Université de Montréal

Demande des facteurs de production physiques et financiers par le secteur manufacturier canadien

par

Neifar Malika

Département de sciences économiques
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès Sciences (M.Sc)
en sciences économiques

Mars 1990

Université de Montréal

Ce mémoire intitulé :

Demande des facteurs de production physiques et financiers
par le secteur manufacturier canadien

présenté par :
Neifar Malika

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Nicole Fortin, présidente
Marcel Dagenais, membre
Lise Salvas, membre

Mémoire accepté le :

TABLE DES MATIERES

Résumé

Dans ce mémoire, on présente le problème de décision du producteur en vue de tester un modèle de comportement permettant la détermination conjointe de la demande de facteurs physiques et financiers dans un contexte temporaire.

On définit un modèle structurel général complet qui englobe les trois modèles néoclassiques de base.

Ce système complet est doté d'une structure locale qui généralise la structure locale usuelle de Slutsky.

A partir des données canadiennes annuelles des industries manufacturières, on teste trois spécifications, dont une forme translog. Deux de ces modèles ne sont pas rejetés (à l'exception du troisième) et offrent une bonne explication du comportement du producteur manufacturier canadien.

Introduction

La détermination conjointe de la demande de facteurs de production physiques et financiers était négligée jusqu'à Lucas (1969) et elle n'était pas testée explicitement avant Nadiri (1969), Coën et Hickman (1970).

Les innovations théoriques et les vérifications pratiques récentes des demandes des facteurs comprennent : l'introduction des anticipations, la prise en compte des coûts d'ajustement, la considération des rationnements quantitatifs et leurs implications à court et à long termes. Les recherches les plus récentes sur les formes fonctionnelles sont de Diewert et Wales (1987). Les opérations financières du producteur étaient considérées indirectement dans ces recherches[1]. Dans ce mémoire, les opérations financières et les anticipations constituent des éléments essentiels de la décision du producteur. On considère un système de demande de facteur conditionnel général (où le niveau des inputs est expliqué par un vecteur de prix des facteurs de production, des signaux quantitatifs de la demande et du niveau des dotations financières) et on introduira explicitement les opérations financières dans le problème de prise de décision du producteur.

Pour finir par reformuler le problème du producteur dans un contexte temporaire, on donne un aperçu sur l'évolution de la théorie du producteur, du problème intertemporel à la théorie de maximisation myope de Malinvaud (1972).

Dans un monde temporaire (Grandmont (1983), Bronsard et Salvas-Bronsard (1983)), le marché des actifs financiers remplace les marchés à terme des biens physiques vu que les marchés futurs sont soit incomplets soit inexistants et que le commerce en biens futurs peut se faire indirectement par le biais des marchés financiers. Ainsi, et avec l'introduction des anticipations, le producteur choisira simultanément ses demandes de facteurs physiques et financiers à chaque période.

Le critère de choix du producteur est une fonction de profit dérivable sujet à une fonction de production *non séparable* dans le temps. Les facteurs d'escompte et les

---

1 Par le biais du prix de capital, prix qui est appelé parfois coût d'usage (qui tient compte des facteurs d'escomptes, de la dépréciation, de la durée de vie du capital en question) et des anticipations des prix futurs.

prix anticipés sont des variables explicatives directes et les délais d'ajustement sont directement utilisés dans la fonction de production. Le système général englobe les formes structurelles des trois modèles de base de la théorie néoclassique, à savoir le problème de maximisation des profits (sous contrainte d'une fonction de production néoclassique), le problème de maximisation d'output (sous la contrainte de coût et de fonction de production), le problème de minimisation des coûts (sous la contrainte d'une fonction de production et d'un niveau donné d'output) et plusieurs autres modèles de la firme dans lesquels on admet, à la fois, l'inefficacité technique (les biens peuvent servir aussi bien d'inputs que d'outputs) et des signaux quantitatifs concernant les outputs bruts et nets.

Ce système est caractérisé par une structure locale de Slutsky, i.e. qu'il possède un ensemble de propriétés fondamentales en microéconomie telles que l'homogénéité, la symétrie, la négativité semi-définie et l'additivité.

Le reste du texte s'organise comme suit.

Les modèles théoriques se trouvent dans le chapitre 1 dont la section 1 donne un aperçu général de l'évolution de la théorie du producteur et la section 2 présente le modèle structurel général. Dans la section 3, on montre que les trois modèles de base de la théorie néoclassique de la firme sont des cas spéciaux du modèle général. La section 4 génère une autre spécification du modèle général plus réaliste. Ce modèle est transformé dans la section 5 pour devenir testable dans un contexte temporaire. On introduira ainsi la demande d'actifs financiers et les fonctions d'anticipation (et les délais d'ajustement). Les sections 6 et 7 présentent deux modèles empiriques testables, un modèle paramétrisé à la manière de Rotterdam et le modèle de forme translog.

Le chapitre 2 décrit la base économétrique utilisée en pratique. Les méthodes d'estimation sont dans la première section et les tests d'hypothèses sont dans la deuxième.

Le dernier chapitre présente l'analyse empirique. Les résultats révèlent l'adéquation du modèle avec les données du producteur canadien. Les sources de données sont regroupées en Annexes ainsi que les démonstrations les plus complexes.

Chapitre I

Modèles théoriques et historiques

1. Aperçu général sur l'évolution de la théorie du producteur

1.1 Le problème intertemporel

Le problème intertemporel du producteur consiste à rendre maximum son profit total actualisé. Soit

$$\sum_{t=0}^{T} \beta_t \, p'_t \, y_t \qquad (1.1.1)$$

sous la contrainte de ses connaissances technologiques que l'on peut représenter par une fonction de production f telle que :

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_T) = 0 \text{ [2]} \qquad (1.1.2)$$

où β_t est le coefficient d'escompte permettant l'actualisation de la période t à la période zéro, p'_t est le vecteur ligne des prix et y_t le vecteur des productions nettes; en effet

$$y_t = b_t - a_t \qquad (1.1.3)$$

où b_t = vecteur d'outputs et a_t = vecteur d'inputs.

Les p_t sont supposés être positifs et les β_t supérieurs à (-1); alors, avec une fonction de production deux fois continûment dérivable, fortement monotone et fortement quasi convexe, la *fonction d'offre intertemporelle* existe, est continûment dérivable et se caractérise par une structure locale de Slutsky.

La présentation de ce résultat, dans le cas atemporel, se trouve dans l'Annexe 1. Cette fonction d'offre n'a pas de sens dans la pratique puisque les prix futurs et la fonction intertemporelle de production ne sont pas connus.

---

2 On définit l'ensemble de prodution possible par :

$$f(y_0, y_1, \ldots, y_T) \leq 0 .$$

L'égalité vient du fait qu'on supposera que les prix sont strictement positifs, ce qui conduit à un optimum qui se situe sur la frontière (1.1.2) .

1.2 La théorie de maximisation myope de Malinvaud (1969)

Dans cette théorie, Malinvaud introduit un délai de production d'une période et représente la contrainte de connaissance technologique de la période t par la fonction de production temporaire g_t telle que

$$g_t(b_{t+1}, -a_t) = 0 \tag{1.2.1}$$

et par convention, le profit temporaire π_{t+1} est le suivant :

$$\begin{aligned} \pi_{t+1} &= p'_{t+1}\, b_{t+1} - \beta_t / \beta_{t+1}\, p'_t\, a_t \\ &= p'_{t+1}\, b_{t+1} - (1 + \rho_t)\, p'_t\, a_t \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

où ρ_t est le taux de rendement reliant la période t à la période t + 1.

Le producteur maximise à chaque période t (1.2.2) sous la contrainte (1.2.1), alors les T problèmes de maximisation temporaire ainsi définis reviennent au problème de maximisation intertemporelle; en d'autres termes, la fonction f peut se représenter par les T fonctions de production g_t qui ont les propriétés analytiques données à la fonction f. On pose $a_T = 0$ et $b_0 = 0$.

La maximisation myope de Malinvaud permet de définir des fonctions d'offre temporaire qui sont difficilement testables avec des données économiques.

1.3 L'optimum temporaire de Bronsard - Salvas-Bronsard (1983)

Parce qu'il n'y a incertitude ni de la part du producteur ni de la part des bailleurs de fond, le producteur de la théorie précédente peut emprunter n'importe quel montant $r'_t\, a_t$. L'introduction de l'incertitude conduit à l'introduction d'un budget de capital qui admet une limite à la somme des investissements et des placements d'une entreprise. A la date t, l'entreprise dispose d'un montant A_t (qui peut être négatif) qui résulte de ses placements (emprunts) antérieurs et d'un montant α_t qui lui est accordé par ses actionnaires.

L'entreprise peut alors soit acheter A_{t+1}, l'actif financier livrable à la date t + 1, soit acheter des facteurs de production a_t. On note par γ_t le prix de l'actif financier, c'est-à-dire le facteur d'escompte entre t + 1 et t, et par r_t le prix des facteurs de productions (les prix de vente peuvent être différents des prix d'achat).

La contrainte financière de l'entreprise à la date t est :

$$r'_t a_t + \gamma_t A_{t+1} = \alpha_t + A_t \,. \qquad (1.3.1)$$

L'entreprise doit anticiper cette contrainte pour chaque période postérieure à t vu qu'elle peut se refinancer d'une période à l'autre. Ainsi, la maximisation myope devient impossible.

Pour voir les choses plus clairement, posons :

$$\tilde{a} : \begin{bmatrix} a_{t+1} \\ \vdots \\ a_{T-1} \end{bmatrix}, \ \tilde{r} = \begin{bmatrix} r_{t+1} \\ \beta_{t+2}/\beta_{t+1}\, r_{t+2} \\ \vdots \\ \beta_{T-1}/\beta_{t+1}\, r_{T-1} \end{bmatrix} \qquad \text{avec } \gamma_t = \frac{\beta_{t+1}}{\beta_t}$$

$$\text{et } \tilde{\alpha} = \alpha_{t+1} + \sum_{\tau = t+2}^{T} \beta_\tau / \beta_{t+1}\, \alpha_\tau \,.$$

Les futurs budgets de capitaux peuvent se représenter par :

$$\tilde{r}'\tilde{a} - A_{t+1} = \tilde{\alpha} \,, \qquad (1.3.2)$$

de même, soit $\tilde{q}$ les prix futurs des outputs et $\tilde{b}$ les outputs futurs; les recettes attendues dans l'avenir $\tilde{q}'\tilde{b}$ sont à maximiser sous les contraintes (1.3.1) , (1.3.2) et les contraintes des fonctions de production temporaires. Le problème du producteur peut donc se représenter par la maximisation du lagrangien suivant :

$$\mathscr{L} = \tilde{q}'\tilde{b} - \sum_{\tau=t}^{T-1} \lambda_\tau \, g_\tau(b_{\tau+1}, -a_\tau) - \mu(r_t' a_t + \gamma_t A_{t+1} - \alpha_t - A_t) - v(\tilde{r}'\tilde{a} - A_{t+1} - \tilde{\alpha}) . \qquad (1.3.3)$$

L'optimum ainsi trouvé est paramétré sur les anticipations de $\tilde{q}$, $\tilde{r}$ et $\tilde{\alpha}$.

La solution de ce problème coincidera avec la solution du problème de la maximisation myope sous l'hypothèse de marchés parfaits.

La section suivante expose la forme structurelle générale.

2. La forme structurelle générale

Cette section est principalement tirée de Bronsard - Salvas-Bronsard (1988).

La production dans le modèle est définie par deux vecteurs de fonctions b* et a* tel que :

$$\left.\begin{aligned} b &= b^*(p , X , \alpha) \\ a &= a^*(p , X , \alpha) \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

où b* et a* permettent la liaison des prix p, des signaux quantitatifs sur les demandes X, et les dotations financières α avec les outputs b et les inputs a (avec b , a ; $p \in R_+^h$, $X \in R_n$) et ($\alpha \in R_+$). A l'aide des deux hypothèses suivantes, la structure locale de ce modèle sera bien spécifiée.

<u>Hypothèse I</u>

Les fonctions b* et a* sont une fois dérivables, à partir de cette hypothèse de modèle (I) est différentiable. En effet :

$$\begin{cases} db = \dfrac{\partial b}{\partial p}\, dp + \dfrac{\partial b}{\partial X}\, dx + \dfrac{\partial b}{\partial \alpha}\, d\alpha \\[2ex] da = \dfrac{\partial a}{\partial p}\, dp + \dfrac{\partial a}{\partial X}\, dx + \dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\, d\alpha \end{cases}$$

on ajoute et on soustrait $\frac{\partial b}{\partial \alpha}$ a'dp à droite de db et de da. Les égalités différentielles précédentes peuvent s'écrire comme suit :

$$\left.\begin{aligned} db &= Bdp + \frac{\partial b}{\partial X}dx + \frac{\partial b}{\partial \alpha}(d\alpha - a'dp) \\ da &= Adp + \frac{\partial a}{\partial X}dx + \frac{\partial a}{\partial \alpha}(d\alpha - a'dp) \end{aligned}\right\} \text{(F1)}$$

où $\quad B = \frac{\partial b}{\partial p} + \frac{\partial b}{\partial \alpha}\, a' \quad (2.1)$

et $\quad A = \frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial \alpha}\, a' \quad (2.2)$.

A et B peuvent être interprétées comme matrices d'effets de substitution, $\frac{\partial b}{\partial X}$ et $\frac{\partial a}{\partial X}$ comme matrices d'effets de report et $\frac{\partial b}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$ comme vecteurs d'effets de dotation financière, par analogie à la théorie du consommateur.

On définit le ratio $\mu = \frac{p'\partial b/\partial \alpha}{p'\partial a/\partial \alpha}$ (2.3) (où $p'\frac{\partial a}{\partial \alpha} \neq 0$), ratio qui mesure la productivité marginale de tous les inputs suite à un changement marginal dans les dotations financières.

Si $p'\frac{\partial a}{\partial \alpha}$ et $p'\frac{\partial b}{\partial \alpha}$ tendent vers zéro, $\mu = 1$ et on définit

$$\mu - 1 = \frac{p'\partial b/\partial \alpha - p'\partial a/\partial \alpha}{p'\partial a/\partial \alpha}, \tag{2.4}$$

un ratio qui mesure la profitabilité de la production.

Hypothèse II

Considérons A et B et μ ; on admet :

a - l'additivité, c'est-à-dire $\quad p'(B - \mu A) \equiv 0$,

b - la symétrie, c'est-à-dire $\quad (B - \mu A) \equiv (B - \mu A)'$,

c - la positivité, c'est-à-dire $\quad \xi'(B - \mu A)\xi > 0$,

pour $\xi \neq \theta p$, $\theta \in R$ (scalaire) , $\mu \geq 1$. Dans ce qui précède, le symbole "≡" veut dire que la relation est vraie pour tous p , X et α dans le domaine. On remarque que a) et b) impliquent que $(B - \mu A)p \equiv 0$. Mais ceci n'implique pas l'homogénéité de degré zéro de B et A en (p , α) .

La signification générale de cette hypothèse est que le modèle (F1) est compatible avec l'existence de fonctions de production et les critères de choix du producteur comme la maximisation des profits, la maximisation d'output ou la minimisation des coûts.

Considérons le vecteur de production nette y défini par (1.1.3) dans la section 1, $y = b - a$. Si la composante de y est négative (positive), c'est un input (output). A partir de (F1) et de l'égalité (1.1.3) , on a :

$$dy = db - da = (B - A)dp + \left[\frac{\partial b}{\partial X} - \frac{\partial a}{\partial X}\right]dx + \left[\left[\frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha}\right](d\alpha - \quad 'dp)\right]. \quad \text{(F2)}$$

Ce modèle (F2) est le plus compatible avec les données de marchés puisque y est ce qui apparaît sur les marchés. Les modèles (F1) ou (F2), avec la caractérisation de leurs structures locales (hypothèse II), déterminent une forme structurelle générale. Cette forme structurelle est trop générale pour la pratique, d'où la nécessité d'introduire quelques restrictions pour qu'elle soit testable.

Avant d'y arriver, on va montrer comment les trois modèles de base néoclassiques sont inclus dans cette forme plus générale. Par la suite, on présentera un autre modèle fidèle aux modèles usuels qui est, en même temps, testable en pratique.

3. Les modèles de base du comportement du producteur

3.1 Problème de maximisation des profits

Supposons que l'environnement du producteur est tel que X et α ont des effets identiques sur les outputs et les inputs, c'est-à-dire $\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial b}{\partial X} = \frac{\partial a}{\partial X}$; à partir de (2.3) , on remarque que $\mu = 1$.

Proposition I

Sous les hypothèses I et II et si $\frac{\partial b}{\partial \alpha} = \frac{\partial a}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial b}{\partial X} = \frac{\partial a}{\partial X}$, la forme (F2) devient le système complet différentiel néoclassique d'offre net suivant :

$$\left.\begin{array}{l} dy = Ydp \\ Y = Y' \;\;, Yp = 0 \,, \xi' Y \xi > 0 \text{ pour tout } \xi \neq \theta p \,, \theta \in R \end{array}\right\} \text{(F3)} \,,$$

où $Y = B - A$.

Cette forme (F3) résulte de la maximisation des profits p'y sous la contrainte de la fonction de production F(y) = 0. "L'exposition classique de ce modèle est dans Malinvaud (1972) ou Nadiri (1982)" (voir aussi l'Annexe 1).

Le problème du producteur se caractérise par des biens qui peuvent servir d'input et/ou d'output; l'inefficacité technique est non permise, les prix des inputs sont les mêmes que ceux des outputs; les prix sont les seules variables exogènes et les outputs nets sont les variables endogènes. Il est rarement utilisé en pratique à cause de ses hypothèses restrictives, mais il demeure intéressant dans les modèles d'équilibre général.

3.2 Problème de maximisation d'output

Supposons que l'environnement du producteur est tel que le signal X n'a d'effet ni sur les outputs ni sur les inputs, c'est-à-dire que : $\frac{\partial b}{\partial X} = \frac{\partial a}{\partial X} = 0$. On suppose, de plus, que $B \equiv 0$ sous l'hypothèse, par exemple, de stricte complémentarité des outputs (Afriat (1972)) et que le signal α est tel que $p'a \equiv \alpha$.

Proposition II

Sous les hypothèses (I) et (II), et si $\frac{\partial b}{\partial X} = \frac{\partial a}{\partial X} = 0$, $B \equiv 0$, $\mu \geq 1$ et $\alpha \equiv p'a$, la forme (F2) devient le système complet de demande de facteurs suivant

$$\left.\begin{array}{l} da = Adp + \frac{\partial a}{\partial \alpha} p'da \\ A \equiv A' \;\;, Ap \equiv 0 \,, p'\frac{\partial a}{\partial X} \equiv 1 \,, \xi' A \xi < 0 \text{ pour tout } \xi \neq \theta p \,, \theta \in R \end{array}\right\} \text{(F4)} \,.$$

La démonstration est en Annexe 2.

Corollaire

(I2.1) La première égalité, dans l'Annexe 2, implique que

$$p'db = \mu\, p'da \quad (3.1)\,,$$

d'où la forme (F4) peut s'écrire :

$$\left.\begin{array}{l} da \;=\; Adp + \dfrac{1}{\mu}\,\dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\,p'db \;=\; Adp + kp'db \\ A \equiv A'\;,\; Ap \equiv 0\;,\; p'k = \dfrac{1}{\mu}\;,\; \xi'\,A\,\xi < 0 \text{ pour tout } \xi \neq \theta p\;,\; \theta \in R \end{array}\right\} \text{(F4)}$$

On remarque que :

- la forme (F4) est le résultat du problème de maximisation des recettes p'b sous la contrainte de fonction de production f(b, -a) = 0 , avec un coût donné $p'a = \alpha$ et où la stricte complémentarité des outpus, $B \equiv 0$, est supposée. Le problème est, en quelque sorte, un cas particulier du problème général usuel de maximisation des outputs où b est un scalaire. Ces problèmes permettent l'inefficacité technique, mais ils sont difficilement applicables à cause des hypothèses restrictives de stricte complémentarité des outputs ou de l'existence d'un seul output;

- si on définit μ comme étant le multiplicateur associé à la contrainte de coût $p'a = \alpha$, quand cette contrainte est non contraignante, $\mu = 1$ et $F_b = -Fa$. L'inefficacité technique est donc impossible et ce problème en devient un de maximisation des profits;

- dans la forme (F'4), les recettes remplacent les coûts de dépenses de production comme variables explicatives. Ainsi, la profitabilité μ devient mesurable et l'output devient une variable explicative.

3.3 Problème de minimisation des coûts

Dans ce problème, on partitionne les variables comme suit :

soit donc $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$ $b' = (b'_1 , b'_2)$ $a' = (a'_1 , a'_2)$.

La forme (F2) s'écrit comme suit :

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}-A_{11} & B_{12}-A_{12} \\ B_{21}-A_{21} & B_{22}-A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ dp_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial X_1} - \frac{\partial a_1}{\partial X_1} & \frac{\partial b_1}{\partial X_2} - \frac{\partial a_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial b_2}{\partial X_1} - \frac{\partial a_2}{\partial X_1} & \frac{\partial b_2}{\partial X_2} - \frac{\partial a_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \frac{\partial b_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial b_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix} (d\alpha - a'dp) .$$

On suppose que l'environnement économique du producteur est tel que $\frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0$, c'est-à-dire que l'effet du signal α sur l'output et son effet sur l'input sont identiques - donc, $\mu = 1$.

On suppose aussi que $\begin{cases} B_{11} - A_{11} \equiv 0 \\ B_{12} - A_{12} \equiv 0 ; \\ B_{21} - A_{21} \equiv 0 \end{cases}$

de plus, l'output b ne dépend pas du prix, c'est-à-dire $B_{22} \equiv 0$ et, enfin,

$$\frac{\partial b}{\partial X_1} - \frac{\partial a}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -\frac{\partial a_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} ; \; .$$

<u>Proposition III</u>

Sous les hypothèses I, II et si $\frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0$, $B_{22} \equiv 0$,

$$B_{11} - A_{11} \equiv 0 , B_{12} - A_{12} \equiv 0 , B_{21} - A_{21} \equiv 0 , \frac{\partial b}{\partial X_1} - \frac{\partial a}{\partial X_1} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -\frac{\partial a_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} .$$

La forme (F2) s'écrit sous la forme du système complet de demande de facteur suivant :

$$\left. \begin{array}{l} da_2 = A_{22}dp_2 + \frac{\partial a_2}{\partial X_1} dX_1 \\ p'_2A_{22} \equiv 0 \; , \; A_{22} \equiv A'_{22} \; , \; \xi'_2 A_{22} \xi_2 < 0 \text{ pour tout } \xi_2 \neq \theta p_2 \, , \, \theta \in R \end{array} \right\} (F5) .$$

La démonstration est dans l'Annexe 3.

On remarque que :

- la forme (F5) découle aussi du problème de minimisation des coûts p_2a_2 sous la contrainte de la fonction $F(b_1 , -a_2) = 0$ et d'un niveau exogène d'output $b_1 = X_1$ (d'où l'appellation de système conditonnel de demande de facteurs);

- cette forme permet la définition et la caractérisation de la fonction de coût $p_2a_2^*(p_2 , X_1)$;

- dans ce problème, les outputs ne peuvent pas servir en même temps d'inputs et vice versa;

- les inputs sont des variables endogènes et ne dépendent pas des prix des outputs; les outputs sont exogènes.

4. Construction de modèles plus réalistes

On considère la partition de la sous-section précédente de nos variables y, a, b, p et X. Dans cette section,on suppose le producteur dans un environnement tel que l'effet du signal α sur les outputs est identique à l'effet sur les inputs, c'est-à-dire $\frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} = 0$ et donc $\mu = 1$. On suppose que les outputs et les inputs dépendent du signal X de la façon suivante :

$$\frac{\partial b}{\partial X} - \frac{\partial a}{\partial X} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -\frac{\partial a_2}{\partial X_1} & I_2 - \frac{\partial a_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}$$; finalement, on suppose que $B_{22} \equiv 0$,

c'est-à-dire que l'output b ne dépend pas du prix et $\begin{cases} B_{11} - A_{11} = 0 \\ B_{12} - A_{12} = 0 \\ B_{21} - A_{21} = 0 \end{cases}$.

<u>Proposition IV</u>

Sous les hypothèses sus-mentionnées, la forme (F2) devient le système complet (F6) suivant :

$$\left.\begin{array}{l} da_2 = A_{22}dp_2 + \frac{\partial a_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial a_2}{\partial X_2} dX_2 \\ p_2'A_{22} = 0 \ , \ A_{22} \equiv A_{22}' \ , \ \xi_2' \ A_{22} \ \xi_2 < 0 \text{ pour tout } \xi_2 \neq \theta p_2 \ , \ \theta \in R \end{array}\right\} \text{(F6)} .$$

La démonstration de cette proposition est dans l'Annexe 4. On remarque que :

- le modèle (F6) est le résultat du problème de maximisation des profit p'y sous les contraintes de la fonction de production F(b , -a) = 0, d'un niveau donné des outputs pour les biens 2 et d'un niveau donné d'outputs nets pour les biens 1. Alors, l'augmentation de la demande dans le marché des biens 1 peut être satisfaite soit par une augmentation dans les outputs, soit par une diminution dans les inputs (vu que le problème permet aux biens 1 de servir comme outputs et/ou comme inputs). La démonstration se trouve en Annexe 5;

- ce problème est réaliste, car il permet l'inefficience technique et utilise des niveaux d'inputs et d'outputs nets bien déterminés. On peut dire, aussi, que les formes (F6) sont des systèmes conditionnels complets et généraux de demande des facteurs.

5. La structure temporaire

Du système (F6), on peut déduire le modèle :

$$a_2 = a_2^* \, (p_2 \, , X_1 \, , X_2) \, . \tag{5.1}$$

Pour spécifier le modèle dans une structure temporaire, on donne en premier lieu les notations suivantes :

$$a_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{a_2} \\ a_{2t} \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{p_2} \\ p_{2t} \\ \tilde{p}_2 \end{bmatrix} \quad X_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X_1} \\ X_{1t} \\ \tilde{X}_1 \end{bmatrix} \quad \text{et } X_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{X_2} \\ X_{2t} \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix} ,$$

où t indique des variables courantes, $\tilde{o}$ indique des variables futures et $\underset{\sim}{o}$ indique des variables passées. Soit γ un facteur d'escompte : les demandes de facteur dans les périodes futures $\tilde{a}_2$ peuvent être agrégées en une seule variable en faisant la somme $\tilde{p}_2'\tilde{a}_2$.

Ainsi, avec le changement des variables explicatives dans la première remarque précédente, on a :

$$\left.\begin{array}{l} a_{2t} = a^*_{2t}\,(p_{2t}\,, \gamma\;\;, X_{1t}\;\;, X_{2t}\;\;, \sigma) \\ \tilde{c} = \tilde{c}^*\;(p_{2t}\;, \gamma, X_{1t}\;\;, X_{2t}\;\;, \sigma) \end{array}\right\}, \qquad (5.2)$$

où σ représente des variables anticipées et retardées et $\tilde{c}$ est la demande d'actif financier.

Nous supposons que $\tilde{c}$ est l'actif financier qui permet à l'entreprise de planifier ses inputs futurs et qu'il y a un marché financier où le producteur est capable de vendre ou d'acheter cet actif.

$\gamma\tilde{c}$ est le coût au temps t de $\tilde{c}$ livrable en t + 1. Pour s'assurer que l'agent économique fait toujours en sorte d'améliorer ses revenus, $\tilde{p}'\tilde{y}$ - $\tilde{c}$ = $\tilde{D}$ représente sa contrainte financière future - où $\tilde{p}'\tilde{y}$ est le profit anticipé, $\tilde{D}$ est exogène (par exemple, ce sont les dividendes anticipées) et donc maximiser p'y ne contredit pas la maximisation de $p_t y_t$ + $\gamma\tilde{c} + \gamma\tilde{D}$.

La fonction de production F(b , - a) = F($\underset{\sim}{b}$, b_t , $\tilde{b}$, -$\underset{\sim}{a}$, -a_t , -$\tilde{a}$) de la période t où $\underset{\sim}{b} = [b_0\;, b_1,...,b_{t-1}]$ et $\underset{\sim}{a} = [a_0\;, a_1,...,a_{t-1}]$ sont des valeurs historiques.

$\tilde{p}'\tilde{y}$ - $\tilde{c}$ = $\tilde{D}$ implique que $\tilde{p}_1\tilde{y}_1 + \tilde{p}_2\tilde{b}_2 - \tilde{p}_2\tilde{a}_2 - \tilde{D} = \tilde{c}$. De même que $\tilde{p}_2\tilde{a}_2$ peut s'exprimer en fonction des variables exogènes, $\tilde{c}$ peut s'exprimer aussi en fonction des variables exogènes.

<u>Proposition V</u>

Dans une structure temporaire, la forme (F6) devient

$$\left.\begin{array}{l} d\hat{a} \;=\; \hat{A}\,d\hat{p} \;+\; \dfrac{\partial\hat{a}}{\partial X}\,dX + M d\sigma \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\;\;,\;\hat{A}\;\hat{p} = 0\;\;,\;\xi'\;\;\hat{A}\,\xi < 0 \text{ pour tout } \xi \neq \theta\hat{p}\;,\;\theta \in R \end{array}\right\} (F7).$$

où $\hat{a} = \begin{bmatrix} a_{2t} \\ \tilde{c} \end{bmatrix}$, $\hat{p} = \begin{bmatrix} p_{2t} \\ \gamma \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix}$.

(F7) est la différentielle totale de (5.2) et peut se déduire de (F6). On remarque que :

- la propriété d'homogénéité $\hat{A}\,\hat{p} = 0$ est à interpréter par rapport aux prix des inputs et aussi par rapport au facteur d'escompte γ;

- (F7) peut s'écrire aussi sous la forme (F7') après l'addition et la soustraction de $\hat{k}\,\hat{\pi}'dX$ et avec $\hat{\pi}'dX = -p'da$: égalité des conditions du premier ordre du problème du producteur équivalent.

$$\left.\begin{array}{l} d\hat{a} = \hat{A}\,d\hat{p} + \left[\dfrac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{k}\,\hat{\pi}' \right] dX + \hat{k}\,\hat{p}'d\hat{a} + Md\sigma \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \ ,\ \hat{A}\,\hat{p} = 0 \ ,\ \xi'\,\hat{A}\,\xi < 0 \text{ pour tout } \xi \neq \theta\hat{p} \ ,\ \theta \in R \\ \hat{p}'\left[\dfrac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{k}\,\hat{\pi}' \right] = 0 \ ,\ \hat{p}'\hat{k} = 1 \end{array}\right\} \text{(F7')} .$$

Dans cette forme structurelle, la demande des facteurs physiques et financiers dépend des prix des inputs, du facteur d'escompte (prix de l'actif financier), de quelques outputs et outputs nets, du niveau de l'ensemble des dépenses réelles des facteurs physiques et financiers et du niveau de quelques variables anticipées et retardées.

6. Paramétrisation du système (F7) et hypothèses stochastiques

Le but de cette section est de donner aux système structurels (F7) et (F7') des formes estimables et testables. Pour l'estimation du système complet de demande des facteurs de production physiques et financiers, on a agrégé le modèle à l'ensemble des producteurs afin d'obtenir la compatibilité avec les séries chronologiques dont on dispose. La méthode suivie est celle décrite par Barten (1977) dans les systèmes de demande de biens de consommation et aussi par Bronsard et Salvas-Bronsard (1984).

Ce problème de décision est alors résolu pour tout le secteur manufacturier canadien et, ainsi, la production intermédiaire est disparue.

Le vecteur X_1 des biens 1 contient la valeur des outputs, les biens 2 sont les inputs. Le vecteur a_2 se décompose en constructions non résidentielles, machinerie et équipement, services de travail, énergies consommées par les manufactures et les prêts nets (qui mesurent les variations de demande d'actif financier à chaque période). Le vecteur $\hat{a}$ contient donc les valeurs en dollars constants des inputs. Le vecteur X est le vecteur des valeurs des livraisons de produits fabriqués par l'activité manufacturière (en dollars constants), la matrice $\partial a / \partial X$ mesure donc l'effet de report. L'anticipation considérée dans ce mémoire est une fonction naïve du passé de sorte que les niveaux α anticipés sont remplacés par des variables exogènes retardées d'une période. Ensuite, il s'agit de paramétriser le modèle à la manière de Rotterdam tel que développé par Barten (1967; 1977), Savals-Bronsard-Leblanc et Bronsard (1977), Barnett (1979), Theil (1980) et Bronsard, Salvas-Bronsard (1984; 1986; 1988).

Soit ι un vecteur formé par des uns, P et P^{-1} sont des matrices diagonales telles que $P\iota = \hat{p}$ et on a $d \log \hat{p} = P^{-1} d\hat{p}$.

Quand le système (F7') est multipliée par P, on a :

$$\begin{aligned} Pd\hat{a} &= P\hat{A}\, d\hat{p} + P\left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} dX + \hat{k}\,\hat{\pi}'\right] dX + P\,\hat{k}\,\hat{P}'d\hat{a} + PMd\sigma \\ &= P\hat{A}\, P\, P^{-1}\, d\hat{p} + P\left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{k}\,\hat{\pi}'\right] P_x^{-1} P_x\, dX + P\,\hat{k}\,\hat{P}'d\hat{a} + PMd\sigma \\ &= P\hat{A}\, P\, d \log\hat{p} + P\left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{k}\,\hat{\pi}'\right] P_x^{-1} P_x\, dX + P\,\hat{k}\,\hat{P}'d\hat{a} + PMd\sigma . \end{aligned}$$

aussi $d \log \hat{P}_F$, $P_0\, dx$, $d\sigma$ et $P'd\hat{a}$ sont les variables exogènes au lieu de dP_F , dx , $d\sigma$ et $P'd\hat{a}$. Il est à noter que cette transformation, appelée paramétrisation, conserve la symétrie, l'homogénéité et la négativité. Par la suite, la forme différentielle est remplacée par des différences finies.

Le P multiplié par $d\hat{a}$ et le P multiplié par dX sont des prix pondérés $\left[P_t - P_{t-1}\right] / 2 = P$ et $\left[P_t - P_{t-1}\right] / 2 = P$ pour tenir compte des deux périodes conformes avec les différences finies $\Delta\hat{a} = \hat{a}_t - \hat{a}_{t-1}$ et $\Delta X = X_t - X_{t-1}$.

$$(P\,\Delta\hat{a}) = \hat{A}_{11}\,(\Delta \log \hat{p}) + B\,P^{-1}\,\Delta X + C\,\Delta\sigma + D\,\hat{P}'\,\Delta\hat{a}\,,$$

où $A_{11} = P_F\ AP_F$ représente la transformation de la matrice de Slutsky. B est une transformation du vecteur des effets de reports, D est un vecteur de transformation du vecteur des effets de richesse et C une matrice des coefficients contraints aux variables retardées représentant les anticipations (vecteur σ). Finalement, un vecteur de constantes et un vecteur de perturbations aléatoires sont ajoutés au système quand les variables explicatives sont supposées indépendantes de la distribution aléatoire. Le système peut être estimé itérativement par moindres carrés généralisés. Les propriétés théoriques du modèle peuvent être testées par deux tests statistiques : critère de Wald et test du rapport de vraisemblance.

7. La forme translog

La forme (F7) découle de la fonction $\hat{a} = \hat{a}^*\,(\hat{p}, X, \sigma, c)$, (7.1)

dans laquelle les inputs $\hat{a}$ dépendent des prix $\hat{p}$, des signaux quantitatifs de la demande des inputs (par exemple, les outputs X), des anticipations σ et de la valeur globale des inputs $c = \hat{p}'\hat{a}$. Ces fonctions peuvent encore s'écrire sous la forme de parts :

$$\frac{\hat{a}}{c} = \frac{\hat{a}^*}{c}\,(\hat{p}, X, \sigma)\,. \tag{7.2}$$

On pourrait vouloir estimer directement la fonction (7.1) ou (7.2), au lieu d'estimer les formes différentielles.

Dans ce cas se pose le problème de la forme à donner aux fonctions. Une forme souvent utilisée dans la littérature (pour une application récente, voir W.E. Diewert et T.J. Wales (1987)) est la forme dite translog. Cette forme a l'avantage d'être flexible, i.e. elle n'impose pas, a priori, des restrictions au problème de départ. Les fonctions (7.2) s'écrivent :

$$S_i\,(p, X, t) = a_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \ln p_j + a_{ix} \ln X + a_{it}.t \qquad i=1,...,(N-1)\,. \tag{7.3}$$

où N est le nombre de facteurs de production et $S_i = \dfrac{p_i a_i}{c}$ et la fonction c (= $\sum p_i a_i$) s'écrit :

$$\ln c(p, X, t) = a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \ln p_i + a_x \ln X + a_t .t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \ln p_i \ln p_j$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} a_{ix} \ln p_i \ln X + \sum_{i=1}^{N} a_{it} .t \ln p_i + \frac{1}{2} a_{xx} \ln X \ln X + a_{xt} .t. \ln X + \frac{1}{2} a_{tt} . t^2$$

$$a_{ij} = a_{ji} \forall_{i,j} . \tag{7.4}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes, assurant que c'est linéaire homogène dans les prix, sont :

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \ , \ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{N} a_{ix} = 0 \ , \ \sum_{i=1}^{N} a_{it} = 0 . \tag{7.5}$$

La fonction c ,définie par (7.4) et (7.5), a N(N + 1) / 2 + (2N + 3) paramètres libres, juste nécessaire pour qu'elle soit flexible dans la classe des fonctions de coût linéaire homogènes dans les prix.

Pour que cette fonction soit homogène linéaire dans l'output, elle doit satisfaire les (N + 2) restrictions suivantes :

$$a_x = 1 \ ; \ a_{ix} = 0 \ ; \ a_{xx} = 0 \ , \ a_{xt} = 0 \qquad i = 1,\ldots,N-1 \tag{7.6}$$

et pour qu'elle soit linéaire homogène dans le temps, elle doit satisfaire les (n + 2) restrictions suivantes :

$$a_t = 0 \ ; \ a_{it} = 0 \ , \ a_{xt} = 0 \ , \ a_{tt} = 0 . \tag{7.7}$$

Enfin, si on veut tester si la technologie est sujette aux rendements d'échelle constants et non sensible au progrès technique, on vérifiera la validité des (2N + 3) restrictions linéaires suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} a_x = 1 \ , a_t = 0 \ , \ a_{ix} = 0 & i = 1,\ldots,N-1 \\ a_{it} = 0 & \\ a_{xx} = 0 , \ a_{xt} = 0 \ , \ a_{tt} = 0 & \end{array}\right\} , \tag{7.8}$$

Le système à estimer (F7") s'écrit :

$$\left.\begin{aligned}
\ln c(p, X, t) &= a_0 + \sum_{i=1}^{N} a_i \ln p_i + a_x \ln X + a_t .t \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \ln p_i \ln p_j + \sum_{i=1}^{N} a_{ix} \ln p_i \ln X \\
&+ \sum_{i=1}^{N} a_{it} .t. \ln p_i + \frac{1}{2} a_{xx} \ln X .\ln X + a_{xt} .t. \ln X \\
&+ \frac{1}{2} a_{tt} .t^2 \qquad\qquad a_{ij} = a_{ji} \ \forall_{i,j} \quad . \\
S_i(X, p, t) &= a_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \ln p_j + a_{ix} \ln X + a_{it} .t \\
& \qquad\qquad i = 1,...N - 1
\end{aligned}\right\} \text{(F7")}$$

Chapitre II

BASE ECONOMETRIQUE

1. Méthode d'estimation

Pour estimer les modèles (F7), (F7') et (F7"), on part d'un certain nombre d'hypothèses. Notons le modèle général

$$y = X\beta + \varepsilon \tag{2.1.1}$$

On suppose que

$$E(\varepsilon) = 0$$

$$V(\varepsilon) = \Omega = \Omega_c \otimes I \quad , \quad \Omega_{(n \times T)x(nT))} . \Omega_{c_{nxn}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{12} & \sigma_{1n} \\ \cdot & \\ \sigma_{n1} \quad \cdot & \cdot \quad \sigma_{nn} \end{bmatrix} \text{ où } \otimes$$

est le produit de Kroneker. Il n'y a ni autocorrélation ni hétéroscédasticité entre les erreurs aléatoires ε_t , par hypothèse. Le modèle (2.1.1) contient n équations pour T périodes. y est un vecteur de (n x T) x 1 des variables endogènes. X est une matrice de (n x T) x (K x n) des variables exogènes, où K est le nombre de variables explicatives (exogènes). ε est un vecteur de (n x T) x 1 des erreurs aléatoires et β est le vecteur de (K x 1) paramètres à estimer.

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & X_2 & 0 \\ 0 & & \ddots X_n \end{bmatrix} \text{ avec } X_1 = X_2 = \ldots = X_n .$$

L'estimation du modèle (2.1.1), sans contrainte par les moindres carrés généralisés de Zellner (1962), est équivalente aux moindre carrés ordinaires. En effet

$$X = I \otimes X_1$$

$$\hat{\beta}_G = (X'\Omega^{-1} X)^{-1} X^1 \Omega^{-1} y$$

$$\hat{\beta}_G = [(I \otimes X_1)' (\Omega_c^{-1} \otimes I)(I \otimes X_1)]^{-1} [(I \otimes X_1)' (\Omega_c^{-1} \otimes I)]y$$

$$= (\Omega_c^{-1} \otimes X_1'X_1)^{-1} (\Omega_c^{-1} * X_1')y$$

$$= [(I \otimes (X_1'X_1)^{-1} X_1^1]y , \tag{2.1.2}$$

estimateur par moindres carrés ordinaires pour chaque équation = $\hat{\beta}$ et

$$V(\hat{\beta}_G) = (X^1 \Omega^{-1} X)^{-1} = \Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1} . \qquad (2.1.3)$$

$\hat{\beta}_G$ est centré, non efficace mais convergent et asymptotiquement efficace et normal avec l'imposition des restrictions linéaires : la symétrie et l'homogénéité. L'estimation des modèles se fait par moindres carrés quasi-généralisés. En effet, si on écrit l'hypothèse nulle :

$$R\, \beta_G = r , \qquad (2.1.4)$$

l'estimateur des moindres carrés généralisés, sous contrainte linéaire, sera donc :

$$\tilde{\beta}_G = \hat{\beta}_G + [\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}]\, R' \left[R[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}]R'\right]^{-1} \cdot (r - R\hat{\beta}_G) \qquad (2.1.5)$$

avec la variance :

$$V(\tilde{\beta}_G) = V(\hat{\beta}_G) - [\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}]\, R' \left[R[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}]R'\right]^{-1} \cdot R[\Omega_c \otimes (X_1'X_1)^{-1}] . \qquad (2.1.6)$$

$\tilde{\beta}_G$ a les mêmes propriétés que $\hat{\beta}_G$, mais sachant que Ω_c est inconnue.

La méthode des moindres carrés quasi-généralisés est recommandée par Zellner; elle consiste à appliquer, dans une première étape, les moindres carrés ordinaires sur chacune des équations du système afin d'avoir un estimé de Ω_c noté par $\hat{\Omega}_c$.

$$\hat{\Omega}_c = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{11} & \hat{\omega}_{12} & \hat{\omega}_{1n} \\ \hat{\omega}_{n1} & \hat{\omega}_{n2} & \hat{\omega}_{nn} \end{bmatrix} . \qquad (2.1.7)$$

Cette première étape de Zellner permet donc d'obtenir

$$\hat{\omega}_{11} = \sum_t \frac{\hat{\varepsilon}_{1t}^{\,2}}{T} , \hat{\omega}_{12} = \sum_t \frac{\hat{\varepsilon}_{1t}\, \hat{\varepsilon}_{2t}}{T} ,...., \hat{\omega}_{1n} = \sum_t \frac{\hat{\varepsilon}_{nt}^{\,2}}{T} ...$$

où $$\hat{\varepsilon}_{1t} = y_{1t} - X'_{1t}\hat{\beta}_1$$

$$\hat{\varepsilon}_{2t} = y_{2t} - X'_{2t}\hat{\beta}_2 ,$$

et ainsi $\hat{\Omega}_c$.

La deuxième étape de Zellner consiste à remplacer Ω_c par $\hat{\Omega}_c$ dans (2.1.5) et, ainsi, obtenir l'estimateur des moindres carrés quasi-généralisés :

$$\tilde{\tilde{\beta}}_G = \hat{\beta}_G + [\hat{\Omega}_c \otimes (X'_1X_1)^{-1}]\, R' \left[R[\hat{\Omega}_c \otimes (X'_1X_1)^{-1}]R'\right]^{-1} (r - R\hat{\beta}_G) \qquad (2.1.8)$$

qui demeure centré sous hypothèse que la distribution est symétrique, mais demeure convergent et asymptotiquement effiace et normal. Sous contrainte, l'estimateur $\tilde{\tilde{\beta}}_G$ est différent de $\hat{\beta}$ par M.C.O..

L'étape suivante consiste à reculer les valeurs de $\hat{\varepsilon}_G$, soit

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_G = y - X\tilde{\tilde{\beta}}_G .$$

On obtient, alors, la matrice $\tilde{\tilde{\Omega}}_c$ qui rendra possible le calcul d'un autre estimateur et, ainsi de suite, les itérations se poursuivent jusqu'à la convergence vers l'estimateur maximum de vraisemblance $\overset{\infty}{\Omega}_c$, $\overset{\infty}{\beta}_G$, des estimateurs qui équivalent en propriétés avec l'estimateur de l'estimateur par moindres carrés quasi-généralisés, mais de valeurs différentes. La contrainte non linéaire de négativité de la matrice de Slutsky n'est pas imposée a priori, mais elle est vérifiable en partie par la négativité des termes diagonaux de la matrice et, en général, par les signes des déterminants des mineurs principaux.

L'additivité est automatiquement vérifiée du moment qu'il y a la somme des variables endogènes comme variable explicative ou que la variable endogène s'exprime sous forme de parts; de plus, elle est vérifée du moment que la matrice de Slutsky est homogène. En effet, si

$$KP = 0$$

et $$K' = K$$

donc $$P'K' = P'K = 0$$ C.Q.F.D.

La méthode des moindres carrés quasi-généralisés s'applique au modèle (F7), mais pour les modèles (F7') et (F7"), la méthode ne s'applique pas car la matrice de variance-covariance aléatoire est singulière. En effet :

$$(F7')\ \{\ d\hat{a} = \hat{K}\,\hat{P}'d\hat{a} + \hat{A}\,d\hat{p} + \left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{K}\,\hat{\pi}'\right]dX + Md\sigma + V_t\,.$$

On multiplie cette équation par $\hat{p}'$ des deux côtés :

$$\hat{P}'d\hat{a} = \hat{P}'\hat{K}\,\hat{P}'d\hat{a} + \hat{p}'\hat{A}\,dp + \hat{P}'\left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{K}\,\hat{\pi}'\right]dX + \hat{P}'M^1 d\sigma + \hat{P}'V_t^0\,.$$

Puisque ceci est vrai pour n'importe lequel vecteur dp_t, dX_t et $d\sigma_t$, on aura :

$$\begin{aligned} &\hat{P}'M = 0 \quad \hat{P}'V_t \equiv 0 \\ &\hat{P}'\hat{K} = 1 \quad \hat{P}'\hat{A} = 0 \\ &\hat{P}'\left[\frac{\partial \hat{a}}{\partial X} + \hat{k}\,\hat{\pi}'\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

De l'identité $\hat{p}'V_t = 0$, i.e. il y a combinaison linéaire entre les erreurs aléatoires et, donc, $E(V_t\,V_t') = \Omega_t$ est singulier.

$$\begin{aligned} \Omega_t\hat{P} &= \left[E[V_t\,V_t']\right]\hat{P} = E[V_t\,V_t'\,\hat{P}] \\ &= E[\hat{P}\,V_t\,V_t'] = 0 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

C.Q.F.D.

L'application des moindres carrés quasi-généralisés est impossible avec les n équations ~~d'où~~ on appliquera donc la solution utilisée par E.R. Berndt et N.E. Savin (1975) démontrée par Barten (1969) que l'estimateur du maximum de vraisemblance (trouvé itérativement par M.C.Q.G.) des n équations peut être trouvé à partir de l'estimation des (n - 1) équations seulement et, de plus, cet estimateur est invariant par rapport au choix de l'équation supprimée.

Le même argument est utilisé pour l'estimation du modèle (F7"), car on a n équations de parts de facteurs de production qui somment à 1 si l'on note par $y_t = \pi\,X_t + v_t$ le modèle à estimer $\iota' y_t = 1$ avec ι' vecteur d'unité. Ceci implique que $\iota'\pi = (1\ 000\ ..\ 0)$ et $\iota' v_t = 0$. La matrice Ω_t est donc singulière et la solution proposée est d'éliminer une fonction de part de facteur et ajouter la fonction de coût en translog - modèle utilisé par Diewert et Wales (1987).

2. Test d'hypothèse

Les tests proposés dans ce mémoire, et utilisés au seuil critique de 5%, sont :

(2.2.1) - Le test de Wald

$$(R\beta_G - r)' \left[R[\Omega_c^{-1} \otimes (X_1'X_1)^{-1}]R'\right]^{-1} (R\beta_G - r) \sim \chi_q^2 .$$

L'hypothèse nulle est $R\beta = r$, q est le nombre de restrictions linéaires (degrés de liberté), $\hat{\Omega}_c^{-1}$ remplace Ω_c^{-1} et il est bien de noter que le critère de Wald est valide asymptotiquement.

(2.2.2) - Le rapport de vraisemblance

ce test est asymptotiquement équivalent au critère de Wald; il s'agit de trouver le rapport des fonctions de vraisemblance contraintes et non contraintes.

$$\hat{L}_{NC} = (2\pi)^{-nT/2} \mid \Omega_c \mid^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_t \hat{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\varepsilon}_t\right\} \text{ non contrainte ,}$$
$$\tilde{L}_C = (2\pi)^{-nT/2} \mid \Omega_c \mid^{-T/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_t \tilde{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\varepsilon}_t\right\} \text{ contrainte .}$$

Le test se définit par $-2\log\lambda \sim \chi_q^2$ où $\lambda = \dfrac{\tilde{L}_C}{\hat{L}_{NC}}$,

$$\begin{aligned}
-2\log\lambda &= \sum_t \tilde{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \tilde{\varepsilon}_t - \sum_t \hat{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\varepsilon}_t \\
&= \mathrm{tr} \sum_t \tilde{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\varepsilon}_t - \mathrm{tr} \sum_t \hat{\varepsilon}'_t \Omega_c^{-1} \hat{\varepsilon}_t \\
&= \mathrm{tr} \sum_t \Omega_c^{-1} \tilde{\varepsilon}'_t \tilde{\varepsilon}_t - \mathrm{tr} \sum_t \Omega_c^{-1} \hat{\varepsilon}'_t \hat{\varepsilon}_t \\
&= \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1}\, T\, \tilde{\Omega}_c - \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1}\, T\, \hat{\Omega}_c \\
&= T\, \mathrm{tr}\, \Omega_c^{-1} (\tilde{\Omega}_c - \hat{\Omega}_c) \sim \chi_q^2 .
\end{aligned}$$

Un test qui a aussi des propriétés asymptotiques avec le remplacement de Ω_c^{-1} par $\hat{\Omega}_c^{-1}$. On note qu'il est possible d'avoir des résultats contradictoires par l'application de ces deux tests. Vu qu'aucun de ces deux tests n'est plus puissant uniformément que l'autre, selon des études faites par Lee (*Biometrica*, 1971), E.R. Berndt et N.E. Savin (*Econometrica*, 1977), on ne peut pas affirmer le résultat de l'un ou l'autre.

Par la suite, on présentera l'analyse des données exogènes et les résultats empiriques de l'estimation des modèles (F7), (F7') et (F7").

Chapitre III

ETUDE EMPIRIQUE

1. Analyse des données

L'examen de la série "L'indice de prix du travail", IPTRA, en fonction du temps, fait apparaître une tendance exponentielle ou linéaire; pour éliminer cette tendance, on utilisera le logarithme avec le modèle (F7") et la différence finie avec modèles (F7) et (F7'). Ceci demeure vrai avec les séries suivantes :

indice du prix du capital (IPCAP),
indice du prix du gros : IPG,
indice du prix de l'output : IPPRO,
valeur de production livrée : VPRO,
indice de prix de l'énergie : IPENE.

La série des rendements moyens en fonction du temps est décroissante, mais $1 / (\rho_t + 1)$, le facteur d'escompte, qui est le prix attribué à la variation des prêts nets, a une tendance linéaire ou approximativement exponentielle.

2. Résultats empiriques

Les modèles (F7), (F7') et (F7") sont testés à l'aide des séries chronologiques canadiennes (annuelles de 1961 à 1983) du secteur manufacturier. Ces trois modèles sont estimés sous et sans contraintes d'homogénéité et de symétrie (à l'exception de F7" qui assume la symétrie par construction). Le vecteur $\hat{a}$ comporte : le capital destiné à la construction non résidentielle, la machinerie et l'équipement, le nombre de travailleurs, les dépenses d'énergie et de combustible, les dépenses de fournitures et de matières (sauf l'énergie) et les prêts nets (qui mesurent les variations dans la demande d'actif financier par période).

Le vecteur p des prix comporte le prix associé aux prêts nets qui est le facteur d'escompte $\gamma_t = \frac{1}{(1 + \rho_t)}$ où ρ_t est le rendement moyen des obligations gouvernementales à long terme. Le prix de l'emploi est obtenu en divisant la valeur des traitements et des salaires globaux par l'emploi total; le prix d'achat du capital, qui est obtenu en divisant les dépenses en dollars courants par les dépenses en dollars constants, est remplacé par un coût d'usage qui tient compte de l'effet du taux d'intérêt de l'inflation et de la dépréciation de l'équipement. Ce coût d'usage est obtenu à l'aide de la formule suivante :

cu = PK = prix d'achat du capital x { taux de rendement + taux de dépréciation - taux d'accroissement des prix d'achat de capital }

où le taux de dépréciation est un pourcentage fixe d'environ 8% . Le taux d'accroissement des prix d'achat du capital est défini comme suit : $(PK_{t+1} - PK_t)/PK_t$. Le prix de matière et fourniture est le prix général de gros. Le prix de l'énergie est bien expliqué dans l'Annexe 0 (pour la description de toutes les données, voir cet Annexe). Le vecteur X comporte les livraisons de produits finis des industries manufacturières. Les résultats de l'estimation du modèle (F7) par moindres carrés ordinaires sont présentés dans le Tableau I.

La symétrie de la matrice de Slutsky et l'homogénéité, testées ensembles, sont rejetées par le test de χ^2 et acceptées par le test de Fisher. (58.719 , $\chi^2_{15(5\%)}$, valeur critiques = 24.336) ($F_{15,80(5\%)} = 1.82 > F_{m,n(T-K)} = .172098319 \simeq$ A H_0)[3] quant à la négativité de la matrice de Slutsky. Il apparaît, par l'analyse de la diagonale de la matrice de Slutsky, que le capital est substitut à lui-même, mais le coefficient n'est pas statistiquement significatif. L'examen des autres éléments significatifs de la matrice de Slutsky du Tableau I' nous permet de dire que le travail est substitut au capital et aux prêts nets; les matières et fournitures sont substituts à l'énergie, l'énergie est complément aux prêts nets.

Les effets de report, sur les matières et fournitures et sur le travail, sont significativement positifs. D'après la statistique R^2, obtenue par les moindres carrés ordinaires, sauf pour le capital, le modèle possède un bon pouvoir explicatif.

Les résultats de l'estimation du modèle (F7'), obtenus par moindres carrés ordinaires, se retrouvent dans le Tableau II et ceux obtenus par moindres carrés quasi-généralisés dans le Tableau II'. Par rapport à (F7), (F7') contient l'effet de richesse et l'effet des anticipations sur la demande des biens physiques et financiers.

---

[3] En imposant la symétrie et l'homogénéité de la matrice de Slutsky, m = le nombre de contraintes, est donc égale à 15 = 35 - 20 = m.
T = le nombre d'observations = 23
n = le nombre de facteurs physiques et financiers = 5.

La symétrie et l'homogénéité de la matrice de Slutsky sont acceptées par le test de Fisher et rejetées par le test de χ^2 (respectivement .094661138 et 25.298 pour les valeurs critiques de $F_{10,45(5\%)} \simeq 2.04$ et $\chi^2 \simeq 18.307$) .

De son côté, la négativité n'est pas clairement rejetée. Cependant, deux des cinq termes de la diagonale de Slutsky sont positifs, mais significativement nuls. Ici encore, le travail est substitut au capital et aux prêts nets. Les matières et fournitures sont substituts au travail et à l'énergie. L'effet de report est significativement positif pour toutes les demandes des facteurs physiques.

L'effet de richesse est significativement différent de zéro pour la demande du matériel, du travail et du capital. Le capital constitue la part budgétaire la plus importante, suivi par le travail, puis par l'énergie.

Il est intéressant de constater que plusieurs variables retardées (prises pour représenter les anticipations naïves) ont des effets significatifs sur la demande des facteurs, notamment sur l'augmentation passée du prix du travail. On trouve une diminution de la demande d'emploi présentement, de même qu'une augmentation du prix du capital, ce qui indique que le travail est complément au capital retardé.

L'augmentation du prix du capital antérieur implique une augmentation de la demande de capital. En se reférant aux statistique R^2 et DW (à partir de l'estimation par M.C.O.), le modèle en différences finies a un très bon pouvoir explicatif du secteur manufacturier canadien. L'hypothèse nulle de bruit blanc, contre l'autocorrélation des erreurs d'ordre 1, est rarement rejetée. Une autre méthode de paramétrisation est testée; c'est celle utilisée par Diewert et Wales (1987) et Berndt et Khaled (1979), par le biais d'une fonction de coût appelée translog, associée à des fonctions de parts de coût pour les différents facteurs de production. C'est le modèle (F7"), estimé par moindres carrés ordinaires et présenté au Tableau III.

Faute de degrés de liberté, nous n'avons pas testé nos hypothèses sur le modèle (F7") par le test Fisher, mais le test fait par le χ_2 nous ramène au rejet de l'hypothèse nulle d'homogénéité dans les prix. En effet : χ^2_{18} = 382.644 supérieur de valeur critique à 5% de confiance χ^2_{51} = 28.869 . On peut donc dire que le comportement du secteur manufacturier canadien ne peut pas être expliqué par le modèle translog.

CONCLUSION

Pour améliorer les résultats, surtout en ce qui concerne le facteur capital, il faudrait admettre que le capital est un facteur quasi-fixe, de sorte qu'il ne constituerait pas, à court terme, une variable endogène; il serait plutôt une variable explicative.

Par ailleurs, les résultats devraient être analysés par rapport à d'autres paramétrisations, en particulier les formes symétriques généralisées de McFadden et Barnett.

TABLEAU I (F7 par M.C.O.)

		Matrice de Slutsky					Effet de report	R^2	$\bar{R}^2$	DW
	construite	indice de prix de gros	taux de salaire	prix de l'énergie	coût d'usage de capital	taux d'escompte	quantité d'output			
matière et fourniture	-1161.58 (-.931)*	-8998.25 (-1.402)	19237.9 (.974)	1823.51 (.479)	-10800.4 (-1.268)	-11822.1 (-1.309)	.597981 (7.568)	.7550	.6631	1.3811
emplois	249.974 (.93)	1529.61 (1.106)	-9840.71 (-2.311)	530.098 (.645)	-623.261 (-.34)	-4439.38 (-2.251)	.125612 (7.376)	.8686	.8194	1.0177
énergie et combustible	-130.205 (-2.14)	-115.046 (-.367)	1698.112 (1.762)	-764.381 (-4.112)	1327.00 (3.195)	808.622 (1.811)	.0168560 (4.373)	.8342	.772	1.8701
capital	-395.997 (-.061)	-26625.8 (-.8)	-82572.5 (-.806)	9905.11 (.801)	12340.4 (.979)	-105438 (-2.221)	.580285 (1.416)	.5669	.4045	1.5853
prêts nets	554.630 (.418)	-1785.49 (-.261)	-13595.3 (-.647)	805.076 (.199)	10214.3 (1.127)	-6686.81 (-.687)	-.00722099 (-.086)	.3909	.1625	1.5749

* Les valeurs entre parenthèses sont les tests de students.

TABLEAU II (F'7 par M.C.O)

	C	DPM	DPL	DPE	DPC	DPθ	Effet de report PPRO	Effet de richesse SPDARMO
		Matrice de Slutsky						
PM	2305.21 (.441)*	1236.38 (.389)	-14317. (-1.111)	3095.76 (-.846)	-4511.17 (-.884)	-7575.14 (-1.252)	.4583 (5.284)	-.105157 (-3.197)
PL	2796.68 (2.598)	4276.08 (6.525)	-15450.6 (-5.587)	499.773 (1.447)	-349.637 (-.333)	-610.114 (-.1189)	.1488 (8.328)	-.0159301 (-2.351)
PE	227.936 (.4143)	-116.509 (-.372)	2143.94 (1.621)	-967.225 (-5.823)	561.944 (1.118)	618.094 (1.036)	.0323133 3.781	.00175412 .5141
PC	5209.13 (.426)	-7283.54 (.978)	38628.6 (1.229)	-7286.18 (-1.855)	13198.1 (1.099)	18383.6 (1.296)	-.337426 (-1.661)	1.02592 (13.31)
Pθ	-10539.	1887.09	-10405.	4652.88	-8829.28	-10816.4	-.301988	.0941171

TABLEAU II (F7 par M.C.O)
(suite)

	Effets des anticipations									
	IPGI	IPTRAI	IPENEI	IPCAPI	RMOI	VPROI	DW	R^2	$\bar{R}^2$	$F_{5\%}$
PM	181.853 (4.41)*	−274.129 (−.292)	18.559 (.772)	−1322.13 (−6.291)	−49383.4 (−1.735)	−.0847922 −.958	1.8153	.9733	.9348	25.2444
PL	22.444 (2.642)	−774.106 (−4.002)	10.5188 (2.125)	−257.872 (−5.957)	−9989.7 (−1.707)	.0659822 (3.617)	2.1163	.9869	.968	52.2089
PE	−2.71391 (−.668)	−124.652 (−1.348)	−1.30377 −.551	13.3406 (.644)	−402.328 (−.144)	.0170123 (1.95)	2.4748	.9263	.8199	8.70361
PC	−334.405 (−3.463)	1730.75 (.787)	−128.032 −2.275	2365.03 (4.806)	13922.3 (.209)	.111203 (.536)	2.2138	.9904	.9765	71.2949
Pθ	132.822	−557.858	100.958	−798.367	45753.2	−.109405	2.5558	.8784	.7027	4.99978

* $T_{5\%} = 1.833$

TABLEAU II' (F7' par M.C.Q.G.)

	C	DPM	DPL	DPE	DPC	DPO	Effet de report PPRO	Effet de richesse SPDARMO
		Matrice de Slutsky			$\hat{\iota}$ d'usure			
PM	3925.4 (1.92)*	−1967.06 (.389)	2918.68 (8.155)	315.921 (2.454)	−543.514 (−.281)	−724.027 (.724)	.569668 (7.521)	−.121203 (−4.042)
PL	1888.6 (3.156)	2918.68	−8029.0609	78.5809 (.410)	2163.07 (3.947)	2868.73 (6.831)	.166996 (9.073)	−.0164377 (−2.281)
PE	368.531 (1.338)	315.921	78.5809	−757.3629	238.43 (1.248)	124.431 (.931)	.027012 (3.321)	.00181761 (.610)
PC	−3390.86 (−.802)	−543.514	2163.07	298.43	−1314.809	543.177 (−.214)	−.669693 (−3.691)	1.09254 (15.277)
Pθ	−10539.	−724.027	2868.73	124.431	−543.477	−1725.957		

TABLEAU II' (F7' par M.C.Q.G.)
(suite)

	Effets des anticipations									
	IPGI	IPTRAI	IPENEI	IPCAPI	PRMOI	VPROI	DW	R^2	$\overline{R}^2$	$F_{5\%}$
PM	121.357	−563.148	−4.42588	−11.54155	−47074.1	.0346431	1.5843	.9633	.9649	
	(3.86)	(−.634)	(−.202)	(−6.888)	(−3.777)	(.435)				1.812
PL	1.0429	−735.67	6.16787	−170.467	−1727.	.0901363	2.1407	.9774	.9783	1.796
	(−.141)	(−3.452)	(1.15)	(−4.327)	(−.531)	(4.604)				
PE	−2.82305	−141.196	.366254	−7.62373	−1793.93	.0113339	2.0685	.9071	.9111	
	(−.902)	(−1.578)	(.152)	(−.475)	(−1.258)	(1.335)				1.782
PC	−168.957	−2525.87	−52.9034	1944.69	31430.6	−.226462	1.8594	.9254	.978	
	(−2.189)	(1.137)	(−.98)	(4.677)	(1.146)	(1.147)				1.771
PO										

* $T_{5\%} = 1.69$

TABLEAU III (F"7 par M.C.O.)

Translog sans contrainte d'homogénéité (F7")

	C	LK	LE	LL	LG	LP	LY	T	R^2	$\bar{R}^2$	DW
SK	.207951	-.0460092	.011843	.0280415	.0587019	-.0620191	-.0513328	-.000925112	-.469	-.4051	.7018
	(.726)	(-4.216)	(4.171)	(5.157)	(6.717)	(-5.384)	(-1.734)	(-.342)			
SE	.0911997	.011843	-.00397805	.018576	-.00594218	-.00563439	-.00633472	-.000496346	.9001	.9044	1.0033
	(1.91)		(-3.647)	(8.364)	(-2.139)	(2.469)	(-1.306)	(-.929)			
SL	1.00948	.0284415	.018576	.067782	-.035975	.0163542	-.0731447	-.00355322	.978	.979	1.1939
	(10.107)			(5.767)	(-4.224)	(3.103)	(-6.736)	(-2.913)			
SG	-.205299	.0587019	-.00594218	-.035975	-.0450291	.026818	.102888	-.00746512	.5718	.5904	.9488
	(-.691)				(-6.836)	(3.626)	(3.277)	(-2.555)			
SP	-.237869	-.0620191	-.00563439	.0163542	.026818	.0130859	.0246533	.00216377	.4827	.5052	.9228
	(-.813)					(1.939)	(.798)	(.265)			
LC	72.9246	.207951	.0911997	1.00948	-.205299	-.237869	-13.5295	1.23501	.9991	.9991	.829
	(7.043)						(-6.261)	(5.311)			

	LYY	LYT	T^2
LC	1.38722	-.117504	.00937089
	(6.112)	(-4.864)	(3.628)

BIBLIOGRAPHIE

Afriat, S.N. (1972), "The Case of the Vanishing Slutsky Matrix", *Journal of Economic Theory*, 5.

Barnett, W.A. (1979), "Theoretical Foundations for the Rotterdam Model", *Review of Economic Studies* 46, 109-129.

Barten, A.P. (1970), "Evidence on the Slutsky Conditions for Demand Equations", *European Economic Review*, 7.

----- (1977), "The Systems of Consumer Demand Function Approach : A Review", *Econometrica* 45, 23-51.

Berndt, E. et M.S. Khaled (1979), "Parametric Productivity Measurement and Choice among Flexible Functional Forms", *Journal of Political Economy* 27, 1220-1245.

Berndt, E.E. et N.E. Savin (1975), "Estimation and Hypothesis Testing in Singular Equation Systems with Autoregressive Disturbances", *Econometrica* 43, 937.

Bronsard, C. et L. Salvas-Bronsard (1980), "Sur les différentes formes structurelles engendrées par la théorie de la demande et leur utilisation en économétrie : système direct, réciproque, mixte et système avec rationnement quantitatif", *Annales de l'INSEE* 40, 3-31.

----- (1983), "L'équilibre temporaire du producteur", *Cahier 8242*, CRDE, Université de Montréal.

----- (1984), "On Price Exogeneity in Complete Demande Systems", *Journal of Econometrics* 24, 235-243.

Bronsard, C. et L. Salvas-Bronsard (1988), "A Skeleton Key to the Econometrics of the Producer's Behavior", *Cahier 8810*, CRDE, Université de Montréal.

Coën, R.M. and B.G. Hickman (1970), "Constrained Joint Estimation of Factor Demand and Productions, *Review of Economics and Statistics*, 52, 287-300.

Diewert, W.E. et T.J. Wales (1987), "Flexible Functional Forms and Global Curvature Conditions", *Econometrica* 55, 43-69.

Grandmont, J.M. (1983), *Money and Value : A Reconsideration of Classical and Neoclassical Monetary Theories*, Cambridge University Press.

Malinvaud, E. (1964), *Méthode statistique de l'économétrie*, Vol 16.

Nadiri, I. and S. Rosen (1969), "Interrelated Factor Demand Functions", *American Economic Review*, 59, 457-471.

----- (1972), *Lectures in Microeconomic Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Theil, H. (1971), *Principles of Econometrics*, North-Holland, Amsterdam.

Zellner, A. (1962), "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias", *Journal of the American Statistical Association* 57, 348-368.

ANNEXE 0

Description des données

Données canadiennes annuelles 1961-1983
des industries manufacturières

A : Sources

- VPRO : valeur des livraisons de produits fabriqués par l'activité manufacturière
- VMATF : valeur du coût des matières et fournitures utilisées
- VENE : valeur du coût du combustible et de l'électricité
- VTRA : valeurs des traitements et salaires
  cat.: Statistique Canada no 31201 Tableau 1
- VCAPCOU : dépenses d'investissement secteur non domiciliaire[5], ensemble des industries manufacturières en dollars courants
- VCAPCON : dépenses d'investissement secteur non domiciliaire, ensemble des industries manufacturières en dollars constants
  cat. : Statistique Canada no 13568 p. 7
- VPN : valeur des prêts nets "ventilation" des prêts[3] aux entreprises
  Revue Banque du Canada de 1961 à 1980 p. 10 colonne B1013
  de 1981 à 1983 p. 10, p. C8, colonne B321
- QTRA : nombre de salariés[6]
  cat.: Statistique Canada no 31201 Tableau 1
- IPPRO : indice de prix de vente de l'industrie manufacturière - tous les produits en moyenne annuelle base 1971 = 100
  cat.: Statistique Canada no 62011 Tableau 1
- RMO : rendement moyen annuel des obligations à long terme[4]
  Revue Banque du Canada colonne 478 et cat.: Statistique Canada no 11516F p. 471-480

- IPG : indice de prix de gros base 1971 = 100 [1]
  cat.: Statistique Canada no 62002
  de 1960 à 1969 Tableau 3 ; de 1969 à 1972 Tableau 5
  cat.: Statistique Canada no 62011 ; de 1973 à 1978 Tableau 2
  de 1978 à 1983 Tableau 4
- IPENE : indice de prix de l'énergie, base 1971 = 100 [2]
  cat.: Statistique Canada no 62011 de 1971 à 1983
  cat.: no 62002 de 1961 à 1971

B : REMARQUES

1) L'indice de prix de gros est l'indice associé aux matières et fournitures utilisées par les entreprises manufacturières canadiennes des années 1961 à 1978. Il est disponible sous la rubrique "*General whole sale indexe*" dans le cat. Statistique Canada no 62002 jusqu'en 1972 et dans le cat. no 62011 de 1972 à 1978 sur la base 1935-39 = 100. De 1978 à 1983, cet indice est remplacé par l'indice de prix de vente des matrices brutes dans le cat. no 62011 sur la base 1977 = 100. Toutes les données sont mises en première étape sur la même base 1935-39 = 100, puis toute la série est transformée sur la base 1971 = 100 par l'utilisation d'un facteur de raccordement = $\frac{100}{289.9}$.

2 L'indice de prix de l'énergie est constitué comme suit : pour les années 1961 à 1971, on dispose d'un indice de prix courant mensuel : *primary oil and gaz* (pétrole et gaz primaire) cat. no 62002 Tableau 1 et de 1971 à 1983, on a deux séries d'indices de prix de l'électricité, l'une au-dessus de 5 000 KW et l'autre au-dessous de 5 000 KW par des entreprises manufacturières, sur la base 1971 = 100, cat. no 62011 Tableau 9. Pour la première partie, on a calculé des indices annuels moyens, puis toutes les valeurs sont transmises à la base de 1971 = 100 en les multipliant par le facteur de raccordement = $\frac{100}{438.4}$. Pour la deuxième partie de cette série, les deux séries du cat. no 62011 nous ont donné un seul indice combiné de base 1971 = 100 , en calculant la moyenne pondérée de .27 pour la première série et de .73 pour la deuxième.

3) La série des valeurs des prêts nets est constituée de 1961 à 1980 du total des prêts du secteur industriel (Revue Banque du Canada, colonne B1013, p. 10), alors que de 1981 à 1983, on a pris la colonne B321 du Tableau C8 : prêts des entreprises privées, ensemble du secteur manufacturier.

4) Les rendements moyens des obligations sont disponibles de 1961 à 1971 dans le cat. Statistique Canada, no 11516 p. 471-480 et de 1978 à 1983 dans la Revue Banque du Canada, p. C8, colonne 478.

5) L'indice du prix du capital obtenu en divisant les dépenses d'investissement courantes par les dépenses d'investissement constantes.

6) Le prix de l'emploi est obtenu en divisant le coût des salaires et traitements par le nombre total des salariés.

ANNEXE 1

Le problème de décision du producteur est la maximisation du profit = py avec y = b - a , sujet à une fonction de production f(y) = 0. Le lagrangien peut être écrit $\mathscr{L}(p, y, \lambda) = py - \lambda f(y)$. Les conditions du premier ordre (C.P.O.) :

C.P.O.
(I)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = p - \lambda Fy = 0 \\ \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial \lambda} = - f(y) = 0 . \end{cases}$$

La jacobienne de ces conditions peut s'écrire comme suit :

$$F^{**} = \begin{bmatrix} -\lambda F_{yy} & -Fy \\ -Fy' & 0 \end{bmatrix} .$$

où F_{yy} est la matrice des dérivées secondes et Fy le vecteur des dérivées premières. Puisque la fonction de production f est, par hypothèse, deux fois continûment différentiable, strictement monotone et strictement quasi-convexe, la matrice F** est de rang maximum; ainsi, les fonctions :

$$y = y^*(p) \text{ et } \lambda = \lambda^*(p) \quad y^* \in c' \text{ et } \lambda^* \in c'$$

existent et sont continûment différentiables, leurs jacobiens se caractérisent par les relations suivantes :

$$F^{**}J = -G \tag{I.1}$$

où J est le vecteur de dérivées premières de y^* et λ^* par rapport à p. G est le vecteur de dérivées premières de (I) par rapport à p.

$$G = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} , J = \begin{bmatrix} \partial y/\partial p \\ \partial \lambda/\partial p \end{bmatrix} .$$

(I.1) peut s'écrire : $\begin{bmatrix} -\lambda F_{yy} & -Fy \\ -Fy' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial y/\partial p \\ \partial \lambda/\partial p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad -\lambda F_{yy} \frac{\partial y}{\partial p} - Fy \frac{\partial \lambda}{\partial p} = - I_n \tag{I.2}$$

$$-Fy' \frac{\partial y}{\partial p} = 0 \Rightarrow \boxed{\left[\frac{\partial y}{\partial p} \right]' Fy' = 0} \tag{I.3}$$

Si l'on prémultiplie (I.2) par $\left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]'$, on aura :

$$-\lambda \left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]' F_{yy} \frac{\partial y}{\partial p} - \left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]' Fy \frac{\partial \lambda}{\partial p} = -\left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]'$$

$$\Rightarrow \qquad -\lambda \left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]' F_{yy} \frac{\partial y}{\partial p} = -\left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]' . \qquad (I.4)$$

Or, par hypothèse, $\xi' F_{yy} \xi < 0 \;\; \forall \xi$ tel que

$$\xi' F_y = 0 \;\text{ et }\; \xi' \neq \theta p \, , \; \theta \in R \, ;$$

donc $$\left[\frac{\partial y}{\partial p}\right] < 0 \, .$$

F_{yy} est symétrique, donc $\left[\frac{\partial y}{\partial p}\right]$ l'est aussi.

C.Q.F.D.

ANNEXE 2

L'hypothèse $\alpha \equiv p'a \Rightarrow d\alpha = p'da + a'dp$, donc la première partie de (F1) peut s'écrire :

$$db = \frac{\partial b}{\partial \alpha} p'da \qquad \text{puisque } \frac{\partial b}{\partial X} = 0 \text{ et } B \equiv 0 . \tag{I.2.1}$$

Alors, la forme (F2) devient :

$$dy = -A\ dp + \left[\frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \right] p'da$$

$$dy = -A\ dp + db - \frac{\partial a}{\partial \alpha} p'da$$

et $\qquad da = A\ dp + \dfrac{\partial a}{\partial \alpha}\ p'da \quad (I.2.2)$

du fait que

$$dy = db - da$$
$$= -da$$

et, enfin, $\quad p'a = \alpha$ implique :

$$p'\frac{\partial a}{\partial \alpha} \equiv 1 \quad \text{car } p'A = 0 \text{ (si on prémultiplie (I.2) par p')}$$

$$p'\frac{\partial a}{\partial P} = -a' \quad \text{du fait que } p'A = 0 \Rightarrow p'\left[\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial a}{\partial \alpha} a' \right] = 0$$

$$p'\frac{\partial a}{\partial p} = -\ p'\frac{\partial a}{\partial \alpha} = a' = -a'$$

et $p'A \equiv 0$ puisque $p'\dfrac{\partial a}{\partial \alpha} \equiv 1$.

Les autres éléments de (F4) sont évidents.

ANNEXE 3

A partir des hypothèses de la Proposition III, (F2) peut s'écrire comme suit :

$$dy_1 = db_1 - da_1 = dX_1$$

$$dy_2 = db_2 - da_2 = -A_{22}\, dp_2 - \frac{\partial a_2}{\partial X_1} dX_1$$

d'où (F5).

ANNEXE 4

A partir de (F2) et des hypothèses de la Proposition IV, on aura :

$$dy_1 = db_1 - da_1 = dX_1$$

$$dy_2 = db_2 - da_2 = dX_2 - A_{22} - \frac{\partial a_2}{\partial X_1} dX_1 - \frac{\partial a_2}{\partial X_2} dX_2 \, ,$$

d'où (F6) $$da_2 = A_{22}\, dp_2 + \frac{\partial a_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial a_2}{\partial X_2} dX_2 \, .$$

ANNEXE 5

Le producteur maximise son profit : $p_1y_1 + p_2y_2$ sous les contraintes :

$$f(y_1 , b_2 - a_2) = 0$$
$$y_1 = X_1$$
$$b_2 = X_2 ,$$

($y_1 = X_1 = b_1 - a_1$ = constante : la satisfaction de la demande supplémentaire du bien y_1 se fait par l'augmentation de b_1 ou par la diminution de a_1). Le lagrangien peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = p_1y_1 + p_2y_2 &- \phi\, f(y_1 , b_2 , -a_2) \\ &- \lambda_1(y_1 - X_1) \\ &- \lambda_2(b_2 - X_2) ,\end{aligned}$$

puisque $y_2 = b_2 - a_2$ et $b_2 = X_2$ est exogène. $\mathscr{L}$ devient :

$$\mathscr{L} = -p_2a_2 - \phi\, f(X_1 , X_2 , -a_2)$$

les C.P.O :

$$\frac{\partial L}{\partial a_2} = -p_2 + \phi\, F_a = 0 \tag{I.5.1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -f(X_1 , X_2 , -a_2) = 0 \tag{I.5.2}$$

La jacobienne des conditions peut s'écrire :

$$F^{**} = \begin{bmatrix} -\phi\, F_{aa} & F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix} .$$

Puisque la fonction de production est, par hypothèse, deux fois continûment dérivable, strictement monotone et strictement quasi-convexe, la jacobienne est de rang maximal et les fonctions suivantes

$$a_2 = a_2^*(p_2 , X_2 , X_2) \quad a_2^* \in C'$$
$$\phi = \phi^*(p_2 , X_1 , X_2) \quad \phi^* \in C'$$

existent et sont continûment dérivables. Leurs jacobiennes se caractérisent par les relations suivantes :

$$F^{**}\, J = -G \ , \tag{I.5.3}$$

où J est la matrice de dérivées de a_2 et ϕ , par rapport à p_2 , X_1 et X_2 . G est la matrice des dérivées premières des conditions du premier ordre par rapport à p_2 , X_1 et X_2 .

$$G = \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -F_{x_1} & -F_{x_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\phi\, F_{aa} & F_a \\ F_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial a_2/\partial p_2 & \partial a_2/\partial X_1 & \partial a_2/\partial X_2 \\ \partial\phi/\partial p_2 & \partial\phi/\partial X_1 & \partial\phi/\partial X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & -F_{x_1} & -F_{x_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(I.5.3)}$$

duquel on conclut ce qui suit :

$$p_2 \left[\frac{\partial a_2}{\partial p_2} \right] = 0$$

$$\left[\frac{\partial a_2}{\partial p_2} \right] = \left[\frac{\partial a_2}{\partial p_2} \right]'$$

$$S_2' \left[\frac{\partial a_2}{\partial p_2} \right] S_2 < 0 \quad \text{pour tout } S_2 \neq \theta p_2 ,$$

$$p_2 \left[\frac{\partial a_2}{\partial X_1} \right] = -\phi\, F_{x_1} ,\ p_2 \left[\frac{\partial a_2}{\partial X_2} \right] = -\phi\, F_{x_2} .$$

TABLEAU DES DONNEES

	RMO	IPENE	IPG
1961	5.05000	14.5000	80.5000
1962	5.11000	14.5000	82.8000
1963	5.09000	14.9000	84.4000
1964	5.18000	18.4000	84.7000
1965	5.21000	22.7000	86.4000
1966	5.69000	26.3000	89.5000
1967	5.49000	42.0000	91.1000
1968	6.75000	49.8000	93.1000
1969	7.58000	58.4000	97.4000
1970	7.91000	79.4000	98.8000
1971	6.95000	100.000	100.000
1972	7.23000	101.700	107.000
1973	7.56000	105.600	129.000
1974	8.90000	111.900	159.100
1975	9.03000	125.100	169.600
1976	9.18000	143.500	176.800
1977	8.70000	171.000	193.000
1978	9.27000	189.600	210.500
1979	10.2100	210.300	247.900
1980	12.4800	233.900	283.800
1981	15.2200	253.900	338.200
1982	14.2500	286.500	366.000
1983	11.7900	306.800	385.400

	VPRO	VMATF	VENE
1961	23439.0	12579.8	516.409
1962	25790.1	13974.9	540.447
1963	28014.9	15337.5	564.397
1964	30856.1	16928.5	615.108
1965	33889.4	18622.2	675.641
1966	37303.5	20642.7	731.726
1967	38955.4	21371.8	759.780
1968	42061.6	23091.0	808.764
1969	45930.4	25383.5	860.525
1970	46380.9	25700.0	903.264
1971	50275.9	27661.4	1000.24
1972	56190.7	31137.9	1078.92
1973	66674.4	37600.5	1221.89
1974	82455.1	47499.8	1623.62
1975	88427.0	51177.9	1805.40
1976	98280.8	56982.4	2325.26
1977	108882.	63015.4	2790.35
1978	128889.	74920.0	3397.38
1979	152133.	90270.3	3879.62
1980	168014.	99869.8	4448.86
1981	191030.	114283.	5468.51
1982	187710.	111834.	6020.31
1983	203314.	119759.	6637.06

TABLEAU DES DONNEES (suite)

	VTRA	VCAPCOU	VCAPCON
1961	5701.65	1084.30	1475.00
1962	6096.17	1269.00	1688.60
1963	6495.29	1356.90	1738.90
1964	7080.94	1830.10	2223.50
1965	7822.93	2339.30	2697.20
1966	8695.89	2913.20	3244.50
1967	9254.19	2532.90	2848.20
1968	9905.50	2198.20	2503.40
1969	10848.3	2599.80	2838.80
1970	11363.7	3222.90	3375.90
1971	12129.9	2993.90	2993.90
1972	13414.6	2948.20	2850.90
1973	15220.0	3667.90	3357.50
1974	17557.0	4950.00	3932.80
1975	19156.7	5521.40	3827.30
1976	21799.7	5465.30	3531.40
1977	23595.2	6080.70	3576.50
1978	26572.0	6178.20	3289.40
1979	30112.3	7443.10	3550.20
1980	33133.1	9747.60	4176.90
1981	37106.2	12739.2	4842.00
1982	37624.7	11123.6	3889.70
1983	39609.1	9103.50	2905.00

	VPN	QTRA	IPPRO
1961	1369.00	1352.61	82.4000
1962	1471.00	1389.52	83.3000
1963	1511.00	1425.44	84.4000
1964	1764.00	1491.26	85.1000
1965	2064.00	1570.30	86.2000
1966	2554.00	1646.02	88.7000
1967	3000.00	1652.83	90.4000
1968	3077.00	1642.35	92.3000
1969	3641.00	1675.33	95.8000
1970	3812.00	1637.00	98.1000
1971	4402.00	1628.40	100.000
1972	5264.00	1676.13	104.400
1973	6523.00	1751.07	116.100
1974	7707.00	1785.98	138.100
1975	8533.00	1741.16	153.700
1976	9791.00	1743.05	161.600
1977	10240.0	1704.58	174.300
1978	10812.0	1790.62	190.400
1979	14485.0	1855.39	217.900
1980	19560.0	1850.44	247.200
1981	16065.0	1853.97	272.400
1982	13306.0	1702.30	288.800
1983	11834.0	1671.14	298.800

REMERCIEMENT

Je remercie vivement mon directeur de recherche, Madame Lise Salvas, qui m'a permis d'élaborer mon mémoire dans les conditions les plus favorables.

J'adresse, également, l'expression de toute ma gratitude à mes professeurs et aux membres du jury.

Neifar Malika.