N$, $u = \alpha v + b$ implique que $u(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} b_i;\ \forall S \subseteq N$. (Young, 1994)

Notamment, la solution donnée par la méthode d'allocation de "SCRB" basée sur les fonctions de coûts peut être donnée en termes de gains v_i. Les gains sont alors affectés, pour chaque agent i, en proportion de son gain

[1] Cette méthode peut être alternée dans la suite par l'abréviation suivante : "SCRB".

marginal $v^i(N)$ et l'on a $y_i = \dfrac{v^i(N)}{\sum_{j \in N} v^j(N)} v(N)$.[2] Or, vu l'équivalence des deux fonctions caractéristiques de coûts c et celle de gain v, il est clair que y_i n'est autre que le gain de l'agent i : $y_i = c(i) - x_i$.

Dutta et Ray (1989) ont porté leur intérêt sur les allocations égalitaires appliquées directement sur des fonctions caractéristiques de gains. Toutefois, l'allocation égalitaire ne consiste pas simplement à répartir les gains également sur l'ensemble de la population de sorte que chacun paie la moyenne $x_i = \dfrac{v(N)}{n}$. Elle essaie plutôt de répartir les gains de la manière la plus égalitaire possible, en prenant en considération les richesses initiales de tous les agents. On peut introduire les allocations égalitaires par deux exemples étudiés par Dutta et Ray, dont le premier traite de l'allocation des coûts d'un bien public et le second du partage du surplus d'une firme de travailleurs.

Le premier exemple consiste à répartir le coût d'un bien public y, produit par l'intermédiaire d'un bien privé z (la monnaie) selon la fonction de coût c(y)=z, dans une économie formée de n individus dotés chacun d'une richesse initiale $\bar{z}_i$. La fonction d'utilité, $V(y,z) = u(y) + z$, étant la même pour tous les individus, la provision en bien public pour chaque coalition S ne dépend, par conséquent, que de sa taille $s = |S|$. La fonction de gain caractéristique v indique le surplus que chaque coalition S atteint au niveau optimal de bien public y_s et elle est donnée par : $v(S) = su(v_s) - c(y_s) + \sum_{i \in S} \bar{z}_i$. Notons que cette fonction est symétrique $v(S) = v(T)$, si S et T ont la même taille. La solution égalitaire propose une contribution plus importante pour les personnes les plus riches égale à l'excès de leur richesse initiale par rapport à la richesse moyenne de l'ensemble de la population, soit $t_i^E = \bar{z}_i - \bar{z}_i^E$. Ceci implique une taxation

---

[2] Le gain marginal $v^i(N)$ est égal à $v(N) - v(N-i)$.

moins régressive que celle proposée par la valeur de Shapley qui, à l'encontre de la solution égalitaire, recommande un système de taxation absolue indépendant du niveau initial des richesses individuelles.

Quand au deuxième exemple, il traite de la répartition du surplus d'une firme constituée de n travailleurs. Le travailleur i produit une quantité α_i d'output. Chaque coalition S choisit d'installer ou pas une entreprise sachant que sa richesse est le maximum entre $\sum_{i \in S} \alpha_i - c$ et zéro, où $\sum_{i \in S} \alpha_i$ représente l'output total à l'intérieur de la coalition S et c les frais fixes d'installation de la firme. En arrangeant ces individus selon l'ordre décroissant de leur output de façon à avoir $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots\ldots \geq \alpha_n$, la solution égalitaire calcule le plus petit entier k vérifiant $\frac{1}{k}\left[\sum_{s=1}^{k} \alpha_s - c\right] > \alpha_{k+1}$. Cet entier représente les k individus les plus riches, pour lesquels la solution égalitaire attribue un gain égal à la moyenne de leur surplus total net de frais d'installation. Par contre, les (n-k) travailleurs les moins riches reçoivent un surplus net équivalent à leurs productivités marginales et ne contribuent donc pas au financement des frais fixes. En somme, l'allocation égalitaire des gains se définit comme suit :

$$x_i^* = \frac{1}{k}\left[\sum_{s=1}^{k} \alpha_s - c\right] > 0 \; pour \; 1 \leq i \leq k \text{ et } x_i^* = \alpha_i \; pour \; k < i \leq n.$$

Dans ce contexte, posant comme hypothèse que $\min_i \alpha_i > c$, la valeur de Shapley attribue à chaque travailleur un surplus équivalent à sa productivité marginale nette des frais moyens d'installation de la grande firme, soit $x_i^s = \alpha_i - \frac{c}{n}$ pour tout $i = 1, \ldots\ldots, n$.

En ce qui concerne la stabilité, Dutta et Ray (1989) ont prouvé que les allocations égalitaires n'ont pas de lien logique simple avec le noyau. De fait, les trois cas suivants sont possibles :

1) Le noyau est non vide mais il n'existe pas d'allocation égalitaire.

2) L'allocation égalitaire existe mais le noyau est vide.
3) Le noyau est non vide et l'allocation égalitaire existe mais elle n'appartient pas au noyau.

Une règle égalitaire extrême poserait une répartition égalitaire de la richesse de la société, abstraction faite de la distribution initiale des richesses individuelles ou à l'intérieur des coalitions. Cependant cette solution peut léser certaines coalitions qui vont alors dévier et la méthode d'allocation égalitaire ne sera plus stable. D'où l'intérêt de proposer une méthode d'allocation d'inspiration égalitaire appartenant au noyau. Or, Dutta et Ray (1989) montrent qu'il existe au plus une allocation qui appartient au noyau et n'est pas dominée au sens de Lorenz. Toute autre allocation stable est bloquée par une coalition possible qui, en déviant de l'ensemble du groupe, peut augmenter le bien-être de certains de ses membres sans détériorer celui des autres et ce en respectant le critère d'égalitarisme imposé par cette méthode d'allocation.

Dans le cas des jeux convexes,[3] il existe une seule allocation stable qui domine au sens de Lorenz toute autre allocation appartenant au noyau. C'est cette allocation que reconnaît la solution égalitaire de Dutta et Ray. Signalons à ce propos que les deux exemples d'allocation égalitaire étudiés plus haut traitent des jeux convexes et les solution égalitaires proposées sont, par conséquent, stables et dominent au sens de Lorenz toutes les autres allocations possibles appartenant au noyau, dont la valeur de Shapley .

Dans les jeux convexes, la solution égalitaire peut se calculer selon l'algorithme suivant : En tout premier lieu, on détermine la plus large coalition S_1, ayant la valeur moyenne la plus élevée, définie par : $\frac{v(S_1)}{s_1} \geq \frac{v(S)}{s}, \forall S \subseteq N$. La convexité du jeu assure l'unicité de la coalition S_1. En second lieu, sur

[3] Un jeu v est dit convexe s'il vérifie: $v(S)+v(T)-v(S \cap T) \leq v(S \cup T)\ \forall S,T \subset N$.

l'ensemble de joueurs résiduels ($N \setminus S_1$), on détermine la coalition la plus large S_2 dont la valeur moyenne est la plus élevée : $\frac{v(S_2)}{s_2} \geq \frac{v(S)}{s}, \forall S \subseteq N \setminus S_1$. Ainsi les coalitions sont déterminées récursivement par ordre décroissant de moyenne jusqu'à arriver, en dernier lieu, à la coalition à richesse moyenne relativement la plus petite. La solution égalitaire correspondant à ce jeu convexe attribue à chaque joueur la moyenne de la coalition à laquelle il appartient d'après cet algorithme.

D'un autre côté, Aadlan, D. et Koplin, V. ont étudié le problème de répartition de coûts en partant d'une étude sur le terrain d'un échantillon formé de 25 ranchs situés dans la communauté du Sud-Central de Montana.[4] Ils ont constaté la longévité de certaines méthodes de partage de coûts d'irrigation appliquées dans ces ranchs. Ces méthodes d'allocation de coûts sont principalement celles d'allocation par moyenne restreinte et séquentielle.

Pour un échantillon de n agents ordonnés selon leurs positions par rapport à la source principale d'eau, le partage des coûts selon la méthode par moyenne restreinte correspond à l'allocation égalitaire de Dutta et Ray (1989). De fait, cette méthode consiste à charger, récursivement, la plus faible moyenne des coûts à la plus large coalition possible, en partant de l'agent le plus proche de la source vers celui qui en est le plus éloigné. La répartition séquentielle des coûts correspond quand à elle à la valeur de Shapley. Elle respecte aussi l'ordre des propriétaires et consiste à répartir le coût de chaque canal sur tous les agents qui l'utilisent. Ainsi, chaque agent paie la somme de ses parts dans le paiement des coûts relatifs aux fossés de rangs inférieurs.

Les deux méthodes de partage de coûts sont monotones, c'est-à-dire que si le coût total du réseau augmente, alors aucun agent ne peut payer moins par

[4] Un plan de ce réseau, tel que présenté par ces auteurs, est dupliqué dans l'annexe A.

rapport à la situation initiale. Ce qui implique qu'aucun agent ne peut baisser son coût en essayant d'augmenter le coût total. Elles respectent aussi le rang : un agent i paie moins que l'agent j si le rang de i est inférieur à celui de j, et vérifient le "Stand-alone-cost-test" ou, selon la terminologie de Aadlan et Koplin, l'axiome de non-subvention.

Sur le plan pratique, la monotonie, l'ordre et la non-subvention représentent pour les propriétaires des ranchs des critères d'équité déterminant dans le choix d'une méthode d'allocation de coût. D'où l'explication de la longévité de ces méthodes appliquées depuis plus que 50 ans.

Par ailleurs, comme on vient de le signaler, les propriétaires des ranchs ont affirmé que la longévité de ces méthodes repose essentiellement sur leurs degrés d'équité. Aussi, parmi les méthodes stables, monotones et qui respectent le rang, la méthode d'allocation par moyenne restreinte maximise l'utilité au sens de Rawls (maximiser la plus petite utilité dans la société) alors que la méthode séquentielle minimise cette utilité. Sachant que maximiser le bien être au sens de Rawls est équivalent à minimiser le coût chargé au dernier propriétaire alors que le minimiser revient à minimiser le coût du premier, on déduit que la méthode d'allocation de coût par moyenne restreinte favorise le dernier propriétaire alors que la méthode séquentielle favorise le premier.

D'un autre côté, parmi les méthodes stables, monotones, qui respectent le rang et la semi-marginalité (un agent ne peut pas être chargé plus que le coût payé par l'agent qui le précède directement augmenté du coût marginal du canal qui le lie à ce dernier), la méthode d'allocation séquentielle maximise l'utilité au sens de Rawls. Ainsi, en respectant un critère d'équité différent, à svoir, la semi-marginalité, la méthode séquentielle réalise le même objectif que la méthode de moyenne restreinte, qui vise la maximisation de l'utilité au sens de Rawls.

Il est, aussi, important de souligner l'existence d'autres méthodes d'allocation appliquées au sein de cet échantillon. Ces méthodes sont, seulement, des variantes des deux premières méthodes d'allocation, pondérées par des poids attribués aux différents agents pouvant représenter, par exemple, la surface irriguée. Ainsi, selon la méthode de moyenne restreinte pondérée, le coût payé par les membres d'une coalition *S* représente le coût marginal de cette coalition par rapport à la coalition qui la précède directement - tel que déterminé par la méthode par moyenne restreinte - divisé par la somme des poids de ses membres. Le coût payé par agent, d'après la méthode séquentielle pondérée, est le coût de son fossé divisé par la somme des poids relatifs aux fossés de rang supérieur.

Ces méthodes d'allocation par moyenne restreinte et séquentielle, pondérées, vérifient respectivement le même genre de propriétés que les méthodes de moyenne restreinte et séquentielle, à savoir les propriétés de de monotonie, de rang, de stabilité et de maximisation ou minimisation de l'utilité au sens de Rawls.

En plus des propriétés vues jusqu'à présent, nous jugeons utile d'approfondir les axiomes de monotonie, d'additivité, de consistance, de symétrie, de covariance et l'axiome "dummy".

Comme on l'a énoncé plus haut, la monotonie implique en général que si le coût total augmente alors la charge d'aucun participant ne peut baisser. En outre, Young (1994) distingue la monotonie agrégée, coalitionelle, et forte. La monotonie agrégée est satisfaite si, pour un ensemble N et deux fonctions de coûts c et c' définies sur N, on a : $c'(N) \geq c(N)$ et $c'(S) \geq c(S), \forall S \subset N$ implique que $\rho_i(c') \geq \rho_i(c), \ \forall i \in N$. Tandis que la monotonie coalitionelle implique que si le coût d'une coalition augmente, ceteris paribus, aucun de ses membres n'est chargé un coût inférieur à celui qu'il payait initialement. Autrement dit : $\forall\, T \subseteq N\, et\, \forall S \neq N$, $c'(T) \geq c(T)$ et $c'(S) = c(S)$ implique que $\rho_i(c') \geq \rho_i(c), \forall i \in T$. Enfin, si la contribution d'un agent au coût de toute coalition possible est moins importante selon une fonction de coûts c relativement à une autre fonction c', alors une méthode d'allocation fortement monotone charge ce même joueur un coût inférieur quand elle est appliquée à la fonction de coût c relativement à ce qu'elle lui charge quand elle est définie sur c'. En d'autres termes, l'allocation ρ est fortement monotone si $c^{i}{}'(S) \geq c^{i}(S), \forall S \subseteq N$ *implique* $\rho_i(c') \geq \rho_i(c)$. La monotonie au sens coalitionnel est incompatible avec la stabilité puisque pour un ensemble N dont le cardinal est supérieur ou égal à cinq, Young (1985a) prouve qu'il n'existe pas d'allocations coalitionellement monotones appartenant au noyau.

L'additivité, quant à elle, réside dans la possibilité de décomposer la méthode d'allocation en sous méthodes dans le cas où la fonction de coût est décomposable en sous-fonctions. Autrement dit : *ρ est additive si pour toutes fonctions de coûts c et c', on a* $\rho(c + c') = \rho(c) + \rho(c')$, où, par définition, $(c + c')(S) = c(S) + c'(S)$, $\forall S \subseteq N$.

La consistance, pour sa part, est un principe extrême de partage équitable qui affirme que si une allocation est équitable, alors tous les sous-groupes de participants doivent accepter de partager le coût qui leur est alloué équitablement entre eux. Soit c une fonction de coût et x la méthode d'allocation relative telle que $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$. Pour tout sous-ensemble T inclus dans N, le jeu de coût réduit à T relativement à x est le jeux $c_{t,x}$ défini sur tous les sous-groupes de T par :

$$c_{t,x}(S) = \min_{S' \subseteq N \setminus T} \left\{ c(S \cup S') - \sum_{i \in S'} x_i \right\} \; si\; \phi \subset S \subset T;\; c_{t,x}(T) = x(T) \text{ et } c_{t,x}(\phi) = 0.$$

La méthode d'allocation de coûts, ρ, est alors consistante si $\forall$N, $\forall c$ définie sur

N et $\forall T \subset N$, $\rho(c) = \bar{x} \Rightarrow \rho(c_{T,\bar{x}}) = \bar{x}_T$.

Une méthode d'allocation de coûts, ρ, est dite covariante si pour un scalaire $\alpha \neq 0$ et un vecteur $b \in \Re^N$, on a $\rho(\alpha v + b) = \alpha\rho(v) + b$.

Pour ce qui est de l'axiome "dummy", il stipule que si la contribution d'un agent aux coûts de n'importe quelle coalition est nulle, alors le coût qui lui est attribué par la méthode d'allocation correspondante doit être nul à son tour.

Enfin, en ce qui regarde l'axiome de symétrie, des agents différents - dont les contributions aux coûts sont identiques par rapport à toutes les coalitions possibles - doivent être chargés le même coût par la méthode d'allocation de coûts correspondante.

Toutefois, on note que ces propriétés ne peuvent généralement pas être vérifiées simultanément par la même méthode d'allocation de coûts. En effet, la valeur de Shapley et la méthode du "nucleolus" par tête sont monotones; tandis que la valeur de Shapley est l'unique méthode fortement monotone (Young, 1985b). Par contre, les méthodes de "SCRB" et "nucleolus" ne sont pas monotones. De même, la valeur de Shapley se distingue par le fait qu'elle soit l'unique méthode qui satisfait simultanément les axiomes dummy, d'additivité et de symétrie (Shapley, 1953). Par contre la méthode de "nucleolus" est l'unique à être covariante et consistante à la fois.(Sobolev, 1975)

B- Le problème de partage de coût dans le cadre des jeux non coopératifs :

Le problème de partage de coûts est très large et dépasse le cadre des jeux coopératifs. Aussi, en dernière analyse, nous estimons nécessaire de traiter quelques applications de ces méthodes de partage de coûts. C'est qu'en effet, dans le cadre des jeux non coopératifs, les méthodes d'allocation de coûts sont, relativement, très diversifiées et généralement reliées à des applications particulières. À cet effet, on étudiera quelques exemples d'applications de partage de coûts. Entre autres, on analysera les méthodes proposées pour la répartition des coûts occasionnés par la production d'un bien public (Aumann et Shapley, 1974 et Ramsey, 1927); pour la répartition des coûts fixes d'un réseau de communication entre les usagers potentiels (Henriet et Moulin, 1996); pour le partage de coûts reliés à un bien produit selon une technologie à rendements d'échelles décroissants et utilisé par un ensemble d'agents fixe (Moulin et Shenker, 1992); et, enfin, pour l'allocation des coûts relatifs à un réseau commercial d'internet (Herzog, Shenker et Eistrein, 1995).

Le problème de partage de coûts se pose souvent dans le cas des entreprises publiques quand il s'agit de répartir les coûts conjoints des services offerts entre les bénéficiaires. Fixer les prix au niveau des coûts marginaux ne couvre pas le coût total d'un bien public caractérisé généralement par des rendements d'échelles décroissants, d'où la nécessité de trouver d'autres méthodes de partage de coûts. Pour une firme produisant n biens en quantités $q=(q_1,q_2,....,q_n)$ selon une fonction de coûts $C(q)$ définie sur $\Re_n^+$ et telle que $C(0)=0$, le problème étudié par Aumann-Shapley (1974) consiste à trouver des prix unitaires $p=(p_1,p_2,....,p_n)$ qui satisfont l'équilibre budgétaire : $\sum_{i\in N} p_i q_i = C(q^*)$, étant donné un niveau de production cible $q^*=(q_1^*,q_2^*,....,q_n^*)$. Le prix proposé par Aumann-Shapley est fixé au coût marginal moyen calculé à partir de tous les vecteurs tq^*, où t varie entre 0 et 1, soit $\rho_i(C,q^*)=\int_0^1 \frac{\partial C(tq^*)}{\partial q^*}\partial t$.

Cette méthode d'allocation est additive : $\rho_i(C_1,q^*)+\rho_i(C_2,q^*), \forall q^*\geq 0$, où, par définition, $C(q)=C_1(q)+C_2(q), \forall q\geq 0$. Elle est aussi fortement monotone :

$\frac{\partial C(q)}{\partial q_i} \geq \frac{\partial C'(q)}{\partial q_i}, \forall q \geq 0$ implique que $\rho_i(C,q^*) \geq \rho_i(C',q^*)$; $\forall q^* \geq 0$. La solution d'Aumann-shapley est l'unique méthode d'allocation de coûts satisfaisant simultanément les axiomes de symétrie et de forte monotonie (Young, 1985b). Elle est aussi additive, non négative et faiblement invariante au sens agrégé (Billera et Heath, 1982, Mirman et Tauman, 1982). On note, qu'une fonction est dite faiblement invariante au sens agrégé si elle vérifie $f_i(C,q^*) = \lambda_i f\left(C', \sum_{i \in N} \lambda_i q_i^*\right)$, pour toutes fonctions de coût C et C' et tout vecteur q^* tels que $C(q_1, q_2, ..., q_n) = C'\left(\sum_{i \in N} \lambda_i q_i\right), \forall q \leq q^*$, (Billera et Heath, 1982). Elle est dite non négative si elle vérifie $f_i(C,q^*) \geq 0$, pour $C(q) \leq C'(q), \forall 0 \leq q \leq q^*$.

Billera, Heath et Ranann (1978), expliquent la façon dont la méthode d'Aumann-Shapley a été utilisée pour la tarification des communications téléphoniques à l'université de Cornell. L'université peut bénéficier d'un taux plus bas en achetant le service téléphonique en gros. La compagnie de téléphone lui offre deux types de contrats selon qu'elle achète une grande ou petite quantité en termes de temps d'appel à prix fixe, la quantité dépassant ce quota lui coûte respectivement un prix marginal moins ou plus cher. Le service est classé en sept classes en fonction de la destination des appels établis. Ainsi, la compagnie distingue les appels outremer, les appels directs à distance et les appels locaux qui sont divisés en cinq sous-classes distinctes. Les communication sont ensuite rangées en fonction de la journée de l'appel (commerciale ou pas) et de l'heure de la journée de l'appel (minuit, une heure, deux heures,..). D'où en total, il y a 338 types de produits (24x7x2). Pour chaque combinaison de biens demandée $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, le coût minimum $C(q)$ est obtenu en optimisant le problème. Les coûts sont alloués selon la méthode d'Aumann-Shapley : pour chaque vecteur de demande q^*, le prix calculé pour chaque type de produit est $p_i = \rho_i(C,q^*) = \int_0^1 \frac{\partial C(tq^*)}{\partial q^*} \partial t$.

La solution de Ramsey, par contre, suppose que les quantités demandées sont indépendantes ($q_i = Q_i(p_i)$) et repose sur la maximisation du surplus du consommateur - $S(q) = \sum_{i \in N} \int_o^{q_i} Q_i^{-1}(t)dt - C(q)$ - sujet à la contrainte de l'équilibre budgétaire. L'application de cette méthode requiert, par conséquent, la connaissance de l'élasticité de la demande et aboutit à la condition suivante : la différence en pourcentage entre le prix et le coût marginal pour un bien est inversement proportionnelle à l'élasticité de demande de ce bien. En d'autres termes, $\frac{p_i - c_i}{p_i} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)\mu_i}$, où p_i représente le prix du bien, c_i son coût marginal, λ une constante et μ l'élasticité de la demande par rapport aux prix.

Parmi les méthodes implantées pour répondre aux problèmes de partage de coûts qui se posent dans la vie courante, celle avancée par Moulin et Henriet (1996) pour la répartition des coûts relatifs à un réseau de communication entre tous les usagers qui doivent s'y connecter. Le coût fixe du centre de communication de ce réseau étant ignoré, le problème revient à déterminer une méthode d'allocation des coûts de connexions individuelles, $c_j \in c$, basée sur la matrice de communications directes - $x_{i,j} \in x$ - des différents usagers de ce réseau.

À cet effet, les auteurs ont proposé deux méthodes d'allocation de coûts possibles, à savoir la méthode du coût privé et celle du coût externe. La première méthode charge chaque usager le coût de sa connexion au centre, soit $\rho_i(x,c) = c_i$. La deuxième méthode, par contre, tient compte de la communication entre les différents usagers et partage les coûts de connexions de chaque usager i sur tous ses correspondants, proportionnellement à leurs communications directes (sans passer par le centre) avec lui. Chaque agent doit alors payer selon cette méthode $\rho_i(x,c)=\sum_{j\neq i}\frac{x_{i,j}}{x_N^j}c_j$, où $x_N^j=\sum_{i\neq j}x_{i,j}$ est la somme des communications de l'usager j.

Définissant l'agent neutre "dummy" comme étant celui qui n'établit pas de communications directes - $x_N^i=0$ - Henriet et Moulin (1996), montrent que les deux méthodes d'allocation proposées réalisent l'équilibre budgétaire et respectent les axiomes dummy, d'additivité, de "sustainability" (il n'est jamais profitable pour une coalition d'usagers de dupliquer le réseau de communication existant pour sa communication interne) et de non-transit (il n'est pas dans l'intérêt de deux usagers quelconques d'établir une communication par l'intermédiaire d'un troisième agent). [5] De plus ils ont prouvé que toute combinaison convexe de ces deux dernières méthodes d'allocation de coûts vérifie les axiomes d'additivité (par rapport au coût de connexions), ainsi que les axiomes de "sustainability" et de non-transit.

Moulin et Shenker (1992), pour leur part, se sont intéressés au problème d'allocation de coûts d'un bien caractérisé par une technologie à rendement d'échelles décroissants et partagé entre un ensemble d'agents $N=\{1,2,.....,n\}$. Ils ont identifié deux méthodes de partage possibles.

La première est la méthode séquentielle, définie pour toute fonction de coût c non décroissante sur $\Re_+$ et tout vecteur de demande $q=(q_1,q_2,......,q_n)$ tel que $q_1\leq q_2\leq\cdots\cdots\leq q_n$, par :

$$\rho_1^s(c,q)=\frac{c(q^1)}{n},\rho_2^s(c,q)=\frac{c(q^1)}{n}+\frac{c(q^2)-c(q^1)}{n-1},\ldots,\rho_i^s(c,q)=\sum_{k=1}^{i}\frac{c(q^k)-c(q^{k-1})}{n+1-k},$$
$\forall i\in N$.

[5] l'axiome de "Sustainability" est l'équivalent du stand-alone-cost-test décrit pour les jeux coopératifs (Moulin et Henriet, 1996).

Les q^i sont déterminés récursivement en fonction des q_i de la manière suivante: $q^0 = 0, q^1 = nq_1, q^2 = q_1 + (n-1)q_2, \ldots, q^i = q_1 + \cdots + q_{i-1} + (n+1-i)q_i, \ldots, q^n = \sum_{i \in N} q_i$. On constate alors que le coût alloué à un agent ne dépend pas des quantités supérieures à ce qu'il demande.

La deuxième méthode d'allocation de coûts est celle du coût moyen qui attribue à chaque agent i le coût $\rho_i(c,q) = \frac{q_i}{\sum_{i \in N} q_i} c\left(\sum_{i \in N} q_i\right)$.

Ces deux méthodes vérifient le "stand-alone-cost-test" ($\rho_i(c,q) \geq c(q_i)$), respectent le rang, sont monotones et non décroissantes en q_i. Par contre, la méthode d'allocation selon les coûts marginaux, attribuant à chaque agent i le coût $\rho_i(c,c',q) = q_i c'\left(\sum_{i \in N} q_i\right) + \frac{1}{n}\left(c\left(\sum_{i \in N} q_i\right) - \sum_{i \in N} q_i c'\left(\sum_{i \in N} q_i\right)\right)$, où c' représente la fonction de coûts marginaux définie sur c, ne fait pas partie des mécanismes d'allocation proposés parce que les coûts chargés aux agents peuvent être négatifs.

Le principal avantage de la méthode séquentielle est d'ordre technique. Pour des agents dotés de préférences monotones et convexes, Moulin et Shenker (1992) ont déterminé l'allocation de coûts selon la méthode séquentielle pour toute fonction de coûts c et tout vecteur d'utilités $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$. Cette méthode attribue à chaque agent i la rémunération $u_i(\rho_i(q_1, q_2, \ldots\ldots, q_n), q_i)$ et présente une dominance soluble : l'élimination successive des jeux strictement dominés aboutit à l'équilibre unique de Nash.[6]

Pour terminer, on étudiera le partage de coût appliqué à un réseau d'internet (Herzog, Estrein et Shenker, 1995), vu la ressemblance que présente ce dernier avec le réseau sur lequel se rapportera notre travail. Ce réseau est formé par un

[6] Cette conclusion est reliée aux fonctions de coûts convexes; dans le cas où cette condition ne tient

ensemble d'agents M se partageant un flux d'input. Il est décrit en termes de nœuds et de liens formant un seul arbre distributeur : $N=(V,L,T)$ est un réseau composé de nœuds $v_i \in V$, de liens dirigés[7] $(v_i,v_j)\in L$ et d'une fonction d'enracinement T indiquant le passage suivi par un paquet d'information quand un agent - émetteur - le transmet à un autre groupe. Dans le cas d'un réseau uni-distributeur, la fonction d'enracinement $T(N,R,v_i)$ détermine pour un réseau N l'ensemble des liens dirigés établissant le chemin le long de la source R vers un agent - receveur - placé au niveau d'un nœud v_i. La localisation des agents au niveau des nœuds est donnée par la fonction Loc : $M \mapsto V$.

Une méthode d'allocation spécifique à ce réseau est alors définie sur N, R, M, la fonction de localisation *loc* et la fonction de coûts *c* associée à ce réseau. Elle attribue à chaque membre $\alpha \in M$, un coût positif $af_\alpha(N,R,M,loc,c)$. Néanmoins, parmi les méthodes d'allocation possibles ces auteurs se sont restreints à chercher les allocations budgétairement équilibrées et vérifiant les axiomes d'additivité, d'anonymat et d'équivalence.

L'axiome d'additivité signifie que pour toutes fonctions de coûts c et c', on a $af(N,R,M,loc,c+c')=af(N,R,M,loc,c)+af(N,R,M,loc,c')$. L'axiome d'équivalence est définit pour deux scénarios de réseaux (N_1,R_1,M_1,loc_1,c_1) et (N_2,R_2,M_2,loc_2,c_2) et stipule que si $cf\left(T\left(N_1,R_1,M_1,loc_1(M'),c_1\right)\right)=cf\left(T\left(N_2,R_2,M_2,loc_2(M'),c_2\right)\right)$, pour tout ensemble $M' \subseteq M$, alors la méthode d'allocation doit nécessairement vérifier $af(N_1,R_1,M_1,loc_1,c_1)=af(N_2,R_2,M_2,loc_2,c_2)$. Enfin, l'axiome d'anonymat implique que changer les étiquettes identifiant les membres n'affecte aucunement l'allocation des coûts; c'est à dire que si pour deux membre m_α *et* m_β appartenant à M et tout membre m_γ appartenant à $M \setminus \{m_\alpha, m_\beta\}$, on a

plus des équilibres multiples sont possibles.

$loc(m_\alpha) = loc'(m_\beta)$, $loc'(m_\alpha) = loc(m_\beta)$ et $loc(m_\gamma) = loc'(m_\gamma)$; alors

$$af_\alpha(N,R,M,loc,c) = af_\beta(N,R,M,loc',c)$$
$$af_\alpha(N,R,M,loc',c) = af_\beta(N,R,M,loc,c) \text{ et}$$
$$af_\gamma(N,R,M,loc,c) = af_\gamma(N,R,M,loc',c).$$

Or, une méthode d'allocation de coûts satisfaisant ces trois axiomes peut nécessairement s'écrire sous la forme canonique $F(n_u,n_d)$. Cette forme détermine les parts de paiement de coûts de chaque lien (v_i,v_j), ayant n_u membres supérieurs et n_d membres inférieurs, en fonction de leurs positions (inférieurs ou supérieurs) par rapport à ce lien. En égard à ce qui précède, les auteurs proposent les exemples d'allocation canoniques suivantes :

La première allocation propose un partage égalitaire des coûts des liens sur les membres inférieurs, ce qui correspond à $F_u(n_u,n_d) = 0$ et $F_d(n_u,n_d) = \frac{1}{n_d}$. On note que cette méthode d'allocation de coûts est la seule qui satisfait le "Stand alone cost test" en plus des trois axiomes de base cités plus haut.

La deuxième allocation, par contre, répartit tous les coûts reliés à un lien également sur ses membres supérieurs. D'où la forme canonique suivante : $F_u(n_u,n_d) = \frac{1}{n_u}$ et $F_d(n_u,n_d) = 0$.

La troisième allocation présente une solution intermédiaire qui propose une répartition égalitaire des coûts entre tous les membres de l'arbre; soit $F_u(n_u,n_d) = F_d(n_u,n_d) = \frac{1}{n_u + n_d}$. Par ailleurs, cette forme d'allocation représente l'unique méthode d'allocation de coûts satisfaisant simultanément

[7] Par liens dirigés, les auteurs entendent des lien ayant un sens de direction: $(v_i,v_j) \neq (v_i,v_j)$.

les axiomes d'équivalence, d'anonymat et de monotonie coalitionelle.

Enfin, la dernière méthode d'allocation repartit les coûts de chaque lien entre tous les membres proportionnellement au nombre de membres supérieurs ou inférieurs selon leurs propres positions; c'est-à-dire $F_u(n_u, n_d) = \frac{n_u}{n_u^2 + n_d^2}$ et $F_d(n_u, n_d) = \frac{n_d}{n_u^2 + n_d^2}$.

PARTIE I

Cette partie du mémoire a pour objectif, en plus de la description du modèle, de présenter la méthode d'allocation de coûts selon un partage égal du coût marginal, de traiter du lien qu'elle présente avec "la valeur de Shapley" et enfin, de présenter une méthode d'allocation générale qui, comme nous le prouverons, représente toutes les allocations stables et envisageables dans le cadre de notre modèle.

Chapitre I : LE MODÈLE

Avant de passer aux problèmes d'allocation de coûts et aux méthodes possibles, attardons-nous tout d'abord sur la présentation du réseau et des problèmes de coûts qui lui sont associés.

A- Présentation du problème de partage de coûts :

Le réseau est à source unique, c'est-à-dire qu'il existe un seul nœud qui n'a pas de prédécesseurs dans ce réseau. Il est disposé sous la forme d'un arbre (N, V, L) constitué d'un ensemble de nœuds $v \in V$ délimitant les différents segments (ou liens) de cet arbre et un ensemble de joueurs N répartis sur les nœuds selon la fonction de localisation L.[8]

Soit $\mathrm{N} = \{1,2,........,n\}$ l'ensemble des joueurs appartenant à cet arbre. La fonction de localisation est définie de V dans N et associe à chaque nœud v le sous ensemble de joueurs qui s'y localisent, soit :

$$\begin{aligned} L:\ & V \to N \\ & v \mapsto N_v \end{aligned} \qquad (1)$$

et où $\bigcup_{v \in V} \mathrm{N}_v = N$.

[8] Une représentation de ce réseau est présentée au niveau de l'annexe B.

Une relation d'ordre partiel $\precsim$, permet de situer les nœuds ainsi que les joueurs qui s'y localisent, respectivement les uns par rapport aux autres dans l'arbre (N, V, L). Cette relation d'ordre partiel est définie comme suit :

$v \prec w$: Signifie que le nœud v précède le nœud w.

$i \prec j$: Signifie que le joueur i appartient à un nœud qui précède celui auquel se localise le joueur j.

Le même ordre défini au sens faible “$\precsim$”, appliqué aux nœuds et aux joueurs, implique respectivement la possibilité d'avoir des nœuds superposés ou des joueurs appartenant au même nœud. Mentionnons en outre, que les relations d'ordre partiel “$\succsim$” et “$\succ$” représentent respectivement les relations d'ordre opposés à “$\precsim$” et “$\prec$”, à savoir la succession au sens faible et strict.

Les coûts inhérents à cet arbre sont décrits par la fonction de coût partiel de connections c et celle de coût total C. La fonction de coût partiel c associe à chaque nœud (v) le coût fixe (c_v) du lien qui le relie à son prédécesseur direct, c'est-à-dire le nœud qui vient juste avant lui dans l'arbre.

On pose les hypothèses suivantes :

<u>Hypothèse 1</u> :

Les coûts partiels associés aux différents nœuds sont non négatifs :

$c_v \geq 0$; $\forall v \in V$.

<u>Hypothèse 2</u> :

Le coût partiel d'un lien associé au nœud qui le suit directement est indépendant du nombre des joueurs qui s'y localisent.

La fonction de coûts partiels est alors définie comme suit :

$$\begin{aligned} c:\ & V \rightarrow \Re_+ \\ & v \mapsto c_v \end{aligned} \tag{2}$$

Définissons $P(v)$, l'ensemble des prédécesseurs d'un nœud v et $\mathrm{F}(v)$ l'ensemble de ses successeurs :

$$P(v) = \left\{ w \in V \ tels\,que\ w \precsim v \right\} \tag{3}$$

$$F(v) = \left\{ w \in V \ tels\,que\ w \succsim v \right\} \tag{4}$$

et soit $\overline{\vartheta}$ l'ensemble incluant les nœuds appartenant à ϑ ainsi que leurs prédécesseurs dans l'arbre $(\mathrm{N}, V, \mathrm{P},)$:

$$\forall \vartheta \subset V,\ \overline{\vartheta} = \left\{ w \in V \,/\, \exists v \in \vartheta;\ w \precsim v \right\} \tag{5}$$

En particulier $\overline{\{v\}} = P(v) = \left\{ w \in V \,/\, w \precsim v \right\}$ (3')

La fonction de coût agrégée C attribue à chaque nœud le coût total nécessaire pour le relier à la source (nœud formant l'origine de l'arbre) et qui représente le coût total des liens qu'il utilise. Ce coût est équivalent, pour un nœud donné v, à la somme des coûts partiels associés à tous ses prédécesseurs :

$$C(v) = \sum_{w \in P(v)} c_w \tag{6}$$

De même le coût agrégé pour une coalition de joueurs est égal à la somme des coûts des liens qu'elle utilise. Il représente la somme des coûts partiels associés aux nœuds formant cette coalition (nœuds au niveau desquels se localisent les différents joueurs appartenant à cette coalition) ainsi que ceux associés à leurs prédécesseurs n'appartenant pas à cette coalition.

La fonction de coûts agrégée caractéristique de cet arbre, C, se définit alors comme suit :

$$\begin{aligned} C:\ & V \to \Re_+ \\ & \vartheta \mapsto C(\vartheta) = C(\vartheta) = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c_v \\ & et\,telle\,que\;\; C(\phi) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Il apparaît alors évident, d'après les relations (6) et (7) ci-dessus, que la contribution marginale d'un nœud au coût d'un ensemble de nœuds ϑ déjà constitué est nulle s'il est prédécesseur d'au moins un autre nœud appartenant à cet ensemble. Dans ce cas, en effet, le lien avec le nœud qui le précède directement est déjà construit par ses successeurs. Par contre, dans le cas où ce nœud ne précède aucun des nœuds constituant cet ensemble, il n'est pas utilisé par la coalition déjà formée et son coût marginal est égal à la somme des coûts partiels de tous les liens nécessaires pour le relier à son prédécesseur le plus proche appartenant à $\overline{\vartheta}$.

Soit $C^v(\vartheta)$ la contribution marginale du nœud v dans le coût de l'ensemble de nœuds ϑ, représentant aussi le coût marginal de l'entrée de n'importe quel joueur localisé au niveau du nœud v par rapport à la coalition S formée par cet ensemble de nœuds ϑ.

La fonction de coût marginal est définie sur C par :

$$C^v(\vartheta) = C(\vartheta \cup \{v\}) - C(\overline{\vartheta}), \tag{8}$$

et l'on a :

$$\begin{cases} C^{v}(\vartheta) = 0 & si\ v \in \overline{\vartheta}. \\ \quad = \sum_{w \in P(v) \setminus \overline{\vartheta}} c_w & \text{sinon} \end{cases} \tag{9}$$

On remarque alors que la fonction de coûts caractéristique de ce problème possède les propriétés suivantes :

Propriété 1 :

Le coût agrégé pour un nœud ou ensemble de nœuds, correspondant à un joueur ou une coalition de joueurs quelconques de N, est indépendant des coûts partiels de tous les liens qu'ils n'utilisent pas.[9]

Propriété 2 :

Le coût agrégé est identique pour tous les joueurs localisés au niveau d'un même nœud; il est égal au coût associé à ce nœud.

Propriété 3 :

Un nœud dont le coût partiel est nul peut être supprimé et les joueurs qui s'y localisent transférés au nœud qui le précède directement sans que la fonction de coût agrégée C soit affectée.

Propriété 4 :

Le coût marginal d'un joueur à une coalition S est nul s'il se localise au niveau d'un nœud précédant au moins un autre formant cette coalition.

Propriété 5 :

La fonction de coûts agrégée C est monotone :

$$\forall \vartheta \ et\ \tau \subseteq V \ tels\,que\ \tau \subseteq \overline{\vartheta};\ C(\tau) \leq C(\vartheta) \tag{10}$$

---

[9] Les liens non utilisés par une coalition S constituée d'un ensemble de noeuds ϑ, forment l'ensemble $V \setminus \overline{\vartheta}$.

Propriété 6 :

La fonction de coûts agrégée C est concave :

$$\forall \vartheta \text{ et } \tau \subseteq V; C(\vartheta \cup \tau) \leq C(\vartheta) + C(\tau) - C(\vartheta \cap \tau). \tag{11}$$

En effet, $\forall \vartheta \text{ et } \tau \subseteq V; C(\vartheta \cup \tau) = C(\vartheta) + C(\tau) - C(\overline{\vartheta} \cap \overline{\tau})$

Or, $(\vartheta \cap \tau) \subseteq (\overline{\vartheta} \cap \overline{\tau})$.

D'où, d'après la monotonie de la fonction C, $C(\vartheta \cap \tau) \leq C(\overline{\vartheta} \cap \overline{\tau})$

et par conséquent, $C(\vartheta \cup \tau) \leq C(\vartheta) + C(\tau) - C(\vartheta \cap \tau)$. ■

Grâce à la concavité de C la propriété suivante est directe:

Propriété 7 :

La fonction de coût est sous-additive:

$$\forall \vartheta \text{ et } \tau \subseteq V; C(\vartheta \cup \tau) \leq C(\vartheta) + C(\tau) \tag{12}$$

Jusqu'ici, nous nous sommes limités à définir le problème de coûts relatif à cet arbre (N, V, L); il nous reste maintenant à envisager les méthodes d'allocation possibles.

Chapitre II : LA MÉTHODE DE PARTAGE ÉGAL DU COÛT MARGINAL

A- Présentation de la méthode d'allocation :

Soit ρ une méthode d'allocation de coûts définie sur le réseau, pour toute fonction de coût c par :

$$\rho(N,V,L,c) = (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \; tels\,que \sum_{i\in N} x_i = C(V)$$

où x_i représente le coût total chargé, par cette méthode d'allocation ρ, à un joueur *i* appartenant à N.

Une méthode d'allocation de coûts naturelle dans le cas de cet arbre serait un partage égalitaire des coûts marginaux ou "Equal Split of Incremental Cost" (ESIC) : Le coût de servir les joueurs se localisant au niveau du premier nœud (nœud à la source de l'arbre) est également réparti entre tous les joueurs de l'arbre. Ensuite, le coût additionnel induit par le nœud qui suit directement le premier sera réparti équitablement entre tous ses utilisateurs; c'est à dire les joueurs qui se localisent au niveau de ce nœud et ses successeurs. Et ainsi de suite, le coût partiel associé à chaque nœud sera également réparti entre tous ses utilisateurs. Par conséquent, les joueurs localisés au niveau d'un même nœud v sont tous chargés le même coût, x_v, égal à la somme de leurs parts dans le paiement de tous les nœuds qu'ils utilisent.

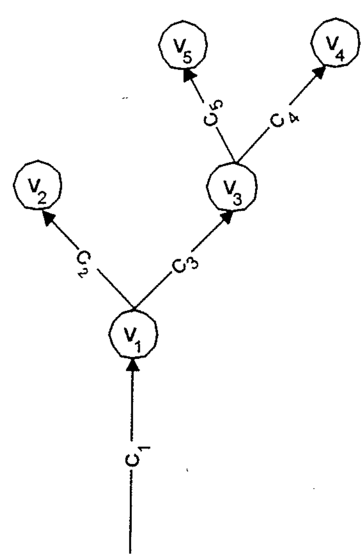
Cette méthode d'allocation de coûts se définit alors, pour tous les joueurs se localisant au niveau d'un nœud v, comme suit :

$$x_v = \sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{\sum_{k \in F(w)} n_k} \tag{13}$$

$$où \; n_k = |N_k|.$$

Pour mieux clarifier cette méthode d'allocation de coûts, nous estimons utile de l'appliquer à un exemple d'un réseau illustratif réduit à cinq nœuds contenant chacun un joueur :

Exemple 1 :



On a $N = V = \{1,2,3,4,5\}$ et $c = (10;3;9;2;1)$.

D'après la méthode de ESIC les coûts $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ alloués à ces agents sont calculés de la manière suivante :

$x_1 = \frac{10}{5} = 2$; $x_2 = \frac{10}{5} + 3 = 5$; $x_3 = \frac{10}{5} + \frac{9}{3} = 5$; $x_5 = \frac{10}{5} + \frac{9}{3} + 2 = 7$ et $x_5 = \frac{10}{5} + \frac{9}{3} + 1 = 6$.

La contrainte budgétaire est, bien sûr, satisfaite puisqu'on a $\sum_{i \in \mathrm{N}} x_i = C(N) = 25$. Il est, notamment, important de prouver que cet équilibre tient aussi dans le cas général du réseau (N, V, L). Pour cela, il suffit de montrer que la somme des coûts chargés à tous les joueurs appartenant à ce réseau par la méthode d'allocation de coûts "ESIC" couvre exactement le coût total de l'arbre, soit :

$$\sum_{i \in \mathrm{N}} x_i = C(V) \tag{14}$$

Or, on sait que :

$$\sum_{i \in \mathrm{N}} x_i = \sum_{v \in V} n_v x_v$$

$$= \sum_{v \in V} \sum_{w \preceq v} \frac{n_v}{n_k} c_w$$

$$= \sum_{w \in V} \frac{\sum_{v \succeq w} n_v}{\sum_{k \succeq w} n_k} c_w$$

$$= \sum_{w \in V} c_w$$

$$= C(V) = C(N)$$

Il est incontestable que cette méthode d'allocation de coûts permet d'atteindre l'équilibre budgétaire. Il importe, à présent, de s'assurer de sa stabilité.

B- Étude de la stabilité :

Une méthode d'allocation de coûts $\rho(N,V,L,c)=(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ est stable, ou appartient au noyau, si aucune coalition possible S ne peut améliorer la situation de tous ses membres. Autrement dit, une méthode de répartition des coûts est stable si aucune coalition ne s'y objecte. Pour cela, il faudra qu'elle vérifie :

$$\sum_{v\in\vartheta} x_v \leq C(\vartheta)\ \forall\vartheta\subseteq V, \qquad (15)$$

ou la relation équivalente, en considération à la contrainte budgétaire :

$$\sum_{v\in\vartheta} x_v \geq C(V\cup\vartheta)-C(V),\ \forall\vartheta\subseteq V. \qquad (16)$$

La première inégalité, équation (15), implique que le montant total chargé aux membres de toute coalition possible S, formée par un ensemble de nœuds ϑ, selon la méthode d'allocation de coûts, doit être inférieure au coût alternatif qu'ils paieraient s'ils font coalition à part. C'est le "stand-alone-cost-test" qui implique une coopération volontaire avec tout le groupe.

La seconde inégalité, relation (16), quand à elle, représente le test du coût marginal ou "incremental cost test". Elle stipule que chaque joueur ou coalition de joueurs, formant un ensemble de nœuds ϑ, doit payer au moins le montant couvrant le coût marginal qu'occasionne son entrée.

Tenant compte de ce qui précède, on avance la proposition suivante :

Proposition 1 :

La méthode à partage égal du coût marginal (ESIC) sélectionne une allocation du noyau.

Comme on vient de le mentionner, pour prouver que l'allocation selon la méthode de "ESIC" est dans le noyau il suffit de montrer que l'une des inégalités (15) et (16) est vérifiée. Or, il est évident que la première relation est respectée puisque le coût chargé à une coalition ne peut contenir que les coûts partiels utilisés par ses membres. Par conséquent la somme des coûts attribués à n'importe quelle coalition possible S doit être inférieure ou égale à ce que payerait cette coalition si elle agissait toute seule. En effet, on sait que :

$$C(\vartheta) = C(\overline{\vartheta}) = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c_v \ .$$

D'autre part $\displaystyle\sum_{i \in S} x_i = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} n_v x_v$

$$= \sum_{v \in \overline{\vartheta}} \sum_{k \in P(v)} \frac{n_v c_k}{\sum_{m \in F(k)} n_m}$$

$$= \sum_{k \in \mathcal{V}} \frac{\sum_{v \in \overline{\vartheta} / v \underset{\sim}{\succ} k} n_v}{\sum_{m \in \mathcal{V} / m \underset{\sim}{\succ} k} n_m} c_k$$

Or comme $\displaystyle\sum_{v \in \overline{\vartheta} / v \underset{\sim}{\succ} k} n_v \leq \sum_{v \in \mathcal{V} / v \underset{\sim}{\succ} k} n_v$ *alors* $\displaystyle\sum_{k \in \mathcal{V}} \frac{\sum_{v \in \overline{\vartheta} / v \underset{\sim}{\succ} k} n_v}{\sum_{m \in \mathcal{V} / m \underset{\sim}{\succ} k} n_m} c_k \leq \sum_{k \in \mathcal{V}} c_k$

$$\text{C'est à dire} \sum_{i \in S} x_i \leq C(\overline{\vartheta}) = C(S)$$

D'où la preuve que cette allocation est stable et la proposition 1 est démontrée. (17) ■

Notre méthode d'allocation ayant été présentée; étudions maintenant le lien qu'elle présente avec la valeur de Shapley.

<u>Chapitre III</u>- LA RELATION ENTRE LA MÉTHODE DE *PARTAGE ÉGAL DU COÛT MARGINAL* ET LA "VALEUR DE SHAPLEY"

A- La valeur de Shapley :

Rappelons que la méthode d'allocation de coûts connue sous le nom de valeur de Shapley ou "Shapley Value" (Shapley, 1953) estime le coût chargé à un agent i par la moyenne des coûts marginaux $C^i(S)$, qu'il occasionne au moment où il signale son entrée dans chacune des coalitions S possibles, pondérée par les probabilités d'occurrence de chacun de ces coûts. D'où la formule suivante :

$$Sh_i(C) = \sum_{S: i \in S \subseteq \mathrm{N}} \frac{|S-i|!|\mathrm{N}-S|!}{|\mathrm{N}|!} C^i(S) \tag{18}$$

où $C^i(S) = C(S) - C(S \setminus \{i\})$.

Considérons notre premier exemple pour lequel $\mathrm{N} = V = \{1,2,3,4,5\}$ et $c = (10;3;9;2;1)$. Le coût marginal d'un joueur étant nul par rapport à toute coalition contenant un de ses successeurs, le calcul de la valeur de Shapley est direct:

$$Sh_1 = \frac{1}{5} C^1(1) = 2;$$

$$Sh_2 = \frac{1}{5} C^2(2) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{2 \in S \subset N; \\ |S|=2}} C^2(S) + \frac{1}{30} \sum_{\substack{2 \in S \subset N; \\ |S|=3}} C^2(S) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{2 \in S \subset N; \\ |S|=4}} C^2(S) + \frac{1}{5} \sum_{\substack{2 \in S \subset N; \\ |S|=5}} C^2(S) = 5$$

$$Sh_3 = \frac{1}{5} C^3(3) + \frac{1}{20}\left[C^3(1,3) + C^3(2,3)\right] + \frac{1}{30}\left[C^3(1,2,3)\right] = 5;$$

$$Sh_4 = \frac{1}{5} C^4(4) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{4 \in S \subset N; \\ |S|=2}} C^4(S) + \frac{1}{30} \sum_{\substack{4 \in S \subset N; \\ |S|=3}} C^4(S) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{4 \in S \subset N; \\ |S|=4}} C^4(S) + \frac{1}{5} \sum_{\substack{4 \in S \subset N; \\ |S|=5}} C^4(S) = 7$$

et

$$Sh_5 = \frac{1}{5} C^5(5) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{5 \in S \subset N; \\ |S|=2}} C^5(S) + \frac{1}{30} \sum_{\substack{5 \in S \subset N; \\ |S|=3}} C^5(S) + \frac{1}{20} \sum_{\substack{5 \in S \subset N; \\ |S|=4}} C^5(S) + \frac{1}{5} \sum_{\substack{2 \in S \subset N; \\ |S|=5}} C^5(S) = 6$$

Le lecteur peut alors constater que pour cet exemple l'allocation de coûts selon la valeur de Shapley coïncide avec celle donnée par la méthode de "ESIC" lors du premier exemple. Aussi, on s'intéresse dans ce qui suit, à prouver que ce résultat est valide pour le cas général de l'arbre (N, V, L).

B- Équivalence entre la méthode de partage égal du coût marginal et "la valeur de Shapley":

Pour commencer, nous savons que la valeur de Shapley est l'unique méthode d'allocation qui satisfait les axiomes de symétrie, d'additivité et l'axiome "dummy" ou de l'agent neutre. Aussi, on va vérifier que la solution de "ESIC" satisfait ces trois axiomes.

1- L'axiome de symétrie :

Rappelons qu'une méthode d'allocation de coûts vérifie l'axiome de symétrie si elle satisfait, pour une fonction de coût C symétrique par rapport à deux joueurs i et j se localisant respectivement au niveau de deux nœuds v et w, $\rho_i(N,V,L,c)=\rho_j(N,V,L,c)$.

Or, la fonction de coût C est symétrique par rapport à deux joueurs i et j si les coûts d'inclure ces deux joueurs à n'importe quelle coalition S formant un ensemble $\vartheta \subseteq V$ sont identiques. Autrement dit, si nous avons :

$$C(S\cup\{i\})=C(S\cup\{j\}),\forall S\subseteq N.$$

Ce qui équivaut à :

$$C(S\cup\{i\})-C(S)=C(S\cup\{j\})-C(S),\forall S\subseteq N$$

et qui signifie, alors, que

$$C^i(S)=C^j(S),\forall S\subseteq N.$$

En termes de nœuds, ceci est équivalent à

$$C^v(\vartheta)=C^w(\vartheta),\forall\vartheta\subseteq V$$

Le lecteur peut remarquer qu'un cas de symétrie évident est celui des joueurs appartenant au même nœud. Pour le reste des joueurs, il est nécessaire de distinguer les trois cas suivants, afin de montrer la symétrie de la méthode de partage étudiée :

a- $\underline{i \prec j \text{ ou } j \prec i}$:

C'est le cas où les deux joueurs se localisent à deux nœuds reliés par l'ordre partiel déjà défini. Les deux cas étant symétriques, étudions l'hypothèse où i précède j. Si tel est le cas, la fonction de coût ne peut pas être symétrique par rapport à ces deux joueurs. En effet, il existe au moins une coalition formée par un ensemble de nœuds ϑ telle que les contributions marginales respectives de ces derniers ne soient pas égales. Un exemple peut être présenté pour $S = \{m\}$ où m représente un prédécesseur de i. On a alors :

$$C^j(S) = \sum_{k \in P(j) \cap N \setminus \bar{S}} c_k = \sum_{k \in P(i) \cap N \setminus \bar{S}} c_k + \sum_{\substack{k \notin \bar{S} / i \prec k \prec j \\ \sim}} c_k$$

$$\Leftrightarrow C^j(S) = C^i(S) + \sum_{\substack{k \notin \bar{S} / i \prec k \prec j \\ \sim}} c_k \geq C^i(S)$$

Supposant la non nullité des coûts partiels associés à tous les liens constituant cet arbre, il est clair que la fonction de coûts ne peut pas être symétrique, puisqu'on a $C^j(S) > C^i(S)$.

b- Aucun ordre ne lie i et j mais i et/ou j précède(nt) au moins un autre nœud dans le réseau :

Dans ce cas aussi, un exemple suffit pour montrer que C ne peut pas être symétrique par rapport à ces deux joueurs. En effet, pour toute coalition S contenant un nœud m successeur de i, la contribution marginale de i aux coûts de cet ensemble est nulle alors que celle de j est égale à la somme des coûts de tous ses prédécesseurs n'appartenant pas à S. Autrement dit :

$$\forall S \,/\, \textit{il existe}\; m \in S;\; m \succ i, \text{ on a :}$$

$$C^i(S) = 0$$

$$\text{et } C^j(S) = \sum_{k \in P(j) \cap N \setminus \bar{S}} c_k > 0 = C^i(S)$$

c- Aucun ordre ne relie i et j et aucun autre joueur ne les suit :

On note que dans ce cas la condition de symétrie peut être satisfaite si $\sum_{k\in P(j)\cap N\setminus\bar{S}} c_k = \sum_{k\in P(j)\cap N\setminus\bar{S}} c_k \ \forall S\subseteq N$. En d'autres termes, si les sommes des coûts associés aux prédécesseurs respectifs de ces deux joueurs par rapport à n'importe quel point (nœud) appartenant à (N,V,L) sont égales. Supposant la non nullité de tous les coûts c_v, la condition de symétrie implique qu'aussi bien le nombre des prédécesseurs, séparant les nœuds où se localisent ces deux joueurs de tout ensemble possible $S\subseteq N$, que les coûts qui leurs sont associés doivent être identiques. Par conséquent, une fonction de coût C ne peut être symétrique par rapport à deux joueurs que si ces deux derniers ont le même prédécesseur direct, et que le coût du lien qui les séparent de ce prédécesseur soit identique pour les deux.

Dans le cas où cette condition de symétrie tient pour deux joueurs i et j quelconques, l'égalité suivante devient alors évidente :

$$\sum_{k\in P(i)\cap N\setminus\bar{S}} \frac{c_k}{\sum_{m\in F(k)} n_m} = \sum_{k\in P(j)\cap N\setminus\bar{S}} \frac{c_k}{\sum_{m\in F(k)} n_m}$$

$$\Leftrightarrow \rho_i(N,V,L,c) = \rho_j(N,V,L,c), \forall i \text{ et } j \in N$$

D'où l'allocation ρ vérifie l'axiome de symétrie.(19) ■

2 - L'axiome dummy :

Un nœud v est un "dummy" (ou neutre) si et seulement si la contribution de v au coût de n'importe quel ensemble $\vartheta\subseteq V$, y compris l'ensemble vide, ϕ, est nulle.[10] Et une allocation ρ vérifie "l'axiome dummy" si pour tout joueur neutre i, localisé au niveau d'un un nœud neutre v, on a $\rho_i(N,V,L,c)=0$.

Or pour que v soit neutre il faudrait que le coût qui lui est associé ainsi que ceux associés à tous ses prédécesseurs soient nuls, soit :

$$\forall w \in P(v);\ c_w = 0.$$

En effet, supposons qu'il existe $w \in P(v)$ tel que $c_w \neq 0$; la contribution marginale de v aux coûts de l'ensemble $\vartheta = \{w-1\}$ par exemple (où w-1 représente l'agent qui précède directement w) est strictement positive et égale à c_w. Par conséquent, v est neutre si et seulement si $\forall w \in P(v)$, $c_w = 0$.

Dans ce cas, on a :

$$\rho_i(N,V,L,c) = \sum_{k \in P(v)} \frac{c_k}{\sum_{m \succ k} n_m}$$
$$= 0,$$

d'où le fait que la méthode d'allocation ρ vérifie l'axiome "dummy".(20) ■

3 - L'additivité :

Une allocation ρ est additive si pour toutes fonctions de coût C et C' définies sur V, vérifiant $(C+C')(\vartheta) = C(\vartheta)+C'(\vartheta)$ pour tout ensemble $\vartheta \subseteq V$, on a $\rho_i(N,V,L,c+c') = \rho_i(N,V,L,c)+\rho_i(N,V,L,c')\ \forall i \in N_v$.

Or $\forall \vartheta \subseteq V;\ (C+C')(\vartheta) = C(\vartheta)+C'(\vartheta)$

[10] Notons que si un noeud v est un dummy alors tous les joueurs qui s'y localisent sont aussi des agents dummy.

Ou bien, $\forall \vartheta \subseteq V ; (C+C')(\vartheta) = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c_v + \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c'_v$

ce qui implique que

$$\forall \vartheta \subseteq V , \sum_{v \in \overline{\vartheta}} (c+c')(v) = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c_v + \sum_{v \in \overline{\vartheta}} c'_v$$

soit :

$$\forall v \in V ; (c+c')(v) = c(v) + c'(v) .$$

Et par conséquent,

$$\rho_i (N,V,L,c) + \rho_i (N,V,L,c') = \sum_{k \in P(v)} \frac{c_k}{\sum_{m \in F(k)} n_m} + \sum_{k \in P(v)} \frac{c'_k}{\sum_{m \in F(k)} n_m}$$

$$\Leftrightarrow \rho_i (N,V,L,c) + \rho_i (N,V,L,c') = \sum_{k \in P(v)} \frac{c_k + c'_k}{\sum_{m \in F(k)} n_m}$$

D'où le fait que

$$\rho_i (N,V,L,c) + \rho_i (N,V,L,c') = \rho_i (N,V,L,c+c') \ \forall i \in N_v$$

Et la méthode d'allocation ρ est, de ce fait, additive.(21) ■

En somme, la solution de partage égal du coût marginal, ρ, vérifie les trois axiomes propres à la valeur de Shapley. Néanmoins, une méthode d'allocation est nécessairement la valeur de Shapley si elle vérifie ces trois axiomes pour la classe de tous les jeux coopératifs. Or comme nous travaillons sur une sous-classe de ces jeux, une démonstration reste nécessaire pour prouver l'équivalence de la valeur de Shapley et la méthode de "ESIC".

Dans ce but, nous présenterons une preuve directe et une autre reposant sur les propriétés de la méthode de "ESIC", nous permettant d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2 :

La valeur de Shapley est la méthode d'allocation à partage égal du coût marginal ou "Equal Split of Incremental Cost".

Preuve 1 :

Définissons u^* par :

$$u_S^*(T) = \begin{cases} 1 & si\ T \cap S \neq \phi \\ 0 & si\,non. \end{cases}$$

Dans le jeu u_S^*, tout joueur i appartenant à l'ensemble N\S est un "Dummy". La valeur de Shapley est, par conséquent, donnée par :

$$Sh_i\left(u_S^*\right) = \begin{cases} 1/|S| & si\ i \in S \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Le jeu C généré par le problème de connections c peut être écrit comme suit :

$$C = \sum_{i \in N} c(i) u_{F(i)}^*$$

autrement dit : $\forall S \subseteq N, C(S) = \sum_{i \in F} c(i)\, u_{F(i)}^*(S)$

Ainsi, en considération à la propriété d'additivité la valeur de Shapley, pour tout agent i appartenant à N on a :

$$Sh_i(C) = \sum_{i \in N} c(j)\, \rho_i\left(u^*_{F(j)}\right)$$

$$= \sum_{j \in P(i)} \frac{c(j)}{|F(j)|} \rho_i\left(u^*_{F(j)}\right),$$

ce qui n'est autre que la formule reconnue par la méthode "ESIC". ■

D'un autre côté, vu les propriétés vérifiées par la fonction de coût caractéristique de ce problème et du fait que la valeur de Shapley représente, pour chaque agent, la moyenne de ses coûts marginaux calculés de façon symétrique par rapport à chacune des coalitions possibles, il est évident qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :

<u>Propriété 1</u> : (L'indépendance)

Le coût total chargé, par cette méthode d'allocation, à un joueur quelconque appartenant à N est indépendant des coûts partiels de tous les liens qu'il n'utilise pas :

$$\forall i \in N,\ Sh_i(N,V,L,c) = Sh_i(N,V,L,c') \tag{22}$$

$$avec \begin{cases} c'(w) = c(w) & si\ w \in P(v) \\ et\ c'(w) \neq c(w) & sinon. \end{cases}$$

<u>Propriété 2</u> : (La symétrie)

Les joueurs localisés au niveau d'un même nœud sont chargés le même coût :

$$\forall v \in V, \forall i\ et\ j \in N_v,\ Sh_i(N,V,L,c) = Sh_j(N,V,L,c) \tag{23}$$

<u>Propriété 3</u> :

Un nœud dont le coût partiel est nul peut être supprimé et les joueurs qui s'y localisent transférés au nœud qui le précède directement sans que l'allocation des coûts ne soit affectée :

$$\forall v \in V \; et \; \forall i \in N \,,\; Sh_i(N,V,L,c) = Sh_i\left(N,V',L',c'\right) \tag{24}$$

$$\text{avec } V' = V \setminus V^0 \,;\; V^0 = \{v \in V \,/\, c_v = 0\} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} c' &: V \to R_+^* \\ v &\mapsto c_v \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} L' &: V' \to N \\ v &\mapsto N_v \cup \bigcup_{w \succ v / c_w = 0} N_w \end{aligned} \tag{27}$$

et "≤" une relation d'ordre partiel définie, de la même façon que "$\precsim$", sur le nouvel arbre (N,V',L'). (28)

Il suffit alors, pour montrer que l'allocation de coûts par la méthode de Shapley est la même que la solution de ESIC, de montrer que cette dernière est l'unique méthode d'allocation qui vérifie simultanément ces trois propriétés.

<u>Preuve 2</u> :

Soit ρ une méthode d'allocation qui satisfait les trois propriétés ci-dessus. D'après la propriété d'indépendance, pour tout joueur i appartenant au réseau décrit par l'arbre (N,V,L), considérer comme nuls les coûts partiels associés à tous les nœuds suivant directement les liens qu'il n'utilise pas n'affectera pas le coût x_i qui lui est alloué par cette méthode. En d'autres termes, l'allocation doit vérifier

$$\rho_i(\mathrm{N}, V, L, c) = \rho_i(\mathrm{N}, V, L, c^o); \forall i \in N \tag{29}$$

où la nouvelle fonction de coûts partiels c^o est décrite par :

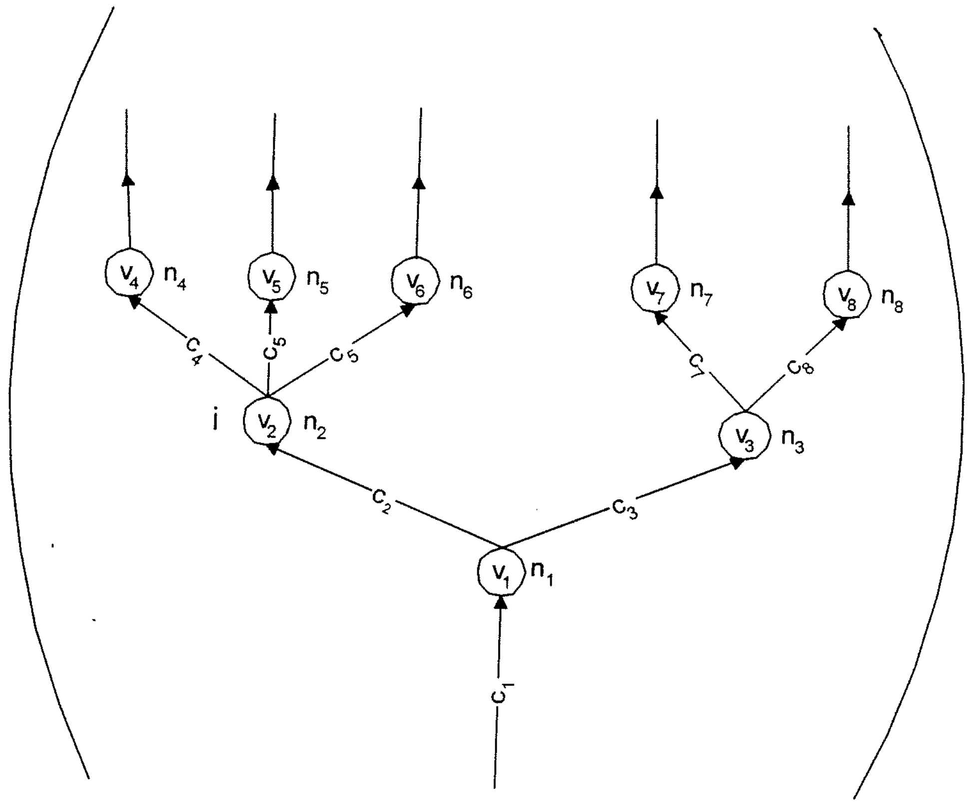
$$\begin{aligned} &c^0 : V \to R+ \\ &w \mapsto c_w^0 \begin{cases} = c_w & si\, w \in P(v) \\ = 0 & sinon. \end{cases} \end{aligned} \tag{30}$$

D'utre part, d'après la troisième propriété, supprimer les nœuds dont les coûts sont nuls et transférer les joueurs qui s'y localisent aux nœuds qui les précèdent directement n'affectera pas, non plus, la méthode d'allocation de coûts. Ainsi, cette méthode d'allocation doit satisfaire :

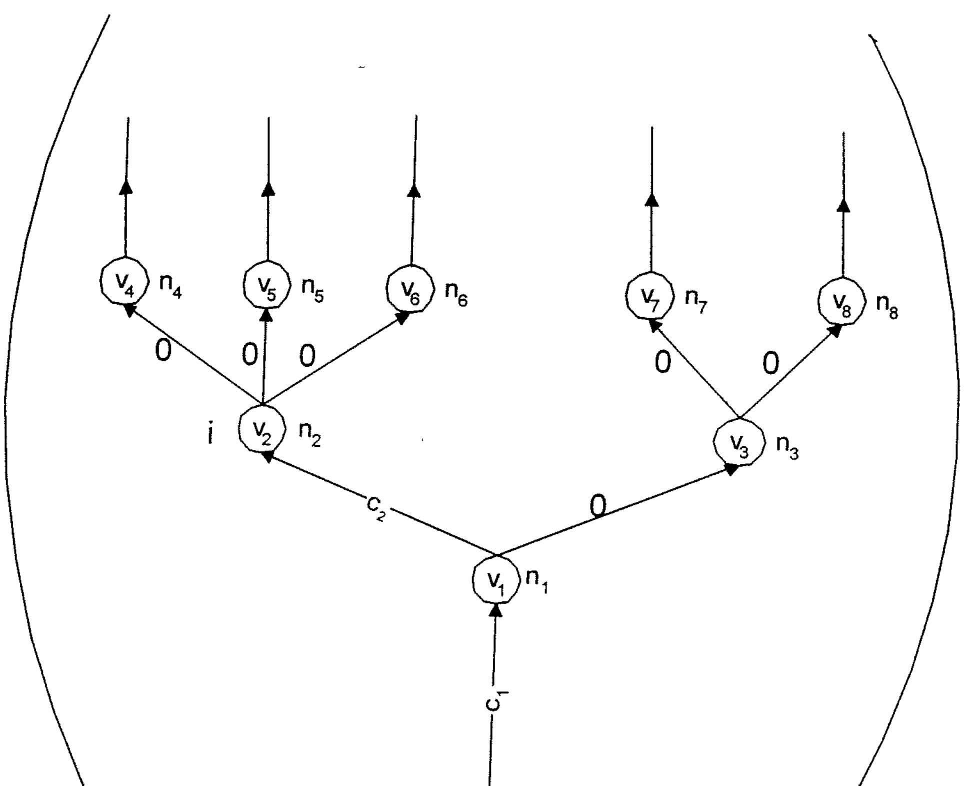
$$\rho_i(\mathrm{N}, V, L, c) = \rho_i(\mathrm{N}, V', L', c') \tag{31}$$

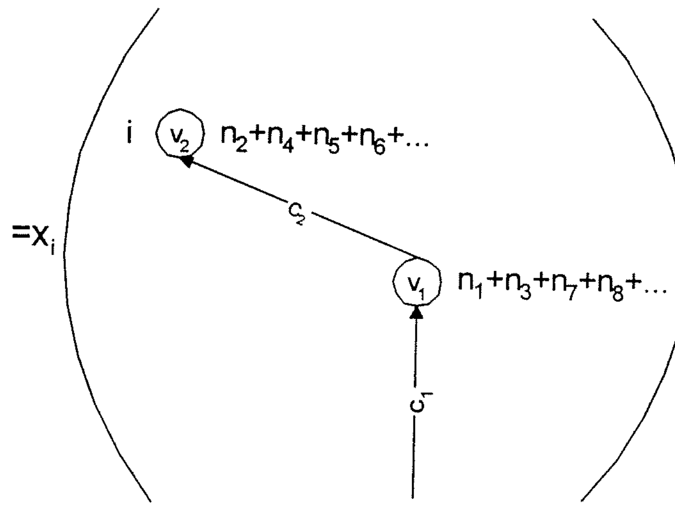
où V', L', c' et ≤ sont définis respectivement par les relations (25), (26), (27) et (22), à l'instar de la troisième propriété. Ce raisonnement est illustré graphiquement, ci-dessous, pour un joueur arbitraire i :

X_i


v4 n4
v5 n5
v6 n6
v7 n7
v8 n8
c4
c5
c5
c7
c8
i
v2 n2
v3 n3
c2
c3
v1 n1
c1

$=X_i$


v4 n4
v5 n5
v6 n6
v7 n7
v8 n8
0
0
0
0
0
i
v2 n2
v3 n3
c2
0
v1 n1
c1



D'où, à la lumière de ce qui précède, l'allocation de coûts doit nécessairement se faire dans cet ordre :

Les joueurs se trouvant initialement dans l'arbre (N, V, L), au premier nœud doivent payer un coût équivalent à ce qu'ils seraient chargés par cette méthode d'allocation dans l'arbre $(N, \{1\})$ - équation (31) - formé par l'ensemble des joueurs N localisés tous au niveau du premier nœud dont le coût c_1 doit être réparti, d'après la propriété de symétrie, équitablement entre tous les joueurs formant cet arbre. De plus, respectant l'équilibre budgétaire $\sum_{i \in \mathrm{N}} x_i = C(V)$, l coût chargé à chacun de ces joueurs est alors $\frac{c_1}{n}$. Ce coût représente la charge totale pour les joueurs se trouvant initialement au premier nœud, en égard à la première propriété qui implique que le coût chargé à ces derniers ne dépend pas des coûts partiels des autres nœuds. Passant au(x) nœud(s) suivant directement le premier, sachant que le coût que lui (leur) est chargé par cette méthode d'allocation dans l'arbre (N, V, L) est le même que dans l'arbre (N, V', L'), coïncidant avec le graphique ci-dessus. On sait, d'après la deuxième propriété, que tous les joueurs localisés au niveau de ce nœud sont chargés le même coût. Or comme ils payent tous déjà une proportion $\frac{c_1}{n}$ du coût du premier nœud, il doivent se partager également le coût additionnel de ce dernier nœud entre eux. Les joueurs se localisant initialement au niveau de ce nœud seront donc chargés leurs parts dans le paiement de ces deux nœuds, à savoir $\frac{c_1}{n}+\frac{c_2}{|F(2)|}$. En revanche, pour les autres agents le même processus continue. Ainsi, chaque joueur sera chargé un coût égal à la somme de ses parts dans le paiement relatif aux prédécesseurs du nœud au niveau duquel il se localise. Or cette méthode d'allocation de coûts n'est autre que la solution de partage égal du coût marginal décrite au deuxième chapitre. D'où le fait que cette méthode d'allocation de coûts soit l'unique à respecter simultanément les trois propriétés en question, et comme la valeur de Shapley les vérifie aussi, alors ces deux méthodes n'en forment qu'une seule en réalité. ■

Désormais, nous savons que la méthode de partage égal du coût marginal (ESIC) n'est autre que la valeur de Shapley, il importe maintenant d'étudier la généralisation de cette méthode et son apport en matière de stabilité.

Chapitre IV: GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE PARTAGE ÉGAL DU COÛT MARGINAL

A- Méthode d'allocation :

Une méthode d'allocation de coûts est dite "incrémentale" s'il existe un vecteur $\alpha_v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ correspondant à l'ensemble de joueurs de l'arbre (N, V, L), en fonction duquel les coûts additionnels de chaque lien sont répartis entre tous ses utilisateurs. Ces fractions peuvent être déterminées en fonction de la localisation des joueurs, de sorte que tous les joueurs localisés au niveau d'un même nœud v aient la même proportion α_v et tel que

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = \sum_{v \in V} n_v \alpha_v = 1 \tag{32}$$

La part de chaque joueur dans le paiement du coût partiel d'un lien qu'il utilise est proportionnelle à la fraction α_v associée au nœud v au niveau duquel il se localise. Pour tout nœud w prédécesseur de v, cette part est égale, pour tous les joueurs localisés au niveau de ce dernier, à $\frac{\alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w$.

Le coût payé par tous les joueurs localisés au niveau d'un même nœud v est, alors, le même. Il est égal à la somme de leurs parts dans le financement des coûts partiels associés à tous les prédécesseurs de ce nœud. Il s'en suite que la méthode "imcrémentale" se définit par la relation suivante :

$$\forall v \in V, x_v = \sum_{w \in P(v)} \frac{\alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w \tag{33}$$

Cas particulier :

Comme nous l'avons signalé plus haut cette méthode d'allocation représente toutes les allocations incrémentales. Aussi, pour des pondérations égales pour tous les joueurs de l'arbre, nous retrouvons l'allocation à partage égal du coût marginal, pour $\alpha_v = \frac{1}{n}, \forall v \in V$.

Preuve:

Pour $\alpha_v = \frac{1}{n}, \forall v \in V$, on a :

$$x_v = \sum_{w \in P(v)} \frac{\frac{1}{n}}{\sum_{k \in F(w)} n_k \frac{1}{n}} c_w$$

$$= \sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{\sum_{k \in F(w)} n_k},$$

qui n'est autre que l'allocation à partage égal du coût marginal ou "ESIC". ■

Or, on a vu dans la proposition 1 que la méthode "ESIC" sélectionne une allocation du noyau. Aussi, notre but est de montrer, dans la prochaine section, que toute allocation "incrémentale "sélectionne une méthode stable.[11]

Avant cela vérifions qu'elle assure l'équilibre budgétaire, couvrant ainsi le coût total associé à l'arbre (N, V, L).

Preuve:

Pour satisfaire l'équilibre budgétaire il suffit que cette méthode d'allocation, vérifie $\rho(\mathrm{N}, V, L, c,) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$, vérifie $\sum_{i \in N} x_i = C(N)$.

$$\text{Or on a } \sum_{i \in N} x_i = \sum_{v \in V} n_v x_v$$

$$= \sum_{v \in V} \sum_{w \prec v} \frac{n_v \alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w$$

$$= \sum_{w \in V} \frac{\sum_{v \in F(w)} n_v \alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w$$

$$= \sum_{w \in V} c_w$$

$$= C(V)$$

$$= C(\mathrm{N}).$$

Nous concluons alors, que cette méthode de partage de coûts est budgétairement équilibrée. ■

[11] Cette méthode peut, en effet, traiter les agent différemment en attribuant aux utilisateurs d'un même lien des parts différentes pour son financement. Toutefois, on tient à garder la stabilité au sens du noyau.

B- Étude de la stabilité :

Dans cette section on s'intéresse à prouver qu'une méthode d'allocation est stable si et seulement si elle est incrémentale. Pour cela nous montrons d'une part que toute méthode incrémentale sélectionne une allocation du noyau, et d'autre part, que toute méthode d'allocation de coûts stable peut prendre une forme incrémentale.

La première partie de cette preuve est directement obtenue en utilisant la propriété du "Stand-alone-cost-test". De fait pour prouver que cette allocation est dans le noyau, il suffit de montrer que

$$\sum_{i \in S} x_i \leq C(S)$$

Soit ϑ l'ensemble de noeuds formant la coalition S, on a alors

$$\sum_{i \in S} x_i = \sum_{v \in \overline{\vartheta}} n_v x_v$$

$$= \sum_{v \in \overline{\vartheta}} n_v \sum_{w \in P(v)} \frac{\alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w$$

$$= \sum_{v \in \overline{\vartheta}} \sum_{w \in P(v)} \frac{n_v \alpha_v}{\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} c_w$$

$$= \sum_{w \in \overline{\vartheta}} \frac{\sum_{v \in \vartheta / v \succsim w} n_v \alpha_v}{\sum_{k \in V; k \succsim w} n_k \alpha_k} c_w$$

$$Or,\ \sum_{v\in\vartheta;v\succ w}n_v\alpha_v\leq\sum_{k\in V;k\succ w}n_k\alpha_k.\ D'où\ \sum_{w\in\vartheta}\frac{\sum_{v\in\vartheta;v\succ w}n_v\alpha_v}{\sum_{k\in V;k\succ w}n_k\alpha_k}c_w\leq\sum_{w\in\vartheta}c_w=C(\vartheta)=C(S)$$

En conséquence nous avons :

$$\sum_{i\in S}x_i\leq C(S),\forall S\subseteq N.\ \blacksquare$$

La méthode d'allocation est, donc, stable, et la proposition suivante vraie :

Proposition 3 :

Toute méthode incrémentale sélectionne une allocation du noyau.

Pour la deuxième partie de notre preuve, il s'agit de montrer que toute méthode d'allocation stable, vérifiant l'axiome d'indépendance, est incrémentale. Elle peut, par conséquent, s'écrire sous la forme générale $x_v=\sum_{w\in V/w\prec v}\frac{\alpha_v}{\sum_{k\in V/k\succ w}n_k\alpha_k}c_w$ avec $\sum_{v\in V}n_v\alpha_v=1$, sous la condition que $0\leq\alpha_v\leq 1,\forall v\in V$. Ce qui nous permettrait la d'énoncer la proposition suivante:

Proposition 4 :

Toute allocation stable est une méthode incrémentale.

Dans ce but, on montrera dans une première étape que les α_v sont déterminés récursivement et de façon unique avant de passer à la condition de stabilité. Cette preuve est évidente dans le cas d'un arbre composé d'un ensemble de nœuds alignés. Aussi, nous commençons par ce cas qui nous sera utile pour la suite de la démonstration :

$$x_1 = \frac{\alpha_1}{\sum_{k \in V} n_k \alpha_k} c_1 = \alpha_1 c_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{x_1}{c_1}$$

$$x_2 = \alpha_2 c_1 + \frac{\alpha_2}{\sum_{k \in F(2)} n_k \alpha_k} c_2 = \alpha_2 c_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} c_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{x_2(1-\alpha_1)}{c_1(1-\alpha_1)+c_2}$$

$$x_3 = \alpha_3 \left(c_1 + \frac{c_2}{1-\alpha_1} + \frac{c_3}{1-\alpha_1-\alpha_2} \right) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{x_2(1-\alpha_1-\alpha_2)}{c_1(1-\alpha_1)(1-\alpha_1-\alpha_2)+c_2(1-\alpha_1-\alpha_2)+c_3}$$

$$\text{et } x_v = \alpha_v \sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{1-\sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k} \Rightarrow \alpha_v = \frac{x_v}{\sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{1-\sum_{k \in P(w)} n_k \alpha_k}}, \forall v \in V.$$

Utilisant un raisonnement par induction, la preuve n'est pas plus compliquée pour le cas général de l'arbre (N, V, L). En effet, pour le premier nœud rien ne change et on a bien une valeur unique pour $\alpha_1 = \frac{x_1}{c_1}$.

À présent, supposons que pour tous les nœuds w de niveau $(t-1)$ - ayant $(t-2)$ prédécesseurs - les α_w sont définis de manière récursive et unique. Et montrons que dans ce cas, les α_v, de niveau (t) le sont aussi.

À cet effet, rappelons qu'en égard à la propriété d'indépendance, l'allocation de coûts appliquée à l'arbre (N, V, L) avec la relation d'ordre partiel $\underset{\sim}{\prec}$, est la même que celle appliquée à l'arbre (N, V', L'), où

$$V' = \left\{ w \in V \text{ tels que } w \underset{\sim}{\prec} v \right\} \tag{34}$$

$$L' : V' \to \mathrm{N}$$
$$w \mapsto N'_w = N_w \cup \bigcup_{k \notin \{v\};\, k \succeq w} (N_k) \tag{35}$$

$$\preceq : \textit{l'ordre de précession définit sur } (\mathrm{N}, V', L'). \tag{36}$$

Or, dans ce cas, le problème se ramène pour tout nœud v de niveau t au problème linéaire (étudié au début de la preuve). Notre hypothèse d'induction devient par conséquent :

$\forall w \in P(v)$, α_w *est déterminée récursivement et de façon unique.*

En raison de tout ce qui précède on a :

$$x_v = \alpha_v \sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{1 - \sum_{k \in F(w)} n_k \alpha_k}. \tag{37}$$

De ce fait,

$$\alpha_v = \frac{x_v}{\sum_{w \in P(v)} \frac{c_w}{1 - \sum_{k \in P(w)} n_k \alpha_k}}, \forall v \in V \tag{38}$$

est récursivement déterminée et est unique.

Désormais nous savons que les α_v sont déterminées de façon récursive et unique; il importe maintenant de prouver que la condition de stabilité de toute allocation prenant la forme générale de l'équation (32) est que les α_v soient positifs et inférieurs à l'unité.

Or, vu que $\sum_{v \in V} n_v \alpha_v = 1$, prouver que $0 \le \alpha_v \le 1, \forall\, v \in V$ revient à montrer que

$$\alpha_v \geq 0\, et\, que \sum_{kP(v)} n_k \alpha_k \leq 1, \forall\, v \in V. \tag{39}$$

Il est évident que ces conditions tiennent pour les premiers nœuds puisque

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{c_1} \geq 0. \tag{40}$$

D'autre part, pour que l'allocation soit dans le noyau il faudrait avoir

$$n_1 x_1 \leq C(\{1\})$$

ce qui signifie que

$$n_1 \alpha_1 c_1 \leq c_1,$$

d'où l'on a :

$$n_1 \alpha_1 \leq 1 \tag{41}$$

$$Et\, puisque\;\; n_1 \geq 1,\; alors\;\; \alpha_1 \leq 1 \tag{42}$$

Pour le reste de la preuve, nous utiliserons le même raisonnement que celui que nous avons établi pour montrer l'unicité des α_v. De fait, nous supposerons que la relation (38) est satisfaite pour tous les nœuds w de niveau (t-1) et montrerons que cette hypothèse tient alors pour tout nœud de niveau t.

Suivant le même raisonnement, l'hypothèse d'induction appliquée sur le nouvel arbre (N, V', L'), où la relation d'ordre est $\leq$, obtenue après application de l'axiome d'indépendance, implique qu'on a

$$\alpha_w \geq 0 \, et \sum_{k \prec w} n'_k \, \alpha_k \leq 1 \, pour \, tout \, nœud \, w \leq v. \tag{43}$$

D'où pour montrer la relation (39), il suffit de prouver que l'hypothèse (43) est vraie. Toutefois, comme on vient de le voir

$$\alpha_v = \frac{x_v}{\displaystyle\sum_{w \in V / w \leq v} \frac{c_w}{1 - \displaystyle\sum_{k \in V / k \leq w} n_k \alpha_k}}$$

Ainsi, on peut affirmer - compte tenu de la proposition (42) - que

$$\alpha_v \geq 0, \forall v \in V. \tag{44}$$

D'ores et déjà nous savons que $\alpha_v \geq 0, \forall v \in V$; montrer que $\alpha_v \leq 1, \forall v \in V$ parait évident. Effectivement, on sait que $\sum_{v \in V} n_v \alpha_v = 1$; $\alpha_v \geq 0$ et $n_v \geq 1$ pour tout nœud v appartenant à V. Par conséquent,

$$\alpha_v \leq 1, \forall v \in V \tag{45}$$

En somme, toute allocation stable vérifiant l'axiome d'indépendance peut s'écrire sous la forme générale $x_v = \displaystyle\sum_{w \in V / w \preceq v} \frac{\alpha_v}{\displaystyle\sum_{k \in V / k \succeq w} n_k \alpha_k} c_w$ avec $\sum_{v \in V} n_v \alpha_v = 1$ et tels que $0 \leq \alpha_v \leq 1, \forall \, v \in V$, d'où la preuve de la quatrième proposition. ■

Les troisième et quatrième propositions nous permettent alors de conclure avec ce théorème :

Théorème 1 :

Une méthode d'allocation est stable si et seulement si elle est incrémentale.

DEUXIÈME PARTIE

La présente partie a pour objet d'étudier une allocation de coûts duale à la valeur de Shapley, à savoir l'allocation "du foyer à la source" et d'analyser son importance en termes de stabilité. Pour cela, on commence par un cas particulier de cette allocation, dont on prouvera l'équivalence avec l'allocation égalitaire de Dutta et Ray.

Chapitre I : LA MÉTHODE D'ALLOCATION *"DU FOYER À LA SOURCE À TAUX DE CONTRIBUTION IDENTIQUES"*

A - Présentation de la méthode d'allocation :

Cette méthode est duale à la valeur de Shapley. Cependant, à l'encontre des méthodes présentées dans la première partie, elle part des foyers vers la source, ou, en d'autres termes, des extrémités vers l'origine.

Pour plus de simplicité, on pose qu'il y a un seul agent dans chaque nœud, ce qui nous permet d'identifier les agents par leurs liens : $e(i)$ est le lien (ou segment) qui lie l'agent i à son prédécesseur direct. L'allocation de coûts se fait en un nombre déterminé d'étapes sur la base d'un vecteur de taux de contribution, y, affectés à tous les agents appartenant à l'arbre. Nous présentons cette méthode d'allocation de coûts à l'aide de l'algorithme suivant :

Algorithme 3 :

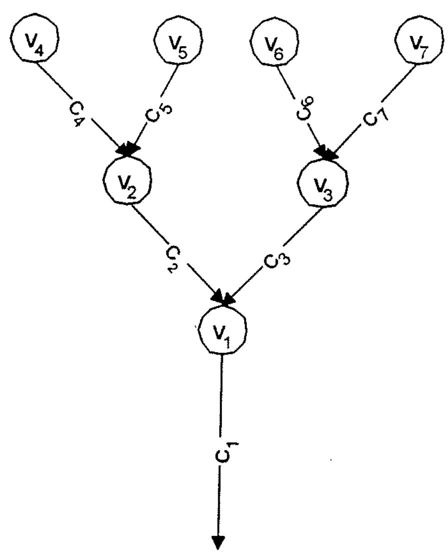
À chaque étape, chaque agent contribue au financement du coût d'un lien donné, se trouvant sur le chemin qui mène de son nœud vers la source, en commençant par les liens les plus proches du nœud au niveau duquel il se localise. Le processus continu jusqu'à ce que tous les segments de l'arbre soient payés.

Chaque agent est muni d'un taux de contribution y_i qui détermine le montant qu'il paie par unité de temps. Ainsi, la partie du coût d'un lien payée par unité de temps est, tout simplement, la somme des taux de contribution des agents qui y contribuent. Or, comme son nom l'indique, cette méthode suppose que tous les agents sont munis du même taux de contribution $y_i = \bar{y}$. Le taux de contribution d'une coalition S est alors égal à $y_S = \sum_{i \in S} y_i = s\bar{y}$ et $y_N = \sum_{i \in N} y_i = n\bar{y} = 1$, où s et n représentent respectivement le cardinal des coalitions S et N. L'allocation de coûts attribue alors à chaque agent le coût qu'il a payé durant ce processus.

Pour introduire cette méthode, on l'appliquera à un petit exemple avant de nous lancer dans la définition de l'algorithme général.

<u>Exemple 2</u> :

On pose $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $c = \{7;8;3;9;2;2;6\}$ et $\bar{y} = \frac{1}{7}$.



En première étape, chaque joueur commence à contribuer à payer son propre segment. Les joueurs finissant en premier le financement de leurs propres segments forment l'ensemble $S_1 = \{5,6\}$. Durant ce temps $t_1 = \frac{2}{1/7} = 14$, le coût payé par chaque joueur est $\bar{c}_1 = 2$. Ensuite, c'est l'agent 3 qui termine de payer le coût associé à son segment avec l'aide du joueur 6 à un taux de contribution total égal à $y_3^T(t_2) = 2 \times 1 = 2$, où $t_2 = 14 + \frac{1}{7/2} = 17{,}5$ et l'on a $S_2 = \{3\}$. Le coût financé par agent durant le temps additionnel $t_2 - t_1$ est $\bar{c}_2 = \frac{1}{2} = 0{,}5$. En troisième étape, c'est l'agent se trouvant au premier nœud qui fini de payer le coût de son segment avec la contribution des agents 6 et 3 au taux $y_1^T(t_3) = 3 \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$, avec $t_3 = 17{,}5 + \frac{4{,}5}{3/7} = 28$ et $\bar{c}_3 = \frac{4{,}5}{3} = 1{,}5$. En bref, les étapes suivantes sont :

Étape 4 :

$$S_4 = \{2\};\ y_2^T(t_4) = \frac{2}{7};\ t_4 = 28 + \frac{2}{2/7} = 35 \text{ et } \bar{c}_4 = \frac{2}{2} = 1.$$

On note que le joueur 5 a aussi contribué au financement de ce lien à partir de la deuxième étape (juste après avoir terminé son segment).

Étape 5 :

$$S_5 = \{7\};\ y_7^T = \bar{y} = \frac{1}{7};\ t_5 = 35 + \frac{1}{1/7} = 42 \text{ et } \bar{c}_5 = 1.$$

Étape 6 :

$$S_6 = \{4\};\ y_4^T = \bar{y} = \frac{1}{7};\ t_6 = 42 + \frac{3}{1/7} = 63 \text{ et } \bar{c}_6 = 3.$$

Tenant compte de ce qui précède, on réarrange ces joueurs selon leur agencement terminal : les joueurs qui finissent en premier sont ceux dont le coût des liens les reliant à la source est complètement payé, et arrêtent alors de contribuer. Ainsi on a :

$S_1^f = \{1,3,6\}$ avec $t_1^f = t_3 = 28$; $S_2^f = \{2,5\}$ avec $t_2^f = t_4 = 35$; $S_3^f = \{7\}$ avec $t_3^f = t_5 = 42$ et $S_4^f = \{9\}$ avec $t_4^f = t_6 = 63$.

Dans cet ordre d'idées l'allocation de coûts attribue à chaque joueur le coût qu'il a payé avant de terminer sa contribution :

$$x_i^f = x_1\left(\frac{1}{7}\right) = x_3\left(\frac{1}{7}\right) = x_6\left(\frac{1}{7}\right) = 4;$$

$$x_2^f = x_2\left(\frac{1}{7}\right) = x_5\left(\frac{1}{7}\right) = 4 + 1 = 5;$$

$$x_3^f = x_7\left(\frac{1}{7}\right) = 4 + 1 + 1 = 6 \text{ et}$$

$$x_4^f = x_9\left(\frac{1}{7}\right) = 6 + 3 = 9.$$

On note en passant que $\sum_{i \in N} x_i = C(N) = 37$, d'où le fait que cette allocation respecte l'équilibre budgétaire.

L'algorithme décrivant l'allocation de coûts *du foyer à la source à taux de contribution identiques,* $\bar{y} = \frac{1}{n}$, pour tous les joueurs appartenant à N, se résume dans les étapes qui suivent :

Étape 1 :

Durant cette première étape on détermine le temps minimal, t_1, nécessaire pour que le(s) premier(s) joueur(s) termine(nt) le paiement de leurs segments.

$$\text{On a } t_1 = \min\left(\frac{c_i}{\overline{y}}\right), \forall i \in N \tag{46}$$

Les joueurs dont le coût est tel que $\frac{c_i}{\overline{y}} = t_1$, sont les premiers à terminer leurs segments. Ils contribueront alors dans la deuxième étape au paiement de coûts des segments non achevés de leurs prédécesseurs respectifs les plus proches.

Soit S_1 l'ensemble des joueurs qui finissent de payer leurs propres segments durant cette première étape et $\overline{c}_1$ le coût de chacun de ces segments, représentant en fait les liens à coût minimal. On a :

$$S_1 = \left\{ i \in N / \frac{c_i}{\overline{y}} = t_1 \right\} \tag{47}$$

$$\text{et } \overline{c}_1 = t_1 \overline{y} \tag{48}$$

<u>Étape 2</u> :

En deuxième étape, on détermine le temps minimal, t_2, durant lequel le deuxième ensemble de joueurs - S_2 - termine le paiement de coûts de ses segments. On note, à ce propos, que certains de ces joueurs ont bénéficié de la contribution de leurs suiveurs (selon l'ordre indiqué au début de ce travail) appartenant à l'ensemble S_1 et le taux de contribution pour les segments en question est alors $y_i^T(t_2)$, différent de $\overline{y}$.

Soit A_2^i l'ensemble des suiveurs de i qui l'ont aidé à payer son propre segment durant la deuxième période :

$$A_2^i = \left\{ j \in S_1 \cap F(i) \text{ tels que } \forall k : i \prec k \prec j, \text{ on a } k \in S_1 \right\} \tag{49}$$

Le taux de contribution total à un lien donné au cours de cette étape est, de ce fait,

$$y_i^T(t_2) = \bar{y} + y_{A_2^i}(t_2) = \left(1 + \left|A_2^i\right|\right)\bar{y} \tag{50}$$

Le temps minimal t_2 auquel ce(s) deuxième(s) segment(s) est(sont) complètement payé(s) est alors le suivant :

$$t_2 = t_1 + \min\left(\frac{c_i - \bar{c}_1}{y_i^T(t_2)}\right), \forall i \in N \setminus S_1 \tag{51}$$

Partant de ce fait, l'ensemble de joueurs finissant le paiement du coût de leurs segments au cours de cette étape est :

$$S_2 = \left\{ i \in N \setminus S_1 \; tels\, que \; \frac{c_i - \bar{c}_1}{y_i^T(t_2)} = t_2 - t_1 \right\} \tag{52}$$

Et le coût couvert par personne durant le temps additionnel $(t_2 - t_1)$ est le suivant :

$$\bar{c}_2 = \frac{(t_2 - t_1) y_i^T(t_2)}{1 + \left|A_2^i\right|}, \tag{53}$$

On continue, ainsi, le même processus : les étapes ainsi que les coalitions sont déterminées récursivement selon la rapidité de financement des différents segments de l'arbre. Supposant que les $\alpha - 1$ premières étapes sont déterminées, l'étape α sera alors la suivante :

Étape α :

Par récursivité cette étape est caractérisée par :

Le temps minimum t_α durant lequel les agents appartenant à $S_\alpha \subseteq N \setminus S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_{\alpha-1}$ finissent le paiement du coût de leurs segments est :

$$t_\alpha = t_{\alpha-1} + \min\left(\frac{c_i - \bar{c}_1 - \bar{c}_2 - \cdots - \bar{c}_{\alpha-1}}{y_i^T(t_\alpha)}\right), \forall i \in N \setminus S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_{\alpha-1} \tag{54}$$

Et où :

$$S_\alpha = \left\{ i \in N \setminus S_1 \cup S_2 \cup \ldots S_{\alpha-1} \; tels\,que \; \frac{c_i - \sum_{\lambda=1}^{\alpha-1} \bar{c}_l}{y_i^T(t_\alpha)} = t_\alpha - t_{\alpha-1} \right\}; \tag{55}$$

$$A_\alpha^i = \left\{ j \in F(i) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \; tels\,que\, \forall k;\, i \prec k \prec j\, on\, a\, k \in \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \right\}; \tag{56}$$

$$y_i^T(t_\alpha) = \bar{y} + y_i^A(t_\alpha) = \left(1 + \left|A_\alpha^i\right|\right)\bar{y}; \tag{57}$$

Et le coût financé par joueur au cours de cette étape est :

$$\bar{c}_\alpha = \frac{t_\alpha - t_{\alpha-1}}{1 + \left|A_i^\alpha\right|} y_i^T(t_\alpha) \tag{58}$$

À la lumière des étapes déterminées par l'algorithme ci-dessus, on réarrange les agents en sous-groupes, selon leur agencement terminal. Cet agencement repose sur la rapidité des joueurs à terminer le paiement de tous les liens se trouvant sur leur chemin vers la source et non seulement à terminer leurs propres segments comme décrit dans l'algorithme 3.

Par conséquent, d'après cet agencement, un agent ne peut pas arrêter de contribuer tant que l'un de ses prédécesseurs n'a pas terminé de payer son segment. Le premier groupe S_1^f, à terminer sa part de paiement dans l'arbre contient nécessairement le premier nœud puisque tant que le segment relatif à ce nœud n'est pas totalement construit, aucun agent ne peut s'arrêter de payer. Partant de ce fait, si l'agent se trouvant initialement au premier nœud appartient, aux termes de l'algorithme 1, à une étape α, alors les membres du premier groupe constituent le sous ensemble :

$$S_1^f = \left\{ i \in S_\lambda \ ; \lambda \leq \alpha \ et\, tels\, que\, \forall j; 1 \prec j \prec i\, on\, a\, j \in S_\gamma, \gamma \leq \alpha \right\} \tag{59}$$

Chaque agent i appartenant à cet ensemble a donc payé :

$$x_i(\bar{y}) = x_1^f = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \ldots\ldots + \bar{c}_\alpha = \bar{y}t_\alpha \tag{60}$$

Définissons les terminaux d'une coalition S, $t(S)$, comme étant les joueurs appartenant à la coalition S et qui n'ont pas de suiveurs appartenant à cette coalition. En d'autres termes :

$$t(S) = \left\{ i \in S\, tels\, que\, F(i) \cap S = \phi \right\} \tag{61}$$

Les agents qui finiront juste après ce premier groupe et former le sous groupe S_2^f, seront alors ceux qui termineront en premier le chemin qui les mène vers l'un de ses terminaux. En conséquence, si le premier agent qui termine son segment - parmi les suiveurs directs des terminaux - appartient à une étape β alors, par analogie à la première étape, on a :

$$S_2^f = \left\{ i \in S_\lambda \ ; \lambda \leq \beta \ et\, tels\, que\, \forall j; l \prec j \prec i\, on\, a\, j \in S_\gamma, \gamma \leq \beta \right\} \tag{62}$$

et chaque membre i de cette coalition doit payer

$$x_i(\bar{y}) = x_2^f = \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \ldots\ldots + \bar{c}_\alpha + \ldots\ldots\ldots + \bar{c}_\beta = \bar{y}t_\beta \qquad (63)$$

De manière récursive, le groupe S_3^f est celui qui termine juste après le deuxième groupe sur l'ensemble résiduel $N \setminus S_1^f \cup S_2^f$. On continue ainsi à déterminer les coalitions selon l'agencement terminal jusqu'à ce que tous les liens de l'arbre soient payés.

La méthode d'allocation de coûts alloue à chaque joueur le coût qu'il a payé selon ce processus. Elle est caractérisée par les relations (60) et (63).

Il apparaît évident que cette méthode de partage de coût satisfait l'équilibre budgétaire, puisqu'elle est concise dès le départ de façon à couvrir exactement les coûts associés aux liens formant cet arbre. En outre, il importe de vérifier si cette allocation est dans le noyau.

B- Stabilité :

Nous savons déjà qu'une allocation est stable si aucune coalition possible ne peut améliorer sa situation, en déviant de l'ensemble du groupe. De fait, il suffit de montrer qu'aucune des coalitions déterminées selon notre algorithme n'a intérêt à dévier. Or, ceci est évident puisque toute coalition ainsi formée va nécessairement augmenter ses coûts en déviant de l'ensemble de la population. En effet, ne payant que les coûts du sous-arbre que forme ses membres, une coalition qui dévie doit payer tous les coûts partiels associés aux segments utiles à sa connexion à la source du réseau principal.

Maintenant qu'on a fini avec la méthode d'allocation de coûts *du foyer à la source à taux de contribution identiques*, il est intéressant d'étudier le lien qu'elle présente avec l'allocation égalitaire de Dutta et Ray.

<u>Chapitre II</u> : LA RELATION ENTRE L'ALLOCATION *DU FOYER À LA SOURCE À TAUX DE CONTRIBUTION IDENTIQUES* ET L'ALLOCATION ÉGALITAIRE DE "DUTTA ET RAY"

A - Présentation de la méthode d'allocation égalitaire :

Cette méthode d'allocation de coûts, comme son nom l'indique, consiste à allouer les coûts entre les agents le plus égalitairement possible tout en tenant compte de la contrainte de participation collective. En d'autres termes, partant de ce principe d'égalitarisme aucun agent ou ensemble d'agents ne peut améliorer sa situation en déviant de l'ensemble du groupe.

À cet égard, il est inévitable de passer par l'algorithme définit par Dutta et Ray pour les jeux convexes (ou concaves) avant de définir explicitement la méthode d'allocation égalitaire appliquée à notre arbre standard. On note à ce propos que pour les jeux convexes, Dutta et Ray (1989) montrent que l'allocation ainsi définie domine au sens de Lorenz toutes les allocations possibles appartenant au noyau.

<u>Algorithme 4</u> :

Partant de l'origine de l'arbre, l'objectif de cet algorithme est de déterminer de manière récursive les coalitions à coût marginal moyen le plus faible.

À cet effet, définissons S_h , la coalition S dont le membre h précède tous les autres éléments de cette coalition :

$$S_h = \left\{ i \in N \; tels \, que \; i \succsim h \right\} \tag{64}$$

et μ_h le coût marginal moyen associé à cette coalition, égal au rapport de son coût marginal ($CM(S_h)$) par son cardinal :

$$\mu_h = \mu(S_h) = \frac{CM(S_h)}{|S_h|} = \frac{\sum_{j \in S_h} c_j}{|S_h|}. \tag{65}$$

Notre algorithme est alors défini comme suit :

__Étape 1__ :

L'objet de cette étape est de déterminer la plus large coalition S_1 à laquelle appartient le joueur situé au premier nœud et dont le coût moyen est le plus faible. Cette coalition a les caractéristiques suivantes :

$$\mu_1 = \min \mu(S_1) \tag{66}$$

$$\forall S_1' \subseteq N \; telle \; que \; \mu(S_1') = \mu_1, on \; a \; |S_1'| \leq |S_1| \tag{67}$$

__Étape 2__ :

Cette étape consiste à déterminer, pour chaque joueur l suivant directement un terminal de la coalition S_1, la coalition la plus large S_l, à coût moyen le plus faible sur l'ensemble résiduel N\\S_1. Autrement dit :

$$\forall (l-1) \in t(S_1), on \; definit \; \mu_l = \min \mu(S_l) \tag{68}$$

$$\text{et } \forall S_l^{'} \subseteq N \setminus S_1 \text{ vérifiant } \mu(S_l') = \mu_l \; on\, a \left|S_l'\right| \leq \left|S_l\right|. \qquad (69)$$

<u>Étape</u> α :

Le but de cette étape est de déterminer pour chaque joueur j suivant directement un terminal d'une coalition $S_{\alpha-1}$, déterminée récursivement à l'étape $(\alpha - 1)$, la plus large coalition à plus faible moyenne S_α. Par conséquent, on a :

$$\forall (j-1) \in t(S_{\alpha-1}), on\, definit \;\; \mu_j = \min \mu(S_j) \qquad (70)$$

$$et\; \forall S_j^{'} \subseteq N \setminus S_1 \cup S_2 .... \cup S_{\alpha-1} \; vérifiant \; \mu(S_j') = \mu_i \;, on\, a \; \left|S_j'\right| \leq \left|S_j\right|. \qquad (71)$$

Soit η le nombre des étapes dans cet algorithme (il est évident que le nombre des étapes η est inférieur au nombre des agents n). Arrangeons ces coalitions en ordre croissant de leurs moyennes de façon à avoir :

$$\mu(S_1) \leq \mu(S_2) \leq .... \leq \mu(S_m) \qquad (72)$$

En considération à ce qui précède, l'allocation égalitaire - telle que décrite par Dutta et Ray (1989) - attribue à chaque agent le coût marginal moyen de la coalition à laquelle il appartient selon l'algorithme décrit ci-dessus. Soit $\rho = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_\eta)$ cette allocation, on a alors :

$$\forall i \in S_1,\; \overline{x}_i = \mu_1 \qquad (73)$$

$$\text{et } \forall i \in S_j,\; \overline{x}_i = \mu_j. \qquad (74)$$

Afin de rendre la compréhension de cette méthode plus accessible, on l'applique à l'exemple 2 du premier chapitre avec $N=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $c=\{7;8;3;9;2;2;6\}$. Dans ce cas on peut vérifier que, partant du premier nœud, la plus large coalition à plus faible coût moyen est $S_1=\{1,3,6\}$ avec $\mu(S_1)=\mu_1=4$ et $t(S_1)=\{1,3,6\}$. Comme le joueur "6" est un terminal pour tout l'arbre, il nous reste à déterminer les plus larges coalitions au coût moyen le plus faible qui partent des suiveurs directs de "1" et "3" à savoir : "2" et "7".

Partant du joueur "7", la seule possibilité est $S_7=\{7\}$ avec $\mu(S_7)=\mu_7=6$. Par ailleurs, partant du nœud "2", on obtient : $S_2=\{2,5\}$ avec $\mu(S_2)=\mu_2=5$ et $t(S_2)=\{2,5\}$. "5" étant un terminal pour tout l'arbre, il ne reste plus que $S_4=\{4\}$ avec $\mu(S_4)=\mu_4=9$.

D'où, arrangeant ces coalitions en ordre croissant de leurs coûts moyens, on obtient : $\overline{S}_1=S_1$ avec $\overline{\mu}_1=4$; $\overline{S}_2=S_2$ avec $\overline{\mu}_2=5$; $\overline{S}_3=S_7$ avec $\overline{\mu}_3=6$ et $\overline{S}_4=S_4$ avec $\overline{\mu}_4=9$. Aussi, l'allocation de coûts relative à cet exemple est la suivante :

$x_1=x_3=x_6=\overline{\mu}_1=4$; $x_2=x_5=\overline{\mu}_2=5$; $x_7=\overline{\mu}_3=6$ et $x_4=\overline{\mu}_4=9$.

On constate alors que cette allocation donne les mêmes solutions que *l'allocation du foyer à la source à taux de contribution égaux*. Aussi, nous nous intéressons dans ce qui suit à étudier la relation entre ces deux méthodes d'allocation de coûts dans le cas général.

B- La relation entre l'allocation *du foyer à la source à taux de contribution identiques* et l'allocation égalitaire :

Comme nous l'avons constaté au chapitre précédant , à l'aide d'un exemple, ces deux méthodes d'allocation de coûts sont équivalentes. Aussi, nous nous intéressons dans ce chapitre à montrer que ce résultat est valide dans le cas général de notre arbre standard.

À cet effet, attardons-nous tout d'abord à présenter les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : La symétrie

Tous les joueurs appartenant à la même coalition payent le même coût :

$$\forall S_\alpha \subset N, \forall i, j \in S_\alpha ;\ x_i = x_j .$$

Propriété 2 : L'ordre

Un joueur appartenant à une coalition d'un certain ordre ne peut pas payer un coût inférieur à celui que paie un joueur appartenant à une coalition d'ordre inférieur :

$$\forall S_\alpha, S_\beta \subset N, \forall i \in S_\alpha \text{ et } \forall j \in S_\beta \text{ tels que } \alpha \leq \beta \Leftrightarrow x_i \leq x_j .$$

Il est évident qu'aussi bien l'allocation égalitaire définie lors du deuxième algorithme que la méthode d'allocation *du foyer à la source à taux de contribution identiques* déterminée lors du premier algorithme vérifient ces deux propriétés.

Aussi, nous montrons dans ce qui suit la proposition suivante:

Proposition 5 :

L'allocation de coûts du foyer à la source à taux de contributions identiques est l'allocation égalitaire de Dutta et Ray.

Preuve :

Nous avons déjà vu, d'après les deux allocations, que les membres d'une même coalition paient le même coût qui représente le coût marginal moyen de cette coalition. D'où pour montrer que ces deux méthodes sont équivalentes, il suffit de montrer que l'agencement des coalitions suivant l'un ou l'autre des algorithmes est le même.

Pour atteindre ce résultat, nous prouvons, en premier lieu, que la première coalition est la même pour les deux méthodes d'allocation. Nous savons déjà que l'agent localisé au premier nœud appartient à la première coalition qu'elle soit déterminée par le premier ou le deuxième algorithme. Aussi, pour montrer que la coalition est la même , nous procéderons en deux étapes : En première étape nous prouverons que la coalition S_1, déterminée par le deuxième algorithme, est incluse dans la coalition S_1^f déterminée par le premier algorithme. Ensuite, en deuxième étape nous prouverons l'inverse, à savoir : que S_1^f est incluse dans S_1.

a- $\underline{S_1 \subseteq S_1^f}$:

À cette fin, on doit prouver que tout agent j appartenant à l'ensemble S_1, doit nécessairement appartenir à l'ensemble S_1^f. Or un joueur j appartient à la coalition S_1, implique qu'inclure cet agent à cette coalition n'augmentera pas son coût. Il en ressort que le coût unitaire de l'agent j ,c_j, est inférieur ou égal à la moyenne du coût marginal de cette coalition, déjà formée. Par conséquent, d'après le premier algorithme, ce joueur doit appartenir à la coalition S_1^f puisqu'il terminera nécessairement de payer son segment avant le reste de l'ensemble et les aidera donc à payer les coûts de leur sous-arbre.

b-$\underline{S_1^f \subseteq S_1}$:

D'un autre côté, j appartient à la coalition S_1^f implique que le joueur j ainsi que tous ses prédécesseurs (excepté le premier agent) ont fini de payer leurs segments au plus tard en même temps que le premier agent et les autres membres de la coalition S_1^f.[1] Or, vu qu'à chaque étape du premier algorithme le coût payé par agent est le même pour tous les membres, alors le joueur j et ses prédécesseurs ont un coût marginal moyen plus faible (ou égal) comparé à celui du reste des membres de la coalition. Par conséquent, les inclure dans cette coalition va baisser son coût marginal moyen, sinon le laisser constant et il appert donc qu'ils doivent appartenir à cette coalition d'après le deuxième algorithme.

Ainsi donc, nous avons montré que tout élément de S_1^f appartient à S_1 et, réciproquement, tout élément de S_1 est membre de S_1^f. D'où l'équivalence de ces deux coalitions.

En fait, en montrant que la coalition S_1^f est équivalente à S_1 on a prouvé que partant d'un agent localisé au niveau d'un nœud commençant un sous-arbre la coalition à plus large moyenne, déterminée par l'algorithme 3, est exactement la même que celle qui termine en premier par rapport au reste de l'arbre aux termes de l'algorithme 4. Or du fait que S_1^f est identique à S_1, les terminaux des deux coalitions sont les mêmes. Il en résulte que toute coalition partant de l'un des suiveurs direct de ces points terminaux va être déterminée de la même façon que ce soit selon le premier ou le deuxième algorithme. Enfin, grâce aux propriétés de symétrie et d'ordre que respectent les allocation correspondantes à ces algorithmes, nous pouvons affirmer que les agencements de ces coalitions et ce que paient leurs membres est aussi identique selon les deux algorithmes. D'où l'on a l'équivalence de ces deux méthodes d'allocation de coûts. ■

L'équivalence entre la méthode d'allocation égalitaire et l'allocation *du foyer à la source à taux de contribution identiques* étant prouvée, passons

---

[1] Par "les autres membres de la coalition S_1^f" on vise les membres de cette coalition qui ne précèdent pas l'agent j en question.

maintenant à l'étude de la généralisation de l'allocation *du foyer à la source*, introduisant la possibilité de taux de contributions différents pour les agents appartenant à ce réseau.

Chapitre IV : L'ALLOCATION *DU FOYER À LA SOURCE GÉNÉRALISÉE*

A- Méthode d'allocation :

Le principe d'allocation de coûts est le même que la méthode qu'on vient d'étudier pour le cas particulier, sauf qu'on pose la possibilité d'avoir des taux de contribution différents pour les différents joueurs. Ainsi chaque agent contribue aux segments qui le mènent à la source, en commençant par son propre segment.

Comme pour le cas particulier, nous pouvons définir cette allocation de coûts du foyer à la source par un algorithme, que l'on introduira tout d'abord en reprenant l'exemple avec $N = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ et $c = (7;8;3;9;2;2;6)$, pour un vecteur de taux de contribution $y = (0.1;0.3;0.05;0.2;0.05;0.1;0.3)$:

Étape 1 :

En un temps $t_1 = 20$ (unités de temps), les joueurs formant l'ensemble $S_1 = \{6,7\}$ terminent de payer leurs segments. Ils aideront le joueur "3" à payer son segment à l'étape suivante. Pendant ce temps les autres joueurs ont contribué, chacun, d'une partie $c_i^1 = 20 \times y_i$ de leurs segments respectifs.

Étape 2 :

À un taux de contribution total $y_3^T(t_2) = 0.45$ (0.1+0.3+0.05), le joueur "3" fini de payer son segment au temps $t_2 = 20 + \dfrac{3-(0.05\times 20)}{0.45} = 24\frac{4}{9}$. On a alors $S_2 = \{3\}$. Ce joueur ainsi que "6" et "7" contribueront, au cours de la prochaine étape au coût du premier segment.

Les autres joueurs, quand à eux, ont contribué chacun d'une partie $c_i^2 = 4\frac{4}{9}\, y_i$ de leurs segments respectifs, pendant le temps additionnel $t_2 - t_1$.

Étape 3 :

À $t_3 = \dfrac{8}{0.3} = 26\frac{2}{3}$, le joueur "2" termine de payer son segment, formant ainsi l'ensemble $S_3 = \{2\}$. Il doit, désormais, aider le joueur "1" à payer son lien avec la contribution des joueurs "3", "6" et "7".

Étape 4 :

Avec un taux de contribution total $y_1^T(t_4) = 0.85$ (=0.1+0.05+0.3+0.3+0.1), le premier segment est complètement payé à et on $S_3 = \{1\}$, à

$$t_4 = 26^{2/3} + \frac{7-\left(0.1\times 24^{4/9} + 0.55\times 2^{2/9}\right)}{0.85} = 30^{10/17}.$$

Étape 5 :

À $t_5 = \dfrac{2}{0.05} = 40$, le joueur "5" termine de payer le coût relatif à son lien et l'on a $S_5 = \{5\}$.

Étape 6 :

Enfin, durant cette étape, à $t_6 = 90$, le joueur "4" termine de financer le dernier segment de l'arbre.

Ainsi, D'après cet algorithme, l'agencement terminal des joueurs est le suivant :

Pour un temps final $t_1^f = 30^{10/17}$ on a $S_1^f(y) = \{1,2,3,6,7\}$; $S_2^f(y) = \{5\}$ avec $t_2^f = 40$ et $S_3^f(y) = \{4\}$ avec $t_3^f = 45$.

Il en résulte la répartition de coûts suivante :

$x_1(y) = 0.1 \times 30^{10/17} = 3^{1/17}$;

$x_2(y) = 0.3 \times 30^{10/17} = 9^{3/17}$;

$x_3(y) = 0.05 \times 30^{10/17} = 1^{9/17}$;

$x_4(y) = 0.1 \times 90 = 9$;

$x_5(y) = 0.05 \times 40 = 2$;

$x_6(y) = 0.1 \times 30^{10/17} = 3^{1/17}$ et

$x_7(y) = 0.3 \times 30^{10/17} = 9^{3/17}$.

Et on a $\sum_{i \in N} x_i(y) = C(N) = 37$, d'où le fait que cette allocation respecte l'équilibre budgétaire.

Pour le cas général l'allocation se fait, pour un vecteur de taux de contribution $y = (y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots\ldots y_n)$ tel que $\sum_{i \in N} y_i = 1$, selon l'algorithme suivant :

<u>Algorithme 5</u> :

<u>Étape 1</u>:

Durant cette étape on détermine le temps minimal, t_1, nécessaire pour que le(s) premier(s) joueur(s) termine(nt) le financement de leurs propres segments. Cette grandeur est déterminée par la relation suivante :

$$t_1 = \min\left(\frac{c_i}{y_i}\right), \forall i \in N \tag{75}$$

Tous les joueurs i dont le coût est tel que $\frac{c_i}{y_i} = t_1$, terminent le financement de leurs segments au cours de cette étape. Ils contribuerontront alors pendant la deuxième étape au paiement de coûts des segments non achevés de leurs prédécesseurs les plus proches.

Soit S_1 l'ensemble de ces joueurs qui finissent le paiement de leurs propres segments durant cette première étape et c_i^1 le coût de ces segments. On a donc :

$$S_1 = \left\{ i \in N / \frac{c_i}{y_i} = t_1 \right\} \tag{76}$$

$$\text{et } c_i^1 = t_1 y_i \tag{77}$$

Étape 2 :

Cette étape a pour objet de déterminer le temps minimal, t_2, durant lequel le deuxième ensemble de joueurs S_2 termine de payer ses segments. Comme nous l'avons signalé au premier algorithme, certains de ces joueurs bénéficient durant cette étape de la contribution de leurs suiveurs appartenant à l'ensemble S_1 et ont donc une vitesse totale $y_i^T(t_2)$.

Posons A_2^i l'ensemble des suiveurs de i qui contribuent au paiement de son propre segment durant la deuxième période :

$$A_2^i = \{ j \in S_1 \cap F(i) \, tels\, que \, \forall k; i \prec k \prec j \, on\, a\, k \in S_1 \} \tag{78}$$

Le taux de contribution total à un lien donné e(i), au cours de cette étape :

$$y_i^T(t_2)=y_i+y_i^{A_2}(t_2) \tag{79}$$

(on note que $y_i^T(t_2)=y_i$ si $A_2^i=\phi$, , c'est-à-dire tant que le suiveur direct de l'agent i n'a pas fini de payer son segment).

Le temps minimal t_2 auquel les joueurs terminent de payer leurs segments est le suivant :

$$t_2=t_1+\min\left(\frac{c_i-c_1^i}{y_i^T(t_2)}\right),\forall i\in N\setminus S_1 \tag{80}$$

L'ensemble des joueurs finissant leurs segments au cours de cette étape est :

$$S_2=\left\{i\in N\setminus S_1\; tels\, que\; \frac{c_i-c_1^i}{y_i^T(t_2)}=t_2-t_1\right\}, \tag{81}$$

Et le coût couvert, de chaque segment, durant le temps additionnel (t_2-t_1) est :

$$c_i^2=(t_2-t_1)\,y_i^T(t_2), \tag{82}$$

Les étapes sont ainsi déterminées d'une manière récursive selon la rapidité de paiement des différents segments de l'arbre, jusqu'à arriver à l'étape α .

<u>Étape</u> α :

Supposons que les $(\alpha-1)$ premières étapes sont déterminées, cette étape se caractérise par :

Le temps minimum t_α durant lequel les agents appartenant à $S_\alpha \subseteq N \setminus S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_{\alpha-1}$ finissent le financement de leurs segments est

$$t_\alpha = t_{\alpha-1} + \min\left(\frac{c_i - c_i^1 - c_i^2 - \cdots - c_i^{\alpha-1}}{y_i^T(t_\alpha)}\right), \forall i \in N \setminus S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_{\alpha-1} \tag{83}$$

avec :

$$S_\alpha = \left\{ i \in N \setminus S_1 \cup S_2 \ldots \cup S_{\alpha-1}\ tels\,que\ \frac{c_i - \sum_{\lambda=1}^{\alpha-1} c_i^\lambda}{y_i^T(t_\alpha)} = t_\alpha - t_{\alpha-1} \right\}; \tag{84}$$

$$A_\alpha^i = \left\{ j \in F(i) \cap \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta\ tels\,que\ \forall k; i \prec k \prec j\, on\, a\, k \in \bigcup_{\beta<\alpha} S_\beta \right\}; \tag{85}$$

$$y_i^T(t_\alpha) = y_i + y_i^{A_\alpha^i}(t_\alpha) \tag{86}$$

Et le coût financé - de chaque segment - au cours de cette étape est :

$$c_i^\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})\, y_i^T(t_\alpha). \tag{87}$$

Comme pour l'algorithme 3, on réarrange les sous-groupes selon leur agencement terminal. Le groupe S_f^1 qui arrête de contribuer en premier contient nécessairement le joueur localisé au premier nœud. Le temps auquel il fini est celui mis pour payer le premier segment. En d'autres termes : si l'agent se trouvant initialement au premier nœud appartient à une étape α selon l'algorithme 5, alors les membres du premier groupe forment le sous ensemble :

$$S_f^1(t_f^1) = \left\{ i \in S_\lambda\ ; \lambda \le \alpha\ et\ tels\,que\ \forall j;\ 1 \prec j \prec i\, on\, a\ j \in S_\gamma\ où\ \gamma \le \alpha \right\} \tag{89}$$

où $t_f^1 = t_\alpha$.

Par ailleurs, vu que chaque agent appartenant à cet ensemble a contribué à un taux de constant y_i, il paiera selon ce processus le montant suivant :

$$x_i = y_i t_f^1 \tag{90}$$

Les agents qui finissent juste après ce premier groupe sont alors ceux qui arrivent à terminer en premier le chemin qui les mène vers l'un de ces terminaux : ils formeront le sous groupe $S_f^2(t_f^2)$. Si le premier agent, l, qui termine son segment parmi les suiveurs directs des terminaux appartient à une étape β, alors par analogie à la première étape, on a $t_f^2 = t_\beta$ et

$$S_f^2(t_f^2) = \{i \in S_\lambda \ ; \lambda \leq \beta \ et\, tels\, que\, \forall j; l \prec j \prec i\, on\, a\, j \in S_\gamma\ où\, \gamma \leq \beta\} \tag{91}$$

Chaque membre de cette coalition doit payer :

$$x_i = y_i t_f^2 \tag{92}$$

Par récursivité, le groupe $S_f^3(t_f^3)$ sera celui qui termine juste après le deuxième groupe sur l'ensemble résiduel $N \setminus S_f^1(t_f^1) \cup S_f^2(t_f^2)$. On continue ainsi à déterminer les coalitions selon leur agencement terminal jusqu'à arriver à la dernière coalition $S_f^\eta(t_f^\eta)$ qui termine au temps t_η^f et dont chaque membre i doit payer un coût équivalent au montant qu'il a payé pendant ce temps, à savoir

$$x_i^\eta = y_i t_f^\eta \tag{93}$$

Contrairement aux deux allocations précédentes, celle-ci ne vérifie pas nécessairement les propriétés de symétrie et d'ordre. Toutefois, elle vérifie les deux propriétés simples, mais importantes, suivantes :

Propriété 1 :

Les agents les plus proches de la source arrêtent de contribuer plus tôt :

$$si\ i \precsim j,\ alors\ t_i^f \leq t_j^f.$$

Propriété 2 :

$$Pour\ tous\ joueurs\ i\ et\ j\ de\ N, t_i^f \leq t_j^f\ si\ et\ seulement\ si\ \frac{x_i(y)}{x_j(y)} \leq \frac{y_i}{y_j}.$$

B- Étude de la stabilité :

Comme pour le cas de taux de contribution identiques, cette allocation de coûts satisfait l'équilibre budgétaire et appartient au noyau. Il est, toutefois d'un grand intérêt d'étudier son apport en matière de stabilité. Pour cela, attardons nous tout d'abord, sur la présentation de quelques définitions et lemmes qui nous seront utiles pour la suite.

On précise qu'un sous-arbre est défini par l'ensemble de liens qui suivent, au sens faible, un nœud donné. Un sous-tronc est un sous-ensemble d'un sous-arbre E qui est fermé sous la relation d'ordre partiel $\precsim$, c'est-à-dire, si $e(i) \in T$, $e(j) \in E$ et $e(i) \precsim e(j)$, alors $e(j) \in T$. On note que si E représente tout l'arbre A, alors T est dit tronc.

Rappelons que le coût marginal d'un sous-tronc T est $CM(T) = \sum_{e \in T} c(e) = \sum_{i \in T} c_i$. Le coût marginal d'un tronc est, de ce fait, égal à son coût total. Un sous-tronc est dit autonome, pour une allocation de coût x, si le coût qu'il paie selon cette allocation est égal à son coût marginal : $M(T) = x(T)$. Sur la base de ces définitions on affirme les lemmes suivants :

Lemme 2 :

Pour toute allocation du noyau, il existe un plus petit tronc autonome.

Preuve :

Soit x une allocation appartenant au noyau. Puisque l'arbre entier est un tronc autonome, nous n'avons qu'à montrer que l'intersection de deux troncs autonomes est aussi (un tronc) autonome. Le plus petit tronc autonome de cette allocation x sera alors l'intersection de tous les troncs autonomes dans x.

Soient T_1 et T_2 deux troncs autonomes. Contrairement au résultat recherché supposons que l'intersection de ces deux troncs n'est pas un tronc autonome, c'est à dire

$$x(T_1 \cap T_2) = \lambda C(T_1 \cap T_2), \lambda < 1.$$

par conséquent, $x(T_2) = C(T_2) \Rightarrow x(T_1 \cap T_2) + x(T_1 \setminus T_2) = C(T_1 \cap T_2) + MC(T_1 \setminus T_2)$

$$\Rightarrow x(T_2 \setminus T_1) = CM(T_2 \setminus T_1) + (1-\lambda)C(T_1 \cap T_2).$$

Suivant le même raisonnement, $x(T_1 \setminus T_2) = MC(T_1 \setminus T_2) + (1-\lambda)C(T_1 \cap T_2)$.

Cependant, dans ce cas, on a

$$x(T_1 \cup T_2) = x(T_1 \cap T_2) + x(T_2 \setminus T_1) + x(T_1 \setminus T_2)$$
$$= C(T_1 \cup T_2) + (1-\lambda)C(T_1 \cap T_2)$$

D'où, $x(T_1 \cup T_2) > C(T_1 \cap T_2)$

Ce qui s'oppose à la propriété du noyau, d'où le fait que l'intersection de deux tronc autonomes est aussi un tronc autonome. ■

Lemme 3 :

A toute allocation du noyau correspond une unique méthode de partition de A en sous-troncs autonomes.

Preuve:

Soit x une allocation du noyau. Soit T le plus petit tronc autonome dans x (qui existe d'après le lemme 1). Notre but est de montrer que tout sous-arbre E dont la source suit directement un terminal de T, est autonome. Ceci est évident puisque d'après la propriété du noyau $x(E) \geq CM(E)$. Mais si cette inégalité est stricte, on aura $x(E \cup T) > CM(E \cup T)$, qui viole la propriété du noyau. D'où $x(E) = CM(E)$.

Considérons maintenant le sous-arbre E comme un arbre et considérons le problème d'allocation de coûts (E, c_E) défini de manière évidente. On affirme que x_E est une allocation du noyau pour ce problème. En effet, on sait déjà que l'équilibre budgétaire tient. Supposons qu'un tronc T_E de E s'oppose à l'allocation x_E. Alors $x(T_E \cup T) > C(T_E \cup T)$, ce qui est contradictoire avec la supposition que x_E appartient au noyau.

L'application répétée du lemme précédent, aboutit à notre affirmation. ■

Théorème 4 :

Une méthode d'allocation est stable si et seulement si c'est une méthode d'allocation "du foyer à la source".

Preuve :

Il est évident qu'une allocation du foyer à la source appartient au noyau. Inversement, fixons une allocation x appartenant au noyau et prouvons qu'elle coïncide avec l'allocation $x(y)$.

Soit τ l'unique partition de A en sous-troncs autonomes. Si $T \in \tau$, définissons T^- l'union de toutes les coalitions S dans τ qui précèdent strictement T, dans le sens indiqué.

Soit T_1 l'unique tronc dans τ. Pour chaque agent i localisé au niveau d'un nœud de T_1, définissons $y_i = x_i$. Considérons maintenant, n'importe quel sous-tronc T de τ dont la source suit directement un terminal de T_1. Pour tout agent i localisé au niveau de T, définissons $y_i = \alpha_T x_i$. Choisissons α_T suffisamment petit pour être sûrs que $C(T_1)$ soit payé par T_1, avant que $CM(T)$ soit couvert par T. Et ainsi de suite. y étant ainsi définit, Vérifions maintenant que l'allocation du foyer à la source, $x(y)$, coïncide avec x.

En raison de notre choix de α, il est clair que $x(y)(T) = CM(T)$ pour tout sous-tronc T de τ. Supposons maintenant que $x(y) \neq x$. Comme $x(y)(T) = CM(T), \forall t \in \tau$, il existe nécessairement $t \in \tau$ et $i, j \in T$, tels que

$$x_i(y) < x_i \text{ et } x_j(y) > x_j \tag{a}$$

comme $y_r = \alpha_T x_r, pour\ tout\ r \in T$,

$$\frac{x_i(y)}{x_j(y)} < \frac{y_i}{y_j}.$$

D'après la propriété 2, l'agent i arrête de payer avant j dans l'allocation $x(y)$. Soit $F_T(j) = \{r \in T \setminus j \precsim i\}$, l'ensemble des suiveurs de j dans T. D'après la propriété 2, $i \notin F_T(j)$. De plus $x_r(y) \geq x_r$, $\forall r \in F_T(j)$.

Soit j* le premier agent sur le chemin de j vers la source qui arrête de payer au cours de la même étape que j. Alors

$$\frac{x_{j^*}(y)}{x_j(y)} = \frac{y_{j^*}}{y_j} = \frac{x_{j^*}}{x_j}.$$

Ceci implique que $x_{j^*}(y) > x_{j^*}$ *puisque* $x_j(y) > y_j$. D'où, utilisant le même argument,

$$x_r(y) \geq x_r, \forall r \in F_T(j^*). \tag{b}$$

Soit i^*, le prédécesseur direct de j^*. Ce prédécesseur ne se localise pas à la source parce que $i \notin F_T(j^*)$.

Comme aucun agent appartenant à $F_T(j^*)$ ne contribue à un des liens sur le chemin liant i^* à la source dans l'allocation $x(y)$, on doit avoir (vu que $T^-, T^- \cup T \; et \; T^- \cup (T \setminus F_T(j^*))$ sont des sous-troncs autonomes)

$$x_r(T \setminus F_T(j^*)) = MC(T \setminus F_T(j^*)).$$

Donc

$$x(y)(F_T(j^*)) = MC(F_T(j^*)).$$

En égard à (a) et (b), ceci implique que

$$x(F_T(j^*)) < MC(F_T(j^*)).$$

Par conséquent, $x(T \setminus F_T(j^*)) > MC(T \setminus F_T(j^*))$, d'où $x((T \setminus F_T(j^*)) \cup T^-) > MC((T \setminus F_T(j^*)) \cup T^-)$, violant la contrainte du noyau. En conséquence l'allocation x n'est autre que $x(y)$. ■

CONCLUSION

Au cours de ce travail, on a étudié quelques méthodes de partage de coûts possibles pour le cas d'un arbre déterminé en terme de noeuds et de liens, avec au moins un agent au niveau de chaque nœud. L'importance de ce travail réside principalement dans les trois points suivants :

Une méthode d'allocation de coûts ne peut être stable (au sens du noyau) que si elle est *incrémentale* ou si elle est une allocation *du foyer à la source*. L'allocation *du foyer à la source* affectant le même taux de contribution à tous les agents coïncide avec l'allocation égalitaire de Dutta et Ray (1989). Enfin, la valeur de Shapley (définie par Shapley, 1953) prend, dans le cas de ce réseau, la forme *incrémentale* simple de partage égal du coût marginal ou "Equal Spit of Incrémental Cost".

Une autre perspective, serait d'étudier le cas d'un arbre qui a plus d'une source et voir l'impact sur les allocations proposées pour le cas de notre réseau et leurs propriétés. D'un autre côté, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, cet arbre peut représenter un réseau d'irrigation, d'électricité, ou un réseau informatique... Aussi, il serait d'un grand intérêt de pouvoir appliquer les méthodes proposées au niveau du contexte réel et de les comparer à d'autres méthodes déjà élaborées.

BIBLIOGRAPHIE

AADLAND, David et Van KOPLIN. *"Shared Irrigation costs : an ampirical and axiomatic analysis", Working paper.*

AUMANN, Robert. J. et Llyoyd. S. SHAPLEY. *"Values of Non-Atomic Games"*, Princeton, NJ : Princeton University Press, 1974.

BILLERA, L. J., David. C. HEATH et J. RANANN, "Internal telephone billing rates - a novel application of non-atomic game theory", *Operation Reasearh,* vol. 7, 32-39.

BILLERA, L. J. et David. C. HEATH, "Allocation of shared costs : a set of axiomsyielding a unique procedure", *Mathematics of Operations Research,* 1982, 32-39.

DUTTA, Bhaskar et Derbay Ray. "A concept of egalitarianism under participation constraints", *Econometrica*, vol. 57, No 3, 1989, 615-635.

GROTTE, J. H. *"Computationof and Observations on the Nucluolus and the Central Games"*, M.Sc. Thesis, Ithaca, NY : Cornell University., 1970.

HENRIET, Dominique et MOULIN Hervé. "Traffic-based cost allocation in a network", *Rand Journal of Economics*, vol. 37, No 2, 1996, 332-245.

HERZOG, Shai, Scott SHENKER et Deborah EISTTREIN. "Sharing the cost of multicast trees : An axiomatic analisysis", *working paper*, 1995.

JAMES, L. Douglass et Robert Rue LEE, "*Economics of Water ressources Planning*", New-York : McGraw-Hill, 1971.

MIRMAN, L. J. ET Y. TAUMAN, "Demand compatible equatable cost sharing prices", *Mathematics of operations research,* vol. 7, 1982, 40-56.

MOULIN, Hervé et Scott SHENKER. "Serial cost sharing", *Econometrica*, vol. 60, 1992, 1009-1037.

RAMSEY, F. "A contribution to the theory of taxation'' , *Economic Journal*, vol. 37, 1927, 47-61.

SHAPLEY, Lloyd, D. " Avalue for n-persom games, in H. W. Tucker (eds) *Contributions to the Theory of Games II, Annals of Mathematics Studies No. 28,* Princeton, NJ : Prnceton University Press, 1953, 1163- 1170.

SOBOLEV, A. I, "Caracterisaton of the principal of optimality for cooperative games through functional equations", ed. N. N. Voroby'ev, *Mathematical Methods in the Social Sciences, Vipusk 6,* Vilnius, USSR 1975, 92-151.

YOUNG, Peyton. H. "Monotonic solutions of cooperative games", *International Journal of Game Theory, vol.* 14, 1985a.

YOUNG, Peyton. H. "Producer incentives in cost allocation", *Econometrica*, vol. 53, 1985b.

YOUNG, Peyton. H. *"Cost allocation : Methods, Principles, Applications"*, Amsterdam : North-Holland Publishing Compagnie, 1985c.

YOUNG, Peyton. H. "Cost allocation", Proceeding in Symposia in Applied Mathematics, *American Matimatical Society*, vol. 33, 1985d, 69-94.

YOUNG, Peyton. H. "Cost allocation", *Handbook of Game Theory with economic applications*, vol. II, 1994, 1193-1232.

LES ANNEXES

ANNEXE A

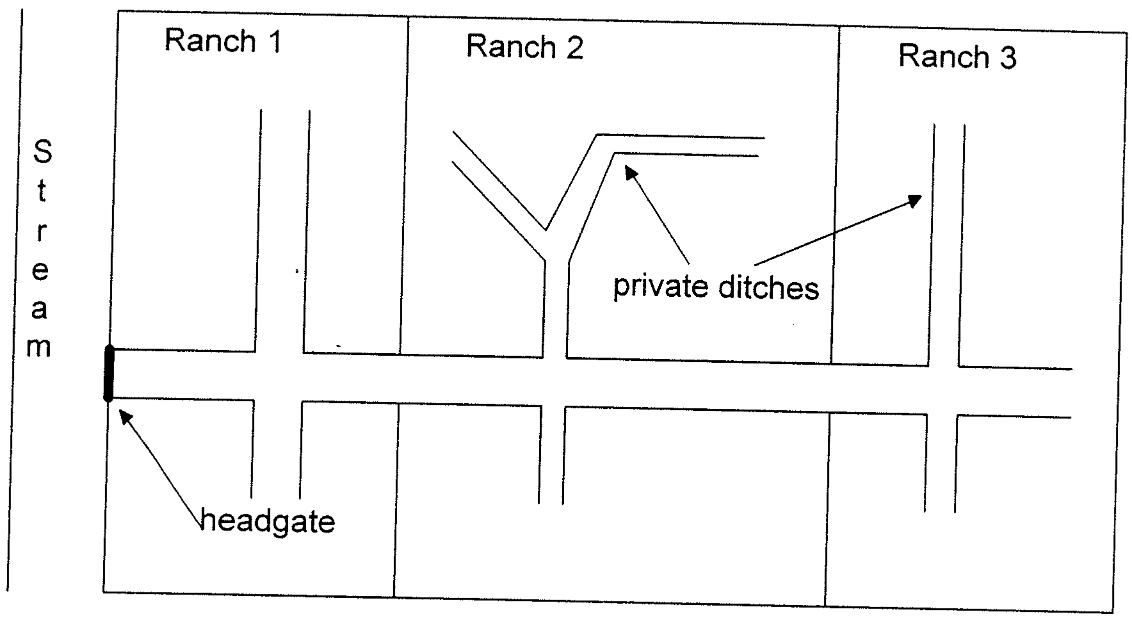


Figure 1. Representation Stylisée d'un canal d'irrigation
(Aadlan. D et Koplin. V)

ANNEXE B

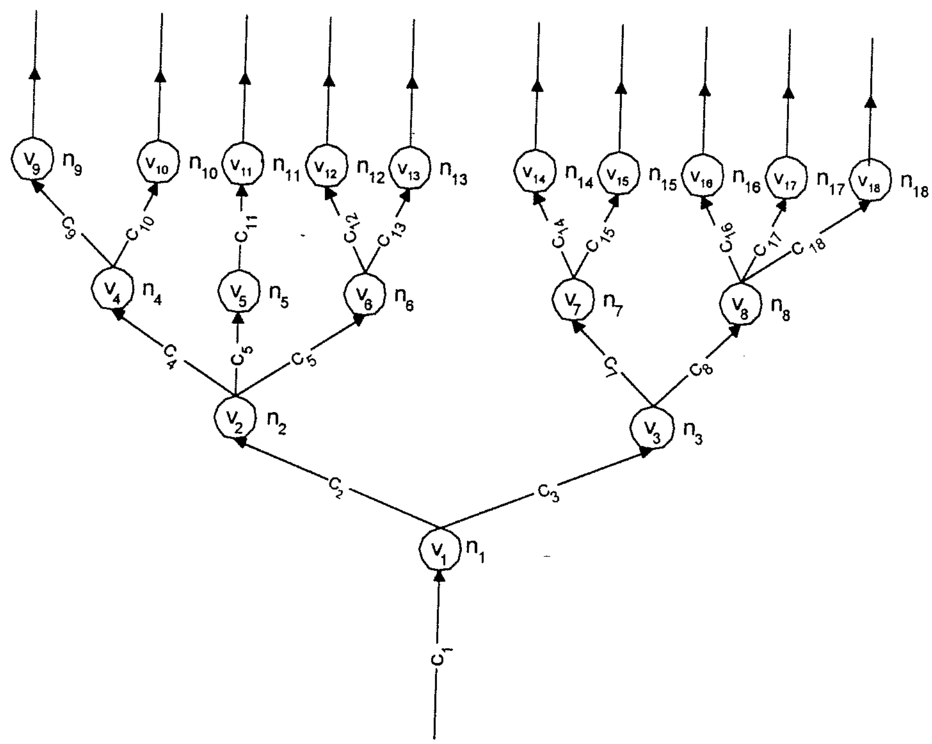


Figure. 2 Illustration du réseau