Université de Montréal

Maîtrise en Physique

avec stage

Les polynômes orthogonaux matriciels et la méthode de factorisation

Auteure:
Cristina Greavu

Superviseur:
Dr. Luc Vinet

1er Août 2014

Chapitres

1 Introduction

En cherchant une représentation du groupe $Sch1$ en termes des vecteurs propres de l'oscillateur harmonique, Vinet et Zhedanov [8] ont trouvé un exemple explicite d'un polynôme orthogonal matriciel (abrévié POM) infini. Dans un deuxième article [5], la méthode de factorisation, basée sur le texte d'Infeld et Hull[3], est appliquée à un problème de q-oscillateurs. On se demande s'il est possible d'appliquer cette méthode au problème de [8] et d'obtenir la même matrice.

On commence par s'interesser à l'origine des polynômes orthogonaux scalaires. Ceux-ci sont en fait des solutions de l'équation hypergéométrique:

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda = 0 \tag{1}$$

En manipulant cette équation on obtient les deux propriétés fondamentales d'un polynôme orthogonal: une équation de récurrence à trois termes et une relation d'orthogonalité. Ces propriétés, comme on le verra dans la section 2, se généralisent à des polynômes orthogonaux matriciels.

Ensuite, on donne un exemple explicite de POM émergeant de l'article [8]. En plus de la relation de récurrence et de la matrice de poids, le calcul explicite du POM sera donné dans la section 3.

Dans la section 4 on résume la méthode de factorisation basée sur l'article d'Infeld et Hull [3]. Après avoir énoncé les cinq théorèmes de base de la méthode (sans preuves) on explique l'algorithme de calcul des valeurs propres et fonctions propres de cette technique. Comme exemple, une partie du problème de q-oscillateurs étudié dans [5] sera détaillée.

En dernier lieu, les calculs faits à la section 5 sont l'application la méthode de factorisation sur les données initiales du problème de [8]. En utilisant les propriétés des sommes hypergéométriques on retrouvera bel et bien le résultat voulu pour les polynômes de Charlier.

2 Polynômes orthogonaux

Dans cette section, on montre l'origine, la définition et quelques propriétés de polynômes orthogonaux. On utilise ensuite les polynômes de Charlier comme exemple. La dernière étape consiste à généraliser ces caractéristiques aux polynômes orthogonaux matriciels.

2.1 L'origine des polynômes orthogonaux

Une équation de la forme suivante est appelée *équation hypergéométrique*:

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \ , \tag{2}$$

où $\sigma(x)$ et $\tau(x)$ sont des polynômes au maximum de degré deux et un respectivement et λ est une constante.

Toute dérivée d'une solution est une solution d'une autre équation hypergéométrique. Pour le voir, il suffit de dériver l'équation (2) et d'effectuer la substitution $v_1 = y'(x)$. On obtient alors:

$$\sigma(x)v_1'' + (\tau(x) + \sigma'(x))v_1' + (\lambda + \tau'(x))v_1 = 0 \tag{3}$$

Puisque $\tau(x) + \sigma'(x)$ est une polynômes d'au plus de degré 1 et $\lambda + \tau'(x)$ est une constante, on obtient bel et bien un équation hypergéométrique.

On peut appliquer ce processus indéfiniment. En particulier, si on dérive n fois la solution y et on pose $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, on obtient:

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \tau(x) + n\sigma'(x) \\ \mu_n &= \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \end{aligned}$$

Forme auto-adjointe On peut écrire (4) sous une forme plus pratique, dite auto-adjointe, en multipliant par une fonction $\rho_n(x)$ qui satisfait

$$(\sigma\rho_n)' = \tau_n\rho_n \tag{5}$$

La forme auto-adjointe est donc

$$(\sigma\rho_n v_n')' + \mu_n\rho_n v_n = 0 \tag{6}$$

On remarque que si $\mu_n = 0$ on obtient la solution triviale $v_n(x) = y^{(n)}(x) = \text{const}$. C'est-à-dire, $y(x) = y_n(x)$ est un polynôme de degré n.

Orthogonalité Considérons maintenant les formes auto-adjointes des solutions $y_n(x)$ et $y_m(x)$

$$\begin{aligned} (\sigma\rho_n y_n')' + \lambda_n\rho_n y_n = 0 \\ (\sigma\rho_n y_m')' + \lambda_m\rho_m y_m = 0 \end{aligned}$$

On commence par multiplier la première expression par $y_m(x)$ et la deuxième par $y_n(x)$ et on soustrait

$$y_m(x)[\sigma(x)\rho(x)y_n'(x)]' - y_n[\sigma(x)\rho(x)y_m'(x)]' = (\lambda_m - \lambda_n)\rho(x)y_m(x)y_n(x) \tag{7}$$

Remarquons qu'on peut développer le côté gauche de la façon suivante (notation allégée)

$$\begin{aligned} y_m[\sigma\rho y_n']' - y_n[\sigma\rho y_m']' &= y_m[(\sigma\rho)'y_n' + \sigma\rho y_n''] - y_n[(\sigma\rho)'y_m' + (\sigma\rho)y_m''] \\ &= y_m[\sigma'\rho y_n' + \sigma\rho' y_n' + \sigma\rho y_n''] - y_n[\sigma'\rho y_m' + \sigma\rho' y_m' + \sigma\rho y_m''] \\ &= \sigma'\rho y_m y_n' + \sigma\rho' y_n' y_m + \sigma\rho y_m y_n'' - [\sigma'\rho y_n y_m' + \sigma\rho' y_m' y_n + \sigma\rho y_m'' y_n] \\ &= \sigma'\rho(y_m y_n' - y_n y_m') + \sigma\rho'(y_n' y_m - y_m' y_n) + \sigma\rho(y_m y_n'' - y_m'' y_n) \\ &= (\sigma\rho)'(y_m y_n' - y_n y_n') + \sigma\rho(y_m y_n'' - y_m'' y_n) \\ &= \frac{d}{dx}(\sigma\rho(y_m y_n' - y_n y_m')) \\ &= \frac{d}{dx}(\sigma\rho W(y_m, y_n)) \ , \end{aligned}$$

où $W(y_m, y_n)$ est le Wronskien de y_m et y_n . En revenant à (7), on obtient

$$(\lambda_m - \lambda_n)\rho(x)y_m(x)y_n(x) = \frac{d}{dx}(\sigma(x)\rho(x)W(y_m(x), y_n(x)))$$

La dernière étape est d'intégrer le tout pour x allant de a à b.

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = \sigma(x)\rho(x)W(y_m(x), y_n(x)) \mid_a^b \tag{8}$$

Où suppose que la fonction $\rho(x)$ satisfait à:

$$\sigma(x)\rho(x)x^k \mid_{x=a,b}= 0 \text{ , k = 0, 1, ...} \tag{9}$$

sur un certain intervalle $[a, b]$.

Alors, puisque le Wronskien est un polynôme en x et que $m \neq n$, on obtient la condition d'orthogonalité

$$\int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0 \ m \neq n \tag{10}$$

On a donc réussi à obtenir des polynômes ayant une caractéristique spéciale en manipulant l'équation hypergéométrique et voici comment les polynômes orthogonaux sont nés.

2.2 Propriétés

Les polynômes orthogonaux possèdent deux propriétés intéressantes : une équation de récurrence à trois termes et une relation d'orthogonalité. Avant de donner ces équations on a besoin de définir le concept de moments.

Définition Soit une fonction w strictement positive et intégrable sur un intervalle [a,b]. Supposons de plus que $w(x) > 0$ sur un sous-ensemble suffisement grand de (a, b) tel que:

$$\int_a^b w(x)dx > 0 \tag{11}$$

Si l'intervalle (a, b) n'est pas borné, alors on impose que les moments soient finis:

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x)dx \tag{12}$$

Pour $n = 0, 1, 2, ...$ On peut maitenant donner une définition formelle des polynômes orthogonaux.

Définition Soit une suite de polynômes $P_n(x), n \in [0, \infty]$ et une mesure positive de Lebesgue $w(x)$ sur un intervalle [a,b]. On dit que les P_n sont des *polynômes orthogonaux* sur l'intervalle [a,b] si

$$\int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)\,dx = 0 \text{ si } m \neq n \tag{13}$$

Le prochain item à étudier est la fonction de moments:

Définition Une suite $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de polynômes orthogonaux (SPO) par rapport à une fonction de moments $\mathcal{L}$ si pour des entier non-négatifs m et n on a:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad P_n(x) \quad \text{est une polynôme de degré} \quad n \\
&(ii) \quad \mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n \\
&(iii) \quad \mathcal{L}[P_n^2(x)] \neq 0
\end{aligned}$$

On aura besoin du déterminant des moments dans les paragraphes qui suivent:

$$\Delta_n := \det(\mu_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \tag{14}$$

Définition Soit $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombre complexes et soit $\mathcal{L}$ une fonction définie sur l'espace des polynômes par:

$$\mathcal{L}[x^n] = \mu_n \quad n = 0, 1, 2, ...$$
$$\mathcal{L}[\alpha_1\pi_1(x) + \alpha_2\pi_2(x)] = \alpha_1\mathcal{L}[\pi_1(x)] + \alpha_2\mathcal{L}[\pi_2(x)]$$

Pour tous nombres complexes α_i et tous polynomes $\pi_i(x)$, $(i = 1, 2)$. Alors $\mathcal{L}$ est apellée *fonction de moments* et μ_n est apellé *moment d'ordre n*. Remarquons qu'avec cette définition on a, pour $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$:

$$\mathcal{L}[\pi(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k \tag{15}$$

On peut alors redéfinir les polynômes orthogonaux à l'aide de la fonction $\mathcal{L}$.

On introduit la première propriété des polynômes orthogonaux: la relation de récurrence à trois termes.

Théorème 4.1(Chiara) Soit $\mathcal{L}$ la fonctionnelle des moments et $\{P_n(x)\}$ la SPO associée. Alors il existe des constantes c_n et $\lambda_n \neq 0$ telles que:

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x) \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{16}$$

Où on impose $P_{-1}(x) = 0$.

Preuve Remarquons que $xP_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$, alors on a :

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{nk}P_k(x) \quad \text{avec} \quad a_{nk} = \frac{\mathcal{L}[xP_n(x)P_k(x)]}{\mathcal{L}[P_n^2(x)]} \tag{17}$$

De plus, $xP_k(x)$ est un polynôme de degrée $k+1$ alors $a_n k = 0$, $\forall\, 0 \leqslant k < n-1$. Puisque $xP_n(x)$ est monique on a aussi $a_{n,n+1} = 1$. D'où:

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + a_{n,n}P_n(x) + a_{n,n-1}P_{n-1}(x) \quad n \geqslant 1 \tag{18}$$

En substituant n par $n-1$ dans la dernière équation on peut aussi ècrire:

$$xP_{n-1}(x) = P_n(x) + c_n P_{n-1}(x) + \lambda_n P_{n-2}(x) \quad n \geqslant 2 \tag{19}$$

Remarquons que (19) est aussi valide pour $n = 1$ si on impose $P_{-1} = 0$ et $c_1 = -P_1(0)$. □
Afin de déterminer les coefficients de (16) on utilise le prochain théorème.

Théorème 4.2 (Chiara) Les énoncés suivants sont valides en tenant compte de l'équation (16):

$$(a)\lambda_{n+1} = \frac{\mathcal{L}[P_n^2(x)]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]} = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}$$

$$(b)\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \lambda_1\lambda_2...\lambda_{n+1} \quad \text{si on pose} \quad \lambda_1 = \mu_0 = \Delta_0$$

$$(c)c_n = \frac{\mathcal{L}[xP_{n-1}^2]}{\mathcal{L}[P_{n-1}^2(x)]}$$

$$(d) - (c_1 + c_2 + ... + c_n) \quad \text{est le coefficient de} \quad x^{n-1} \quad \text{de} \quad P_n(x)$$

preuve On a déjà obtenu (a) dans la preuve du théorème 4.1. (b) découle directement de (a). En multipliant (16) par $P_{n-1}(x)$ et en appliquant $\mathcal{L}$, on obtient (c). En comparant les coefficients de x^{n-1} des deux côtés de (16), on obtient $d_n = d_{n-1} - c_n$, d'où découle (d). □

Pour montrer l'application des théorèmes énoncés on calcule la relation d'orthogonalité et l'équation de récurrence des polynômes de Charlier.

Exemple Soit la fonction :

$$\begin{aligned} G(x,w) &= e^{-aw}(1+w)^x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a)^m w^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right) w^n \end{aligned}$$

En appliquant le produit de Cauchy, on obtient:

$$\begin{aligned} G(x,w) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) w^n \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right) \frac{(-a)^{n-k}}{(n-k)!} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les $P_n(x)$ sont appelés polynômes de Charlier et $G(x,w)$ est la fonction génératrice. On veut maintenant trouver la relation d'orthogonalité (16). On a :

$$\begin{aligned}
a^x G(x,v)G(x,w) &= e^{-a(v+w)}[a(1+v)(1+w)]^x \\
\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= e^{-a(v+w)} e^{a(1+v)(1+w)} \\
&= e^a e^{avw} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 a^n (vw)^n}{n!}
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire le développement suivant:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k G(k,v)G(k,w)}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \sum_{m,n=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)v^m w^n \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)\frac{a^k}{k!} v^m w^n
\end{aligned}$$

Ce qui implique :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_m(k)P_n(k)\frac{a^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \frac{e^a a^n}{n!} & \text{si} \quad m = n \end{cases} \tag{20}$$

La fonction $\frac{a^k}{k!}$ est appelée *fonction de masse* du polynôme. En utilisant la fonction $\mathcal{L}$, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x^n] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^n \frac{a^k}{k!} \\
\mathcal{L}[P_m(x)P_n(x)] &= \frac{e^a a^n}{n!}\delta_{mn}
\end{aligned}$$

Où $n = 0, 1, 2, .., m = 0, 1, 2, ...$ et $\delta_{m,n}$ est le delta de Kronecker usuel. En général, on calcule la relation de récurrence d'un polynôme orthogonal en utilisant ses propriétés plutôt qu'en appliquant directement le théorème 4.2. Pour les polynômes de Charlier, on manipule la fonction génératrice:

$$G(x,w) = e^{aw}(1+w)^x = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)w^n \tag{21}$$

L'idée est de dériver la dernière expression par w et de comparer les deux côtés. On a donc:

$$\frac{\partial G}{\partial w} = -ae^{-aw}(1+w)^x + e^{-aw}x(1+w)^{x-1} \tag{22}$$

$$= \frac{x}{1+w}G(x,w) - aG(x,w) \tag{23}$$

$$= G(x,w)\left[\frac{x}{1+w} - a\right] \tag{24}$$

Et avec la deuxième relation:

$$\frac{\partial G}{\partial w} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n n w^{n-1} \tag{25}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \left[\frac{x}{1+w} - a \right] w^n \tag{26}$$

$$\tag{27}$$

En multipliant la dernière égalité par $1 + w$ on arrive à:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) n (w^{n-1} + w^n) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(x - a(1+w))w^n \tag{28}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)w^n + \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)w^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} xP_n(x)w^n - \sum_{n=0}^{\infty} aP_n(x)w^n - \sum_{n=0}^{\infty} aP_n(x)w^{n+1} \tag{29}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(x)w^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}w^n = \sum_{n=0}^{\infty} xP_(x)w^n - \sum_{n=0}^{\infty} aP_n(x)w^n - \sum_{n=0}^{\infty} aP_{n-1}(x)w^n \tag{30}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)P_{n+1}(x) + (n - x + a)P_n(x) + aP_{n-1} \right] w^n = 0 \tag{31}$$

Donc la relation de récurrence est:

$$(n+1)P_{n+1}(x) + (n - x + a)P_n(x) + aP_{n-1} = 0 \tag{32}$$

La dernière étape consiste à normaliser cette relation. Pour ce faire, on pose:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\hat{P}_n(x) \tag{33}$$

Avec cette substitution (32) devient:

$$(n+1)\frac{\hat{P}_{n+1}(x)}{(n+1)!} + (n - x + a)\frac{\hat{P}_n(x)}{n!} + a\frac{\hat{P}_{n-1}(x)}{(n-1)!} = 0 \tag{34}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n!}\hat{P}_{n+1}(x)\frac{n - x + a}{n!}\hat{P}_n(x) + \frac{an}{n!}\hat{P}_{n-1}(x) \tag{35}$$

$$\Rightarrow \hat{P}_{n+1}(x) + (n - x + a)\hat{P}_n(x) + an\hat{P}_{n-1}(x) \tag{36}$$

Celle-ci correspond bel et bien à la relation de récurrence connue pour les polynômes de Chalier normalisés [2]. Maintenant qu'on a une bonne base concernant les polynômes orthogonaux scalaires, on va généraliser leurs caractéristiques aux POM dans la section qui suit.

2.3 Polynômes orthogonaux matriciels (POM)

On peut étendre le principe de polynômes orthogonaux à $\mathbb{R}^{n \times n}$, c'est-à-dire qu'on peut construire des matrices (finie ou infinies) dont les éléments sont des polynôme orthogonaux. Ces objets, appelés polynôme orthogonaux matriciels (POM), possèdent des propriétés analogues aux polynômes orthogonaux scalaires. À l'aide de [6] on commence par donner la définition formelle des POM et ensuite on prouve qu'ils satisfont une équation de récurrence à trois termes ainsi qu'une relation de d'orthogonalité.

En premier on définit les objets qui seront nécéssaires dans cette section.

définition Soit une mesure $\mu(dx) = W(x)dx$ avec une fonction de poids $W(x) \in \mathbb{R}^{k\times k}$, pour $k \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$. On définit les objets suivants:

(i) Le n-ième moment de la mesure $\mu(dx)$ est:

$$\mu_n = \int x^n \mu(dx) = \int x^n W(x)dx \quad n = 0, 1, ... \tag{37}$$

(ii) La matrice T_n pour $n \geqslant 1$ est :

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} & \mu_{2n-1} \\ I & xI & \cdots & x^{n-1}I & x^n I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k(n+1)\times k(n+1)} \tag{38}$$

Où I correspond à la matrice identité $k \times k$.

(iii) La matrice de Hankel pour $n \geqslant 1$:

$$H_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix} \tag{39}$$

On introduit aussi la matrice $H = \lim_{n\to\infty} H_n$.

(iv) Le vecteur $v_{n,2n-1}$ pour $n \geqslant 1$:

$$v_{n,2n-1} = \begin{pmatrix} \mu_n & \mu_{n+1} \cdots & \mu_{2n-1} \end{pmatrix}^* \tag{40}$$

Où * dénote l'opération de transposition.

(v)Soit la matrice:

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & v_{n,2n-1} \\ v^*_{2n-1} & \mu_{2n} \end{pmatrix} \tag{41}$$

(vi)On définit le complément de Schur de μ_{2n} comme étant:

$$S_n = \mu 2n - v^*_{n,2n-1} H_n^{-1} v_{n,2n-1} \quad \text{avec} \quad S_0 = \mu_0 \tag{42}$$

On aura aussi besoin de la matrice diagonale:

$$S = diag[S_0, S_1, ...] \tag{43}$$

(vii) Soit une famille de polynômes $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ qui est le complément de Schur de $x^n I$ dans la matrice T_n :

$$P_n(x) = x^n I - \left[\begin{array}{cccc} I & xI & \cdots & x^{n-1}I \end{array} \right] \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_n \\ \mu_{n+1} \\ \vdots \\ \mu_{2n-1} \end{pmatrix} \tag{44}$$

Où $P_0(x) = I$. De plus, on dénote P le vecteur suivant:

$$P = \left[\begin{array}{ccc} P_0(x) & P_1(x) & \cdots \end{array} \right] \tag{45}$$

(viii) On définit le vecteur Ω comme:

$$\Omega = \left[\begin{array}{cccc} I & xI & x^2I & \cdots \end{array} \right] \tag{46}$$

On définit aussi la matrice semi-infinie R comme:

$$R = \begin{pmatrix} I & r_{01} & r_{02} & \cdots \\ 0 & I & r_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad r_{i,j} \in \mathbb{R}^{k,k,} \tag{47}$$

Ces matrices sont liées à la matrice P définie en (44) par:

$$\Omega = PR \tag{48}$$

Avant de prouver nos propriétés intéressantes, on a besoin de propriétés intermédiaires. On commence avec:

Proposition 1 (Miranian) Soit $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ et le complément de Schur S_n. On définit le produit scalaire sur $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^k)$ comme étant:

$$\langle P, Q \rangle = \int P^*(x)W(x)Q(x)dx \tag{49}$$

Alors on a:

$$\langle P_i, P_j \rangle = \delta_{ij} S_i \quad \forall i, j \geqslant 0 \tag{50}$$

preuve On a:

$$v_{m,m+n-1}H_n^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc} \mu_m & \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n-1} \end{array} \right] H_n^{-1} = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \cdots & I & \cdots & 0 \end{array} \right] \tag{51}$$

Pour tout $0 \leqslant m \leqslant n-1$ et où la matrice I est à la m^e position. Alors:

$$v_{m,m+n-1} H_n^{-1} v_{n,2n-1} = \mu_{m+n} \tag{52}$$

C'est donc suffisant de montrer que $P_n(x)$ est orthogonal à $x^m I$ pour $0 \leqslant m \leqslant n-1$:

$$\begin{aligned}
\int x^m W(x) P_n(x) dx &= \int x^m W(x) \left(x^n I - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots & x^{n-1} I \end{bmatrix} H_n^{-1} v_{n,2n-1} \right) dx \\
&= \mu_{m+n} - \begin{bmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \end{bmatrix} H_n^{-1} v_{n,2n-1} \\
&= \mu_{m+n} - \mu_{m+n} = 0
\end{aligned}$$

Ceci implique que $\langle P_m(x), P_n(x) \rangle = 0 \; \forall \; m < n$. Pour le cas $m = n$ on a:

$$\begin{aligned}
\int P_n^*(x) W(x) P_n(x) dx &= \int x^n W(x) (x^n I - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots & x^{n-1} I \end{bmatrix} H_n^{-1} v_{n,2n-1}) dx \\
&= \mu_{2n} - v_{n,2n-1}^* H_n^{-1} v_{n,2n-1} = S_n
\end{aligned}$$

□

La deuxième propriété intermédiaire relie la matric de Hankel et le complément de Schur:

Proposition 2 (Miranian) Supposons l'équation (48) vraie pour les matrices Ω, P et R. On a alors:

$$S_n r_{n,n+k} = \mu_{2n+k} - v_{n,2n-1}^* H_n^{-1} v_{n,2n-1}^{(k)} \quad \forall k \geqslant 0 \tag{53}$$

Pour le cas $n = 0$ on a:

$$r_{0,m} = \mu_0^{-1} \mu_m \tag{54}$$

Alors sous forme matricielle :

$$H = R^* S R \tag{55}$$

preuve L'équation (48) implique:

$$P_0(x) r_{0,m} + P_1(x) r_{1,m} + \cdots + P_k(x) r_{k,m} + \cdots + P_m(x) I = x^m I \tag{56}$$

En multipliant la dernière équation à gauche par $P_n(x)^* W(x)$ et en intégrant, on a:

$$S_n r_{n,m} = \int P_n(x)^* w(x) x^m dx \tag{57}$$

En utilisant la définition de $P_n^*(x)$ (44) et en intégrant on obtient l'équation (53). Remarquons que:

$$\begin{aligned}
\left(\int \Omega^* W(x) \Omega dx \right)_{i,j} &= \int x^i w(x) x^j dx = \mu_{i+j} = H_{i,j} \\
\left(\int P^* W(x) P dx \right)_{i,j} &= \int P_i^*(x) W(x) P_j(x) dx = \delta_{i,j} S_i
\end{aligned}$$

Ce qui implique:

$$H = \int \Omega^* W(x) \Omega dx = R^* \left(\int P^* W(x) P dx \right) R = R^* S R \tag{58}$$

$\square$

Il reste à énoncer deux lemmes et ensuite on pourra prouver que les POM satisfont une relation de récurrence à trois termes.

Lemme 1(Miranian) Soient les matrices H_{n+1} et H_{n+1}^{-1} :

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & v_{n,2n-1} \\ v_{n,2n-1}^* & \mu_{2n} \end{pmatrix} \quad H_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} A & \gamma \\ \gamma^* & \alpha \end{pmatrix} \tag{59}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
\alpha &= S_n^{-1} \\
\gamma &= -H_n^{-1} v_{n,2n-1} S_n^{-1} \\
A &= H_n^{-1} + H_n^{-1} v_{n,2n-1} S_n^{-1} v_{n,2n-1}^* H_n^{-1} = \left(H_n - v_{n,2n-1}\mu_{2n}^{-1} v_{n,2n-1}^*\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Ce qui implique:

$$H_{n+1}^{-1} v_{n+1,2n+1}^{(m)} = \begin{pmatrix} H_n^{-1}(v_{n,2n-1}^{(m+1)} - v_{n,2n-1} r_{n,n+m+1}) \\ r_{n,n+m+1} \end{pmatrix} \tag{60}$$

Ce lemme se prouve par calculs directs. On utilise l'équation (48) pour obtenir la dernière expression.

Lemme 2(Miranian) Soient les polynômes $P_n(x)$ de l'équation (48). Alors:

$$\begin{aligned}
x^n &= \sum_{i=0}^{m} P_{n-i}(x) r_{n-i,n} + \begin{bmatrix} I & xI & \cdots & x^{n-m-1}I \end{bmatrix} H_{n-m}^{-1} v_{n-m,2(n-m)-1}^{(m)} \\
P_{n+1}(x) &= x^{n+1}I - P_n(x) r_{n,n+1} - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots & x^{n-1}I \end{bmatrix} H_n^{-1} v_{n,2n-1}
\end{aligned}$$

Ce lemme découle directement de l'équation (60).

Étudions maitenant la première propriété essentielle des POM:

Proposition 3(Miranian) Les polynômes (monique) orthogonaux matriciels satisfont la relation de récurrence :

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + P_n(x) b_n^* + P_{n-1}(x) a_n^* \tag{61}$$

Où

$$a_n^* = S_{n-1}^{-1} S_n \quad b_n^* = u_n^n - u_{n-1}^{n-1} \tag{62}$$

et:

$$u^{n-1} = \begin{pmatrix} u_0^{n-1} \\ u_1^{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} = H_n^{-1} v_{n,2n-1} \quad u_n^n = S_n^{-1}(\mu_{2n+1} - v_{n,2n-1}^* H_n^{-1} v_{n+1,2n}) \tag{63}$$

Preuve Soient les matrices a_n, b_n et c_n qui satisfont la relation:

$$xP_n(x) = P_{n+1}c_n^* + P_n(x)b_n^* + P_{n-1}(x)a_n^* \tag{64}$$

En multipliant par $P_{n+1}^*(x)W(x)$ et en intégrant on obtient:

$$\int P_{n+1}^*(x)W(x)x^{n+1}dx = S_{n+1} = \int P_{n+1}^*(x)W(x)xP_n(x)dx = S_{n+1}c_n^* \tag{65}$$

Ce qui implique $c_n^* = I$. La dernière expression peut aussi être exprimée sous la forme:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \int xP_{n+1}^*(x)W(x)P_n(x) = \int (P_{n+2}^*(x) + b_{n+1}P_{n+1}^*(x) + a_{n+1}P_n^*(x))W(x)P_n(x)dx \\ &= 0 + 0 + \int a_{n+1}P_n^*(x)dx = a_{n+1}S_n \end{aligned}$$

D'où $a^* = S_{n-1}^{-1}S_n$. Si on multiplie (64) par $P_n^*(x)W(x)$ à gauche et on intègre, on obtient alors:

$$\int xP_n^*(x)W(x)P_n(x)dx = \left(\int P_n^*(x)W(x)P_n(x)dx\right)b_n^* = S_nb_n^* = b_nS_n \tag{66}$$

On cherche maintenant b_n. L'équation (61) peut s'exprimer comme:

$$\begin{aligned} x(x^nI - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots x^{n-1}I \end{bmatrix} u^{n-1}) &= (x^nI - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots x^nI \end{bmatrix} u^n) \\ &+ (x^nI - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots x^{n-1}I \end{bmatrix} u^{n-1})b_n^* \\ &+ (x^{n-1}I - \begin{bmatrix} I & xI & \cdots x^{n-2}I \end{bmatrix} u^{n-2})a_n^* \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de x^nI, on obtient $b_n^* = u_n^n - u_{n-1}^{n-1}$. Ensuite, en utilisant le Lemme 1 et la définition de u_n on obtient:

$$u_n^n = s_n^{-1}\left(\mu_{2n+1} - v_{n,2n-1}^*H_n^{-1}v_{n+1,2n}\right) \tag{67}$$

□

Maintenant qu'on a la théorie, on peut détailler un exemple. Celui-ci est en fait tiré d'un article de L. Vinet et A. Zhedanov [8] concernant un problème de mécanique quantique.

3 Un premier exemple de POM

Dans [8], le but était de trouver une représentation de l'opérateur S définit plus bas. La structure de ce problème a permit aux auteurs de trouver un POM ainsi que sa matrice de poids et sa relation de récurrence. Le point de départ du problème est le groupe de symmétrie de Schrödinger.

3.1 Définitions

Le groupe de Schrödinger Sch_1 correspond au groupe des symétries de transformation de l'équation de Schrödinger libre en une dimension :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

On définit par la suite une paramétrisation des éléments du groupe:

$$S(v,w) = e^{(va-\overline{v}a^+)}e^{(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2}$$

Le but de l'article est de trouver une représentation de l'opérateur S, c'est-à-dire de trouver

$$\psi_{n,k} = \langle k|S|n\rangle \tag{68}$$

Pour cela, on a besoin d'utiliser une représentation des opérateurs de création et d'annihilation. Celle choisie est :

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle \end{aligned}$$

À l'aide de ces opérateurs, on peut écrire les relations suivantes:

$$\langle k|SS^{-1}a^+aS|n\rangle = \langle k|a^+aS|n\rangle = k\langle k|S|n\rangle = k\psi_{n,k} \tag{69}$$

On a maintenant besoin de la formule de Baker-Campell-Haussdorf:

$$e^XYe^{-X} = Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}[X,[X,Y]] + ... \tag{70}$$

Afin de trouver une représentation de l'opérateur S, on commence par calculer différentes relations liant S et les opérateurs d'échelles a et a^+. Comme on va le voir plus loin, les éléments de la matrice S satifont une équation de récurrence à cinq termes qui sera résolue à l'aide de polynômes orthogonaux.

3.2 Relation de récurrence

En premier lieu, on développe les deux côtés de l'équation (69). À l'aide de (70), on calcule:

$$\begin{aligned} S^{-1}a^+S &= e^{-((va-\overline{v}a^+)-(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2)}a^+e^{((va-\overline{v}a^+)+(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2)} \\ &= a^+ + [-(va-\overline{v}a^+)-(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2), a^+] \\ &+ \frac{1}{2!}[-(va-\overline{v}a^+)-(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2)[-(va-\overline{v}a^+)-(wa^2-\overline{w}(a^+)^2)/2), a^+]] + ... \end{aligned}$$

On trouve alors:

$$\begin{aligned}
S^{-1}a^{+}aS &= (S^{-1}a^{+}S)(S^{-1}aS) \\
&= (a^{+}\cosh\rho - ae^{i\theta}\sinh\rho - \sigma e^{i\delta})(a\cosh\rho - a^{+}e^{i\theta}\sinh\rho - \sigma e^{-i\delta}) \\
&= a^{+}a\cosh^{2}\rho - (a^{+})^{2}e^{-i\theta}\sinh\rho\cosh\rho - a^{+}\sigma e^{-i\delta}\cosh\rho \\
&- a^{2}e^{i\theta}\sinh\rho\cosh\rho + aa^{+}\sinh^{2} + a\sigma e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho \\
&- a\sigma e^{i\delta}\cosh\rho + a^{+}\sigma e^{-(\theta-\delta)}\sinh\rho + \sigma^{2} \\
&= a^{+}a(\cosh\rho)^{2} - a^{+2}e^{-i\theta}\frac{1}{2}\sinh 2\rho + a^{+}\sigma(-e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho) \\
&+ a\sigma(-e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho) - a^{2}e^{i\theta}\frac{1}{2}\sinh 2\rho \\
&+ (1 + a^{+}a)(\sinh\rho)^{2} + \sigma^{2} \\
&= a^{+}a\cosh 2\rho + \frac{1}{2}\cosh 2\rho + \sigma^{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a^{2}\sinh 2\rho e^{i\theta} \\
&- \frac{1}{2}a^{+2}\sinh 2\rho e^{-i\theta} + a\sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh\rho) \\
&+ a^{+}\sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)
\end{aligned}$$

La prochaine étape est d'appliquer la dernière relation sur un état $|n\rangle$ et ensuite d'utiliser la définition de l'opérateur S. On obtient donc:

$$\begin{aligned}
S^{-1}a^{+}aS|n\rangle &= \cosh 2\rho a^{+}a|n\rangle + (\frac{1}{2}\cosh 2\rho + \sigma^{2} - \frac{1}{2})|n\rangle - \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{i\theta}a^{2}|n\rangle \\
&- \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}a^{+2}|n\rangle + \sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh\rho)a|n\rangle \\
&+ \sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)a^{+}|n\rangle \\
&= \cosh 2\rho n|n\rangle + (\frac{1}{2}\cosh 2\rho + \sigma^{2} - \frac{1}{2})|n\rangle - \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{i\theta}\sqrt{(n)(n-1)}|n-2\rangle \\
&- \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle + \sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n}|n-1\rangle \\
&+ \sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n+1}|n+1\rangle
\end{aligned}$$

On obtient donc:

$$\begin{aligned}
\langle k|S|n\rangle &= \langle k|SS^{-1}a^{+}aS|n\rangle && (71)\\
&= \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho + \sigma^{2} - \frac{1}{2}\right]\langle k|S|n\rangle - \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{i\theta}\sqrt{(n)(n-1)}\langle k|S|n-2\rangle && (72)\\
&- \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\sqrt{(n+1)(n+2)}\langle k|S|n+2\rangle + \sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n}\langle k|S|n-1\rangle && (73)\\
&+ \sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n+1}\langle k|S|n+1\rangle && (74)\\
&= \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho + \sigma^{2} - \frac{1}{2}\right]\psi_{n,k} - \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{i\theta}\sqrt{(n)(n-1)}\psi_{n-2,k} && (75)\\
&- \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2,k} + \sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n}\psi_{n-1,k} && (76)\\
&+ \sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n+1}\psi_{n+1,k} && (77)
\end{aligned}$$

En combinant les équations (69) et (71), on obtient :

$$k\psi_{n,k} = \left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho + \sigma^2 - \frac{1}{2}\right]\psi_{n,k} - \frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{i\theta}\sqrt{(n)(n-1)}\psi_{n-2,k} \tag{78}$$

$$-\frac{1}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2,k} + \sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}ch\rho)\sqrt{n}\psi_{n-1,k} \tag{79}$$

$$+\sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\sqrt{n+1}\psi_{n+1,k} \tag{80}$$

Il est utile à ce moment de développer les quelques premiers termes de cette dernière relation.

n=0

$$k\psi_{0,k} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho + \sigma^2 - \frac{1}{2}\right]\psi_{0,k} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\psi_{2,k} + \sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\psi_{1,k}$$

En isolant $\psi_{2,k}$ on a:

$$\psi_{2,k} = f(k)\psi_{0,k} + g(k)\psi_{1,k} \tag{81}$$

Avec:

$$f(k) = \frac{\frac{1}{2}\cosh 2\rho + \sigma^2 - \frac{1}{2} - k}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}}$$

$$g(k) = \frac{\sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh 2\rho e^{-i\theta}}$$

n=1

$$k\psi_{1,k} = \left[\frac{3}{2}\cosh\rho + \sigma^2 - \frac{1}{2}\right]\psi_{1,k} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\sinh 2\rho e^{i\theta}\psi_{3,k}$$
$$+\sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh)\psi_{0,k} + \sqrt{2}\sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)\psi_{2,k}$$

En isolant $\psi_{3,k}$, on obtient:

$$\psi_{3,k} = a(k)\psi_{0,k} + b(k)\psi_{1,k} + c(k)\psi_{2,k}$$

Avec:

$$a(k) = \frac{\frac{3}{2}\cosh\rho + \sigma^2 - k - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{6}\sinh 2\rho e^{i\theta}}$$

$$b(k) = \frac{\sigma(e^{i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{i\delta}\cosh)}{\frac{1}{2}\sqrt{6}\sinh 2\rho e^{i\theta}}$$

$$c(k) = \frac{\sqrt{2}\sigma(e^{-i(\theta-\delta)}\sinh\rho - e^{-i\delta}\cosh\rho)}{\frac{1}{2}\sqrt{6}\sinh 2\rho e^{i\theta}}$$

En subtituant l'expression obtenue pour $\psi_{2,k}$ on obtient:

$$\begin{aligned}\psi_{3,k} &= a(k)\psi_{0,k} + b(k)\psi_{1,k} + c(k)(f(k)\psi_{0,k} + g(k)\psi_{1,k}) \\ &= (a(k) + c(k)f(k))\psi_{0,k} + (b(k) + c(k)g(k))\psi_{1,k}\end{aligned}$$

Donc, en général, les termes pairs et impairs peuvent s'exprimer en termes de polynômes en k et des fonctions $\psi_{0,k}$ et $\psi_{1,k}$. En termes mathématiques, on peut alors écrire:

$$\begin{aligned}\psi_{2n,k} &= P_n(k)\psi_{0,k} + Q_{n-1}(k)\psi_{1,k} \\ \psi_{2n+1,k} &= \tilde{P}_n(k)\psi_{0,k} + \tilde{Q}_n(k)\psi_{1,k}\end{aligned}$$

Où les $P_n(k), Q_n(k), \tilde{P}_n(k)$ et $\tilde{Q}_n(k)$ sont des polynômes d'ordre n en k. Basé sur cette observation, on peut alors introduire le vecteur suivant:

$$\Psi n,k = \begin{pmatrix} \psi_{2n,k} \\ \psi_{2n+1,k} \end{pmatrix} \tag{82}$$

Alors la relation de récurrence (78) peut s'exprimer comme

$$k\Psi_{n,k} = A_{n+1}\Psi_{n+1,k} + B_n\Psi_{n,k} + A_n^+\Psi_{n-1,k}$$

Avec tous les paramètres suivants:

$$\xi_n = \frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\sinh 2\rho e^{-i\theta} \ ; \ \eta_n = \sqrt{n}\sigma(e^{i(\delta-\theta)\sinh}\rho - e^{-i\delta\cosh\rho}) \ ; \ \zeta_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho + \sigma^2 - \frac{1}{2}$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \xi_{2n} & 0 \\ \eta_{2n} & \xi_{2n+1} \end{pmatrix}$$

$$B_n = \begin{pmatrix} \zeta_{2n} & \eta_{2n+1} \\ \overline{\eta_{2n+1}} & \zeta_{2n+1} \end{pmatrix}$$

On effectue maintenant une dernière réecriture en introduisant une matrice polynômiale

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} P_n(k) & Q_{n-1}(k) \\ \widetilde{P}_n(k) & \widetilde{Q}_n(k) \end{pmatrix}$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n(k)\Psi_{0,k} &= \begin{pmatrix} P_n(k) & Q_{n-1}(k) \\ \widetilde{P}_n(k) & \widetilde{Q}_n(k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_{0,k} \\ \psi_{1,k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_n(k)\psi_{0,k} + Q_{n-1}\psi_{1,k} \\ \widetilde{P}_n(k)\psi_{0,k} + \widetilde{Q}_n(k)\psi_{1,k} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{2n,k} \\ \psi_{2n+1,k} \end{pmatrix} \\ &= \Psi_{n,k}\end{aligned}$$

En définissant la matrice $\Psi_{n,k}$, on a pu obtenir la première propriété de base d'un POM, soit la relation de récurrence. Maintenant, on cherche la matrice de poids de $\Psi_{n,k}$.

3.3 Matrice de Poids

Considérons le vecteur $\Psi_{n,k}$ définit à la section précédente. On veut montrer que celui-ci vérifie la relation d'ortogonalité :

$$\sum_k \Psi_{n,k}\Psi^{\dagger}_{m,k} = \delta_{n,m}\mathbb{I}_2$$

On développe le côté gauche:

$$\begin{aligned}
\sum_k \Psi_{n,k}\Psi^{\dagger}_{m,k} &= \sum_k \begin{pmatrix} \psi_{2n,k} \\ \psi_{2n+1,k} \end{pmatrix} \left(\overline{\psi}_{2m,k}\overline{\psi}_{2m+1,k}\right) \\
&= \sum_k \begin{pmatrix} \psi_{2n,k}\overline{\psi}_{2m,k} & \psi_{2n,k}\overline{\psi}_{2m+1,k} \\ \psi_{2n+1,k}\overline{\psi}_{2m,k} & \psi_{2n+1,k}\overline{\psi}_{2m+1,k} \end{pmatrix} \\
&= \sum_k \begin{pmatrix} \langle 2m|S^+|k\rangle\langle k|S|2n\rangle & \langle 2m+1|S^+|k\rangle\langle k|S|2n\rangle \\ \langle 2m|S^+|k\rangle\langle k|S|2n+1\rangle & \langle 2m+1|S^+|k\rangle\langle k|S|2n+1\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_k\langle 2m|S^+S|2n\rangle & \sum_k\langle 2m+1|S^+S|2n\rangle \\ \sum_k\langle 2m|S^+S|2n+1\rangle & \sum_k\langle 2m+1|S^+S|2n+1\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{2m,2n} & \delta_{2m+1,2n} \\ \delta_{2m,2n+1} & \delta_{2m+1,2n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \delta_{n,m} & 0 \\ 0 & \delta_{n,m} \end{pmatrix} \\
&= \delta_{n,m}\mathbb{I}_2
\end{aligned}$$

Pour déterminer la matrice de poids de $\mathcal{P}_n$ on utilise l'orthogonalité de la fonction $\Psi n, k$. On obtient alors

$$\delta_{n,m}\mathbb{I}_{2x2} = \sum_k \Psi_{n,k}\Psi^{+}_{m,n} = \sum_k \mathcal{P}_n(k)\Psi_{0,k}\Psi^{+}_{0,k}\mathcal{P}_m(k)^+ = \sum_k \mathcal{P}_n(k)W(k)\mathcal{P}^{+}_m(k)$$

Où

$$W(k) = \Psi_{0,k}\Psi^{+}_{0,k} = \begin{pmatrix} |\ \psi_{0,k}\ |^2 & \psi_{0,k}\overline{\psi_{1,k}} \\ \overline{\psi_{0,k}}\psi_{1,k} & |\ \psi_{1,k}\ |^2 \end{pmatrix} \tag{83}$$

est la matrice de poids recherchée.

Lors du calcul d'une représentation de l'opérateur S, les auteurs ont trouvé un exemple de polynôme orthogonal matriciel, c'est-à-dire qu'on a obtenu la relation de récurrence et la matrice de poids le $\mathcal{P}_n(k)$. Puisque notre but principal est de retrouver cette représentation à l'aide de la méthode de factorisation, la section qui suit détaille le calcul de la matrice S.

3.4 Décomposition

L'idée consiste à décomposer les éléments de matrice $\psi_{n,k}$ en un produit de polynômes orthogonaux qu'on doit trouver individuellement. On définit:

$$\begin{aligned}\chi_{m,k} &= \langle k|e^{(va-\overline{v}a^+)}|m\rangle \\ \varphi_{n,m} &= \langle m|e^{[wa^2-\overline{w}(a^+)^2]/2}|n\rangle\end{aligned}$$

Alors on peut écrire:

$$\begin{aligned}\psi_{n,k} = \langle k|S|n\rangle &= \langle k|e^{(va-\overline{v}a^+)}e^{[wa^2-\overline{w}(a^+)^2]/2}|n\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\langle k|e^{(va-\overline{v}a^+)}|m\rangle\langle m|e^{[wa^2-\overline{w}(a^+)^2]/2}|n\rangle \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\chi_{m,k}\varphi_{n,m}\end{aligned}$$

Remarquons que lorsque w et $\rho = 0$:

$$\psi_{n,k} = \chi_{n,k} \tag{84}$$

Aussi lorsque v et $\sigma = 0$:

$$\psi_{n,k} = \varphi_{n,k} \tag{85}$$

On pourra alors déterminer les éléments de la matrice S à l'aide des $\chi_{n,k}$ et $\varphi_{n,k}$.

Les $\chi_{n,k}$

La relation de récurrence découlant de (84) et (78) est :

$$k\chi_{n,k} = (n+\sigma^2)\chi_{n,k} - \sqrt{n}\sigma e^{-i\delta}\chi_{n-1,k} - \sqrt{n+1}\sigma e^{-i\delta}\chi_{n+1,k} \tag{86}$$

On reconnait les polynômes de Charlier à la normalisation près:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{n!}}(-\sigma e^{-i\delta})^{-n}\hat{P}_n(k) \tag{87}$$

Où les $P_n(k)$ sont des polynômes de degré n en k et satisfont:

$$\chi_{n,k} = P_n(x)\chi_{0,k} \tag{88}$$

Avec ces relations, les $\hat{P}_n$ obéissent à la relation de récurrence des polynômes de Charlier:

$$\hat{P}_{n+1}(k) = (k-n-\sigma^2)\hat{P}_n(k) - n\sigma^2\hat{P}_{n-1}(k) \tag{89}$$

On a donc:

$$\chi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\sigma e^{i\delta})^n C_n(k;\sigma^2)\chi_{0,k} \tag{90}$$

Pour trouver maintenant $\chi_{0,k}$ on utilise:

$$e^{(va-\overline{v}a^+)} = e^{v\overline{v}/2}e^{va}\cdot e^{-\overline{v}a^+}$$
$$e^{va-\overline{v}a^+}|0\rangle = e^{v\overline{v}/2}e^{va}|-\overline{v}\rangle = e^{-v\overline{v}/2}|-\overline{v}\rangle$$

Alors:

$$\chi_{0,k} = \langle k|e^{(va-\overline{v}a^+)}|0\rangle = e^{-v\overline{v}/2}\langle k|-\overline{v}\rangle = \frac{(-\overline{v})^k}{\sqrt{k!}}e^{-v\overline{v}/2} = \frac{e^{-\sigma^2/2}}{\sqrt{k!}}(-\sigma e^{-i\delta})^k$$

La première partie de la décomposition de la matrice S en terme des polynômes de Charlier est:

$$\chi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{n!k!}}\sigma^{n+k}e^{i\delta(n-k)}e^{-\sigma^2/2}C_n(k;\sigma^2) \tag{91}$$

Les $\varphi_{n,k}$

Comme pour le cas des $\chi_{n,k}$, on commence par examiner la relation de récurrence obtenue de (78) avec $\sigma = 0$:

$$k\varphi_{n,k} = \left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho - \frac{1}{2}\right\}\varphi_{n,k} - \frac{1}{2}\sqrt{n(n-1)}\sinh 2\rho e^{i\theta}\varphi_{n-2,k} \tag{92}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{(n+1)(n+2)}\sinh 2\rho e^{-i\theta}\varphi_{n+2,k} \tag{93}$$

Puisque les trois termes de cette équation sont séparés par des incréments de deux, on doit considérer les cas pairs et impairs séparemment. C'est-à-dire qu'on pose une solution de la forme:

$$\varphi_{2n,k} = P_n(k)\varphi_{0,k} \tag{94}$$
$$\varphi_{2n+1,k} = Q_n(k)\varphi_{1,k} \tag{95}$$

Où $P_n(k)$ et $Q_n(k)$ sont tous deux des polynômes de degré n en k à trouver. En substituant cette solution dans (92) on trouve deux nouvelles équations de récurrence:

$$kP_n(k) = \left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\cosh 2\rho - \frac{1}{2}\right\}P_n(k) - \frac{1}{2}\sqrt{2n(2n-1)}\sinh 2\rho e^{i\theta}P_{n+1}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}\sinh 2\rho e^{-i\theta}P_{n+1}(k)$$
$$kQ_n(k) = \left\{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\cosh 2\rho - \frac{1}{2}\right\}Q_n(k) - \frac{1}{2}\sqrt{2n(2n+1)}\sinh 2\rho e^{i\theta}Q_{n-1}(k)$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt{(2n+2)(2n+3)}\sinh 2\rho e^{i\theta}Q_{n+1}(k)$$

Commençons par les $P_n(k)$. En normalisant avec:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2n!}}\left(-\frac{1}{4}e^{i\theta}\sinh 2\rho\right)^{-n}\hat{P}_n(k) \tag{96}$$

Après simplification, la relation de récurrence se réduit à:

$$\hat{P}_{n+1}(k) = \left\{\frac{k}{2} - \left(n+\frac{1}{4}\right)\cosh 2\rho + \frac{1}{4}\right\}\hat{P}_n(k) - \frac{1}{4}\left\{n\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}\sinh^2 2\rho\hat{P}_{n-1} \tag{97}$$

On intruduit un paramètre c tel que:

$$c = \tanh^2 \rho \; 0 \leq c < 1$$
$$\cosh 2\rho = \frac{1+c}{1-c} \text{ et } \sinh^2 2\rho = \frac{4c}{(1-c)^2}$$

Avec cela on conclut que les $\hat{P}_n(k)$ satisfont la même relation de récurrence que les polynômes de Meixner (normalisés):

$$\hat{P}_n(k) = \left[\frac{k}{2} - \frac{n + c(n+\frac{1}{2}}{1-c}\right]\hat{P}_n(k) - \frac{n(n-1/2)c}{(1-c)^2}\hat{P}_{n-1} \tag{98}$$

On a alors:

$$\hat{P}_n(k) = (\frac{1}{2})_n \left(\frac{c}{c-1}\right)^n M_n\left(\frac{k}{2};\frac{1}{2},c\right) \tag{99}$$
$$\Rightarrow P_n(k) = \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}e^{in\theta}\tanh^n \rho M_n\left(\frac{k}{2};\frac{1}{2},\tanh^2\rho\right) \tag{100}$$

La démarche pour les $Q_n(k)$ est similaire. On commence par la normalisation:

$$Q_n(k) = \left(-\frac{1}{4}e^{-i\theta}\sinh 2\rho\right)^{-n}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)!}}\hat{Q}_n(k) \tag{101}$$

La relation de récurrence devient alors:

$$\hat{Q}_{n+1} = \left[\frac{1}{2} - \left(n+\frac{3}{4}\right)\cosh 2\rho + \frac{1}{4}\right]\hat{Q}_n(k) - n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{(1-c)^2}\hat{Q}_{n-1}(k) \tag{102}$$

En introduisant le même paramètre c que pour les $P_n(k)$ on conclut que les $Q_n(k)$ sont aussi des polynômes de Meixner [4]:

$$\hat{Q}_n(k) = \frac{3}{2}_n\left(\frac{c}{c-1}\right)^n M_n\left(\frac{k-1}{2};\frac{3}{2},c\right) \tag{103}$$
$$\Rightarrow Q_n(k) = \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{(2n+1)!}}{n!}e^{in\theta}\tanh^n \rho M_n\left(\frac{k-1}{2};\frac{3}{2},\tanh^2\rho\right) \tag{104}$$

Il reste maintenant à trouver $\varphi_{0,k}$ et $\varphi_{1,k}$. Pour $\varphi_{0,k}$ on a:

$$e^{[wa^2 - \overline{w}(a^+)^2]/2}|0\rangle = (\cosh\rho)^{-1/2} exp\left[-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho(a^+)^2\right]|0\rangle \tag{105}$$
$$= (\cosh\rho)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho\right)^n|2n\rangle \tag{106}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{0,2k} = (\cosh\rho)^{-1/2}\frac{\sqrt{(2k)!}}{k!}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho\right)^k \\ \varphi_{0,2k+1} = 0 \end{cases} \tag{107}$$

Pour $\varphi_{1,k}$ on a:

$$e^{[wa^2-\overline{w}(a^+)^2]/2}|1\rangle = (\cosh\rho)^{-3/2} exp\left[-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho(a^+)^2\right]|1\rangle \tag{108}$$

$$= (\cosh\rho)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho\right)^n (a^+)^{2n}\cdot a^+|0\rangle \tag{109}$$

$$= (\cosh\rho)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{(2n+1)!}}{n!}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho\right)^n |2n+1\rangle \tag{110}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{1,2k} = 0 \\ \varphi_{1,2k+1} = (\cosh\rho)^{-3/2}\frac{\sqrt{(2k+1)!}}{k!}\left(-\frac{1}{2}e^{-i\theta}\tanh\rho\right)^k \end{cases} \tag{111}$$

En combinant (94), (105), (99), (108) et (103) on obtient alors:

$$\varphi_{2n,2k} = \frac{(-1)^k}{2^{k+n}}\frac{\sqrt{(2k)!(2n)!}}{k!n!}e^{i(n-k)\theta}\frac{(\tanh\rho)^{k+n}}{(\cosh)^{1/2}}\cdot M_n\left(k;\frac{1}{2},\tanh^2\rho\right) \tag{112}$$

$$\varphi_{2n+1,2n+1} = \frac{(-1)^k}{2^{n+k}}\frac{\sqrt{(2k+1)!(2n+1)!}}{k!n!}e^{i(n-k)\theta}\frac{(\tanh)^{k+n}}{(\cosh)^{3/2}}\cdot M_n\left(k;\frac{3}{2},\tanh^2\rho\right) \tag{113}$$

Les autres éléments $\varphi_{n,k}$ étant nuls. En combinant (82), (91), et (112) et après simplification, on obtient finalement les éléments de la matrice S:

$$\Psi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}}\frac{\sigma^k}{2^n n!}e^{-\sigma^2/2}e^{i(n\theta-k\delta)}\tanh^n\rho\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\sigma^2 e^{i(2\delta-\theta)}\tanh\rho)^m}{2^m m!} \tag{114}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{(2n)!}}{(\cosh\rho)^{1/2}}C_{2m}(k;\sigma^2)M_n\left(m;\frac{1}{2};\tanh^2\rho\right) \\ \frac{\sqrt{(2n+1)!}}{(\cosh\rho)^{3/2}}C_{2m+1}(k;\sigma^2)M_n\left(m;\frac{3}{2};\tanh^2\rho\right) \end{pmatrix} \tag{115}$$

Maintenant qu'on a la forme explicite de S, il reste à montrer qu'on peut obtenir le même résultat en appliquant la méthode de factorisation. La section suivante résume la théorie et la technique d'Infeld et Hull [3] ainsi qu'un exemple d'application à un problème de q-oscillateurs [5].

4 Méthode de factorisation

Dans l'article de I. Lutsenko, V. Spiridov, L. Vinet et A. Shedanov [5], le but était d'étudier un Hamiltonien bilinéaire par rapport aux opérateurs a et a^+ d'un q-oscillateur en utilisant la chaîne de factorisation. Ce qui nous intéresse est en fait l'application de cette méthode. Celle-ci est basée sur 5 théoremes mathématiques (énoncés sans preuve ci-dessous). On examine ensuite l'algorithme de calcul des valeurs propres et fonctions propres et enfin on detaille l'application de la méthode à l'article [5] comme exemple.

4.1 Méthode d'Infeld et Hull

La méthode de factorisation d'Infeld et Hull [3] est une technique mathématique qui permet de résoudre certaines équations différentielles qu'on rencontre souvent en mécanique quantique. Dans [5], une variation de la méthode d'Infeld et Hull est appliquée à un problème de q-oscillateurs. Dans cette section, on résume la théorie de la méthode de factorisation et on donne un exemple à la fin.

4.1.1 Théorie

Dans plusieurs domaines de la physique, dont la mécanique quantique et l'électromagnétisme, on est contraint à résoudre des équations différentielles de la forme:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + r(x,m)y + \lambda y = 0 \tag{116}$$

Où $r(x,m)$ est une fonction caractéristique du problème et $m = 0,1,2,...$ est un indice lié aux contraintes. Celles-ci nous obligent souvent à ajouter un indice à $\lambda(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_l, ...)$. C'est-à-dire qu'on a un fonction $y_l^m(x)$ qui satisfait les contraintes pour chaque valeur propre λ_l et indice m.

On a l'habitude de résoudre les problèmes aux valeurs propres en trouvant en premier une solution générale à l'équation différentielle qui nous concerne et ensuite appliquer les contraintes du problème. Par après, il ne faut pas oublier de normaliser ces solutions. Cette méthode classique peut devenir très longue et difficile à appliquer au fur et à mesure que les problèmes deviennent plus compliqués.

L'idée derrière la méthode de factorisation est de remplacer notre équation initiale de degré deux par une système de deux équations de degré un. Il existe au total six types de décomposition en équations de la forme:

$$\left\{k(x,m+1) - \frac{d}{dx}\right\} Y_l^m = [\lambda - L(m+1)]^{1/2}\, Y_l^{m+1}$$
$$\left\{k(x,m) - \frac{d}{dx}\right\} Y_l^m = [\lambda - L(m)]^{1/2}\, Y_l^{m-1}$$

Ces 6 facorisations et les solutions associés (valeurs propres et fonctions propres) sont recueuillies dans un tableau dans [3]. De manière plus formelle, on a:

définition On dit que l'équation (116) peut être factorisée si elle peut être remplacée par chacune des deux équations suivantes:

$$^{+}H^{m+1\,-}H^{m+1}y(\lambda,m) = [\lambda - L(m+1)]\, y(\lambda,m) \tag{117}$$

$$^{-}H^{m\,+}H^{m}y(\lambda,m) = [\lambda - L(m)]\, y(\lambda,m) \tag{118}$$

Où $^{\pm}H = k(x,m) \pm (d/dx)$. Remarquons qu'à partir d'ici on notera deux classes de problèmes:

Les problèmes de **classe I** corresponderont aux $L(m)$ croissant en m. On aura alors un nombre fini de solutions pour chaque $m = 0,1,2,..l$ associés aux valeurs de $\lambda(\lambda_l, l = 0,1,2,...)$.
Les problèmes de **classe II** corresponderont aux $L(m)$ décroissant en m. On aura alors un nombre infini de solutions pour chaque $m = l, l+1, l+2, ..$ associés aux valeurs de $\lambda(\lambda_l, l = 0,1,2,...)$.

Le premier théorème établit la connection entre les états propres:

Premier Théorème Si $y(\lambda,m)$ est une solution de l'équation différentielle initiale, alors

$$y(\lambda, m+1) = {}^{-}H^{m+1}y(\lambda,m)$$
$$y(\lambda, m-1) = {}^{+}H^{m}y(\lambda,m)$$

sont aussi des solutions pour le même λ et d'indices m différents. En d'autres termes, l'application des opérateurs H sur une solution en (λ, m) permet de trouver les solutions d'indices supérieurs et inférieurs en m.

Ensuite, on établit le lien entre les opérateurs ${}^{\pm}H^m$:

Deuxième Théorème Les opérateurs H sont mutuellement adjoints:

$$\int_a^b \phi \left({}^{-}H^m f\right) dx = \int_a^b \left({}^{+}H^m \phi\right) f dx \tag{119}$$

Si ϕf s'annulent aux extrémités de l'intervalle et les intégrands sont continus sur $[a, b]$.

La prochaine étape concerne la propriété d'intégrabilité des solutions:

Troisième Théorème Si $y(\lambda, m)$ est quadratiquement intégrable sur le domaine de x et si $L(m)$ est une fonction croissante de m $(0 < m)$, alors l'opérateur d'échelle ${}^{+}H$ produit une fonction qui est aussi quadratiquement intégrable et qui s'annule aux extrémités. Si $L(m)$ est une fonction décroissante de $m(0 < m)$ alors l'opérateur ${}^{-}H$ produit une fonction qui est aussi quadratiquement intégrable et qui s'annule aux extrémités.

Conjointement au troisième théorème on a:

Quatrième Théorème (Classe I) Lorsque $L(m)$ est une fonction croissante de l'entier m pour $0 < m \leq M$, et $\lambda \leq \max\{L(M), L(M+1)\}$, alors une condition nécessaire pour avoir des solutions quadratiquement intégrables est :

$$\lambda = \lambda_l = L(l+1)$$

Oú l est un entier et $m = 0, 1, 2, ..., l$.

Quatrième Théorème (Classe II) Lorsque $L(m)$ est une fonction décroissante de l'entier m pour $0 < m \leq M$, et $\lambda \leq L(0)$, alors une condition nécessaire pour avoir des solutions quadratiquement intégrables est :

$$\lambda = \lambda_l = L(l)$$

Oú l est un entier et $m = l, l+1, l+2, ...$

Le cinquième théorème établit simplement la normalisation des solutions:

Cinquième Théorème Avec les définitions ci-dessus, les opérateurs $\mathcal{H}$ préservent la normalisation des solutions.

Avec ces cinq théorèmes, on est capable d'écrire les fonctions propres et valeurs propres d'une équation déjà factorisée.

4.1.2 Technique

Il reste maintenant à systématiser la factorisation d'une équation différentielle comme (116). C'est-à-dire, on cherche les $k(x,m)$ et $L(m)$ correspondant à un $r(x,m)$ donné. Comme on l'a dit dans [3], on applique (117) et on obtient:

$$k^2(x,m+1) + \frac{dk(x,m+1)}{dx} + L(m+1) = -r(x,m) \tag{120}$$

$$k^2(x,m) - \frac{dk(x,m)}{dx} + L(m) = -r(x,m) \tag{121}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient une condition nécessaire sur $k(x,m)$ et $L(m)$:

$$k^2(x,m+1) - k^2(x,m) + \frac{dk(x,m+1)}{dx} + \frac{dk(x,m)}{dx} = L(m) - L(m+1) \tag{122}$$

Remarquons qu'il s'agit aussi d'une condition suffisante car il est possible d'inverser les étapes qu'on vient de faire, c'est-à-dire partir de (122) et remonter jusqu'à (116). On cherche les $k(x,m)$ et $L(m)$ qui vont satisfaire cette condition. On a la solution triviale:

$$k(x,m) = f(m)$$
$$L(m) = -f^2(m)$$

Où $f(m)$ est une fonction arbitraire de m. Alors l'équation initiale devient:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

On connait déjà la solution de cette équation différentielle: une combinaison linéaire de $\sin \lambda^{\frac{1}{2}} x$ et $\cos \lambda^{\frac{1}{2}} x$. Une autre solution possible est:

$$k(x,m) = k_0 + mk_1 \tag{123}$$

Où k_0 et k_1 sont des fonctions de x seulement. Alors la condition (122) devient:

$$\begin{aligned}\left[(m+1)^2(k_1^2 + k_1') + 2(m+1)(k_0k_1 + k_0')\right] - \left[m^2(k_1^2 + k_1') + 2m(k_0k_1 + k_0')\right] \\ = L(m) = L(m+1)\end{aligned}$$

La solution générale de cette équation est:

$$L(m) = -m^2(k_1^2 + k_1') - 2m(k_0k_1 + k_0') + \tilde{1} \tag{124}$$

Oú $\tilde{1}$ est une fonction de x et m et de période 1 en m. Puisqu'on est intéressé à $L(m)$ que pour des valeurs entières de m, on pose:

$$\tilde{1} = f(x)$$

Où $f(x)$ est une fonction arbitraire de x. Alors, sans perte de généralité on va poser $f(x) = 0$. Puisque l'équation (124) doit être valide pour chaque valeur de m, on doit avoir chaque coefficient des puissances de m égaux à une constante. Alors on a les relations suivantes :

$$k_1^2 + k_1' = -a^2$$
$$k_0' + k_0 k_1 = \begin{cases} -ca & \text{si } a \neq 0 \\ b & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Où a, b et c sont des constantes. Alors on a aussi:

$$L(m) = \begin{cases} a^2 m^2 + 2ca^2 m & \text{si } a \neq 0 \\ -2bm & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

On y va cas par cas. Les solutions de (124) si $a \neq 0$ sont(avec encore la notation de [3]):

$$\text{(A)} \begin{cases} k_1 = a \cot a(x+p) \\ k_0 = ca \cot(x+p) + \frac{d}{\sin a(x+p)} \end{cases}$$
$$\text{(B)} \begin{cases} k_1 = ia \\ k_0 = cia + de^{-iax} \end{cases}$$

Si par contre on a $a = 0$ alors les solutions sont:

$$\text{(C)} \begin{cases} k_1 = \frac{1}{x} \\ k_0 = \frac{bx}{2} + \frac{d}{x} \end{cases}$$
$$\text{(D)} \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_0 = bx + d \end{cases}$$

Où d et p sont des constantes arbitraires. Chaque solution (A), (B), (C) et (D) fixe les $k(x, m)$ (123) et $L(m)$ (124). Alors en utilisant (120) on trouve $r(x, m)$.

Si on essaie de trouver d'autres solutions en augmantant le degré de (123), on obtient rien de nouveau [3]. Par contre si on écrit:

$$k(x, m) = \frac{k_{-1}}{m} + k_0 + mk_1 \tag{125}$$

On obtient la nouvelle condition:

$$-m^2(k_1^2 + k_1') - 2m(k_0 k_1 + k_0') - \frac{2k_0 k_{-1}}{m} - \frac{k_{-1}^2}{m^2} - (m+1)^2(k_1^2 + k_1') + 2(m+1)(k_0 k_1 + k_0') + \frac{2k_0 k_{-1}}{m+1} + \frac{k_{-1}^2}{(m+1)^2} = L(m) - L(m+1)$$

En multipliant cette nouvelle condition par $m(m+1)^2$ on obtient du côté gauche, on obtient les contraintes:

$$k_{-1} = q$$
$$k_{-1}' = 0$$

Où q est une constante differénte de 0 (ce cas ayant déjà été étudié). On doit avoir de plus:

$$k_0 = \text{constante} \tag{126}$$

Car $k_0 k_{-1}$ doit être constant. Puisque le cas $k_0 \neq 0$ obligerait k_1 à être constant (qui a déjà été étudié) on peut considèrer sans perte de généralité $k_0 = 0$. Alors on a comme dernière contrainte:

$$k_1^2 + k_1' = -a^2 \tag{127}$$

Lorsque k_1 est une constante, on obtient de nouveau une solution trigonométrique. En éliminant ce cas on obtient deux nouveau types de factorisations:

$$(\mathrm{E}) \begin{cases} k_1 = a \cot a(x+p) \\ k_0 = 0 \\ k_{-1} = q \end{cases}$$

$$(\mathrm{F}) \begin{cases} k_1 = \frac{1}{x} \\ k_0 = 0 \\ k_{-1} = q \end{cases}$$

On a donc au total 6 types de factorisation.

La technique utilisée dans [5] pour résoudre un problème de q-oscillateurs est équivalente à celle expliquée ci-dessus. La demarche de la partie la plus simple de cet article sera maintenant donné comme exemple de l'application de la méthode de factorisation.

4.2 Méthode de Loutsenko et ass.

Cette fois-ci on prend un hamiltonien de forme particulière comme point de départ. On peut obtenir une contrainte sur des hamiltoniens successifs, ce qui nous permet de trouver les valeurs propres. Pour trouver les fonctions propres on applique successivement un opérateur relié a l'hamiltonien de départ.

Technique

Dans, [5], on considère un hamiltonien de la forme

$$H = A^+ A$$

Avec

$$A = \alpha a + \beta a^+ + \gamma \tag{128}$$

L'idée de la chaîne de factorisation est de définir une suite d'hamiltoniens

$$H_l = A_l^+ A_l + \lambda_l \ ; \ l \in \mathbb{Z} \text{ et on prend } H \equiv H_0$$

De plus, on demande que deux hamiltonien successif respectent la relation :

$$A_{l+1}^+ A_{l+1} + \lambda_{l+1} = A_l A_l^+ + \lambda_l \tag{129}$$

Cette dernière équation transforme un système d'équations différentielles en un système de relations de récurrences. Le but est donc de résoudre le systéme et de déterminer les λ_l car ceux-ci correspondent, par hypothèse, aux valeurs propres des H_l.

En effet, en supposant l'existence d'un état fondamental, c'est-à-dire un état $|0\rangle_l$ tel que $A_l|0\rangle_l = 0$, on peut obtenir les nouveaux états propres en appliquant l'opérateur d'échelle A^+ sur celui-ci :

$$|l\rangle_0 = A_0^+ ... A_{l-1}^+ |0\rangle_l \tag{130}$$

Pour clarifier cette idée, on explique comment les auteurs de [5] ont trouvé un des spectres.

4.2.1 Exemple

En utilisant les actions des opérateurs de création et d'annihilation ainsi que leurs relations de commutation dans le cas des q-oscillateurs, les auteurs ont réussi à trouver le spectre de l'Hamiltonien initial. Le commutateur est donné par:

$$aa^+ - qa^+a = 1 \tag{131}$$

On commence par appliquer l'hypothèse (129) de la chaîne de factorisation avec la définition de l'opérateur A. Pour ce faire on calcule les quantités suivantes:

$$\begin{aligned}
A_l A_l^+ &= [\alpha_l a + \beta_l a^+ + \gamma_l][\alpha_l^* a^+ + \beta_l^* a + \gamma_l^*] \\
&= |\alpha_l|^2 aa^+ + \alpha_l\beta_l^* a^2 + \alpha_l\gamma_l^* a + \beta_l\alpha_l^* a^{+2} + |\beta_l|^2 a^+a + \beta_l\gamma_l^* a^+ + \gamma_l\alpha_l^* a^+ + \gamma_l\beta_l^* a + |\gamma_l|^2 \\
&= |\alpha_l|^2(1 - qa^+a) + |\beta_l|^2 a^+a + \alpha_l\beta_l^* a^2 + \beta_l\alpha_l^* a^{+2} + (\alpha_l\gamma_l^* + \gamma_l\beta_l^*)a + (\beta_l\gamma_l^* + \gamma_l\alpha_l^*)a^+ + |\gamma_l|^2 \\
&= (q|\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2)a^+a + \alpha_l\beta_l a^2 + \beta_l\alpha_l^* a^{+2} + (\alpha_l\gamma_l^* + \gamma_l\beta_l^*)a + (\beta_l\gamma_l^* + \gamma_l\alpha_l^*)a^+ + |\alpha_l|^2 + |\gamma_l|^2
\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve:

$$\begin{aligned}
A_{l+1}^+ A_{l+1} = (|\alpha_{l+1}|^2 + q|\beta_{l+1}|^2)a^+a + \alpha_{l+1}\beta_{l+1}^* a^2 + \alpha_{l+1}^*\beta_{l+1} a^{+2} \\
+ (\beta_{l+1}^*\gamma_{l+1} + \alpha_{l+1}\gamma_{l+1}^*)a \\
+ (\alpha_{l+1}^*\gamma_{l+1} + \beta_{l+1}\gamma_{l+1}^*)a^+ + |\beta_{l+1}^2 + |\gamma_{l+1}|^2
\end{aligned}$$

Maintenant, on utilise l'équation (129) et on trouve

$$\begin{aligned}
&A_{l+1}^+ A_{l+1} + \lambda_{l+1} = A_l A_l^+ + \lambda_l \\
&(|\alpha_{l+1}|^2 + q|\beta_{l+1}|^2)a^+a + \alpha_{l+1}\beta_{l+1}^* a^2 + \alpha_{l+1}^*\beta_{l+1} a^{+2} + (\beta_{l+1}^*\gamma_{l+1} + \alpha_{l+1}\gamma_{l+1}^*)a \\
&+ (\alpha_{l+1}^*\gamma_{l+1} + \beta_{l+1}\gamma_{l+1}^*)a^+ + |\beta_{l+1}^2 + |\gamma_{l+1}|^2 + \lambda_{l+1} = (q|\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2)a^+a + \alpha_l\beta_l a^2 \\
&+ \beta_l\alpha_l^* a^{+2} + (\alpha_l\gamma_l^* + \gamma_l\beta_l^*)a + (\beta_l\gamma_l^* + \gamma_l\alpha_l^*)a^+ + |\alpha_l|^2 + |\gamma_l|^2 + \lambda_l
\end{aligned}$$

Alors, en comparant les coefficient de chaque opérateur distinct, on obtient l'ensemble de relations de récurrences suivant:

$$
\begin{aligned}
&[\mathrm{I}]|\alpha_{l+1}|^2 + q|\beta_{l+1}|^2 = q|\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2 \\
&[\mathrm{II}]\alpha_l\beta_l^* = \alpha_{l+1}\beta_{l+1}^* \\
&[\mathrm{III}]\gamma_l\alpha_l^* + \gamma_l^*\beta_l = \gamma_{l+1}\alpha_{l+1}^* + \gamma_{l+1}^*\beta_{l+1} \\
&[\mathrm{IV}]\lambda_l + |\alpha_l|^2 + |\gamma_l|^2 = \lambda_{l+1} + |\beta_{l+1}|^2 + |\gamma_{l+1}|^2
\end{aligned}
$$

Grâce à la symétrie de l'Hamiltonien, on peut supposer α et β réel. On commence par la relation $[\mathrm{I}]|\alpha_{l+1}|^2 + |\beta_{l+1}|^2 = |\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2$. Remarquons qu'à chaque nouvelle itération, le coefficient de α gagne un $q^{1/2}$ et celui de β gagne un $q^{-1/2}$. On peut alors supposer

$$
\begin{aligned}
\alpha_l &= \alpha_0 q^{l/2} \\
\beta_l &= \beta_0 q^{-l/2}
\end{aligned}
$$

Ici, α_0 et β_0 sont des constantes à déterminer. Remarquons que cette supposition vérifie la relation [II]. On sépare γ_l en ses parties réelles et imaginaires : $\gamma_l = x_l + iy_l$ et on développe la relation [III]:

$$
\begin{aligned}
\gamma_l\alpha_l^* + \gamma_l^*\beta_l &= \gamma_{l+1}\alpha_{l+1}^* + \gamma_{l+1}^*\beta_{l+1} \\
(x_l + iy_l)\alpha_0 q^{l/2} + (x_l - iy_l)\beta_0 q^{-l/2} &= (x_{l+1} + iy_{l+1})\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} + (x_{l+1} - iy_{l+1})\beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}} \\
x_l\alpha_0 q^{l/2} + x_l\beta_0 q^{-l/2} + i[y_l\alpha_0 q^{l/2} - y_l\beta_0 q^{-l/2}] &= x_{l+1}\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} + x_{l+1}\beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}} + i[y_{l+1}\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} - y_{l+1}\beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}}] \\
x_l[\alpha_0 q^{l/2} + \beta_0 q^{-l/2}] + iy_l[\alpha_0 q^{l/2} - \beta_0 q^{-l/2}] &= x_{l+1}[\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} + \beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}}] + iy_{l+1}[\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} - \beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}}]
\end{aligned}
$$

En comparant les parties réelles, on obtient:

$$
\begin{aligned}
x_l[\alpha_0 q^{l/2} + \beta_0 q^{-l/2}] &= x_{l+1}[\alpha_0 q^{\frac{l+1}{2}} + \beta_0 q^{\frac{-(l+1)}{2}}] \\
x_l(\alpha_l + \beta_l) &= x_{l+1}(\alpha_{l+1} + \beta_{l+1})
\end{aligned}
$$

Pour que les deux côtés de l'équation soient égaux à une constante, on écrit:

$$x_l = \frac{k}{\alpha_l + \beta_l}$$

Pour déterminer la constante k, on remarque:

$$
\begin{aligned}
Re\gamma_0 \equiv x_0 &= \frac{k}{\alpha_0 + \beta_0} \\
&\Rightarrow k = Re\gamma_0(\alpha_0 + \beta_0)
\end{aligned}
$$

On fait la même démarche avec la partie imaginaire, ce qui nous permet de conclure :

$$\gamma_l = \frac{(\alpha_0 + \beta_0)Re\gamma_0}{\alpha_l + \beta_l} + \frac{i(\alpha_0 - \beta_0)Im\gamma_0}{\alpha_l - \beta_l}$$

Il reste à fixer les constantes α_0, β_0 et γ_0. Il existe plusieurs solutions à ces équations de récurrence. Considérons la plus simple, c'est-à-dire, celle qui correspond à égaler α_0, β_0 et γ_0 avec les paramètres de départ de l'Hamiltonien:

$$\alpha_0 = \alpha \ \beta_0 = \beta \ \gamma_0 = \gamma \ \lambda_0 = 0$$

Alors la solution de notre ensemble d'équation de réccurence correspond à:

$$\begin{aligned}
\alpha_l &= \alpha q^{l/2} \\
\beta_l &= \beta q^{-l/2} \\
\gamma_l &= \frac{(\alpha+\beta)Re\gamma}{\alpha_l+\beta_l} + \frac{i(\alpha-\beta)Im\gamma}{\alpha_l-\beta_l}
\end{aligned}$$

Dans l'article, on considère aussi le cas $\lambda_0 \neq 0$. Celui-ci suit la même démarche que ci-dessus mais il est évidemment plus compliqué. L'essentiel de la technique est de résoudre le système de relations de récurrence obtenues à partir de l'équation (129).

5 Application de la méthode de factorisation sur un POM

Dans cette section purement calculatoire, on tente de redériver les résultats de [5] en appliquant la méthode de factorisation basée sur [3] et détaillée dans [5].

5.1 Spectre

Il s'agit ici de retrouver le spectre et les fonctions propres de l'Hamiltonien conjugué du premier article. Remarquons que la conjugaison par l'opérateur S de l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique ne change pas les niveaux d'énergie. On devrait donc, en utilisant la chaîne de factorisation, obtenir un spectre linéaire.

Afin d'éviter des problèmes de notation, on pose:

$$\tilde{a} := SaS^{-1} = \cosh a - e^{-i\theta}\sinh \rho a^{+} \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho) \tag{132}$$

Et alors l'équation (129) s'écrit :

$$\tilde{a}^{+}_{l+1}\tilde{a}_{l+1} + \lambda_{l+1} = \tilde{a}_l\tilde{a}^{+}_l + \lambda_l \tag{133}$$

avec les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
\alpha_l &= \cosh p_l \\
\beta_l &= -e^{-i\theta_l}\sinh\rho_l \\
\gamma_l &= \sigma(e^{-i\delta_l}\cosh\rho_l + e^{i(\delta_l-\theta_l)}\sinh\rho_l)
\end{aligned}$$

On calcule:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^+_{l+1}\tilde{a}_{l+1} &= (\alpha^*_{l+1}a^+ + \beta^*_{l+1}a + \gamma^*_{l+1})(\alpha_{l+1}a + \beta_{l+1}a^+ + \gamma_{l+1}) \\
&= |\alpha_{l+1}|^2a^+a + \alpha^*_{l+1}\beta_{l+1}(a^+)^2 + \alpha^*_{l+1}\gamma_{l+1}a^+ + \beta^*_{l+1}\alpha_{l+1}a^2 + |\beta_{l+1}|^2aa^+ \\
&+ \beta^*_{l+1}\gamma_{l+1}a + \gamma^*_{l+1}\alpha_{l+1}a + \gamma^*_{l+1}\beta_{l+1}a^+ + |\gamma_{l+1}|^2 \\
&= |\alpha_{l+1}|^2a^+a + |\beta_{l+1}|^2(1+a^+a) + \alpha^*_{l+1}\beta_{l+1}(a^+)^2 + \beta^*_{l+1}\alpha_{l+1}a^2 + \\
&(\alpha^*_{l+1}\gamma_{l+1} + \gamma^*_{l+1}\beta_{l+1})a^+ + (\beta^*_{l+1}\gamma_{l+1} + \gamma^*_{l+1}\alpha_{l+1})a + |\gamma_{l+1}|^2 \\
&= (|\alpha_{l+1}|^2 + |\beta_{l+1}|^2)a^+a + \alpha^*_{l+1}\beta_{l+1}(a^+)^2 + \beta^*_{l+1}\alpha_{l+1}a^2 \\
&+ (\alpha^*_{l+1}\gamma_{l+1} + \gamma^*_{l+1}\beta_{l+1})a^+ + (\beta^*_{l+1}\gamma_{l+1} + \gamma^*_{l+1}\alpha_{l+1})a + |\beta_{l+1}|^2 + |\gamma_{l+1}|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_l\tilde{a}^+_l &= (\alpha_l a + \beta_l a^+ + \gamma_l)(\alpha^*_l a^+ \beta^*_l a + \gamma^*_l) \\
&= |\alpha_l|^2aa^+ + \alpha_l\beta^*_l a^2 + \alpha_l\gamma^*_l a + \beta_l\alpha^*_l a^{+2} \\
&+ |\beta_l|^2a^+a + \beta_l\gamma^*_l a^+ + \gamma_l\alpha^*_l a^+ + \gamma_l\beta^*_l a + |\gamma_l|^2 \\
&= |\alpha_l|^2(1+a^+a) + |\beta_l|^2a^+a + \alpha_l\beta^*_l a^2 + \beta_l\alpha^*_l a^{+2} \\
&+ (\alpha_l\gamma^*_l + \gamma_l\beta^*_l)a + (\beta_l\gamma^*_l + \gamma_l\alpha^*_l)a^+ + |\gamma_l|^2 \\
&= (|\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2)a^+a + \alpha_l\beta^*_l a^2 + \beta_l\alpha^*_l a^{+2} + (\alpha_l\gamma^*_l + \gamma_l\beta^*_l)a + (\beta_l\gamma^*_l + \gamma_l\alpha^*_l)a^+ + |\alpha_l|^2 + |\gamma_l|^2
\end{aligned}$$

En utilisant (129), on obtient le système d'équation de récurrence suivant:

$$\begin{aligned}
&[1]|\alpha_{l+1}|^2 + |\beta_{l+1}|^2 = |\alpha_l|^2 + |\beta_l|^2 \\
&[2]\alpha_l\beta^*_l = \alpha_{l+1}\beta^*_{l+1} \\
&[3]\gamma_l\alpha^*_l + \gamma^*_l\beta_l = \gamma_{l+1}\alpha^*_{l+1} + \gamma^*_{l+1}\beta_{l+1} \\
&[4]\lambda_l + |\alpha_l|^2 + |\gamma_l|^2 = \lambda_{l+1} + |\beta_{l+1}|^2 + |\gamma_{l+1}|^2
\end{aligned}$$

On essaie la solution triviale, c'est-à-dire $\alpha_l = \alpha_0, \beta_l = \beta_0$ et $\gamma_l = \gamma_0$ $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{C}$. Si on fait la même chose que [8],i. e., $\alpha_0 = \alpha = \cosh\rho, \beta_0 = \beta = -e^{-i\theta}\sinh\rho$ et $\gamma_0 = \gamma = \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)$. La relation [4] devient:

$$\begin{aligned}
\lambda_l + \cosh^2\rho &= \lambda_{l+1} + \sinh^2\rho \\
\Rightarrow \lambda_{l+1} - \lambda_l &= \cosh^2\rho - \sinh^2\rho = 1 \\
\Rightarrow \lambda_l &= \lambda_0 + \sum_{n=0}^{l-1} 1 = \lambda_0 + l
\end{aligned}$$

Donc, si on pose $\lambda_0 = 0$, on obtient bel et bien le spectre linéaire de l'oscillateur harmonique.

5.2 États propres

Comme le spectre impose que nos coefficients α_l, β_l et γ_l sont des constantes, les indices sont abandonnés pour simplifier la notation. En premier, on calcule l'état fondamental en utilisant l'hypothèse :

$$\tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0 \tag{134}$$

Avec le changement de base:

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} B_k |k\rangle \tag{135}$$

Avec nos paramètres on obtient:

$$\tilde{a}|\tilde{0}\rangle = \cosh\rho a + e^{i\theta}\sinh\rho a^{+} + \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\sum_{k=0}^{\infty} B_k|k\rangle \tag{136}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cosh\rho\sqrt{k}|k-1\rangle + \sum_{k=0}^{\infty} B_k e^{i\theta}\sinh\rho\sqrt{k+1}|k+1\rangle \tag{137}$$

$$+ \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\sum_{k=0}^{\infty} B_k \tag{138}$$

$$= \cosh\rho \sum_{l=1-}^{\infty} B_{l+1}\sqrt{l+1}|l+1\rangle + e^{i\theta}\sinh\rho\sum_{m=1}^{\infty} B_{m-1}|m\rangle \tag{139}$$

$$+ \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\sum_{k=0}^{\infty} B_k|k\rangle \tag{140}$$

$$= \cosh\rho\sum_{l=0}^{\infty} B_{l+1}|l\rangle + e^{-i\theta}\sinh\rho\sum_{m=0}^{\infty} B_{m-1}\sqrt{m}|m\rangle \tag{141}$$

$$+ \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\sum_{k=0}^{\infty} B_k|k\rangle \tag{142}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\cosh\rho B_{k+1}\sqrt{k+1} + e^{-i\theta}\sinh\rho B_{k-1}\sqrt{k} + \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)B_k\right)|k\rangle \tag{143}$$

On a alors la relation de récurrence sur les B_k :

$$\cosh\rho B_{k+1}\sqrt{k+1} + e^{-i\theta}\sinh\rho B_{k-1}\sqrt{k} + \sigma(e^{-i\delta}\cosh\rho + e^{i(\delta-\theta)}\sinh\rho)B_k = 0 \tag{144}$$

Comme on le voit cette équation correspond exactement à l'équation (4.8) de [5]. D'où

$$B_k = \psi_{0,k} \tag{145}$$

Pour obtenir l'état $\psi_{1,k}$ on applique $\tilde{a}^{+}$ une fois:

$$\tilde{a}^{+}|\tilde{0}\rangle = \tilde{a}^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\psi_{0,k}|k\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\cosh\rho\sqrt{k+1}\psi_{0,k}|k+1\rangle + e^{i\theta}\sinh\rho\sqrt{k}\psi_{0,k}|k-1\rangle + \sigma(e^{i\delta}\cosh\rho + e^{-i(\delta-\theta)})\sinh\rho\psi_{0,k}|k\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\cosh\rho\sqrt{k}\psi_{0,k-1} + e^{i\theta}\sinh\rho\sqrt{k}\psi_{0,k+1} + \sigma(e^{i\delta}\cosh\rho + e^{-i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\psi_{0,k}\right]|k\rangle$$

Ce qui implique:

$$\psi_{1,k} = \cosh\rho\sqrt{k}\psi_{0,k-1} + e^{i\theta}\sinh\rho\sqrt{k}\psi_{0,k+1} + \sigma(e^{i\delta}\cosh\rho + e^{-i(\delta-\theta)}\sinh\rho)\psi_{0,k} \tag{146}$$

Ce qui correspond à la même équation que (4.18) de [8].

Pour trouver les n-ièmes états propres on utilise la décomposition de la section 3.4. L'idée est d'appliquer séparemment l'opérateur $(\tilde{a}^+)^n$ sur les $\chi_{0,k}$ et $\varphi_{0,k}$. Plus précisemment, on a la décomposition:

$$|\tilde{n}\rangle = |\tilde{n}\rangle_\chi |\tilde{n}\rangle_\varphi \tag{147}$$

avec:

$$|\tilde{n}\rangle_\chi = (\tilde{a}^+)^n|_{\rho=0}|\tilde{0}\rangle_\chi = (\tilde{a}^+)^n|_{\rho=0}\sum_{k=0}^{\infty}\chi_{0,k}|k\rangle \tag{148}$$

$$|\tilde{n}\rangle_\psi = (\tilde{a}^+)^n|_{\sigma=0}|\tilde{0}\rangle_\varphi = (\tilde{a}^+)^n|_{\sigma=0}\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{0,k}|k\rangle \tag{149}$$

Dans le cas de Charlier on a donc:

$$\tilde{a}^+|_{\rho=0} = a^+ + \sigma e^{i\delta} \tag{150}$$

En appliquant le binôme de Newton on obtient:

$$(\tilde{a}^+|_{\rho=0})^n = (a^+ + \sigma e^{i\delta})^n = \sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(a^+)^j(\sigma e^{i\delta})^{n-j} \tag{151}$$

Alors:

$$|\tilde{n}\rangle_\chi = \frac{1}{\sqrt{n!}}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(\sigma e^{i\delta})^{n-j}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\sigma^2/2}\frac{(-\sigma e^{-i\delta})^k}{\sqrt{k!}}(a^+)^j|k\rangle \tag{152}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}[e^{-\sigma^2/2}\sigma^n e^{in\delta}]\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(\sigma e^{i\delta})^{-j}\frac{(-\sigma e^{-i\delta})^k}{\sqrt{k!}}\sqrt{(k+j)\cdots(k+1)}|k+j\rangle \tag{153}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}}[e^{-\sigma^2/2}\sigma^n e^{in\delta}]\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}(\sigma e^{i\delta})^{-j}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\sigma e^{-i\delta})^{m-j}}{\sqrt{(m-j)!}}\sqrt{(m)\cdots(m-j+1)}|m\rangle \tag{154}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n!}}(-1)^m e^{-\sigma^2/2}\sigma^{n+m}e^{i\delta(n-m)}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\frac{(-1)^j}{(\sigma^2)^j(m-j)!}\sqrt{m!}\right\}|m\rangle \tag{155}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n!m!}}(-1)^m e^{-\sigma^2/2}\sigma^{n+m}e^{i\delta(n-m)}\sum_{j=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\frac{(-1)^j}{(\sigma^2)^j}\frac{m!}{m-j!}\right\}|m\rangle \tag{156}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n!m!}}(-1)^m e^{-\sigma^2/2}\sigma^{n+m}e^{i\delta(n-m)}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix}\frac{1}{(\sigma^2)^j}j!\right\}|m\rangle \tag{157}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n!m!}}(-1)^m e^{-\sigma^2/2}\sigma^{n+m}e^{i\delta(n-m)}C_n(m;\sigma^2)\right\}|m\rangle \tag{158}$$

$$\tag{159}$$

On retrouve bel et bien l'équation (7.13) de [8]:

$$\chi_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n!k!}}(-1)^k e^{-\sigma^2/2}\sigma^{n+k}e^{i\delta(n-k)}C_n(k;\sigma^2) \tag{160}$$

6 Conclusion

On a vu comment généraliser le concept de polynôme orthogonaux, qui sont des solutions d'une équation hypergéométrique, à des matrices. Ces dernières satisfont aussi à une équation de récurrence à trois termes et une relation d'orthogonalité. On a eu besoin de ce concept pour détailler le problème de l'article [8].

Le deuxième concept nécéssaire à notre problème principal était la méthode de factorisation. Basé sur cinq théorèmes il est possible de construire une technique permettant de résoudre des équations différentielles d'une forme particulière qu'on retrouve souvent en de mécanique quantique.

Par exemple dans le problème de q-oscillateurs de l'article [5] on introduit une technique équivalente à cette d'Infeld et Hull [3] pour trouver les états propres et valeurs propres d'un hamiltonien de forme spéciale.

Notre but ultime était de retrouver les fonction propres et valeurs associés à l'hamiltonien introduit dans [8] à l'aide de la méthode de factorisation. En se basant sur la définition de $\tilde{a}$ et la décomposition des états propres dans [8] il est effectivement possible d'obtenir de nouveau la partie Charlier de la matrice $\Psi_{n,k}$.

Références

[1] P. Blasiak et P. Flajolet 2011 *Combinatorial models of creation-annihilation* Séminaire Lotharingien de Combinatoire 65, Article B65c p.16

[2] T.S. Chihara *An introduction to orthogonal polynomials* Gordon and Breach 1978 p.1-25

[3] L. Infeld et T. E. Hull 1951 *The Factorization Method* Reviews of Modern Physics, Vol 23, Num 1. 22-29

[4] R. Koekoek et R.F. Swarttouw 1998 *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue* Report no 98-17 Delft University of Technology 38,40-42

[5] I. Lutsenko, V. Spiridov, L. Vinet et A. Shedanov 1998 *Spectral analysis of q-oscillator with general bilinear interaction* J. Phys. A: Math. Gen. 31 9081-9085,9087

[6] L. Miranian 2005 *Matrix-valued orthogonal polynomials on the real line: some extensions of the classical theory* J. Phys. A: Math. Gen. 38 5731–5749

[7] A. F. Nikiforov, S. K Suslov et V. B Uvarov *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable.* Springer-Verlag 1991. 2-3

[8] L. Vinet et A. Zhedanov 2011 *Representations of the Schrödinger group and matrix orthogonal polynomials* J. Phys. A: Math. Theor. 44 355201 2-8,14-18