

Université de Montréal

**Problèmes de commande optimale stochastique
généralisés**

par

Foued Zitouni

Département de mathématiques et de statistique

Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures

en vue de l'obtention du grade de

Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en Mathématiques

mars 2015

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée

Problèmes de commande optimale stochastique généralisés

présentée par

Foued Zitouni

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes :

Sabin Lessard

(président-rapporteur)

Mario Lefebvre

(directeur de recherche)

Bruno Rémillard

(membre du jury)

François Watier

(examineur externe)

Fabian Bastin

(représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le:

24 novembre 2014

SOMMAIRE

Cette thèse est divisée en deux grands chapitres, dont le premier porte sur des problèmes de commande optimale en dimension un et le deuxième sur des problèmes en dimension deux ou plus. Notons bien que, dans cette thèse, nous avons supposé que le facteur temps n'intervient pas.

Dans le premier chapitre, nous calculons, au début, l'équation de programmation dynamique pour la valeur minimale F de l'espérance mathématique de la fonction de coût considérée. Ensuite, nous utilisons le théorème de Whittle qui est applicable seulement si une condition entre le bruit blanc v et les termes b et q associés à la commande est satisfaite. Sinon, nous procédons autrement. En effet, un changement de variable transforme notre équation en une équation de Riccati en $G \equiv F'$, mais sans conditions initiales. Dans certains cas, à partir de la symétrie des paramètres infinitésimaux et de q , nous pouvons en déduire le point x_0 où $G(x_0) = 0$. Si ce n'est pas le cas, nous nous limitons à des bonnes approximations. Cette même démarche est toujours possible si nous sommes dans des situations particulières, par exemple, lorsque nous avons une seule barrière.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons les problèmes en dimension deux ou plus. Puisque la condition de Whittle est difficile à satisfaire dans ce cas, nous essayons de généraliser les résultats du premier chapitre. Nous utilisons alors dans quelques exemples la méthode des similitudes, qui permet de transformer le problème en dimension un. Ensuite, nous proposons une nouvelle

méthode de résolution. Cette dernière linéarise l'équation de programmation dynamique qui est une équation aux dérivées partielles non linéaire. Il reste à la fin à trouver les conditions initiales pour la nouvelle fonction et aussi à vérifier que les n expressions obtenues pour F sont équivalentes.

Mots-clefs : équation de programmation dynamique - paramètres infinitésimaux - théorème de Whittle - commande optimale - fonction de coût - solution approximative - temps minimal - linéarisation.

SUMMARY

This thesis is divided into two chapters : the first one deals with some optimal control problems in one dimension and the second one with these problems in two or more dimensions. Note that, in this thesis, the time variable is not taken into account.

In Chapter 1, at first we compute the dynamic programming equation for the minimal expected value F of the cost function considered. Next, we apply Whittle's theorem if the condition between the noise v and the functions b and q associated with the control variable is satisfied. Otherwise, we proceed differently. Indeed, if we make a change of variable, we obtain a Riccati equation for $G \equiv F'$, but without initial conditions. In some cases, from the symmetry of the infinitesimal parameters and of the function q , we can deduce the point x_0 where $G(x_0) = 0$. If this is not possible, we limit ourselves to good approximations. The same approach is still possible if we are in specific situations, for example, when we have only one barrier.

In Chapter 2, we discuss problems in dimension two or more. Since the condition in Whittle's theorem is difficult to satisfy in this case, we try to generalize the results obtained in Chapter 1. We then use in some examples the method of similarity solutions, which enables us to transform the problem into

a one-dimensional one. Next, we propose a new resolution method. This method linearises the dynamic programming equation, which is a non-linear partial differential equation. Finally, we must find initial conditions for the new function, and also verify that the n expressions for F are equivalent.

Key words : dynamic programming equation - infinitesimal parameters - Whittle's theorem - optimal control - cost function - approximate solution - minimum time - linearisation.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xi
Dédicace	xiii
Remerciements	xv
Introduction	1
0.1. Les principales classes des problèmes d'extremum	2
0.1.1. Problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités	4
0.1.2. Problème de programmation convexe	4
0.1.3. Calcul des variations classique	4
0.1.3.1. Le problème de Lagrange	5
0.1.3.2. Le problème de Mayer	5
0.1.3.3. Le problème de Boltz	5
0.1.4. Problème de commande optimale	5
0.1.4.1. La résolution du problème de commande optimale	12
0.1.4.2. Le problème de commande optimale dans le cas d'un processus stochastique	13
Chapitre 1. Résolution de problèmes LQG en dimension un	19

1.1. Théorème de Whittle	22
1.2. Solution exacte du problème LQG	31
1.3. Solution après transformation du problème LQG	44
1.4. Quelques extensions du problème LQG	46
1.5. Solution approximative du problème LQG	51
1.5.1. Approximation après linéarisation	51
1.5.2. Approximation par le temps moyen	62
1.6. Résolution du problème LQG avec une seule barrière	65
Chapitre 2. Résolution de problèmes LQG en dimension deux ou plus	71
2.1. Résolution du problème LQG en dimension deux avec la symétrie	72
2.2. Approximation de la commande optimale en dimension deux ...	79
2.3. Linéarisation de l'équation matricielle de Riccati	83
2.3.1. Linéarisation de l'équation matricielle de Riccati en dimension deux	85
2.3.2. Linéarisation de l'équation matricielle de Riccati en dimension n	92
2.3.3. Application	96
Conclusion	103
Bibliographie	107

LISTE DES FIGURES

1.1	La commande optimale avec $f = \sigma^2 = b_0 = q_0 = \lambda = 1$, $d_1 = 0$ et $d_2 = 2$	31
1.2	La commande optimale avec $b_0 = q_0 = d = 1$, $\lambda = -2$	35
1.3	La commande optimale avec $b_0 = q_0 = d = 1$, $\lambda = -3$	36
1.4	La fonction $F(x)$ si $c_0 = 0$	40
1.5	La fonction $F(x)$ si $c_0 \rightarrow \infty$	41
1.6	Commande optimale dans l'intervalle $[0, 2]$	47
1.7	La commande optimale avec $b(x) = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $q_0 = 1$ et $d = 1$	51
1.8	$I(x_0)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$	56
1.9	$F(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$	57
1.10	$u^*(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$	57
1.11	$D(x) := F(x) - e(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$	58
1.12	$I(x_0)$ pour tout $x_0 \in [1, 2]$	60
1.13	$I(x_0)$ pour tout $x_0 \in [1, 475; 1, 495]$	60
1.14	La commande optimale sur $[1, 2]$	61
1.15	Les commandes optimales exacte (ligne continue), approximative méthode 1 (ligne discontinue), approximative méthode 2 (ligne pointillée) si $x \in [0, 2]$	64

DÉDICACE

Je dédie cette thèse à ...

Mes chers parents Abdallah et Salha

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon amour. Aucune dédicace ne serait assez pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance. Que Dieu vous préserve et vous accorde la santé, la longue vie et le bonheur.

Mon cher petit frère Fadhel

Je te souhaite un avenir plein de joie, de bonheur, de réussite et de sérénité. Je t'exprime à travers ce travail mes sentiments de fraternité et d'amour.

Mes chères soeurs Rabia, Mouna et Hayet

Malgré la distance, vous êtes toujours dans mon coeur. Je vous dédie ce travail avec tous mes voeux de bonheur, de santé et de réussite.

Ma chère soeur Afef et son mari Fathi

Les mots ne suffisent guère pour exprimer l'amour, la gratitude et l'affection que je porte pour vous.

Toutes les membres de ma famille, petits et grands

Je vous exprime à travers ce travail mon affection.

Toutes les personnes qui m'ont soutenu durant mes études.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche, monsieur Mario Lefebvre, pour m'avoir guidé, encouragé pour élaborer cette thèse. Ça faisait vraiment un grand plaisir de travailler avec lui pendant ces cinq années. Il était toujours disponible pour me soutenir moralement, scientifiquement ainsi que financièrement. De plus, ses précieux conseils m'étaient indispensables pour la réalisation de ce projet et pour la rédaction des articles.

Je désire grandement remercier monsieurs Sabin Lessard, Bruno Rémillard et François Watier pour avoir accepté d'examiner mon travail, pour leurs remarques et leurs recommandations qui ont permis d'améliorer cette thèse. Ils ont fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Au cours de ces années passées à Montréal, j'ai côtoyé des gens, qui étaient sans doute ma seconde famille. Ici, ils trouveront toute ma reconnaissance pour le soutien que chacun d'eux a pu apporter pour faire aboutir ce rêve. Merci donc à Ahmed Masmoudi, Ghaya Jouini, Hadhami Dbira, Lotfi Derbali, Mbarka Soualhia, Mohamed Amine Hachani, Mouna Selmi, Nader Meddeb, Najoua Bejaoui, Sabrine Jdaida et Zyed Ben Salah.

Ensuite, je passe une dédicace spéciale pour Nadia Bahri pour ses encouragements et son appui.

Encore, j'adresse de sincères remerciements à Dhaker Kroumi, Fatima Lalaoui, Hager Kouakbi, Marwen Jdaida, Matilda Dawi, Nabil Mnasri, Saber Naggaz et Youssef Raouane pour leurs sympathies et leurs amitiés. Ils ont fait tout leur possible pour m'aider à accomplir cette tâche.

De plus, je souhaite exprimer ma gratitude pour Youssef Taieb et Kamel Jemai pour les bons moments partagés ensemble et aussi, je tiens à remercier tout les membres du département de mathématiques et statistique pour leur gentillesse. Ils étaient toujours disponibles pour m'aider à achever mes études dans un bon environnement.

Un grand merci à tous mes enseignants pour la qualité de l'enseignement qu'ils ont bien voulu me prodiguer durant mes études primaire, secondaire et universitaire afin de me donner une formation de qualité.

Finalement, ce travail n'aurait pu être mené sans le soutien financier du gouvernement tunisien. Je le remercie pour tout cela.

INTRODUCTION

Depuis toujours, lorsque les gens sont amenés à faire un choix entre plusieurs possibilités, ils cherchent à choisir la meilleure. Ils doivent alors résoudre certains problèmes d'optimisation, trouver le maximum ou le minimum. Nous appelons cela *résoudre un problème d'extremum*. Voici quelques exemples :

(a) *Problème isopérimétrique*. Il a été établi dans ce problème que le cercle et la sphère ont la plus grande contenance parmi toutes les courbes de même longueur ou parmi toutes les surfaces de même aire. Ce résultat a été utilisé dans le fameux exemple de *Didon* (la princesse a demandé de lui accorder une surface de terre qui peut être encerclée par une peau de bœuf. Après, elle a découpé le peau en fines lamelles, les attacha bout à bout, formant une longue corde qui lui permit de délimiter un terrain considérable, où elle fonda la ville de *Carthage*).

(b) *Problème d'Euclide*. Dans un triangle ABC donné, nous voulons inscrire un parallélogramme $ADEF$ d'aire maximale. Le résultat recherché s'obtient lorsque nous choisissons les points D , E et F comme étant les milieux des côtés correspondants du triangle ABC .

(c) *Problème du brachistochrone*. Nous l'appelons aussi le problème de descente en temps minimal. Si nous avons deux points A et B dans un plan vertical, nous voulons déterminer le chemin AMB suivant lequel un corps M , entraîné par son poids, effectuera le trajet de A à B en temps minimal. *Galilée* a trouvé erronément que la courbe était le cercle, mais en 1696 *Bernoulli* écrivit

un article où il a résolu ce problème et découvert que la solution est plutôt une cycloïde.

(d) *Problème aérodynamique de Newton.* En 1687, *Newton* détermina la forme de la surface de révolution qui éprouve la moindre résistance lorsqu'elle bouge dans un fluide, suivant la direction de son axe.

(e) *Problème élémentaire de temps minimum.* Si nous avons un wagonnet qui se déplace horizontalement sur des rails, nous allons appliquer une force extérieure, que l'on peut toujours faire varier dans des limites bien définies de telle sorte que le wagonnet s'arrête dans une position déterminée en temps minimal.

Remarque. Les solutions de ces problèmes sont présentées d'une façon purement géométrique. Pour les résoudre analytiquement, il suffit de les traduire dans la langue formelle de l'analyse. Nous disons aussi que nous devons les formaliser.

0.1. LES PRINCIPALES CLASSES DES PROBLÈMES D'EXTREMUM

Dans les exemples précédents, pour trouver la solution, nous étions amenés chaque fois à travailler avec une fonction numérique appelée *une fonctionnelle* (c'est le terme utilisé dans la théorie des problèmes d'extremum). Cette dernière est assujettie, parfois, à vérifier certaines conditions. Ce sont *les contraintes*. Les contraintes les plus courantes sont celles qui se traduisent par des relations de type inégalité. De plus, nous pouvons trouver des contraintes de type intégral. Par contre, nous rencontrons, dans certains cas, des problèmes où les contraintes sont absentes. La fonctionnelle est définie dans un domaine X nommé *la classe des éléments admissibles*, et si $x \in X$ satisfait aux conditions posées, nous disons que x est *admissible pour la contrainte*.

Avant de donner un classement des différents problèmes d'extremum, voici une remarque très importante.

Remarque. Quand nous posons un problème d'optimisation, il serait évidemment très intéressant de savoir à priori, avant de le résoudre, s'il a une solution et si elle est unique. D'autre part, il faut certainement qu'il existe au moins une solution. Mais notons bien que l'existence de cette dernière n'implique pas nécessairement qu'elle est la solution optimale recherchée. Regardons cet exemple.

Exemple.

Nous cherchons à minimiser

$$\mathcal{J}(x) = \int_0^1 [x(t)]^2 dt,$$

avec les conditions finales $x(0) = 1$ et $x(1) = 0$. Nous supposons que les fonctions $x(t)$ appartiennent à l'ensemble \mathcal{X}_e , qui contient les fonctions C^1 par morceaux et qui satisfont aux conditions finales.

Il est clair que $\mathcal{J}(x) \geq 0$ et $\mathcal{J}(x) = 0$ seulement lorsque $x(t) \equiv 0$, et par conséquent $\mathcal{J}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{X}_e$.

Pour $n = 1, 2, \dots$, soit pour $0 \leq t \leq n^{-1}$

$$x^n(t) = 1 - nt,$$

et si $n^{-1} < t \leq 1$

$$x^n(t) = 0.$$

Alors $\mathcal{J}(x^n) = (3n)^{-1}$, ce qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Donc

$$\inf_{\mathcal{X}_e} \mathcal{J}(x) = 0.$$

Nous déduisons alors que $\mathcal{J}(x)$ n'a pas de minimum dans \mathcal{X}_e .

En tenant compte de la nature de la fonctionnelle, son domaine X et aussi les contraintes auxquelles elle est exposée, nous classifions les problèmes d'extremum comme suit.

0.1.1. Problèmes différentiables à contraintes sous forme d'égalités et d'inégalités

Dans ce cas, la fonctionnelle $f_0(x)$ est définie sur X qui est en général un espace normé. Comme indiqué dans le titre de cette classe, $x(t)$ est soumis à des contraintes de type égalité et inégalité, à savoir, $F(x) = 0$ (où $F : X \rightarrow Y$ tel que Y est aussi un espace normé) et $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$. Ces dernières devraient posséder certaines propriétés de différentiabilité.

0.1.2. Problème de programmation convexe

La fonctionnelle $f_0(x)$ est définie sur un espace vectoriel, tandis que les contraintes sont données par un système d'égalités $F(x) = 0$ (où $F : X \rightarrow Y$ tel que Y est un espace vectoriel), d'inégalités $f_i(x) \leq 0$, $i = 1, \dots, m$ et d'inclusion $x \in A$. De plus, les fonctions f_i , $i = 0, \dots, m$ sont convexes, l'application F est affine et l'ensemble A est convexe. Le problème d'Euclide appartient à cette classe.

0.1.3. Calcul des variations classique

Les calculs des variations sont des problèmes très anciens. Plusieurs savants ont travaillé sur ce sujet et ont bien perfectionné cette théorie. Les développements de cette classe sont dus principalement à *Euler* et à son élève *Lagrange* au 18^e siècle. Dans ce problème, X est l'espace des fonctions continûment différentiables $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ et qui est un espace de Banach ; t_0 et t_1 sont respectivement l'instant initial et l'instant final. Les fonctionnelles sont généralement de type *intégral*, c'est-à-dire qu'elles sont sous la forme

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt;$$

terminal, si elles sont comme

$$\mathcal{S}(x(\cdot)) = \Phi(x(t_0), x(t_1));$$

ou *mixte*, c'est-à-dire des fonctionnelles de la forme

$$\mathcal{B}(x(\cdot)) = \mathcal{J}(x(\cdot)) + \mathcal{S}(x(\cdot)).$$

Pour les contraintes, elles se décomposent en deux parties :

Des relations différentielles ; si nous avons

$$M_i(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, i = 1, \dots, p.$$

Des conditions limites, telles que

$$\psi(x(t_0), x(t_1)) = 0.$$

Ces classifications permettent de distinguer différents types de problèmes de calcul des variations, à savoir :

0.1.3.1. *Le problème de Lagrange*

C'est lorsque la fonctionnelle est intégrale avec des contraintes de type relations différentielles et nous avons de plus des conditions limites.

0.1.3.2. *Le problème de Mayer*

La seule différence avec le problème de Lagrange est au niveau de la fonctionnelle, qui est dans ce cas de type terminal.

0.1.3.3. *Le problème de Boltz*

Ici, la fonctionnelle est mixte.

Avant de terminer cette section, nous indiquons que cette classe contient le problème isopérimétrique.

0.1.4. Problème de commande optimale

Nous présentons dans cette partie une description assez générale de ce genre de problème.

Notons tout d'abord que le problème de Newton et le problème élémentaire de temps minimum appartiennent à cette classe.

Cette classe de problèmes d'extremum est la plus récente. Avant le 20^e siècle, les ingénieurs essayaient d'étudier les systèmes non linéaires assurant l'extrémalisation d'un certain indice de performance. Ils utilisaient les méthodes du calcul classique des variations, mais ils ont rencontré de sérieuses difficultés, notamment en présence de contraintes. Les travaux de *Bellman* et de *Pontriaguine* ont permis, après, d'avoir des méthodes de résolution pratique de ces problèmes. Ceci était vers l'année 1953. La condition nécessaire pour qu'une solution soit optimale est *le principe de Pontriaguine*.

La théorie de la commande optimale réalisa une synthèse des idées et des méthodes de recherche, qui d'une part prennent leur source dans les travaux classiques du calcul des variations, et qui d'autre part sont assez récents.

D'une façon générale, pour $(x, u, t) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{T}$, où $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, la fonctionnelle est sous la forme

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_1} r(x, u, t) dt + g(x_0, t_0, x_1, t_1),$$

telle que les fonctions r et g sont supposées continues et continûment dérivables. Nous l'appelons encore *l'indice de performance*, *le critère de performance* ou *la fonction du coût* du système.

L'équation vectorielle d'évolution du système est

$$\dot{x} = f(x, u, t). \quad (0.1.1)$$

Nous supposons que les fonctions f_i sont continues et admettent des dérivées partielles continues dans leurs domaine.

Les contraintes sont présentées par la région fermée $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{T}$ qui peut être

définie par ces relations :

$$q(x, u, t) \leq 0,$$

les fonctions q étant supposées continues et continûment dérivables.

La fonction $x(t)$, qui est solution de (0.1.1), est appelée *état correspondant à $u(t)$ et à la condition initiale $x(t_0) = x_0$* . Elle est de la forme

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x, u, s) ds,$$

pour tout $t_0 \leq t \leq t_1$. Cette solution existe et elle est absolument continue sur $[t_0, t_1]$.

La fonction $u(t)$ est nommée *commande* ou *fonction de contrôle*.

Remarque. Puisque la dérivée de la commande n'intervient pas, celle-ci peut être discontinue en un certain nombre de points.

Nous disons que les états et les commandes sont *admissibles* s'ils vérifient les contraintes.

Le couple (u, x_0) , formé par la condition initiale x_0 et la commande $u(t)$, est dit *réalisable* s'il existe une solution $x(t)$ de (0.1.1) dans $[t_0, t_1]$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$ et la condition finale $x(t_1) = x_1$.

Le problème de commande optimale consiste alors à trouver parmi les commandes $u(t)$ admissibles, continues et dérivables par morceaux, et transférant le système de l'état initial à l'état final en satisfaisant aux conditions aux limites, celle pour laquelle la fonctionnelle \mathcal{J} est minimum.

Une telle commande est dite *optimale* et la courbe intégrale correspondante est appelée *trajectoire optimale*.

Remarques.

i. Comme dans le cas du calcul des variations, nous pouvons classer les problèmes de commande optimale en trois types. En fait, la classification de ces problèmes est la même que pour la classe précédente, et nous n'avons qu'à remplacer, dans la fonction du coût et dans la relation différentielle, la fonction $\dot{x}(\cdot)$ par la commande $u(t)$.

ii. Des changements permettent de transformer, par exemple, un problème de commande optimale de Lagrange en un problème de Mayer ou de Boltz. Ceci est toujours vrai même dans les autres sens. Ainsi, nous disons que les problèmes sont équivalents. Ce résultat implique que les méthodes de résolution appliquées sur l'un sont applicables aussi sur les autres.

Avant de classer les problèmes d'optimisation, nous avons parlé de l'existence de la solution optimale, alors nous posons cette question :

La fonctionnelle \mathcal{J} atteint-elle son minimum ?

Avant de répondre, voici tout d'abord quelques hypothèses :

(I) La fonction f est continue et, de plus, il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telles que

$$(a) \quad |f(x, u, t)| \leq c_1(1 + |x| + |u|),$$

$$(b) \quad |f(x', u, t) - f(x, u, t)| \leq c_2|x' - x|(1 + |u|),$$

pour tout $t \in \mathcal{T}$, $x, x' \in \mathcal{X}$ et $u \in \mathcal{U}$.

(II) Nous admettons de plus que la fonction de contrôle $u = u(\cdot)$ est Lebesgue-intégrable sur $[t_0, t_1]$. Dans ce cas, nous dénotons par \mathcal{F}' la classe des couples réalisables (u, x_0) .

(III) $F(x, t)$ est l'image dans \mathbb{R}^n de l'ensemble des commandes \mathcal{U} par rapport à la fonction $f(x, \cdot, t)$, c'est-à-dire que

$$F(x, t) = \{f(x, u, t) : u \in \mathcal{U}\}.$$

Si \mathcal{U} est compact, alors $F(x, t)$ est nécessairement compact, car f est continue.

Maintenant, nous énonçons des théorèmes et des corollaires présentés par *H.Fleming and W.Rishel* dans [7].

Théorème 1. *Supposons que (I) est vraie et de plus*

(a): *l'ensemble \mathcal{F}' est non vide ;*

(b): *\mathcal{U} est compact ;*

(c): *l'ensemble des conditions finales (x_0, t_0, x_1, t_1) noté S est compact et g est continue dans cet ensemble ;*

(d): *$F(x, t)$ est convexe pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.*

Alors il existe un couple (u^, x_0^*) qui minimise \mathcal{J} dans \mathcal{F}' .*

Nous citons de plus ce corollaire :

Corollaire 1. *Dans le théorème 1, nous pouvons remplacer la condition (d) par ceci :*

(d'): *\mathcal{U} est convexe et $f(x, u, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)u$.*

Ensuite, voici deux autres définitions :

Soit

$$\tilde{z} = (z, z_{n+1}), \text{ où } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n,$$

et, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\tilde{F}(x, t) = \{\tilde{z} : z = f(x, u, t), z_{n+1} \geq r(x, u, t), u \in \mathcal{U}\}.$$

Maintenant, nous donnons un deuxième théorème. **Théorème 2.** *Supposons que (I) est vraie, r est continue et aussi*

(a): *\mathcal{F}' est non vide ;*

(b): \mathcal{U} est fermé ;

(c): S est compact et g est continue dans S ;

(d): $\tilde{F}(x, t)$ est convexe pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$;

(e): $r(t, x, u) \geq h(u)$, où h est une fonction continue et $|u|^{-1}h(u) \rightarrow +\infty$ lorsque $|u| \rightarrow \infty$, $u \in \mathcal{U}$.

Alors il existe un couple (u^*, x_0^*) qui minimise \mathcal{J} dans \mathcal{F}' .

Une extension de ce théorème est le corollaire suivant.

Corollaire 2. Soit $\mu = \inf\{\mathcal{J}(u, x_0)\}$ et $\mu_1 > \mu$. Dans le théorème 2, nous pouvons remplacer n'importe quelles hypothèses **(c)**, **(d)** et **(e)** par les hypothèses correspondantes **(c')**, **(d')** et **(e')** telles que

(c'): g est continue dans S ; il existe un compact $S' \subset S$ tel que

$(t_0, t_1, x_0, x_1) \in S$ et $\mathcal{J}(u, x_0) \leq \mu_1$ implique que

$$(t_0, t_1, x_0, x_1) \in S'.$$

(d'): \mathcal{U} est convexe, $f(x, u, t) = \alpha(x, t) + \beta(x, t)u$, $r(x, \cdot, t)$ est convexe sur \mathcal{U} .

(e'): $r(x, u, t) \geq c_1|u|^\beta - c_2$, $c_1 > 0$, $\beta > 1$.

Maintenant, nous allons énoncer le principe de Pontriaguine qui est une donnée nécessaire pour l'optimalité, mais avant, nous mentionnons que ses conditions permettent surtout de réduire le calcul de la solution du problème de commande optimale à la résolution d'un problème aux limites pour un système d'équations différentielles.

Principe de Pontriaguine : Un couple réalisable $(u^*(t), x_0^*)$ représente la commande optimale et la condition optimale initiale pour le problème de commande optimale s'il existe un vecteur λ k -dimensionnel, non nul avec $\lambda_1 \leq 0$, et aussi une fonction vectorielle $P(t)$ n -dimensionnelle telle que pour $t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{P}(t)' = -P(t)'f_x(x^*, u^*, t); \quad (0.1.2)$$

et pour $t \in (t_0, t_1)$ et $u \in \mathcal{U}$

$$P(t)'[f(x^*, u, t) - f(x^*, u^*, t)] \leq 0; \quad (0.1.3)$$

$$P(t_1)' = \lambda' g_{x_1}(t_0, t_1, x_0, x_1); \quad (0.1.4)$$

$$P(t_0)' = \lambda' g_{x_0}(t_0, t_1, x_0, x_1); \quad (0.1.5)$$

$$P(t_1)'f(x^*, u^*, t_1) = \lambda' g_{t_1}(t_0, t_1, x_0, x_1); \quad (0.1.6)$$

$$P(t_0)'f(x^*, u^*, t_0) = \lambda' g_{t_0}(t_0, t_1, x_0, x_1). \quad (0.1.7)$$

Si de plus $f(x, u, t)$ a une dérivée partielle $f_t(x, u, t)$ continue, alors la condition

$$P(t)'f(x^*, u^*, t) = \lambda' g_{t_0}(t_0, t_1, x^*(t_0), x^*(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} P(s)'f_t(x^*, u^*, s) ds \quad (0.1.8)$$

est vérifiée pour tout $t \in [t_0, t_1]$.

La quantité

$$H(x, u, t) = P(t)'f(x, u, t) \quad (0.1.9)$$

est appelée *hamiltonien*. La condition (0.1.3) peut être exprimée sous la forme

$$\max_{u \in \mathcal{U}} \{H(x^*, u, t)\} = H(x^*, u^*, t) \quad (0.1.10)$$

et elle est appelée *principe du maximum de Pontriaguine*. De plus, les conditions (0.1.4)-(0.1.7) sont des généralisations des conditions trouvées dans les problèmes de calcul des variations et de commande optimale et qui sont dites *conditions de transversalité*. Enfin, l'équation (0.1.2) est nommée *équation adjointe*.

Une commande est dite *extrémale* si (0.1.2)-(0.1.8) sont satisfaites et la trajectoire correspondante vérifie la condition finale. Il s'ensuit que toute commande optimale est extrémale puisque les conditions du principe de Pontriaguine sont seulement nécessaires pour l'optimalité. Mais, puisqu'elles ne sont pas suffisantes, nous pouvons avoir des commandes extrémales, mais non optimales.

0.1.4.1. La résolution du problème de commande optimale

Après avoir présenté quelques théorèmes d'existence avec des corollaires, nous proposons une méthode de résolution de problème de commande optimale. En fait, il existe plusieurs façons de trouver la solution optimale, qui découlent pour la plupart de théories classiques anciennes. Elles se classent en trois grandes catégories :

- : méthode de programmation linéaire et non linéaire ;
- : méthode variationnelle ;
- : méthode de programmation dynamique.

Nous étudions principalement dans la suite de cette thèse cette dernière méthode.

Méthode de programmation dynamique. Elle a été initiée par Richard Bellman en 1957. Tout d'abord, nous définissons la fonction de valeur

$$V(s, y) = \inf_u \mathcal{J}(t_1, x_1).$$

Dans cette expression, nous exigeons que la commande u correspondante permette d'atteindre l'état final, c'est-à-dire arriver jusqu'au point (t_1, x_1) , et ceci à partir de l'état initial $(s, x(s) = y)$. Il est clair que si cette commande n'existe pas, alors $V(s, y)$ tendra vers l'infini.

La fonction de valeur devrait vérifier cette inégalité aux dérivées partielles :

$$V_s + V_y f(y, v, s) \geq 0,$$

pour tout $v \in \mathcal{U}$.

S'il existe une commande optimale u^* , alors l'équation aux dérivées partielles

$$\min_{v \in \mathcal{U}} \{V_s + V_y f(y, v, s)\} = 0$$

est satisfaite et le minimum est atteint par la limite à droite $u^*(s)^+$ de la commande optimale en s . Cette dernière équation aux dérivées partielles est appelée *équation aux dérivées partielles de programmation dynamique*.

Dans la suite, nous étudions les problèmes de commande optimale dans le cas de processus stochastiques.

0.1.4.2. *Le problème de commande optimale dans le cas d'un processus stochastique*

Nous commençons cette partie par une présentation du processus non commandé.

Le processus stochastique non commandé. Dans ce cas, une équation différentielle stochastique est de la forme

$$d\eta = b(t, \eta(t))dt + \sigma(t, \eta(t))dw, \quad (0.1.11)$$

où w est le mouvement brownien standard de dimension d . De plus, η est sous la forme $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ est une fonction à valeur vectorielle et qui est la dérive du processus η . Enfin, σ est une fonction à valeur matricielle, pas nécessairement carrée. Elle doit vérifier l'égalité $\sigma\sigma' = \alpha$, où α est la matrice de covariance du processus. Cette dernière est symétrique, définie positive et ses coefficients satisfont à

$$\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^d \sigma_{il}\sigma_{lj}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si nous écrivons l'équation différentielle ci-dessus en fonction des composantes, nous avons :

$$d\eta_i = b_i(t, \eta(t))dt + \sum_{l=1}^d \sigma_{il}(t, \eta(t))dw_l,$$

pour tout $i = 1, \dots, n$. Dénotons par s l'instant initial et par T l'instant final.

Voici une définition de la solution de (0.1.11).

Définition. Un processus stochastique $\{\eta(t)\}_{t \in [s, T]}$ est une *solution forte* de l'équation différentielle stochastique (0.1.11) avec condition initiale $\eta(s)$ si

(a): $\eta(t)$ est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \in [s, T]$, ($\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq s}$ désigne la filtration brownienne standard);

(b): les conditions de régularité suivantes sont vérifiées :

$$P \left\{ \int_s^T |b(r, \eta(r))| dr < \infty \right\} = P \left\{ \int_s^T \sigma(r, \eta(r))^2 < \infty \right\} = 1;$$

(c): pour tout $t \in [s, T]$, nous avons

$$\eta(t) = \eta(s) + \int_s^t b(r, \eta(r)) dr + \int_s^t \sigma(r, \eta(r)) dw(r) \quad (0.1.12)$$

avec une probabilité de 1.

Cette solution (0.1.12) de l'équation intégrale demeure valable tant que la deuxième intégrale a un sens mathématique. Cette intégrale est appelée *intégrale d'Itô*. Elle est valable si certaines conditions, que nous énonçons après, sont vérifiées.

Soit l'ensemble $Q^0 = (s, T) \times \mathbb{R}^n$. Nous supposons que b_i et σ_{ij} sont bien définies et Borel-mesurables dans l'espace fermé \bar{Q}^0 .

Nous faisons ensuite ces deux hypothèses :

(I') il existe une constante C telle que pour tout $(t, x) \in \bar{Q}^0$,

$$|b(t, x)| \leq C(1 + |x|), |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|).$$

(II') Pour tout ensemble borné $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s \leq T' < T$, il existe une constante K , qui peut dépendre de B et T' , telle que pour tout $x, y \in B$ et $s \leq t \leq T'$,

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|,$$

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Si **(I')** et **(II')** sont satisfaites et K ne dépend ni de B ni de T' , alors nous disons que *les conditions d'Itô* sont vérifiées. Autrement dit, b_i et σ_{il} sont de classe C^1 dans \bar{Q}^0 et leurs dérivées partielles d'ordre un par rapport à la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ sont bornées.

Nous présentons maintenant un théorème d'existence de la solution de (0.1.11).

Théorème 3. *Supposons que b et σ satisfont aux conditions **(I')** et **(II')**. De plus, $\eta(s)$ est indépendant du mouvement brownien w et $E|\eta(s)|^2 < \infty$. Alors une solution sous la forme (0.1.12) de l'équation intégrale stochastique existe. Elle est unique dans le sens suivant : s'il existe une autre solution η' de (0.1.12) avec $\eta'(s) = \eta(s)$, alors η et η' ont les mêmes trajectoires, avec une probabilité de 1.*

Nous poursuivons en proposant une définition nécessaire pour la suite de notre travail, mais tout d'abord, nous l'énonçons en dimension un.

Supposons que les hypothèses **(I')** et **(II')** sont vérifiées, alors nous définissons l'opérateur \mathcal{A} , appelé *générateur infinitésimal de la diffusion*. Pour toute fonction ϕ qui est C^2 , bornée et dont les dérivées première et seconde sont bornées, nous avons si $x \in \mathbb{R}$

$$(\mathcal{A}\phi)(x) = b(x)\phi'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x)^2\phi''(x).$$

En dimension n , nous aurions

$$\mathcal{A}(t)\phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}.$$

Cet opérateur va nous permettre à la fin de cette section de résoudre le problème de commande optimale dans le cas stochastique.

Le processus stochastique commandé. Dans ce cas, nous avons, pour tout $t \geq s$,

$$d\eta(t) = b(t, \eta(t), u(t))dt + \sigma(t, \eta(t), u(t))dw(t). \quad (0.1.13)$$

Ici, $\eta(t)$ est l'état du système à l'instant t , $u(t)$ est la commande appliquée à l'instant t et $w(t)$ est le mouvement brownien standard d -dimensionnel. Notons de plus que $\eta(s) = y$.

Nous faisons les hypothèses suivantes pour les fonctions $b(t, x, u)$ et $\sigma(t, x, u)$:

(a) elles sont deux fonctions de classe $C^1(\bar{Q}^0 \times \mathcal{U})$;

(b) pour une constante C

$$|b(t, 0, 0)| \leq C, |\sigma(t, 0, 0)| \leq C,$$

$$|b_x| + |b_u| \leq C, |\sigma_x| + |\sigma_u| \leq C.$$

Maintenant, pour une commande donnée u vérifiant certaines propriétés (énoncées ultérieurement) et une fonction $g(t, x, u)$, nous utilisons la notation

$$g^u(t, x) = g(t, x, u(t, x)).$$

Alors (0.1.13) s'écrit sous la forme

$$d\eta(t) = f^u(t, \eta(t))dt + \sigma^u(t, \eta(t))dw(t), \quad t \geq s.$$

Elle a la même forme que (0.1.11), sauf que les coefficients b^u et σ^u dépendent maintenant de la commande u .

De même, l'opérateur \mathcal{A} devient

$$\mathcal{A}^v(s) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^v(s, y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^n b_i^v(s, y) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Ces notations sont valables tant que la commande u est dite *admissible*, c'est-à-dire qu'elle est une fonction Borel-mesurable de \bar{Q}^0 dans \mathcal{U} , telle que

(i): pour tout (s, y) , il existe un mouvement brownien $w(t)$ tel que (0.1.13), avec la condition initiale $\eta(s) = y$, possède une solution η unique en probabilité;

(ii): pour tout $k > 0$, $E_{sy}|\eta(t)|^k$ est bornée pour $s \leq t \leq T$, et

$$E_{sy} \left\{ \int_s^T |u(t)|^k dt \right\} < \infty.$$

E_{sy} est l'espérance en tenant compte de l'état initial $\eta(s) = y$.

Le but de cette partie est de trouver la commande optimale admissible u^* qui minimise

$$\mathcal{J}(s, y, u) = E_{sy} \left\{ \int_s^\tau L(\eta(t), u(t), t) dt + \Psi(\tau, \eta(\tau)) \right\},$$

où τ est l'instant de sortie de l'espace de travail. Les fonctions L et Ψ sont continues et elles satisfont les deux inégalités

$$(a) \quad |L(t, x, u)| \leq C(1 + |x| + |u|)^k,$$

$$(b) \quad |\Psi(t, x)| \leq C(1 + |x|)^k,$$

pour deux constantes C et k .

De plus, nous posons Q l'espace ouvert contenant (s, y) . Une caractéristique nécessaire pour cet espace est que à partir de n'importe quel couple $(t_0, x(t_0)) \in Q$, nous pouvons toujours atteindre l'ensemble vérifiant la condition finale (c'est-à-dire atteindre $(\tau, \eta(\tau))$) avec une certaine trajectoire correspondant à une commande continue par morceaux. ∂^*Q est un sous-ensemble fermé de ∂Q tel que $(\tau, \eta(\tau)) \in \partial^*Q$ avec une probabilité de 1 et $C^{1,2}(Q)$ est l'ensemble des fonctions qui sont continues dans Q , de même que leurs dérivées partielles premières et deuxièmes.

Théorème 4. *Soit*

$$W(s, y) = \inf_u \mathcal{J}(s, y, u),$$

qui vérifie l'équation de programmation dynamique

$$0 = W_s + \min_{v \in \mathcal{U}} [\mathcal{A}^v(s)W + L(x, v, s)], (s, y) \in Q,$$

*avec la condition limite $W(s, y) = \Psi(s, y)$, si $(s, y) \in \partial^*Q$, sachant que W est $C^{1,2}(Q)$ et continue dans la fermeture \bar{Q} . Si u^* est une commande admissible telle que*

$$\mathcal{A}^{u^*}(s)W + L^{u^*}(s, y) = \min_{v \in \mathcal{U}} [\mathcal{A}^v(s)W + L(s, x, v)]$$

pour tout $(s, y) \in Q$, alors $W(s, y) = \mathcal{J}(s, y, u^)$ pour tout $(s, y) \in Q$ et nous déduisons que u^* est optimale.*

Cette thèse est basée principalement sur des travaux présentés dans quatre articles. Ces articles, dont j'étais l'auteur principal dans un cas, sont maintenant publiés.

Au premier chapitre, nous cherchons les solutions de problèmes de commande optimale dans le cas stochastique, et ceci en dimension un. La méthode de résolution permet dans certains cas de trouver des solutions exactes. Sinon, nous suivons différents chemins pour arriver à de bonnes approximations. Une comparaison de ces estimations sera proposée ensuite. De plus, quelques problèmes particuliers seront traités, à savoir des problèmes de commande optimale avec une seule barrière.

Les problèmes en dimension plus grande seront étudiés dans le deuxième chapitre. Nous passons, au début, au cas de dimension deux et nous essayons d'appliquer nos résultats sur ce genre de problèmes. Ensuite, nous proposons une nouvelle méthode de résolution qui permet principalement de linéariser l'équation de programmation dynamique, ce qui par la suite facilite le travail. Après, nous généralisons cette méthode en dimension n .

Chapitre 1

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES LQG EN DIMENSION UN

Dans ce premier chapitre, nous allons essayer de donner une solution pour les problèmes de commande optimale en dimension un dans le cas stochastique. Nous les appelons les problèmes LQG (Linear Quadratic Gaussian). Nous cherchons, alors, la commande qui minimise une fonction du cout quadratique, éventuellement sous des contraintes. Ceci se fait en maximisant ou minimisant le temps passé dans le domaine du travail en tenant compte de cout des commandes quadratiques et des couts finals (Voir le livre de *H.Fleming and W.Rishel* [7]). La méthode utilisée permet souvent d'avoir une solution exacte, mais parfois on se restreint à une solution approximative. L'importance de cette méthode provient du fait que, même avec un logiciel mathématique, la résolution directe (c'est-à-dire chercher la fonction de valeur) est impossible dans certains cas.

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion commandé dans un intervalle borné (d_1, d_2) . Le cas $d_1 = -\infty$ ou $d_2 = \infty$ sera traité à la fin du chapitre. Ce processus est défini par l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = f[X(t)]dt + b[X(t)]u[X(t)]dt + v[X(t)]^{1/2}dB(t),$$

où $u(\cdot)$ la commande, $f(\cdot)$, $b(\cdot)$ et $v(\cdot)$ sont des fonctions de Borel mesurables. $\{B(t), t \geq 0\}$ est le mouvement brownien standard.

Notre but est de trouver la commande qui minimise l'espérance mathématique de la fonction de coût

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q[X(t)] u^2[X(t)] + \lambda \right) dt + K(T(x), X(T(x))),$$

avec λ une constante, $q(\cdot)$ une fonction strictement positive sur (d_1, d_2) , $K(\cdot, \cdot)$ une fonction de classe C^1 et $T(x)$ se définit comme étant l'instant de premier passage

$$T(x) = \inf\{t > 0 : X(t) \in \{d_1, d_2\} | X(0) = x \in (d_1, d_2)\}.$$

Dans la suite, nous supposons que les hypothèses d'existence de la solution sont satisfaites pour tout $t \geq 0$. De plus, nous admettons que la solution est unique.

Remarque. Si λ est positive, la quantité $(\frac{1}{2}qu^2 + \lambda)$ est strictement positive sur (d_1, d_2) ; donc si $T(x)$ croît, $J(x)$ devient de plus en plus grande aussi. Puisque nous voulons minimiser la moyenne de $J(x)$, alors le processus va essayer de sortir du domaine le plus vite possible. Cependant, lorsque λ est négative, nous essayons de rester dans (d_1, d_2) le plus de temps possible, mais sans laisser $T(x)$ tendre vers l'infini parce que la fonction de coût va aller aussi vers l'infini dans ce cas. Nous montrerons dans une prochaine section, qu'il existe une λ_{cr} critique, tel que toute λ choisie doit être supérieure à $|\lambda_{cr}|$.

Avant de commencer la résolution de notre problème, nous devrions tout d'abord être certains que le processus va quitter nécessairement le domaine de travail. Cette condition est vérifiée ici parce que nous traitons le cas des processus de diffusion unidimensionnels dans des intervalles bornés.

Après, nous définissons la fonction de valeur

$$F(x) = \inf_u E(J(x, u)).$$

Cette fonction existe et elle est différentiable. En effet, nous avons supposé que les hypothèses d'existence du minimum sont satisfaites. De plus, $F(\cdot)$ est différentiable parce que $\frac{1}{2}q[X(t)]u^2[X(t)] + \lambda$ est continue et continûment dérivable. Cette fonction vérifie l'équation de programmation dynamique définie par

$$\inf_u \left\{ \frac{1}{2}q(x)u^2 + \lambda + F_t + [f(x) + b(x)u]F_x + \frac{1}{2}v(x)F_{xx} \right\} = 0,$$

où $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$, $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et avec les conditions limites $F(d_1) = F(d_2) = 0$.

Posons

$$H(u) = \frac{1}{2}q(x)u^2 + \lambda + F_t + [f(x) + b(x)u]F_x + \frac{1}{2}v(x)F_{xx}.$$

Notons par u^* la commande optimale que nous cherchons. Alors, $H(u)$ doit être minimale en u^* et par la suite

$$\frac{\partial H}{\partial u}(u^*) = qu^* + bF_x = 0.$$

Ceci implique enfin que

$$u^*(x) = -\frac{b(x)}{q(x)}F_x(x).$$

Si nous remplaçons l'expression de u^* dans $H(\cdot)$, nous aurons par conséquent cette équation aux dérivées partielles :

$$\lambda + F_t + f(x)F'(x) - \frac{b^2(x)}{2q(x)}[F'(x)]^2 + \frac{1}{2}v(x)F''(x) = 0, \quad (1.0.14)$$

qui est non linéaire. Souvent, trouver la solution est difficile, même en utilisant des logiciels mathématiques ; mais en 1982, *Whittle* présenta son théorème permettant de résoudre les problèmes **LQG**, si certaines conditions sont vérifiées.

1.1. THÉORÈME DE WHITTLE

Soit $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion commandé, en dimension n , défini par

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{X}(t)]dt + \mathbf{B}[\mathbf{X}(t)]\mathbf{u}[\mathbf{X}(t)]dt + \{\mathbf{N}[\mathbf{X}(t)]\}^{1/2}d\mathbf{W}(t),$$

où \mathbf{B} est une matrice $n \times m$ et \mathbf{N} est symétrique, définie positive. La commande $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ et \mathbf{W} est le mouvement brownien standard en dimension n . De plus, soit la fonction de coût qui est définie par

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{T(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}'[\mathbf{X}(t)]\mathbf{Q}[\mathbf{X}(t)]\mathbf{u}[\mathbf{X}(t)] + \lambda \right) dt,$$

avec \mathbf{Q} est une matrice définie positive, symétrique et λ est une constante. L'instant d'arrêt devient sous la forme

$$T(\mathbf{x}) = \inf\{t > 0 : \mathbf{X}(t) \in \partial\mathbf{D} | \mathbf{X}(0) = \mathbf{x} \in \mathbf{D}\},$$

où \mathbf{D} est le domaine de travail et $\partial\mathbf{D}$ sa frontière. Comme en dimension un, nous supposons que les conditions d'existence sont vérifiées et que le processus va nécessairement quitter la domaine \mathbf{D} . Maintenant, nous allons chercher la commande optimale \mathbf{u}^* qui minimise la fonction $F(\mathbf{x})$, définie par

$$F(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} E(J(\mathbf{x}, \mathbf{u})).$$

Elle doit vérifier l'équation de programmation dynamique

$$\inf_{\mathbf{u}} \left\{ \lambda + \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})' \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + F_t(\mathbf{x}) + F_x(\mathbf{x}) (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x})) + \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{x}) F_{xx}(\mathbf{x})] \right\} = 0,$$

où $F_t = \frac{\partial F}{\partial t}$, F_x est le jacobien de F et F_{xx} la matrice hessienne de F . La condition limite est $F(\mathbf{x}) = 0$, pour tout $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{D}$. Nous procédons maintenant comme en dimension un. Alors nous définissons une fonction $H(\cdot)$ exprimée par

$$H(\mathbf{u}) = \lambda + \frac{1}{2} \mathbf{u}(\mathbf{x})' \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) + F_t(\mathbf{x}) + F_x(\mathbf{x}) [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{x}) F_{xx}(\mathbf{x})].$$

Si nous dérivons cette fonction par rapport à \mathbf{u} , nous déduisons à la fin la commande optimale \mathbf{u}^* qui est égale à

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{F}'_x(\mathbf{x}).$$

Remplaçons alors \mathbf{u}^* par son expression dans $H(\cdot)$. Donc, nous aurons

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}^*) &= \lambda + \frac{1}{2}\mathbf{u}^*(\mathbf{x})'\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) + F_t(\mathbf{x}) + F_x(\mathbf{x}) [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^*(\mathbf{x})] \\ &+ \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{x})F_{xx}(\mathbf{x})] \\ &= \lambda + \frac{1}{2}F_x(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{F}'_x(\mathbf{x}) + F_t(\mathbf{x}) \\ &+ F_x(\mathbf{x}) [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{F}'_x(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{N}(\mathbf{x})F_{xx}(\mathbf{x})] \\ &= 0. \end{aligned}$$

C'est une équation aux dérivées partielles non-linéaire et elle s'écrit après simplification sous la forme

$$\lambda + F_t(\mathbf{x}) + F_x(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}F_x(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{F}'_x(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{N}F_{xx}(\mathbf{x})] = 0. \quad (1.1.1)$$

Maintenant, supposons pour ce même processus que la commande est nulle. Il s'ensuit que la nouvelle équation différentielle stochastique est

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X})dt + \{\mathbf{N}(\mathbf{X})\}^{\frac{1}{2}}d\mathbf{W}(t),$$

et la nouvelle fonction de coût est

$$J_1(\mathbf{x}) = \int_0^{\tau(\mathbf{x})} \lambda dt = \lambda\tau(\mathbf{x}),$$

où $\tau(\mathbf{x})$ est le moment du premier passage à la frontière pour le processus non commandé. Nous verrons, dans la suite, que Whittle utilisera ce processus non commandé pour la résolution de l'équation de Kolmogorov obtenue après linéarisation.

Nous présentons maintenant le théorème de Whittle.

Théorème de Whittle *Soit α un scalaire vérifiant*

$$\alpha \mathbf{N} = \mathbf{BQ}^{-1} \mathbf{B}'.$$

Alors nous pouvons linéariser l'équation (1.1.1) si nous appliquons la transformation

$$\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-\alpha F(\mathbf{x}, t)},$$

où $\phi(\mathbf{x}, t) = E(e^{-\lambda \alpha \tau(\mathbf{x})})$, avec la condition $\phi(\mathbf{x}, t) = 1$, pour tout $\mathbf{x} \in \partial \mathbf{D}$.

La nouvelle équation aux dérivées partielles linéaire est sous la forme

$$\alpha \lambda \phi - \phi_t - \phi_x \mathbf{f} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{N} \phi_{xx}) = 0.$$

Remarques.

i. L'équation obtenue après linéarisation est une équation de Kolmogorov, donc la solution peut s'écrire sous la forme d'une espérance mathématique.

ii. Nous pouvons, au départ, examiner si la matrice $\mathbf{BQ}^{-1} \mathbf{B}'$ est inversible, mais ceci n'est pas très important. En effet, si nous arrivons à calculer ce produit matriciel, il ne nous reste alors qu'à vérifier s'il est proportionnel à la matrice \mathbf{N} .

Preuve du théorème. Soit α une constante positive telle que

$$\alpha \mathbf{N} = \mathbf{BQ}^{-1} \mathbf{B}'.$$

Écrivons \mathbf{N} sous la forme

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soit $\phi(\mathbf{x}, t) = e^{-\alpha F(\mathbf{x}, t)}$; alors

$$\begin{cases} \phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\alpha \phi F_t \\ \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\alpha \phi F_x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_t = -\frac{1}{\alpha} \frac{\phi_t}{\phi}, \\ \phi F_x = -\frac{1}{\alpha} \phi_x, \\ (\phi F_x)_x = -\frac{1}{\alpha} \phi_{xx}. \end{cases}$$

De plus, nous avons

$$\phi F_x = \left(\phi \frac{\partial F}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \phi \frac{\partial F}{\partial x_n} \right),$$

donc pour tout $1 \leq i, j \leq n$

$$[(\phi F_x)_x]_{ij} = \phi \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

et qui peut s'écrire sous la forme

$$(\phi F_x)_x = \phi F_{xx} + F'_x \phi_x = \phi F_{xx} - \alpha \phi F'_x F_x.$$

Encore,

$$\phi_{xx} = -\alpha \phi F_{xx} + \alpha^2 \phi F'_x F_x.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{N} \phi_{xx} = -\alpha \phi \mathbf{N} F_{xx} + \alpha^2 \phi \mathbf{N} F'_x F_x.$$

Revenons maintenant à l'expression de $H(\mathbf{u}^*)$ et multiplions par ϕ . Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
\phi H(\mathbf{u}^*) &= \lambda\phi + \phi F_t + \phi F_x \mathbf{f} - \frac{\phi}{2} F_x \mathbf{B} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}' F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}(\phi \mathbf{N} F_{xx}) \\
&= \lambda\phi - \frac{\phi_t}{\alpha} - \frac{\phi_x}{\alpha} \mathbf{f} - \frac{\alpha\phi}{2} F_x \mathbf{N} F'_x + \frac{1}{2} \text{tr}\left(-\frac{1}{\alpha} \mathbf{N} \phi_{xx} + \alpha\phi \mathbf{N} F'_x F_x\right) \\
&= \lambda\phi - \frac{\phi_t}{\alpha} - \frac{\phi_x}{\alpha} \mathbf{f} - \frac{1}{2\alpha} \text{tr}(\mathbf{N} \phi_{xx}) - \frac{\alpha\phi}{2} (F_x \mathbf{N} F'_x - \text{tr}(\mathbf{N} F'_x F_x)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notre but est de trouver une équation aux dérivées partielles linéaire. Ceci est possible si

$$F_x \mathbf{N} F'_x = \text{tr}(\mathbf{N} F'_x F_x).$$

En effet,

$$\text{tr}(\mathbf{N} F'_x F_x) = \text{tr}(F_x \mathbf{N} F'_x) = F_x \mathbf{N} F'_x.$$

Donc, nous avons à la fin cette équation aux dérivées partielles linéaire

$$\lambda\alpha\phi - \phi_t - \phi_x \mathbf{f} - \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{N} \phi_{xx}) = 0.$$

À la fin, c'est clair que lorsque $\mathbf{x} \in \partial\mathbf{D}$, alors $F(\mathbf{x}, t) = 0$ et par la suite

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 1.$$

■

Dans les prochaines sections, nous allons chercher les solutions exactes des problèmes de commande optimale en dimension un. C'est pour cela que nous présentons, dans la suite, la façon de résoudre ces problèmes avec le théorème de Whittle. En effet, s'il existe un scalaire α vérifiant

$$\alpha v = \frac{b^2}{q},$$

nous pouvons alors écrire

$$F(x, t) = -\frac{1}{\alpha} \ln M(x, t) \Leftrightarrow M(x, t) = e^{-\alpha F(x, t)},$$

où $M(x, t) = E(e^{-\lambda \alpha \tau(x)}) = M_{\tau(x)}(-\lambda \alpha)$ qui est la transformée de Laplace de la fonction de densité de la variable aléatoire continue et non négative $\tau(x)$. Elle est égale à la fonction génératrice des moments $M_{\tau(x)}(-\lambda \alpha)$ de cette variable.

Si nous remplaçons dans (1.0.14), nous obtenons cette équation aux dérivées partielles, de type parabolique

$$-\lambda \alpha M(x, t) + M_t(x, t) + f M_x(x, t) + \frac{1}{2} v M_{xx}(x, t) = 0, \quad (1.1.2)$$

telle que $M(d_1, t) = M(d_2, t) = 1$. C'est une équation de Kolmogorov pour le processus non commandé correspondant.

Pour résoudre l'équation, nous utilisons la transformée de Laplace de l'équation afin de la réduire en une équation différentielle ordinaire. Alors pour un γ positif, soit

$$L(x, \gamma) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} M(x, t) dt.$$

Multiplions des deux côtés par $e^{-\gamma t}$ et intégrons entre zéro et l'infini par rapport à t . Nous obtenons

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} M_t(x, t) dt = [M(x, t) e^{-\gamma t}]_0^{\infty} + \gamma \int_0^{\infty} M(x, t) e^{-\gamma t} dt = \gamma L(x, \gamma)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} M_x(x, t) dt = \frac{\partial L(x, \gamma)}{\partial x} = L_x(x, \gamma)$$

et

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t} M_{xx}(x, t) dt = \frac{\partial^2 L(x, \gamma)}{\partial x^2} = L_{xx}(x, \gamma).$$

L'équation (1.1.2) sera donc

$$\frac{1}{2} v \frac{\partial^2 L(x, \gamma)}{\partial x^2} + f \frac{\partial L(x, \gamma)}{\partial x} + (\gamma - \alpha \lambda) L(x, \gamma) = 0, \quad (1.1.3)$$

qui est une équation différentielle du second ordre avec les conditions limites $L(d_1, \gamma) = L(d_2, \gamma) = 1$ et qui se résout parfois d'une façon explicite.

Remarque. Lorsque $v[X(t)]$, $b[X(t)]$ et $q[X(t)]$ sont des constantes positives, la condition de *Whittle* est toujours satisfaite, et par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème de Whittle. Cependant, si deux de ces fonctions (ou toutes) ne sont pas constantes, nous pouvons dire que nous sommes dans un cas spécial si la condition est vérifiée. Bien sûr, si une seule des trois fonctions est non constante, alors le théorème de Whittle est non applicable.

Notons qu'à partir de maintenant, nous allons supposer que tous les paramètres sont invariants par rapport au temps, ce qui implique que $F_t = 0$. En dimension un, l'équation 1.1.3 devient alors une équation différentielle ordinaire d'ordre deux.

Appliquons maintenant ce théorème sur un premier exemple.

Exemple 1.

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$ un processus commandé de Wiener avec dérive f non nul et de paramètre de variance σ^2 . b_0 est une constante non nulle. Ce processus est défini par l'équation différentielle stochastique commandée

$$dX(t) = f dt + b_0 u[X(t)] dt + \sigma dW(t).$$

La fonction $J(x)$ est égale à

$$J(x) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q_0 u[X(t)]^2 + \lambda \right) dt,$$

où q_0 est un scalaire strictement positif. Nous choisissons $\lambda > 0$; alors l'optimiseur essaiera dans ce cas de sortir le plus tôt possible de l'intervalle (d_1, d_2) .

Un exemple pratique de ce problème est le suivant : Supposons que nous avons

un objet qui se déplace vers le haut. La variable $X(t)$ représente la hauteur de cet objet. Notre but est de le ramener en haut ou en bas le plus tôt possible.

Puisque tous les termes sont constants, alors la condition de Whittle est nécessairement vérifiée et nous avons

$$\alpha = \frac{b_0^2}{q_0 \sigma^2}.$$

La fonction $F(x)$ peut s'écrire, donc, sous la forme

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha} \ln M(x),$$

telle que $M(x) = E[e^{-\alpha \lambda \tau(x)}]$ et $\tau(x)$ est définie comme la variable aléatoire $T(x)$, mais dans le cas du processus non commandé $\{\eta(t), t \geq 0\}$ défini par

$$d\eta(t) = f dt + \sigma dB(t).$$

La nouvelle équation différentielle à résoudre est

$$-\lambda \alpha M(x) + \mu M'(x) + \frac{1}{2} \sigma^2 M''(x) = 0,$$

avec les conditions limites $M(d_1) = 1$ et $M(d_2) = 1$. Un calcul direct nous donne que

$$M(x) \propto A_-(x, d_1) - A_-(x, d_2) + A_+(x, d_1) - A_+(x, d_2)$$

tel que

$$A_{\pm}(x, d_i) := \exp \left\{ \frac{-1}{\sigma^2} [(x + d_i) f \pm (x - d_i) \delta] \right\}$$

pour $i = 1, 2$, et

$$\delta := (f^2 + 2\alpha \lambda \sigma^2)^{\frac{1}{2}},$$

la commande optimale est égale à

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0} F'(x) = -\frac{f}{b_0} - \frac{\delta}{b_0} \left\{ \frac{A_-(x, d_1) - A_-(x, d_2) + A_+(x, d_1) - A_+(x, d_2)}{A_-(x, d_2) - A_-(x, d_1) + A_+(x, d_1) - A_+(x, d_2)} \right\}.$$

Si nous n'appliquons pas le théorème de Whittle, nous devons faire le calcul direct, c'est-à-dire que nous cherchons la fonction $F(x)$ et après nous dérivons pour retrouver la commande optimale. Par exemple, lorsque nous choisissons $f = b_0 = q_0 = \lambda = \sigma^2 = 1$, $d_1 = 0$ et $d_2 = 2$, l'équation différentielle à résoudre est sous la forme

$$1 + F'(x) - \frac{1}{2}[F'(x)]^2 + \frac{1}{2}F''(x) = 0,$$

et telle que $F(0) = 0$ et $F(2) = 0$. Nous aurions alors

$$F(x) = x + x\sqrt{3} - \ln \left\{ \frac{-e^{2x\sqrt{3}} + e^{2x\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}} - e^{2+2\sqrt{3}} + e^{4\sqrt{3}}}{e^{4\sqrt{3}} - 1} \right\},$$

et par la suite, la commande optimale correspondante est égale à

$$u^*(x) = -F'(x) = -1 - \sqrt{3} + \frac{-2\sqrt{3}e^{2x\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}e^{2x\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}}}{-e^{2x\sqrt{3}} + e^{2x\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}} - e^{2+2\sqrt{3}} + e^{4\sqrt{3}}}.$$

Nous pouvons facilement vérifier que c'est le même résultat que celui trouvé avec le théorème de Whittle.

Remarque. Le théorème de Whittle facilite bien les calculs, sauf que la vérification de la condition de linéarisation devient plus compliquée pour les dimensions supérieures ou égales à deux.

Question.

Si la condition de Whittle n'est pas vérifiée, parfois nous ne pouvons pas trouver la solution même avec la méthode directe. Qu'allons nous faire ?

Avant de répondre à cette question, nous traçons la courbe de $u^*(x)$ (**Figure 1.1**) pour ce dernier exemple.

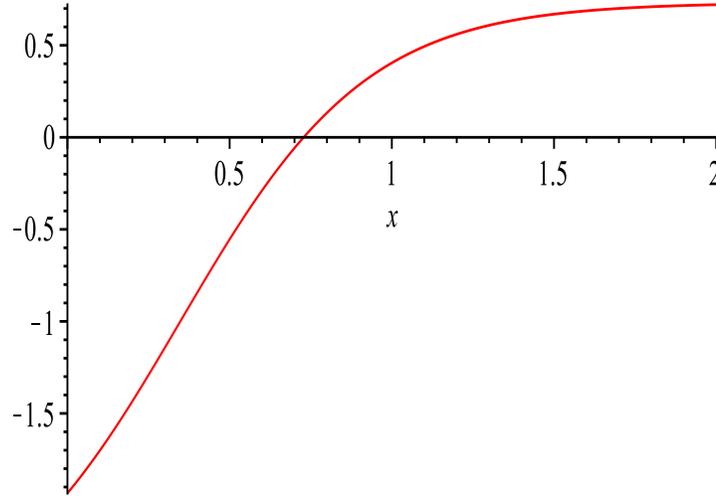


FIGURE 1.1. La commande optimale avec $f = \sigma^2 = b_0 = q_0 = \lambda = 1$, $d_1 = 0$ et $d_2 = 2$.

1.2. SOLUTION EXACTE DU PROBLÈME LQG

Dans cette thèse, nous allons tout d'abord présenté une méthode de résolution de ces problèmes en dimension un. La façon de faire permet de trouver des solutions exactes ou bien des bonnes approximations. Après, nous essayons d'appliquer la même méthode en dimension deux, puis nous présentons une généralisation du théorème de Whittle.

Regardons premièrement l'expression de la commande optimale $u^*(x)$ et encore l'équation différentielle (1.0.14). Nous remarquons que nous pouvons réduire notre problème à chercher $F'(x)$, puisque l'équation (1.0.14) ne dépend que de $F'(x)$ et de $F''(x)$ et, en plus, $u^*(x)$ est en fonction seulement de $F'(x)$. Dans ce cas, nous devrions trouver une condition initiale pour la nouvelle variable $F'(x)$, qui satisfait à cette équation différentielle :

$$\lambda + f(x)G(x) - \frac{1}{2} \frac{b^2(x)}{q(x)} G^2(x) + \frac{1}{2} v(x) G'(x) = 0, \quad (1.2.1)$$

si nous posons $G(x) := F'(x)$. Cette nouvelle fonction existe puisque la fonction $F(\cdot)$ existe et elle est deux fois différentiable. En général, trouver une condition

pour $G(x)$ n'est pas évident, mais parfois, si les paramètres $f(x)$, $b(x)$, $\sigma^2(x)$ et $q(x)$ vérifient certaines conditions, nous pouvons en déduire le point noté par $x_0 \in (d_1, d_2)$, où $F(\cdot)$ est maximale (resp. minimale) et ceci est équivalent à dire dans notre problème à

$$F'(x_0) = G(x_0) = 0.$$

Commençons par cet exemple : Posons $b(x) = b_0 x^k$, $q(x) = q_0$ où $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, b_0 et q_0 sont deux constantes strictement positives. Avant de donner le résultat dans ce cas général, nous traitons quelques cas particuliers. Pour $k = 1$, nous commençons par le processus de Wiener avec dérive nulle et $\sigma^2(x) = 1$. L'intervalle (d_1, d_2) est de la forme $(-d, d)$. L'équation différentielle déduite de l'équation de programmation dynamique est

$$\lambda - \frac{b_0 x^2}{2q_0} (F'(x))^2 + \frac{1}{2} F''(x) = 0, \quad (1.2.2)$$

avec les conditions limites $F(d) = F(-d) = 0$. Nous choisissons λ négative. Nous avons

$$\frac{b^2(x)}{q(x)\sigma^2(x)} = \frac{b_0^2}{q_0} x^2.$$

C'est clair que nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Whittle dans ce cas. Essayons alors de faire le calcul direct avec un logiciel mathématique. La solution de (1.2.2) est exprimée par

$$F(x) = -\frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0} \int_{-d}^x \frac{c_1 Y_{-\frac{1}{4}}(\delta \frac{z^2}{2}) + J_{-\frac{1}{4}}(\delta \frac{z^2}{2})}{z (c_1 Y_{\frac{3}{4}}(\delta \frac{z^2}{2}) + J_{\frac{3}{4}}(\delta \frac{z^2}{2}))} dz, \quad (1.2.3)$$

telle que $\delta = \frac{\sqrt{-2\lambda}}{\sqrt{q_0}} b_0$. J_ν et Y_ν sont deux fonctions de Bessel et c_1 une constante qui doit vérifier $F(d) = 0$. Cette dernière condition est satisfaite pour tout choix de c_1 . En effet, nous pouvons remarquer que la fonction sous l'intégrale $F'(\cdot)$ est impaire et donc l'intégrale est toujours nulle sur $(-d, d)$. Sinon, il semble très difficile d'évaluer $F(x)$ explicitement.

Remarque. La fonction de Bessel Y_ν n'est pas définie en 0, donc, il faut que $F'(\cdot)$

soit intégrable dans l'intervalle $(-d, d)$.

Dans la suite, nous cherchons une autre façon pour identifier c_1 .

Maintenant, regardons l'expression de la commande optimale $u^*(x)$. Elle est cette fois-ci sous la forme

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0} x F'(x).$$

L'optimiseur essaie de maximiser le temps passé par le processus dans l'intervalle $(-d, d)$, en prenant en considération les coûts de commandes quadratiques. Nous pouvons affirmer, par symétrie, que la meilleure position pour le processus est en zéro. Alors, $F(x)$ admet nécessairement un minimum en ce point et nous avons $F'(0) = 0$. Ceci implique que $u^*(0) = 0$. Avec cette condition déduite, nous pouvons trouver une forme explicite de $u^*(x)$. En effet, d'après (1.2.3), nous déduisons que

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0} \frac{c_1 Y_{-\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2}) + J_{-\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}{x (c_1 Y_{\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2}) + J_{\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2}))}.$$

De plus, en utilisant la formule (voir *Abramowitz and Stegun*, 1965)

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)},$$

qui est valable pour tout $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$, nous pouvons écrire $F'(x)$ sous la forme

$$F'(x) = -\frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0 x} \frac{(1 - c_1) J_{-\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2}) + \sqrt{2} c_1 J_{\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}{(1 - c_1) J_{\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2}) - \sqrt{2} c_1 J_{-\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}. \quad (1.2.4)$$

De plus, en utilisant cette formule (voir *Abramowitz and Stegun*, 1965)

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}$$

lorsque $z \rightarrow 0$ et $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$, nous trouvons que

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \frac{\sqrt{-2\lambda}}{b_0} \frac{(1 - c_1)}{c_1} \frac{\delta^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})},$$

et, par la suite, nous déduisons que $c_1 = 1$. Alors

$$F'(x) = \frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0 x} \frac{J_{\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}{J_{-\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}, \quad (1.2.5)$$

et enfin la commande optimale est égale à

$$u^*(x) = -\frac{\sqrt{-2\lambda}}{\sqrt{q_0}} \frac{J_{\frac{1}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}{J_{-\frac{3}{4}}(\delta \frac{x^2}{2})}, \quad (1.2.6)$$

pour tout $-d < x < d$.

Remarques.

i. Supposons tout d'abord que la constante λ est négative. Écrivons l'équation différentielle stochastique commandée du processus :

$$dX(t) = b_0 X(t) u[X(t)] dt + dB(t).$$

L'optimiseur voudrait maximiser le temps passé dans l'intervalle $(-d, d)$, alors si le processus est à la position x tel que $x \in (-d, 0)$, $dX(t)$ doit être positive et ceci est équivalent à dire que $u^*(x) < 0$ sur $(-d, 0)$. Vérifions cette déduction en regardant l'expression retrouvée de $u^*(x)$. Nous avons

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0} x F'(x).$$

Si $x \in (-d, 0)$, $-\frac{b_0}{q_0} x > 0$ et $F'(x) < 0$ puisque $F(x)$ admet un minimum en zéro. De même, si nous étudions le cas pour lequel $x \in (0, d)$. Il faut que $dX(t)$ soit négative et donc $u^*(x) < 0$. Ceci est vrai parce que $-\frac{b_0}{q_0} x < 0$ et $F'(x) > 0$ sur $(0, d)$. En conclusion, $u^*(x)$ est négative pour tout $x \neq 0$.

ii. Si λ est positive, l'optimiseur va essayer de sortir le plus vite possible de l'intervalle $(-d, d)$; alors, par symétrie, la pire position est en zéro. En ce point, la fonction $F(x)$ est maximale et on a $F'(0) = 0$. Faisons une analyse comme dans l'autre cas. Sur $(-d, 0)$, $dX(t)$ devrait être négative et donc $u^*(x) > 0$.

Regardons pour l'expression de $u^*(x)$. Nous avons $-\frac{b_0}{q_0}x > 0$ et $F'(x) > 0$ pour tout $x \in (-d, 0)$ et ceci confirme notre conclusion. Maintenant, si $x \in (0, d)$, $u^*(x)$ devrait être positive et par la suite $dX(t)$ devient positive. Ce résultat est juste car $-\frac{b_0}{q_0}x < 0$ et $F'(x) < 0$. Alors nous en déduisons que $u^*(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Nous allons maintenant tracer la courbe de la commande optimale dans le cas de $\lambda < 0$. Nous faisons deux graphes, avec deux λ différentes. Pour la première (**Figure 1.2**), nous prenons $b_0 = q_0 = d = 1$ et $\lambda = -2$. Dans ce cas $\delta = 2$ et la commande optimale est sous la forme

$$u^*(x) = -2 \frac{J_{\frac{1}{4}}(x^2)}{J_{-\frac{3}{4}}(x^2)}.$$

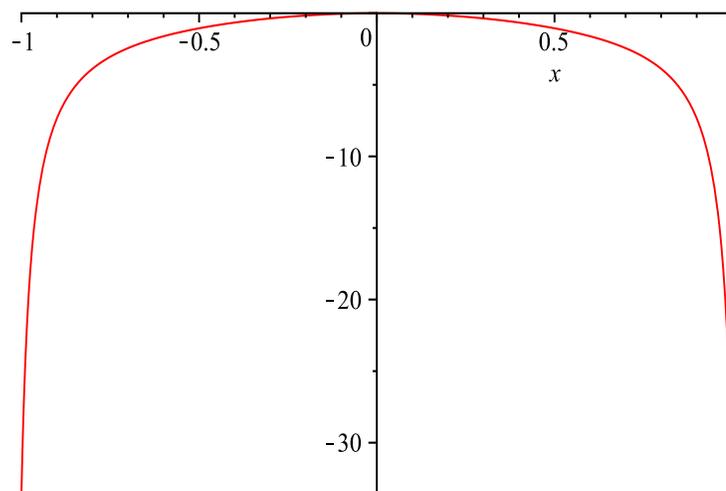


FIGURE 1.2. La commande optimale avec $b_0 = q_0 = d = 1$, $\lambda = -2$.

Pour le deuxième cas (**Figure 1.3**), nous changeons seulement λ et nous choisissons $\lambda = -3$. Il s'ensuit que $\delta = \sqrt{6}$ et la commande optimale

$$u^*(x) = -\sqrt{6} \frac{J_{\frac{1}{4}}(\frac{\sqrt{6}}{2}x^2)}{J_{-\frac{3}{4}}(\frac{\sqrt{6}}{2}x^2)}.$$

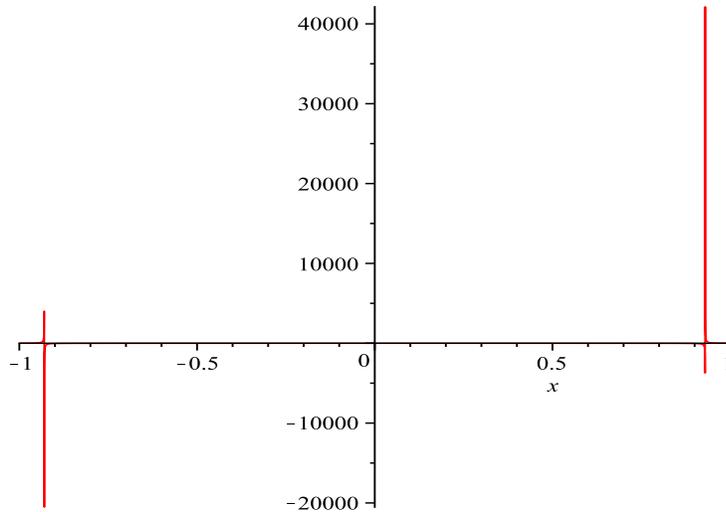


FIGURE 1.3. La commande optimale avec $b_0 = q_0 = d = 1, \lambda = -3$.

Nous remarquons que la première courbe vérifie bien nos conclusions, alors que ce n'est pas le cas pour la deuxième, parce que nous constatons que la commande optimale devient positive pour certains $x \in (-1, 1)$, malgré que $\lambda < 0$. En effet, le processus essaiera dans ce cas de rester le plus de temps possible dans l'intervalle $(-d, d)$, tandis que notre but est de minimiser la fonction de coût

$$\begin{aligned} J(x) &= \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q_0 u(x(t))^2 + \lambda \right) dt = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q_0 u(x(t))^2 \right) dt + \lambda T(x) \\ &= I_1[T(x)] + I_2[T(x)]. \end{aligned}$$

Puisque nous sommes dans un intervalle borné, le processus va quitter nécessairement (d_1, d_2) et par la suite $T(x)$ est fini. $J(x)$ est la somme de deux quantités de signes opposés. De plus, lorsque $T(x)$ croît, $I_1(x)$ et $I_2(x)$ croissent en valeurs absolues d'une façon simultanée. Ceci pourrait faire tendre $T(x)$ vers l'infini parfois, ce qui contredit l'hypothèse que $T(x)$ est fini. Comme nous l'avons dit précédemment, la première courbe vérifie nos déductions, mais pas

la deuxième. Donc nous pouvons conclure qu'il existe une certaine valeur critique λ_{cr} telle que tout choix de λ négative doit vérifier $\lambda > -|\lambda_{cr}|$. Ce λ_{cr} dépend principalement des autres paramètres b_0 , q_0 et d . Inversement, si nous fixons λ , nous pouvons trouver la plus grande valeur de d .

Maintenant, nous essayons de trouver λ_{cr} . À cause de sa forme intégrale, trouver la valeur de λ qui rend la fonction $F(x)$ infinie est très difficile ; alors nous devrions procéder autrement. Une façon de résoudre ce problème consiste à chercher le plus petit x positif pour lequel le dénominateur dans (1.2.5) est nul. Soit $g(x)$ la fonction qui est égale à

$$g(x) = xJ_{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Approximativement, elle s'annule en $x \simeq 1.455$, ce qui implique que d doit vérifier $\sqrt{\delta d} \simeq 1.455$. Si nous choisissons b_0 , q_0 et d , nous avons

$$\delta d^2 = (1.455)^2 = \frac{-2\lambda_{cr}}{\sqrt{q_0}} b_0 d^2$$

\Leftrightarrow

$$\left(\frac{1.455}{d}\right)^2 = \frac{b_0}{\sqrt{q_0}} \sqrt{-2\lambda_{cr}}$$

\Leftrightarrow

$$\lambda_{cr} = -\frac{q_0}{2b_0^2} \left(\frac{1.455}{d}\right)^4.$$

Dans notre exemple, nous avons pris $q_0 = b_0 = d = 1$; alors

$$\lambda_{cr} \simeq -2.24.$$

Conclusion : Pour trouver une solution du problème d'optimisation dans cet exemple, il faut que λ soit plus grande que -2.24 .

Prenons un cas plus général, en posant $f(x) = \frac{\theta-1}{2x}$, $b(x) = b_0x^k$ et $v(x) = 1$. C'est un processus de Bessel commandé dans un intervalle de la forme $(-d, d)$. Choisissons θ tel que $\theta \in (0, 2)$. Si θ est égal à 1, alors nous revenons au cas d'un mouvement brownien standard. Pour que le théorème de Whittle soit applicable, il faut qu'il existe un scalaire α vérifiant

$$\alpha = \frac{b_0^2}{q_0}x^{2k},$$

mais ceci n'est vrai que si k est égal à zéro. Nous choisissons alors $k > 0$ et $\lambda < 0$. La commande optimale $u^*(x)$ est égale à

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0}x^k F'(x) = -\frac{b_0}{q_0}x^k G(x).$$

L'équation différentielle à résoudre est de la forme

$$\lambda + \frac{\theta-1}{2x}G(x) - \frac{b_0^2}{2q_0}x^{2k}G^2(x) + \frac{1}{2}G'(x) = 0. \quad (1.2.7)$$

La solution est de la forme

$$G(x) = \frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0x^k} \left\{ \frac{J_\nu(cx^{k+1}) + c_0Y_\nu(cx^{k+1})}{J_{\nu-1}(cx^{k+1}) + c_0Y_{\nu-1}(cx^{k+1})} \right\},$$

telle que J_ν et Y_ν sont deux fonctions de Bessel et c_0 une constante arbitraire,

$$\nu := \frac{\theta}{2(k+1)} \quad \text{et} \quad c := \frac{b_0\sqrt{-\frac{2\lambda}{q_0}}}{k+1}.$$

Cependant, si λ est positive, $G(x)$ s'écrit sous la forme

$$G(x) = \frac{\sqrt{2\lambda q_0}}{b_0x^k} \left\{ \frac{c_0K_\nu(c^*x^{k+1}) - I_\nu(c^*x^{k+1})}{c_0K_{\nu-1}(c^*x^{k+1}) + I_{\nu-1}(c^*x^{k+1})} \right\},$$

où I_ν et K_ν sont deux fonctions de Bessel modifiées et

$$c^* := \frac{b_0\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}}{k+1} = ic.$$

Les paramètres infinitésimaux sont symétriques par rapport à zéro. En effet, $f(x)$ est impaire tandis que $v(x)$ est paire. De plus, $b_0^2x^{2k}$ est paire et aussi pour

la fonction constante $q(x) = q_0$. Alors la fonction de coût sera minimale en zéro (resp. maximale), puisque λ est négative (resp. positive). Nous avons donc

$$F'(0) = G(0) = 0.$$

Puisque nous sommes dans le cas de λ négative, alors la solution de (1.2.7) est

$$G(x) \sim \frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0 x^k} \times \frac{\left\{ \frac{(cx^{k+1})^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(1 + c_0 \frac{\cos[\nu\pi]}{\sin[\nu\pi]} \right) - \frac{c_0}{\sin[\nu\pi]} \frac{(cx^{k+1})^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} \right\}}{\left\{ \frac{(cx^{k+1})^{\nu-1}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \left(1 + c_0 \frac{\cos[(\nu-1)\pi]}{\sin[(\nu-1)\pi]} \right) - \frac{c_0}{\sin[(\nu-1)\pi]} \frac{(cx^{k+1})^{-(\nu-1)}}{2^{-(\nu-1)} \Gamma(-\nu+2)} \right\}}.$$

Nous pouvons écrire $G(x)$ sous la forme

$$G(x) \simeq \frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0} \frac{c_1 x^{\frac{\theta}{2}} + c_2 x^{-\frac{\theta}{2}}}{c_3 x^{\frac{\theta}{2}-1} + c_4 x^{-\frac{\theta}{2}+2k+1}},$$

où les c_i sont des constantes égales à

$$\begin{cases} c_1 = \frac{c^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(1 + c_0 \frac{\cos[\nu\pi]}{\sin[\nu\pi]} \right), \\ c_2 = -\frac{c^{-\nu}}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)} \frac{c_0}{\sin[\nu\pi]}, \\ c_3 = \frac{c^{\nu-1}}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \left(1 + c_0 \frac{\cos[(\nu-1)\pi]}{\sin[(\nu-1)\pi]} \right), \\ c_4 = -\frac{c_0}{\sin[(\nu-1)\pi]} \frac{c^{-(\nu-1)}}{2^{-(\nu-1)} \Gamma(-\nu+2)}. \end{cases}$$

Si $\theta \in (1, 2)$, alors nous devons avoir $c_2 = 0$. Ceci implique que c_0 est nulle et par la suite c_4 l'est aussi. Enfin, la fonction $G(x)$ est sous la forme

$$G(x) = \frac{\sqrt{-2\lambda q_0}}{b_0 x^k} \left\{ \frac{J_\nu(cx^{k+1})}{J_{\nu-1}(cx^{k+1})} \right\}.$$

Cette expression est valable tant que le dénominateur est positif. En effet, pour les fonctions $J_{\nu-1}(cx^{k+1})$ et $J_\nu(cx^{k+1})$, elles sont de mêmes signes à partir de zéro, jusqu'à ce que la première change de signe avant la deuxième, ce qui change le signe de $G(x)$, mais ceci est absurde. Cette conclusion est équivalente au fait qu'il existe une valeur critique λ_{cr} , comme dans le cas $k = 0$.

Finalement, la commande optimale est sous la forme

$$\mathbf{u}^*(x) = \frac{\sqrt{-2\lambda}}{q_0} \left\{ \frac{J_\nu(cx^{k+1})}{J_{\nu-1}(cx^{k+1})} \right\}.$$

Regardons maintenant le cas de $\theta \in (0, 1)$. Il s'avère que

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0,$$

pour tout choix de c_0 . Alors la solution n'est pas unique. Ceci n'implique pas que nous pouvons choisir n'importe quel c_0 . En effet, pour le cas particulier $\theta = \frac{1}{2}$, $k = 1$, $\lambda = -1$ et $b_0 = q_0 = 1$, nous trouvons

$$G(x) = \frac{1}{x} \left\{ \frac{J_{\frac{1}{8}}(x^2) + c_0 Y_{\frac{1}{8}}(x^2)}{J_{-\frac{7}{8}}(x^2) + c_0 Y_{-\frac{7}{8}}(x^2)} \right\}.$$

Pour $c_0 = 0$, la fonction $F(x)$ est égale à

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{1}{y} \left\{ \frac{J_{\frac{1}{8}}(y^2)}{J_{-\frac{7}{8}}(y^2)} \right\} dy,$$

et la commande optimale correspondante est égale à

$$\mathbf{u}^*(x) = -2 \left\{ \frac{J_{\frac{1}{8}}(x^2)}{J_{-\frac{7}{8}}(x^2)} \right\}.$$

Nous traçons maintenant la courbe de $F(x)$ si $c_0 = 0$ (**Figure 1.4**).

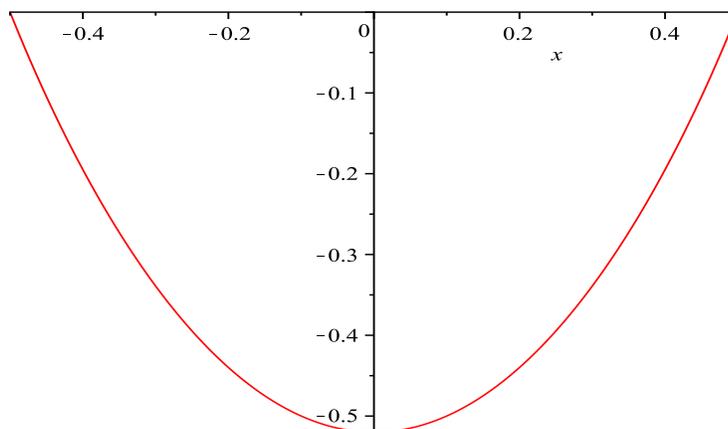


FIGURE 1.4. La fonction $F(x)$ si $c_0 = 0$.

Nous déduisons, d'après la courbe, que la fonction $F(x)$ est négative pour tout $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et elle admet un minimum en $x = 0$. Nous déduisons de plus que $u^*(x) < 0$ pour tout $0 < |x| < \frac{1}{2}$, ce qui est logique puisque l'optimiseur voudrait maximiser le temps passé dans $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Cependant, si nous faisons tendre c_0 vers l'infini, la fonction $F(x)$ correspondante est égale à

$$F(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^x \frac{1}{y} \left\{ \frac{Y_{\frac{1}{8}}(y^2)}{Y_{-\frac{7}{8}}(y^2)} \right\} dy,$$

et la commande optimale devient

$$u^*(x) = -2 \left\{ \frac{Y_{\frac{1}{8}}(x^2)}{Y_{-\frac{7}{8}}(x^2)} \right\}.$$

La courbe de $F(x)$ dans ce cas (**Figure 1.5**) est sous la forme

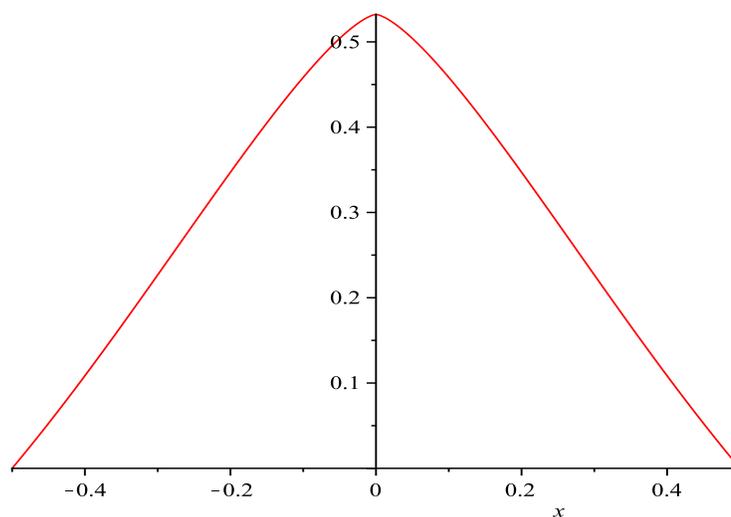


FIGURE 1.5. La fonction $F(x)$ si $c_0 \rightarrow \infty$.

Contrairement au cas $c_0 = 0$, $F(x)$ est strictement positive sur $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et atteint son maximum en $x = 0$. Pour la commande optimale $u^*(x)$, elle est strictement positive pour tout

$0 < |x| < \frac{1}{2}$. Ainsi, la solution n'est pas unique pour (1.2.7). Il faut alors utiliser d'autres arguments. Dans ce cas, nous devrions garder la première solution parce qu'elle vérifie les caractéristiques de notre problème. En effet, puisque $\lambda < 0$, alors l'optimiseur essaie de rester le plus de temps possible. Donc, au point zéro, la fonction de coût sera minimale et par conséquent $F(x) < 0$ pour tout $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Regardons maintenant pour le cas de λ positive. En utilisant les formules (voir *Abramowitz and Stegun, 1965, p. 375*)

$$K_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu}$$

et

$$I_\nu(z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu + 1)},$$

lorsque $\nu \notin \{-1, -2, \dots\}$, la fonction $G(x)$ devient sous la forme

$$G(x) = \frac{\sqrt{2\lambda q_0}}{b_0} \left\{ \frac{c_1^* x^{-\frac{\theta}{2}} - c_2^* x^{\frac{\theta}{2}}}{c_3^* x^{2k+1-\frac{\theta}{2}} + c_4^* x^{\frac{\theta}{2}-1}} \right\},$$

telle que

$$\begin{cases} c_1^* = c_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\nu} \Gamma(\nu) (c^*)^{-\nu}, \\ c_2^* = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{(c^*)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}, \\ c_3^* = c_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{2-\nu} \Gamma(\nu-1) (c^*)^{1-\nu}, \\ c_4^* = \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \frac{(c^*)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}. \end{cases}$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur par $x^{\frac{\theta}{2}}$; donc nous obtenons

$$G(x) = \frac{\sqrt{2\lambda q_0}}{b_0} \left\{ \frac{c_1^* - c_2^* x^\theta}{c_3^* x^{2k+1} + c_4^* x^{\theta-1}} \right\}.$$

Nous déduisons à la fin, que si $\theta \in (1, 2)$, alors la condition $G(0) = 0$ est vérifiée seulement si $c_0 = 0$. Il s'ensuit que

$$G(x) = -\frac{\sqrt{2\lambda q_0}}{b_0 x^k} \left\{ \frac{I_\nu(c^* x^{k+1})}{I_{\nu-1}(c^* x^{k+1})} \right\},$$

et la commande optimale est

$$\begin{aligned} u^*(x) &= -\frac{b_0}{q_0} x^k G(x) \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{q_0}} \left\{ \frac{I_\nu(c^* x^{k+1})}{I_{\nu-1}(c^* x^{k+1})} \right\}. \end{aligned}$$

Cependant, si $\theta \in (0, 1)$, la condition $G(0) = 0$ est vérifiée pour tout choix de c_0 , donc la solution n'est pas unique. De plus, nous n'avons pas de contraintes pour λ si elle est positive, donc nous pouvons la choisir grande comme nous voulons.

Proposition 1. *Soit $b(x) = b_0 x^k$. Supposons que $f(x)$ est impaire et $v(x)$ est paire, alors la commande optimale est donnée par*

$$u^*(x) = -b_0 \frac{x^k}{q_0} G(x),$$

telle que $G(x)$ satisfait à l'équation différentielle (1.2.1), avec la condition $G(0) = 0$.

Les paramètres infinitésimaux du processus $\{X(t), t \geq 0\}$ sont symétriques, alors si l'optimiseur essaie de rester le plus de temps dans $(-d, d)$ (resp. rester le minimum du temps), le point zéro sera la meilleure position (resp. la pire position). Ceci est équivalent au fait que $\lambda < 0$ (resp. $\lambda > 0$).

Nous présentons maintenant une généralisation de la proposition.

Corollaire 1. *Supposons que $f(x)$ est impaire et $b^2(x)$ et $v(x)$ sont deux fonctions*

païres. Alors la commande optimale $u^*(x)$ est donnée par

$$u^*(x) = -\frac{b(x)}{q_0}G(x),$$

telle que $G(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\lambda + f(x)G(x) - \frac{b^2(x)}{2q_0}G^2(x) + \frac{1}{2}G'(x) = 0,$$

et satisfait à la condition initiale $G(0) = 0$.

1.3. SOLUTION APRÈS TRANSFORMATION DU PROBLÈME LQG

Parfois, si la symétrie n'est pas vérifiée, nous pouvons essayer de transformer le problème de sorte que nous retrouvons un nouveau processus, une nouvelle équation différentielle stochastique commandée et à la fin une nouvelle équation de *Riccati*. Ce nouveau problème devrait satisfaire aux conditions du corollaire. En effet, si $\{X(t), t \geq 0\}$ est notre processus commandé dans un intervalle (d_1, d_2) telle que $d_1 \neq -d_2$, il est clair que les paramètres infinitésimaux associés à ce processus ne sont pas symétriques par rapport à zéro. L'idée, dans ce cas, est de trouver une transformation linéaire $Y(t) = g(X(t))$ pour le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ telle que les nouveaux paramètres associés à $\{Y(t), t \geq 0\}$ soient symétriques par rapport à zéro, dans un nouvel intervalle de la forme $(-d, d)$.

Cette fonction $g(x)$ doit être strictement monotone et $g''(x)$ doit exister et être continue sur $[d_1, d_2]$. Dans ce cas, nous pouvons appliquer notre corollaire à ce nouveau processus et, par la suite, trouver la commande optimale en fonction de y . Enfin, nous avons à remplacer y par son expression en x (voir *M. Lefebvre, Applied Stochastic Processes*, p. 64).

D'une façon générale, notons tout d'abord par f^x, b^x et v^x les paramètres associés au processus $\{X(t), t \geq 0\}$ et par f^y, b^y et v^y les paramètres associés au

nouveau processus $\{Y(t), t \geq 0\}$. Nous posons $Y(t) = g(X(t))$, alors l'équation différentielle stochastique commandée

$$dX(t) = f^X[X(t)]dt + b^X[X(t)]u[X(t)]dt + \{v^X[X(t)]\}^{\frac{1}{2}} dB(t)$$

devient

$$dY(t) = f^Y[Y(t)]dt + b^Y[Y(t)]u[Y(t)]dt + \{v^Y[Y(t)]\}^{\frac{1}{2}} dB(t),$$

telle que

$$f^Y(y) + b^Y(y)u(y) = [f^X(x) + b^X(x)u(x)]g'(x) + \frac{1}{2}v^X(x)g''(x)$$

et

$$v^Y(y) = v^X(x)[g'(x)]^2.$$

Nous devrions maintenant vérifier les conditions pour ces nouveaux paramètres.

Regardons cet exemple : Si nous travaillons avec un mouvement brownien standard sur (d_1, d_2) , tel que $d_1 \neq -d_2$. Posons alors $Y(t) = aX(t) + b$ tels que

$$a = \frac{2d}{d_2 - d_1} \text{ et } b = -\frac{d(d_2 + d_1)}{d_2 - d_1}.$$

Cette transformation permet d'avoir un nouveau mouvement brownien

$\{Y(t), t \geq 0\}$ avec dérive nulle et de paramètre de variance $\sigma^2 = a^2$ dans l'intervalle $(-d, d)$. Nous remarquons directement que les conditions du corollaire 1 sont satisfaites pour $\{Y(t), t \geq 0\}$ dans $(-d, d)$ et par la suite nous pouvons trouver la commande optimale $u^*(x)$ à la fin.

Remarque. L'existence de la symétrie dans certains problèmes de commande optimale permet de trouver la solution d'une façon explicite. C'est pour cela que nous allons l'utiliser, si c'est possible, dans les prochaines sections.

1.4. QUELQUES EXTENSIONS DU PROBLÈME LQG

Dans le corollaire 1, nous avons généralisé la proposition 1 en remplaçant b_0x^k par une fonction $b(x)$ telle que $b(x)^2$ est paire. Une autre extension de la proposition 1 est lorsque nous changeons la fonction de coût

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} (q[X(t)]u^2[X(t)] + \lambda) dt,$$

tel que $q(x)$ est une fonction positive paire. Voici un exemple pour illustrer ce résultat.

Exemple 2.

Nous considérons un processus particulier d'*Ornstein-Uhlenbeck*. L'équation différentielle stochastique commandée est

$$dX(t) = -X(t)dt + u[X(t)]dt + dB(t)$$

et la fonction de coût est

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{u^2[X(t)]}{|X(t)| + 1} + 1 \right) dt,$$

avec

$$T(x) = \inf\{t > 0 : |X(t)| = 2|X(0) = x \in (-2, 2)\}.$$

Ainsi, la commande optimale est donnée par

$$u^*(x) = -\frac{1}{2}(|x| + 1)G(x),$$

tel que $G(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$1 - xG(x) - (|x| + 1)G^2(x) + \frac{1}{2}G'(x) = 0,$$

et la condition initiale $G(0) = 0$. Par symétrie, nous déduisons que

$G(-x) = -G(x)$ et donc $u^*(-x) = -u^*(x)$. Alors, nous pouvons restreindre notre travail dans l'intervalle $[0, d]$.

La solution de l'équation différentielle, vérifiant $G(0) = 0$, est

$$G(x) = \frac{\sqrt{\pi}[\operatorname{erf}(x+2) - \operatorname{erf}(2)]}{\sqrt{\pi}[\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(x+2)] - e^{-(x+2)^2}},$$

tel que "erf(\cdot)" est la fonction erreur. Il s'ensuit que la commande optimale pour tout $0 \leq x \leq 2$ est

$$u^*(x) = \frac{1}{2}(x+1) \frac{\sqrt{\pi}[\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(x+2)]}{\sqrt{\pi}[\operatorname{erf}(2) - \operatorname{erf}(x+2)] - e^{-(x+2)^2}}.$$

Nous allons tracer la courbe représentative de $u^*(x)$ sur $[0, 2]$ (**Figure 1.6**).

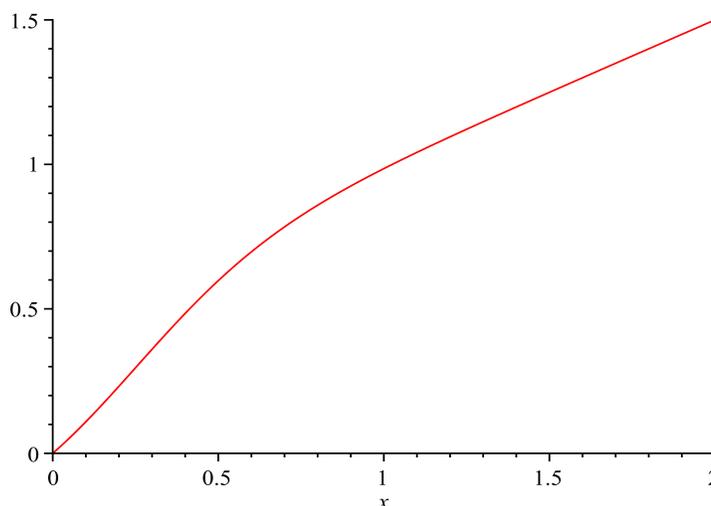


FIGURE 1.6. Commande optimale dans l'intervalle $[0, 2]$.

Une autre extension possible de la proposition 1 est lorsque nous choisissons la fonction de coût sous cette forme

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q_0 b(x)^2 u^2[X(t)] + \lambda \right) dt.$$

Dans ce cas, $q(x)$ est égale à $q_0 b(x)^2$, où q_0 est une constante strictement positive, $b(x)$ de signe constant et différente de zéro.

L'instant du premier passage $T(x)$ est défini par

$$T(x) = \inf\{t > 0 : |X(t)| = d | X(0) = x\},$$

pour tout $x \in (-d, d)$.

Si $v(x) = v_0 > 0$ qui est un scalaire, alors nous remarquons directement que la condition de Whittle est satisfaite pour $\alpha = \frac{1}{v_0 q_0} > 0$. En effet, nous devons vérifier qu'il existe une constante positive telle que

$$\alpha v(x) = \frac{b^2(x)}{q(x)} \Leftrightarrow \alpha v_0 = \frac{b^2(x)}{q_0 b^2(x)} = \frac{1}{q_0},$$

et, par la suite, nous pouvons appliquer le théorème de *Whittle*.

Cependant, ce n'est pas le cas si $v(x)$ est une fonction paire positive, non constante.

Nous présentons dans ce cas cette proposition

Proposition 2. *Soit $f(\cdot)$ et $v(\cdot)$ deux fonctions impaire et paire respectivement dans notre problème. Alors la commande optimale $u^*(x)$ est donnée par l'expression*

$$u^*(x) = -\frac{1}{q_0 b(x)} G(x),$$

où la fonction G satisfait à l'équation différentielle de *Riccati*

$$\lambda + f(x)G(x) - \frac{1}{2q_0}G^2(x) + \frac{1}{2}v(x)G'(x) = 0, \quad (1.4.1)$$

avec la condition initiale $G(0) = 0$.

Preuve. Tout d'abord, nous avons que la fonction $F(x)$ est deux fois différentiable et elle vérifie $F(d) = F(-d) = 0$. La condition initiale

$G(0) = F'(0) = 0$ est due principalement à la symétrie et au fait que l'expression de la fonction $G(x) = F'(x)$ ne dépend pas de $b(x)$, comme nous pouvons la remarquer dans l'équation de *Riccati* (1.4.1). Par conséquent, l'origine est la pire (la meilleure) position pour minimiser la valeur moyenne de la fonction de coût, si λ est positive (resp. λ est négative).

Remarques. i. Cette proposition inclut aussi le cas important lorsque $f(x) \equiv 0$ et $v(x) \equiv v_0 > 0$.

ii. Dans les deux cas où λ est positive ou négative, la commande optimale s'annule en $x = 0$.

Voici maintenant deux exemples, où nous allons appliquer la dernière proposition.

Exemple 3.

Prenons dans cet exemple $f(x) \equiv 0$ et $v(x) \equiv 1$. Nous sommes dans le cas d'un mouvement brownien standard commandé.

Nous devons résoudre l'équation de *Riccati*

$$\lambda - \frac{1}{2q_0}G^2(x) + \frac{1}{2}G'(x) = 0. \quad (1.4.2)$$

Si λ est positive, alors la solution de (1.4.2) qui satisfait à la condition $G(0) = 0$ est

$$G(x) = -\sqrt{2\lambda q_0} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}x\right),$$

et la commande optimale est donc sous la forme

$$u^*(x) = \frac{1}{b(x)}\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}x\right).$$

Remarque. Nous aurions pu utiliser le théorème de *Whittle* dans ce premier exemple. En effet, nous choisissons dans ce cas $\alpha = \frac{1}{q_0}$. Résolvons le problème avec cette méthode et comparons après les deux résultats.

Soit, alors, la fonction $M(x) := e^{-\alpha F(x)}$, qui vérifie l'équation différentielle ordinaire, linéaire et d'ordre deux

$$\frac{1}{2}M''(x) = \alpha\lambda M(x),$$

avec les conditions limites $M(d) = M(-d) = 1$.

Nous trouvons donc

$$M(x) = \frac{\cosh(\sqrt{2\alpha\lambda}x)}{\cosh(\sqrt{2\alpha\lambda}d)}.$$

Il s'ensuit que

$$G(x) = F'(x) = -\frac{\sqrt{2\alpha\lambda}}{\alpha} \tanh(\sqrt{2\alpha\lambda}x),$$

et

$$u^*(x) = \frac{\sqrt{2\alpha\lambda}}{\alpha b(x) q_0} \tanh(\sqrt{2\alpha\lambda}x) = \frac{1}{b(x)} \sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}} \tanh\left(\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}x\right).$$

Exemple 4.

Nous prenons, encore, $f(x) \equiv 0$ et choisissons $v(x) = x^2 + 1$. Pour simplifier les calculs, supposons de plus que $q_0 \equiv 1$.

C'est clair que nous ne pouvons pas appliquer le théorème de *Whittle*.

L'équation de *Riccati* à résoudre est sous la forme

$$\lambda - \frac{1}{2}G^2(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 1)G'(x) = 0.$$

Si λ est positive, et puisque $G(0) = 0$, nous aurons

$$G(x) = -\sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda} \arctan(x)).$$

Si de plus, $h(x) \equiv 1$ et $\lambda = \frac{1}{2}$, alors la commande optimale est donnée par

$$u^*(x) = \tanh(\arctan(x)).$$

Puisque nous avons choisi $b(x)$ constante (et donc, elle est paire), alors nécessairement la commande optimale est paire aussi.

Voici le graphique (**Figure 1.7**) de $u^*(x)$ lorsque nous prenons $d = 1$.

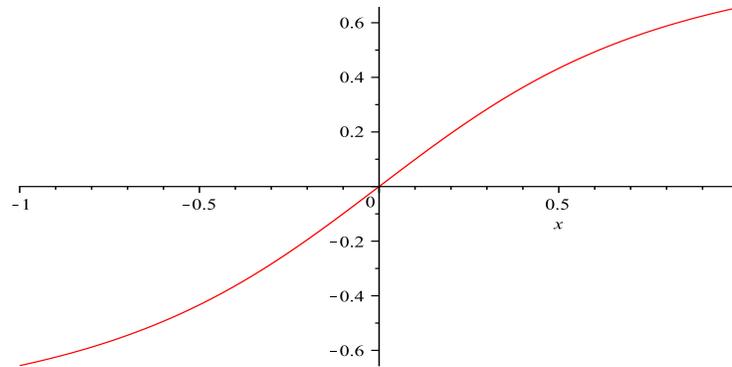


FIGURE 1.7. La commande optimale avec $b(x) = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $q_0 = 1$ et $d = 1$.

1.5. SOLUTION APPROXIMATIVE DU PROBLÈME LQG

Voici un autre résultat intéressant : Commençons à partir de l'équation (1.2.1) qui est une équation différentielle de Riccati. Si les conditions de symétrie ne sont pas vérifiées et puisque trouver une transformation linéaire n'est pas évident parfois, nous procédons alors autrement. L'idée est d'approcher le point x_0 qui maximise (resp. minimise) la valeur moyenne de la fonction de coût selon le signe de λ . Nous présentons ici deux méthodes : la première consiste à linéariser tout d'abord l'équation de Riccati. Ceci permet d'avoir une nouvelle équation différentielle qui est linéaire. Ensuite, nous identifions une nouvelle fonction qui permet de trouver une bonne approximation du point x_0 désiré. La deuxième méthode permet de considérer le point x_0 comme étant le point à partir duquel le processus non commandé passe le plus de temps dans (d_1, d_2) avant de quitter.

1.5.1. Approximation après linéarisation

Soit $z(x)$ une fonction vérifiant

$$G(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)} \frac{q(x)v(x)}{b^2(x)}, \quad (1.5.1)$$

en supposant que $b(x) \neq 0$ dans l'intervalle $[d_1, d_2]$. Remplaçons dans l'équation (1.2.1), donc nous avons cette équation différentielle linéaire :

$$\lambda - \frac{f(x)q(x)v(x)}{b^2(x)} \frac{z'(x)}{z(x)} - \frac{1}{2} \frac{q(x)v^2(x)}{b^2(x)} \frac{z''(x)}{z(x)} - \frac{1}{2} \frac{v(x)[q'(x)v(x) + q(x)v'(x)]}{b^2(x)} \frac{z'(x)}{z(x)} + \frac{b'(x)q(x)v^2(x)}{b^3(x)} \frac{z'(x)}{z(x)} = 0.$$

Après simplifications, nous avons

$$z''(x) + \left\{ 2 \frac{f(x)}{v(x)} + \frac{[q'(x)v(x) + q(x)v'(x)]}{q(x)v(x)} - 2 \frac{b'(x)}{b(x)} \right\} z'(x) - 2\lambda \frac{b^2(x)}{q(x)v^2(x)} z(x) = 0. \quad (1.5.2)$$

Ensuite, la solution $z(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x),$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Cette solution existe, parce que $G(x)$ existe aussi. En effet, pour une constante positive γ non nulle, nous pouvons écrire $z(x)$ sous la forme

$$z(x) = \gamma \exp \left\{ - \int_{d_1}^x \frac{b^2(s)}{q(s)v(s)} G(s) ds \right\}.$$

Puisque $F(d_1) = F(d_2) = 0$ et nous avons supposé au début que $F(x)$ est deux fois dérivable, alors il existe nécessairement un point x_0 tel que

$$F'(x_0) = G(x_0) = 0.$$

Il s'ensuit à partir de (1.5.1) que

$$z'(x_0) = -z(x_0) \frac{b^2(x_0)}{q(x_0)v(x_0)} G(x_0), \quad (1.5.3)$$

et par la suite

$$c_2 = -c_1 \frac{z_1'(x_0)}{z_2'(x_0)}.$$

Supposons de plus que $z'_i(x_0) \neq 0$, pour $i = 1, 2$, donc c_1 et c_2 sont non nulles. $G(x)$ devient alors sous la forme

$$G(x) = -\frac{z'_2(x_0)z'_1(x) - z'_1(x_0)z'_2(x)}{z'_2(x_0)z_1(x) - z'_1(x_0)z_2(x)} \frac{q(x)v(x)}{b^2(x)}. \quad (1.5.4)$$

Ensuite, nous écrivons

$$F(x) = \int_{d_1}^x G(y) dy, \text{ (respectivement. } F(x) = \int_x^{d_2} G(y) dy)$$

donc

$$F(d_2) = 0 = \int_{d_1}^{d_2} G(y) dy = - \int_{d_1}^{d_2} \frac{z'_2(x_0)z'_1(y) - z'_1(x_0)z'_2(y)}{z'_2(x_0)z_1(y) - z'_1(x_0)z_2(y)} \frac{q(y)v(y)}{b^2(y)} dy. \quad (1.5.5)$$

Cette dernière égalité n'est valable que pour le x_0 que nous cherchons. Alors pour l'estimer, nous considérons cette intégrale comme étant une fonction de $x_0 \in [d_1, d_2]$. Nous la notons par $I(x_0)$. À l'aide d'un logiciel mathématique, nous traçons sa courbe et après nous déduisons une bonne approximation du point recherché à partir du graphique.

Proposition 3. *La commande optimale qui minimise la valeur moyenne de la fonction de coût $J(x)$, définie par*

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2} q(x(t)) u^2(x(t)) + \lambda \right) dt,$$

avec $q(\cdot)$ une fonction de Borel positive, est égale à

$$u^*(x) = \frac{z'_2(x_0)z'_1(x) - z'_1(x_0)z'_2(x)}{z'_2(x_0)z_1(x) - z'_1(x_0)z_2(x)} \frac{v(x)}{b(x)},$$

tel que $z_1(x)$ et $z_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.5.2). De plus, le point x_0 satisfait à $G(x_0) = 0$ et il est obtenu à partir de la condition (1.5.5).

Remarques. i. Parfois, nous pouvons déduire le point x_0 en utilisant la symétrie, donc, nous n'avons pas besoin d'utiliser la condition (1.5.5).

ii. La méthode utilisée permet de trouver une expression pour $u^*(x)$. Cette dernière dépend seulement de la fonction $G(x) = F'(x)$. Pour trouver $F(x)$, nous devrions intégrer $G(x)$, mais, en général, ceci n'est pas facile.

iii. Nous avons supposé au début que $b(x) \neq 0$, pour tout $x \in [d_1, d_2]$. Sinon, s'il existe $x_1 \in [d_1, d_2]$ tel que $b(x_1) = 0$, nous avons deux possibilités :

Premièrement, si la quantité $\frac{z'(x)}{z(x)}q(x)v(x)$ est différente de zéro en $x = x_1$, alors $G(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \rightarrow x_1$ et par la suite G n'est plus continue en x_1 , ce qui est absurde.

Deuxièmement, si nous avons $z'(x_1) = 0$, alors nous procédons comme avec x_0 et nous avons à la fin une nouvelle expression pour $G(x)$

$$G(x) = -\frac{z'_2(x_1)z'_1(x) - z'_1(x_1)z'_2(x)}{z'_2(x_1)z_1(x) - z'_1(x_1)z_2(x)} \frac{q(x)v(x)}{b^2(x)}.$$

C'est une fonction sans inconnues. Pour l'accepter comme solution, il faut qu'elle vérifie

$$F(d_2) = \int_{d_1}^{d_2} G(y) dy = 0.$$

Si ce n'est pas vrai, nous rejetons ce résultat.

Pour contourner ce problème, nous choisissons dès le début $b(x) \geq 0$ (au lieu de $b(x) > 0$). De même, nous prenons $q(x) \geq 0$ et $v(x) \geq 0$. De plus, nous supposons que pour tout $x \in [d_1, d_2]$

$$\frac{b^2(x)}{q(x)v(x)} > 0.$$

Nous présentons maintenant quelques exemples.

Exemple 5.

Supposons que $f(x) = x$, $b(x) = v(x) = x^2 + 1$, $q(x) = 1$ et l'intervalle est $[d_1, d_2] \equiv [-1, 1]$. Dans cet exemple, nous supposons que λ est positive.

Avant d'appliquer la méthode étudiée, nous remarquons que $b^2(x)$, $v(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions paires et $f(x)$ est une fonction impaire ; alors, d'après le corollaire 1, nous déduisons que $G(0) = 0$. L'équation différentielle de Riccati

associée à $G(x)$ est

$$\lambda + xG(x) - \frac{(x^2 + 1)^2}{2}G^2(x) + \frac{(x^2 + 1)}{2}G'(x) = 0.$$

La solution alors est sous la forme

$$G(x) = \frac{\sqrt{2\lambda}i \tan(\sqrt{2\lambda}ix + c)}{x^2 + 1}.$$

Puisque $c \in \mathbb{R}$, alors, sans la condition $G(0) = 0$, trouver la solution exacte est très complexe.

$G(x)$ satisfait à $G(0) = 0$; alors le résultat final est

$$G(x) = -\sqrt{2\lambda} \left(\frac{\sinh(\sqrt{2\lambda}x)}{\cosh(\sqrt{2\lambda}x)} \right) \frac{1}{x^2 + 1},$$

et par la suite

$$\begin{aligned} u^*(x) &= -\frac{b(x)}{q(x)}G(x) \\ &= \sqrt{2\lambda} \left(\frac{\sinh(\sqrt{2\lambda}x)}{\cosh(\sqrt{2\lambda}x)} \right). \end{aligned}$$

Essayons maintenant de retrouver le même résultat après linéarisation. Nous avons $b(x) > 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$. L'expression (1.5.1) devient de la forme

$$G(x) = -\frac{z'(x)}{z(x)} \frac{1}{1 + x^2},$$

et l'équation différentielle associée à $z(x)$ est

$$z''(x) - 2\lambda z(x) = 0.$$

La solution générale est

$$z(x) = c_1 e^{-\sqrt{2\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{2\lambda}x},$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.

Si $\lambda = 1$, la fonction $G(x)$ est sous la forme

$$G(x) = \sqrt{2} \left(\frac{e^{\sqrt{2}x_0} e^{-\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x_0} e^{\sqrt{2}x}}{e^{\sqrt{2}x_0} e^{-\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x_0} e^{\sqrt{2}x}} \right) \frac{1}{x^2 + 1},$$

et, par la suite, nous pouvons écrire

$$F(1) = I(x_0) = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{e^{\sqrt{2}x_0} e^{-\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x_0} e^{\sqrt{2}x}}{e^{\sqrt{2}x_0} e^{-\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x_0} e^{\sqrt{2}x}} \right) \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

pour tout $-1 \leq x_0 \leq 1$. Nous traçons la courbe de $I(x_0)$ (**Figure 1.8**).

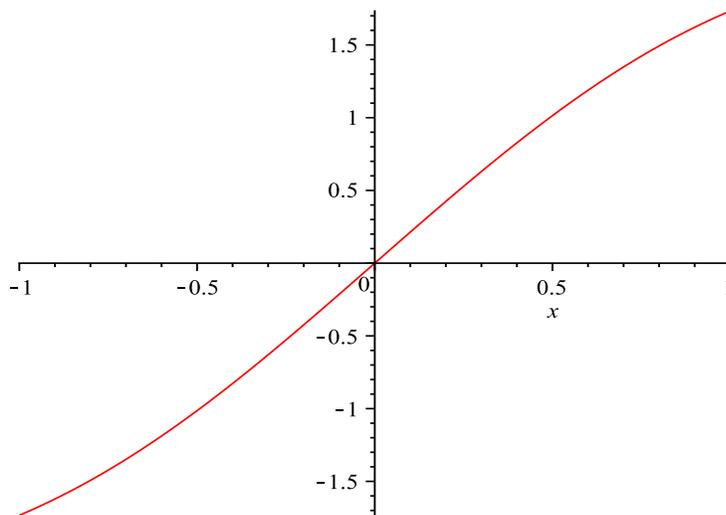


FIGURE 1.8. $I(x_0)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

D'après le graphique, x_0 recherché est égal à zéro, ce qui est le même résultat déduit à partir du corollaire 1.

Dans la suite, nous présentons respectivement les courbes de $F(x)$ (**Figure 1.9**) et de la commande optimale $u^*(x)$ (**Figure 1.10**).

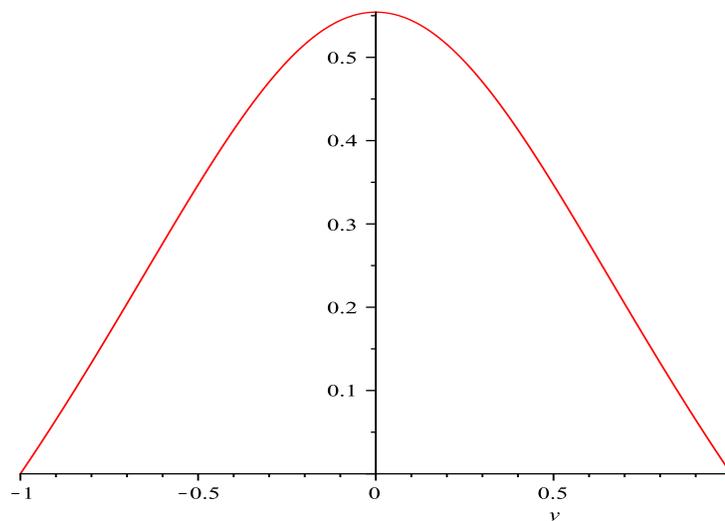


FIGURE 1.9. $F(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Nous remarquons bien que la fonction $F(x)$ est paire sur $[-1, 1]$ et elle atteint son maximum en $x_0 = 0$.

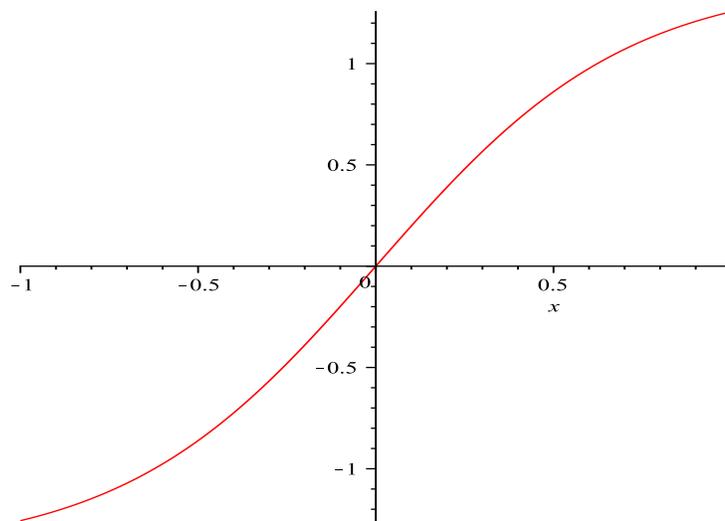


FIGURE 1.10. $u^*(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Pour la commande optimale, elle est négative sur $[-1, 0]$ et positive sur $[0, 1]$. En effet, l'équation différentielle stochastique commandée est

$$dX(t) = X(t)dt + (X^2(t) + 1)u[X(t)]dt + \{X^2(t) + 1\}^{\frac{1}{2}} dB(t).$$

La constante λ est positive, donc l'optimiseur essaie de sortir le plus tôt possible.

Si $X(t) \in [-1, 0]$, $dX(t)$ doit être négative, et puisque $b(x) > 0$, donc $u^*(x)$ doit être aussi négative. Cependant, si $X(t) \in [0, 1]$, $u^*(x)$ est positive, donc $dX(t)$ est positive aussi, ce qui est logique.

Nous pouvons maintenant comparer les fonctions de coût dans le cas de la commande optimale et dans le cas où $u(x) \equiv 0$.

Si $u[X(t)] \equiv 0$, alors

$$E[j(x)] = E \left[\int_0^{T(x)} \lambda dt \right] = \lambda E[T(x)].$$

Posons $e(x) = E[T(x)]$. Cette fonction satisfait à l'équation différentielle ordinaire (voir M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*)

$$\frac{1}{2}(x^2 + 1)e''(x) + xe'(x) = -1,$$

et vérifie les conditions limites $e(-1) = e(1) = 0$. La solution particulière est

$$e(x) = \ln \left(\frac{2}{x^2 + 1} \right).$$

Notons par $D(x) := F(x) - \lambda E[T(x)]$. Traçons sa courbe si $\lambda = 1$ (**Figure 1.11**).

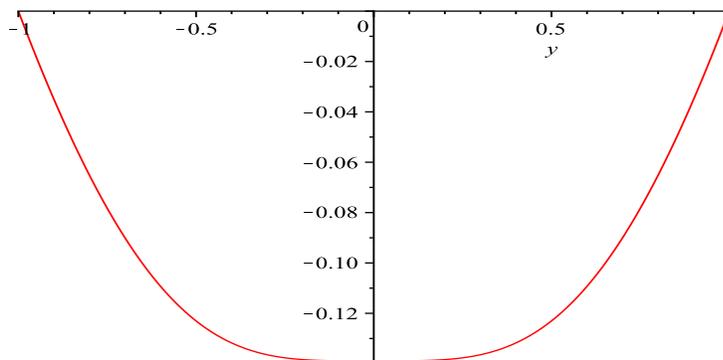


FIGURE 1.11. $D(x) := F(x) - e(x)$ dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Nous remarquons bien que $D(x) = F(x) - e(x) < 0$, pour tout $x \in (-1, 1)$. En effet, puisque $\lambda = 1 > 0$, alors l'optimiseur cherche à minimiser la valeur moyenne de la fonction de coût. Donc le minimum est donné par la fonction $F(x)$, tandis que $E[J(x)] = \lambda e(x)$ est la valeur moyenne de la fonction de coût lorsque $u[X(t)] \equiv 0$; alors, nécessairement, nous avons toujours $F(x) < e(x)$.

Exemple 6.

Considérons maintenant un autre exemple et prenons $f(x) = 0$, $b(x) = x$ et $q(x) = v(x) = 1$. Dans ce cas, notre intervalle est $[1, 2]$.

L'équation différentielle stochastique commandée est alors sous la forme

$$dX(t) = X(t)u[X(t)]dt + dB(t).$$

La fonction de coût, avec $\lambda > 0$, est

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2}u^2(X(t)) + \lambda \right) dt.$$

Nous remarquons que ni les conditions de Whittle, ni celles du corollaire 1 ne sont vérifiées et donc nous ne pouvons pas les appliquer dans ce cas.

La fonction $z(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$z''(x) - \frac{2}{x}z'(x) - 2\lambda x^2 z(x) = 0$$

et sa solution générale est

$$z(x) = x^{3/2} \left[c_1 I_{3/4}(\sqrt{\lambda/2}x^2) + c_2 \sqrt{x} K_{3/4}(\sqrt{\lambda/2}x^2) \right],$$

tel que $I_{\frac{3}{4}}(\cdot)$ et $K_{\frac{3}{4}}(\cdot)$ sont deux fonctions de Bessel modifiées (voir *Abramowitz and Stegun (1965)*).

Si $\lambda = 1$, nous obtenons

$$G(x) = -\frac{\sqrt{2}}{x} \left(\frac{K_{1/4}(x_0^2/\sqrt{2})I_{-1/4}(x^2/\sqrt{2}) - I_{-1/4}(x_0^2/\sqrt{2})K_{1/4}(x^2/\sqrt{2})}{K_{1/4}(x_0^2/\sqrt{2})I_{3/4}(x^2/\sqrt{2}) + I_{-1/4}(x_0^2/\sqrt{2})K_{3/4}(x^2/\sqrt{2})} \right).$$

Pour déterminer x_0 , nous utilisons l'intégrale de $G(x)$. Dans ce cas, nous avons

$$I(x_0) = \int_1^2 G(y) dy.$$

Nous traçons après la courbe de $I(x_0)$ pour tout $x_0 \in [1, 2]$ (**Figure 1.12**).

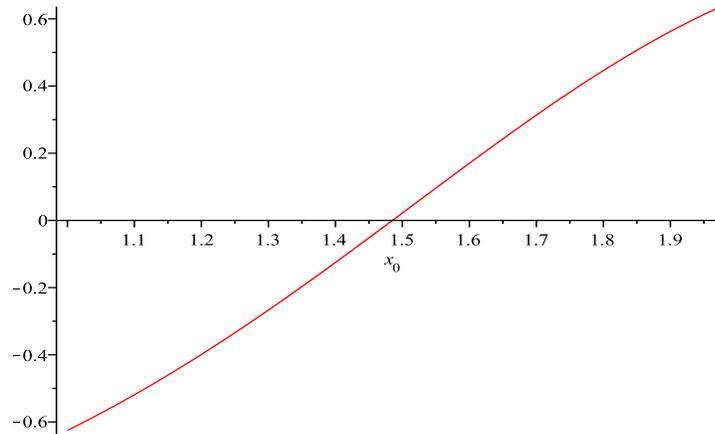


FIGURE 1.12. $I(x_0)$ pour tout $x_0 \in [1, 2]$.

Cette courbe ne permet pas de bien approcher x_0 , donc nous prenons un intervalle plus réduit. Voici donc la courbe de $I(x_0)$ dans l'intervalle $[1,475; 1,495]$ (**Figure 1.13**).

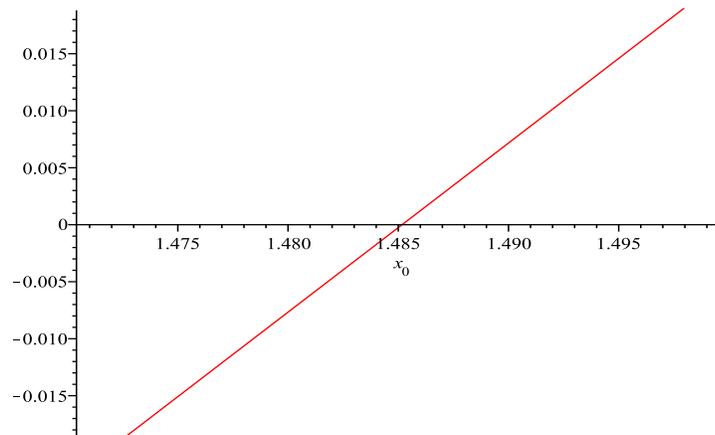


FIGURE 1.13. $I(x_0)$ pour tout $x_0 \in [1,475; 1,495]$

Une bonne approximation de x_0 est 1.485. Avec ce choix, la commande optimale est égale à

$$\begin{aligned} u^*(x) &= -\frac{b(x)}{q(x)}G(x) = -xG(x) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{K_{1/4}(x_0^2/\sqrt{2})I_{-1/4}(x^2/\sqrt{2}) - I_{-1/4}(x_0^2/\sqrt{2})K_{1/4}(x^2/\sqrt{2})}{K_{1/4}(x_0^2/\sqrt{2})I_{3/4}(x^2/\sqrt{2}) + I_{-1/4}(x_0^2/\sqrt{2})K_{3/4}(x^2/\sqrt{2})} \right). \end{aligned}$$

Remarque. L'équation stochastique commandée est

$$dX(t) = X(t)u[X(t)]dt + dB(t).$$

Puisque la constante λ est positive, la fonction de coût est maximale en x_0 et l'optimiseur essaie alors de sortir le plus tôt possible de l'intervalle $[1, 2]$. Si $X(t) < x_0$, $dX(t)$ doit être négative et par la suite, $u[X(t)]$ doit être négative jusqu'au point x_0 . Cependant, il faut que $u[X(t)]$ soit positive si $X(t) > x_0$, pour que $dX(t)$ devienne positive.

Voici la courbe de $u^*(x)$ (**Figure 1.14**)

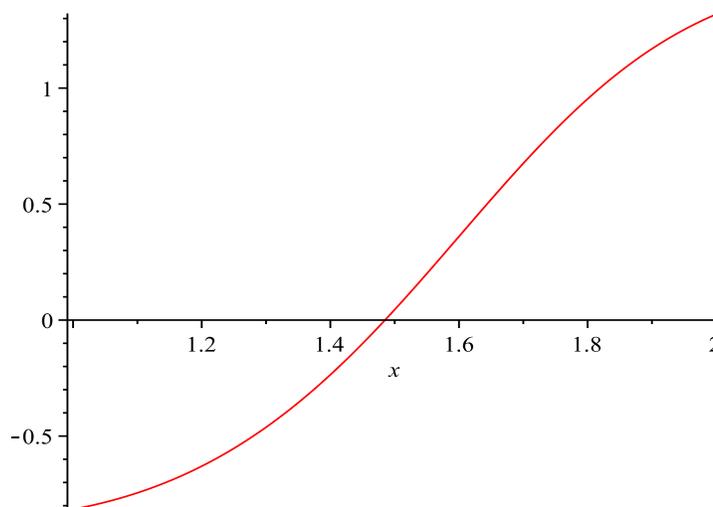


FIGURE 1.14. La commande optimale sur $[1, 2]$.

1.5.2. Approximation par le temps moyen

Posons

$$T(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = \{d_1, d_2\} | X(0) = x \in (d_1, d_2)\}.$$

C'est un temps d'arrêt pour le processus non commandé correspondant à $\{X(t), t \geq 0\}$.

Soit $e(x) = E[T(x)]$. Nous pouvons alors approcher le point x_0 par le point qui maximise $e(x)$, c'est-à-dire le point à partir duquel la durée passée par le processus non commandé dans l'intervalle (d_1, d_2) est maximale. Cette fonction vérifie l'équation différentielle ordinaire (voir M. Lefebvre *Applied Stochastic Processes*, p. 220)

$$\frac{1}{2}v(x)e''(x) + f(x)e'(x) = -1.$$

Les conditions limites associées sont $e(d_1) = e(d_2) = 0$.

Proposition 4. *Soit x_0 le point qui maximise $e(x)$. La commande optimale est approximativement définie à partir de la solution de (1.2.1), tel que $G(x)$ satisfait à la condition $G(x_0) = 0$.*

Appliquons cette proposition à un exemple. Pour pouvoir comparer les résultats par différentes méthodes, nous choisissons un exemple pour lequel nous pouvons trouver la commande optimale exacte.

Exemple 7.

Nous reprenons ici l'exemple du processus de Wiener commandé, avec dérive $f \neq 0$ et paramètre de variance σ^2 et tel que la fonction de coût est égale à

$$J(x, u) = \int_0^{T(x)} \left(\frac{1}{2}q_0 u^2(X(t)) + \lambda \right) dt.$$

Pour trouver la solution exacte, nous avons utilisé le théorème de Whittle et la commande optimale est égale à

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0} F'(x) = -\frac{f}{b_0} - \frac{\delta}{b_0} \left\{ \frac{A_-(x, d_1) - A_-(x, d_2) + A_+(x, d_1) - A_+(x, d_2)}{A_-(x, d_2) - A_-(x, d_1) + A_+(x, d_1) - A_+(x, d_2)} \right\},$$

tels que $A_{\pm}(\cdot, \cdot)$ et δ sont définies comme dans l'exemple 1.

Si nous utilisons l'approximation avec le temps d'arrêt, la fonction $e(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\sigma^2}{2} e''(x) + f e'(x) = -1.$$

La solution particulière, vérifiant les conditions $e(d_1) = e(d_2) = 0$, est

$$e(x) \simeq (d_2 - d_1) e^{-2\frac{fx}{\sigma^2}} - (x - d_1) e^{-2\frac{fd_2}{\sigma^2}} - (d_2 - x) e^{-2\frac{fd_1}{\sigma^2}}.$$

Elle atteint son maximum au point x vérifiant $e'(x) = 0$. Il s'ensuit que

$$x = \frac{-\sigma^2}{2f} \ln \left\{ \frac{\sigma^2 e^{-2\frac{fd_2}{\sigma^2}} - e^{-2\frac{fd_1}{\sigma^2}}}{2f(d_2 - d_1)} \right\} := x_0.$$

$G(x)$ est la solution générale de l'équation différentielle non linéaire

$$\lambda - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{q_0} G^2(x) + fG(x) + \frac{\sigma^2}{2} G'(x) = 0.$$

Nous avons alors

$$G(x) = \frac{fq_0}{b_0^2} - \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{b_0^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{\sigma^2 q_0} (x + c_1) \right\}.$$

De plus, nous supposons que $G(x_0) = 0$; alors la solution particulière est

$$G(x) = \frac{fq_0}{b_0^2} - \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{b_0^2} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{\sigma^2 q_0} (x - x_0) + \operatorname{arctanh} \left(\frac{fq_0}{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}} \right) \right\}.$$

La commande optimale est égale approximativement à

$$u^*(x) = -\frac{b_0}{q_0} G(x) = -\frac{f}{b_0} + \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{b_0 q_0} \tanh \left\{ \frac{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}}{\sigma^2 q_0} (x - x_0) + \operatorname{arctanh} \left(\frac{fq_0}{\sqrt{2\lambda q_0 b_0^2 + f^2 q_0^2}} \right) \right\}.$$

Comparons les résultats numériquement et prenons $f = \sigma = b_0 = q_0 = \lambda = 1$, $d_1 = 0$ et $d_2 = 2$.

Dans ce cas, $\delta = \sqrt{3}$ et alors le point x_0 est approximativement égal à 0.7024.

Pour analyser les deux méthodes, nous essayons d'appliquer la première aussi dans cet exemple. Nous devons alors résoudre l'équation différentielle

$$z''(x) + 2z'(x) - 2z(x) = 0.$$

$z(x)$ est alors égale à

$$z(x) = c_1 z_1(x) + c_2 z_2(x) = c_1 e^{(\sqrt{3}-1)x} + c_2 e^{-(\sqrt{3}+1)x}$$

et la fonction $F(x)$ est donnée par

$$F(x) = - \int_0^x \frac{-(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})x_0}(\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)y} + (\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)x_0}(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})y}}{-(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})x_0}(\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)y} - (\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)x_0}(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})y}} dy.$$

Le point x_0 qui vérifie $F(2) = 0$ est approximativement $x_0 \simeq 0.7281$. La commande optimale est donc

$$u^*(x) = \frac{-(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})x_0}(\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)y} + (\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)x_0}(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})y}}{-(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})x_0}(\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)y} - (\sqrt{3}-1)e^{(\sqrt{3}-1)x_0}(1+\sqrt{3})e^{-(1+\sqrt{3})y}}.$$

Nous allons maintenant tracer les trois solutions dans le même graphique pour les comparer (**Figure 1.15**).

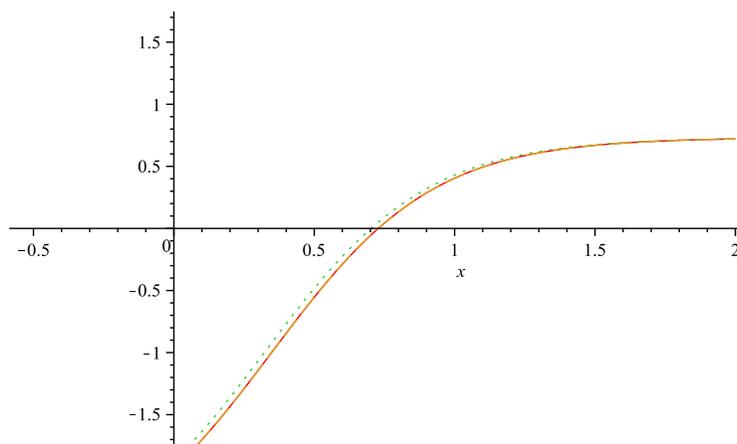


FIGURE 1.15. Les commandes optimales exacte (ligne continue), approximative méthode 1 (ligne discontinue), approximative méthode 2 (ligne pointillée) si $x \in [0, 2]$.

Les courbes des commandes optimales exacte et approximative par la première méthode sont presque confondues. Nous remarquons bien que l'approximation en utilisant la linéarisation avec $z(x)$ est meilleure que l'autre, ce qui est logique. En effet, la deuxième méthode nous donne une approximation du point x_0 , où $G(x_0) = 0$, par celui à partir duquel le processus non commandé passe le plus de temps avant de sortir. Pour la première méthode, nous pouvons choisir x_0 de façon que le taux d'erreur soit très minimal et, par la suite, le résultat final sera proche de la solution exacte.

1.6. RÉOLUTION DU PROBLÈME LQG AVEC UNE SEULE BARRIÈRE

Un autre cas intéressant à étudier est lorsque nous avons une seule barrière, $x = d$. Le temps du premier arrêt est

$$T_d(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = d | X(0) = x \neq d\}.$$

Pour certains processus, nous pouvons avoir une deuxième barrière naturelle à l'origine, par exemple pour le mouvement brownien géométrique et ceci lorsque $0 < X(0) < d$.

L'idée dans ce genre de problème est d'essayer d'introduire une seconde barrière $x = d^*$ et par la suite nous nous retrouvons dans les mêmes conditions que dans la section précédente. En général, nous devrions trouver dans ce cas une transformation $Y(t) = g(X(t))$ telle que les paramètres infinitésimaux du processus non commandé $\{Y_0(t), t \geq 0\}$ correspondant à $\{Y(t), t \geq 0\}$ satisfont aux hypothèses du corollaire 1. Si c'est le cas, nous cherchons la commande optimale $u^*(y)$, et après nous exprimons y en fonction de la variable originale x . Enfin, nous faisons tendre d^* vers ∞ (resp. $-\infty$) si $d^* > d$ (resp. $d^* < d$) pour nous retrouver dans le domaine de travail initial.

Exemple 8.

Soit le mouvement brownien géométrique commandé défini par

$$dX(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + b_0X(t)u[X(t)]dt + X(t)dB(t).$$

Ce processus est défini seulement pour $x > 0$.

Soit $d \in (0, 1)$ et posons

$$T_d(x) = \inf\{t > 0 : X(t) = d|X(0) = x > d\}.$$

Supposons que λ est positive. Créons une nouvelle barrière en d^* telle que $d < X(0) < d^*$, et soit

$$T_{d,d^*}(x) = \inf\{t > 0 : X(t) \in \{d, d^*\} | X(0) = x \in (d, d^*)\}.$$

Pour $\alpha = \frac{1}{\sqrt{dd^*}}$, nous posons $X_\alpha(t) = h(X(t)) = \alpha X(t)$, tel que $h(x)$ est une transformation linéaire de $X(t)$ vers $X_\alpha(t)$. En utilisant les formules de transformation, les paramètres infinitésimaux, associés au processus $\{X_\alpha(t), t \geq 0\}$ sont

$$f^{X_\alpha}(x_\alpha) = f^X h' + \frac{1}{2}v^X h'' = \left[\frac{1}{2}x + b_0xu \right] \alpha = \frac{1}{2}x_\alpha + b_0x_\alpha u$$

et

$$v^{X_\alpha}(x_\alpha) = v^X [h']^2 = [\alpha x]^2 = x_\alpha^2.$$

Maintenant, nous considérons un autre processus $Y(t)$ tel que

$$Y(t) = g(X_\alpha(t)) = \ln [X_\alpha(t)].$$

C'est un mouvement brownien standard commandé sur l'intervalle

$$[-\ln [\delta], \ln [\delta]] \equiv \left[\ln \left[\frac{1}{\delta} \right], \ln [\delta] \right], \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{d^*}{d}}.$$

Le temps de premier passage devient

$$T_\delta(y) = \inf\{t > 0 : |Y(t)| = \ln [\delta] | Y(0) = y \in (-\ln [\delta], \ln [\delta])\}.$$

Appliquons les mêmes formules de transformation et nous aurons

$$f^Y(y) = f^{X_a} g' + \frac{1}{2} v^{X_a} g'' = \left(\frac{1}{2} x_a + b_0 x_a u \right) \frac{1}{x_a} + \left(\frac{1}{2} x_a^2 \right) \left(\frac{-1}{x_a^2} \right) = b_0 u$$

et

$$v^Y(y) = v^{X_a} [h']^2 = x_a^2 \left(\frac{1}{x_a} \right)^2 \equiv 1.$$

Avec ces nouvelles données, nous pouvons appliquer la proposition 1 pour le processus $Y(t)$. Alors nous devons résoudre l'équation différentielle non linéaire

$$\lambda - \frac{b_0^2}{2q_0} G^2(y) + \frac{1}{2} G'(y) = 0,$$

avec la condition $G(0) = 0$. Il s'ensuit que

$$G(y) = -\frac{\sqrt{2\lambda q_0}}{b_0} \tanh \left(\frac{\sqrt{2\lambda} b_0 y}{q_0} \right),$$

et il en résulte

$$u_{d^*}^*(y) = -\frac{b_0}{q_0} G(y) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{q_0}} \tanh \left(\frac{\sqrt{2\lambda} b_0 y}{\sqrt{q_0}} \right).$$

Retournons à la variable initiale $x = \frac{e^y}{a} = \sqrt{d d^*} e^y$ et nous obtenons

$$u_{d^*}^*(x) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\sqrt{q_0}} \tanh \left(\frac{\sqrt{2\lambda} b_0 \ln \left(\frac{x}{\sqrt{d d^*}} \right)}{\sqrt{q_0}} \right).$$

Puisque

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \tanh \left[c_0 \ln \left(\frac{x}{\sqrt{c}} \right) \right] = -1$$

pour tout choix de constante positive c_0 , alors nous avons à la fin

$$u^*(x) = \lim_{d^* \rightarrow \infty} u_{d^*}^*(x) = -\sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}.$$

Nous pouvons vérifier ce résultat puisque le théorème de Whittle est applicable. En effet, $\alpha = \frac{b_0^2}{q_0}$ est une constante strictement positive.

La commande optimale est donnée par l'expression

$$u^*(x) = \frac{-b_0}{q_0} x F'(x).$$

Si nous appliquons le théorème de Whittle, nous devons exprimer $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = -\frac{1}{\alpha} \ln [M(x)],$$

où

$$M(x) := E[e^{-\alpha \lambda \tau_d(x)}],$$

et tel que $\tau_d(x)$ est défini comme $T_d(x)$ pour le processus non commandé qui correspond à $\{X(t), t \geq 0\}$. La fonction $M(x)$ satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{1}{2} x^2 M''(x) + \frac{1}{2} x M'(x) = \alpha \lambda M(x).$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$M(x) = c_1 e^{\sqrt{2\alpha\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{2\alpha\lambda}x}.$$

La constante λ étant positive, l'optimiseur essaie de sortir le plus tôt possible. Donc si x croît et tend vers l'infini, $F(x)$ croît aussi et par la suite $M(x)$ décroît vers zéro. Ceci est possible seulement lorsque $c_1 = 0$.

Puisque $M(d) = 1$, alors $M(x) = \left(\frac{d}{x}\right)^{\sqrt{2\alpha\lambda}}$. La commande optimale est alors égale à

$$u^*(x) = -\sqrt{2\lambda} q_0,$$

ce qui est le même résultat que lorsqu'on a utilisé la proposition 1.

Remarques. i. Si $d^* < x < d$ et d^* décroît vers zéro, en utilisant les formules (voir *Abromowitz and Stegun, 1965*)

$$I_0(z) \sim 1, I_1(z) \sim \frac{z}{2}, K_0(z) \sim -\ln z, K_1(z) \sim \frac{1}{z} \text{ si } z \downarrow 0$$

la commande optimale est égale à

$$u^*(x) = \lim_{d^* \rightarrow 0} u_{d^*}^*(x) = 0.$$

ii. Nous pouvons résoudre d'une façon directe l'équation différentielle associée à $G(x)$:

$$\lambda - \frac{b_0^2}{2q_0} G^2(y) + \frac{1}{2} G'(y) = 0,$$

avec la condition $G(\sqrt{dd^*}) = 0$. En effet, $x = \sqrt{dd^*}$ est l'équivalent du point $y = 0$ pour le processus transformé.

En conclusion, dans ce chapitre nous avons pu résoudre les problèmes LQG en dimension un, et ce, en utilisant une nouvelle méthode. Transformer l'équation initiale en une équation différentielle de Riccati a facilité notre travail, sauf que nous devrions dans ce cas chercher une nouvelle condition initiale, associée à la nouvelle inconnue (c'est-à-dire $G(x)$). Si les paramètres infinitésimaux vérifient certaines conditions, nous avons trouvé la solution exacte de notre problème. Sinon, nous avons essayé de le transformer pour retrouver la première situation et, par la suite, appliquer la méthode de travail précédente. Le dernier recours était de chercher une bonne approximation par deux façons différentes.

Dans le prochain chapitre, nous allons essayer de résoudre le problème LQG en dimension plus grande ou égale à deux.

Chapitre 2

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES LQG EN DIMENSION DEUX OU PLUS

Après avoir résolu des problèmes LQG en dimension un, nous allons, dans ce chapitre, étudier le cas des problèmes de commande optimale en dimension $n > 1$. La résolution de ces problèmes n'est pas souvent évidente. Déjà, nous avons dit dans le premier chapitre que la condition de Whittle est difficile à satisfaire.

Nous présentons en premier lieu une proposition similaire à la proposition 2 du chapitre précédent, mais en dimension plus grande. Une bonne approximation sera donnée après si certaines conditions sont respectées. Ensuite, nous montrons un résultat qui généralise le théorème de Whittle.

2.1. RÉOLUTION DU PROBLÈME LQG EN DIMENSION DEUX AVEC LA SYMÉTRIE

Nous considérons $\mathbf{X}(t) = \{(X_1(t), X_2(t))\}$, un processus de diffusion commandé en dimension deux et admettons, de plus, que toutes les fonctions dépendent de $\mathbf{X}(t) = \{(X_1(t), X_2(t))\}$. L'équation différentielle stochastique commandée est sous la forme

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

tel que $b_i(\cdot, \cdot)$ est positive pour $i = 1, 2$. Nous avons choisi $\{W_1(t), t \geq 0\}$ et $\{W_2(t), t \geq 0\}$ comme étant deux mouvements browniens standards indépendants.

La fonction de coût est de la forme

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{T(x_1, x_2)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda \right\} dt \quad (2.1.2)$$

avec $q_i(\cdot, \cdot) > 0$.

L'instant de premier passage est défini par

$$T(x_1, x_2) = \inf\{t > 0 : Z(t) = d_1 \text{ ou } d_2 \mid (X_1(0), X_2(0)) = (x_1, x_2)\}, \quad (2.1.3)$$

tel que $Z(t) := w(X_1(t), X_2(t))$ est une fonction de $X_1(t)$ et $X_2(t)$, et donc c'est bien un problème en dimension deux. Par exemple, nous pouvons prendre $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$, avec la condition que $Z(0) \in (d_1, d_2)$.

Nous commençons l'étude de ce problème et essayons de trouver une solution exacte, bien que ces problèmes sont beaucoup plus difficiles que ceux en dimension un. Définissons tout d'abord la fonction $F(x_1, x_2)$ comme suit

$$F(x_1, x_2) = \inf_{u_1, u_2} E[J(x_1, x_2, u_1, u_2)]. \quad (2.1.4)$$

L'équation de programmation dynamique associée est

$$\inf_{u_1, u_2} \left\{ \lambda + \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1}{2} q_i(x_1, x_2) u_i^2(x_1, x_2) + [f_i(x_1, x_2) + b_i(x_1, x_2) u_i(x_1, x_2)] F_{x_i}(x_1, x_2) + \frac{1}{2} v_i(x_1, x_2) F_{x_i x_i}(x_1, x_2) \right] \right\} = 0, \quad (2.1.5)$$

où $F_{x_i} = \partial F / \partial x_i$, etc.

Nous déduisons que la commande optimale $u_i^*(x_1, x_2)$ est égale à

$$u_i^*(x_1, x_2) = -\frac{b_i(x_1, x_2)}{q_i(x_1, x_2)} F_{x_i}(x_1, x_2), \quad \text{pour } i = 1, 2. \quad (2.1.6)$$

Nous devons alors résoudre cette équation aux dérivées partielles, de second ordre et non linéaire :

$$\lambda + \sum_{i=1}^2 \left\{ f_i(x_1, x_2) F_{x_i}(x_1, x_2) - \frac{b_i^2(x_1, x_2)}{2q_i(x_1, x_2)} [F_{x_i}(x_1, x_2)]^2 + \frac{1}{2} v_i(x_1, x_2) F_{x_i x_i}(x_1, x_2) \right\} = 0, \quad (2.1.7)$$

en respectant la condition limite

$$F(x_1, x_2) = 0 \quad \text{si } Z(0) = w(x_1, x_2) = d_1 \text{ ou } d_2. \quad (2.1.8)$$

Nous allons utiliser, si c'est possible, *la méthode des similitudes* pour chercher la solution de l'équation (2.1.7). Elle consiste à exprimer, tout d'abord, $F(x_1, x_2)$ en fonction de z , qui dépend seulement de x_1 et x_2 . Nous aurons, alors, $F(x_1, x_2) = \Phi(z)$. Ensuite, nous essayons de transformer toutes les quantités dans (2.1.7) et aussi les conditions limites en fonction de la variable de similitude z . Dans notre cas, z doit être égale à $w(x_1, x_2)$.

Avant de présenter quelques exemples, nous mentionnons que dans certains problèmes symétriques, nous pouvons conclure que la fonction $\Phi(z)$ atteint son maximum ou son minimum lorsque $z = \frac{(d_1 + d_2)}{2}$.

Exemple 1.

Commençons par cet exemple :

$$dX_i(t) = u_i[X_1(t), X_2(t)]dt + dB_i(t),$$

pour $i = 1, 2$. De plus, nous choisissons l'instant d'arrêt égal à

$$T(x_1, x_2) = \inf\{t > 0 : X_1(t) - X_2(t) = -d \text{ ou } d \mid (X_1(0), X_2(0)) = (x_1, x_2)\}$$

et

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{T(x_1, x_2)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} u_i^2[X_1(t), X_2(t)] + \lambda \right\} dt.$$

L'équation aux dérivées partielles (2.1.7) devient

$$\lambda + \sum_{i=1}^2 \left\{ -\frac{1}{2} [F_{x_i}(x_1, x_2)]^2 + \frac{1}{2} F_{x_i x_i}(x_1, x_2) \right\} = 0.$$

Nous posons $z = w(x_1, x_2) = x_1 - x_2$. Ceci implique que $F_{x_1}(x_1, x_2) = \Phi'(z)$, $F_{x_2}(x_1, x_2) = -\Phi'(z)$ et $F_{x_i x_i}(x_1, x_2) = \Phi''(z)$, pour $i = 1, 2$ et par la suite l'équation précédente devient sous la forme

$$\lambda - [\Phi'(z)]^2 + \Phi''(z) = 0.$$

C'est une équation différentielle de second ordre et qui est non linéaire. De plus, nous pouvons conclure, par symétrie, que la fonction a un maximum (resp. un minimum) en $z = 0$. Ceci implique dans ce cas que $\Phi'(0) = 0$. Si λ est positive, nous avons

$$\Psi(z) := \Phi'(z) = -\sqrt{\lambda} \tanh(\sqrt{\lambda}z),$$

et la commande optimale associée est

$$u_i^*(x_1, x_2) = (-1)^{i-1} \sqrt{\lambda} \tanh(\sqrt{\lambda}(x_1 - x_2)), \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Cet exemple est le plus simple que nous pouvons considérer en dimension deux. De plus, nous savons que la somme ou la différence de deux mouvements browniens indépendants donne elle-même un mouvement brownien. C'est pour cela que nous ne sommes pas surpris du dernier résultat. Nous pouvons remarquer, de plus, que le théorème de Whittle est applicable dans ce cas. En effet, en utilisant les notations du premier chapitre, nous avons

$$\mathbf{B}[\mathbf{X}(t)]\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{X}(t)]\mathbf{B}'[\mathbf{X}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{N}[\mathbf{X}(t)].$$

Voici maintenant une version en dimension deux de la proposition 2 du premier chapitre :

Proposition 1. *Supposons que $q_i[X_1(t), X_2(t)] = q_0 b_i^2[X_1(t), X_2(t)]$ (avec $q_0 > 0$) dans (2.1.2), pour $i = 1, 2$, et que l'équation aux dérivées partielles (2.1.7) peut être exprimée en fonction de la variable de similitude $z = w(x_1, x_2)$. Si les paramètres infinitésimaux du processus stochastique non commandé $\{Z(t), t \geq 0\}$ sont tels que le problème de commande soit symétrique par rapport au milieu $d_0 := \frac{(d_1+d_2)}{2}$ dans l'intervalle (d_1, d_2) , alors la commande optimale $u_i^*(x_1, x_2)$ est donnée par*

$$u_i^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{q_0 b_i(x_1, x_2)} \Phi'(w(x_1, x_2)) \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_i}, \quad (2.1.9)$$

pour $i = 1, 2$. De plus, la fonction $\Psi(w(x_1, x_2)) := \Phi'(w(x_1, x_2))$ peut être obtenue en résolvant (2.1.7), mais écrite en fonction de $\Psi(z)$ et satisfaisant à la condition $\Psi(d_0) = 0$.

Le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ est défini comme une combinaison des processus $\{X_1(t), t \geq 0\}$ et $\{X_2(t), t \geq 0\}$. Pour ce nouveau processus, les paramètres infinitésimaux sont symétriques et les hypothèses de la proposition 2 du premier chapitre sont satisfaites, donc, nous avons le résultat présenté.

Remarques. i. La difficulté qui existe lorsque nous résolvons explicitement un

problème LGQ en dimension deux est due principalement au fait que nous devons trouver une solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre deux, non linéaire. Même lorsque la condition de Whittle est satisfaite, nous nous trouvons dans l'obligation de travailler avec une équation aux dérivées partielles de second ordre. Si nous essayons d'appliquer la dernière proposition, nous réduisons l'équation en une autre équation différentielle ordinaire non linéaire, d'ordre un et qui est une équation de *Riccati*.

ii. Un autre problème est que généralement, même si les paramètres infinitésimaux de $\{X_1(t), t \geq 0\}$ et $\{X_2(t), t \geq 0\}$ sont constants, les paramètres infinitésimaux de $\{Z(t), t \geq 0\}$ ne sont pas des fonctions constantes.

Par la suite, nous présentons un exemple non trivial, où nous appliquons la proposition 1.

Exemple 2.

Dans cet exemple, nous choisissons l'équation différentielle stochastique commandée

$$dX_i(t) = h_i[X_1(t), X_2(t)]u_i[X_1(t), X_2(t)]dt + dB_i(t), \quad (2.1.10)$$

pour $i = 1, 2$, et la fonction de coût est de la forme

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{T(x_1, x_2)} \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} q_0 h_i^2[X_1(t), X_2(t)] u_i^2[X_1(t), X_2(t)] + \lambda \right\} dt, \quad (2.1.11)$$

tel que

$$T(x_1, x_2) = \inf\{t > 0 : |X_1(t)| + |X_2(t)| = d_1 \text{ ou } d_2 \mid X_i(0) = x_i, i = 1, 2\}. \quad (2.1.12)$$

Dans ce cas, l'espace de travail pour ce problème avec mouvement brownien standard en dimension deux est la surface entre deux losanges concentriques.

L'équation aux dérivées partielles (2.1.7) devient sous la forme

$$\lambda + \sum_{i=1}^2 \left\{ -\frac{1}{2q_0} [F_{x_i}(x_1, x_2)]^2 + \frac{1}{2} F_{x_i x_i}(x_1, x_2) \right\} = 0, \quad (2.1.13)$$

qui est la même que celle de l'exemple précédent, si nous choisissons $q_0 = 1$. Cette fois, la variable de similitude est égale à $z = w(x_1, x_2) = |x_1| + |x_2|$.

Nous allons résoudre le problème seulement lorsque x_1 et x_2 sont positives et, après, nous généralisons le résultat pour les trois autres domaines par symétrie. Alors écrivons tout d'abord $z = x_1 + x_2$, ce qui implique que $F_{x_i}(x_1, x_2) = \Phi'(z)$ et $F_{x_i x_i}(x_1, x_2) = \Phi''(z)$, pour $i = 1, 2$. Donc, nous avons cette équation de *Riccati* :

$$\lambda - \frac{1}{q_0} [\Psi(z)]^2 + \Psi'(z) = 0.$$

Ensuite, nous pouvons dire que la moyenne infinitésimal du processus de diffusion non commandé $\{Z(t), t \geq 0\}$ est nulle et la variance infinitésimale est égale à 2. Donc, nous affirmons que pour la fonction $\Phi(z)$, nous avons $\Phi'(d_0) = 0$.

Si λ est positive, alors

$$\Psi(z) = -\sqrt{\lambda q_0} \tanh \left(\sqrt{\lambda/q_0} (z - d_0) \right),$$

ce qui implique que la commande optimale, dans le premier quadrant, peut être exprimée par

$$u_i^*(x_1, x_2) = \frac{1}{b_i(x_1, x_2)} \sqrt{\frac{\lambda}{q_0}} \tanh \left(\sqrt{\lambda/q_0} (x_1 + x_2 - d_0) \right), \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Remarques. i. Pour obtenir la commande optimale dans le deuxième quadrant, nous avons juste à remplacer x_1 par $-x_1$ dans l'expression ci-dessus, etc.

ii. Le théorème de Whittle est applicable pour cet exemple.

Nous choisissons maintenant un exemple où la condition de Whittle n'est pas satisfaite.

Exemple 3.

Soit

$$dX_1(t) = dB_1(t), \quad (2.1.14)$$

$$dX_2(t) = b_2[X_1(t), X_2(t)]u_2[X_1(t), X_2(t)]dt + dB_2(t). \quad (2.1.15)$$

Dans ce cas, nous remarquons que nous avons pris $b_1[X_1(t), X_2(t)] \equiv 0$ et donc $b_1(\cdot, \cdot)$ n'est plus strictement positive.

La fonction de coût est égale à

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{T(x_1, x_2)} \left\{ \frac{1}{2} b_2^2[X_1(t), X_2(t)] u_2^2[X_1(t), X_2(t)] + \lambda \right\} dt,$$

et tel que l'instant d'arrêt est défini comme dans l'exemple 2.

Le théorème de Whittle est non applicable, parce que la matrice de commande

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_2^2[X_1(t), X_2(t)] \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

La fonction $F(x_1, x_2)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\lambda - \frac{1}{2} [F_{x_2}(x_1, x_2)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 F_{x_i x_i}(x_1, x_2) = 0.$$

Comme dans le dernier exemple, nous définissons la variable de similitude $z = |x_1| + |x_2|$ et nous résolvons le problème dans le premier quadrant. Puisque $F_{x_2}(x_1, x_2) = \Phi'(z) = \Psi(z)$ et $F_{x_i x_i}(x_1, x_2) = \Phi''(z) = \Psi'(z)$, pour $i = 1, 2$, nous avons alors cette équation transformée à résoudre :

$$\lambda - \frac{1}{2} [\Psi(z)]^2 + \Psi'(z) = 0.$$

Utilisons maintenant la proposition 1 pour affirmer que $\Psi(d_0) = 0$ tel que $d_0 = \frac{(d_1+d_2)}{2}$. Si λ est positive, la fonction $\Psi(z)$ est de la forme

$$\Psi(z) = -\sqrt{2\lambda} \tanh\left(\sqrt{2\lambda}\frac{(z-d_0)}{2}\right).$$

Il s'ensuit que

$$u_2^*(x_1, x_2) = \frac{1}{b_2(x_1, x_2)} \sqrt{2\lambda} \tanh\left(\sqrt{2\lambda}(z-d_0)/2\right).$$

Remarque. Nous pouvons noter que dans les trois exemples présentés dans cette section, les expressions obtenues pour les commandes optimales sont tout à fait semblables. Ceci est dû au fait que les trois instants d'arrêt sont définis comme somme ou différence de mouvements browniens standards indépendants. En pratique, pour des problèmes plus compliqués, nous ne sommes pas certains de pouvoir les résoudre explicitement, comme nous le verrons par la suite, sauf si une certaine symétrie existe et peut être utilisée.

2.2. APPROXIMATION DE LA COMMANDE OPTIMALE EN DIMENSION DEUX

Nous présentons dans cette section une technique qui va nous permettre d'obtenir une bonne approximation pour les problèmes LQG en deux dimensions, lorsque la solution exacte est difficile à trouver. Nous allons utiliser le même processus que dans l'exemple 2 et aussi la même fonction de coût. Cependant, nous prenons

$$T(x_1, x_2) = \inf\{t > 0 : X_1^2(t) + X_2^2(t) = d_1 \text{ ou } d_2 \mid X_i(0) = x_i, i = 1, 2\},$$

avec $d_1 < x_1^2 + x_2^2 < d_2$. Le domaine de travail, cette fois-ci, est l'espace entre deux cercles concentriques.

Nous devons résoudre l'équation aux dérivées partielles (2.1.13), mais satisfaisant à la nouvelle condition limite

$$F(x_1, x_2) = 0 \quad \text{si } x_1^2 + x_2^2 = d_1 \text{ ou } d_2.$$

C'est clair, nous allons essayer d'écrire la variable de similitude z en fonction du terme $x_1^2 + x_2^2$. Posons, donc, $z = x_1^2 + x_2^2$ et $F(x_1, x_2) = \Phi(z)$. Nous avons alors

$$F_{x_i}(x_1, x_2) = 2x_i\Phi'(z) \quad \text{et} \quad F_{x_i x_i}(x_1, x_2) = (2x_i)^2\Phi''(z) + 2\Phi'(z),$$

pour $i = 1, 2$. Si nous remplaçons dans (2.1.13), nous obtenons une équation différentielle de second ordre, non linéaire

$$\lambda - \frac{2}{q_0}z[\Phi'(z)]^2 + 2\Phi'(z) + 2z\Phi''(z) = 0, \quad (2.2.1)$$

et tel que $\Phi(d_1) = \Phi(d_2) = 0$.

Pour simplifier le problème, nous essayons de trouver une condition pour la fonction dérivée $\Psi(z) = \Phi'(z)$. Malheureusement, la moyenne infinitésimale du processus de diffusion non commandé $Z(t) := X_1^2(t) + X_2^2(t)$ est égale à 2 et sa variance infinitésimale est $4z$, (voir *Karlin and Taylor (1981, p. 175)*) et, par la suite, nous ne pouvons pas écrire que $\Psi(d_0) = 0$ comme à l'exemple 2.

Remarque. Nous savons déjà que le processus de diffusion $\{Y(t), t \geq 0\}$ défini par $Y(t) = [X_1^2(t) + X_2^2(t)]^{1/2}$ est un processus de Bessel en dimension deux. Sa moyenne infinitésimale est égale à $(2y)^{-1}$ et sa variance infinitésimale est 1.

Pour obtenir la solution exacte, nous devons résoudre l'équation différentielle de second ordre (2.2.1) et après nous appliquons la condition limite. En utilisant un logiciel mathématique, nous trouvons, si λ est positive,

$$\Phi(z) = -\frac{q_0}{2} \ln \left\{ \frac{2 [c_1 I_0(\kappa\sqrt{z}) + c_2 K_0(\kappa\sqrt{z})]^2}{\lambda q_0 z [I_1(\kappa\sqrt{z}) K_0(\kappa\sqrt{z}) + I_0(\kappa\sqrt{z}) K_1(\kappa\sqrt{z})]^2} \right\},$$

où

$$\kappa := \sqrt{\frac{2\lambda}{q_0}}$$

et $I_\nu(\cdot)$ et $K_\nu(\cdot)$ sont deux fonctions de Bessel modifiées (voir Abramowitz and Stegun (1965, p. 374)). Après, les deux conditions limites permettent de trouver c_1 et c_2 .

Dans cet exemple, nous avons été capables de trouver d'une façon explicite l'expression exacte de $\Phi(z)$, ce qui n'est pas le cas en général. Cependant, il est plus facile de trouver la fonction dérivée $\Psi(z)$ de $\Phi(z)$, puisque ça revient à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

La technique que nous allons utiliser pour trouver une bonne approximation pour notre problème de commande optimale est l'extension de celle présentée dans Lefebvre and Zitouni (2012) en dimension un. Elle est basée sur le fait que la fonction $\Phi(z)$ devrait approximativement atteindre sa valeur maximale ou minimale (cela dépend du signe de λ) pour z à partir duquel le temps moyen que le processus non commandé $\{Z(t), t \geq 0\}$ prend pour atteindre d_1 ou d_2 est maximal.

Pour présenter la technique, nous allons l'appliquer au dernier exemple. Pour cela, nous supposons que $\lambda = 1$, $q_0 = 2$, $d_1 = 1$ et $d_2 = 3$. Si nous remplaçons dans l'expression de $\Phi(z)$, nous trouvons en utilisant un logiciel mathématique que cette fonction atteint son maximum approximativement en $z = 1.821$.

Ensuite, nous devons chercher le temps moyen $m(x_1, x_2)$ que prend le processus non commandé $\{(X_1(t), X_2(t)), t \geq 0\}$ pour atteindre l'un des deux cercles $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ou $x_1^2 + x_2^2 = 3$. Nous allons donc résoudre l'équation aux dérivées partielles (voir Lefebvre (2007), par exemple)

$$\frac{1}{2} \{m_{x_1 x_1} + m_{x_2 x_2}\} = -1, \quad (2.2.2)$$

vérifiant les conditions limites $m(x_1, x_2) = 0$ si $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ou 3 .

Comme auparavant, nous utilisons la méthode des similitudes pour trouver la solution ; nous posons alors

$$m(x_1, x_2) = n(z),$$

où $z = x_1^2 + x_2^2$. Il s'ensuit que l'équation (2.2.2) devient une équation différentielle ordinaire qui est de la forme

$$2zn''(z) + 2n'(z) = -1,$$

tel que $n(1) = n(3) = 0$.

La solution est directement égale à

$$n(z) = \frac{\ln z}{\ln 3} - \frac{z}{2} - \frac{1}{2},$$

et elle atteint son maximum en $z = \frac{2}{\ln 3} \simeq 1.8205$.

Finalement, nous utilisons un logiciel mathématique pour résoudre cette équation de Riccati :

$$1 - z[\Psi(z)]^2 + 2\Psi(z) + 2z\Psi'(z) = 0,$$

avec la condition $\Psi(1.8205) = 0$. Si nous dessinons les deux courbes (la première est celle trouvée au début de la section et la deuxième est la solution approximative), nous constatons qu'elles coïncident presque tout au long de l'intervalle $[1, 3]$.

Remarques. i. Dans cet exemple, la condition de Whittle est satisfaite et donc nous aurions pu utiliser le théorème de Whittle pour linéariser l'équation aux dérivées partielles que vérifie la fonction $F(x_1, x_2)$.

ii. Supposons que nous travaillons autrement. Nous fixons la valeur de x_2 (resp. x_1), et donc $F(x_1, x_2)$ admet un extremum si $x_1 = 0$ (resp. $x_2 = 0$), ce qui nous permet d'avoir une condition pour $F_{x_1}(x_1, x_2)$ (resp. $F_{x_2}(x_1, x_2)$). Malheureusement, les conditions $F_{x_1}(0, x_2) = F_{x_2}(x_1, 0) = 0$ ne permettent pas de

déterminer la valeur de $F(x_1, x_2)$. En effet, ces deux conditions n'aident pas à avoir une condition pour $\Phi(z)$, puisque $F_{x_i}(x_1, x_2) = 2x_i\Phi'(z)$.

En conclusion, la résolution des problèmes de commande optimale en dimension plus grande ou égale à deux est souvent difficile, sauf si certaines conditions sont satisfaites. Si la condition de Whittle est vérifiée, alors le problème devient purement probabiliste. Elle permet de transformer l'équation aux dérivées partielles non linéaire en une autre qui est linéaire et que nous appelons *équation du passé de Kolmogorov*. Cependant, nous avons pu résoudre certains problèmes et trouver les solutions exactes, sans utiliser le résultat de Whittle. De plus, dans la dernière section, nous avons proposé une technique qui a permis d'obtenir une très bonne approximation de la solution.

Dans la prochaine section, nous allons présenter une méthode plus générale que celle de Whittle et qui va nous aider à linéariser l'équation aux dérivées partielles. Cela sera une extension en dimension n d'une démarche utilisée en dimension un (voir *Lefebvre et Zitouni (2013)*).

2.3. LINÉARISATION DE L'ÉQUATION MATRICIELLE DE RICCATI

Dans la première section de ce chapitre, nous avons pu résoudre certains problèmes en dimension deux. En effet, nous avons appliqué quelques transformations à l'équation aux dérivées partielles en $F(\mathbf{x})$ et après nous avons utilisé des résultats déduits à partir du cas de dimension un.

Ici, nous revenons au théorème de Whittle. Nous avons dit que l'application de ce théorème nécessite qu'une certaine condition soit vérifiée, ce qui permet après de linéariser l'équation aux dérivées partielles que nous devons résoudre. Dans cette section, nous allons essayer de généraliser ce théorème. Réécrivons tout d'abord le problème LQG. Soit alors $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ un processus de diffusion commandé en dimension n et qui est défini sous cette forme

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{X}(t)]dt + \mathbf{B}[\mathbf{X}(t)]\mathbf{u}[\mathbf{X}(t)]dt + \{\mathbf{N}[\mathbf{X}(t)]\}^{1/2} d\mathbf{W}(t), \quad (2.3.1)$$

où \mathbf{N} est la matrice de covariance qui est symétrique et définie positive. Notons, de plus, que \mathbf{B} est une matrice $n \times m$ et \mathbf{u} est un vecteur colonne de dimension m .

Ensuite, nous définissons la fonction de coût

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \int_0^{\tau(\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}'[\mathbf{X}(t)] \mathbf{Q}[\mathbf{X}(t)] \mathbf{u}[\mathbf{X}(t)] + \lambda \right\} dt, \quad (2.3.2)$$

où λ est un scalaire non nul. La matrice \mathbf{Q} est définie positive et de dimension $m \times m$ et

$$\tau(\mathbf{x}) = \inf\{t > 0 : \mathbf{X}(t) \in \partial D \mid \mathbf{X}(0) = \mathbf{x}\},$$

tel que $\mathbf{x} \in D$, où D est notre domaine de travail et ∂D sa frontière.

Remarque. La formulation que nous avons présentée est la plus générale. Dans ce qui suit, nous allons supposer que $m = n$.

Nous définissons la fonction $F(\mathbf{x})$ sous la forme

$$F(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u}} E[J(\mathbf{x}, \mathbf{u})]. \quad (2.3.3)$$

En utilisant l'équation de programmation dynamique, notre fonction satisfait à cette équation aux dérivées partielles :

$$\lambda + F'_x(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} F'_x(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})F_x(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{N}F_{xx}(\mathbf{x})] = 0, \quad (2.3.4)$$

tel que F_x est la dérivée de F par rapport au vecteur \mathbf{x} . La condition limite est

$$F(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \partial D.$$

La commande optimale est donnée par la formule

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}) = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})F_x(\mathbf{x}). \quad (2.3.5)$$

Pour appliquer le théorème de Whittle, il faut qu'il existe un scalaire α strictement positif et qui vérifie

$$\alpha \mathbf{N}[\mathbf{X}(t)] = \mathbf{B}[\mathbf{X}(t)] \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{X}(t)] \mathbf{B}'[\mathbf{X}(t)]. \quad (2.3.6)$$

Cette relation entre la matrice de covariance \mathbf{N} et les matrices de commande \mathbf{B} et \mathbf{Q} est difficile à satisfaire surtout en dimension $n \geq 2$, particulièrement lorsque ces matrices sont non constantes. En fait, même si c'était le cas, c'est rare que la condition soit vérifiée. Elle est principalement vérifiée dans les problèmes où une certaine symétrie existe : par exemple, si toutes les matrices \mathbf{N} , \mathbf{B} et \mathbf{Q} sont proportionnelles à la matrice identité d'ordre n (et \mathbf{f} est identiquement nulle); donc nous sommes dans un problème de commande optimale pour un mouvement brownien en dimension n .

Notre but alors dans cette section est de généraliser le théorème de Whittle et aussi la méthode que nous avons proposée pour linéariser l'équation de Riccati en dimension un.

Nous commençons par présenter ce nouveau résultat en dimension deux et après en dimension n .

2.3.1. Linéarisation de l'équation matricielle de Riccati en dimension deux

Tout d'abord, posons

$$\mathbf{M}[\mathbf{X}(t)] = \mathbf{B}[\mathbf{X}(t)] \mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{X}(t)] \mathbf{B}'[\mathbf{X}(t)]. \quad (2.3.7)$$

Si la relation de Whittle est vérifiée, alors la matrice \mathbf{M} est symétrique et inversible.

Pour généraliser le théorème de Whittle, nous allons supposer que \mathbf{M} est effectivement symétrique et inversible, mais pas nécessairement proportionnelle à \mathbf{N} .

Puisque nous sommes en dimension deux, et en admettant que toutes les fonctions dépendent de $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$, l'équation (2.3.1) est sous la forme

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.3.8)$$

et la fonction de coût est

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{\tau(x_1, x_2)} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda \right\} dt. \quad (2.3.9)$$

Ici, nous supposons que les deux mouvements browniens standards sont indépendants.

Ensuite, soit

$$F_x(x_1, x_2) = \mathbf{G}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} G_1(x_1, x_2) \\ G_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

et

$$F_{xx}(x_1, x_2) = \mathbf{G}_x(x_1, x_2) = \mathbf{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} H_{11}(x_1, x_2) & H_{12}(x_1, x_2) \\ H_{12}(x_1, x_2) & H_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

en prenant $F_{x_1x_2}(x_1, x_2) = F_{x_2x_1}(x_1, x_2)$.

La commande optimale est donnée par cette formule :

$$\begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}.$$

L'équation matricielle de *Riccati*, satisfaite par la dérivée $\mathbf{G}(x_1, x_2)$ de la fonction $F(x_1, x_2)$ par rapport à \mathbf{x} et que nous voulons linéariser, est sous la forme

$$\lambda + \mathbf{G}' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{G}' \mathbf{M} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{N} \mathbf{H}] = 0. \quad (2.3.10)$$

Proposition 2. *Supposons que la matrice définie par (2.3.7) est symétrique et inversible. Alors la fonction $z(x_1, x_2)$ définie par la transformation*

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \mathbf{K}, \quad (2.3.11)$$

tel que $z_{x_i} = \partial z / \partial x_i$ pour $i = 1, 2$ et

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} := -\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}, \quad (2.3.12)$$

satisfait à l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$\lambda z + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_i z_{x_j} k_{ji} + \frac{1}{2} L(z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, z_{x_2 x_2}) = 0, \quad (2.3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} L(z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, z_{x_2 x_2}) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_i^2 \left\{ z_{x_j x_i} k_{ji} + z_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ji} \right\} \\ &+ 2\sigma_{12} \left\{ \sum_{i=1}^2 z_{x_i x_2} k_{i1} + z_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_2} k_{i1} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

De plus, pour que la transformation soit valable, il faut qu'il existe deux fonctions $\phi(x_1)$ et $\psi(x_2)$ vérifiant

$$\int \frac{1}{z} \sum_{i=1}^2 k_{i1} z_{x_i} dx_1 + \psi(x_2) = \int \frac{1}{z} \sum_{i=1}^2 k_{i2} z_{x_i} dx_2 + \phi(x_1). \quad (2.3.15)$$

Remarques. i. La méthode utilisée pour linéariser l'équation (2.3.10) est inspirée de la technique que nous avons utilisée dans le cas des processus de diffusion en dimension un.

ii. Le choix de la matrice \mathbf{K} sous la forme $-\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}$ et non pas la forme $-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ n'est pas par hasard. Nous montrerons, à la fin de la section, pourquoi ce choix est meilleur.

Preuve. Prenons l'équation (2.3.10) et commençons par calculer chaque produit matriciel à part :

$$\mathbf{G}' \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_i z_{x_j} k_{ji},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'\mathbf{M}\mathbf{G} &= \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{K}' \begin{pmatrix} z_{x_1} \\ z_{x_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{x_1} \\ z_{x_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2} \left[\sum_{i=1}^2 z_{x_i}^2 \begin{pmatrix} k_{i1} & k_{i2} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \end{pmatrix} + 2z_{x_1}z_{x_2} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{N}\mathbf{H}] &= -\frac{z_{x_1}^2}{z^2} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} - \frac{z_{x_2}^2}{z^2} \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{z_{x_1}z_{x_2}}{z^2} \left(\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \mathbf{L}(z_{x_1x_1}, z_{x_1x_2}, z_{x_2x_2}), \end{aligned}$$

où \mathbf{L} est définie comme indiqué en (2.3.14). Pour retrouver cette dernière expression, nous avons calculé, d'abord, la matrice jacobienne associée à $\mathbf{G}(x_1, x_2)$.

Donc, nous avons

$$\mathbf{G}_x(x_1, x_2) = \mathbf{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} H_{11}(x_1, x_2) & H_{12}(x_1, x_2) \\ H_{12}(x_1, x_2) & H_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

tel que

$$\begin{cases} H_{11} = \frac{k_{11}}{z^2}(z_{x_1 x_1} z - z_{x_1}^2) + \frac{\partial k_{11}}{\partial x_1} \frac{z_{x_1}}{z} + \frac{k_{21}}{z^2}(z_{x_1 x_2} z - z_{x_1} z_{x_2}) + \frac{\partial k_{21}}{\partial x_1} \frac{z_{x_2}}{z} \\ H_{12} = \frac{k_{11}}{z^2}(z_{x_1 x_2} z - z_{x_1} z_{x_2}) + \frac{\partial k_{11}}{\partial x_2} \frac{z_{x_1}}{z} + \frac{k_{21}}{z^2}(z_{x_1 x_2} z - z_{x_2}^2) + \frac{\partial k_{21}}{\partial x_2} \frac{z_{x_2}}{z} \\ H_{21} = \frac{k_{12}}{z^2}(z_{x_1 x_1} z - z_{x_1}^2) + \frac{\partial k_{12}}{\partial x_1} \frac{z_{x_1}}{z} + \frac{k_{22}}{z^2}(z_{x_1 x_2} z - z_{x_1} z_{x_2}) + \frac{\partial k_{22}}{\partial x_1} \frac{z_{x_2}}{z} \\ H_{22} = \frac{k_{12}}{z^2}(z_{x_1 x_2} z - z_{x_1} z_{x_2}) + \frac{\partial k_{12}}{\partial x_2} \frac{z_{x_1}}{z} + \frac{k_{22}}{z^2}(z_{x_2 x_2} z - z_{x_2}^2) + \frac{\partial k_{22}}{\partial x_2} \frac{z_{x_2}}{z} \end{cases}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{NH}] &= H_{11}\sigma_1^2 + (H_{21} + H_{12})\sigma_{12} + H_{22}\sigma_2^2 = \\ &= -\frac{z_{x_1}^2}{z^2} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} - \frac{z_{x_2}^2}{z^2} \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \\ &= \frac{z_{x_1} z_{x_2}}{z^2} \left(\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \right) + L(z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, z_{x_2 x_2}), \end{aligned}$$

où $L(\cdot, \cdot, \cdot)$ est sous la forme (2.3.14).

Maintenant, si nous remplaçons ces expressions dans l'équation (2.3.10), nous remarquons que nous avons une équation aux dérivées partielles en $z(x_1, x_2)$ qui est non linéaire. Pour la linéariser, les termes non linéaires devront être nuls tous à la fois. Donc, il faut vérifier ces égalités :

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}, \\ 0 &= \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \\ 0 &= 2 \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ces résultats sont vérifiés simultanément seulement si

$$2\mathbf{KMK}' + \mathbf{KN} + \mathbf{NK}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \mathbf{0}_2. \quad (2.3.16)$$

Cependant, si nous essayons de calculer la première quantité, avec les conditions que nous avons mentionnées au début, c'est-à-dire le fait que les matrices \mathbf{M} et \mathbf{N} sont deux matrices symétriques, inversibles et \mathbf{Q} est définie positive, nous obtenons

$$\begin{aligned} 2\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{K}' + \mathbf{K}\mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{K}' &= 2\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \\ &= 2\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} - 2\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} := \mathbf{0}_2. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors que la condition (2.3.16) est toujours valable et, par la suite, nous déduisons que la transformation linéarise bien l'équation (2.3.10).

Ensuite, à partir de l'expression (2.3.11), nous avons

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \mathbf{K}. \quad (2.3.17)$$

Nous pouvons alors en déduire deux expressions pour la fonction $F(x_1, x_2)$. Ces dernières devraient être égales ; donc il faut qu'il existe deux fonctions $\phi(x_1)$ et $\psi(x_2)$, tel que

$$F(x_1, x_2) = \int \frac{1}{z} \sum_{i=1}^2 k_{i1} z_{x_i} dx_1 + \psi(x_2) = \int \frac{1}{z} \sum_{i=1}^2 k_{i2} z_{x_i} dx_2 + \phi(x_1). \quad (2.3.18)$$

Remarques. i. Si la relation (2.3.6) est vérifiée, alors nous pouvons appliquer le théorème de Whittle et la matrice \mathbf{K} est donnée par

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{\alpha} \mathbf{I}_2,$$

où \mathbf{I}_2 est la matrice identité d'ordre deux. La condition (2.3.15), dans ce cas, est sous la forme

$$\int \frac{1}{z} z_{x_1} dx_1 + \psi(x_2) = \int \frac{1}{z} z_{x_2} dx_2 + \phi(x_1);$$

ce qui est équivalent à dire

$$\ln[z(x_1, x_2)] + \psi(x_2) = \ln[z(x_1, x_2)] + \phi(x_1).$$

Évidemment, nous choisissons $\psi(x_2) = \phi(x_1) \equiv c_0$, tel que c_0 est une constante. Donc cette condition est satisfaite même lorsque le théorème de Whittle est applicable.

ii. La fonction $z(x_1, x_2)$ devrait être strictement positive. En effet, en dimension un, $z(x)$ est effectivement strictement positive, parce qu'en utilisant la relation

$$G(x) = -\frac{q(x)v(x)}{b^2(x)} \frac{z'(x)}{z(x)},$$

elle peut s'exprimer sous la forme d'une fonction exponentielle. De même, en dimension deux, lorsque la relation (2.3.6) est satisfaite, nous pouvons montrer que $z(x_1, x_2)$ est strictement positive. En effet, nous avons dans ce cas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que $z(x_1, x_2)$ est une fonction exponentielle, comme en dimension un.

iii. Le problème le plus trivial est lorsque les deux processus commandés définis dans (2.3.8), sont indépendants, c'est-à-dire que $\sigma_{12} = 0$, et aussi toutes les matrices sont constantes, ce qui implique que k_{ij} est aussi constante, pour $i, j = 1, 2$. L'équation L est alors réduite à

$$L(z_{x_1x_1}, z_{x_1x_2}, z_{x_2x_2}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_i^2 z_{x_jx_i} k_{ji}. \quad (2.3.19)$$

iv. La dernière proposition ne donne pas l'expression explicite de la fonction G , à partir de laquelle nous pouvons déduire la commande optimale. Similairement au théorème de Whittle, elle simplifie le problème de commande optimale. Évidemment, résoudre une équation différentielle linéaire est généralement plus facile qu'une équation non linéaire.

2.3.2. Linéarisation de l'équation matricielle de Riccati en dimension n

Nous présentons maintenant un corollaire, qui sera une extension de la proposition, en dimension n .

Corollaire. *En dimension n , l'équation matricielle de Riccati est de la forme*

$$\lambda + \mathbf{G}'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2}\mathbf{G}'(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\text{tr}[\mathbf{N}\mathbf{G}_x(\mathbf{x})] = 0. \quad (2.3.20)$$

Elle est transformée en une équation aux dérivées partielles linéaire pour la fonction $z(x_1, \dots, x_n)$, définie comme suit

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & \dots & z_{x_n} \end{pmatrix} \mathbf{K}, \quad (2.3.21)$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix} := -\mathbf{N}\mathbf{M}^{-1}. \quad (2.3.22)$$

À partir de (2.3.21), nous déduisons que la transformation est valable seulement si les n expressions pour $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sont compatibles.

Remarques. i. La grande difficulté que nous pouvons rencontrer est d'obtenir n expressions compatibles de la fonction $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Sinon, c'est clair que ce résultat est une amélioration du théorème de Whittle.

ii. Nous avons dit que le choix de la matrice \mathbf{K} n'était pas par hasard. En effet, si nous définissons $z(x_1, \dots, x_n)$ de la façon suivante :

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & \dots & z_{x_n} \end{pmatrix} \mathbf{P},$$

avec

$$\mathbf{P} := -(\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{N},$$

alors $z(x_1, \dots, x_n)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles linéaire seulement si

$$2\mathbf{PMP}' + \mathbf{PN} + \mathbf{NP}' = \mathbf{0}_2,$$

ce qui est difficile à vérifier. Si nous essayons de développer cette équation comme dans l'autre cas, nous aurons

$$\begin{aligned} 2\mathbf{PMP}' + \mathbf{PN} + \mathbf{NP}' &= 2(\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{NMN}(\mathbf{M})^{-1} - (\mathbf{M}')^{-1}\mathbf{N}^2 - \mathbf{N}^2(\mathbf{M})^{-1} \\ &= 2(\mathbf{M})^{-1}\mathbf{NMN}(\mathbf{M})^{-1} - (\mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}^2 - \mathbf{N}^2(\mathbf{M})^{-1}. \end{aligned}$$

Comme nous le remarquons, nous ne pouvons plus simplifier cette expression, avec les conditions supposées au début de la section. C'est pour cela que le choix que nous avons fait au début est meilleur.

Preuve du corollaire. Tout d'abord nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &= \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & \cdots & z_{x_n} \end{pmatrix} \mathbf{K} \\ &= \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & \cdots & z_{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{z} \left(k_{11}z_{x_1} + k_{21}z_{x_2} + \cdots + k_{n1}z_{x_n}, \dots, k_{1n}z_{x_1} + \cdots + k_{nn}z_{x_n} \right). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{G}'(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}'(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} z_{x_1} & \cdots & z_{x_n} \end{pmatrix} \mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{K}' \begin{pmatrix} z_{x_1} \\ \vdots \\ z_{x_n} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{z^2} \left(z_{x_1}^2 \begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{11} \\ \vdots \\ k_{1n} \end{pmatrix} + \cdots + z_{x_n}^2 \begin{pmatrix} k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{n1} \\ \vdots \\ k_{nn} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. 2 \sum_{1 \leq i < j}^n z_{x_i} z_{x_j} \begin{pmatrix} k_{i1} & \cdots & k_{in} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{j1} \\ \vdots \\ k_{jn} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

La matrice jacobienne associée à \mathbf{G} est de la forme

$$\mathbf{G}_x(x_1, \dots, x_2) = \mathbf{H}(x_1, \dots, x_2) = \frac{1}{z^2} \begin{pmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ H_{i1} & \cdots & H_{in} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{cases} H_{11} = k_{11}(z_{x_{11}}z - z_{x_1}^2) + k_{21}(z_{x_{21}}z - z_{x_1}z_{x_2}) + \cdots \\ H_{1n} = k_{11}(z_{x_{1n}}z - z_{x_1}z_{x_n}) + k_{21}(z_{x_{2n}}z - z_{x_1}z_{x_n}) + \cdots \\ H_{i1} = k_{i1}(z_{x_{i1}}z - z_{x_1}^2) + k_{2i}(z_{x_{21}}z - z_{x_1}z_{x_2}) + \cdots \\ H_{in} = k_{i1}(z_{x_{in}}z - z_{x_1}z_{x_n}) + k_{2i}(z_{x_{2n}}z - z_{x_1}z_{x_n}) + \cdots \end{cases}$$

Posons, de plus,

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ & \sigma_2^2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Nous aurons par la suite

$$\begin{aligned} \text{tr} [\mathbf{NH}] = \frac{1}{z^2} & \left[-z_{x_1}^2 (k_{11}\sigma_1^2 + k_{12}\sigma_{12} + \dots + k_{1n}\sigma_{1n}) - \dots - z_{x_i}^2 (k_{i1}\sigma_{i1} + \dots + k_{ii}\sigma_i^2 + \dots + \right. \\ & \left. k_{in}\sigma_{in}) - \dots - z_{x_i} z_{x_j} ([k_{i1}\sigma_{j1} + k_{i2}\sigma_{j2} + \dots + k_{in}\sigma_{jn}] + [k_{j1}\sigma_{i1} + k_{j2}\sigma_{i2} + \dots + k_{jn}\sigma_{in}]) \right] = \\ & \frac{1}{z^2} \left[-z_{x_1}^2 \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_{1n} \end{pmatrix} - \dots - z_{x_i}^2 \begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \vdots \\ \sigma_{in} \end{pmatrix} - \dots - \right. \\ & \left. z_{x_i} z_{x_j} \left(\begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{j1} \\ \vdots \\ \sigma_{jn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{j1} & \dots & k_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \vdots \\ \sigma_{in} \end{pmatrix} \right) - \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous cherchons à linéariser l'équation différentielle, donc nous procédons comme en dimension deux et nous essayons d'annuler les termes quadratiques. Il s'en suit alors que nous devons résoudre ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_{1n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{11} & \dots & k_{1n} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{11} \\ \vdots \\ k_{1n} \end{pmatrix} = 0 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \vdots \\ \sigma_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{i1} \\ \vdots \\ k_{in} \end{pmatrix} = 0 \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{j1} \\ \vdots \\ \sigma_{jn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{j1} & \dots & k_{jn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \vdots \\ \sigma_{in} \end{pmatrix} \\ + 2 \begin{pmatrix} k_{i1} & \dots & k_{in} \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} k_{j1} \\ \vdots \\ k_{jn} \end{pmatrix} = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ce système est valable lorsque la relation suivante est satisfaite :

$$2\mathbf{KMK}' + \mathbf{KN} + \mathbf{NK}' = \mathbf{0}_n.$$

Comme en dimension deux, les conditions mentionnées au début de la section permettent de dire que cette relation est toujours vérifiée. D'où l'équation aux dérivées partielles obtenue après transformation est linéaire.

2.3.3. Application

Nous allons résoudre un problème en dimension deux, en utilisant la méthode proposée dans la section précédente. Voici l'équation différentielle stochastique commandée :

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}.$$

Soit la fonction de coût

$$J(x_1, x_2, u_1, u_2) = \int_0^{\tau(x_1, x_2)} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \lambda \right] dt,$$

où

$$\tau(x_1, x_2) = \inf\{t > 0 : X_1(t) + X_2(t) = 0 \text{ ou } d \mid X_1(0) = x_1, X_2(0) = x_2\},$$

avec $0 < x_1 + x_2 < d$. Nous supposons dans cet exemple que λ est positive.

Nous calculons de plus

$$\mathbf{M} := \mathbf{BQ}^{-1}\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{K} := -\mathbf{NM}^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Nous pouvons remarquer clairement que le théorème de White est non applicable pour cet exemple. En effet, la matrice \mathbf{K} n'est pas proportionnelle à la matrice identité d'ordre deux.

Revenons à notre exemple. L'équation différentielle déduite à partir de l'équation de programmation dynamique est de la forme

$$\lambda + \mathbf{G}' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \mathbf{G}' \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 \end{pmatrix} \mathbf{G} + \frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{NH}] = 0. \quad (2.3.23)$$

La fonction $z(x_1, x_2)$ est définie par la transformation

$$\mathbf{G}' = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} z_{x_1} & z_{x_2} \end{pmatrix} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -\frac{z_{x_1}}{z} - \frac{1}{2} \frac{z_{x_2}}{z} & -\frac{1}{2} \frac{z_{x_1}}{z} - \frac{z_{x_2}}{z} \end{pmatrix}.$$

Si nous remplaçons dans (2.3.23), nous aurons à la fin

$$\lambda z - \frac{1}{2} (z_{x_1 x_1} + z_{x_1 x_2} + z_{x_2 x_2}) = 0. \quad (2.3.24)$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire. Pour la résoudre, nous allons utiliser la méthode des similitudes. Alors nous supposons que la fonction $z(x_1, x_2)$ peut s'exprimer de cette façon :

$$z(x_1, x_2) = \rho(\xi),$$

avec $\xi := x_1 + x_2$. Le système des dérivées partielles devient

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x_1} = \rho'(\xi) \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = \rho'(\xi) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = \rho''(\xi) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho''(\xi) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \rho''(\xi). \end{cases}$$

L'équation (2.3.24) est transformée donc en une équation différentielle ordinaire linéaire

$$-\frac{3}{2}\rho''(\xi) + \lambda\rho(\xi) = 0,$$

dont la solution générale est de la forme

$$\rho(\xi) = c_1 e^{\sqrt{2\lambda/3}\xi} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda/3}\xi}.$$

Par la suite, nous avons

$$z(x_1, x_2) = c_1 e^{\sqrt{2\lambda/3}(x_1+x_2)} + c_2 e^{-\sqrt{2\lambda/3}(x_1+x_2)}.$$

Pour simplifier les calculs, nous supposons que $\lambda = \frac{3}{2}$. Alors nous déduisons de la dernière équation que

$$\frac{z_{x_1}}{z} = \frac{z_{x_2}}{z} = \frac{c_1 e^{x_1+x_2} - c_2 e^{-(x_1+x_2)}}{c_1 e^{(x_1+x_2)} + c_2 e^{-(x_1+x_2)}}.$$

Comme indiqué dans la proposition, il faut comparer les deux expressions de la fonction $\mathbf{F}(x_1, x_2)$. Premièrement, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{x_1}(x_1, x_2) &= \mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) = -\frac{1}{z(x_1, x_2)} \left(z_{x_1}(x_1, x_2) + \frac{1}{2} z_{x_2}(x_1, x_2) \right) \\ &= -\frac{3}{2} \frac{z_{x_1}(x_1, x_2)}{z(x_1, x_2)}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = -\frac{3}{2} \ln[z(x_1, x_2)] + \psi(x_2).$$

D'une façon similaire, nous obtenons

$$\mathbf{F}_{x_2}(x_1, x_2) = \mathbf{G}_{x_2}(x_1, x_2) = -\frac{3}{2} \frac{z_{x_2}(x_1, x_2)}{z(x_1, x_2)},$$

et donc

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = -\frac{3}{2} \ln[z(x_1, x_2)] + \phi(x_1).$$

Puisque la fonction $\mathbf{F}(x_1, x_2)$ dépend des deux variables x_1 et x_2 , il s'ensuit que nous devons poser $\phi(x_1) = \psi(x_2) \equiv c_0$.

Ensuite, nous allons utiliser les conditions limites $\mathbf{F}(x_1, x_2) = 0$ si $x_1 + x_2 = 0$ ou d . Nous écrivons alors

$$0 = -\frac{3}{2} \ln(c_1 + c_2) + c_0, \quad (2.3.25)$$

$$0 = -\frac{3}{2} \ln(c_1 e^d + c_2 e^{-d}) + c_0. \quad (2.3.26)$$

Ces deux équations impliquent que

$$c_1 + c_2 = c_1 e^d + c_2 e^{-d},$$

et, par la suite, nous avons

$$c_2 = c_1 \frac{e^d - 1}{1 - e^{-d}}.$$

La fonction $\mathbf{F}(x_1, x_2)$ devient sous la forme

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = -\frac{3}{2} \ln \left\{ c_1 \left[e^{x_1+x_2} + \frac{e^d - 1}{1 - e^{-d}} e^{-(x_1+x_2)} \right] \right\} + c_0,$$

qui est valable pour tout $0 \leq x_1 + x_2 \leq d$.

Nous rappelons que nous n'avons pas besoin de déterminer $\mathbf{F}(x_1, x_2)$ explicitement pour trouver les commandes optimales $u_1^*(x_1, x_2)$ and $u_2^*(x_1, x_2)$. Il faut juste chercher $\mathbf{F}_{x_1}(x_1, x_2) = \mathbf{G}_i(x_1, x_2)$. Par la suite,

$$\mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) = \mathbf{G}_{x_2}(x_1, x_2) = -\frac{3}{2} \frac{(1 - e^{-d}) e^{x_1+x_2} - (e^d - 1) e^{-(x_1+x_2)}}{(1 - e^{-d}) e^{x_1+x_2} + (e^d - 1) e^{-(x_1+x_2)}},$$

et ceci est vrai pour tout choix de c_0 et c_1 . Finalement, les commandes optimales sont égales à

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1^*(x_1, x_2) \\ u_2^*(x_1, x_2) \end{pmatrix} &= -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}' \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) \\ \mathbf{G}_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) \\ \mathbf{G}_{x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) \\ \mathbf{G}_{x_1}(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarques. i. Si nous faisons tendre d vers l'infini, la fonction $\mathbf{G}_{x_i}(x_1, x_2)$ tend vers $\frac{3}{2}$, pour $i = 1, 2$. Nous déduisons alors que les commandes optimales deviennent négatives. Ceci est logique parce que λ est positive et le processus $X_1(t) + X_2(t)$ ne peut jamais atteindre la droite $X_1(t) + X_2(t) = d$ lorsque d tend vers l'infini. Donc, l'optimiseur va essayer de frapper la ligne $X_1(t) + X_2(t) = 0$ au plus vite, en tenant compte des coûts de commande quadratiques.

ii. Nous remarquons que $u_1^*(x_1, x_2) = 2u_2^*(x_1, x_2)$ et ceci est dû principalement au fait que $q_{11} = 1$ et $q_{22} = 4$. En effet, pour l'optimiseur, contrôler $X_2(t)$ est plus coûteux que contrôler $X_1(t)$. De plus, $b_{22} = 2b_{11}$.

Pour conclure, nous avons vu que la transformation proposée permet de linéariser l'équation aux dérivées partielles, ce qui rend, en général, la résolution plus facile. Même avec le théorème de Whittle, nous pouvons linéariser les équations différentielles, sauf que certaines restrictions existent dans ce cas.

Cette modification est valable lorsque la condition de Whittle est vérifiée. Cependant, nous avons aussi pu l'appliquer dans un exemple où le théorème est non applicable. Alors nous pouvons dire que cette transformation est une amélioration du résultat de Whittle.

Lorsque le théorème de Whittle n'est pas valable, la résolution des problèmes LQG en dimension deux ou plus est souvent très difficile. Déjà, nous voyons que les commandes optimales $u_1^*(x_1, x_2)$ et $u_2^*(x_1, x_2)$ obtenues dans

l'exemple dépendent de x_1 et x_2 et ne sont pas constantes ; par conséquent, la solution n'était pas évidente.

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons résolu certains problèmes de commande optimale stochastique, appelés problèmes LQG par Whittle.

Dans l'introduction où nous nous sommes référés surtout aux livres de Alexéev *et al.* [2] et Fleming et Rishel [7], une présentation générale des problèmes d'extremum a été élaborée. En fait, nous avons tenté de donner leurs principales classes en se concentrant essentiellement sur les problèmes de commande optimale. Ensuite, nous avons proposé une méthode importante de résolution de ces problèmes, soit la méthode de programmation dynamique qui a été utilisée dans cette thèse.

Au premier chapitre, après avoir fixé comme domaine de travail l'intervalle $[d_1, d_2]$, nous avons étudié les problèmes de commande optimale pour le cas d'un processus stochastique en dimension un. Lorsque nous avons éliminé le facteur temps dans ces problèmes, nous sommes confrontés, après avoir appliqué la méthode de programmation dynamique, à résoudre des équations différentielles du second ordre et non linéaires. Bien sûr, la résolution de ce genre de problème n'est pas souvent triviale. C'est pour cette raison que nous avons utilisé le théorème de Whittle, qui est applicable si quelques conditions sont vérifiées. Ce théorème permet, après une certaine transformation, d'avoir une nouvelle équation différentielle linéaire avec de nouvelles conditions initiales.

Dans le cas où le théorème de Whittle n'est pas applicable, nous avons procédé autrement. En effet, nous avons remarqué que l'équation de programmation dynamique, notée H , dépend seulement de F' et F'' , et de même pour l'expression de la commande optimale. Nous avons alors transformé H en une équation différentielle en $G \equiv F'$ qui est du premier ordre, mais non linéaire. C'est une équation de Riccati. Pour la résoudre, nous étions obligés de trouver une condition initiale pour cette nouvelle fonction. Dans certains cas, la symétrie des paramètres infinitésimaux $b(x(t))$ et $v(x(t))$ et de la fonction $q(x(t))$ permettait de trouver la position x_0 où la fonction du coût est maximale (resp. minimale), et par la suite dire que $G(x_0) = 0$. Dans d'autres cas, nous étions amenés à faire une transformation linéaire pour déduire le même résultat que pour le problème précédent. Lorsque cela n'est pas possible, nous avons essayé d'approcher ce point x_0 en utilisant deux méthodes. La première consiste à approcher ce point à partir du graphique de la fonction $W(x_0) = \int_{d_1}^{d_2} G(t, x_0) dt$ qui est définie pour tout $x_0 \in [d_1, d_2]$ et qui s'annule seulement au point x_0 recherché. La deuxième approximation est par le point à partir duquel le temps passé dans $[d_1, d_2]$ par le processus non commandé est maximal. Une comparaison rapide entre ces deux estimations montre que la première est meilleure.

Dans le deuxième chapitre, nous avons traité les problèmes en dimension plus grande ou égale à deux. Satisfaire à la condition du théorème de Whittle est difficile dans ce cas, alors nous avons essayé de travailler différemment. Après avoir appliqué la méthode de programmation dynamique, nous avons eu une équation aux dérivées partielles qui n'est pas linéaire. Dans certains cas, nous avons appliqué la méthode des similitudes pour la résoudre. Sinon, nous avons utilisé une démarche qui est une généralisation de la méthode de Whittle. En fait, nous avons linéarisé l'équation de programmation dynamique, comme nous l'avons fait en dimension un. Contrairement au premier chapitre, trouver une nouvelle condition initiale, dans ce cas, semble difficile

et une amélioration est nécessaire. De plus, avec cette méthode, nous sommes amenés à la fin à un calcul supplémentaire : vérifier que les n expressions résultantes sont équivalentes.

Comme nous l'avons remarqué, le plus grand défi est pour le cas des problèmes de dimension $n > 1$. Pour cela, nous devons essayer d'utiliser d'autres méthodes de résolution, comme le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires ou sphériques. De plus, nous pouvons rendre le problème de commande optimale plus réaliste si nous conservons la variable temps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Abramowitz, M. et Stegun, I. A. (1965). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York : Dover Publications.
- [2] Alexéev, V. , Tikhomirov, V. et Fomine, S. (1982) *Commande optimale*, (traduit par Sossinski, A.). Moscou : Éditions MIR.
- [3] Boudarel, R. , Delmas, J. et Guichet, P. (1967). *Commande optimale des processus* (tome. 1).Paris : Dunod.
- [4] Boudarel, R. , Delmas, J. et Guichet, P. (1968). *Commande optimale des processus* (tome. 2).Paris : Dunod.
- [5] Boudarel, R. , Delmas, J. et Guichet, P. (1968). *Commande optimale des processus* (tome. 3).Paris : Dunod.
- [6] Boudarel, R. , Delmas, J. et Guichet, P. (1969). *Commande optimale des processus* (tome. 4).Paris : Dunod.
- [7] Fleming, W. H. et Rishel, R. W. (1975). *Deterministic and Stochastic Optimal Control* New York : Springer-Verlag.
- [8] Gourieroux, C. et Sufana, R. (2010). "Derivative pricing with Wishart multivariate stochastic volatility", *Journal of Business and Economic Statistics*, (28), 438-451.
- [9] Grasselli, M. et Tebaldi, C. (2008). "Solvable affine term structure models", *Mathematical Finance*, (18), 135-153.
- [10] Karlin, S. et Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes*. New York : Academic Press.

- [11] Kuhn, J. (1985). *The risk-sensitive homing problem*, Journal of Applied Probability, (22), 796-803.
- [12] Lefebvre, M. (1997). *Using a geometric Brownian motion to control a Brownian motion and vice versa* Stochastic Processes and their Applications, (69), no. 1, 71-82.
- [13] Lefebvre, M. (1998). *A bidimensional optimal landing problem*, Automatica, (34), 655-657.
- [14] Lefebvre, M. (2004). *A homing problem for diffusion processes with control-dependent variance* The Annals of Applied Probability, (14), no. 2, 786-795.
- [15] Lefebvre, M. (2007). *Applied Stochastic Processes*, New York : Springer.
- [16] Lefebvre, M. (2011). *Maximizing the mean exit time of a Brownian motion from an interval* International Journal of Stochastic Analysis, (2011), Article ID 296259, 5 pages.
- [17] Lefebvre, M. (2011). *Stochastic optimal control in a danger zone*, International Journal of Systems Science, (42), 653-659.
- [18] Lefebvre, M. et Zitouni, F. (2012). *General LQG homing problems in one dimension*, International Journal of Stochastic Analysis, (2012), Article ID 803724, 20 pages. doi :10.1155/2012/803724
- [19] Lefebvre, M. et Zitouni, F. (2014). *Analytical solutions to LQG homing problems in one dimension*, Systems Science and Control Engineering An Open Access Journal, (2), 41-47. doi : 10.1080/21642583.2013.878886
- [20] Lefebvre, M. et Zitouni, F. , *Exact and approximate solutions to LQG homing problems in one and two dimensions*, Optimal Control, Applications and Methods, doi : 10.1002/oca.2157
- [21] Makasu, C. (2009). *Risk-sensitive control for a class of homing problems*, Automatica, (45), 2454-2455.
- [22] Makasu, C. et Lefebvre, M. (2012). *LQG homing problem with a maximin cost*, Journal of the Franklin Institute, (349), 1944-1950. doi :10.1016/j.jfranklin.2012.01.014
- [23] Makasu, C. et Lefebvre, M. (2012). *Probabilistic solution to a two-dimensional LQG homing problem*, Control Cybern., (41), 5-12.

- [24] Makasu, C. (2013). *Explicit solution for a vector-valued LQG homing problem*, Optimization Letters, (7), 607-612.
- [25] Whittle, P. (1982). *Optimization over Time* (vol. 1). Chichester : Wiley.
- [26] Whittle, P. (1990). *Risk-sensitive Optimal Control*. Chichester : Wiley.
- [27] Zitouni, F. et Lefebvre, M. (2014). *Linearization of a Matrix Riccati Equation Associated to an Optimal Control Problem*, International Journal of Differential Equations, (2014), Article ID 741390, 7 pages. doi :10.1155/2014/741390.

