UNIVERSITE DE MONTREAL

MODELE DYNAMIQUE D'EQUILIBRE
GENERAL TEMPORAIRE

PAR

PIERRE OUELLETTE

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

THESE PRESENTEE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)

MAI 1986

One of the advantages of defining dynamics as the study of the process of change is that it does something to rehabilitate statics ... There is, in the first place, what we may call single-period theory ... and secondly what we may call continuation theory ...

Hicks (1956)

REMERCIEMENTS

Une thèse de doctorat se veut la dernière étape d'une vie d'étudiant. De ce fait, plusieurs professeurs devraient être remerciés nommément étant donné leur influence sur ma formation. Cependant la liste étant trop longue je devrai me restreindre et ne remercier que les personnes directement impliquées dans cette thèse. Deux professeurs, particulièrement, sont l'objet de ma gratitude. En tout premier lieu, il y a M. Camille Bronsard, le directeur de cette thèse. J'ai eu un plaisir immense à le côtoyer et nos discussions demeureront pour moi un souvenir durable. J'ai pu bénéficier en tout temps de ses commentaires et de son ouverture d'esprit, de sorte que le résultat final de cette thèse s'en trouve grandement amélioré. M. Pierre Lasserre a eu aussi une influence marquante par la qualité de son enseignement et de ses remarques. Ces deux professeurs ont beaucoup contribué à faire de mes études doctorales l'aventure intellectuelle que j'en attendais. Je remercie également les autres membres de mon comité de thèse, MM. Marcel Dagenais et Gérard Gaudet. Cette thèse a bénéficié d'une bourse d'étude du fond F.C.A.R. du Ministère de l'Education du Québec et a été dactylographiée par Suzanne Larouche-Sidoti avec compétence et diligence.

Finalement je voudrais remercier mon épouse, Marie, qui a su si bien supporter les externalités négatives causées par cette recherche. Qu'elle trouve ici l'expression de mon affection.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

Cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux portant sur les fondements microéconomiques de la macroéconomie. Ces travaux ont pour but d'analyser le comportement de l'ensemble de l'économie à partir d'une description détaillée des comportements individuels et de règles d'agrégation appropriées. L'apport de cette thèse se situe dans l'incorporation d'un modèle de comportement du producteur en contexte temporaire. L'originalité de ce modèle se retrouve dans l'introduction, premièrement d'un actif financier, deuxièmement d'une politique de dividende, et troisièmement d'une contrainte de financement. Après avoir construit un modèle de comportement du consommateur en contexte temporaire conforme à celui du producteur, les propriétés globales de l'économie sont analysées. Il est démontré qu'un équilibre concurrentiel existe vérifiant ainsi la cohérence du modèle. Puis la relation entre l'équilibre et l'optimum de Pareto est clarifiée. Finalement la dynamique de l'économie est étudiée. Le résultat principal est que le comportement optimisateur des agents ne peut restreindre le comportement dynamique de l'économie.

INTRODUCTION

La théorie de l'équilibre général a de tout temps été au centre des préoccupations des économistes. Arrow et Hahn (1971) et Grandmont (1977) présentent deux historiques de cette théorie, chacun portant sur des périodes différentes. Arrow et Hahn décrivent les principales étapes de la recherche depuis Adam Smith (1776) jusqu'à Debreu (1962). Cet historique permet de voir comment s'est développée une idée d'Adam Smith, simple mais révolutionnaire, soit que les décisions prises sur une base purement individuelle ne menaient pas (nécessairement) au chaos mais bien à un état de cohérence sociale pouvant présenter des propriétés désirables. En fait durant toute cette période, cette idée n'a pas connu de modifications majeures, le progrès scientifique étant primordialement méthodologique. Avec l'introduction de l'analyse marginale et la formulation mathématique du problème dues à Walras, la recherche s'est orientée vers la vérification que cette théorie possédait sous certaines hypothèses les propriétés attendues soit qu'il existait un système de prix d'équilibre et que ce système de prix était stable, unique et d'un certain point de vue, socialement optimal. Le point culminant de cette recherche se retrouve dans Debreu (1959, 1962). L'axiomatisation de la théorie économique qu'il a introduit a poussé l'analyse formelle du système économique à un niveau inégalé à l'époque et constitue encore une référence de base pour quiconque oeuvre dans le domaine. A partir d'axiomes sur les préférences des agents et d'hypothèses de convexité, Debreu retrouve toutes les propriétés recherchées. Bien que remarquables au niveau méthodologique, les résultats de ce type d'étude peuvent être remis en question à cause des hypothèses qui sont formulées. Par exemple, implicitement, il y a une hypothèse quant à l'existence d'un système complet de marchés présents et futurs. A cause de cela, la théorie de l'équilibre général ne pouvait prétendre à une représentation adéquate de la réalité.

L'incorporation du fait qu'il n'existe pas un système complet de marchés a donné lieu à ce qu'il est convenu d'appeler la théorie de l'équilibre général temporaire. Grandmont (1977) fait un survol historique de cette théorie qui trouve son origine dans Hicks (1936) et qui a pris un essor considérable depuis 1970. Jusqu'à présent, la théorie de l'équilibre général temporaire s'est principalement limitée à l'étude de ce qui se passe à l'intérieur d'une seule période, soit, encore une fois, la démonstration qu'il existe un système de prix d'équilibre stable et unique. Cependant, cette représentation de la réalité laisse place à un autre problème. Il faut en effet décrire le passage d'une période à une autre. Bien que fondamentale, l'étude de la dynamique des équilibres temporaires qui est un aspect essentiel de la macroéconomie, n'en est qu'à un stade embryonnaire, les quelques contributions étant dues principalement à Samuelson (1958), Grandmont et Laroque (1973), Fuchs et Laroque (1976), Fuchs (1976, 1977, 1979), Grandmont (1985) et Farmer (1985).

Outre l'aspect méthodologique et la généralisation de la théorie néoclassique au cas d'un système incomplet de marchés, un des résultats les plus intéressants de ces travaux est la démonstration qu'il peut exister des cycles économiques endogènes. Il n'est pas nécessaire d'invoquer des chocs exogènes pour expliquer les cycles. Bien que présentant une certaine diversité au niveau de la formulation, ces travaux considéraient des économies extrêmement simplifiées. Généralement, ces études se limitaient à des économies d'échange constituées de consommateurs (parfois seulement deux) vivant deux périodes. Les anticipations sont le plus souvent ponctuelles et dépendent arbitrairement des prix présents et passés ou alors il est supposé que les agents ont des anticipations parfaites. Les particularités quant au nombre de consommateurs ou de biens et quant à la nature des anticipations peuvent être vues comme étant une façon habile de simplifier l'analyse. Cependant l'absence de production nous semble constituer une lacune importante. Une exception notable est fournie par Farmer (1985). Cet auteur décrit un modèle d'équilibre temporaire essentiellement macroéconomique. Il s'agit d'une économie constituée de deux catégories de consommateurs et d'une firme. Il y a un bien de consommation et un actif financier. De plus, il y a un gouvernement qui dépense et taxe. Le but de Farmer est d'étudier les relations entre les politiques gouvernementales et les cycles économiques. Son modèle de firme présente quelques particularités. Il s'agit d'une firme qui maximise de façon myope ses profits sous contrainte technologique tout en ayant des anticipations parfaites. En fait cette firme est située dans un cadre atemporel.

Nous nous proposons d'étendre les résultats de ces auteurs dans diverses directions. Nous préserverons la généralité de la théorie de l'équilibre général en considérant plusieurs consommateurs et producteurs ayant un horizon temporel fini mais pouvant être supérieur à deux périodes. Ces agents seront placés en situation incertaine et nous ne supposerons pas que les anticipations sont parfaites ou ponctuelles. Nous utiliserons des fonctions de distribution discrète et nous conserverons la nature arbitraire des anticipations. Notre formulation nous permettra d'établir l'existence et l'optimalité, dans un sens à définir plus loin, d'un équilibre temporaire avec production. Finalement nous aborderons l'étude de la dynamique des équilibres temporaires. Nous verrons qu'il n'est pas possible de restreindre a priori le comportement dynamique de l'économie. Ce résultat dépend crucialement de l'arbitraire des fonctions d'anticipation et du processus d'agrégation des demandes et des offres. L'incapacité de la théorie de restreindre la dynamique de l'économie a deux conséquences. L'aspect positif est que cela permet de ne pas infirmer la théorie qui peut s'adapter à la diversité de comportements dynamiques observés dans la réalité. L'aspect négatif découle du fait que la théorie n'impose aucune structure au réel ce qui est un but fondamental à toute théorie. Toute étude visant à obtenir des résultats plus précis devra caractériser plus finement les processus de formation des anticipations et d'agrégation. Des résultats plus spécifiques sur la dynamique de notre modèle ne sauraient en effet être obtenus sans une formulation plus restrictive de chacun de ces processus.

CHAPITRE I

Le modèle : un aperçu général

Le modèle que nous proposons est walrassien dans sa forme. L'économie est composée de consommateurs qui maximisent leur fonction d'utilité sous contrainte budgétaire et de producteurs qui maximisent leur profit sous contrainte technologique. Nous supposerons en tout temps qu'il y a concurrence parfaite sur les marchés existants. Cependant, nous nous situerons dans un contexte temporaire, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de marché pour les biens futurs. Ainsi le prix des divers biens pour les périodes futures n'est pas connu des agents au moment où ils doivent prendre leurs décisions. Ils doivent donc l'anticiper. Si on ne fait pas l'hypothèse de prévision parfaite (et nous ne la ferons pas) l'absence de marché contingent revient à introduire de l'incertitude sur les prix futurs. En fait, l'incertitude sur les états de la nature que l'on retrouve dans les modèles où il existe un système complet de marchés pour les biens présents et futurs pour chaque état de la nature se trouve à être reportée sur l'incertitude sur les prix. Il s'agit bien d'incertitude sur les prix et non sur les demandes et les offres car nous avons supposé qu'il y avait concurrence. Les demandeurs ne se préoccupent donc pas de ce qui se passe du côté de l'offre et inversement les offreurs ne se préoccupent pas de ce qui se passe du côté de la demande. Les seules variables qui les intéressent sont les prix, et ce sont les prix futurs qu'ils doivent prévoir (nous supposons les prix présents connus). La prise en compte de l'incertain entraîne que l'on adopte une certaine représentation de la structure subjective des futurs possibles et que l'on tienne compte de l'attitude des agents, consommateurs et producteurs, face au risque. La structure subjective sera représentée à l'aide de fonctions de distribution conjointe sur les prix. Quant à l'attitude face au risque, elle sera représentée par la courbure de la fonction d'utilité des consommateurs ou de la fonction d'utilité de profits des producteurs. De plus amples détails seront fournis dans les chapitres sur la théorie du consommateur et du producteur.

Une des caractérisques les plus intéressantes de la théorie de l'équilibre temporaire est qu'elle permet l'introduction d'actifs financiers, le rôle de ce bien étant de transférer du pouvoir d'achat d'une période à une autre. Dans notre modèle nous n'introduirons, pour fins de simplicité, qu'un seul actif financier d'une durée d'une période. Les agents pourront acheter ou vendre à escompte certaines quantités de cet actif à un moment donné et devront, la période suivante, rembourser ou recevoir la valeur nominale de l'actif. Pour simplifier encore plus l'analyse, nous supposerons que la valeur nominale de cet actif ne dépend pas de l'état de la nature qui se réalisera. Un des points d'intérêt du modèle que nous décrirons sera certainement l'exposition d'une théorie du comportement du producteur en contexte temporaire avec actif financier.

L'étude du comportement individuel des agents résultera en un système d'offres et de demandes temporaires que nous caractériserons et analyserons. Cette analyse nous permettra d'une part d'établir l'existence et l'optimalité (dans un certain sens à définir plus tard) d'un système de prix d'équilibre, et, d'autre part, de représenter l'évolution de l'économie par un système d'équations à récurrence.

Cette évolution sera déterminée explicitement par les paramètres des fonctions d'utilité et de production. C'est donc dire que la théorie de l'équilibre temporaire permet de déboucher sur une théorie dynamique de l'économie qui soit rationnelle car elle découle directement du comportement de maximisation des agents. Cela est à distinguer de la nature arbitraire de l'étude de la stabilité que l'on retrouvait, jusqu'à tout récemment, dans les modèles économiques, par exemple chez Samuelson (1947) et Arrow et Hahn (1971) où l'évolution des prix dépendait de la demande excédentaire de façon tout à fait ad hoc.

Le plan de la thèse est le suivant. Une première partie est consacrée à la description d'un équilibre temporaire. Un chapitre traite du comportement du producteur en contexte temporaire, un autre du comportement du consommateur en contexte temporaire, et un dernier établit l'existence et l'optimalité de l'équilibre temporaire qui s'établit sous les conditions que nous auront retenues. Une deuxième partie sera consacrée à la dynamisation de l'équilibre temporaire ainsi qu'à l'étude des sentiers que peut prendre une économie. La thèse se termine par un rappel des résultats obtenus ainsi que par une série de suggestions pour des recherches futures.

CHAPITRE II

Le producteur en contexte temporaire

La théorie du comportement du producteur dans un contexte atemporel ou intertemporel est bien connue. Cette théorie suppose que le producteur maximise ses profits en respectant sa contrainte technologique. S'il y a concurrence, les prix de tous les biens sont connus et considérés exogènes par les agents. Un des pré-supposés de cette théorie est qu'il existe un système complet de marchés. Il y a autant de marchés qu'il y a de biens, de périodes et d'états de la nature. Bien qu'utile à plus d'un point de vue, cette représentation est assez éloignée de la réalité. Dans les faits bien peu de marchés à terme existent. Tenir compte de l'absence de ces marchés revient à nous situer dans un contexte temporaire et cela a des conséquences importantes sur la formulation du problème du producteur.

En premier lieu, cela implique que l'on doit tenir compte de l'attitude face au risque du producteur. Dans un cadre atemporel ou intertemporel les contrats sont conclus au début de la période initiale. Le producteur ne fait donc face à aucune incertitude quant à sa rémunération. Dans ce cas, l'attitude face au risque n'a donc pas à être considérée. Dans un contexte temporaire il faut conclure les contrats à chaque période. Il faudra donc tenir compte de la riscophobie ou de la riscophilie du producteur. Nous supposerons que le producteur maximise l'espérance d'utilité de ses profits. Les résultats que nous obtiendrons dépendent de la façon dont les anticipations seront formulées. Nous supposerons que le producteur envisage qu'un nombre (fini) de vecteurs de prix futurs peuvent se réaliser. A partir des informations dont il dispose (essentiellement les prix présents et passés) il détermine les probabilités d'apparition de chacun de ces vecteurs. Son problème est donc de choisir parmi les vecteurs d'outputs et d'inputs réalisables celui qui maximise son espérance d'utilité de profit.

La technologie sera représentée par une fonction de production portant sur toutes les périodes. L'adoption de fonctions de production par période "à la Malinvaud (1982)" aurait rendu le problème plus complexe sans changer la nature des résultats. Ici comme ailleurs nous avons opté pour la simplicité. Cependant à l'instar de Malinvaud nous avons incorporé un délai de production. Cela implique qu'il y aura un délai entre les entrées et les sorties de fonds. Le producteur devra donc financer l'achat de ses inputs au moyen d'emprunts. Il faut donc considérer la présence d'actifs financiers. Par souci de simplicité, encore une fois, notre modèle ne comprendra qu'un seul actif financier. La nature de cet actif sera un prêt (emprunt) d'une période. Nous supposerons que le montant à rembourser (recevoir) ne dépend pas de l'état de la nature qui se réalisera. Nous supposerons finalement que le producteur ne planifie pas la banqueroute. La théorie du producteur que nous exposerons s'articulera autour des hypothèses suivantes.

Hypothèse P.1 : L'objectif de la firme est représenté par une fonction d'espérance d'utilité de type Von Neumann-Morgenstern deux fois continûment différentiable.

$$EU(\tilde{P}'[\tilde{b}-\tilde{a}] + A) = \sum_{s=1}^{S} \pi(s)\ U(\tilde{P}(s)[\tilde{b}(s) - \tilde{a}(s)] + A).$$

Dans cette fonction, les $\pi(s)$ sont les probabilités d'apparition de l'état s où $s = 1, 2, \ldots, S(< \infty)$; P est le vecteur des prix; b et a sont les vecteurs des outputs bruts et des inputs bruts; A est l'actif financier. Par convention $A > 0$ représente un prêt et $A < 0$ un emprunt. De façon générale, le signe diacritique tilde (~) représente des variables futures lorsqu'il sera sous forme d'indice supérieur, et des variables passées lorsqu'il sera sous forme d'indice inférieur. Nous considérons qu'il y a un nombre fini de biens indicés, lorsque nécessaire, par h allant de 1 à H $(< \infty)$, ainsi qu'un nombre fini de périodes futures indicées par t allant de 1 à T $(< \infty)$. Finalement par convention, $\tilde{P}$ représente les prix futurs actualisés à la période t=1, la période courante étant t=0.

Le sens à donner à cette fonction-objectif est que le producteur maximise la somme actualisée de ses profits présents et futurs car, comme cela deviendra évident par la suite, à l'optimum, la valeur de l'actif financier, A, sera égale au profit présent auquel on additionne une constante.

Hypothèse P.2 : La technologie de la firme est représentée par une fonction de production deux fois continûment différentiable.

$$h(\tilde{b}, -\tilde{a}, -a) = 0 \quad \text{avec} \quad h \in C^2 .$$

Hypothèse P.3 : Les gradients de la fonction d'utilité du profit et de la fonction de production sont strictement positifs.

$$DU >> 0 \quad \text{et} \quad Dh >> 0 .$$

Hypothèse P.4 : La fonction d'espérance d'utilité est fortement concave et la fonction de production est fortement convexe.

$$\emptyset' D^2 EU \, \emptyset < 0 \quad \text{pour} \quad \emptyset \neq 0 ,$$

$$\theta' D^2 h \, \theta > 0 \quad \text{pour} \quad \theta \neq 0 .$$

Hypothèse P.5 : Les probabilités subjectives d'apparition sont fonction des prix présents et passés. Ces fonctions sont une fois continûment différentiables et homogènes de degré zéro en $(P, \underset{\sim}{P}, \Upsilon, \underset{\sim}{\Upsilon})$.

$$\pi(s) = \pi_s \, (P, \underset{\sim}{P}, \Upsilon, \underset{\sim}{\Upsilon}) \quad \text{avec} \quad \pi_s \in C' ,$$

$$= \pi_s \, (\lambda P, \lambda \underset{\sim}{P}, \lambda \Upsilon, \lambda \underset{\sim}{\Upsilon}) \quad \text{avec} \quad \lambda \in R_+ .$$

Υ représente le prix de l'actif financier. De façon à demeurer dans un espace fini, nous considérerons que le producteur se contente d'observer les prix allant du présent à $\underset{\sim}{T}$ ($< \infty$) périodes passées. L'hypothèse d'homogénéité implique que si tous les prix présents et passés étaient multipliés par une constante alors les probabilités demeureraient inchangées. Cela suppose une neutralité face à une unité de compte définie sur le présent et le passé.

L'hypothèse P.4 nécessite certains commentaires. Son intérêt principal est d'assurer le respect des conditions de deuxième ordre du problème du producteur que nous allons énoncer. En contrepartie, elle implique l'aversion au risque et la décroissance des rendements à l'échelle. Cette hypothèse est donc très restrictive mais elle est nécessaire si notre but est de définir des hypothèses permettant de trouver une solution au problème du producteur ainsi que des fonctions d'offre plutôt que des correspondances d'offre. Cependant, si notre but était de caractériser la solution optimale plutôt que de la trouver, nous pourrions nous contenter d'une hypothèse portant sur la forte concavité de la fonction $[U - \theta h]$, c'est-à-dire $\emptyset'[D^2U - \theta D^2h]\, \emptyset < 0$ pour $\emptyset \neq 0$ et $\theta > 0$. Ici θ représente la valeur optimale du multiplicateur de Lagrange associé au problème du producteur. Cette dernière hypothèse a le mérite de n'imposer ni l'aversion au risque, ni la décroissance des rendements à l'échelle tout en permettant l'existence des fonctions d'offre. Selon notre intérêt, nous pourrons utiliser une hypothèse ou l'autre. L'ensemble des résultats demeure inchangé selon l'hypothèse retenue.

Le problème du producteur est

$$\max_{\tilde{b},\tilde{a},a,A} \{EU(\tilde{P}'[\tilde{b}-\tilde{a}] + A) : h(\tilde{b}(s), -\tilde{a}(s), -a) = 0 \,;$$

$$P'a + \gamma A = A_{-1} + P'b \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots, S; \ b \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}.$$

La contrainte $P'a + \gamma A = A_{-1} + P'b$ est la contrainte de financement contemporaine du producteur. Il doit financer ses achats d'inputs, $P'a$, à partir des avoirs financiers qu'il détient en début de périodes, A_{-1}, de ses ventes, $P'b$, et de prêt, γA. En se servant du théorème de Von

Neumann-Morgenstern (1944, p. 92) sur les maxima, le problème du producteur peut se réécrire

$$\underset{a,A}{\text{Max}} \{E\{ \underset{\tilde{b}(s),\tilde{a}(s)}{\text{Max}} \{U(\tilde{P}(s)'[\tilde{b}(s)-\tilde{a}(s)] + A) : h(\tilde{b}(s), -\tilde{a}(s), -a) = 0;$$

$$\text{pour } s = 1, 2, \ldots, S\} : P'a + \gamma A = A_{-1} + P'b;\ b \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}\} .$$

Le problème peut se résoudre par étapes successives. La première est

$$\underset{\tilde{b}(s),\tilde{a}(s)}{\text{Max}} \{U(\tilde{P}(s)'[\tilde{b}(s)-\tilde{a}(s)] + A) : h(\tilde{b}(s), -\tilde{a}(s), -a) = 0\};$$

$$\text{pour } s = 1, 2, \ldots, S.$$

Pour simplifier l'écriture, nous abandonnerons l'indice s, celui-ci étant inutile à cette étape. Nous formons le lagrangien :

$$L(\tilde{b}, \tilde{a}, \theta) = U(\tilde{P}'[\tilde{b}-\tilde{a}] + A) - \theta h(\tilde{b}, -\tilde{a}, -a) .$$

A l'optimum nous avons

$$U_{\tilde{b}} - \theta h_{\tilde{b}} = 0 , \qquad \text{(HT équations)}$$

$$U_{\tilde{a}} - \theta h_{\tilde{a}} = 0 , \qquad \text{(HT équations)}$$

$$-h(\tilde{b}, -\tilde{a}, -a) = 0 . \qquad \text{(1 équation)}$$

La condition de deuxième ordre est vérifiée en vertu de l'hypothèse P.4. Nous allons maintenant établir l'existence de fonctions d'offre et de demande d'inputs futures. Il nous faut premièrement énoncer le lemme suivant :

Lemme P.1 : Sous les hypothèses P.1 à P.4, la jacobienne des conditions de premier ordre est de rang maximum.

Preuve : Supposons le contraire. Il existe un vecteur $[\emptyset_1' \quad \emptyset_2' \quad \emptyset_3'] \neq 0$ tel que

$$\begin{bmatrix} \psi_{\tilde{b}\tilde{b}} & \psi_{\tilde{b}\tilde{a}} & -h_{\tilde{b}} \\ \psi_{\tilde{a}\tilde{b}} & \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} & -h_{\tilde{a}} \\ -h_{\tilde{b}}' & -h_{\tilde{a}}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_3 \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

avec $\psi_{\tilde{b}\tilde{b}} = U_{\tilde{b}\tilde{b}} - \theta h_{\tilde{b}\tilde{b}}$, et ainsi de suite.

Le produit matriciel donne

$$\psi_{\tilde{b}\tilde{b}}\emptyset_1 + \psi_{\tilde{b}\tilde{a}}\emptyset_2 - h_{\tilde{b}}\emptyset_3 = 0 \ , \qquad (1)$$

$$\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}\emptyset_1 + \psi_{\tilde{a}\tilde{a}}\emptyset_2 - h_{\tilde{a}}\emptyset_3 = 0 \ , \qquad (2)$$

$$-h_{\tilde{b}}'\emptyset_1 - h_{\tilde{a}}'\emptyset_2 = 0 \ . \qquad (3)$$

Prémultiplions (1) par $\emptyset_1'$ et (2) par $\emptyset_2'$, et additionnons ces produits de façon à obtenir en tenant compte de (3)

$$[\emptyset_1' \quad \emptyset_2'] \begin{bmatrix} \psi_{\tilde{b}\tilde{b}} & \psi_{\tilde{b}\tilde{a}} \\ \psi_{\tilde{a}\tilde{b}} & \psi_{\tilde{a}\tilde{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset_1 \\ \emptyset_2 \end{bmatrix} = 0 \ . \qquad (4)$$

Cela contredit l'hypothèse P.4 sauf si $\emptyset_1 = \emptyset_2 = 0$ mais dans ce cas (1) et (2) impliquent $\emptyset_3 = 0$, d'où la contradiction. □

Proposition P.1 : Les hypothèses P.1 à P.4 et le lemme P.1 impliquent l'existence des fonctions

$$\tilde{b} = \tilde{b}(a, A, P), \quad \text{avec} \quad \tilde{b} \in C' \ ,$$

$$\tilde{a} = \tilde{a}(a, A, P), \quad \text{avec} \quad \tilde{a} \in C' \ ,$$

$$\theta = \theta(a, A, P), \quad \text{avec} \quad \theta \in C' \ .$$

Preuve : Ce résultat découle des hypothèses P.1 à P.4, du lemme P.1 et du théorème des fonctions implicites.□

L'introduction de ces fonctions dans le problème initial permet de définir la fonction $V(a, A) \equiv EU(\tilde{P}'[\tilde{b}(\cdot)-\tilde{a}(\cdot)] + A)$. La deuxième étape du problème devient

$$\max_{a,A} \{V(a, A) : P'a + \gamma A = A_{-1} + P'b;\ b \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}.$$

Nous formons le lagrangien

$$L(a, A, \mu) = V(a, A) - \mu(P'a + \gamma A - P'b - A_{-1})$$

et à l'optimum nous avons

$$V_a - \mu P = 0 , \qquad \text{(H équations)} \qquad (5)$$

$$V_A - \mu\gamma = 0 , \qquad \text{(1 équation)} \qquad (6)$$

$$P'b + A_{-1} - P'a - \gamma A = 0. \qquad \text{(1 équation)} \qquad (7)$$

La condition de deuxième ordre est vérifiée si $V(a, A)$ est concave en (a, A). Cette démonstration est l'objet du lemme suivant.

Lemme P.2 : La concavité en $(\tilde{b}, \tilde{a}, a, A)$ de $[U - \theta h]$ entraîne la concavité en (a, A) de $V(a, A)$.

Preuve : Voir l'appendice.□

Nous pouvons maintenant établir l'existence des fonctions de demande d'inputs et d'actif financier.

Lemme P.3 : Sous les hypothèses P.1 à P.4, la jacobienne des conditions de premier ordre de la deuxième étape du problème du producteur est de rang maximum.

Preuve : Voir preuve du lemme P.1.□

Proposition P.2 : Sous les hypothèses P.1 à P.5, il existe des fonctions

$$a = a(P,\ \Upsilon,\ \pi(P,\ \Upsilon,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\Upsilon}),\ A_{-1} + P'b)\ , \quad \text{avec } a \in C', \quad (8)$$

$$A = A(P,\ \Upsilon,\ \pi(P,\ \Upsilon,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\Upsilon}),\ A_{-1} + P'b)\ , \quad \text{avec } A \in C', \quad (9)$$

$$\mu = \mu(P,\ \Upsilon,\ \pi(P,\ \Upsilon,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\Upsilon}),\ A_{-1} + P'b)\ , \quad \text{avec } \mu \in C'. \quad (10)$$

Preuve : Voir preuve de la proposition P.1.□

Les équations (8) et (9) constituent le système de demandes courantes de facteurs de production et d'actif financier. Ces fonctions donnent les quantités choisies à la période courante compte tenu des prix présents $(P,\ \Upsilon)$, de la richesse initiale $(A_{-1} + P'b)$ et des anticipations $(\pi(P,\ \Upsilon,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\Upsilon}))$. Nous allons maintenant caractériser les équations (8) à (10). L'introduction de ces dernières dans les équations (5) à (7) donne des identités dont la différentielle s'écrit

$$\begin{bmatrix} V_{aa} & V_{aA} & -P \\ V_{Aa} & V_{AA} & -\Upsilon \\ -P' & -\Upsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da \\ dA \\ d\mu \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mu I - V_{aP} & -V_{a}\Upsilon & -V_{a\underset{\sim}{P}} & -V_{a}\underset{\sim}{\Upsilon} & 0 \\ -V_{aP} & \mu - V_{A}\Upsilon & -V_{A\underset{\sim}{P}} & -V_{A}\underset{\sim}{\Upsilon} & 0 \\ [a'-b'] & A & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dP \\ d\Upsilon \\ d\underset{\sim}{P} \\ d\underset{\sim}{\Upsilon} \\ dA_{-1} \end{bmatrix} . \quad (11)$$

Le lemme P.3 implique l'existence de l'inverse de la première matrice de gauche qui est définie par

$$\begin{bmatrix} V_{aa} & V_{aA} & -P \\ V_{Aa} & V_{AA} & -\Upsilon \\ -P' & -\Upsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & -f_1 \\ F_{21} & F_{22} & -f_2 \\ -f_1' & -f_2 & \emptyset \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (12)$$

Posons $\alpha \equiv \begin{bmatrix} a \\ A \end{bmatrix}$, $W \equiv \begin{bmatrix} P \\ \Upsilon \end{bmatrix}$, $\underset{\sim}{W} \equiv \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{\Upsilon} \end{bmatrix}$, $F \equiv \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}$, $f \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$ et $M \equiv P'b + A_{-1}$.

Prémultiplions la différentielle des conditions de premier ordre (équation 11) par $\begin{bmatrix} F & -f \\ -f' & \emptyset \end{bmatrix}$ pour obtenir

$$d\alpha \equiv \mu\ F\ dW - F[V_{\alpha w}\ dW + V_{\alpha \underline{w}}\ d\underline{W}] + f[dM - \alpha' dW] \ . \tag{13}$$

Proposition P.3 : Sous les hypothèses P.1 à P.5, les coefficients de la différentielle de demande d'inputs et d'actif financier (équation 13) ont les propriétés suivantes :

$W'F \equiv 0$ et $w'f \equiv 1$, (additivité)

$F \equiv F'$, (symétrie)

$FW \equiv 0$,

$\xi' F \xi < 0$ pour $\xi \neq \theta W$, $\theta \in R$. (négativité)

Preuve : La propriété d'additivité découle directement du produit matriciel (12). De plus, puisque l'inverse d'une matrice symétrique est symétrique, nous avons $F \equiv F'$. L'additivité et la symétrie entraîne $FW \equiv 0$. Finalement, le produit matriciel (12) donne $V_{\alpha\alpha}F + Wf' \equiv I$. Prémultiplions par $\xi' F'$ et post-multiplions par ξ. Définissons $\Gamma \equiv F\xi$ et ainsi nous obtenons $\Gamma' V_{\alpha\alpha} \Gamma \equiv \xi' F \xi$. Le lemme P.2 implique la négativité.□

Cette proposition permet de caractériser en partie les fonctions de demande du producteur (équations 8 et 9). La différentielle de ces fonctions s'écrit

$$d\alpha = [\alpha_w + \alpha_M\ \alpha']dW + \alpha_\pi[\pi_w\ dW + \pi_{\underline{w}}\ d\underline{W}] + \alpha_M[dM - \alpha' dW] \ . \tag{14}$$

La comparaison entre (13) et (14) implique

$$\mu F \equiv [\alpha_W + \alpha_M\, \alpha'] \ ,$$
$$-FV_{\alpha W} \equiv \alpha_\pi\, \pi_W \ ,$$
$$-FV_{\alpha \underset{\sim}{W}} \equiv \alpha_\pi\, \pi_{\underset{\sim}{W}} \ ,$$
$$f \equiv \alpha_M \ .$$

L'équation (14) peut donc se réécrire

$$d\alpha = \mu F dW + \alpha_\pi[\pi_W\, dW + \pi_{\underset{\sim}{W}}\, d\underset{\sim}{W}] + f[dM - \alpha' dW] \ . \qquad (15)$$

L'équation (15) constitue la structure locale de Slutsky pour le producteur en contexte temporaire. Le premier terme de droite représente l'effet substitution présent, le second représente l'effet anticipation, et le troisième représente l'effet richesse présent.

Il importe de remarquer que la propriété $FW \equiv 0$ n'implique pas l'homogénéité de degré zéro des fonctions de demande en W. Cependant nous pouvons démontrer que ces fonctions sont homogènes de degré zéro en $(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1})$.

Proposition P.4 : Les fonctions de demande (équations 8 et 9) sont homogènes de degré zéro en $(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1})$.

Preuve : (Théorème d'Euler). Il faut $\mu FW + \alpha_\pi[\pi_W\, W + \underset{\sim}{\pi}_W\, \underset{\sim}{d}W] + \alpha_M[dM - \alpha' dW] = 0$. Le premier terme est nul par la proposition P.3, le second par l'hypothèse P.5, et le troisième est nul à l'optimum.□

Les propositions P.3 et P.4 permettent de caractériser les fonctions de demande théoriques $\alpha(W, \pi(W, \underset{\sim}{W}), M)$. Cependant, les fonctions de demande observées sont de la forme $\hat{\alpha}(W, \underset{\sim}{W}, M)$. Nous pouvons nous demander quelles sont les caractéristiques observables qui découlent de l'analyse précédente.

Proposition P.5 : Les fonctions de demande observables sont homogènes de degré zéro en $(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1})$ et vérifient une propriété d'additivité, c'est-à-dire $W'\hat{\alpha}_M \equiv 1$ où α_M est le vecteur des effets richesse observés. Aucune autre caractéristique observable ne peut être déduite à moins de connaître le processus de formation des anticipations $\pi(W, \underset{\sim}{W})$.

Preuve : L'homogénéité découle de la proposition P.4. Pour vérifier que $W'\hat{\alpha}_M \equiv 1$, écrivons la différentielle des fonctions de demande observables.

$$d\alpha = \hat{\alpha}_W \, dW + \hat{\alpha}_{\underset{\sim}{W}} \, d\underset{\sim}{W} + \hat{\alpha}_M \, dM \; . \tag{16}$$

La comparaison des deux différentielles de demande (équations 15 et 16) permet d'établir les relations

$$\hat{\alpha} \equiv F + \alpha_\pi \, \pi_W - \alpha_\mu \alpha' \; ,$$

$$\hat{\alpha}_{\underset{\sim}{W}} \equiv \alpha_\pi \, \pi_{\underset{\sim}{W}} \; ,$$

$$\hat{\alpha}_M \equiv f \; .$$

Ces relations ne permettent aucune caractérisation à l'exception de $W'\hat{\alpha}_M \equiv 1$, à moins de connaître $\pi(W, \underset{\sim}{W})$. □

Cette proposition vient restreindre sérieusement la capacité de la théorie économique à structurer le réel. En fait, nous retrouvons le résultat de Polemarchakis (1983). L'arbitraire des fonctions d'anticipation fait perdre la caractérisation des fonctions de demande observées. Quant à savoir si les fonctions d'anticipation peuvent être caractérisées de telle sorte qu'il découle une caractérisation observable, cela demeure une question largement ouverte. Il est toujours possible de recourir aux anticipations rationnelles "à la Radner" ce qui implique que les agents connaissent les prix d'équilibre futurs mais, à notre avis, cela revient plutôt à évacuer le problème des anticipations. Bien que découlant de notre formulation du problème du producteur en contexte temporaire et fondamentale par sa position centrale en théorie économique, cette question ne nous retiendra pas car nous utiliserons la caractérisation des fonctions de demande théoriques fournies par les propositions P.3 et P.4 dans la suite de notre thèse.

Pour terminer ce chapitre, rappelons que les propositons P.3 et P.4 caractérisent les fonctions de demande brute d'inputs et d'actif financier. Pour obtenir la caractérisation du système d'offres nettes, il suffit de remarquer que les offres brutes, b et A_{-1}, sont données en début de période et que l'offre nette de la firme est simplement

$$Y \equiv \begin{bmatrix} b - a(W, \pi(W, \underset{\sim}{W}), M) \\ A_{-1} - A(W, \pi(W, \underset{\sim}{W}), M) \end{bmatrix} ,$$

$$\equiv Y(W, \pi(W, \underset{\sim}{W}), M) \ . \tag{17}$$

La caractérisation de $Y(\cdot)$ découle directement des propositions P.3 et P.4.

CHAPITRE III

Le consommateur en contexte temporaire

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle de comportement du consommateur qui respecte l'esprit du modèle du producteur exposé précédemment. Nous nous situerons d'emblée dans une économie de propriété privée, ceci étant motivé par le fait que nous sommes intéressés par la description de l'équilibre temporaire et qu'à ce titre il faut endogénéiser les revenus des consommateurs. En conformité avec le chapitre sur le producteur, nous introduirons un actif financier. L'analyse du consommateur s'articulera autour des hypothèses suivantes.

Hypothèse C.1 : Le pré-ordre du consommateur est représentable par une fonction d'espérance d'utilité de type Von-Neumann-Morgenstern deux fois continûment différentiable,

$$EU(x, \tilde{x}) = \sum_{s=1}^{S} \pi(s)\, U(x, \tilde{x}(s)) \quad , \quad S < \infty \ .$$

x et $\tilde{x}$ représentent les vecteurs des consommations présentes et futures de dimensions finies $(Hx1)$ et $(HTx1)$ où H est le nombre de biens et T est le nombre de périodes futures considérées par l'agent. $U(x, \tilde{x}(s))$ est la fonction d'utilité de l'état s. $\pi(s)$ est la probabilité d'apparition de l'état s.

Hypothèse C.2 : Les gradients de la fonction d'utilité sont strictement positifs,

$$DU >> 0 \ .$$

Hypothèse C.3 : La fonction d'espérance d'utilité est fortement concave,

$$\emptyset' D^2 EU \emptyset < 0 \text{ pour } \emptyset \neq 0 .$$

Cette hypothèse implique que toutes les fonctions $U(x, \tilde{x})$ sont fortement concaves en $(x, \tilde{x})$ (Arrow, 1953). La conséquence de cette hypothèse est qu'elle entraîne la riscophobie du consommateur.

Hypothèse C.4 : Les probabilités subjectives d'apparition des états de la nature sont fonction des prix présents et passés. Ces fonctions sont une fois continûment différentiables et homogènes de degré zéro en $(P, \underset{\sim}{P}, \gamma\ \underset{\sim}{\gamma})$.

$$\pi(s) = \pi_s\ (P, \underset{\sim}{P}, \gamma\ \underset{\sim}{\gamma})\ , \quad \text{avec} \quad \pi \in C'\ ,$$

$$= \pi_s\ (\lambda P, \lambda\underset{\sim}{P}, \lambda\gamma\ \lambda\underset{\sim}{\gamma})\ , \quad \text{avec} \quad \lambda \in R_+\ .$$

Le signe diacritique tilde (˜) sous une variable décrit une variable passée. P et γ sont respectivement les prix des biens de consommation et l'actif financier.

Le comportement du consommateur est décrit par le problème suivant :

$$\underset{A,x,\tilde{x}}{\text{Max}}\ \{EU(x, \tilde{x}(s)) : P'x + \gamma A = P'\omega + A_{-1};\ \tilde{P}(s)'\tilde{x}(s) = \tilde{P}(s)'\tilde{\omega} + A$$

$$\text{pour } s = 1, 2, \ldots, S;\ \omega \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}\ .$$

ω et $\tilde{\omega}$ sont les dotations initiales connues, présentes et futures du consommateur. La première contrainte est la contrainte de budget contemporaine. La valeur des consommations et de l'actif financier doit être égale à la valeur des dotations initiales et de l'actif financier détenu en début de période. La deuxième contrainte est la sommation des contraintes de budget futures. Cette opération est permise si le consommateur ne planifie pas la faillite, ce que nous supposerons.

Le problème peut se résoudre par étapes.

$$\max_{A,x,\tilde{x}(s)} \{E\{ \max \{U(x, \tilde{x}(s)) : \tilde{P}(s)'\tilde{x}(s) = \tilde{P}(s)'\tilde{\omega} + A, \quad s = 1, \ldots, S\} : P'x + \gamma A = A_{-1} + P'\omega, \ \omega \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}\} .$$

Commençons par l'étape suivante :

$$\max_{\tilde{x}} \{U(x, \tilde{x}) : \tilde{P}'\tilde{x} = \tilde{P}'\tilde{\omega} + A\} .$$

Nous formons le lagrangien

$$L(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = U(x, \tilde{x}) - \tilde{\lambda}(\tilde{P}'\tilde{x} - \tilde{P}'\tilde{\omega} - A)$$

et à l'optimum nous avons

$$U_{\tilde{x}} - \tilde{\lambda}\tilde{P} = 0 \ , \qquad \text{(HT équations)} \qquad (18)$$

$$\tilde{P}'\tilde{x} = \tilde{P}'\tilde{\omega} + A \ . \qquad \text{(1 équation)} \qquad (19)$$

La condition de deuxième ordre est vérifiée grâce à l'hypothèse C.3. Pour démontrer l'existence des demandes futures virtuelles (ou plus simplement demandes virtuelles) nous devons énoncer le lemme suivant.

Lemme C.1 : Sous les hypothèses C.1 et C.3, la jacobienne des conditions de premier ordre et de rang maximum.

Preuve : Voir preuve du lemme P.1.

Proposition C.1 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, il existe des fonctions de demande virtuelle,

$$\tilde{x} = \tilde{x}(x,\ \tilde{P},\ \tilde{P}'\tilde{\omega} + A)\ ,\ \text{avec}\ \tilde{x} \in C'\ , \qquad (20)$$

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x,\ \tilde{P},\ \tilde{P}'\tilde{\omega} + A)\ ,\ \text{avec}\ \tilde{\lambda} \in C'\ . \qquad (21)$$

Preuve : Voir preuve de la proposition P.1.□

Le lemme C.1 implique l'existence de l'inverse de la jacobienne des conditions de premier ordre (équations (18) et (19)). Cette inverse est définie par

$$\begin{bmatrix} U_{\tilde{x}\tilde{x}} & -\tilde{P} \\ -\tilde{P}' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{K} & -\tilde{k} \\ -\tilde{k}' & \Omega \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

A l'aide de cette inverse, en prenant la différentielle des conditions de premier ordre, nous obtenons

$$d\tilde{x} \equiv \tilde{\lambda}\ \tilde{K}\ d\tilde{P} + \tilde{k}[\tilde{\omega}'d\tilde{P} + \tilde{P}'d\tilde{\omega} + dA - \tilde{x}'d\tilde{P}] - \tilde{k}\ U_{\tilde{x}x}\, dx\ . \qquad (23)$$

Le premier terme de droite est l'effet de substitution intratemporel futur, le deuxième est l'effet revenu futur et le troisième est l'effet de substitution intertemporel.

Proposition C.2 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, la différentielle (23) est dotée des propriétés suivantes,

$\tilde{P}'\tilde{K} \equiv 0$ et $\tilde{P}'\tilde{k} \equiv 1$, (additivité)

$\tilde{K} \equiv \tilde{K}'$, (symétrie)

$\tilde{K}\ \tilde{P} \equiv 0$,

$\emptyset'\tilde{K}\emptyset < 0$ pour $\emptyset \neq \theta P$, $\theta \in R$. (négativité)

Preuve : Le produit matriciel (22) donne immédiatement $\tilde{P}'\tilde{K} \equiv 0$ et $\tilde{P}'\tilde{k} \equiv 1$. La symétrie de la première matrice de gauche implique la symétrie de $\tilde{K}$ ce qui implique $\tilde{K}\,\tilde{P} \equiv 0$. De plus, le produit matriciel donne $U_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{K} + \tilde{P}\,\tilde{k}' \equiv I$. Prémultiplions par $\emptyset'\tilde{K}'$ et post-multiplions par $\emptyset$. Construisons $\xi' \equiv \emptyset'\tilde{K}'$ de façon à obtenir $\xi' U_{\tilde{x}\tilde{x}}\xi \equiv \emptyset'\tilde{K}\emptyset$. L'hypothèse C.3 et la propriété $\tilde{K}\,\tilde{P} \equiv 0$ implique $\emptyset'\tilde{K}\emptyset < 0$ pour $\emptyset \neq \theta\tilde{P}$, $\theta \in R$.□

Cette proposition permet de caractériser en partie les fonctions de demande virtuelle (équation 20) dont la différentielle s'écrit

$$d\tilde{x} = [\tilde{x}_{\tilde{P}} + \tilde{x}_{\tilde{M}}\tilde{x}']d\tilde{P} + \tilde{x}_{\tilde{M}}[\tilde{P}'d\tilde{\omega} + \tilde{\omega}'d\tilde{P} + dA - \tilde{x}'d\tilde{P}] + \tilde{x}_{x}\,dx\ , \qquad (24)$$

où $\tilde{M} = \tilde{P}'\tilde{\omega} + A$.

La comparaison entre (23) et (24) implique

$$\begin{aligned} \tilde{K} &\equiv [\tilde{x}_{\tilde{P}} + \tilde{x}_{\tilde{M}}\,\tilde{x}']\ , \\ \tilde{k} &\equiv \tilde{x}_{\tilde{M}}\ , \\ -\tilde{K}U_{\tilde{x}x} &\equiv \tilde{x}_{x}\ . \end{aligned} \qquad (25)$$

Le corollaire suivant vient compléter la caractérisation des demandes virtuelles.

Corollaire C.1 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, les demandes virtuelles ont la propriété suivante

$$\tilde{P}'\tilde{x}_{x} \equiv 0\ .$$

Preuve : Cela découle de la proposition C.2 et de l'équation (25).□

L'existence et la caractérisation des demandes virtuelles nous permettent d'aborder la deuxième étape du problème du consommateur.

$$\max_{A,x} \{EU(x, \tilde{x}(x, P, \tilde{P}'\tilde{\omega} + A)) : P'x + \gamma A = P'\omega + A_{-1} \ ; \ \omega \text{ et } A_{-1} \text{ donnés}\}.$$

Nous formons le lagrangien

$$L(x, A, \lambda) = EU(x, \tilde{x}(x, P, \tilde{P}'\tilde{\omega} + A)) - \lambda(P'x + \gamma A - P'\omega - A_{-1})$$

et à l'optimum nous avons

$$E[U_x + U_{\tilde{x}} \tilde{x}_x] - \lambda P = 0 \ , \qquad \text{(H équations)}$$

$$E[U_{\tilde{x}} \, x_{\tilde{M}} \, \tilde{M}_A] - \lambda\gamma = 0 \ , \qquad \text{(1 équation)}$$

$$P'x + \gamma A = P'\omega + A_{-1} \ . \qquad \text{(1 équation)}$$

En tenant compte des équations (18) et (25), de la proposition C.2 et du corollaire C.1, nous obtenons

$$E[U_x] - \lambda P = 0 \quad , \tag{26}$$

$$E[\tilde{\lambda}] - \lambda\gamma = 0 \quad , \tag{27}$$

$$P'x + \gamma A = P'\omega + A_{-1} \ . \tag{28}$$

Pour démontrer que la condition de deuxième ordre est vérifiée et qu'il existe des fonctions de demande contemporaines, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme C.2 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, la concavité en $(x, \tilde{x})$ de $EU(x, \tilde{x})$ entraîne la concavité en (x, A) de $V(x, A) \equiv EU(x, \tilde{x}(P, x, \tilde{P}'\tilde{\omega} + A))$.

Preuve : Voir l'appendice. □

La concavité de $V \equiv EU(a, A)$ permet de vérifier la condition de deuxième ordre ainsi que le lemme suivant.

Lemme C.3 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, la jacobienne des conditions du premier ordre de la deuxième étape est de rang maximum.

Preuve : Voir preuve du lemme C.1.□

Proposition C.3 : Sous les hypothèses C.1 à C.3, il existe des fonctions une fois continûment différentiables,

$$x = x(P,\ \gamma,\ \pi(P,\ \gamma,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\gamma}),\ P'\omega + A_{-1})\ ,\quad \text{avec } x \in C'\ , \tag{29}$$

$$A = A(P,\ \gamma,\ \pi(P,\ \gamma,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\gamma}),\ P'\omega + A_{-1})\ ,\quad \text{avec } A \in C'\ , \tag{30}$$

$$\lambda = \lambda(P,\ \gamma,\ \pi(P,\ \gamma,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\gamma}),\ P'\omega + A_{-1})\ ,\quad \text{avec } \lambda \in C'\ .$$

Preuve : Voir preuve de la proposition P.1.□

Les équations (29) et (30) constituent le système de demandes courantes de biens de consommation et d'actif financier. Ces fonctions donnent les quantités choisies à la période courante compte tenu des prix présents $(P,\ \gamma)$, de la richesse initiale $(P'\omega + A_{-1})$, et des anticipations $(\pi(P,\ \gamma,\ \underset{\sim}{P},\ \underset{\sim}{\gamma}))$. Nous allons maintenant caractériser les équations (29) et (30).

Le lemme C.3 implique l'existence de l'inverse de la jacobienne des conditions de premier ordre. Cette inverse est définie par

$$\begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xA} & -P \\ V_{Ax} & V_{AA} & -\gamma \\ -P' & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -k_1 \\ K_{21} & K_{22} & -k_2 \\ -k_1' & -k_2 & \Omega \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ . \tag{31}$$

A l'aide de cette inverse, en prenant la différentielle des conditions de premier ordre et en posant

$$K \equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix},\ k \equiv \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix},\ W \equiv \begin{bmatrix} P \\ \gamma \end{bmatrix},\ M \equiv P'\omega + A_{-1}\ ,\ \underset{\sim}{W} \equiv \begin{bmatrix} \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{\gamma} \end{bmatrix},\ X \equiv \begin{bmatrix} x \\ A \end{bmatrix},$$

il s'ensuit

$$dX = \lambda\ K\ dW + k[dM - X'dW] - K[V_{xw}dW + V_{x\underset{\sim}{W}}d\underset{\sim}{W}]\ . \tag{32}$$

Proposition C.4 : Sous les hypothèses C.1 à C.4, les coefficients de la différentielle (32) ont les propriétés suivantes

$W'K \equiv 0$ et $W'k \equiv 1$, (additivité)

$K \equiv K'$, (symétrie)

$KW \equiv 0$,

$\emptyset'K\emptyset < 0$ pour $\emptyset \neq \theta W,\ \theta \in R$. (négativité)

Preuve : Le produit matriciel (31) donne immédiatement $W'K \equiv 0$ et $W'k \equiv 1$. La symétrie de la première matrice de gauche de (31) implique $K \equiv K'$, ce qui implique, à son tour $KW \equiv 0$. Le produit matriciel donne aussi $D^2VK + WK \equiv I$. Prémultiplions par $\emptyset'K'$, post-multiplions par $\emptyset$ et construisons $\xi' \equiv \emptyset'K'$ de façon à obtenir $\xi'D^2V\xi \equiv \emptyset'K\emptyset$. Le lemme C.2 et la propriété $KW \equiv 0$ impliquent $\emptyset'K\emptyset < 0$ pour $\emptyset \neq \theta W,\ \theta \in R$.□

Cette proposition permet de caractériser en partie les différentielles des fonctions de demande temporaire (équations 29 et 30) qui s'écrivent

$$dX = [X_w + X_M X']dW + X_\pi[\pi_w dW + \pi_{\underset{\sim}{W}} d\underset{\sim}{W}] + X_M[dM - X'dW]\ . \tag{33}$$

La comparaison entre (32) et (33) implique

$$\lambda K \equiv [X_w + X_M X']\ ,$$
$$k \equiv X_M\ ,$$
$$-KV_{xw} \equiv X_\pi\ \pi_w\ ,$$
$$-KV_{x\underset{\sim}{W}} \equiv X_\pi\ \pi_{\underset{\sim}{W}}\ .$$

Donc, la différentielle (33) peut s'écrire

$$dX = \lambda \; K \; dW + k[dM - X'dW] + X_{\pi}[\pi_{w}dW + \pi_{\underset{\sim}{W}}d\underset{\sim}{W}] \; . \qquad (34)$$

L'équation (34) constitue la structure locale de Slutsky pour le consommateur en contexte temporaire. Le premier terme de droite représente l'effet substitution, le deuxième l'effet richesse, et le troisième l'effet anticipation.

La proposition suivante permet de dégager une dernière propriété des fonctions de demande temporaire.

Proprosition C.5 : Les fonctions de demande temporaire sont homogènes de degré zéro en $(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1})$.

Preuve : (Théorème d'Euler). Nous avons $KW + k[M - X'W] + X_{\pi}[\pi_{w}W + \pi_{\underset{\sim}{W}}\underset{\sim}{W}] = 0$ car le premier terme est nul par la proposition C.4, le deuxième est nul à l'optimum, et le troisième est nul suite à l'hypothèse C.4.

Comme pour le producteur, nous obtenons une caractérisation des fonctions théoriques de demande temporaire. Les fonctions observables sont de la forme $X = \emptyset(W, \underset{\sim}{W}, P'\omega + A_{-1})$. Les propriétés observables des fonctions de demande temporaire sont regroupées dans la proposition qui suit.

Proposition C.6 : Les demandes observables sont homogènes de degré zéro en $(\underset{\sim}{W}, W, A_{-1})$ et vérifient une propriété d'additivité c'est-à-dire $W'\emptyset_{M} \equiv 1$ où $\emptyset_{M}$ est le vecteur des effets richesse observés. Aucune autre caractéristique ne peut être déduite à moins de connaître le processus de formation des anticipations $\pi(W, \underset{\sim}{W})$.

Preuve : L'homogénéité découle de la proposition C.5. Pour vérifier l'additivité, notons que la différentielle des fonctions de demande observables s'écrit

$$dX = \phi_W dW + \phi_{\underline{W}} d\underline{W} + \phi_M dM \ , \qquad (35)$$

où $M \equiv P'\omega + \gamma A$. La comparaison entre (34) et (35) implique

$$\phi_W \equiv \lambda K + X_\pi \pi_W - kX' \ ,$$
$$\phi_{\underline{W}} \equiv X_\pi \pi_{\underline{W}} \ ,$$
$$\phi_M \equiv k \ ,$$

ce qui n'implique aucune caractérisation observable, à l'exception de $W'\phi_M \equiv 1$, à moins de connaître $\pi(W, \underline{W})$. □

Comme pour le producteur, l'arbitraire des fonctions d'anticipation fait perdre toute propriété aux fonctions de demande observées. Il demeure néanmoins une caractérisation des fonctions de demande théoriques que nous utiliserons dans le reste de cette thèse.

CHAPITRE IV

Existence et optimalité de l'équilibre temporaire

Dans ce chapitre nous démontrerons l'existence d'un système de prix d'équilibre. Toutefois, avant d'aborder cette démonstration, nous devons discuter de la répartition des dividendes. Puisque nous nous situons dans une économie de propriété privée, les dividendes sont répartis entre les consommateurs selon les parts qu'ils détiennent dans les entreprises. Pour restreindre l'analyse à des dimensions raisonnables, nous ferons les hypothèses suivantes. Les parts détenues par les consommateurs et la politique de dividendes des entreprises sont connues et déterminées une fois pour toute. Ces hypothèses sont évidemment restrictives, mais endogénéiser les parts et les dividendes nous aurait entraîné loin de notre but qui est la dynamique de l'équilibre temporaire. Le lecteur intéressé pourra se référer à Malinvaud (1982; chapitre 11, section II).

Ces hypothèses modifient quelque peu les contraintes de financement des producteurs et de budget des consommateurs. La contrainte de financement de la firme j s'écrit maintenant

$$\Lambda_j + P'a_j + \gamma A_j = P'b_j + A_{j,-1}$$

où Λ_j représente le dividende versé par la firme j. La contrainte de budget de consommateur i s'écrit

$$P'x_i + \gamma A_i = P'\omega_i + A_{i,-1} + \sum_j \theta_{ij} \Lambda_j$$

où θ_{ij} est la part de l'entreprise j détenue par le consommateur i.

Cette formulation des contraintes individuelles aura pour effet d'introduire un argument aux fonctions de demande et d'offre qui s'écriront maintenant respectivement, avec $\Lambda_i = \sum_j \theta_{ij} \Lambda_j$,

$$X_i(W, \underset{\sim}{W}, A_{i,-1}, \Lambda_i) \equiv \begin{bmatrix} x_i(W, \underset{\sim}{W}, A_{i,-1}, \Lambda_i) \\ A_i(W, \underset{\sim}{W}, A_{i,-1}, \Lambda_i) \end{bmatrix}$$

et

$$Y_j(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{j,-1},\ \Lambda_j) \equiv \begin{bmatrix} b_j - a_j(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{j,-1},\ \Lambda_j) \\ A_{j,-1} - A_j(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{j,-1},\ \Lambda_j) \end{bmatrix} .$$

A partir de maintenant nous écrirons $y_j(\cdot) \equiv b_j - a_j(\cdot)$. En procédant comme dans les deux chapitres précédents, il est facile de démontrer que ces fonctions sont homogènes de degré zéro en $(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{-1},\ \Lambda_i,\ \Lambda_j)$ et une fois continûment différentiables.

Nous allons maintenant caractériser les fonctions de demandes excédentaires qui sont définies comme suit

$$Z(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{-1},\ \Lambda) \equiv \begin{bmatrix} \sum_i x_i(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{i,-1},\ \Lambda_i) - \sum_j y_j(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{j,-1},\ \Lambda_j) - \sum_i \omega_i \\ \sum_i A_i(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{i,-1},\ \Lambda_i) + \sum_j A_j(W,\ \underset{\sim}{W},\ A_{j,-1},\ \Lambda_j) \end{bmatrix}$$

où $A_{-1} \equiv (A_{i,-1},\ A_{j,-1})$;
$\Lambda \equiv (\Lambda_i,\ \Lambda_j)$.

Proposition E.1 : Les demandes excédentaires sont homogènes de degré zéro en leurs arguments, une fois continûment différentiables et respectent la loi de Walras.

Preuve : L'homogénéité et la différentiabilité découlent des propriétés des diverses fonctions de demande et d'offre. Pour démontrer la loi de Walras, il faut procéder comme suit. La contrainte budgétaire du consommateur i est

$$P'x_i(\cdot) + \gamma\ A_i(\cdot) \equiv P'\omega_i + A_{i,-1} + \sum_j \theta_{ij}\ \Lambda_j . \qquad (36)$$

Par définition de la contrainte de financement de la firme j, nous avons

$$\Lambda_j \equiv P'y_j(\cdot) + A_{j,-1} - \gamma\, A_j(\cdot)\ . \qquad (37)$$

Nous pouvons substituer (37) dans (36) et sommer sur i de façon à obtenir

$$P'[\sum_i x_i - \sum_i \omega_i] + \gamma[\sum_i A_i(\cdot) + \sum_j A_j(\cdot)] \equiv P' \sum_j y_j(\cdot)$$
$$+ [\sum_i A_{i,-1} + \sum_j A_{j,-1}]\ . \qquad (38)$$

Pour obtenir ce résultat nous avons tenu compte du fait que $\sum_i \theta_{ij} = 1$. Puisque $[\sum_i A_{i,-1} + \sum_j A_{j,-1}] = 0$ (ce qui peut être démontré par récurrence), l'équation (38) peut être écrite

$$[P' \quad \gamma] \begin{bmatrix} \sum_i x_i(\cdot) - \sum_j y_j(\cdot) - \sum_i \omega_i \\ \sum_i A_i(\cdot) + \sum_j A_j(\cdot) \end{bmatrix} \equiv 0$$

ou encore $W'Z(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1}, \Lambda) \equiv 0$.

Ce résultat est vérifié pour tout $(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1}, \Lambda)$ et est appelé loi de Walras.□

Cette caractérisation est suffisante pour établir l'existence d'un système de prix d'équilibre.

Proposition E.2 : Les demandes excédentaires $Z(W, \underset{\sim}{W}, A_{-1}, \Lambda)$ caractérisées par la proposition E.1 admettent un système de prix W^* qui permet d'équilibrer simultanément tous les marchés, c'est-à-dire $Z(W^*, \underset{\sim}{W}, A_{-1}, \Lambda) = 0$.

Preuve : La preuve est conventionnelle. Le lecteur peut se référer à Varian (1984, p. 218).□

Pour clore ce chapitre, nous énoncerons une proposition concernant l'optimalité de l'équilibre temporaire.

Proposition E.3 : Si $((x_i), (A_i), (y_j), (A_j), (W))$ est un équilibre concurrentiel, il est optimal institutionnellement.

Preuve : Procédons par l'absurde. Il existe une allocation réalisable (c'est-à-dire qui respecte la loi de Walras) $((\overline{x}_i), (\overline{A}_i), (\overline{y}_j), (\overline{A}_j), (W))$ plus efficace que $((x_i), (A_i), (y_j), (A_j), (W))$. Puisque les consommateurs maximisent leur utilité, alors

$$P'\overline{x}_i + \gamma\,\overline{A}_i \geq P'\omega_i + A_{i,-1} + \sum_j \theta_{ij}[P'y_j + A_{j,-i} - \gamma\,A_j]$$

pour tout i avec l'inégalité stricte vérifiée pour au moins un consommateur. En sommant sur i et en tenant compte du fait que $\sum_i \theta_{ij} = 1$, nous avons

$$P'\sum_i \overline{x}_i + \gamma \sum_i \overline{A}_i > P'\sum_i \omega_i + \sum_i A_{i,-1} + \sum_j [P'y_j + A_{j,-1} - \gamma_t\,A_j]\ . \qquad (39)$$

A l'optimum nous avons

$$\sum_j [P'y_j + A_{j,-1} - \gamma\,A_j] = \sum_j \Lambda_j\ . \qquad (40)$$

De plus, puisque $((\overline{x}_i), (\overline{A}_i), (\overline{y}_j), (\overline{A}_j), (W))$ est réalisable, nous avons aussi

$$\begin{aligned} P'\sum_i \overline{x}_i + \gamma \sum_i \overline{A}_i &= P'\sum_i \omega_i + \sum_i A_{i,-1} + \sum_j [P'\overline{y}_j + \overline{A}_{j,-1} - \gamma_t\,A_j]\ , \\ &= P'\sum_i \omega_i + \sum_i A_{i,-1} + \sum_j \Lambda_j\ . \end{aligned} \qquad (41)$$

Les équations (39), (40) et (41) impliquent $\sum_j \Lambda_j > \sum_j \Lambda_j$, d'où la contradiction.□

Cette dernière proposition nécessite une explication. La notion d'efficacité qui est incorporée est fonction du nombre de marchés existants. Ce qui est dit, c'est qu'étant donné le nombre de marchés existants, un système de prix d'équilibre a permis tous les arbitrages possibles. Cependant, nous comprenons que s'il y avait plus de marchés, il y aurait place à d'autres arbitrages (transactions) et que dans ce cas il serait possible d'atteindre un état socialement supérieur. Puisqu'il n'y qu'un actif financier et qu'il y a plusieurs états de la nature, l'optimum atteint par le modèle que nous décrivons est inférieur à l'optimum décrit par Arrow (1953) où il y a autant d'actifs que d'états de la nature et ce, même si nous supposions des prévisions parfaites comme le faisait Arrow. Un optimum temporaire institutionnel pour une économie ayant peu d'actifs financiers a donc toutes les chances de mener à des inefficacités intertemporelles.

CHAPITRE V

Dynamique de l'équilibre temporaire

Dans les chapitres précédents nous avons successivement décrit les caractérisations qui découlent du comportement rationnel du producteur et du consommateur, puis nous avons démontré que ce comportement admettait un vecteur de prix qui équilibrait simultanément tous les marchés. Dans ce qui suit, nous supposerons que l'économie est à l'équilibre à chaque période.

Hypothèse D.1 : $Z(W, \underset{\sim}{W}) = 0$.

Notre but est d'étudier la dynamique engendrée par le système d'équations à récurrence $Z(W, \underset{\sim}{W})$. Les fonctions de demande temporaire excédentaire sont sous forme implicite et possiblement non linéaire. A ce niveau de généralité, il ne semble pas possible de traiter mathématiquement cette équation, du moins pas à partir de techniques que nous connaissons. Nous allons donc faire une autre hypothèse passablement forte.

Hypothèse D.2 : $Z(W, \underset{\sim}{W})$ est linéaire.

Nous allons maintenant utiliser un développement de Taylor du premier ordre (puisque $Z(W, \underset{\sim}{W})$ est linéaire) de façon à rendre explicite W. Mais auparavant nous allons réduire l'ordre de récurrence de $Z(W, \underset{\sim}{W})$. $\underset{\sim}{W}$ est composé des vecteurs de prix passés allant jusqu'à la $\underset{\sim}{T}^{\text{ième}}$ période. $Z(W, \underset{\sim}{W})$ est donc un système d'équations à récurrence d'ordre $\underset{\sim}{T}$. Nous allons le transformer en un système d'ordre un. Il s'agit en fait de mémoriser les retards en définissant de nouvelles variables, soit

$$Q_t^\tau = W_{t-\tau-1} \quad \text{pour} \quad \tau = 0, 1, \ldots, \underset{\sim}{T} .$$

Nous pouvons réécrire $Z(W, \underset{\sim}{W})$ comme suit

$$Z(Q^{o}_{t-1}, Q^{o}_{t}, Q^{1}_{t}, \ldots, Q^{T}_{t}) = 0 ,$$

$$Q^{\tau}_{t+1} = Q^{\tau-1}_{t} \qquad \text{pour} \quad \tau = 1, \ldots, \underset{\sim}{T} .$$

L'expansion de Taylor de $Z(\cdot) = 0$ autour du vecteur $\overline{Q} = (\overline{Q}^{o}_{t+1}, \ldots, \overline{Q}^{T}_{t})$ donne $Z(Q) = Z(\overline{Q}) + D_Q\, Z(\overline{Q})[Q - \overline{Q}] = 0$. Pour isoler Q^{o}_{t+1}, nous devons faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse D.3 : $|D_{Q^{o}_{t+1}}\, Z(Q)| = 0$.

En tenant compte de cette hypothèse, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} Q^{o}_{t+1} \\ Q^{1}_{t+1} \\ Q^{2}_{t+1} \\ \vdots \\ Q^{T}_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_o & a_1 & \ldots & a_{T-1} & a_T \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^{o}_{t} \\ Q^{1}_{t} \\ Q^{2}_{t} \\ \vdots \\ Q^{T}_{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \chi \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad (42)$$

où $a_\tau = -[D_{Q^{o}_{t+1}} Z(\overline{Q})]^{-1}\, D_{Q^{\tau}_{t}}\, Z(\overline{Q})$ pour $\tau = 0, \ldots, \underset{\sim}{T}$;

χ est la somme des termes constants de l'expansion de Taylor.

Sous forme matricielle, on obtient $Q_{t+1} = AQ_t + B$. La dynamique de ce système est régie par les racines caractéristiques de A. Ces racines sont calculées à partir de $|A - \lambda I| = 0$, ce qui revient à trouver les racines λ telles que $|\lambda^{T+1}\, I - \sum_{i=0}^{T} \lambda^{T-i}\, a_i| = 0$. On peut démontrer facilement que ces racines caractéristiques sont quelconques. D'une part, par le théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu, (Shafer et Sonnenschein, 1982), nous savons que le processus d'agrégation des comportements individuels implique que nous ne pouvons imposer a priori d'autres conditions sur les demandes excédentaires que la continuité et la loi de Walras. D'autre part, l'arbitraire des fonctions d'anticipation $\pi(\cdot)$ (Polemarchakis, 1983) au niveau individuel implique que les coefficients des demandes excédentaires sont aussi arbitraires sans référence au théorème précédent. Chacune de ces raisons est suffisante pour rendre quelconque les sous-matrices a_{τ} et, par conséquent, les racines caractéristiques. Les racines peuvent donc être réelles ou complexes. Elles peuvent aussi être inférieures, égales, ou supérieures à l'unité (en valeur absolue). Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante.

Proposition D.1 : Le comportement dynamique d'une économie peut être stable ou instable, selon que les racines sont toutes à l'intérieur du cercle unité ou qu'au moins une racine est à l'extérieur du cercle unité, et convergera ou divergera de façon monotone ou oscillatoire selon que les racines sont toutes réelles ou qu'au moins une paire de racines est complexe.

Nous pouvons aussi démontrer que l'économie admet des solutions périodiques (cycliques) ou quasi-périodiques. Par périodique nous voulons dire que l'économie se retrouve dans une même situation aux dates t et t+k, avec $k \geq 2$ car pour $k = 1$, nous aurions une solution stable. Par quasi-périodiques nous voulons dire que l'économie sans être instable, n'est ni stable ni périodique. Par abus de langage, nous dirions que l'économie suit un cycle de période infinie. La démonstration de l'existence de solutions périodiques ou quasi-périodiques requiert l'utilisation du théorème de Hopf. La version connue par l'auteur requiert que le système d'équations à récurrence soit de dimension deux (Guckenheimer et Holmes, 1983, p. 162). Il nous faudra donc réduire la dimension du système d'équations (42) et à cet effet nous utiliserons le théorème de la variété centrée (Centre manifold Theorem, Carr (1981, p. 34), Guckenheimer et Holmes (1983, p. 136)). La marche à suivre est donc de partitionner de façon appropriée l'équation (42), de réduire l'ordre de ce système d'équations, et d'appliquer le théorème de Hopf. Le partitionnement est le suivant

$$\begin{bmatrix} Q^a_{t+1} \\ Q^b_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q^a_t \\ Q^b_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^a \\ B^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\ Q^a_t \\ A_{22}\ Q^b_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F(Q^b_t) \\ G(Q^a_t) \end{bmatrix} . \tag{43}$$

Nous allons supposer que les racines caractéristiques de A_{22} sont à l'intérieur du cercle unité et que les racines de A_{11} sont complexes tout en ayant leur partie réelle sur le cercle unité. De plus, nous allons supposer que Q^a_{t+1} est de dimension (2 x 1). Il est bon de remarquer que nous aurions pu admettre une autre sous-matrice dont les racines auraient été à l'extérieur du cercle unité mais cela aurait compliqué l'analyse sans rien ajouter au résultat.

Le théorème de la variété centrée permet de définir dans le cas où F et G sont deux fois continûment différentiables une application h deux fois continûment différentiable,

$$Q^b = h(Q^a) \quad \text{avec} \quad h \in C^2 . \tag{44}$$

Dans notre cas F et G sont des polynômes d'ordre un ce qui permet de vérifier les conditions de différentiabilité. Nous pouvons donc substituer (44) dans (43).

$$\begin{aligned} Q^a_{t+1} &= A_{11}\ Q^a_t + F(h(Q^a_t)) \\ &= A_{11}\ Q^a_t + H(Q^a_t) \end{aligned} \tag{45}$$

La matrice A_{11} est de dimension (2 x 2) et a des racines complexes dont la partie réelle se situe sur le cercle unité. Les coefficients de A_{11} dépendent d'un ensemble de paramètres comme les goûts des consommateurs, la technologie des firmes et les dotations initiales. Considérons un de ces paramètres, u par exemple. Nous pouvons ainsi générer une famille de fonctions à un paramètre

$$Q^{*}_{t+1} = A_{11}(u)Q^{*}_{t} \; . \tag{46}$$

Nous pouvons ne pas tenir compte de $H(Q^{*}_{t})$ car la dynamique locale est régie par $A_{11}\,Q^{*}_{t}$ seulement. L'équation (46) est maintenant sous une forme qui permet d'appliquer directement le théorème de Hopf. Ce théorème nous dit que si une variation du paramètre u a pour effet que la partie réelle des racines caractéristiques $\lambda(u)$ de la matrice A_{11} croise le cercle unité avec une vitesse non-nulle, c'est-à-dire

$$\frac{d\lambda(u)}{du} \neq 0 \; ,$$

et que $\lambda^{i} \neq 1$ pour i = 1, 2, 3, 4, alors il se crée une courbe invariante de dimension deux dans l'espace des variables Q^{*} sur laquelle les solutions du système (46) évolueront. Les solutions peuvent être périodiques ou quasi-périodiques.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Proposition D.2 : Le comportement dynamique d'une économie peut être périodique ou quasi-périodique.

La réunion des deux propositions D.1 et D.2 nous permet finalement d'énoncer la dernière proposition de ce travail.

Proposition D.3 : La dynamique de l'équilibre temporaire avec production est donnée par l'équation (42) dont les paramètres découlent du comportement rationnel des consommateurs et des producteurs défini dans le sens du respect des préordres individuels. L'arbitraire qui découle des fonctions d'anticipations et de l'agrégation implique qu'aucune restriction ne peut être imposée au comportement dynamique de l'économie.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Nous avons décrit un modèle d'équilibre temporaire avec production. Dans un premier temps nous avons formulé des modèles de comportement individuel pour les producteurs et les consommateurs qui permettent une caractérisation des fonctions de demande et d'offre temporaires, et ce, pour les biens de consommation et l'actif financier. C'est à partir de cette caractérisation que nous avons abordé les propriétés globales de l'économie, c'est-à-dire l'existence, l'optimalité et la dynamique. Cependant nos résultats sont pauvres en restrictions observables, cela découlant de l'arbitraire des fonctions d'anticipation. En ce sens nous retrouvons le résultat de Polemarchakis (1983). A notre avis ce problème s'explique par le fait que les anticipations sont considérées comme concept primitif plutôt que découlant du processus optimisateur des agents. A ce titre il y a une asymétrie entre le traitement des anticipations et celui des préférences. Nous croyons qu'en traitant les anticipations de la même façon que les préférences il serait possible d'obtenir une caractérisation plus complète des fonctions théoriques de demande et d'offre temporaire au niveau individuel et qu'ainsi, en supposant résolu le problème d'agrégation, nous pourrions obtenir des résultats plus spécifiques au niveau de la dynamique de l'équilibre temporaire. De plus cela permettrait une caractérisation des fonctions de comportements observables.

Dans un deuxième temps, après avoir démontré la cohérence logique de notre modèle en abordant la question de l'existence de l'équilibre, nous avons établi la relation entre l'équilibre temporaire et l'optimum institutionnel. Il ressort qu'étant donnés les marchés (institutions) existants, un équilibre concurrentiel permet tous les arbitrages possibles. Mais le nombre de marchés financiers (un dans notre cas) est trop faible pour assurer la réalisation d'un optimum intertemporel, et ce, même si les agents anticipaient parfaitement les prix comme pour le cas étudié par Arrow (1953). Dans ce cas il faudrait autant d'actifs financiers qu'il y a d'états de la nature (S dans notre cas).

Finalement, notre démarche nous a permis d'étudier la dynamique des équilibres temporaires engendrée par le comportement rationnel des agents en situation d'incertitude. Concernant l'analyse de la dynamique, nos résultats semblent ambivalents. D'une part, le cadre d'analyse de l'équilibre temporaire permet de formuler une théorie de la dynamique économique explicite mais, d'autre part, la caractérisation des fonctions d'offre et de demande ne permet pas de restreindre d'une quelconque façon la nature des sentiers dynamiques que peut emprunter une économie (proposition D.3). A notre avis, pour être pleinement appréciée, cette impossibilité de caractériser la dynamique d'une économie doit plutôt être vue comme un théorème de possibilité. Dans la réalité, nous pouvons observer une grande diversité de comportement dynamique des variables économiques. Si la théorie économique ne permettait pas de représenter cette diversité de comportement, nous aurions une preuve par l'absurde que la théorie économique (sous la forme retenue) est fausse. La proposition D.3 semble donc, à ce titre, fondamentale. Ce résultat découle de deux phénomènes indépendants. Le premier est l'arbitraire des fonctions d'anticipation qui fait perdre une partie de la caractérisation des fonctions d'offre et de demande. Nous avons déjà mentionné comment il faudrait, à notre avis, résoudre ce problème. Le deuxième est le processus d'agrégation. Même en l'absence d'anticipations, l'arbitraire engendré par l'agrégation est suffisant pour faire perdre toute caractérisation des sentiers dynamiques de l'économie. Pour lever cet arbitraire il faut recourir à des hypothèses sur la nature des fonctions de distribution des revenus (Hildenbrand, 1983) et/ou des pré-ordres (Grandmont, 1978). L'application de tels procédés à des comportements sous incertitude reste à faire.

Nous venons de mentionner que l'étude des processus d'anticipation et d'agrégation est une voie de recherche privilégiée car elle pourrait permettre d'éliminer deux sources d'arbitraire. Dans l'éventualité où cela se réalise une autre voie de recherche semble intéressante. Il s'agit de l'introduction du gouvernement et de la monnaie. Cela permettra de déboucher sur des questions de politiques macroéconomiques car un équilibre temporaire laisse place à des inefficacités intertemporelles. La façon de modéliser le comportement du gouvernement qui serait cohérente avec le reste du modèle demeure une question ouverte.

Les problèmes de dynamique en équilibre temporaire en sont encore à leurs premiers balbutiements. Etant donnée leur position centrale en théorie économique nul doute que des développements spectaculaires sont à venir.

APPENDICE

Preuves des lemmes P.2 et C.2

Les preuves des lemmes P.2 et C.2 reposent sur deux théorèmes qui lient les fonctions-objectif initiales et les fonctions-objectif dérivées. Dans cet appendice nous établissons ces théorèmes ce qui permettra la démonstration immédiate des lemmes P.2 et C.2.

Le théorème de Von Neumann-Morgenstern (1944, p. 92) sur les maxima nous dit que

$$\begin{aligned}\underset{x,y}{\mathrm{Max}}\{f(x,y) : g(x,y) = 0 \text{ et } k(x) = 0\} &= \underset{x}{\mathrm{Max}}\{\underset{y}{\mathrm{Max}}\{f(x,y) : g(x,y) = 0\} : k(x) = 0\},\\ &= \underset{x}{\mathrm{Max}}\{h(x) \equiv f(x,y(x)) : k(x) = 0\}.\end{aligned}$$

Dans cet appendice nous établirons les relations qui existent entre les fonctions f, g et k, d'une part, et h, d'autre part, quant à leur courbure et leur classe de différentiabilité. Nous ferons les hypothèses suivantes.

Hypothèse A.1 : Les fonctions f, g et k sont deux fois continûment différentiables, c'est-à-dire $f \in C^2$, $g \in C^2$ et $k \in C^2$.

Hypothèse A.2 : La fonction f est fortement concave et les fonctions g et k sont convexes, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}&\emptyset' D^2 f \emptyset < 0 \quad \text{pour} \quad \emptyset \neq 0 ,\\ &\theta' D^2 g \theta \geq 0 ,\\ &\xi' D^2 k \xi \geq 0 .\end{aligned}$$

L'hypothèse A.2 assure le respect des conditions de deuxième ordre. Nous établirons les théorèmes suivant

Théorème A.1 : La fonction h est deux fois continûment différentiable, c'est-à-dire $h \in C^2$.

Théorème A.2 : La matrice hessienne de la fonction $L_2 = h - uk$ est définie négative, c'est-à-dire

$$dx'[D^2h - uD^2k]dx < 0 \,, \quad \text{pour } dx \neq 0 \text{ et } k_x^{'}dx = 0.$$

Preuve du théorème A.1 : Commençons par résoudre le problème $\underset{y}{\mathrm{Max}}\{f(x,y) : g(x,y) = 0\}$. Le lagrangien est

$$L_3 = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

et les conditions de premier ordre sont

$$f_y - \lambda g_y = 0 \,, \tag{A.1}$$

$$-g(x,y) = 0 \,. \tag{A.2}$$

La condition de deuxième ordre est vérifiée grâce à l'hypothèse A.2. De plus, suite à cette hypothèse, la jacobienne des conditions de premier ordre a un déterminant non nul ce qui implique, par le théorème des fonctions implicites, l'existence des fonctions une fois continûment différentiables

$$y = y(x), \quad \text{avec} \quad y \in C' \,, \tag{A.3}$$

$$\lambda = \lambda(x), \quad \text{avec} \quad \lambda \in C' \,. \tag{A.4}$$

On incorpore ces fonctions dans le lagrangien de façon à obtenir

$$\begin{aligned} h(x) &\equiv f(x,y(x)) - \lambda(x)\, g(x,y(x)) \,, \\ &\equiv f(x,y(x)) \,, \end{aligned} \tag{A.5}$$

puisque

$$g(x,y(x)) \equiv 0 \,. \tag{A.6}$$

Par le théorème de l'enveloppe, la dérivée de l'équation (A.5) nous donne

$$h_x = f_x - \lambda g_x \,. \tag{A.7}$$

Puisque $f_x \in C'$ et $g_x \in C'$, par l'hypothèse 1 et que $\lambda \in C'$ par (A.4), il s'ensuit que $h_x \in C'$ et, qu'ainsi, $h \in C^2$.□

Preuve du théorème A.2 : Dérivons (A.7) par rapport à x,

$$h_{xx} = [f_{xx} - \lambda g_{xx}] + [f_{xy} - \lambda g_{xy}]y_x - g_x \dot{\lambda}_x \,. \tag{A.8}$$

Dérivons (A.1) par rapport à x et prémultiplions par $\dot{y}_x$

$$\dot{y}_x[f_{yx} - \lambda g_{yx}] + \dot{y}_x[f_{yy} - \lambda g_{yy}]y_x - \dot{y}_x\, g_y\, \dot{\lambda}_x = 0 \quad . \tag{A.9}$$

La dérivée de $g(\cdot)$ est $g_x + \dot{y}_x\, g_y = 0$. Compte tenu de ce résultat, l'introduction de (A.9) dans (A.8) donne

$$h_{xx} = [I \quad \dot{y}_x] \begin{bmatrix} f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ f_{yx} - \lambda g_{yx} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ y_x \end{bmatrix}$$

et ainsi

$$h_{xx} - uk_{xx} = [I \quad \dot{y}_x] \begin{bmatrix} f_{xx} - \lambda g_{xx} - uk_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ f_{yx} - \lambda g_{yx} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ y_x \end{bmatrix} \,,$$

$$= [I \quad \dot{y}_x][D^2 f - \lambda D^2 g - uD^2 k] \begin{bmatrix} I \\ y_x \end{bmatrix} .$$

Prémultiplions par dx' et post-multiplions par dx. Construisons $\xi' = dx'[I \quad \dot{y}_x]$ tel que $\xi' \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \xi' \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ de façon à obtenir

$$dx'[D^2 h - uD^2 k]dx = \xi'[D^2 f - \lambda D^2 g - uD^2 k]\xi .$$

Par construction de ξ, nous avons que ξ et dx s'annulent simultanément, donc $\xi \neq 0$ implique $dx \neq 0$. De plus ξ est tel que $\xi' \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} =$

$dx'[I \ \dot{y}_x] \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = 0$ pour tout dx' et $\xi' \begin{bmatrix} k_x \\ 0 \end{bmatrix} = dx'k_x = 0$ pour $dx' \neq 0$.

L'hypothèse A.2 implique $dx'[D^2h - uD^2k]dx < 0$ pour $dx \neq 0$ et $\dot{k}_x dx = 0$. □

Corollaire A.1 : Dans le cas où $k_x = 0$, les hypothèses A.1 et A.2 impliquent la concavité de h(x).

Preuve : La preuve découle directement du théorème A.2. □

Le corollaire A.1 s'applique directement au lemme P.2 tandis que pour le lemme C.2 il faut utiliser le corollaire A.1 et savoir qu'une combinaison linéaire de fonctions concaves est concave.

BIBLIOGRAPHIE

ARROW, K.J. (1953), "Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques", Econométrie, Colloque international XL, CNRS, Paris, pp. 41-47.

ARROW, K.J. and F.H. HAHN (1971), General Competitive Analysis, San Francisco, CA : Holden-Day.

CARR, J. (1981), Applications of Centre Manifold Theory, New York : Springer-Verlag.

DEBREU, G. (1959), Theory of Value, New York : Wiley.

DEBREU, G. (1962), "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis", International Economic Review, 3 : 257-73.

FARMER, R.E.A. (1985), "Deficits and Cycles", International Conference on Nonlinear Economic Dynamics, June 17-20, Paris.

FUCHS, G. (1976), "Asymptotic Stability of Stationnary Temporary Equilibria and Changes in Expectations", Journal of Economic Theory, 13 : 201-16.

FUCHS, G. (1977), "Formation of Expectations : A Model in Temporary General Equilibrium Theory", Journal of Mathematical Economics, 4 : 167-87.

FUCHS, G. (1979), "Dynamics of Expectations in Temporary General Equilibrium Theory", Journal of Mathematical Economics, 6 : 229-51.

FUCHS, G. and G. LAROQUE (1976), "Dynamics of Temporary Equilibria and Expectations", Econometrica, 44(6) :1157-78.

GRANDMONT, J.M. (1977), "Temporary General Equilibrium Theory, Econometrica, 45(3) : 535-75.

GRANDMONT, J.M. (1978), "Intermediate Preferences and the Majority Rule", Econometrica, 46(2) : 317-330.

GRANDMONT, J.M. (1985), "On Endogenous Competitive Business Cycles", Econometrica, 53(5) : 995-1045.

GRANDMONT, J.M. and G. LAROQUE (1973), "Money in the Pure Consumption Loan Model", Journal of Economic Theory, 6 : 382-95.

GUCKENHEIMER, J. and P. HOLMES (1983), Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, New York : Springer-Verlag.

HICKS, J.R. (1936), Valeur et capital, Paris : Dunod.

HICKS, J.R. (1956), "Methods of Dynamic Analysis", in J.R. Hicks, Money, Interest and Wages, Collected Essays on Economic Theory, Vol. II, 1982, Harvard University Press, Cambridge, Massachussetts.

HILDENBRAND, W. (1983), "On the "Law of Demand" ", Econometrica, 51(4) : 997-1020.

MALINVAUD, E. (1982), Leçons de théorie microéconomique, Paris : Dunod.

POLEMARCHAKIS, H.M. (1983), "Expectations, Demand and Observability", Econometrica, 51(3) : 565-74.

SAMUELSON, P.A. (1947), Les fondements de l'analyse économique, Paris : Dunod.

SAMUELSON, P.A. (1958), "An Exact Consumption Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", Journal of Political Economy, 66 : 467-82.

SHAFER, W, and H. SONNENSCHEIN (1982), "Market Demand and Excess Demand Functions", in Handbook of Mathematical Economics, K. Arrow and M. Intriligator, Eds., Amsterdam : North-Holland, pp. 671-93.

SMITH, A. (1776), The Wealth of Nations, London.

VON NEUMANN, J. and O. MORGENSTERN (1944), Theory of Games and Economic Behavior, Princeton : Princeton University Press.

VARIAN, H. (1984), Microeconomic Analysis, New York : Norton.