

Université de Montréal

**Simulations magnétohydrodynamiques
en régime idéal**

par

Jean-François Cossette

Département de Physique
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Philosophiae Doctor (Ph.D.)
en physique

Décembre, 2014

© Jean-François Cossette, 2014

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Cette thèse intitulée :

Simulations magnétohydrodynamiques
en régime idéal

présentée par

Jean-François Cossette

a été évaluée par un jury composé des personnes suivantes:

Pierre Bergeron
(Président-rapporteur)

Paul Charbonneau
(Directeur de recherche)

Piotr K. Smolarkiewicz
(Co-directeur de recherche)

Robert Owens
(Membre du Jury)

Mark Rast
(Examineur externe)

Jesús Vázquez-Abad
(Représentant du doyen de la FES)

Thèse acceptée le: 27 décembre 2014

RÉSUMÉ

Cette thèse s'intéresse à la modélisation magnétohydrodynamique des écoulements de fluides conducteurs d'électricité multi-échelles en mettant l'accent sur deux applications particulières de la physique solaire: la modélisation des mécanismes des variations de l'irradiance via la simulation de la dynamo globale et la reconnexion magnétique.

Les variations de l'irradiance sur les périodes des jours, des mois et du cycle solaire de 11 ans sont très bien expliquées par le passage des régions actives à la surface du Soleil. Cependant, l'origine ultime des variations se déroulant sur les périodes décadales et multi-décadales demeure un sujet controversé. En particulier, une certaine école de pensée affirme qu'une partie de ces variations à long-terme doit provenir d'une modulation de la structure thermodynamique globale de l'étoile, et que les seuls effets de surface sont incapables d'expliquer la totalité des fluctuations. Nous présentons une simulation globale de la convection solaire produisant un cycle magnétique similaire en plusieurs aspects à celui du Soleil, dans laquelle le flux thermique convectif varie en phase avec l'énergie magnétique. La corrélation positive entre le flux convectif et l'énergie magnétique supporte donc l'idée qu'une modulation de la structure thermodynamique puisse contribuer aux variations à long-terme de l'irradiance. Nous analysons cette simulation dans le but d'identifier le mécanisme physique responsable de la corrélation en question et pour prédire de potentiels effets observationnels résultant de la modulation structurelle.

La reconnexion magnétique est au coeur du mécanisme de plusieurs phénomènes de la physique solaire dont les éruptions et les éjections de masse, et pourrait expliquer les températures extrêmes ($T \sim 10^6\text{K}$) caractérisant la couronne. Une correction aux trajectoires du schéma semi-Lagrangien classique est présentée, qui est basée sur la

solution à une équation aux dérivées partielles nonlinéaire du second ordre: l'équation de Monge-Ampère. Celle-ci prévient l'intersection des trajectoires et assure la stabilité numérique des simulations de reconnexion magnétique pour un cas de magnéto-fluide relaxant vers un état d'équilibre.

Mots-clés: Soleil, fluides, turbulence, magnétisme, irradiance, convection, reconnexion, simulation, semi-Lagrangien, Monge-Ampère.

ABSTRACT

This thesis concentrates on magnetohydrodynamical modeling of multiscale conducting fluids with emphasis on two particular applications of solar physics: the modeling of solar irradiance mechanisms via the numerical simulation of the global dynamo and of magnetic reconnection.

Irradiance variations on the time scales of days, months, and of the 11 yr solar cycle are very well described by changes in the surface coverage by active regions. However, the ultimate origin of the long-term decadal and multi-decadal variations is still a matter of debate. In particular, one school of thought argues that a global modulation of the solar thermodynamic structure by magnetic activity is required to account for part of the long-term variations, in addition to pure surface effects. We hereby present a global simulation of solar convection producing solar-like magnetic cycles, in which the convective heat flux varies in phase with magnetic energy. We analyze the simulation to uncover the physical mechanism causing the positive correlation and to predict potential observational signatures resulting from the flux modulation.

Magnetic reconnection is central to many solar physics phenomena including flares and coronal mass ejections, and could also provide an explanation for the extreme temperatures ($T \sim 10^6\text{K}$) that characterize the corona. A trajectory correction to the classical semi-Lagrangian scheme is presented, which is based on the solution to a second-order nonlinear partial differential equation: the Monge-Ampère equation. Using the correction prevents the intersection of fluid trajectories and assures the physical realizability of magnetic reconnection simulations for the case of a magneto-fluid relaxing toward an equilibrium state.

Keywords: Sun, fluids, turbulence, magnetism, irradiance, convection, reconnection, simulation, semi-Lagrangian, Monge-Ampère.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des Figures	iv
Liste des Tables	ix
Liste des abréviations	x
Chapitre 1: Introduction	1
1.1 L'activité solaire	2
1.1.1 Les variations de l'irradiance	9
1.2 La modélisation MHD	22
1.2.1 Le régime MHD idéal	26
1.2.2 Approximations numériques	29
1.2.3 Représentation des processus physiques à l'échelle sous-maille	34
1.3 Deux applications	37
1.3.1 La simulation de la dynamo globale	37
1.3.2 La reconnexion magnétique	47
1.4 Projet de doctorat	53
Chapitre 2: (Article) A Monge-Ampère enhancement for semi-Lagrangian methods	55
Abstract	55
2.1 Introduction	56
2.2 The Monge-Ampère equation	58
2.2.1 Interpretation in terms of flow shear	58
2.2.2 Numerics	60
2.3 Results	61

2.3.1	Passive advection in a cellular flow	61
2.3.2	Freely evolving turbulence	64
2.4	Remarks	67
Chapitre 3: (Article) The Monge-Ampère trajectory correction for semi-Lagrangian schemes		71
	Abstract	71
3.1	Introduction	72
3.2	The Monge-Ampère correction	76
3.2.1	Preliminaries	76
3.2.2	Elemental flows; closed-form solutions.	78
3.3	Numerical implementation	84
3.3.1	MHD solver	84
3.3.2	Trajectory schemes	88
3.4	Scalar advection	92
3.5	Relaxation of an ideal magneto-fluid	98
3.5.1	2D magneto-fluid	101
3.5.2	3D magneto-fluid	107
3.6	Summary	112
Chapitre 4: (Article) Cyclic thermal signature in a global MHD simulation of solar convection		118
	Abstract	118
4.1	Irradiance variations and the solar dynamo	119
4.2	Results: Modulation of the convective heat flux	121
4.3	The hunt for the physical mechanism	126
4.4	Remarks	130

Chapitre 5: Modulation du transport convectif	132
5.1 Cycles magnétiques et variations de la luminosité	132
5.2 Caractérisation de l'écoulement	138
Chapitre 6: Discussion et Conclusion	148
Références	151
Annexe A: Équation d'énergie interne	175
Annexe B: État ambiant	176

LISTE DES FIGURES

1.1	Images instantanées de la surface du Soleil.	3
1.2	Éjection de masse coronale et éruption solaire.	5
1.3	Nombre de taches solaires	6
1.4	Fraction d'aire occupée par les taches solaires.	7
1.5	Magnétogramme synoptique.	8
1.6	Séries temporelles des mesures orbitales de l'irradiance solaire et nombre de taches solaires.	11
1.7	Composite PMOD de l'irradiance solaire totale.	12
1.8	Positions du point d'inflexion du limbe à différentes longueurs d'ondes.	17
1.9	Profils de rotation différentielle observés et simulés.	40
1.10	Composante verticale de la vitesse dans une simulation HD à haute résolution de la zone convective.	41
1.11	Évolution de la composante toroïdale du champ magnétique dans une simulation MHD de la zone convective.	43
1.12	Projection Mollweide du champ toroïdal dans une simulation MHD de la zone convective avec zone stable.	44
1.13	Évolution spatio-temporelle du champ magnétique aux grandes échelles d'une simulation MHD effectuée avec EULAG	46
1.14	Instabilité Kink réalisée avec l'option d'advection semi-Lagrangienne d'EULAG-MHD.	48
1.15	Effondrement d'un point X magnétique.	49
1.16	Formation d'une nappe de courant.	51

2.1	Anomalies de contraction et d'expansion du fluide résultant de l'estimation des trajectoires.	59
2.2	Isosurfaces correspondant aux solutions classique et corrigée du transport passif d'un scalaire par un écoulement cellulaire.	62
2.3	Coupes transversales des solutions présentées à la figure 2.2.	63
2.4	Séries temporelles de l'énergie cinétique, de l'enstrophie, et des nombres de Lipschitz et de Courant pour les expériences utilisant les schémas semi-Lagrangien classique et corrigé.	65
2.5	Erreur jacobienne correspondant aux schémas semi-Lagrangien classique et corrigé.	66
2.6	Champ de vorticité initial pour les simulations de turbulence 2D homogène.	67
2.7	Champs de vorticité au temps $t \approx 4.0$ des simulations utilisant les algorithmes semi-Lagrangien classique et corrigé.	68
2.8	Évolution des spectres de puissance correspondant aux expériences utilisant les algorithmes semi-Lagrangien classique et corrigé.	69
2.9	Séries temporelles des écarts types associés aux distributions des éléments hors-diagonaux du tenseur des déformations du fluide pour les expériences de turbulence utilisant les schémas semi-Lagrangien classique et corrigé.	69
3.1	Exemples d'écoulements étant caractérisés soit par la rotation ou la déformation pure du fluide.	79
3.2	Anomalies de contraction et d'expansion du fluide résultant des estimés des trajectoires des parcelles de fluide pour le cas de la rotation pure, corrections des trajectoires de MA et trajectoires exactes.	82
3.3	Anomalies de contraction et d'expansion du fluide résultant des estimés des trajectoires des parcelles de fluide pour le cas de la déformation pure.	83

3.4	Solutions au transport passif d'un scalaire dans un écoulement cellulaire 2D pour les expériences utilisant les algorithmes semi-Lagrangien classique et corrigé.	95
3.5	Solutions au transport passif d'un scalaire dans un écoulement cellulaire 2D pour les expériences utilisant les algorithmes semi-Lagrangien classique et corrigé.	96
3.6	Étapes du processus de relaxation à l'équilibre d'un magnéto-fluide 2D pour une expérience utilisant la correction de trajectoire de MA. . . .	102
3.7	Séries temporelles des énergies cinétiques et magnétiques, du taux de changement de l'énergie totale, de l'hélicité croisée et du jacobien inverse pour les expériences de reconnexion utilisant les algorithmes semi-Lagrangien classique et corrigé.	104
3.8	Anomalies d'expansion et de contraction du fluide dans la solution générée par l'algorithme semi-Lagrangien classique.	107
3.9	Séries temporelles de l'énergie cinétique et du rapport de l'énergie associée à la composante verticale du champ magnétique et de l'énergie magnétique totale correspondant aux expériences de relaxation 3D utilisant les schémas semi-Lagrangien classique et corrigé.	108
3.10	Séries temporelles des hélicités croisées et des hélicités de courant correspondant aux expériences de relaxation utilisant les algorithmes classique et corrigé.	111
4.1	Vue instantanée du flux de chaleur convectif au rayon $r = 0.87R_{\odot}$ d'une simulation globale de la convection MHD et diagramme montrant la corrélation entre la composante verticale de la vitesse du fluide et le flux convectif associé.	124

4.2	Évolution temporelle des moyennes azimutales de la composante toroïdale du champ magnétique et de la déviation par rapport à la moyenne temporelle du flux de chaleur convectif.	125
4.3	Séries temporelles de l'énergie magnétique totale et de la luminosité convective, et diagramme montrant leur corrélation.	127
4.4	Densités de probabilité du flux convectif correspondant aux minima et maxima du cycle magnétique et corrélation du flux convectif avec l'énergie magnétique totale.	128
5.1	Évolution de la moyenne zonale du champ toroïdal.	133
5.2	Évolution de la moyenne zonale des composantes toroïdales et radiales du champ magnétique à la surface du modèle.	134
5.3	Moyennes azimutales de la vitesse angulaire et des perturbations en température.	135
5.4	Séries temporelles de l'énergie magnétique totale et de la luminosité enthalpique.	137
5.5	Profils de la luminosité enthalpique correspondant aux minima et aux maxima du cycle magnétique.	138
5.6	Composante radiale de la vitesse et perturbation en température sur des surfaces sphériques correspondant à différentes altitudes.	139
5.7	Carte de couleur du flux convectif sur une surface située au rayon $r = 0.87R_{\odot}$	140
5.8	Corrélations entre les perturbations en température et la vitesse radiale, entre le flux d'enthalpie et la vitesse radiale, entre le flux d'enthalpie et les perturbations en température à différentes profondeurs.	142
5.9	Vue instantanée de la composante de la vortacité parallèle à l'axe de rotation et de la moyenne azimutale du flux d'enthalpie.	145

5.10	Fonctions de densité de probabilité du flux d'enthalpie, de la perturbation en température et de la vitesse radiale correspondant à différentes altitudes.	146
B.1	Profils de la température potentielle et de l'indice polytropique associés à l'état ambiant.	180

LISTE DES TABLES

1.1	Paramètres physiques associés à différentes régions du Soleil.	28
2.1	Déviations par rapport à la conservation exacte de la masse d'un scalaire transporté par un écoulement cellulaire.	63
3.1	Résultats des expériences de transport passif de scalaires pour un écoulement cellulaire 2D.	94
3.2	Propriétés des solutions à l'équation de MA pour les expériences du transport passif d'un scalaire utilisant le schéma semi-Lagrangien corrigé.	98
3.3	Sensibilité des solutions aux expériences 3D de relaxation magnétique à la précision du jacobien inverse et performance du solveur numérique.	112
5.1	Contributions de chaque type de caractéristique d'écoulement à la luminosité enthalpique correspondant aux minima et aux maxima du cycle d'activité.	143

LISTE DES ABRÉVIATIONS

APT: Astrometric and Photometric Telescope

ASH: Anelastic Spherical Harmonic

EMC: Éjection de masse coronale

FCT: Flux-Corrected Transport

GCR: Generalised Conjugate Gradient

ILES: Implicit Large-Eddy Simulation

IST: Irradiance solaire totale

MA: Monge-Ampère

MHD: Magnétohydrodynamique

MPDATA: Multidimensional Positive Definite Advection Algorithm

NFT: Nonoscillatory Forward-in-time

PMOD: Physikalisches-Meteorologisches Observatorium Davos

SDO: Solar Dynamics Observatory

SL: Semi-Lagrangien

SIM: Solar Irradiance Monitor

SOHO: Solar and Heliospheric Observatory

SORCE: Solar Radiation and Climate Experiment

SPHERIS: Solar Physics Explorer for Irradiance, Radius and Shape

TVD: Total Variation Diminishing

ZC: Zone Convective

À mes parents,

*“In the beginning was the Word,
and the Word was with God,
and the Word was God.
The same was in the beginning with God.
All things were made by him;
and without him was not made any thing made that was made.
In him was life; and the life was the light of men.
And the light shineth in darkness; and the darkness comprehended it not”.*

John 1:1-5, The Holy Bible, King James Version.

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier tout ceux qui m'ont aidé et supporté, soit directement ou indirectement tout au long de la création de cette thèse. En particulier, je tiens à remercier mes superviseurs le Dr. Piotr Smolarkiewicz et le Professeur Paul Charbonneau pour m'avoir enseigné les rudiments du travail de recherche scientifique, mais également pour leur patience, leur confiance, et leur dévouement. J'aimerais exprimer ma gratitude envers les personnes suivantes pour leur soutien technique vital en programmation/visualisation scientifique: Zbigniew Piotrowski, Andrzej Wyszogrodzki, Mihai Ghizaru, Jacques Richer, Patrice Beaudoin et Nicolas Lawson. Je tiens aussi à dire merci à Fernand Beaudet, Cindi Pagano, Guillaume Barlet, Cassandra Bolduc, Corinne Simard, Kim Thibault, Lauren Peterson, Jesse Poulin, Éli Bouchard, Anna Vlassova, Joanna Sławinska et Dorota Jarecka pour leur support. Merci infiniment à mes parents, qui ont traversé avec moi tous les hauts et les bas qui se sont présentés au cours de la création de cet ouvrage. Je tiens à remercier les organismes suivants pour leur aide financière: le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada, le Fond de Recherche du Québec Nature et Technologie, le Centre National de Recherche Atmosphérique des États-Unis et le Département de Physique de l'Université de Montréal.

Chapitre 1

INTRODUCTION

Les étoiles sont des corps gazeux stratifiés, bien représentés par l'équilibre hydrostatique, dans lequel le gradient de pression oppose la force gravitationnelle cherchant à les contracter. Ce gradient existe grâce aux conditions de température, pression et densité résultant de l'évolution physico-chimique du plasma, laquelle est déterminée par les divers stades de nucléosynthèse se succédant à tour de rôle tout au long de leur vie. Du fait de sa proximité, le Soleil est l'étoile pour laquelle nous possédons le plus d'information. Sa structure interne est dominée par le transport radiatif de l'énergie via l'échange de photons dans la portion $r < 0.71R_{\odot}$, qui comprend le coeur où l'énergie est produite via la chaîne de réaction p-p ($r < 0.3R_{\odot}$). À environ $r = 0.71R_{\odot}$ on assiste à une augmentation avec le rayon de l'opacité associée aux éléments H, He, C, N et O, qui provoque une transition à un mode de transport énergétique dominé par la convection plutôt que la radiation [22, 37, 188]. Ce mode persiste dans les 29% extérieurs de l'enveloppe du Soleil formant la zone convective (ZC), qui est caractérisée par un régime hautement turbulent du plasma magnétisé. L'analyse des ondes acoustiques internes via l'héliosismologie a révélé une zone radiative caractérisée par une rotation solide, alors que la zone convective est marquée par une rotation différentielle ayant des périodes de ~ 26 et de ~ 35 jours à l'équateur et près des pôles, respectivement [97]. L'interface entre ces deux régions, connue sous le nom de *tachocline*, ainsi que la couche située immédiatement sous la surface, correspondent à des zones marquées par d'intenses gradients de la rotation différentielle, qui sont associées à un très fort cisaillement du fluide. C'est via l'action du cisaillement que s'effectue la régénération du champ magnétique du Soleil [132]. En particulier, la sensibilité de ce processus au couplage entre la convection et la rotation

explique la grande disparité entre les différentes manifestations du magnétisme stellaire [51]. La chute rapide de la densité dans la partie supérieure de la ZC ($> 0.97R_{\odot}$) conduit à une réduction de la taille caractéristique des cellules convectives. Contrairement au déplacement du plasma occupant la ZC, cet écoulement, appelé *granulation*, est visible à la base de la photosphère ($r = R_{\odot}$), où l'énergie s'échappe sous forme de radiation électromagnétique. Encore plus haut dans la chromosphère et dans la couronne, on observe le prolongement des structures magnétiques, qui émergent à la photosphère au fur et à mesure qu'elles sont engendrées et détruites par l'action continue du fluide et par la reconnexion des lignes de champ. L'interaction entre le plasma solaire et son champ magnétique est décrite par les équations de la *magnétohydrodynamique* (MHD), qui résultent de la fusion des équations de Maxwell de l'électromagnétisme et de la mécanique des fluides.

1.1 L'activité solaire

Les multiples processus MHD caractérisant l'environnement solaire donnent naissance à des transients d'activité de durées beaucoup plus courtes que celle des temps évolutifs associés au brûlage thermonucléaire de ses éléments. On donne le nom d'*activité solaire* à l'ensemble des processus physiques non stationnaires et hors équilibre, qui diffèrent de l'état prédit par la théorie de l'évolution stellaire classique (sans champ magnétique). Ces phénomènes comprennent aussi bien les événements de très courtes durées tels les éruptions (secondes et minutes), les éjections de masse (quelques heures à un jour), le passage des taches solaires à la surface du disque solaire (de quelques jours à quelques mois), ainsi que ceux se déroulant sur les périodes décadales et multi-décadales correspondant à l'évolution aux grandes échelles des structures magnétiques en surface [192].

Les taches solaires correspondent à des concentrations de forts champ magnétiques (~ 1000 Gauss) possédant des températures moins élevées (~ 4000 K) que le reste

de la photosphère (~ 5700 K), d'où leur émissivité réduite par rapport au reste du disque. La figure 1.1 montre trois photographies de la surface visible du Soleil prise à partir du Solar Dynamics Observatory (SDO), correspondant chacune à une portion différente du spectre électromagnétique. L'image à l'extrême droite de la figure 1.1 montre la photosphère dans le domaine de la lumière visible, où l'on peut observer deux principaux groupes de taches situés dans chaque hémisphère. Les

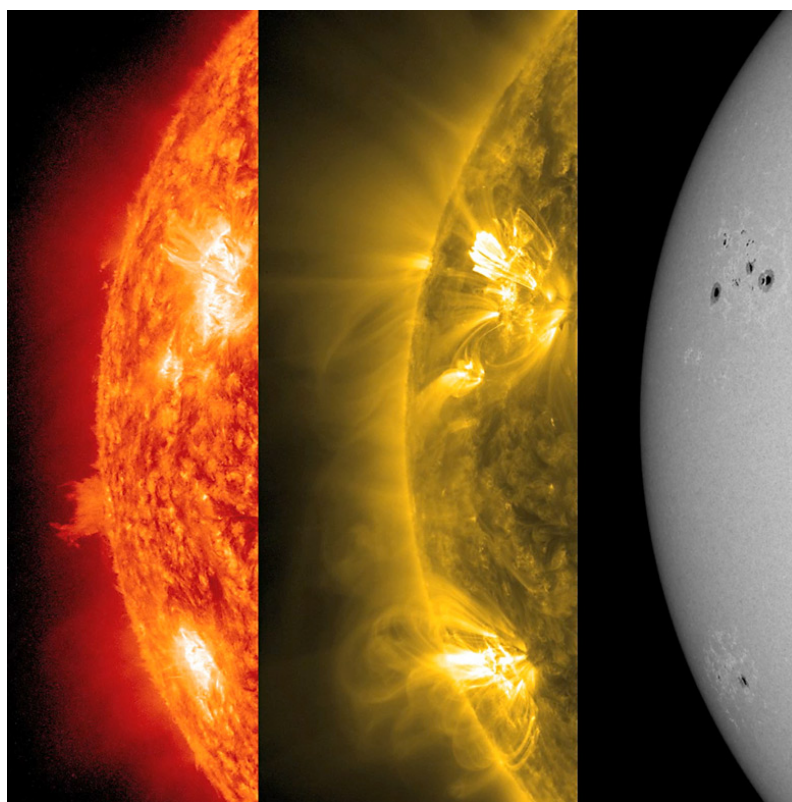


Figure 1.1. Images instantanées de la surface du Soleil prises par le Solar Dynamics Observatory (SDO) correspondant aux longueurs d'onde 304\AA (à gauche), 171\AA (au centre) et à l'intensité lumineuse intégrée dans le domaine visible du spectre électromagnétique (à droite); voir <http://sdo.gsfc.nasa.gov/gallery/main/item/96>.

taches sont composées d'une partie centrale appelée l'ombre et sont parfois entourées d'une pénombre. On peut également constater la présence de petites structures plus

brillantes que l'ensemble du disque nommées facules, qui sont réparties autour des taches.

L'image du centre montre l'émission venant de la raie de fer-9 (Fe IX) du domaine de l'extrême ultraviolet (EUV). Cette raie est formée plus haut dans la couronne à une température d'environ 600 000 K et permet d'identifier les structures magnétiques en forme d'arcades appelées boucles coronales, qui sont ici légèrement plus froides que le reste du plasma de la couronne se situant entre 1 000 000 K et 2 000 000 K [70]. À gauche complètement on peut voir l'émission due à la raie d'hélium-2 (He-II) produite dans la zone de transition et la chromosphère à environ 50 000 K. Cette image met en évidence un nuage de gaz diffus à l'extrémité du disque appelé protubérance tranquille. Ce type de protubérance correspond à une concentration de gaz se mettant à couler vers la chromosphère sous l'effet de la gravité, après avoir été refroidi en étant confiné à une boucle coronale. Le terme *région active* est utilisé afin de désigner les régions du disque associées à un niveau de magnétisme important. En particulier, on peut observer que les régions de la figure 1.1 correspondant aux taches/facules et aux boucles coïncident spatialement, d'où l'utilité du-dit terme.

Les boucles coronales ont des durées de vie allant de quelques heures à plus d'un jour, au bout desquelles elles peuvent se déstabiliser et ainsi mener à la formation d'une éjection de masse coronale (EMC) [95, 159]; voir l'image de gauche de la figure 1.2. Une EMC typique relâche plusieurs milliards de tonnes de plasma solaire dans le milieu interplanétaire et peut être accompagnée d'un bref sursaut d'intensité appelé éruption solaire, qui correspond à l'accélération de particules chargées (électrons et ions) du plasma à des vitesses avoisinant celle de la lumière; voir l'image de droite de la figure 1.2. Lorsque le matériel en provenance d'une EMC rencontre la magnétosphère terrestre, il peut y avoir formation d'un orage géomagnétique, qui est caractérisé par l'induction de puissants courants électriques dans l'atmosphère, lesquels peuvent endommager les lignes de transmissions et perturber de façon significative l'activité humaine. Les EMC et les éruptions présentent également un danger pour la santé

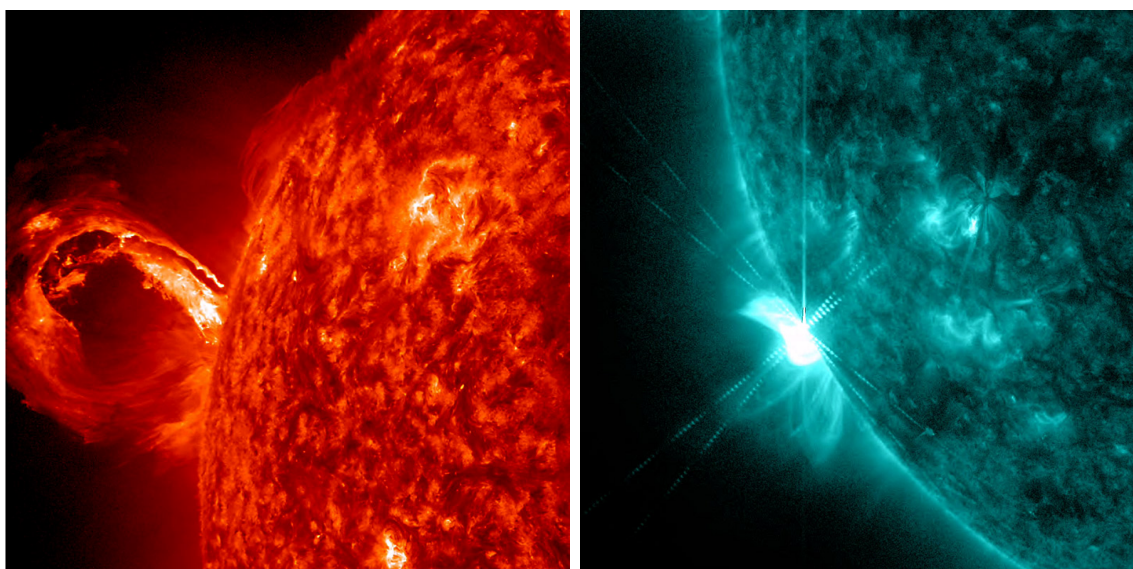


Figure 1.2. Éjection de masse coronale (à gauche à 304 Å) et éruption solaire (à droite à 131 Å); voir <http://sdo.gsfc.nasa.gov/gallery/main/item/193> et <http://sdo.gsfc.nasa.gov/gallery/main/item/165>

des astronautes et le bon fonctionnement des satellites de télécommunication en orbite, les communications radio, ainsi que la planification des vols d'avions de ligne, qui utilisent le système GPS. Par conséquent, la compréhension et la prédiction de ces deux phénomènes demeurent un enjeu crucial pour l'application de mesures préventives nécessaires à la sécurité des infrastructures technologiques.

L'évolution spatio-temporelle du champ magnétique est régie par le cycle d'activité magnétique du Soleil, dont l'indicateur le plus notable est le nombre de taches solaires R_s (voir la figure 1.3). Le nombre de taches solaires est construit à partir des observations faites par différents observateurs depuis le début du 17e siècle et correspond à un estimé représentatif des nombres de taches individuelles et de groupes de taches pour un jour donné. Les fluctuations les plus frappantes de R_s sont associées au fameux cycle solaire de 11 ans, dont l'enveloppe est elle-même modulée par des variations de plus longue durée, incluant d'autres cyclicités ainsi que des périodes de

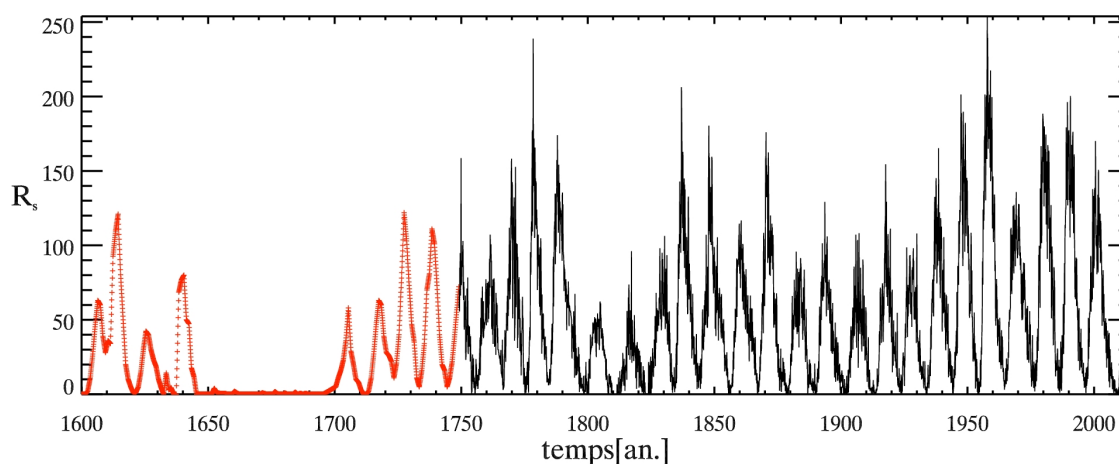


Figure 1.3. Nombre de taches solaires mensuel. La courbe rouge représente le nombre taches solaires de Wolf pour la période (1600-1749); voir <http://www.esrl.noaa.gov/>.

très faible activité, aussi appelés grands minima d’activité. En particulier, la période allant de 1645 à 1715 est marquée par une quasi-absence de taches à la surface du disque, et est connue sous le nom de Minimum de Maunder (MM). De façon assez intrigante, l’intervalle de temps associé au MM est aussi caractérisé par une époque de refroidissement terrestre connue sous le nom de Petit Âge Glaciaire, et met en évidence l’impact potentiel de l’activité solaire sur le climat de la Terre via la modulation de l’irradiance [1, 69, 182]; voir la section 1.1.1.

La figure 1.4 montre la fraction d’aire occupée par les taches par bande latitudinale (image du haut) et par rapport au disque complet (image du bas) en fonction du temps et moyennée sur un jour pour la période 1870-2014. Ce portrait de l’activité est connu sous le nom maintenant très célèbre de ‘diagramme papillon’, en raison du caractère de l’évolution des taches, qui apparaissent d’abord aux moyennes latitudes et migrent vers l’équateur tout au long du cycle de 11 ans, donnant ainsi un comportement qui a l’apparence d’ailes de papillon.

Historiquement, la nature magnétique des taches fût découverte par George Ellery

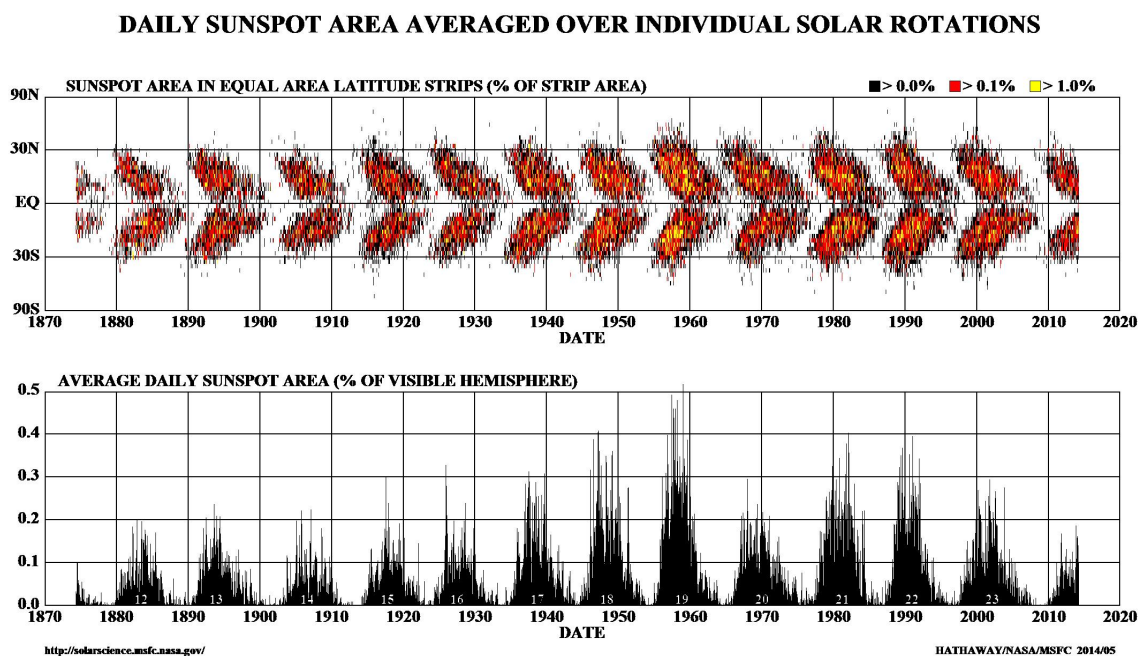


Figure 1.4. Pourcentage de l'aire totale par bande de latitude constante occupée par les taches solaires en fonction de la latitude et du temps (image du haut) et pourcentage d'aire occupée par rapport au disque complet (image du bas); voir <http://solarscience.msfc.nasa.gov/images/bfly.gif>

Hale à l'aide de l'effet Zeeman [93]. Des magnétogrammes (cartes de la composante verticale du champ magnétique à la surface du Soleil) sont générés sur une base régulière depuis 1970 à partir des données de l'Observatoire National de Kitt Peak en Arizona, et mettent en évidence le schéma de propagation des taches visibles dans le diagramme papillon lorsqu'ils sont intégrés dans un magnétogramme synoptique; voir la figure 1.5. Un magnétogramme synoptique est obtenu en moyennant individuellement chaque magnétogramme sur l'espace d'une rotation solaire et en portant cette moyenne en fonction de la latitude et du temps. Les taches apparaissent toujours en paires de composantes précédentes et antécédentes par rapport au sens de la rotation solaire ayant des polarités magnétiques négatives et positives dans un hémisphère

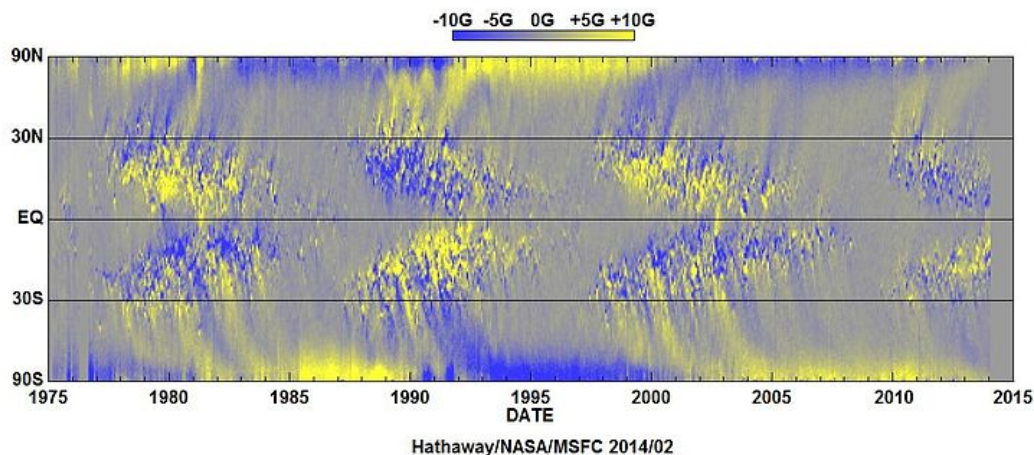


Figure 1.5. Magnétogramme synoptique: composante radiale du champ magnétique en surface moyennée sur une rotation solaire; voir <http://science.nasa.gov/media/medialibrary>

et de sens opposé dans l'autre, et subissant une inversion à chaque début de cycle. Ces lois de polarité, qui sont dues à Hale [94], sont compatibles avec l'organisation d'une composante toroïdale du champ magnétique aux grandes échelles de l'intérieur solaire, qui est antisymétrique par rapport à l'équateur et change de signe dans les deux hémisphères à chaque début de cycle. On note également l'accumulation aux pôles d'une concentration de champ de même polarité que la tache antécédente, dont l'évolution montre un déphasage temporel de $\pi/2$ par rapport au cycle magnétique associé aux taches. Ce schéma de propagation cyclique et spatialement bien organisé des structures magnétiques est le produit d'une série de procédés inductifs MHD dont la modélisation doit éventuellement pouvoir mener à la reproduction des aspects clés sus-mentionnés [27]; voir la section 1.2.

Mis-à-part les statistiques correspondant à l'évolution des taches, il existe aussi d'autres indicateurs pouvant renseigner sur le niveau d'activité à court et à long

terme. Le flux radio correspondant à la longueur d'onde de 10.7 cm, aussi connu sous le nom de F10.7, est dû principalement à l'émission venant des transitions atomiques libre-libre du plasma coronal et à l'émission synchrotron au-dessus des régions actives. Bien que l'aire totale occupée par les taches corrèle de façon excellente avec R_s , on trouve toutefois un moins bon degré de corrélation entre F10.7 et ce dernier, ce qui montre que F10.7 n'est pas directement relié aux taches. Deux autres indicateurs importants fournissant des mesures du niveau de magnétisme en surface sont les indices Ca-II-K et le ratio Mg II. L'un des indicateurs les plus importants faisant l'objet des chapitres 4 et 5 de cette thèse et qui est essentiel à la compréhension de l'impact de l'activité solaire sur le climat terrestre est bien-sûr l'irradiance.

1.1.1 *Les variations de l'irradiance*

L'irradiance spectrale est définie comme le flux monochromatique de radiation électromagnétique reçu à la surface d'un détecteur situé à une unité astronomique du Soleil

$$F_\lambda \equiv \int_{\Omega_\odot} I_\lambda d\Omega, \quad (1.1)$$

où I_λ est la radiance émise par un élément de la surface du disque solaire et Ω_\odot est l'angle solide formé par le disque à la Terre. L'irradiance solaire totale (IST) est mesurée en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ et correspond à l'irradiance spectrale intégrée sur tout le spectre en longueurs d'onde [74]. Les premières mesures de l'IST remontent à celles effectuées par Claude Pouillet et John Herschel au 19^e siècle. Une illustration montrant le concept de l'appareil utilisé par Pouillet, le pyréliomètre, apparaît à la figure 2 de [103]. L'instrument en question consiste en un réservoir d'eau cylindrique monté sur un axe contenant un thermomètre pointé en direction du Soleil. Connaissant la chaleur spécifique de l'eau et le volume du réservoir, on obtient un estimé de l'IST en mesurant son taux de refroidissement une fois l'instrument placé à l'abri du Soleil. Les valeurs obtenues indépendamment par Pouillet et Herschel sont, respectivement, de $1.7633 \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ ($1228.4 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) et $1.44 \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$ ($1003.2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) [103].

En particulier, l'estimé obtenu par Pouillet se situe très près de la valeur absolue de l'IST présentement acceptée ($1360.8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) [107]. Les mesures effectuées plus tard par l'Astrophysical Observatory du Smithsonian Institution entre 1902 et 1962 ne purent mettre en évidence avec certitude l'existence d'une corrélation entre l'activité solaire et l'IST en raison de l'interférence causée par l'atmosphère terrestre [98]. Entre autres, c'est pour cette raison qu'à l'origine l'IST fut nommée *constante solaire*, et qu'on l'a longtemps considérée comme étant invariante, à l'exception des changements se produisant sur les échelles de temps évolutives de l'étoile.

C'est seulement avec l'avènement des observations continues à partir de l'espace au début des années 1980 que la variabilité de l'irradiance en lien avec l'activité solaire a pu être établie hors de tout doute. On sait maintenant que l'IST varie sur les échelles des minutes, des jours et des mois, incluant celle du cycle solaire de 11 ans [74]. L'image du haut de la figure 1.6 montre les différentes mesures de l'IST qui ont été prises à l'aide de radiomètres placés en orbite autour de la Terre, tandis que l'image du bas montre l'évolution du nombre de taches solaires. Chaque instrument montre clairement un signal décadal d'amplitude $\sim 0.1\%$ variant en phase avec le nombre de taches solaires, ainsi que de plus courtes fluctuations allant de quelques jours à quelques mois ayant des amplitudes plus élevées ($\sim 0.3\%$), et dont l'enveloppe est elle-même modulée par le signal du cycle de 11 ans. La grande disparité existant entre les valeurs absolues de l'IST associées à chaque instrument est due à des différences inhérentes entre les méthodes de calibration qui sont utilisées par chaque appareil. En tenant compte des effets dus à la calibration, à la dégradation et aux périodes d'interruption de chaque instrument, il est possible de construire un composite d'irradiance combinant l'ensemble des mesures de l'IST recueillies par chaque expérience. Trois différents composites existent présentement: PMOD (voir la figure 1.7), ACRIM, et IRMB. Les fluctuations à court terme et la relation de phase du signal de 11 ans avec le cycle des taches sont bien reproduites par chaque composite. Toutefois, il existe des désaccords entre les valeurs de l'IST au creux de

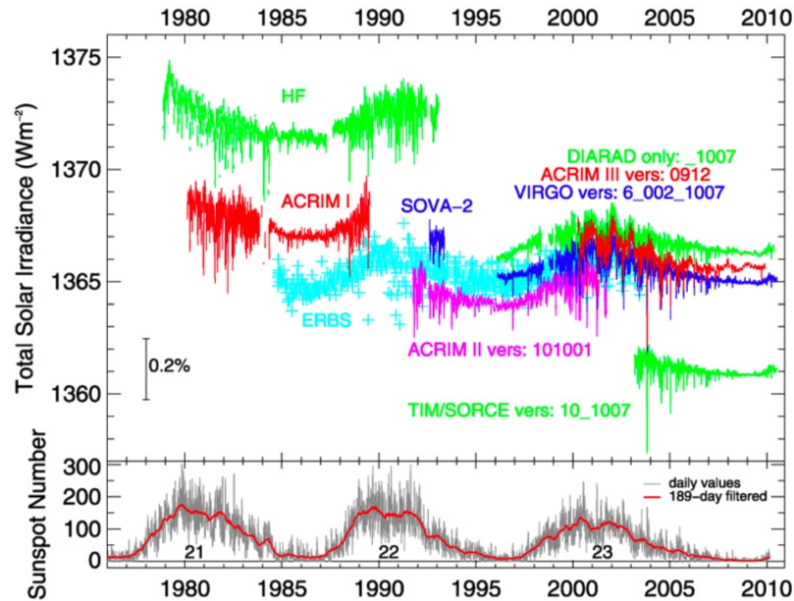


Figure 1.6. Mesures de l'irradiance solaire totale par différents instruments orbitaux (image du haut) et nombre de taches solaires (bas); voir la figure 1 de [73]. Les données couvrent les cycles solaires 21, 22 et 23, ainsi que le début du nouveau cycle 24.

chaque minimum d'activité, lesquels sont représentés par les symboles Min 20/21, Min 21/22, Min 22/23 et Min 23/24 dans la figure 1.7, lesquelles peuvent être attribués à l'utilisation d'approches différentes pour la construction du composite à partir des données originelles.

1.1.1.1 Mécanismes physiques: les deux écoles de pensée

Il existe présentement un consensus sur la nature des mécanismes physiques causant les variations de l'IST sur les périodes des jours et des mois. Celles-ci sont bien représentées par les effets d'assombrissement et d'éclaircissement causés, respectivement, par le passage des taches et des facules à la surface du disque sur la période de la rotation solaire (~ 1 mois) [66]. Ces effets surfaciques réussissent également à expliquer en grande partie les variations à long-terme associées au cycle

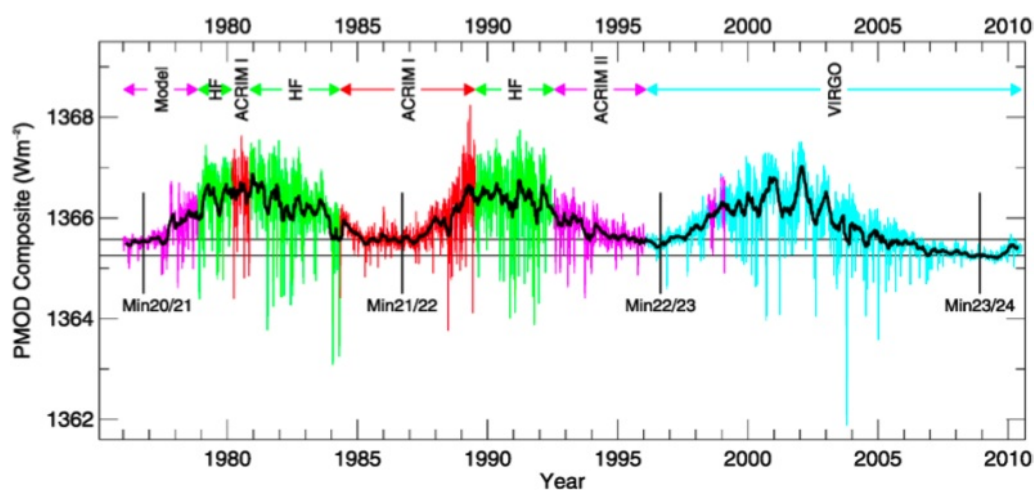


Figure 1.7. Le composite PMOD de l'irradiance solaire totale; voir la figure 2 de [73].

de 11 ans, qui correspondent à l'excès d'irradiance totale observé au maxima du cycle d'activité. Ce dernier s'explique par une surcompensation de l'assombrissement général dû aux taches par l'éclaircissement provoqué par la présence accrue de facules et autres structures magnétisées de tailles plus petites à la surface [67, 68]. En particulier, ces deux explications sont bien supportées par les reconstructions venant de modèles empiriques de l'irradiance incluant uniquement les effets liés au magnétisme de surface [38, 109, 172]. En particulier, les modèles les plus sophistiqués peuvent reproduire jusqu'à 97% des variations de l'IST sur la période d'un cycle, et jusqu'à 92% de la variabilité durant la période allant de 1974 à 2009 [4]. Néanmoins, la possibilité que des sources d'irradiance autres que celles étant reliées au magnétisme en surface puissent également apporter leur contribution aux changements de l'irradiance a été évoquée au fil des années, et forme la base d'un débat opposant deux écoles de pensée sur l'origine ultime des variations de l'IST. Ces sources spéculatives font intervenir des modifications de la structure thermique globale du Soleil et non pas seulement que les effets reliés au magnétisme de surface.

La première école de pensée prétend que la couverture surfacique par les structures magnétiques (taches, facules et réseau) est suffisante pour expliquer la totalité des variations de l'IST, c'est-à-dire à court et à long-terme. L'apparition et la migration périodique de ces structures à la surface, telle que mise en évidence par les magnétogrammes (fig. 1.5), est causée par l'émergence de flux magnétique à la photosphère, qui elle-même dépend ultimement de deux processus distincts d'induction MHD, aussi connus sous le nom de dynamos. La première dynamo est de nature globale et opère possiblement à la tachocline [28]. Celle-ci produit les taches et les facules formant les régions actives en surface et régule par le fait même toute l'activité solaire (voir la section 1.1). La deuxième dynamo est de nature turbulente et se situe près de la surface, et génère le flux magnétique aux petites échelles spatiales du disque [132]. Selon le paradigme de dynamo globale actuel, des tubes de flux magnétique seraient d'abord emmagasinés et amplifiés dans la zone stable sous la tachocline jusqu'à ce qu'ils deviennent sujets à des instabilités de flottaison et remontent à la surface pour donner naissance aux régions bi-polaires constituant les taches et les facules. Les structures magnétiques aux petites-échelles seraient quant-à-elles produites par la fragmentation et l'érosion des régions actives suivant leur apparition à la surface, et possiblement aussi via l'action de la dynamo turbulente [38].

Mis-à-part leur rôle dans la génération de structures magnétiques en surface, ces mêmes processus d'induction peuvent également affecter le transport de la chaleur par l'écoulement du plasma via la force électromagnétique de Lorentz. De même, la génération et la destruction du champ magnétique, qui requiert la conversion de l'énergie thermique produite au coeur en énergie magnétique et vice-versa, contribuent soit à une source ou un puit d'énergie pouvant moduler le transport de la chaleur vers la surface [78, 173]. Les répercussions possibles de tels effets pourraient se manifester par des changements dans la structure thermodynamique globale comme, par exemple, des variations de la température effective et du rayon solaire, lesquels pourraient à leur tour affecter le flux de radiation émergent à la surface. Par conséquent, selon la

deuxième école de pensée, la contribution de ces mécanismes au budget d'irradiance doit être prise en compte afin de représenter correctement toutes les variations de l'IST [110, 116, 171, 180].

Diverses observations ont tenté de déceler de potentielles variations de la température effective. Une technique particulière consiste à mesurer les fluctuations temporelles du rapport des profondeurs de deux raies spectroscopiques que l'on croit être exemptes de l'influence de structures magnétiques en surface. Typiquement, les observations de ces raies se basent soit sur l'irradiance intégrée sur tout le disque solaire ou au centre du disque, là où les régions actives s'introduisent très rarement [196]. Gray & Livingston ont fait l'étude des variations des rapports de la profondeur de la raie de carbone C I 5380 Å à celles des raies Fe I 5379 Å et Ti II 5381 Å pour la période 1978-1992 [89]. En utilisant un ensemble d'étoiles similaires au Soleil ils ont pu déterminer la sensibilité de la température effective δT_{eff} au changement du rapport des profondeurs de chaque raie δr_D , qui s'exprime selon la relation $\delta T_{\text{eff}} = C_o \delta r_D / r_D$, où r_D est le rapport de la profondeur centrale de C I 5380 Å à celle de Fe I à 5379 Å ou Ti II à 5381 Å, et C_o est le facteur exprimant la sensibilité en température [88]. Leurs résultats se basent sur l'irradiance intégrée sur le disque complet et montrent une légère fluctuation de δr_D variant en phase avec le cycle d'activité, qui équivaut à une différence en température de 1.5 K entre maximum et minimum d'activité. Ceux-ci mentionnent également une très faible augmentation continue de la température d'environ 0.01 K par an sur la même période (1978-1992). Cependant, une étude approfondie de la relation entre δT_{eff} et δr_D a par la suite démontré que C_o dépendait de la gravité de surface des étoiles utilisées dans la calibration de [88], et que la correction associée menait à une variation cyclique d'amplitude ~ 3 K [26]. De plus, il s'est avéré que les raies utilisées par Gray & Livingston n'étaient pas complètement libres de l'influence des régions actives, et qu'une modélisation de l'impact du magnétisme en surface sur la profondeur de chaque raie était nécessaire afin d'obtenir un estimé valable de δT_{eff} [145]. Une reconstruction du comportement cyclique des raies en question montre en

effet que celles-ci sont influencées par les régions actives, bien qu'une partie de leur variation doive être expliquée par un phénomène de nature différente. Une analyse indépendante effectuée par Livingston & Wallace utilisant les valeurs de l'irradiance au centre du disque ne révèle pas de variation cyclique dans les rapports des raies observées par Gray & Livingston, bien qu'ils trouvent eux aussi une augmentation graduelle d'environ 0.1 K par an durant la période 1978-1992 [120]. La grandeur exacte des variations de la température effective demeure donc incertaine, étant donné la difficulté des mesures associées à leur très faible amplitude (environ 0.01% sur un cycle complet) [66].

Des variations latitudinales de la structure thermique solaire ont souvent été évoquées dans les modèles essayant d'expliquer le schéma de rotation différentielle déduit par héliosismologie [104, 130, 154, 174]. D'après les estimés théoriques, ces variations spatiales sont probablement de très faible amplitude, impliquant un excès de température aux pôles de quelques degrés par rapport à l'équateur, ce qui complique encore une fois leur détection instrumentale. Comme c'était le cas pour la température effective, plusieurs mesures ont tenté de détecter des variations latitudinales d'origine purement thermique. Les mesures photométriques du limbe mentionnent un excès d'irradiance aux pôles correspondant à une différence d'environ 1.5 – 2.5 K par rapport à l'équateur, bien que cette variation puisse être sujette à une contamination par des structures magnétiques; voir [153] pour une revue des diverses mesures effectuées. La dépendance temporelle de ces variations, comme leur amplitude et leur degré de corrélation avec le cycle d'activité, sont toujours méconnues [112, 198].

Malgré le fait que les mesures des variations de la température en surface soient inconclusives, il est possible de détecter les variations *internes* de la température indirectement via l'héliosismologie. En effet, un changement dans la distribution en température provoqué par le déplacement du fluide peut changer la fréquence d'oscillation des ondes internes acoustiques (modes-p), qui est reliée à la température via la vitesse locale du son ($c_s \propto T^{1/2}$). Chaque mode peut être exprimé en terme

d'une fonction d'onde $\delta p_{nml}(r, \theta, \phi, t) = \Re[\delta p_{nl} Y_l^m(\theta, \phi) e^{i2\pi\nu_{nml}t}]$, où δp_{nl} est la fonction d'onde radiale comportant n modes, $Y_l^m(\theta, \phi)$ est une harmonique sphérique de degré l et d'ordre m , et ν_{nml} est la fréquence du mode. Pour un degré l donné, le point de rebroussement supérieur du mode se situe de plus en plus profondément pour des modes de fréquences de plus en plus basses, ce qui fait que les fluctuations des modes à haute fréquence sont indicatives de perturbations se produisant près de la surface; voir la section 7.5 de [71]. En particulier, les observations ont démontré l'existence d'une corrélation positive entre les fréquences des modes-p et plusieurs indicateurs du cycle d'activité [11, 117, 197]. L'amplitude de la signature du cycle de 11 ans dans les changements en fréquence augmente rapidement avec la fréquence du mode observé, ce qui suggère donc une perturbation dans la structure thermique qui se situerait près de la surface (quelques centaines de kilomètres sous la photosphère), bien que cela n'exclut pas de possibles modulations structurelles logées plus profondément dans la zone convective. Un signal d'une période de 2 ans a aussi été observé dans les variations en fréquence, dont la source se situerait à environ 1000 km sous la surface [65]. On retrouve également la signature de ce cycle plus court dans d'autres indicateurs d'activité magnétique [10, 135, 193]

Une autre catégorie d'observations comprend les mesures du diamètre solaire et de l'asphéricité du disque. La définition la plus utilisée du rayon solaire est celle du point d'inflexion du profil d'intensité du limbe à une longueur d'onde donnée [183]. La figure 1.8 montre les profils d'intensité au limbe du disque étant associés à la portion continue du spectre (trait plein) et à la raie d'absorption FeI (trait pointillé) calculés à l'aide d'un modèle d'atmosphère. Les différents modèles utilisés sont ceux correspondant à un minimum d'activité ('quiet Sun'), à la présence d'une tache, et à une plage chromosphérique. La profondeur géométrique à partir de laquelle chaque profil est mesuré est celle correspondant à la profondeur optique $\tau_{500} = 1$ à 500 nanomètres. Les points d'inflexion des raies de FeI sont situés à une distance plus grande de la base de l'atmosphère que ceux du spectre continu en raison du fait que le centre de

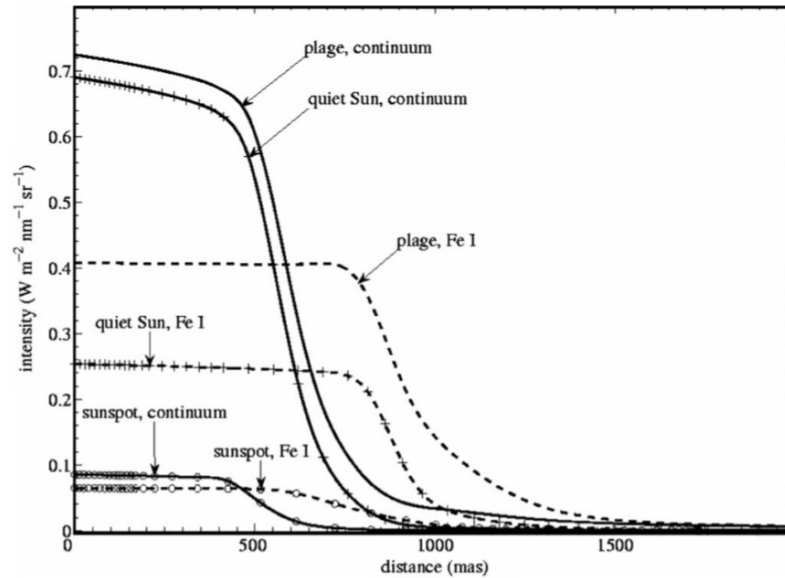


Figure 1.8. Positions du point d'inflexion du limbe à différentes longueurs d'ondes; voir la figure 1 de [183].

formation d'une raie a son origine près de la surface tandis que l'émission du continu (ailes de la raie) provient de couches plus profondes. On observe que la présence d'une tache donne un rayon plus petit dans les deux cas, qui correspond à la dépression de la photosphère provoquée par la baisse des température, densité et pression à cet endroit; cet effet est aussi connu sous le nom de 'dépression de Wilson' [126]. De même, on assiste à une augmentation du rayon par rapport au continu dans les régions correspondant aux plages. Par conséquent, la présence de structures magnétiques change la structure thermique de l'atmosphère et les propriétés du transfert radiatif, ce qui modifie la position du point d'inflexion. En mesurant la distance entre les points d'inflexion situés de part et d'autre du disque sur une ligne passant par son centre on obtient une mesure du diamètre solaire qui dépend de la longueur d'onde. La détection d'une variation en diamètre à l'extérieur des taches et des facules montrant une corrélation avec le niveau d'activité serait donc en faveur d'une modulation de

la structure thermique globale de l'étoile causée par des processus autres que ceux étant reliés à l'émergence de flux magnétique en surface, d'où l'importance de cette mesure pour l'identification des mécanismes de variation de l'irradiance.

Des mesures du diamètre ont été effectuées depuis environ 350 ans et continuent jusqu'à aujourd'hui, mais un consensus général sur l'amplitude et la relation de phase des variations observées avec l'activité solaire n'existe toujours pas. Les méthodes utilisées pour mesurer le diamètre comprennent (1) la mesure des points de contact du limbe lors du mouvement apparent du Soleil dans le plan méridien, (2) le chronométrage des transits de la planète Mercure, (3) les éclipses solaires, (4) l'astrolabe, (5) l'imagerie optique du limbe et (6) l'héliosismologie ; voir [183] pour une description de chaque méthode et des résultats associés. Les résultats d'observations au 17e siècle, qui sont basées sur les méthodes (1), (2) et (3), suggèrent un diamètre solaire plus grand d'environ $5''$ ($1'' \approx 725\text{km}$) au Minimum de Maunder par rapport à la valeur présentement acceptée d'environ $1920''$ [55, 114, 157], qui correspond à une anti-corrélation du rayon avec l'activité. D'autres études ne supportent pas cette conclusion, et attribuent soit la majeure partie, ou la totalité de cette variation à des effets instrumentaux reliés à la diminution des effets d'aberration associés à l'augmentation de la taille des télescopes avec les années [143, 184]. L'étude effectuée par Gilliland (1981) mentionne une légère variation séculaire du diamètre de $-0.1''$ à $-0.2''$ par siècle, ainsi qu'une modulation d'une période de 76 ans anti-corrélée avec le cycle d'activité de Gleissberg [77]. Les résultats des 30 dernières années sont également controversés, avec certaines observations montrant des variations hors-phase avec l'activité [56], alors que d'autres suggèrent une relation de phase positive [6, 137, 190]. Le manque de concordance entre les données observationnelles obtenues à partir du sol est souvent attribué à l'interférence due à l'atmosphère terrestre. En particulier, l'impact de l'activité solaire sur la turbulence atmosphérique pourrait induire une variation apparente du diamètre, même en l'absence de vraies variations.

Les méthodes photométriques fournissent une mesure directe de la variation du

diamètre via le profil d'intensité au limbe du disque. Cependant, il est aussi possible d'obtenir un estimé indirect en utilisant la notion de diamètre 'sismique' via l'observation des fréquences des modes fondamentaux (modes-f), qui correspondent à des ondes de gravité sensibles aux perturbations dans les couches situées sous la photosphère (à environ 1000-2000 km de profondeur) [19, 54]. Cette méthode de détermination du diamètre réfère à un rayon matériel correspondant à une surface de densité constante, contrairement aux méthodes optiques, qui utilisent la définition du point d'inflexion du profil d'intensité lumineuse dans une certaine bande spectrale [160]. Les modes-f ont été mesurés par l'instrument MDI abord du satellite SOHO, et ont permis l'établissement de bornes supérieures sur les amplitudes des variations du diamètre d'environ 21 millièmes de seconde d'arc (environ 15km), sans toutefois donner d'informations conclusives quant à leur relation de phase avec l'activité [2, 59]. Ces résultats sont compatibles avec les mesures photométriques de Kuhn et al. 2004, qui ont été faites à l'aide du même instrument [111].

L'augmentation de la précision des méthodes et des instruments avec le temps, ainsi que l'avènement des observations à partir de l'espace, ont donné des valeurs de plus en plus petites pour de potentielles variations du diamètre avec l'activité solaire. Les complications associées aux différences entre les définitions du diamètre utilisées par différents observateurs, à la stabilité thermique et mécanique de chaque instrument, à leur calibration spectrale et à l'interférence atmosphérique empêchent toute conclusion définitive quant à la nature des variations du diamètre solaire [183]. La mission satellite SPHERIS est une expérience qui a pour but d'étudier les variations des propriétés globales telles le rayon, l'asphéricité, les variations latitudinales de la température en surface, ainsi que l'irradiance sur une période de 3 ans près d'un minimum d'activité [113]. En particulier, l'APT (Astrometric and Photometric Telescope) à bord de SPHERIS a été conçu pour déterminer le rayon et l'asphéricité avec, respectivement, des sensibilités de 0.2 et 0.1 milliarcsecondes, ce qui surpasse la précision du télescope MDI par au moins un ordre de grandeur.

En dépit des nombreux problèmes associés à leur détection observationnelle, de possibles variations de la structure thermodynamique globale du Soleil avec l'activité magnétique continuent d'être invoquées dans la littérature, en particulier lorsqu'il s'agit d'expliquer la cause de variations séculaires réelles ou hypothétiques [98, 180]. Par exemple, Harder et al. 2009 suggèrent que les tendances à long-terme observées dans l'irradiance mesurée avec l'instrument SIM à bord du satellite de la mission SORCE sont compatibles avec un changement dans le gradient de température photosphérique augmentant l'irradiance à certaines longueurs d'ondes et la diminuant à d'autres, qui pourrait être causé par une légère augmentation de l'efficacité du transport convectif au maximum d'activité [96]. De même, Fröhlich 2009 rapporte une baisse significative de l'IST pendant le minimum prolongé d'activité solaire de 2008, qui n'est pas observée dans les autres indicateurs d'activité, et propose une diminution correspondante de la température effective afin d'expliquer l'effet. Les variations séculaires probablement les plus significatives sont celles correspondant aux grands minima d'activité. En particulier, les températures anormalement basses observées durant le Petit Âge Glaciaire suggèrent l'existence d'une valeur substantiellement plus basse de l'IST à cette époque, qui est compatible avec l'absence de taches solaires pendant le Minimum de Maunder [1]. De façon assez intéressante, la disparition des régions actives a été jugée insuffisante pour tenir compte du refroidissement climatique associé à cette période, et une diminution additionnelle de la contribution des éléments du réseau à l'irradiance a été proposée pour expliquer l'anomalie du climat terrestre. Toutefois, les incertitudes liées à la quantification de la contribution du réseau magnétique à l'irradiance posent certains doutes quant à la validité de cette explication [69]. Il est présentement impossible de dire si une diminution de l'efficacité convective aurait pu être à l'origine de la valeur réduite de l'IST, par exemple.

Faute d'observations ayant la précision nécessaire pour mesurer les changements structuraux, la compréhension de tels effets doit passer par une exploration théorique des scénarios physiques envisageables. Lorsque l'étoile est en équilibre thermody-

namique, la luminosité $L(r)$ est déterminée par le flux radiatif en surface. Le temps caractéristique sur lequel une perturbation au flux d'énergie thermique appliquée à un rayon r a des répercussions sur la luminosité $L(R_\odot)$ en surface et la structure thermodynamique de l'enveloppe allant de r jusqu'à R_\odot est donné par

$$\tau(r) \equiv U(r)/L(r) \approx \frac{1}{L} \int_{R_\odot-r}^{R_\odot} 4\pi r'^2 u dr' , \quad (1.2)$$

où L est la luminosité au rayon r , $U(r')$ est le contenu en énergie thermique de l'enveloppe, et $u = \gamma(\gamma - 1)^{-1}P/\rho$ est l'énergie thermique (enthalpie) par unité de volume pour un gaz parfait [173]. En raison de la très forte stratification de l'intérieur solaire, $\tau(r)$ augmente rapidement avec la profondeur en passant de quelques heures à environ 2000 km sous la surface à une valeur de l'ordre de 10^5 années à la base de la zone convective. Le flux d'irradiance à la photosphère est donc beaucoup plus sensible aux perturbations situées près de la surface qu'aux changements en profondeur. Cependant, la validité de ce modèle repose sur l'idée que la perturbation ne modifie pas $L(r)$ de façon substantielle, et que le taux auquel la structure thermique s'ajuste au changement est décrit correctement par l'approximation des flux convectifs turbulents par un processus de diffusion. Autrement dit, la convection turbulente est approximée par un flux proportionnel au gradient d'entropie via un coefficient de diffusion turbulente. Cet argument 'diffusif' a longtemps été utilisé par les adhérents à la première école de pensée pour rejeter la contribution d'une possible modulation du flux de chaleur convectif par l'activité magnétique aux variations de l'irradiance [66]. Toutefois, les simulations numériques ont mis en évidence le caractère extrêmement non local de la convection turbulente (à l'opposé de la diffusion, qui dépend du gradient local de la température). En particulier, les plumes thermiques générées aux frontières du domaine peuvent parcourir plusieurs hauteurs de colonne en densité avant de déposer leur contenu calorifique dans le fluide environnant, posant ainsi certaines limites quant à l'applicabilité de l'approximation par la diffusion (voir la section 1.3.1). La situation est également compliquée par l'action de la force de Lorentz sur

l'écoulement, qui introduit des temps caractéristiques additionnels dans le système.

Par conséquent, évaluer de façon détaillée l'impact du cycle d'activité sur l'amplitude du flux de chaleur dans toute l'épaisseur de la zone convective nécessite d'abandonner l'approximation diffusive et d'étudier l'interaction nonlinéaire du plasma avec son champ magnétique, ce qui nous mène à la résolution des équations MHD pour un fluide conducteur d'électricité. Pour ce faire, nous utilisons EULAG-MHD, un code informatique de haute performance pour la simulation des écoulements HD/MHD multi-échelles [165].

1.2 La modélisation MHD

Les équations MHD résultent de la fusion des équations de Maxwell de l'électromagnétisme et de la mécanique des fluides pour un plasma non relativiste globalement neutre et dominé par les collisions entre ses constituants microscopiques [46, 84]. Pour le cas d'un gaz stratifié contenu dans une étoile en rotation, les équations MHD solutionnées par EULAG prennent la forme suivante

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\pi' - \mathbf{g}\frac{\Theta'}{\Theta_o} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \frac{1}{\mu\rho_o}\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B} + \mathcal{D}_v, \quad (1.3)$$

$$\frac{d\Theta'}{dt} = \mathbf{u} \cdot \nabla\Theta_e - \alpha\Theta' + \mathcal{H}(\Theta'), \quad (1.4)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{u} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathcal{D}_B, \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \rho_o\mathbf{u} = 0, \quad (1.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.7)$$

où \mathbf{u} et \mathbf{B} sont les vecteurs de champ de vitesse et de champ magnétique, Θ est la température potentielle, qui équivaut à l'entropie spécifique via $dS = c_p d \ln \Theta$. Les opérateurs de la dérivée matérielle (d/dt) et (∇) ont leur signification habituelle, telle que $d/dt := \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$. Aussi, les symboles $\boldsymbol{\Omega}$ et μ représentent, respectivement, la vitesse angulaire du système de référence en rotation et la perméabilité magnétique du vide. Dans l'équation du mouvement, π' est une densité normalisée qui inclut les

pressions gazeuses et magnétiques, ainsi que le potentiel associé à la force centrifuge. Les équations (1.3)-(1.7) sont ici exprimées dans leur version anélastique, qui permet de représenter les effets de la stratification sans avoir à résoudre les ondes acoustiques [119]; voir la section 1.3.1. L'état de référence de l'expansion asymptotique anélastique est sans champ magnétique, en rotation rigide, isentropique (c'est-à-dire $\Theta_o = \text{constant}$) et satisfait la balance hydrostatique avec l'accélération gravitationnelle diminuant avec le rayon $|\mathbf{g}(r)| \propto r^{-2}$, ce qui définit la densité correspondant à l'état de référence ρ_o . Les opérateurs \mathcal{D} apparaissant au côté droit des équations (1.3) et (1.5) représentent les Laplaciens vecteurs ou scalaires qui sont utilisés pour modéliser la dissipation visqueuse/magnétique. Dans l'équation pour la température potentielle (1.4), seule la diffusion radiative est considérée, après quoi

$$\mathcal{H}(\Theta') \equiv \frac{\Theta_o}{\rho_o T_o} \nabla \cdot \left(\kappa_r \rho_o \nabla \frac{T_o}{\Theta_o} \Theta' \right), \quad (1.8)$$

où κ_r est la diffusivité radiative. Les apostrophes dénotent les perturbations par rapport à un état ambiant arbitraire (représenté par la lettre souscrite 'e'), qui correspond à une solution particulière du système anélastique.

Dans le contexte actuel de simulations de magnétoconvection solaire se déroulant sur des périodes décadales et multi-décadales, l'état ambiant représente une solution moyennée sur la sphère et sur une période suffisamment longue correspondant à l'équilibre thermodynamique global compatible avec la prédiction d'un modèle de la structure solaire. Des exemples typiques d'états ambiants incluent les équilibres géostrophiques [87, 167] et thermiques [195] pour les écoulements géophysiques à l'échelle globale. En appliquant un tel opérateur de moyenne au système (1.3)-(1.7), on arrive aux conditions de compatibilité suivantes

$$0 = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p_e^* - p_o}{\rho_o} \right) + g \frac{\Theta_e - \Theta_o}{\Theta_o}, \quad (1.9)$$

$$0 = \mathcal{H}(\Theta_e) + \mathcal{H}^*, \quad (1.10)$$

où p_e^* inclut les flux de Reynolds $\sim \check{u}_r \check{u}_r$ et $\sim \check{B}_r \check{B}_r$ résultant des corrélations entre les composantes radiales de la vitesse et du champ magnétique, et \mathcal{H}^* dénote la

contribution hypothétique due au flux de chaleur $\check{u}_r \check{\Theta}$. Ici, les variables dénotées par $\check{\cdot}$ représentent les déviations par rapport à la moyenne sphérique et temporelle. En soustrayant (1.9) de l'équation générique pour la quantité de mouvement on obtient directement (1.3), tandis que (1.4) est obtenue de façon similaire; voir l'annexe B pour la dérivation de (1.4) et de (1.10). Le terme \mathcal{H}^* ne peut pas être calculé explicitement faute de ne pas connaître les déviations par rapport à l'équilibre global. Le terme de refroidissement Newtonien $-\alpha\Theta'$ apparaissant au membre de droit de (1.4) a pour but de modéliser l'action de \mathcal{H}^* , qui sert à balancer la contribution de $\mathcal{H}(\Theta_e)$ dans (1.10). Celui-ci a pour effet d'amortir les perturbations d'entropie Θ' sur une échelle de temps beaucoup plus longue que celle qui est associée aux plumes convectives.

La forme perturbative des équations (1.3)-(1.7) possède certains avantages par rapport à l'approche conventionnelle utilisée dans les simulations de convection, qui consiste à laisser un équilibre dynamique se développer à partir de $\Theta_e = \Theta_o$ via l'imposition de flux de chaleur aux frontières du domaine. Premièrement, elle réduit la dépendance de la solution numérique sur de potentielles incertitudes liées à la spécification des conditions initiales et aux frontières. Avec l'imposition de flux de chaleur nuls aux frontières, l'écoulement convectif puise son énergie du terme de refroidissement Newtonien, qui oppose l'action de la convection cherchant à homogénéiser la distribution de Θ , en forçant le profil moyen d'entropie vers celui de l'état ambiant superadiabatique. L'approche perturbative réduit aussi la dépendance de la solution sur le caractère de la dissipation de l'algorithme, puisqu'elle est exprimée en termes de fluctuations (section 1.3.1). Ceci permet l'atteinte d'équilibres dynamiques qui n'auraient pas pu être reproduits en supposant $\Theta_e = \Theta_o$ et en imposant des flux thermiques à la base et à la surface du domaine.

Pour permettre l'utilisation d'une maille numérique adaptative et pour faciliter la spécification de conditions aux frontières dans les géométries euclidiennes (e.g. cartésiennes, sphériques, cylindriques, etc.) possiblement dépendantes du temps, EULAG résout chacune des équations (1.3)-(1.7) dans un espace computationnel

$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}})$ différent de l'espace physique (t, \mathbf{x}) dans lequel la solution est recherchée [149]. La transformation de coordonnées unissant les deux systèmes, qui est représentée par $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t, F(t, \mathbf{x}))$, est basée sur le choix de coordonnées (t, \mathbf{x}) orthogonales et stationnaires pour le système de base et adopte des coordonnées horizontales transformées (\bar{x}, \bar{y}) indépendantes de la coordonnée verticale z . Les expériences de convection globale qui sont présentées dans cette thèse utilisent une transformation \mathcal{F} stationnaire correspondant au système géosphérique standard

$$(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) = (t, \mathcal{F}(\mathbf{x})) , \quad (1.11)$$

où $\bar{x} = R_{\odot}\lambda$, $\bar{y} = R_{\odot}\phi$ et $\bar{z} = z$, et avec λ , ϕ et z dénotant, respectivement, les longitude, latitude et hauteur verticale à partir de la base du domaine. Les équations (1.3)-(1.7) prennent alors la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\bar{t}} &= -\tilde{\mathbf{G}}\bar{\nabla}\pi' - \mathbf{g}\frac{\Theta'}{\Theta_o} + 2\mathbf{u} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \\ &+ \frac{1}{\mu\rho_o}\bar{\mathbf{B}}^* \cdot \bar{\nabla}\mathbf{B} - \frac{1}{\mu\rho_o}\mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{B}) + \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{v}} , \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\frac{d\Theta'}{d\bar{t}} = \bar{\mathbf{u}}^* \cdot \bar{\nabla}\Theta_e - \alpha\Theta' + \bar{\mathcal{H}}(\Theta') , \quad (1.13)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{d\bar{t}} = \bar{\mathbf{B}}^* \cdot \bar{\nabla}\mathbf{u} - \mathbf{B}\frac{1}{\bar{\mathcal{G}}}\bar{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{G}}\mathbf{u} + \mathcal{M}(\mathbf{u}, \mathbf{B}) - \mathcal{M}(\mathbf{B}, \mathbf{u}) + \bar{\mathcal{D}}_{\mathbf{B}} , \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{\rho^*}\bar{\nabla} \cdot \rho^*\bar{\mathbf{u}}^* = 0 , \quad (1.15)$$

$$\frac{1}{\bar{\mathcal{G}}}\bar{\nabla} \cdot \tilde{\mathcal{G}}\bar{\mathbf{B}}^* = 0 , \quad (1.16)$$

La dérivée matérielle au côté droit de (1.12)-(1.14) est maintenant donnée par $d/d\bar{t} = \partial/\partial\bar{t} + \bar{\mathbf{u}}^* \cdot \bar{\nabla}$, où $\bar{\mathbf{u}}^* = d\bar{\mathbf{x}}/d\bar{t}$ est la vitesse *contravariante* dans l'espace transformé et $\bar{\nabla} \equiv (\partial/\partial\bar{x}, \partial/\partial\bar{y}, \partial/\partial\bar{z})$ est le gradient par rapport aux coordonnées $\bar{\mathbf{x}}$. Dans l'équation pour les composantes de la vitesse (1.12), $\tilde{\mathbf{G}}$ représente la matrice de Jacobi associée à la transformation (1.11), tandis que les termes $\mathcal{M}(\cdot, \cdot)$ au côté droit de (1.12) et (1.14) correspondent aux forces fictives apparaissant dans le système de coordonnées transformées; voir l'annexe A de [165] pour leur forme détaillée. Le fait

que les équations (1.12) et (1.14) soient formulées pour les composantes physiques des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{B} a l'avantage de ne pas ajouter de termes métriques associés à la transformation de coordonnées (c'est-à-dire, qui sont proportionnels aux produits des vecteurs contravariants $\bar{\mathbf{u}}^*$ et $\bar{\mathbf{B}}^*$). Une relation très utile permet d'exprimer les composantes physiques en termes de composantes des vecteurs contravariants

$$\bar{\mathbf{u}}^* = \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{u} , \quad \bar{\mathbf{B}}^* = \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{B} . \quad (1.17)$$

Dans l'équation de conservation de la masse (1.15) apparaît une densité généralisée $\rho^* \equiv \bar{\mathcal{G}} \rho_0$, où $\bar{\mathcal{G}}$ représente le jacobien de la transformation (1.11). Nous renvoyons le lecteur à [149, 165] pour plus de détails concernant la formulation tensorielle des équations (1.12)-(1.16).

1.2.1 Le régime MHD idéal

En faisant le choix de grandeurs caractéristiques B_0 , U_0 et L_0 pour l'écoulement et en supposant une conductivité uniforme, l'équation d'induction (1.5) peut s'écrire sous la forme adimensionnelle

$$\frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} = \nabla^* \times (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) + R_m^{-1} \nabla^{*2} \mathbf{B}^* , \quad (1.18)$$

où $\mathbf{B} \equiv B_0 \mathbf{B}^*$, $\mathbf{u} \equiv U_0 \mathbf{u}^*$, $\nabla \equiv L_0^{-1} \nabla^*$, $\eta = 1/(\mu\sigma)$ est la diffusivité magnétique (m^2s^{-1}) et σ la conductivité électrique du plasma. Le rapport des premier et deuxième termes au côté droit de (1.18)

$$R_m \equiv \frac{U_0 L_0}{\eta} , \quad (1.19)$$

est le *nombre de Reynolds magnétique*, qui permet de mesurer l'importance relative des termes d'induction et de diffusion. Lorsque $R_m \ll 1$, le terme d'induction est négligeable et (1.18) devient une simple équation de diffusion

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} . \quad (1.20)$$

Le temps caractéristique sur lequel le champ magnétique est dissipé est alors donné par le *temps de diffusion* $\tau_d \equiv L_0^2/\eta$. À l'inverse, lorsque $R_m \gg 1$ (1.18) devient

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) , \quad (1.21)$$

qui correspond au *régime MHD idéal*. Dans ce régime, les effets liés à la dissipation ohmique sont négligeables et le flux magnétique à travers une surface matérielle transportée par le fluide est constant (théorème d'Alfvén) [63]. Ce résultat a l'interprétation intuitive que les lignes de champ sont 'figées' dans le plasma. Un corollaire au théorème d'Alfvén est que la topologie du champ magnétique est invariante (i.e les lignes de champ ne peuvent pas être brisées). Une analyse similaire pour le cas de (1.3) permet d'évaluer l'importance relative des forces inertielles et des forces visqueuses au moyen du *nombre de Reynolds*

$$R_e \equiv \frac{U_0 L_0}{\nu} \quad (1.22)$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide. Le tableau 1.1 fournit une liste des paramètres caractérisant différentes portions de l'enveloppe du Soleil et les nombres de Reynolds qui leur sont associés.

Le fait que $R_m \gg 1$ dans chacune de ces régions implique que les lignes de champ aux grandes échelles sont figées dans le fluide à un très bon degré d'approximation. Par exemple, le temps de diffusion associé à une boucle coronale d'envergure $L_0 \sim 1000\text{km}$ est de $\tau_d \sim 30\,000$ ans, et donc son déplacement sur les périodes de rotation et du cycle d'activité est bien décrit par (1.21). Cependant, une exception à cette règle s'applique lors de la génération de nappes de courant, à l'intérieur desquelles la dissipation ne peut plus être négligée (section 1.3.2). De plus, la magnitude de R_e témoigne du régime extrêmement turbulent caractérisant l'enveloppe solaire, puisque la transition du régime laminaire au régime turbulent se produit à $R_e \sim 2000$. En particulier, la vaste gamme d'échelles spatio-temporelles caractérisant l'activité solaire est une conséquence directe de la nonlinéarité des termes d'advection et d'induction.

Région	L_0 [m]	U_0 [m s ⁻¹]	ν [m ² s ⁻¹]	η [m ² s ⁻¹]	R_e	R_m
Zone radiative	10^7	0.1	16×10^{-2}	2.0	6×10^8	5×10^5
ZC (base)	10^8	50	15×10^{-2}	2.5	3×10^{11}	2×10^8
ZC (milieu)	10^8	100	6.7×10^{-2}	8.5	10^{13}	10^9
ZC (granulation)	10^6	2000	1×10^{-1}	6.9×10^3	2×10^{12}	3×10^5
Couronne	10^7	10^4	10^8	1	$10^{12} - 10^{14}$	10^{11}

Table 1.1. Paramètres physiques associés à différentes régions du Soleil. Les valeurs utilisées pour la zone radiative et la zone convective (ZC) sont extraites de la p.138 de [161] et ont été obtenues à partir d'un modèle de structure interne, avec des viscosités ν et diffusivités magnétiques η calculées en faisant l'hypothèse d'un gaz d'hydrogène complètement ionisé.

Des exemples sont la rotation différentielle et l'organisation des champs magnétiques aux grandes échelles de la zone convective, qui sont ultimement le produit de cascades énergétiques ayant leur origine à des échelles spatiales beaucoup plus petites que L_0 (section 1.3.1). Une importance particulière doit donc être accordée au traitement numérique des processus physiques opérant à ces petites échelles.

D'autre part, la très faible magnitude des potentielles variations en température et en diamètre suggérée par les observations impose des critères très exigeants sur les méthodes numériques et les ressources informatiques. En effet, le schéma numérique doit pouvoir rester stable sur les échelles de temps décadales et multi-décadales tout en respectant le critère de Courant (section 1.2.2.1) ou de non intersection des trajectoires (section 1.2.2.2) correspondant à une maille relativement modeste, laquelle est nécessaire afin de limiter le temps de calcul. De même, la dissipation numérique implicite associée aux termes de troncature du schéma doit être minimale dans le but de représenter correctement des phénomènes de modulation structuraux ayant une très petite amplitude, et pour s'approcher autant que possible du régime MHD idéal

turbulent propre au Soleil.

1.2.2 Approximations numériques

En utilisant l'équation de conservation de la masse (1.15), les équations évolutives (1.12)-(1.14) peuvent être réécrites sous la forme de la loi de conservation généralisée

$$\frac{\partial \rho^* \Psi}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{V}^* \Psi) = \rho^* \mathbf{R} , \quad (1.23)$$

où $\Psi \equiv \{\mathbf{u}, \Theta', \mathbf{B}\}^T$ et $\mathbf{R} \equiv \{\mathbf{R}_u, R_{\Theta'}, \mathbf{R}_B\}^T$ dénotent, respectivement, les vecteurs des variables pronostiques dépendantes et des termes de forçage correspondants, avec $\mathbf{V}^* \equiv \rho^* \bar{\mathbf{u}}^*$ symbolisant le vecteur de la quantité de mouvement responsable du transport de Ψ par l'écoulement. Les forces de Lorentz et d'induction apparaissant dans (1.12) et (1.14) peuvent aussi être écrites sous forme conservative via (1.16)

$$\bar{\mathbf{B}}^* \cdot \bar{\nabla} \mathbf{B} = \frac{1}{\bar{\mathcal{G}}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{G}} \bar{\mathbf{B}}^* \mathbf{B} , \quad \bar{\mathbf{B}}^* \cdot \bar{\nabla} \mathbf{u} = \frac{1}{\bar{\mathcal{G}}} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathcal{G}} \bar{\mathbf{B}}^* \mathbf{u} . \quad (1.24)$$

Dans l'approche Eulérienne, (1.23) est intégrée localement aux points de maille \mathbf{x}_i à l'aide des flux aux faces de chaque cellule; voir la section 1.2.2.1.

Alternativement, le système (1.12)-(1.14) peut s'écrire sous sa forme Lagrangienne évolutive

$$\frac{d\Psi}{d\bar{t}} = \mathbf{R} , \quad (1.25)$$

où $d/d\bar{t}$ dénote la dérivée totale le long de la trajectoire d'un élément de fluide T : $(\mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow (\mathbf{x}_i, t)$ ayant son point de départ \mathbf{x}_0 au temps t_0 et son point d'arrivée à \mathbf{x}_i au temps t . De ce point de vue, l'obtention de $\Psi(\mathbf{x}_i, t)$ à chaque pas de temps via l'intégrale de (1.25) le long des trajectoires des parcelles de fluide conduit directement aux méthodes semi-Lagrangiennes; voir la section 1.2.2.2.

Dans un cas ou dans l'autre, EULAG effectue l'intégration de (1.23) ou (1.25) via l'approximation de différences finies amont non-oscillatoires ('non-oscillatory forward-in-time' - NFT)

$$\Psi_i^n = LE_i(\tilde{\Psi}) + 0.5\Delta t \mathbf{R}_i^n \equiv \hat{\Psi}_i + 0.5\Delta t \mathbf{R}_i^n , \quad (1.26)$$

où la solution $\Psi_{\mathbf{i}}^n$ est calculée au point $(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, t)$; $\widehat{\Psi} \equiv \Psi^{n-1} + 0.5\Delta t \mathbf{R}^{n-1}$, et LE dénote un schéma à deux niveaux temporels, qui correspond soit à un opérateur de transport Eulérien ou à un opérateur semi-Lagrangien non-oscillatoire. Le terme ‘non-oscillatoire’ se rattache aux méthodes monotoniques telles que TVD (‘total variation diminishing’), FCT (‘flux-corrected transport’), ainsi qu’aux différentes méthodes basées sur la limitation des flux advectifs ou la préservation du signe de la variable transportée, qui éliminent/réduisent/contrôlent les oscillations numériques caractérisant les schémas haute-résolution [170]; tandis que ‘différences finies amont’ désigne une classe de méthodes Lax-Wendroff généralisées [39, 163, 185]. L’algorithme (1.26) est implicite par rapport à chaque variable prognostique, et doit être inversé algébriquement tout en étant sujet aux formes discrètes correspondant aux contraintes (1.15) et (1.16). Pour y parvenir, (1.26) est écrit sous la forme itérative à point fixe

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{n,\nu} = \widehat{\Psi}_{\mathbf{i}} + 0.5\Delta t \mathbf{L}(\Psi)_{\mathbf{i}}^{n,\nu} + 0.5\Delta t \mathbf{N}(\Psi)_{\mathbf{i}}^{n,\nu-1} - 0.5\Delta t \widetilde{\mathbf{G}} \overline{\nabla} \Phi|_{\mathbf{i}}^{n,\nu}, \quad (1.27)$$

où le terme de forçage $\mathbf{R}(\Psi)$ a été séparé en parties linéaire $\mathbf{L}(\Psi)$ et nonlinéaire $\mathbf{N}(\Psi)$ par rapport à Ψ . Pour compenser les erreurs de troncature responsables de la violation de (1.16), un terme auxiliaire de la forme $-\widetilde{\mathbf{G}} \overline{\nabla} \pi^*$ est ajouté au côté droit de (1.14). Ce dernier est compris dans le dernier terme au côté droit de (1.27), qui inclut également le gradient de la pression $-\widetilde{\mathbf{G}} \overline{\nabla} \pi'$ dans (1.12), avec $\Phi \equiv (\pi', \pi', \pi', 0, \pi^*, \pi^*, \pi^*)$. Le fait de décaler le terme nonlinéaire $\mathbf{N}(\Psi)$ par rapport aux autres termes permet d’obtenir une expression sous forme fermée de la solution

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{n,\nu} = [\mathbf{I} - 0.5\Delta t \mathbf{L}]_{\mathbf{i}}^{-1} \left(\widehat{\Psi} - 0.5\Delta t \widetilde{\mathbf{G}} \overline{\nabla} \Phi^{n,\nu} \right), \quad (1.28)$$

où $\widehat{\widehat{\Psi}} = \widehat{\Psi} + 0.5\Delta t \mathbf{N}(\Psi)^{n,\nu-1}$. L’application des analogues discrets des contraintes (1.15) et (1.16) à (1.28) produit deux systèmes linéaires tridiagonaux (ou pentadiagonaux, selon les détails de la discrétisation des opérateurs différentiels) et généralement nonsymétriques, qui sont ensuite inversés pour obtenir π' et π^* en utilisant l’algorithme du gradient conjugué généralisé préconditionné (GCR) [57, 181]. Les

forces dissipatives $\mathcal{D}_{\mathbf{u}}$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{B}}$ des équations (1.12) et (1.14), ainsi que les termes de diffusion radiative $\overline{\mathcal{H}}(\Theta')$ et de refroidissement Newtonien $-\alpha\Theta'$ dans (1.13) peuvent être traités de façon similaire aux termes nonlinéaires, ou être intégrés explicitement au premier ordre dans le temps. Dans ce dernier cas, la structure de l'intégrale trapézoïdale (1.26) est reproduite en incorporant les termes dissipatifs dans l'argument de l'opérateur de transport, tel que $\tilde{\Psi} \equiv \Psi + 0.5\Delta t(\mathbf{R} + 2\tilde{\mathbf{R}})$, où $\tilde{\mathbf{R}}$ incorpore les termes dissipatifs en question. Une fois la solution $\Psi^{n,\nu}$ obtenue, la somme des termes de forçage implicites $\mathbf{RI} := \mathbf{L} - \nabla\Phi$ est donnée par $\mathbf{RI}^n = (0.5\Delta t)^{-1}(\Psi^{n,\nu} - \widehat{\Psi})$, tandis que la somme des termes explicites $\mathbf{RE} := \mathbf{N}(\Psi) + \tilde{\mathbf{R}}$ s'obtient via la définition de chaque terme. Étant donné que dans le contexte des simulations de magnétoconvection les temps caractéristiques associés à la diffusion radiative et au forçage Newtonien surpassent grandement le temps de retournement des cellules convectives, chacun d'eux est intégré explicitement au premier ordre.

1.2.2.1 L'approche Eulérienne

Dans l'approche Eulérienne, l'opérateur LE dans (1.26) symbolise l'intégration au deuxième ordre dans le temps et dans l'espace de l'équation de transport homogène pour $\tilde{\Psi}$ — i.e. $\mathbf{R} = 0$ au côté droit de 1.23 — en utilisant le schéma MPDATA ('Multidimensional positive definite advection transport algorithm') [164]. Afin d'illustrer les propriétés de base de MPDATA, on considère le cas uni-dimensionnel et à vitesse constante de (1.26) pour la quantité ψ avec $\rho^* = 1$ et $\mathbf{R} = 0$, qui mène à l'équation d'advection constante

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\psi) = 0 . \quad (1.29)$$

De façon purement générale, il est possible d'approximer (1.29) via l'expression

$$\psi_i^n = \psi_i^{n-1} - [F_c(\psi_i^{n-1}, \psi_{i+1}^{n-1}, \mathcal{C}_{i+1/2}) - F_c(\psi_{i-1}^{n-1}, \psi_i^{n-1}, \mathcal{C}_{i-1/2})] , \quad (1.30)$$

où la fonction de flux F_c est définie en termes du nombre de Courant local $\mathcal{C} = u\Delta t/\Delta x$ selon l'expression

$$F_c(\psi_L, \psi_R, \mathcal{C}) \equiv [\mathcal{C}]^+ \psi_L + [\mathcal{C}]^- \psi_R, \quad (1.31)$$

avec $[\mathcal{C}]^+ \equiv 0.5(\mathcal{C} + |\mathcal{C}|)$ et $[\mathcal{C}]^- \equiv 0.5(\mathcal{C} - |\mathcal{C}|)$. Les indices entiers et demi-entiers correspondent ici aux centres et aux parois des cellules des volumes finis, respectivement. Une première évaluation de (1.30) résulte en une approximation du second ordre en Δx et Δt de l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(u\psi) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-K \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (1.32)$$

où $K \equiv \Delta x^2/(2\Delta t)(|\mathcal{C}| - \mathcal{C}^2)$, tel que le démontre une analyse de troncature de (1.30). Le concept clé de MPDATA consiste à redéfinir le flux diffusif à l'intérieur de la divergence correspondant au deuxième terme au côté droit de (1.32) en termes d'un flux advectif

$$\begin{aligned} -K \frac{\partial \psi}{\partial x} &\equiv u_d \psi \\ &= \left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta t} (|\mathcal{C}| - \mathcal{C}^2) \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \psi, \end{aligned} \quad (1.33)$$

où u_d est une pseudo-vitesse. Puis, une réévaluation de (1.30) utilisant cette fois la vitesse anti-diffusive $u_a \equiv -u_d$ à la place de u et la valeur de ψ mise à jour dans la première itération suffit à compenser le terme diffusif du premier ordre au côté droit de (1.32). La stabilité de l'itération corrective est assurée, étant donné l'approximation de u_a selon

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{2}{\Delta x} \frac{\psi_{i+1}^{n-1} - \psi_{i-1}^{n-1}}{\psi_{i+1}^{n-1} + \psi_{i-1}^{n-1} + \varepsilon}, \quad (1.34)$$

pour $\varepsilon > 0$ et $|\mathcal{C}| \leq 1$. L'extension de MPDATA à plusieurs dimensions spatiales s'obtient via la même approche en tenant compte des termes de troncature comprenant les dérivées mixtes de ψ . De même, la stabilité des itérations est garantie en bornant les nombres de Courant associés à chaque dimension.

1.2.2.2 L'approche semi-Lagrangienne

Il est utile d'examiner l'approche semi-Lagrangienne du point de vue de l'intégrale de chemin de la loi évolutive (1.25) le long de la trajectoire T et de son approximation correspondante (1.26). En considérant une composante particulière de (1.25) — par ex. $d\psi/dt = R$ — on a

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{i}}^n &= \psi_0 + \int_T R dt \approx \psi_0 + 0.5\Delta t(R_0 + R_{\mathbf{i}}^n) \\ &\approx (\psi + 0.5\Delta t R)_0 + 0.5\Delta t R_{\mathbf{i}}^n ,\end{aligned}\tag{1.35}$$

où $(\cdot)_0$ dénote la variable au point de départ de la trajectoire (\mathbf{x}_0, t_0) et la deuxième approximation tient compte de la nonlinéarité de l'opérateur LE . L'avancement de la solution au temps $t = t_0 + \Delta t$ s'effectue en trois étapes distinctes. Dans un premier temps, les trajectoires arrivant aux points de maille $\mathbf{x}_{\mathbf{i}}$ sont évaluées via l'approximation à l'intégrale

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{\mathbf{i}} - \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau ,\tag{1.36}$$

de la relation cinématique $d\mathbf{x}/d\bar{t} = \mathbf{u}$. Deuxièmement, les variables prognostiques sont obtenues aux points de départ des trajectoires $\tilde{\Psi}(\mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow \tilde{\Psi}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, t_0)$ en utilisant un schéma d'interpolation [166]. Troisièmement, les contributions aux termes de forçage sont intégrées le long des trajectoires selon (1.35) [60, 169, 175, 178, 199].

La formulation Lagrangienne conduit à l'interprétation d'un continuum fluide dans lequel l'évolution d'un élément de fluide infinitésimal est décrite par la formule d'expansion d'Euler

$$\frac{d \ln J}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} ,\tag{1.37}$$

où $J := \det(\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0)$ est le Jacobien de l'écoulement, qui s'interprète comme le rapport des volumes des éléments de fluide correspondant aux points d'arrivée et de départ de la trajectoire. Lorsque combinée avec la forme évolutive de l'équation de conservation de la masse

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} ,\tag{1.38}$$

la formule d'Euler donne la forme Lagrangienne de l'équation de conservation de la masse

$$\rho(\mathbf{x}_i, t) = \widehat{J}\rho(\mathbf{x}_0, t_0) , \quad (1.39)$$

où $\widehat{J} := \det(\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x})$ est le Jacobien inverse de l'écoulement. Par conséquent, l'évaluation numérique des points de départ induit des erreurs dans \widehat{J} , et peut mener à une violation de la compatibilité des intégrales (1.35) et (1.36) avec (1.39). Dans le cas d'un fluide incompressible, la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ impose un volume constant aux parcelles de fluide et on a

$$\widehat{J} = 1 . \quad (1.40)$$

Pour que l'écoulement soit physiquement réalisable, l'algorithme numérique ne doit pas générer d'intersections entre les trajectoires des parcelles de fluide. Cette propriété implique que \widehat{J} doit être positif et borné ($0 < \widehat{J} < \infty$), d'où l'importance d'assurer la satisfaction de (1.39) [168].

1.2.3 Représentation des processus physiques à l'échelle sous-maille

Puisque les échelles plus petites que l'espace ΔX entre deux points de maille consécutifs ne peuvent être représentées explicitement sur la maille discrète, on a recours à une décomposition de chaque variable dépendante $\psi \equiv \langle\psi\rangle + \tilde{\psi}$ en parties 'résolues' $\langle\psi\rangle$ et 'non résolues' $\tilde{\psi}$. La partie résolue est évaluée en appliquant un filtre à ψ (symbolisé par l'opérateur $\langle..\rangle$) pour en éliminer les échelles spatiales non résolues. L'application d'un tel opérateur à l'équation du mouvement (1.3) pour une composante de la vitesse u_i donne

$$\frac{D\langle u_i \rangle}{Dt} = -\frac{\partial\langle\pi'\rangle}{\partial x_i} + \dots + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial\tau_{ij}^R}{\partial x_j} , \quad (1.41)$$

où ' \dots ' représente la somme des termes de forçage résolu et $\tau_{ij}^R \equiv \rho_o[\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle - \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle]$ est le *tenseur des stress résiduels*, qui dépend des composantes non résolues de la vitesse \tilde{u}_i . L'apparition de la divergence du tenseur des stress sous-maille au côté droit de (1.41) est une conséquence directe de la nonlinéarité du terme d'advection $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ de

la dérivée matérielle, qui est à l'origine du problème de la fermeture des équations de la mécanique des fluides. En général, ce terme ne peut pas être calculé explicitement lors de l'intégration numérique en raison de la présence des composantes non résolues, et son effet sur les échelles résolues doit être modélisé. Le concept fondamental d'une LES ('large-eddy simulation') est de paramétriser l'effet des échelles non résolues sur les échelles résolues en exprimant τ_{ij}^R en terme des variables $\langle \psi \rangle$. L'une des méthodes les plus populaires consiste à supposer

$$\tau_{ij}^R := 2\rho_0\nu_t\langle S_{ij} \rangle + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}^R, \quad (1.42)$$

où $S_{ij} = 0.5(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$ est le tenseur des déformations du fluide et ν_t est la *viscosité turbulente* ('eddy-viscosity'): un paramètre libre pouvant varier spatialement et dont le choix se base souvent sur des considérations étant inspirées par la théorie de la longueur de mélange [47]. Un autre modèle est celui de Smagorinsky, selon lequel la viscosité turbulente dépend des composantes résolues de la vitesse via le tenseur des déformations

$$\nu_t \equiv C_s^2 L^2 (2\langle S_{ij} \rangle \langle S_{ij} \rangle)^{1/2}, \quad (1.43)$$

où $C_s \sim 0.1$ est le coefficient de Smagorinsky et $L \sim \Delta X$. Le modèle de Smagorinsky est largement utilisé en météorologie et reproduit très bien les propriétés de la turbulence isotrope. Historiquement, c'est le fait de vouloir dissiper l'énergie cinétique aux petites échelles de la maille dans le but d'assurer la stabilité du schéma numérique et non pas la représentation des processus aux petites-échelles qui a motivé le développement des modèles des stress sous-maille. Cependant, la dissipation introduite par ceux-ci peut s'avérer inadéquate pour représenter correctement les processus de transfert de l'énergie extrêmement non locaux opérant dans l'intérieur solaire et dans la couronne. Aussi, il existe d'autres moyens plus efficaces et plus avantageux pour modéliser les effets des échelles non résolues.

L'approche d'une ILES ('Implicit Large-Eddy Simulation') consiste à négliger complètement τ_{ij}^R dans (1.41) et à laisser aux termes de troncature du schéma numérique

le soin de dissiper l'énergie aux petites échelles. Puisque les termes de troncature des schémas NFT conservatifs ont la forme de la divergence d'un tenseur de second ordre, ceux-ci peuvent être utilisés pour modéliser l'effet du tenseur des stress sous-maille sans avoir recours aux modèles sous-maille conventionnels [168]. En particulier, les ILES utilisant MPDATA pour un cas de convection dans la couche-limite planétaire donnent des résultats très similaires à ceux d'expériences utilisant des paramétrisations explicites des stress sous-maille [125]. Des expériences de turbulence incompressible et homogène évoluant librement (i.e. sans forçage) ont également démontré que les algorithmes MPDATA et semi-Lagrangien étaient capables de poursuivre les calculs numériques en l'absence de viscosité explicite ($\nu = 0$); un régime où la formation de vortex de tailles toujours plus petites provoque l'instabilité numérique de la méthode pseudo-spectrale. Ces résultats illustrent le caractère adaptatif de la dissipation introduite par la méthode NFT, qui s'ajuste aux gradients des vitesses pour produire un comportement de l'écoulement similaire à celui résultant des paramétrisations explicites (voir le paragraphe précédent). Dans le contexte des simulations de turbulence homogène et incompressible sans viscosité explicite, la méthode NFT ajoute une viscosité effective pouvant être estimée indirectement à partir du champ de vitesse calculé [49]. Margolin et Rider sont parvenus à une interprétation physique des termes responsables de la dissipation implicite introduite par MPDATA en faisant l'analyse de son équation modifiée (i.e. l'expression résultant de l'expansion en série de Taylor de l'algorithme numérique), puis en comparant les termes de troncature du schéma aux équations de Navier-Stokes décrivant la dynamique de volumes finis de fluide (NSF) pour le cas des équations de Burgers 2D [124]. Cette analyse montre que le succès de MPDATA est dû au fait que ses termes de troncature s'expriment comme la divergence d'un tenseur de second ordre ayant les mêmes propriétés de base que le tenseur des stress de l'équation NSF. L'option semi-Lagrangienne d'EULAG a également été utilisée avec succès dans une ILES de la turbulence induite par des ondes de gravité dans l'atmosphère terrestre [168]. Cependant, aucune théorie com-

parable à celle de [124] n'a été élaborée pour le cas de l'algorithme semi-Lagrangien.

1.3 Deux applications

La possibilité d'adopter différents types de géométries et diverses approximations aux équations compressibles (e.g. anélastique, Boussinesq, incompressible), de même que la robustesse du solveur elliptique et celle des schémas NFT minimalement dissipatifs font d'EULAG un outil approprié pour la solution des problèmes MHD multi-échelles rencontrés en physique solaire. Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse portent sur deux applications particulières, soit la simulation de la dynamo globale et la reconnexion magnétique. La première s'insère dans le contexte de l'étude des mécanismes physiques à l'origine des variations décadales et multi-décadales de l'irradiance solaire totale (section 1.1.1.1), alors que la deuxième est le fruit du développement d'une correction à la trajectoire des éléments de fluide du schéma semi-Lagrangien (section 1.2.2.2). Les sous-sections 1.3.1 et 1.3.2 font une brève exposition des dernières avancées scientifiques propres à chaque application dans le but de mieux situer les présents travaux de recherche par rapport aux précédents.

1.3.1 La simulation de la dynamo globale

Les processus inductifs responsables de l'organisation du champ magnétique aux grandes échelles sont tous basés sur l'amplification d'un champ préexistant via l'étirement des lignes de champ par l'écoulement turbulent chaotique et/ou la rotation différentielle caractérisant la portion convective de l'enveloppe du Soleil [27, 132]. En particulier, la production d'énergie magnétique à partir de l'énergie cinétique des mouvements du fluide doit être maintenue contre la dissipation du champ magnétique due à la résistivité pour pouvoir achever la formation des structures observées. L'énergie cinétique est elle-même injectée aux grandes échelles via le flux radiatif à la base de la ZC puis est en partie transformée en énergie interne via les dissipations visqueuse

et magnétique et la diffusion radiative. En supposant que le transfert de l'énergie cinétique des grandes aux petites échelles de la ZC peut être approximé par une cascade directe et autosimilaire telle qu'observée en turbulence homogène et isotrope, on obtient en utilisant les valeurs du tableau 1.1 et la définition de Kolmogorov $l_0 \sim R_e^{-3/4} L_0 \sim 1 - 0.01$ m pour l'échelle de dissipation visqueuse, ce qui correspond à un facteur $l_0/L_0 \sim 10^8 - 10^{10}$ entre la plus grande et la plus petite échelle! [147]. À cette énorme disparité spatiale vient aussi s'ajouter la vaste gamme d'échelles temporelles allant des minutes (oscillations acoustiques) à plusieurs siècles pour les variations séculaires associées à l'activité solaire.

À l'heure actuelle, aucun ordinateur n'est capable de simuler la ZC en résolvant toutes les échelles participant à sa dynamique. Malgré ces limitations, les simulations MHD de la ZC n'ont cessé de démontrer leur utilité en tant qu'outils de vérification et de validation des concepts visant à expliquer sa dynamique globale. Les expériences pionnières de Gilman et Miller en régime Boussinesq réussissent à produire des composantes toroïdales et poloïdales pour le champ magnétique bien définies aux grandes échelles, antisymétriques et de signe opposé dans chaque hémisphère [79, 81]. La polarité des deux composantes change sur une période d'environ 1 an, soit une durée 11 fois plus courte que celle du vrai cycle solaire. Chaque composante migre vers les pôles suite à son apparition près de l'équateur et donc dans le sens opposé à celui inféré par les magnétogrammes et les observations de taches solaires (fig. 1.4 et 1.5). Une deuxième série d'expériences est effectuée avec le modèle MHD de Glatzmaier (1984) basé sur les équations anélastiques [80, 82, 83], qui permet d'utiliser une stratification ayant environ sept hauteurs de colonne depuis le bas de la zone stable jusqu'en surface. Les intégrations anélastiques des équations MHD ont également l'avantage de ne pas être contraintes par les ondes acoustiques, lesquelles imposent autrement des limites sévères sur le pas de temps maximal des simulations. Des viscosités, diffusivités thermiques et magnétiques turbulentes dépendantes du rayon sont utilisées pour dissiper l'énergie à l'échelle de la maille, et emploient des valeurs $\sim 10^{12} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}$

beaucoup plus grandes que celles des coefficients moléculaires dans le but d'assurer la stabilité numérique du schéma. Les résultats obtenus sont très similaires à ceux de Gilman (1983) et exhibent le même type de propagation des composantes toroïdales et poloïdales. Toutefois, la composante poloïdale montre une légère tendance de migration équatoriale à basse latitude, similaire à ce qui est observé sur le Soleil. Seulement la moitié d'un cycle magnétique est simulé, lequel on estime avoir une période de 2 ans.

Les simulations de Gilman [79] et Glatzmaier [83] étaient contraintes par les mesures des vitesses en surface via l'effet Doppler, mais elles ne bénéficiaient pas des informations sur la structure de l'écoulement interne; voir la figure 1.9. Les données fournies par l'héliosismologie au début des années 1990 montre que les profils de la rotation différentielle générés par les simulations (image de droite) sont en désaccord avec ceux provenant des observations (image de gauche); la raison étant que la vitesse angulaire est pratiquement constante en fonction du rayon aux milatitudes (profils coniques), tandis que les profils simulés montrent des isocontours étant presque parallèles à l'axe de rotation (profils cylindriques).

L'avènement des plate-formes multi-processeurs permet le développement de modèles numériques pouvant atteindre des régimes beaucoup plus turbulents que ceux des expériences précédentes. Vers la fin des années 1990, le modèle pseudo-spectral et semi-implicite 'Anelastic Spherical Harmonic' (ASH) fut développé à partir de celui de Glatzmaier (1984) et optimisé de façon à pouvoir tirer avantage des communications inter-processeurs et ainsi augmenter la quantité d'échelles résolues. Les effets sous-maille dans ASH sont aussi paramétrisés à l'aide de viscosités et de diffusivités magnétiques et thermiques turbulentes dépendantes du rayon (voir la section 1.2.3). Les toutes premières simulations effectuées avec ASH incluent la pénétration convective dans la zone stable sous la base de la zone convective mais n'ont pas de champ magnétique. Celles-ci possèdent des isocontours de vitesse angulaire montrant de légères déviations par rapport à l'alignement le long de cylindres, et se rap-

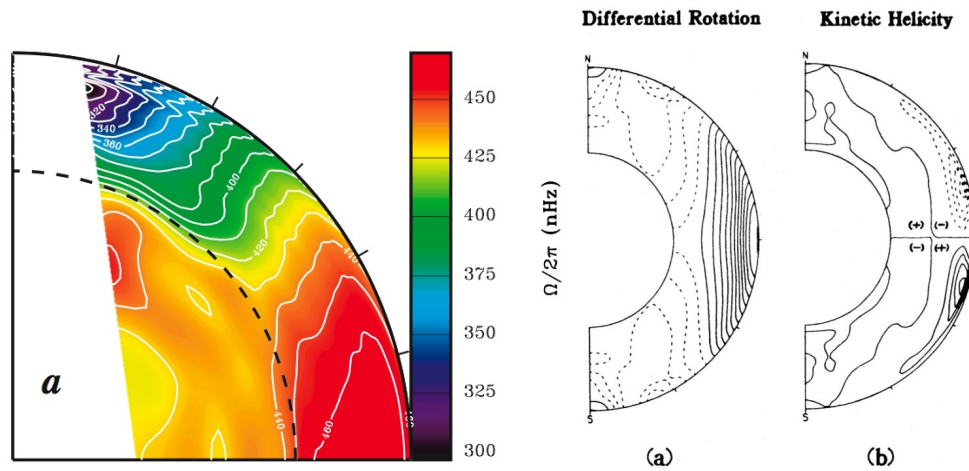


Figure 1.9. À gauche: Rotation différentielle de l'intérieur solaire (tiré de la figure 1 de [128]). À droite: Profils de vitesse angulaire par rapport au système de référence tournant et profils d'hélicité cinétique (tiré de la figure 2 de [83]). Les isolignes continues et pointillées correspondent à des valeurs positives et négatives, respectivement.

prochent ainsi un peu plus près des profils déduits par héliosismologie [23, 58, 131]. L'analyse des flux de moment angulaire démontre que la rotation différentielle prograde (dans le sens de la rotation solaire) près de l'équateur est causée par le transport de moment angulaire vers l'équateur via les stress de Reynolds, tandis que la circulation méridienne produit l'effet opposé et tend à accélérer la rotation près des pôles. L'écoulement convectif dans ces simulations est caractérisé par un arrangement de larges cellules de fluide ascendant, autour desquelles se dessine un réseau étroit de courants descendants. La figure 1.10 montre des cartes de la composante radiale de la vitesse à différentes profondeurs dans une simulation à très haute résolution de la ZC [129]. L'asymétrie entre courants ascendants et descendants existe en raison des effets de flottaison liés à la stratification en densité, qui sont captés par l'approximation anélastique. L'augmentation de la densité a pour effet de comprimer les parcelles de fluide descendantes, qui doivent accélérer leur rotation (due à la force de Coriolis) pour

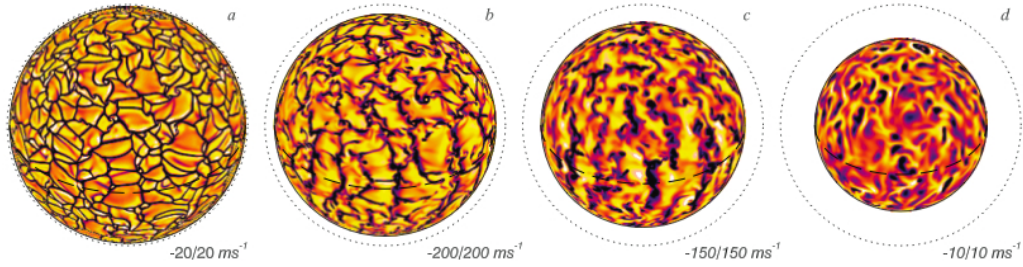


Figure 1.10. Cartes de la vitesse verticale dans une simulation à haute résolution (tiré de la figure (2) de [129]). Les images (a), (b), (c) et (d) correspondent, respectivement, aux altitudes $0.98R_{\odot}$, $0.92R_{\odot}$, $0.85R_{\odot}$ et $0.71R_{\odot}$. Les couleurs claires et foncées correspondent à des vitesses radiales positives (courants ascendants) et négatives (courants descendants), respectivement.

conserver leur moment angulaire. Ce mécanisme produit donc des structures hélicales (plumes convectives) ayant des vorticités cycloniques (rotation dans le sens antihoraire) dans l'hémisphère nord et anticycloniques (rotation horaire) dans l'hémisphère sud pouvant demeurer cohérentes sur toute l'épaisseur de la zone convective (voir les courants descendants isolés dans l'image (d) de la figure 1.10 montrant le bas de la zone convective). L'inclinaison de ces structures par rapport à l'axe du rayon se traduit par des corrélations entre les composantes radiale et latitudinale de la vitesse, qui forment les stress de Reynolds. La croyance est qu'en atteignant de plus hautes résolutions spatiales et des régimes de plus en plus turbulents, les stress de Reynolds induits par ces structures pourront briser la forme cylindrique des isocontours de la vitesse angulaire et les rendre davantage parallèles au rayon à mi-latitude [23]. Près des régions équatoriales des images (b) et (c) on aperçoit également des cellules possédant un alignement distinctif nord-sud aussi connues sous le nom de 'banana cells', qui sont typiques de ce type de simulations en géométrie sphérique. Notamment, les hélicités cinétiques induites par les plumes convectives et ce type de cellules convectives sont principalement de signes négatif et positif dans les hémisphères nord et sud, respectivement, et constituent des éléments essentiels au fonctionnement des

dynamos de type alpha-oméga (voir la partie (b) de l'image de droite de la figure 1.9) [21].

D'un autre point de vue, si les amplitudes des stress de Reynolds, de la force de Lorentz, et de la dissipation visqueuse sont suffisamment petites par rapport à celles des forces de Coriolis, alors en état stationnaire l'équation de conservation du moment angulaire prend la forme

$$\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta} = \frac{2rc_p}{g} \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla \langle u_\phi \rangle, \quad (1.44)$$

où S est l'entropie spécifique, $\boldsymbol{\Omega}_0$ est la vitesse angulaire du système en rotation, c_p est la chaleur spécifique à pression constante, g est l'accélération gravitationnelle, u_ϕ est la vitesse zonale par rapport à ce système, et $\langle \cdot \rangle$ représente une moyenne zonale et temporelle. En l'absence de variations latitudinales de l'entropie (i.e. le terme baroclinique $\partial \langle S \rangle / \partial \theta = 0$ dans (1.44)), on retrouve l'alignement des isocontours de vitesse angulaire le long de cylindres parallèles à l'axe de rotation (théorème de Taylor-Proudman). Il est donc possible de briser cet arrangement si une différence de température pôle-équateur est induite, par exemple via un flux de chaleur latitudinal [58, 104, 129, 130, 154].

L'étude de la dynamo est reprise là où l'avait laissée Glatzmaier environ 20 ans plus tôt avec l'inclusion du traitement de l'équation d'induction dans ASH [21] (ci-après BMT04). Quatre composantes nécessaires au fonctionnement de la dynamo de type 'interface' sont identifiées: (1) la génération d'un faible champ poloïdal par la turbulence cyclonique dans la zone convective ou par la désintégration de régions actives en surface, (2) le transport turbulent du champ poloïdal dans la tachocline depuis la région où il est généré, (3) l'organisation et l'amplification d'un champ magnétique de nature toroïdale par la rotation différentielle (par exemple, dans la tachocline) et (4) le transport du champ magnétique toroïdal vers la surface via la force de flottaison soit pour être détruit puis recyclé par les forts cisaillements présents dans la zone convective où pour percer la photosphère sous forme de régions actives [139]. Con-

trairement aux simulations de Glatzmaier [82, 83], les auteurs choisissent de ne pas modéliser la transition à la zone radiative au bas de la zone convective et explorent uniquement le rôle joué par l'amplification due à la turbulence cyclonique dans la ZC. Chaque simulation MHD est initialisée avec un faible champ magnétique dipolaire et à partir d'une solution aux équations sans champ magnétique possédant déjà une rotation différentielle de type solaire. Les expériences réussissant à soutenir une production de l'énergie magnétique face à la dissipation ohmique turbulente génèrent un champ magnétique dominé par des structures aux petites échelles ayant un faible niveau d'organisation global. En particulier, l'énergie contenue dans la composante nonaxisymétrique du champ est plus grande par un ordre de grandeur que celle étant associée à la composante axisymétrique. Même si l'hélicité cinétique est principalement négative dans l'hémisphère nord et positive dans l'hémisphère sud, l'évolution temporelle des composantes poloidales et toroïdales demeure chaotique tout au long des simulations; voir la figure 1.11.

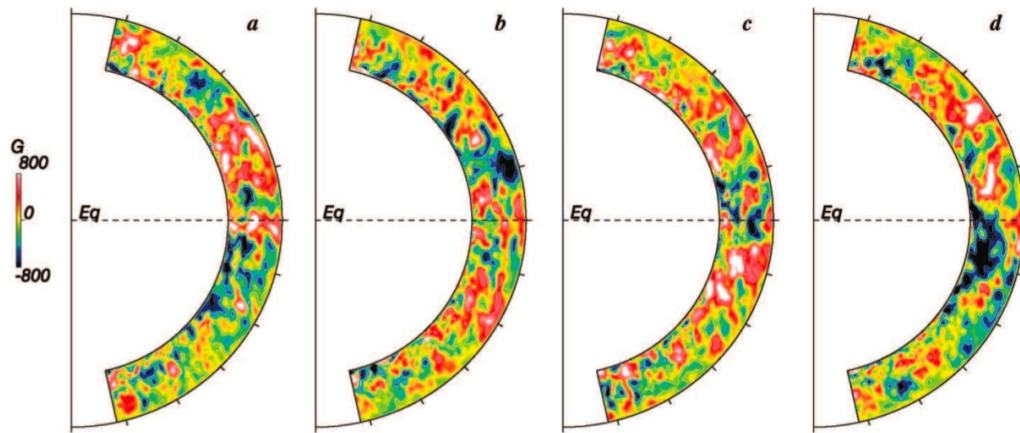


Figure 1.11. Évolution de la composante toroïdale du champ magnétique moyennée en longitude (Figure 13 tirée de [21]).

Les simulations de BMT04 produisaient un champ aux petites échelles via les effets cycloniques de l'écoulement turbulent de la zone convective. Pour inclure les effets (2)

et (3), Browning et al. (2006) ajoutent une zone de stratification sous-adiabatique au bas de la zone convective dans le code ASH afin de modéliser la pénétration convective à l'intérieur de la zone radiative [20]. Ainsi, la rotation différentielle maintenue par la convection disparaît dans la couche stable et une zone de fort cisaillement est créée à l'interface avec la zone convective. Deux effets artificiels sont introduits afin d'accentuer le cisaillement entre la zone stable et la zone instable. Premièrement, une force de traînée est appliquée à $r = 0.66R_{\odot}$ pour empêcher les mouvements convectifs de se répandre dans la zone stable. Deuxièmement, un gradient latitudinal d'entropie est spécifié de façon à forcer un profil de rotation différentielle de type solaire [23, 58, 154]. La figure 1.12 montre les projections longitude-latitude de la composante toroïdale du champ magnétique dans la zone convective (lettre a) et dans la zone stable (lettre b) ainsi que le profil rayon-latitude de la même composante moyennée en longitude et sur une période de 220 jours (lettre c). Contrairement au champ de la zone convective, qui s'organise principalement de façon chaotique aux petites échelles, une importante composante magnétique toroïdale antisymétrique par rapport à l'équateur semble persister dans la zone stable. Même si aucune inversion de polarité n'est observée, les résultats démontrent l'importance que peut avoir un fort cisaillement pour l'organisation d'un champ aux grandes échelles. Brown et al

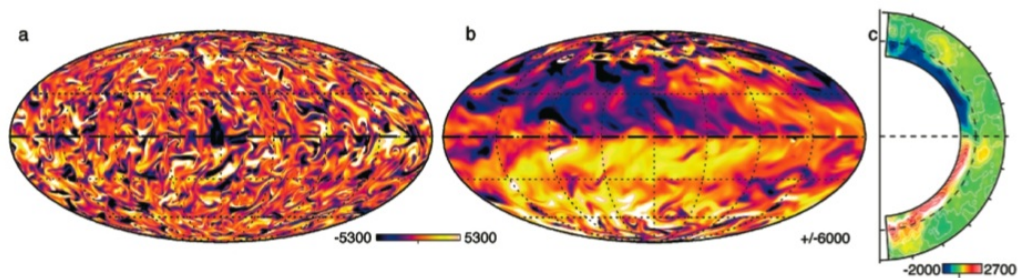


Figure 1.12. Projection Mollweide du champ toroïdal dans une simulation MHD de la zone convective (a) dans la zone instable et (b) dans la zone stable. Projection rayon-latitude du champ toroïdal moyenné sur une période de 220 jours (Figure 2 tirée de [20]).

(2010) explorent l'action de la dynamo turbulente en performant des simulations à trois fois le taux de rotation moyen du Soleil en ne modélisant cette fois que la zone convective [16]. Leurs simulations produisent de larges bandes magnétiques de polarité opposée persistant dans chaque hémisphère sur des périodes correspondant à plusieurs rotations solaires.

Environ au même moment, deux types de simulations commencent à produire des champs aux grandes échelles munis d'inversions de polarité régulières [76, 100]. La figure 1.13A montre l'évolution en fonction du temps des composantes toroïdales et poloïdales moyennées en longitude à l'interface des zones radiatives et convectives dans une simulation ILES effectuée avec EULAG [76] (ci-après GCS10). À l'exception de leur résolution numérique, qui est beaucoup moins élevée dans ce cas-ci ($N_r = 47$, $N_\theta = 64$, $N_\phi = 128$), les simulations effectuées avec EULAG sont semblables en plusieurs points à celles de Browning et al. (2006): elles incluent une zone stable ($0.61 - 0.71R_\odot$) située sous une zone instable ($0.71 - 0.96R_\odot$) et utilisent un référentiel tournant au taux de rotation solaire moyen (~ 28 jours). Contrairement aux simulations ASH, qui emploient des viscosités et diffusivités turbulentes pour dissiper l'énergie aux petites échelles, EULAG utilise un traitement purement implicite, dans lequel MPDATA se charge d'effectuer la dissipation aux échelles du maillage numérique; voir la section 1.2.3. La simulation atteint un régime légèrement plus turbulent que celles qui sont produites par ASH à en juger par l'allure générale des vitesses radiales (e.g. comparer les figures 1 de GCS10 et de BMT04). L'évolution de la composante magnétique toroïdale en fonction de la latitude à l'interface (lettre A) montre que le champ s'organise en bandes azimutales antisymétriques par rapport à l'équateur, soit de façon similaire à ce qui avait été observé dans les expériences de Browning et al. (2006), mais où les bandes étaient confinées à la zone stable (fig. 1.12). En revanche, il se produit ici une inversion de polarité des composantes toroïdale et poloïdale à chaque ~ 30 ans (comparé à 11 ans pour le Soleil). Le champ toroïdal montre également une légère propagation vers l'équateur au cours

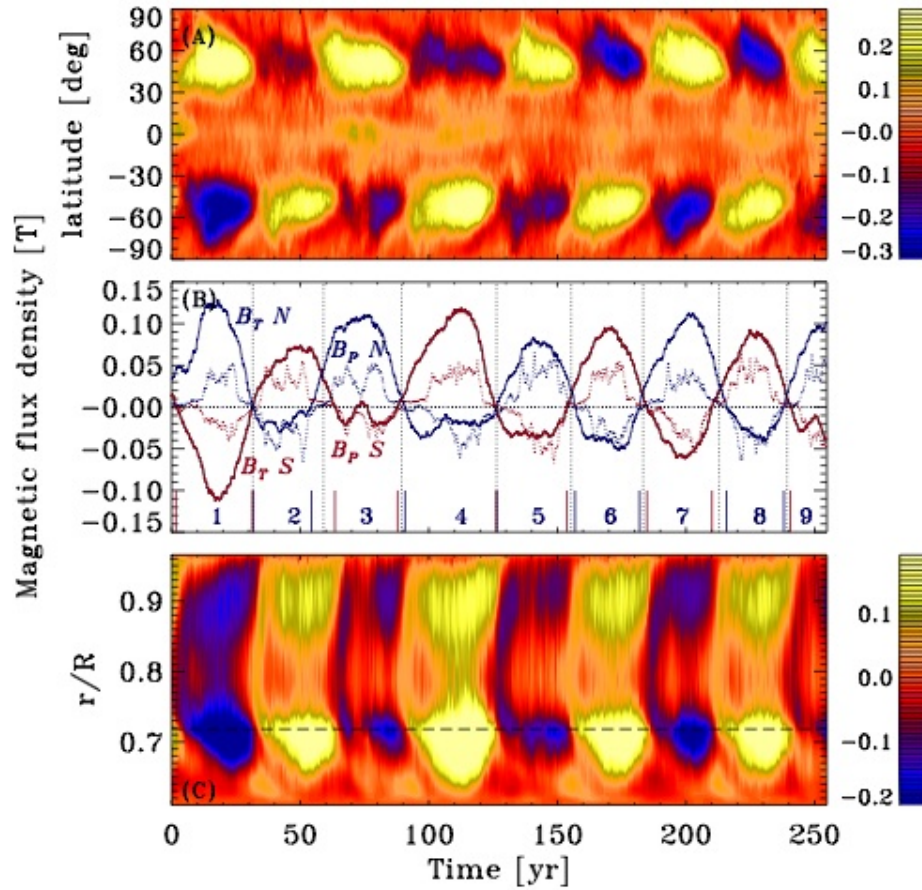


Figure 1.13. Évolution spatio-temporelle du champ magnétique aux grandes échelles d'une simulation MHD effectuée avec EULAG: (A) Projection latitude-temps de la composante azimutale (toroïdale) du champ magnétique moyennée en longitude à l'interface entre zones stables et instables; (B) Séries temporelles des flux magnétiques toroïdaux (lignes continues) et flux magnétiques radiaux intégrés sur les calottes polaires (tirets) dans chaque hémisphère; (C) Projection rayon-temps de la composante du champ toroïdal moyennée en longitude à mi-latitude dans l'hémisphère sud. L'interface entre zones stables et instables (ligne à long traits) est située à $r = 0.718R_{\odot}$. (Figure 4 tirée de [76]).

des 30 ans du demi-cycle magnétique, ce qui est en accord avec les cartes de la composante radiale correspondantes (fig. 1.5), compte-tenu du fait que l'émergence des régions bipolaires en surface est attribuée à la remontée par flottaison magnétique

de tubes de flux magnétique depuis la base de la zone convective. Des différences notables entre la simulation de GCS10 et le vrai cycle solaire sont (1) l'apparition des composantes toroïdales aux hautes-latitudes à chaque début de cycle (contrairement à l'apparition aux mi-latitudes pour le vrai cycle) et (2) une variation en phase des composantes toroïdales et poloïdales (à l'opposé du déphasage de $\pi/2$ mis en évidence par les magnétogrammes). D'un autre côté, Käpylä et al. (2010) simulent la convection MHD forcée thermiquement avec une zone stable dans une coquille sphérique limitée en longitude en utilisant le code PENCIL; un modèle à différences finies utilisant des viscosités/diffusivités explicites. Leurs expériences génèrent des composantes toroïdales cycliques aux grandes échelles et asymétriques par rapport à l'équateur montrant une propagation vers les pôles [100]. Toutefois, en utilisant le même modèle mais sans zone stable Käpylä et al. (2012) trouvent une branche de propagation équatoriale débutant aux mi-latitudes et une branche de propagation polaire de la composante toroïdale, en bon accord avec les magnétogrammes du cycle solaire [101]. Des cycles apparaissent également dans le code ASH, mais à des taux de rotations de 3 à 5 fois plus élevés que celui du Soleil [17, 136]. Récemment, Fan et Fang (2014) trouvent des inversions de polarité semi-régulières du champ moyen toroïdal dans une simulation de la zone convective à taux de rotation solaire [61].

1.3.2 *La reconnexion magnétique*

On sait aujourd'hui que les éruptions et les éjections de masse (figure 1.2) tirent leur puissance de l'énergie magnétique associée à la configuration du champ coronal [3]. En particulier, la conversion d'énergie magnétique en énergie cinétique peut s'effectuer soit par des processus idéaux ($ds = 0$) ou non idéaux ($ds > 0$), qui impliquent également la conversion de l'énergie magnétique en énergie interne. La figure 1.14 montre un exemple de processus MHD idéal dans lequel le fluide est accéléré à partir d'un état au repos ($\mathbf{u} = 0$). Le champ magnétique de l'état initial (à gauche) est un tube de flux avec une hélicité magnétique non nulle (i.e. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq 0$). Cette

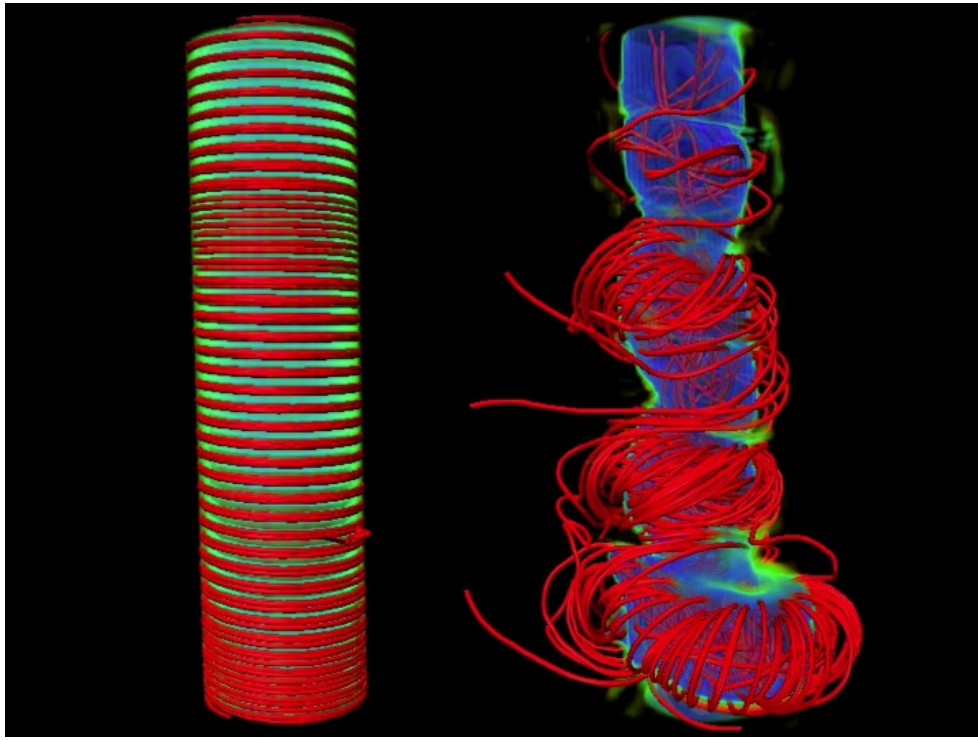


Figure 1.14. Instabilité Kink réalisée avec l’option d’advection semi-Lagrangienne d’EULAG-MHD. Les images de gauche et de droite montrent, respectivement, les lignes de champ magnétique dans leur configuration initiale et après la déstabilisation. L’intensité de la composante verticale du champ magnétique est représentée à l’aide d’un fonction d’opacité.

configuration est instable en raison du fait que la tension magnétique azimuthale (i.e. dans le plan perpendiculaire à l’axe vertical du cylindre) excède grandement la tension exercée par la composante verticale du champ, qui a pour effet de stabiliser le tube de flux en maintenant son alignement dans l’axe. Par conséquent, l’ajout d’une perturbation de faible amplitude provoque la déformation du tube (à droite) en transformant une fraction de l’énergie magnétique initiale en énergie cinétique. Ce processus est une forme *d’instabilité kink*, qui tend à convertir la torsion des lignes de champ en torsion du tube; voir e.g. [118].

Puisque le temps caractéristique associé à la dissipation des structures magnétiques

aux grandes échelles comme les boucles coronales est de $\tau_d \approx 30\,000$ années, la diffusion magnétique à ces échelles est insuffisante pour pouvoir expliquer la libération de l'énergie durant les éruptions et les éjections de masse, qui ont des temps caractéristiques de l'ordre des secondes et des heures. Cependant, il est possible d'accroître l'efficacité de la diffusion si on peut trouver un mécanisme physique permettant de réduire considérablement l'échelle spatiale caractéristique à laquelle elle opère. La figure 1.15 montre deux configurations magnétiques 2D de type 'point-X' données par $\mathbf{B} = (y, \beta^2 x)$, avec les paramètres $\beta = 1$ (à gauche) et $\beta = 1.8$ (à droite). Ici,

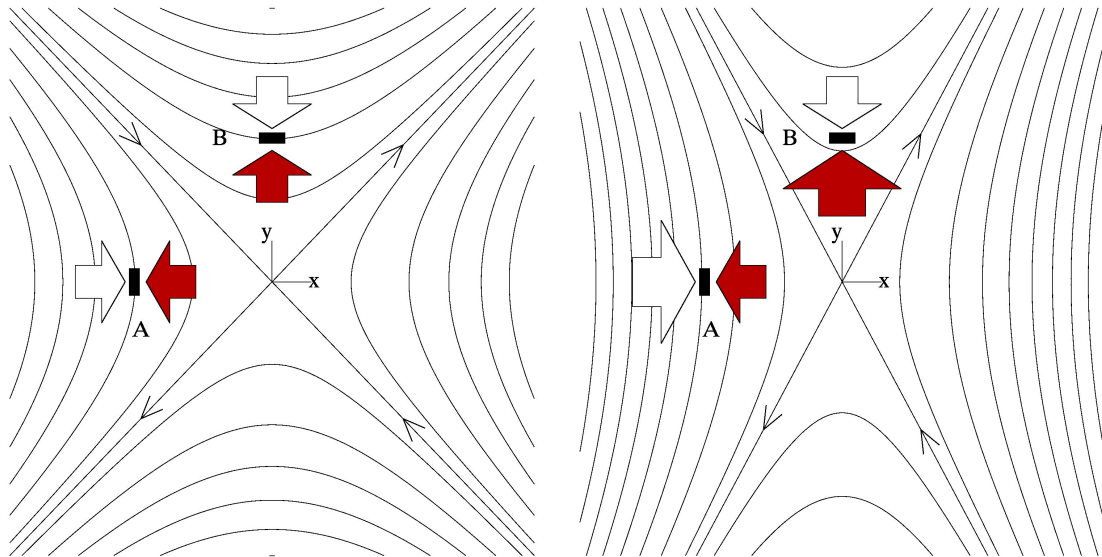


Figure 1.15. Effondrement d'un point X magnétique. Les lignes continues représentent des lignes de champ magnétique dans le voisinage d'un point nul (centre). Les flèches blanches et rouges représentent, respectivement, la direction et la magnitude relative des forces dues à la pression et à la tension magnétique telles qu'appliquées aux éléments de fluide (A) et (B). La largeur de la flèche dénote la magnitude relative de chaque force (Adapté à partir de la figure 2.1 de [30]).

les flèches blanches et rouges montrent, respectivement, la direction et la magnitude relative des forces associées à la pression et à la tension magnétique s'exerçant sur les éléments de fluide A et B (rectangles noirs). En évaluant l'expression pour la force

de Lorentz on a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &\equiv \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\
 &= \frac{1}{\mu}(-\nabla(\mathbf{B}^2/2) + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}) \\
 &= \frac{1}{\mu}((1 - \beta^2)\beta^2 x, (\beta^2 - 1)y) , \tag{1.45}
 \end{aligned}$$

où les forces dues à la pression et à la tension magnétique apparaissent dans les premiers et deuxièmes termes de la deuxième égalité. Par conséquent, le cas $\beta = 1$ donne $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ et l'équilibre entre les deux forces est atteint pour la configuration de gauche de la figure 1.15. En modifiant légèrement cette configuration on obtient celle de droite ($\beta = 1.8$), dans laquelle l'équilibre des forces est perdu (i.e $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$). En particulier, le gradient de pression magnétique (flèche blanche) excède la tension magnétique (flèche rouge) au point (A) et une force résultante vers la droite est ressentie par l'élément de fluide. L'effet contraire se produit en (B), où c'est la tension magnétique qui domine sur le gradient de pression. Ces deux forces ont pour effet de comprimer d'avantage les lignes de champ dans la direction horizontale et de les étirer dans la direction verticale, faisant ainsi augmenter β . Si la mobilité du champ n'est pas contrainte par les conditions aux frontières, alors β continue d'augmenter et la densité de courant $\mathbf{J} = \mu^{-1}\nabla \times \mathbf{B} = \mu^{-1}(\beta^2 - 1)\hat{\mathbf{z}}$, qui était nulle au départ, augmente également. Il est possible de montrer formellement que l'équilibre de départ avec $\beta = 1$ est instable et que le point X doit s'effondrer suite à une perturbation [30]. Cependant, la solution pour des conditions aux frontières arbitraires et pour des temps finis doit être obtenue numériquement.

Le rapprochement de lignes de champ de sens opposés, comme dans le cas de l'effondrement d'un point X, mène à la formation d'une région de forte densité de courant dans laquelle la diffusion magnétique joue un rôle important, de sorte que le théorème d'Alfvén ne s'applique plus. Cette région, que l'on nomme *nappe de courant*, est représentée par la zone hachurée dans la figure 1.16 pour le cas d'effondrement du point X (figure 1.15). Ici, les flèches pleines dénotent le sens des forces résultantes

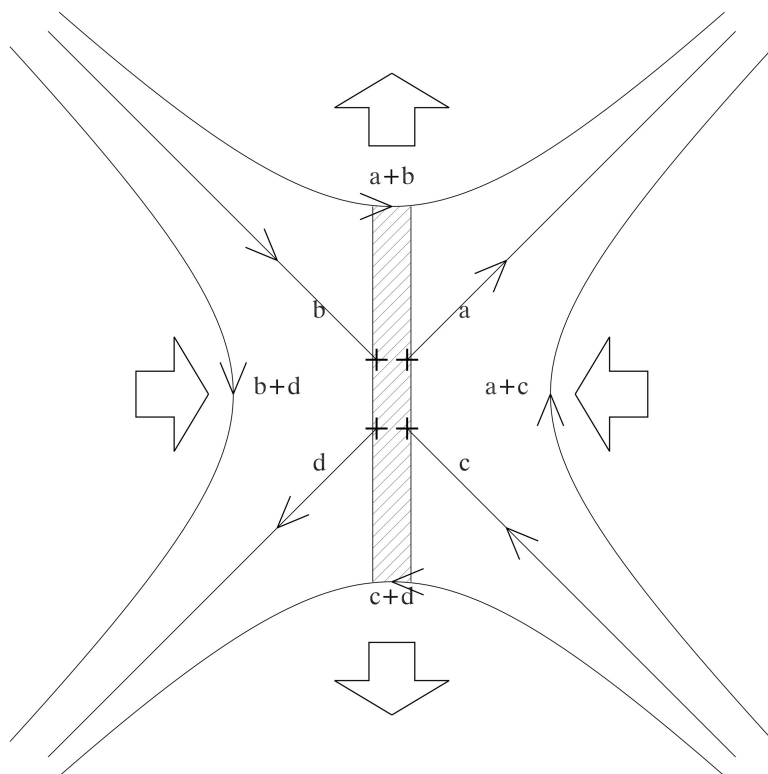


Figure 1.16. Formation d'une nappe de courant (région hachurée) dans le voisinage d'un point X.

appliquées sur le fluide, tandis que les flèches à trait simple indiquent le sens de \mathbf{B} . La compression du champ fait en sorte que lignes dénotées par $b+d$ (à gauche) et par $a+c$ (à droite) se rapprochent l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles entrent dans la zone correspondant à la nappe de courant. Une fois qu'elles ont pénétré à l'intérieur de cette zone, la diffusion magnétique est libre de modifier leur connectivité, conduisant ainsi à un changement de topologie. Les lignes $b+d$ et $a+c$ sont d'abord brisées en paires de segments disjoints (b, d) et (a, c) . Ensuite, les segments a et b sont fusionnés pour former la ligne de champ $a+b$, qui est expulsée vers le haut par la tension magnétique. De même, les segments c et d sont fusionnés pour former la ligne de champ $c+d$, qui est expulsée vers le bas. Cette *reconnexion* des lignes de champ permet au système de

transiter vers un état d'énergie minimal via la conversion de l'énergie magnétique en énergies cinétiques et internes à un taux caractéristique $\tau_d^{-1} \sim (\delta^2/\eta)^{-1} \gg (L^2/\eta)^{-1}$, où δ est l'épaisseur de la nappe de courant et $L_0 \gg \delta$ est l'étendue spatiale du point X.

Contrairement aux processus idéaux, la reconnexion magnétique n'est pas contrainte par l'invariance topologique, ce qui permet l'accès à de plus grands réservoirs d'énergie magnétique et des mécanismes beaucoup plus efficaces pour libérer cette énergie. Selon l'idée originale proposée par Parker, la création continue de nappes de courant provoquée par l'agitation des points d'ancrage des boucles coronales à la photosphère permettrait de chauffer la couronne aux températures extrêmes ($T > 10^6\text{K}$) qui sont observées [140, 141]. Pour qu'un mécanisme de chauffage soit valable, celui-ci doit (1) rester inactif sur une période de temps assez longue pour bâtir les stress magnétiques nécessaires au déclenchement de l'instabilité, (2) procéder assez rapidement une fois qu'il est amorcé et (3) libérer assez d'énergie pour pouvoir expliquer les observations [43, 45]. Comme dans le cas de la dynamo globale (section 1.3.1), la modélisation numérique fait face à la grande disparité des échelles spatiales impliquées dans le mécanisme de reconnexion. Par exemple, l'épaisseur caractéristique d'une nappe de courant associée avec une éruption de durée $\tau_d \sim 100\text{s}$ est de seulement $\delta \sim (\eta\tau_d)^{1/2} \sim 10\text{m}$, alors que les boucles coronales ont des tailles caractéristiques de quelques milliers de kilomètres et plus. Dans le scénario proposé par Parker, ces échelles doivent être traitées simultanément puisque le forçage par la convection en surface constitue la source d'énergie pour la reconnexion et la dissipation ohmique. Aussi, la dissipation implicite de l'algorithme doit être minimale pour permettre une amplification suffisante du réseau de stress magnétiques immédiatement avant le déclenchement de l'instabilité menant à la reconnexion.

1.4 *Projet de doctorat*

Ce projet de doctorat comporte deux volets. Le premier porte sur l'élaboration d'une correction aux estimés des points d'origine des trajectoires du schéma semi-Lagrangien basée sur l'équation de conservation de la masse (section 1.2.2.2). La correction est une idée originale de mon co-directeur de recherche et collaborateur le Dr. Piotr Smolarkiewicz, et requiert la résolution d'une équation aux dérivées partielles nonlinéaire d'ordre deux: l'équation de Monge-Ampère. La méthode de résolution et les résultats font l'objet de deux articles publiés dans des journaux avec comité de lecture. Le premier article, qui apparaît dans la revue *Computers & Fluids* et constitue le Chapitre 2 de cette thèse, présente les résultats préliminaires de tests d'advection de scalaires et de simulations de turbulence isotrope et homogène en 2D [34]. Le deuxième article fait l'objet du Chapitre 3 et a été publié dans la revue *Journal of Computational Physics* [35]. Des solutions exactes à l'équation de MA pour des exemples d'écoulements 2D de rotation et de déformation pure sont présentées, avec une exposition détaillée de la méthode de résolution ainsi que les résultats de simulations MHD pour des cas 2D et 3D de relaxation à l'équilibre impliquant la formation de nappes de courant et la reconnexion magnétique (section 1.3.2). Mes contributions personnelles à ces deux ouvrages incluent la rédaction de chaque article en temps que premier auteur, la dérivation des solutions analytiques à l'équation de MA, l'élaboration et l'ajout de l'algorithme de solution à l'intérieur d'EULAG, ainsi que la conception et la réalisation de toutes les expériences numériques.

Le deuxième volet porte sur l'étude des mécanismes de modulation de la structure thermique globale du Soleil par le cycle d'activité magnétique en lien avec les variations de l'irradiance solaire totale (section 1.1.1) et les deux écoles de pensée (1.1.1.1). L'étude se base sur une simulation MHD globale de la convection solaire produite au sein du Groupe de Recherche en Physique Solaire de l'Université de Montréal. Cette simulation génère un cycle magnétique similaire en plusieurs aspects

à celui du Soleil, et montre un flux convectif thermique variant en phase avec l'énergie magnétique. Par conséquent, la corrélation positive entre le flux convectif et l'énergie magnétique de cette simulation supporte la thèse défendue par la deuxième école de pensée. Les résultats préliminaires montrant la corrélation positive entre le flux et l'énergie magnétique font l'objet d'une lettre à *Astrophysical Journal Letters* constituant le Chapitre 4 [33]. Une analyse approfondie des résultats de cette simulation est présentée au Chapitre 5 et constitue le matériel d'un futur article (Cossette & al. 2014, ApJ, en préparation). Mes contributions personnelles à ces deux articles incluent leur rédaction en tant que premier auteur et la mise au point des méthodes d'analyse pour l'identification du mécanisme de modulation.

Tous les travaux ont été effectués sous la supervision et avec la collaboration du Dr. Smolarkiewicz et de mon directeur de recherche le Professeur Paul Charbonneau.

Chapitre 2

A MONGE-AMPÈRE ENHANCEMENT FOR SEMI-LAGRANGIAN METHODS

Cet article a été publié comme l'indique la référence bibliographique

Cossette, J.-F. et Smolarkiewicz, P.K. 2011, A Monge-Ampère enhancement for semi-Lagrangian methods, dans *Computers and Fluids*, vol. 46, pages 180-185.

Cet ouvrage fait l'exposition d'une méthode numérique pour corriger les trajectoires du schéma semi-Lagrangien classique (section 1.2.2.2), qui requiert la solution à une équation aux dérivées partielles nonlinéaire d'ordre deux: l'équation de Monge-Ampère. Ce développement est motivé par le fait que les approximations aux trajectoires des éléments de fluide (1.36) introduisent des erreurs dans le Jacobien de l'écoulement, qui peuvent mener à une violation de la forme Lagrangienne de l'équation de conservation de la masse (1.39). Des résultats sont obtenus dans le contexte de l'advection passive d'un scalaire et d'expériences de turbulence homogène et isotrope en 2D. Ces derniers ont été présentés dans le cadre des conférences internationales suivantes: *First Eulag Model User's Workshop, Bad Tölz, Allemagne, 2008* et *Institute for Computational Fluid Dynamics Conference on Numerical Fluid Dynamics, Reading, Angleterre, 2010*.

Abstract

Demanding the compatibility of semi-Lagrangian trajectory schemes with the fundamental Euler expansion formula leads to the Monge-Ampère (MA) nonlinear second-order partial differential equation. Given standard estimates of the departure points of flow trajectories, solving the associated MA problem provides a corrected solution

satisfying a discrete Lagrangian form of the mass-continuity equation to round-off error. The impact of the MA enhancement is discussed in two diverse limits of fluid dynamics applications: passive tracer advection in a steady cellular flow and in fully developed turbulence. Improvements of the overall accuracy of simulations depend on the problem and can be substantial.

2.1 Introduction

The research on the Monge-Ampère equation (hereafter the MA equation or MAE) extends over more than two centuries [134]. Nowadays, MAE is at the core of many theoretical and computational applications deriving from functional and geometric analysis, geophysical fluid dynamics, cosmology, optimization and imaging technology; see [15, 40, 41, 64, 127, 202] and references therein. Here, we arrive at MAE while examining the impact of enforcing the compatibility of the trajectory schemes with mass/volume continuity in semi-Lagrangian (SL) integrations of equations governing fluid dynamics [60, 169, 178]. These equations can be written compactly as

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i - \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), s) ds , \quad (2.1)$$

$$\rho(\mathbf{x}_i, t) = \widehat{J}\rho(\mathbf{x}_0, t_0) , \quad (2.2)$$

$$\psi(\mathbf{x}_i, t) = \psi(\mathbf{x}_0, t_0) + \int_T R dt , \quad (2.3)$$

where positions (\mathbf{x}_i, t) and (\mathbf{x}_0, t_0) are, respectively, the arrival (grid) and departure points taken along a parcel trajectory T , ρ denotes the density, $\widehat{J} \equiv J^{-1} = \det\{\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x}\}$ is the inverse flow Jacobian and ψ symbolizes a specific fluid variable (e.g., temperature or a velocity component) with R indicating its associated forcing.

Although SL schemes are established in CFD, and used operationally in numerical weather prediction [177], approximations to the trajectory integrals (2.1) are typically incompatible with the fundamental Euler expansion formula — $d \ln J/dt = \nabla \cdot \mathbf{v}$, with d/dt denoting the total derivative along T — that underlies the Lagrangian form of the

mass continuity equation (2.2)¹. In particular, for incompressible fluids considered in this paper the volume of each fluid element remains constant, upon which the relation $\widehat{\mathbf{J}} = 1$ becomes a necessary condition for the scheme compatibility.

On the basis that vortical motions do not induce any change in the volume of fluid elements, we correct the estimated path-mean velocity

$$\tilde{\mathbf{v}} \approx (\Delta t)^{-1} \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), s) ds , \quad (2.4)$$

in the discretized counterpart of (2.1) with the gradient of a potential ϕ

$$(\mathbf{x}_0)_C = \mathbf{x}_i - \Delta t (\tilde{\mathbf{v}} - \nabla\phi) , \quad (2.5)$$

such that the resulting set of departure points $(\mathbf{x}_0)_C$ satisfies

$$\det \left\{ \frac{\partial(\mathbf{x}_0)_C}{\partial \mathbf{x}} \right\} = 1 , \quad (2.6)$$

which happens to be a form of the MAE.² An exact-projection-type solver capable of delivering round-off error accurate solutions to (2.6) has been developed, and its technical exposition will be given elsewhere. Here it is used to show the impact of (2.5) in two diverse applications on periodic domains: a 3D passive tracer advection in a steady cellular flow, and a freely evolving 2D turbulence — archetypes of pollution transport and large-scale atmospheric circulations, respectively. In section 2.2 we discuss the derivation of MAE, its physical interpretation in terms of flow rotation and deformation, and the implementation of the MAE solver in the context of a semi-Lagrangian scheme. Numerical results are presented in section 2.3 and remarks in section 2.4 conclude the paper.

¹ This contrasts with Eulerian finite-volume methods, in which advecting velocities most often comply with the discrete mass continuity.

² It may be tempting to argue for (2.5) in terms of the Helmholtz decomposition of vector fields [15], yet in terms of numerics $\nabla\phi$ has a simple interpretation of the path-integrated implicit pressure correction to the explicit estimate $\tilde{\mathbf{v}}$.

2.2 The Monge-Ampère equation

2.2.1 Interpretation in terms of flow shear

Here we present the 2D case of (2.6), the archetype of which is considered in section IV.3 of [36]. For any $\Delta t > 0$, the insertion of (2.5) into (2.6) leads to

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + E(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) + D = 0, \quad (2.7)$$

where subscripts x and y denote the respective partial differentiations. The coefficients of (2.7) depend only on partial derivatives of $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$, such that $A = 1 - \Delta t \tilde{v}_y$, $B = 1/2 \Delta t (\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)$, $C = 1 - \Delta t \tilde{u}_x$, $D = -\tilde{u}_x - \tilde{v}_y - \Delta t (\tilde{u}_y \tilde{v}_x - \tilde{u}_x \tilde{v}_y)$ and $E = \Delta t$.³

To develop an intuition for properties of (2.7) in terms of fluid flow, we consider the Euler-forward approximation for (2.4) (i.e. $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$) and examine the behavior of the MAE's solution in the neighborhood of stationary points (x_o, y_o) , where $\nabla\phi = 0$, in the context of the elemental pure-rotational and pure-deformational incompressible flows $\mathbf{v}_R = (-y, x)$ and $\mathbf{v}_D = (y, x)$, respectively. Accordingly, the vorticity Ω_{ik} ($= 1/2 (\partial u_i / \partial x_k - \partial u_k / \partial x_i)$) and deformation D_{ik} ($= 1/2 (\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i)$) tensors have constant entries ($\Omega_{12} = -\Omega_{21} = -1$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 0$, $\mathbf{D} = 0$) and ($D_{12} = D_{21} = 1$, $D_{11} = D_{22} = 0$, $\mathbf{\Omega} = 0$). Figure 2.1 shows, for each type of flow, the result of hypothetical trajectory estimates in the vicinity of $(x_o, y_o) = (0, 0)$. Arrival points, shown as black dots, lie on an exact flow trajectory (solid lines) and are linked to their respective departure points (open circles) by a straight line segment that represents the estimated trajectory. The set of all departure points (dashed line) and its corresponding set of arrival points (solid line) therefore may be regarded as the boundaries of the initial and final fluid elements, respectively. Note that the standard trajectory estimation fails, in each case, to preserve the area of the fluid

³ It can be shown that for $L := \Delta t \|\partial\tilde{\mathbf{v}}/\partial\mathbf{x}\| < 1$ (the so called Lipschitz number condition [169]) $AC - B^2 - DE$ ($= 1 - 0.25\Delta t^2(\partial\tilde{u}/\partial y - \partial\tilde{v}/\partial x)^2$) > 0 ; that is, the assumption of the Rellich theorem for the solution existence [36] is satisfied.

elements and therefore is incompatible with (2.6). Using the correction (2.5), to be found by solving (2.6) for ϕ , amounts to displacing the estimated departure points $\mathbf{x}_0 \rightarrow (\mathbf{x}_0)_C$, in the direction indicated by the arrows, which are everywhere parallel to $\nabla\phi$. Thus, figure 2.1 shows that ϕ compensates, via the action of $\nabla\phi$, the anomalous fluid contraction/expansion.

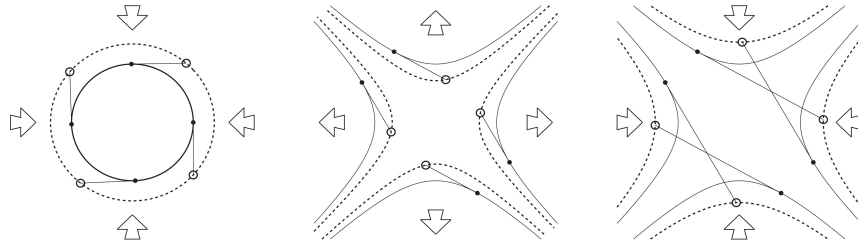


Figure 2.1. Anomalous fluid contraction/expansion and the MAE correction in the vicinity of the stationary point $(x_o, y_o) = (0, 0)$. Solid lines denote exact trajectories, whereas dashed lines mark the hypothetical set of the estimated departure points. Straight line segments exemplify the trajectories that link particular arrival points (black dots) to their respective departure points (open circles) and arrows indicate the direction of the applied MAE correction. The left plate corresponds to \mathbf{v}_R , while the two cases of \mathbf{v}_D are shown with non-intersecting (middle) and intersecting estimated trajectories (right).

To show how this corresponds to a solution of (2.7), we select a set of coordinate axes corresponding to the directions of the principal curvatures λ_1 and λ_2 of ϕ at (x_o, y_o) . This allows to set $\phi_{xy} = 0$, $\lambda_1 = \phi_{xx}$ and $\lambda_2 = \phi_{yy}$ (cf. section 8 in [53])⁴, whereupon (2.7) becomes

$$(1 - \Delta t D_{22})\lambda_1 + (1 - \Delta t D_{11})\lambda_2 + \Delta t \lambda_1 \lambda_2 = D_{11} + D_{22} - \Delta t D_{11} D_{22} + \Delta t (D_{12}^2 - \Omega_{12}^2). \quad (2.8)$$

⁴We make the assumption that $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Equation (2.7) constrains λ_1 and λ_2 , and provides information on the type of the stationary point that must be either a maximum ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$), a saddle point ($\lambda_1 \lambda_2 < 0$) or a minimum ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$). Substituting the components of $\mathbf{\Omega}$ and \mathbf{D} respective to each elemental flow into (2.8) reveals that only maxima (exemplified in the left plate of fig. 2.1) and saddle points are possible when $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_R$; whereas, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_D$ allows for both minima and maxima (exemplified in the middle and right plates of fig. 2.1), in addition to saddle points. This categorization is consistent with pure rotation acting as a source of anomalous contraction only, and pure deformation acting as a source of both anomalous contraction and expansion. While elemental flows illustrate the mechanics of the MAE enhancement to the SL schemes, assessing its utility in the general case of arbitrary $\mathbf{\Omega}$ and \mathbf{D} requires the use of a numerical solver.

2.2.2 Numerics

Equation (2.3) is integrated in time using the nonoscillatory forward-in-time algorithm — embedded in the general-purpose hydrodynamical simulation code EULAG, see [150] for a review —

$$\psi_{\mathbf{i}}^{n+1} = LE_{\mathbf{i}}(\tilde{\psi}) + 0.5\Delta t R_{\mathbf{i}}^{n+1} \equiv \widehat{\psi}_{\mathbf{i}} + 0.5\Delta t R_{\mathbf{i}}^{n+1} . \quad (2.9)$$

where $\psi_{\mathbf{i}}^{n+1}$ is the solution sought at the grid point $(t^{n+1}, \mathbf{x}_{\mathbf{i}})$, $\tilde{\psi} \equiv \psi^n + 0.5\Delta t R^n$, and LE denotes, a two-time-level either advective semi-Lagrangian [169] or flux-form Eulerian [164] nonoscillatory two-time level transport operator (viz. advection scheme).

Standardly for semi-Lagrangian calculations, we approximate path integrals (2.1) by the second-order accurate mid-point rule

$$\mathbf{x}_0^{\nu+1} = \mathbf{x}_{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{v}(\mathbf{x}_0^{\nu}, t_0) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, t)) \quad , \quad \nu = 0, \dots, m ; \quad (2.10)$$

with the first-order estimate of the initial iterate $\mathbf{x}_0^0 = \mathbf{x}_{\mathbf{i}} - \Delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathbf{i}}, t)$. Two iterations of (2.10) suffice for a second-order accuracy, while its convergence is assured for the

Lipschitz number L smaller than unity [169].⁵ First-order linear extrapolation of $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_0)$ gives an estimate of $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t)$ and a monotone interpolation procedure is used to map the former velocity field to the foot of the estimated trajectory $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_0) \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}'_0, t_0)$ [166].

Once the estimated departure points are obtained from (2.10), they are corrected according to (2.5); $(\mathbf{x}_0)_C = \mathbf{x}_0^{m+1} + \Delta t \nabla \phi$. A Jacobian-Free Newton-Krylov approach [48, 106] is used to solve the sparse system of nonlinear equations that results from (2.6) and its discretization with centered derivatives. The frequency of the MA-solver application is recognizably inherent to the design of semi-Lagrangian codes; i.e., once for steady flows, but otherwise once per model time step.

2.3 Results

2.3.1 Passive advection in a cellular flow

Figure 2.2 shows isosurfaces of tracer distributions $\psi(x, y, z) = c$, identifiable with the boundaries of fluid elements, after they have been advected with the flow deriving from the stream-function $\Psi(x, y, z) = (0, 0, \sin(x) \sin(y))$; $(x, y, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. The initial distribution is given by the family of concentric spheres

$$\psi(x, y, z) = \max \left(0, 1 - \sqrt{(x - x_c)^2/X^2 + (y - y_c)^2/Y^2 + (z - z_c)^2/Z^2} \right),$$

with $X = Y = Z = 0.4\pi$ and $x_c = y_c = z_c = 3\pi/2$. The latter choice concentrates ψ near the center of the vortex at (x_c, y_c, z_c) , where flow trajectories are close to circles. The left and right pictures are shown at $t = 30P$ and correspond, respectively, to the standard SL and MA-enhanced advection, with $P = 4F(\pi/2|m)$ denoting the period of the closed trajectory that passes through the point $(x, y_c, z_c) = \psi^{-1}(0.383)$, expressed in terms of the elliptic integral of the first kind F and the amplitude

⁵ Here, $L = \Delta t \max_i (\sum_{j, |j|} |v^i_{,j}|)$, where the superscript i identifies a component of the velocity vector and the subscript j refers to spatial differentiation.

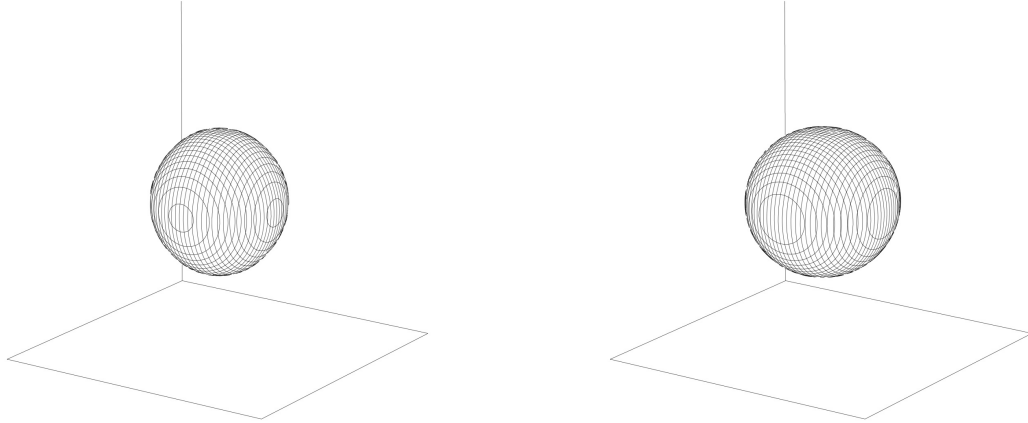


Figure 2.2. Passive tracer isosurface $c = 0.383$ in the cellular flow at $t = 30P$ resulting from the standard SL (left) and MA-enhanced advection (right).

$m = 1 - \sin(x)^2 \sin(y)^2$ [176]. Both simulations were performed at Courant number 3.76 with the second-order monotone interpolation scheme, using a uniform 128^3 grid. The difference between the two solutions appears significant. The isosurface produced by standard SL advection seems to differ from the initial sphere by its aspect ratio and volume, whereas the compatible one is hardly distinguishable from it. This is substantiated in figure 2.3, the left and right plates of which show the corresponding cross-sections of the isosurface $\psi(x, y, z) = c$, before and after advection (dashed and solid contours, respectively).

Table 2.1 compares error norms of a series of MA-enhanced calculations against the standard SL scheme; the calculations employ various permutations of the second- and fourth-order-accurate representations of the Jacobian and the interpolator [166]. The second and third columns list, respectively, the order of accuracy of the inter-

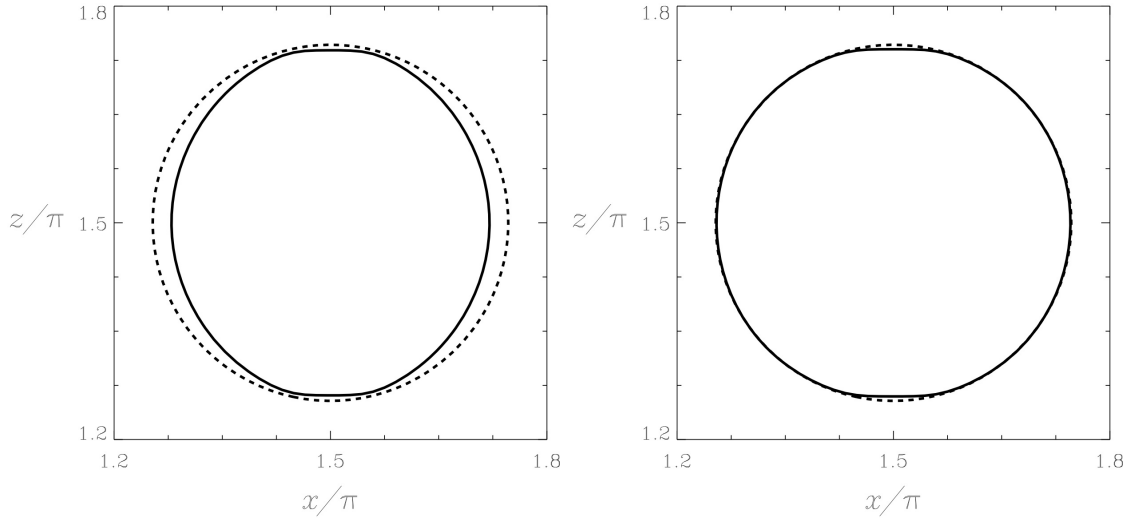


Figure 2.3. Passive tracer cross-sections of the isosurface $c = 0.383$ at $y = 3\pi/2$ in the cellular flow at $t = 0$ (thick dashed line) and at $t = 30P$ (thick solid) resulting from run SL_a (left) and run MA_a (right).

run	$\mathcal{O}(I)$	$\mathcal{O}(J)$	$ J - 1 _\infty$	$\delta\psi$
SL_a	4	2	3.43×10^{-4}	-0.139
SL_b	2	2	3.43×10^{-4}	-0.135
MA_a	4	2	2.96×10^{-6}	0.020
MA_b	2	2	2.98×10^{-6}	0.024
MA_c	2	4	2.96×10^{-7}	0.003
MA_d	4	4	1.18×10^{-7}	-0.001

Table 2.1. Error norms of tracer advection in the cellular flow on a uniform 128^3 grid.

polation scheme $\mathcal{O}(I)$ and of the finite-difference flow Jacobian operator $\mathcal{O}(J)$ used in each run. The flow Jacobian error and the total mass(volume) conservation error, evaluated in the usual Eulerian sense, are shown in the last two columns. The stan-

dard SL algorithm with $\mathcal{O}(I) = 4$ and $\mathcal{O}(J) = 2$ loses 14% of the total initial mass content while it gains merely 2% for the MA-enhanced scheme of the same accuracy (run MA_a). Using the $\mathcal{O}(J) = 4$ Jacobian operator reduces this mass excess by an order of magnitude (run MA_d), whereas using the $\mathcal{O}(I) = 2$ interpolator appears less significant (runs SL_b, MA_b and MA_c).

2.3.2 Freely evolving turbulence

The behavior of standard SL and MA-enhanced algorithms is studied for a freely evolving constant-density turbulent fluid in two spatial dimensions. The experiments are performed in the spirit of implicit large-eddy simulation, with modeling the dissipative action of small scales on the large ones by the truncation terms of monotone interpolation schemes; cf. [52, 150] and references therein. The model domain is a periodic square with edge size $L = 2\pi$ and a uniform grid $NX \times NY = 128^2$. The initial condition uses a fully developed turbulent velocity field, the power spectrum⁶ of which agrees well with the power law $E(k) = C'\eta^{-2/3}k^{-3}$, where k is the wavenumber, η is the enstrophy time rate of change and C' is a constant [108].

Figure 2.4 shows the evolution of the kinetic energy, enstrophy, Courant and Lipschitz numbers, all as a function of a time normalized by the eddy turn-over time τ ,⁷ for two simulations using the fourth-order monotone interpolation [166]. The first experiment (solid curve) employs the standard SL algorithm and the second (dashed curve) employs the MA-enhanced algorithm. Figure 2.5 displays the error in the flow Jacobian $e = J - 1$ in terms of the infinity norm $|e|_\infty$ (thick curve) and the error standard deviation (thin curve) for both experiments, where a maximal absolute error $e = 1 \times 10^{-8}$ has been enforced for the MA run. While both experiments share the

⁶ The 2D discrete Fourier transform is performed for each component of the velocity field, after which the quantity $\hat{u}(k_x, k_y)\hat{u}(k_x, k_y)^* + \hat{v}(k_x, k_y)\hat{v}(k_x, k_y)^*$ resulting from standard and MA-enhanced advections is summed over shells of constant $k \equiv |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

⁷ $\tau \equiv L/\sqrt{\langle \mathbf{v}^2 \rangle}$, where $\langle \cdot \rangle$ denotes the domain average and v is the initial velocity.

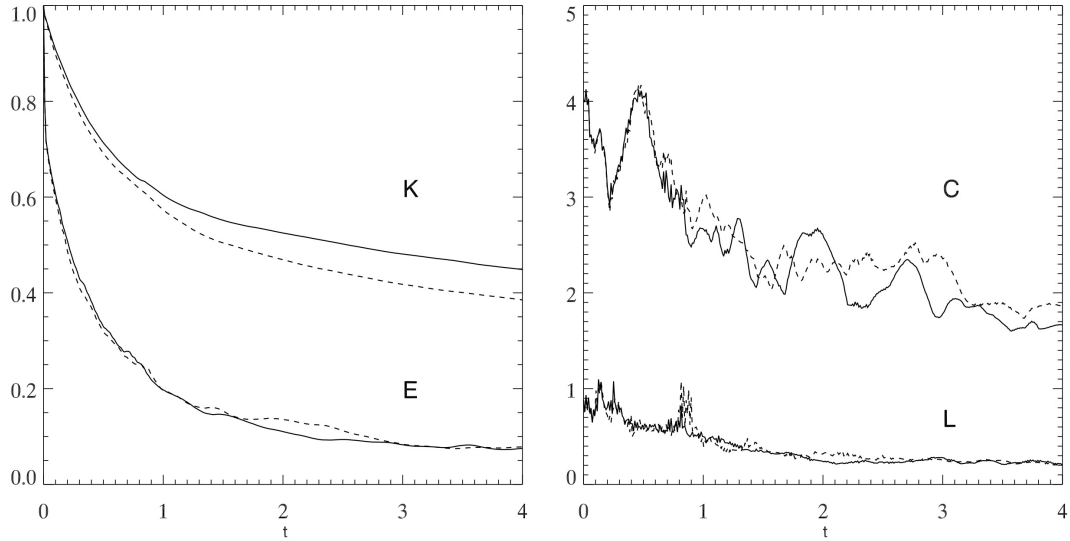


Figure 2.4. Left, normalized kinetic energy and enstrophy (K, E); right, Courant and Lipschitz numbers (C, L), as a function of the time normalized by eddy turn-over time, for the standard SL (solid) and MA-enhanced algorithms (dashed).

same numerical stability, as evidenced by the similarities in the evolution of their respective Courant and Lipschitz numbers, the MA-enhanced algorithm dissipates kinetic energy at a somewhat higher rate than does the standard SL scheme. As well, the growth of small eddies into larger structures that is characteristic of 2D geometries is seen from the initial and final vorticity fields associated with each simulation, shown in figures 2.6 and 2.7, respectively.

Figure 2.8 shows the power spectra $E(k)$ at different times in the course of the standard SL (left plate) and MA-enhanced (right plate) simulations. Overall, both spectra move downward at a similar rate while maintaining a k^{-3} power law dependence in the inertial subrange. However, in the later stage, $t > 3$, the MA-enhanced solution exhibits a more regular spectrum than the SL solution that has a substantial energy deficit in large-scale eddies with $2 < k < 5$. This result is not sporadic but is reproducible with different initial conditions and the second-order interpolator. Fur-

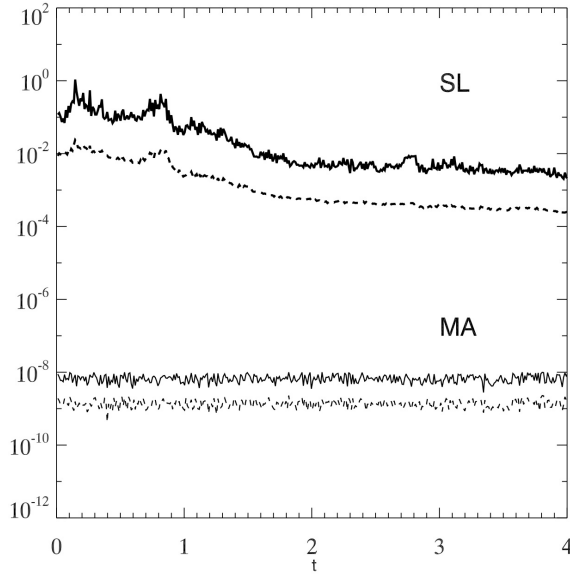


Figure 2.5. Flow Jacobian error infinity norm (thick curve) and standard deviation (thin curve) for the standard SL and MA-enhanced algorithms.

thermore as the resolution increases both solutions converge to a correct result (not shown), consistent with the footnote 2 interpreting $\nabla\phi$ in (2.6) as a path integrated, $\mathcal{O}(\Delta t)$, implicit pressure correction to the explicit estimate of $\tilde{\mathbf{v}}$. The implication of these results is that the energy transfer from the small to the large scales of the flow is more efficient when compatibility is enforced. One such possible mechanism is the stretching of material line elements, the effectiveness of which depends upon whether or not the volume of the fluid elements is conserved. Figure 2.9 shows the evolution of the standard deviation of the off-diagonal strain distribution σ for both runs and, indeed, σ in the interval $t \in [2, 3.5]$ for the MA algorithm is higher than its SL counterpart.

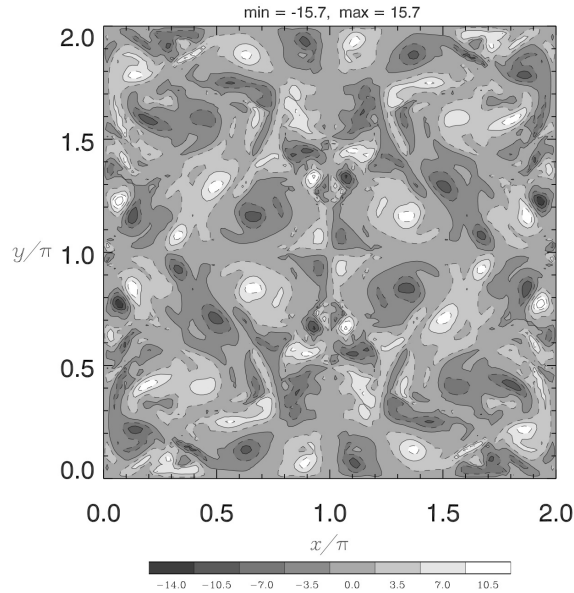


Figure 2.6. Initial vorticity field for the standard SL and MA-enhanced simulations at 128^2 resolution.

2.4 Remarks

Together, the analysis in terms of the elemental flows carried in section 2.2 and the cellular-flow advection experiments support the importance of enforcing the compatibility of semi-Lagrangian trajectory schemes with the Euler expansion formula. The advection experiments have shown that both the shape of the fluid elements and the total mass are better preserved by the MA-enhanced algorithm. Furthermore, the experiments with freely evolving 2D turbulence have documented the better representation of the inverse energy cascade, arguably in response to an increased level of strain due to the volume preservation of fluid elements.

The present paper introduces the MA enhancement in semi-Lagrangian simulations of fluids. To maximize the accuracy of physical insight (not to minimize the computational cost), the current study employs an advanced Newton-Krylov MA solver with round-off error convergence threshold. However, since in standard semi-

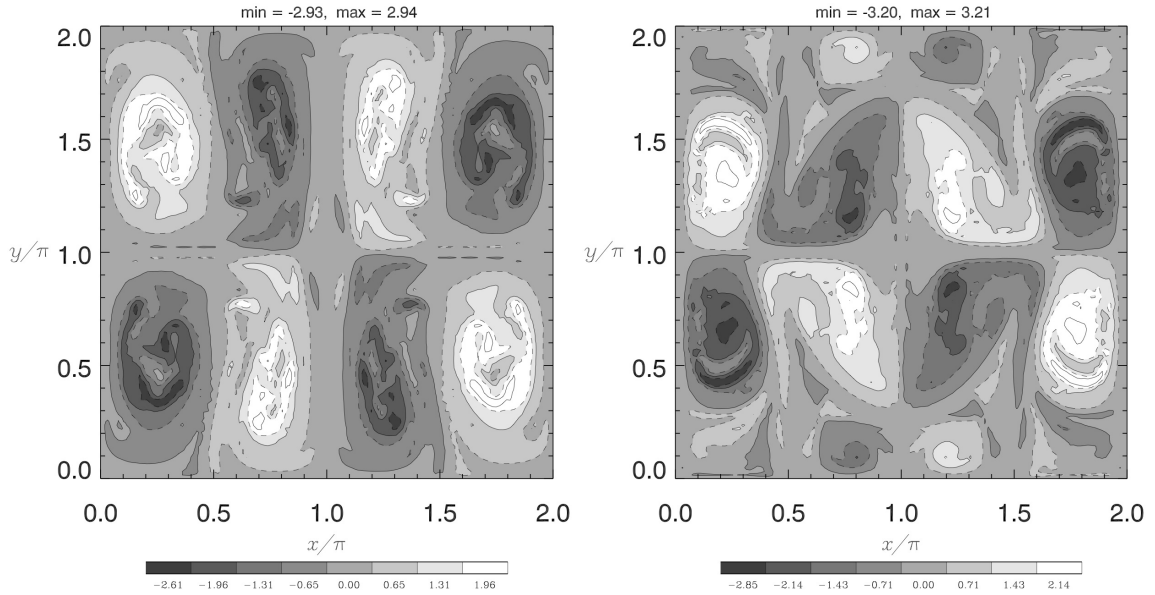


Figure 2.7. Vorticity fields for the standard SL (left) and MA-enhanced (right) simulations at 128^2 resolution taken at $t \approx 4.0$.

Lagrangian calculations little attention is given to the behavior of the flow Jacobian (and thus to the topological realizability of the computed trajectories) only a few converging iterations of a simple MA scheme, based on the Gauss-Seidel or Richardson methods, may benefit practical applications.

The incompressible-flow context of this paper has been employed mostly for the transparency of the presentation. The same compatibility concept can be extended to anelastic and compressible flows, by deriving a discrete MAE from the general form of the Euler expansion formula in lieu of (2.6). Notably, either anelastic or compressible systems can employ (2.2) directly with disregard to the compatibility of the calculated trajectories (cf. section 5a in [169]). Furthermore, without the compatibility enforcement, semi-Lagrangian methods relying on conservative mappings can assure mass conservation with large errors of the flow Jacobian. The impact of MA enhancements in such cases is far from obvious and warrants further study.

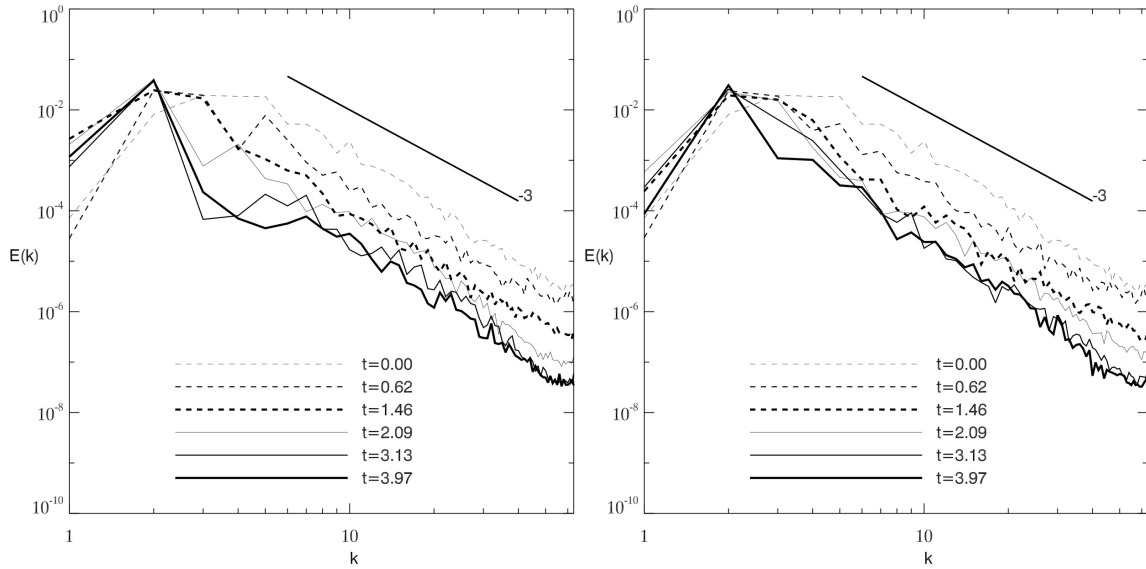


Figure 2.8. Evolution of the power spectrum $E(k)$ for standard SL (left) and MA-enhanced algorithms (right).

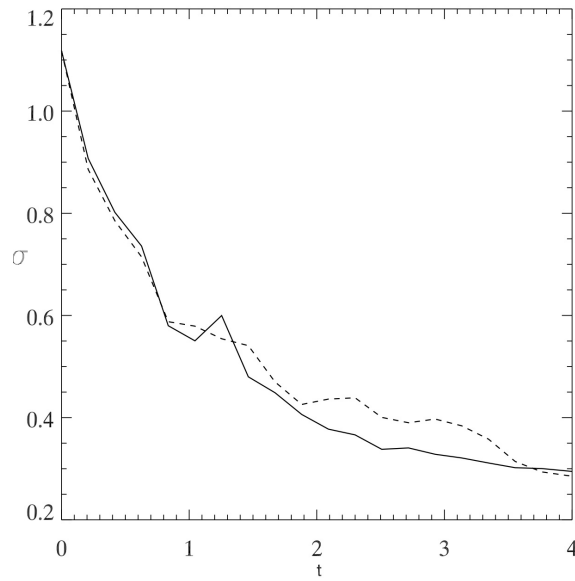


Figure 2.9. Standard deviation of the off-diagonal strain distribution as a function of dimensionless time for the SL (solid line) and MA algorithms (dashed line).

Acknowledgments

The discussions with Paul Charbonneau are gratefully acknowledged. Comments from two anonymous referees helped to improve the presentation. This work was supported in part by the DOE award DE-FG02-08ER64535. The National Center for Atmospheric Research is sponsored by the National Science Foundation.

Chapitre 3

THE MONGE-AMPÈRE TRAJECTORY CORRECTION FOR SEMI-LAGRANGIAN SCHEMES

Cet article été publié comme l'indique la référence bibliographique

Cossette, J.-F., Smolarkiewicz, P.K. et Charbonneau, P. 2014, The Monge-Ampère trajectory correction for semi-Lagrangian schemes, dans *Journal of Computational Physics*, vol. 274, pages 208-229.

et constitue le coeur du premier volet de cette thèse portant sur la correction de trajectoire du schéma semi-Lagrangien d'EULAG. L'article s'ajoute à la contribution précédente (Chapitre 2) et présente des solutions exactes à l'équation de Monge-Ampère, ainsi que la formulation du solveur numérique utilisé pour trouver sa solution dans le contexte d'écoulements de fluides incompressibles arbitraires utilisant des conditions aux frontières périodiques. La correction de la trajectoire est appliquée à des expériences impliquant la formation de nappes de courant et la reconnexion magnétique des lignes de champ (section 1.3.2). Les résultats ont été présentés dans le cadre des conférences internationales suivantes: *Second EULAG Model Users Workshop, Sopot, Pologne, 2010*; *13th European Turbulence Conference, Warsaw, Poland*; *Third International EULAG Workshop on Eulerian/Lagrangian methods for fluids, Loughborough, Angleterre*; *Workshop on Large-Eddy simulations of MHD turbulence, Boulder (CO), USA*.

Abstract

Requiring that numerical estimates of the flow trajectories comply with the fundamental Euler expansion formula that governs the evolution of a volume of fluid leads to a second-order nonlinear Monge-Ampère partial differential equation (MAE). In

[Cossette and Smolarkiewicz, *Comput Fluids* **46**, 180 (2011); CS11], a numerical algorithm based on solving the MAE with an inexact Newton-Krylov solver has been developed and used to correct standard estimates of the departure points of flow trajectories provided by a classical semi-Lagrangian scheme in the context of an incompressible fluid. Here we extend the theoretical analysis of the elemental rotational and deformational motions presented in [CS11]. In particular, closed-form analytic solutions are derived for both cases that serve to illustrate the mechanics of the enhanced trajectory scheme and to address the issues of existence and uniqueness. Scalar advection shows that the MA correction improves mass conservation substantially by suppressing anomalous fluid contraction. The impact of the MA correction on complex flows is studied in the framework of an ideal magneto-fluid in which the formation of current sheets leads to topological changes and reconnection of field lines. The use of the MA correction improves the numerical stability of the solutions and prevents trajectory intersections as well as the spurious growth of the magnetic energy. 2D and 3D examples are presented and the computational performance of the solver is documented.

3.1 Introduction

Discretizing analytical fluid PDEs into a form that is amenable to numerical integration has to take into account the key aspects of stability, consistency, accuracy and efficiency. Depending upon the physical application and the aim of the user, specific features that are inherent to the analytical model may or may not be incorporated into the architecture of the numerical algorithm. Such properties are, for instance, conservation laws, monotonicity, positive-definiteness of the scheme, total-variation diminishing constraints, or some form of compatibility [158]. In the brief proceedings paper [34], the Monge-Ampère (hereafter, MA) trajectory correction for semi-Lagrangian (SL) integration schemes was introduced as a means to enforce a type of

compatibility based on the Lagrangian form of the mass continuity equation in the context of incompressible fluids. The execution of the MA correction requires solving a diagnostic nonlinear second-order PDE, the Monge-Ampère equation (MAE), to some approximation at each model time step. To interpret the MA correction in physical terms, we developed in [34] its theoretical analysis for elemental rotational and deformational motions. Here, we extend this analysis by providing closed-form analytic solutions for both elemental flows. These solutions illustrate the mechanics of the trajectory corrections and substantiate the arguments on the solution existence and uniqueness. The impact of the enhancement on scalar advection is revisited and its performance in the context of complex flows is assessed using a problem of relaxation to equilibrium in the ideal classical magnetohydrodynamical (MHD) approximation. What follows briefly summarizes the framework of SL methods before introducing the MA correction.

SL discretization schemes arise from a path integration

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}_0, t_0) + \int_T R dt \quad (3.1)$$

of a Lagrangian evolution equation

$$\frac{d\psi}{dt} = R , \quad (3.2)$$

in which d/dt denotes the total derivative along the flow trajectory $T : (\mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow (\mathbf{x}_i, t)$, ψ is an arbitrary intensive fluid variable (e.g., temperature, chemical concentration or velocity component), and R symbolizes the associated right-hand side (e.g., heat sources, chemical reactions, or pressure gradient force, respectively). Assuming the availability of ψ at all grid points \mathbf{x}_i at the instant t_0 , advancing the solution to $t = t_0 + \Delta t$ invokes three distinct steps. First, trajectories arriving at the grid points \mathbf{x}_i at t are evaluated backward by approximating the path integral

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i - \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{x}(\tau), \tau) d\tau , \quad (3.3)$$

of the kinematic relation $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$. Second, the advected dependent variable $\psi(\mathbf{x}_i, t_0)$ is mapped to the set of the departure points $\psi(\mathbf{x}_i, t_0) \rightarrow \psi(\mathbf{x}_0, t_0)$ by means of interpolation. Third, contributions from forcings are accounted for as integrals along the trajectories [60, 169, 175, 178, 199].

SL methods are widely acknowledged for being superior in computational efficiency and stability relative to Eulerian schemes since they are not subject to the CFL condition. A major drawback of the classical SL approach is its lack of mass conservation, although improvements exist and are still being explored [156, 177, 194, 201]. Many applications of SL schemes are found in numerical weather prediction (e.g. see [177] and references therein) and in the modeling of plasma dynamics, e.g. [75, 123].

Intimately linked to the Lagrangian formulation of fluid mechanics is the interpretation of flows in terms of a space-time continuum, where the volume of fluid elements evolves in accordance with the *Euler expansion formula*

$$\frac{d \ln J}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} , \quad (3.4)$$

with $J := \det(\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0)$ denoting the flow Jacobian [29, 187]. The flow Jacobian has the interpretation of the ratio of final (evolved) to initial infinitesimal fluid parcel volumes (e.g. see [115], chapter I.14). Together with the evolutionary form of the mass continuity equation

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} , \quad (3.5)$$

the Euler formula (3.4) constitutes the base of the Lagrangian form of the mass conservation law

$$\rho(\mathbf{x}_i, t) = \hat{J}\rho(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (3.6)$$

where $\hat{J} \equiv J^{-1} = \det(\partial\mathbf{x}_0/\partial\mathbf{x})$ is the inverse flow Jacobian [138]. Consequently, truncation errors in the evaluation of the departure points induce errors in the flow Jacobian, and so the compatibility of discrete counterparts of the integrals (3.1) and (3.3) with (3.6) is not ensured. This contrasts with Eulerian finite-volume methods,

in which advecting velocities most often comply with the discrete mass continuity. In particular, for incompressible fluids the volume of each fluid element remains constant, whereupon the relation

$$\widehat{J} = 1 \tag{3.7}$$

becomes a necessary condition for the scheme’s compatibility. We wish to emphasize that (3.7) alone is not sufficient to ensure the compatibility since it does not take into account the remapping step, which also participates in the numerical realization of (3.6). To the authors’ knowledge, the extent to which both aspects affect the flow physics remains an open question. In this paper, we shall focus on the Lagrangian aspect of the compatibility, namely (3.7), and examine the impact of incompatible integrations on the observed flow features.

Specifically, we will enforce (3.7), by correcting the estimated departure points $\tilde{\mathbf{x}}_0$ according to $(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C = \tilde{\mathbf{x}}_0 + (t - t_0)\nabla\phi$, with $(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C$ denoting the corrected departure points. The potential ϕ satisfies the PDE implied by

$$\det \left\{ \frac{\partial(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C}{\partial \mathbf{x}} \right\} = 1 , \tag{3.8}$$

which happens to be a form of MAE. The latter appears in the fields of mathematical physics [13, 31, 36, 62], differential geometry [146], image registration [92], grid generation [25, 48, 179], fluid dynamics [9, 24, 40, 41, 50], magnetohydrodynamics [200] and cosmology [202]. Seminal work on the MAE goes back to Monge [134], who first posed the problem of optimal mass transport. Questions of existence and uniqueness of solutions to the MAE has been addressed in numerous works, e.g. [15, 91, 127]. In general the MAE can have more than one solution, and convexity of the solution becomes a necessary condition for uniqueness. In cases where the MAE is solved numerically, convexity can either be enforced through the problem discretization or by the design of the numerical solver [8, 72].

The paper is organized as follows: In section 3.2 we focus on the 2D case of (3.8) and study the impact of the MA trajectory correction on the anomalous fluid motions

that result from numerical approximations. Toward this goal, we use examples of pure rotation and pure deformation to find closed-form solutions to the associated MAEs that help assess questions of existence and uniqueness of their implied corrections. Section 3.3 introduces the numerical framework of the MHD flow solver and MA-enhanced trajectory algorithm to be used in the experiments in sections 3.4 and 3.5. Section 3.4 illustrates the effect of the enhanced SL scheme on scalar advection and mass conservation. In section 3.5 we consider the relaxation of an ideal magnetofluid in 2D and 3D periodic domains, wherein the formation of current sheets leads to changes of the magnetic field's topology. Section 3.6 summarizes the main results and concludes the paper.

3.2 The Monge-Ampère correction

3.2.1 Preliminaries

A wide class of ODE-like discretizations of the trajectory integral (3.3) arise as particular cases of the general linear formula (2.4.22) in [85], the two-point subcase of which is particularly relevant to our SL scheme approximation considered here and can be written as

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_i - \Delta t \Phi(t_0, t; \tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{x}_i) , \quad (3.9)$$

with $t = t_0 + \Delta t$ and

$$\Phi = c_0 \mathbf{v}(t_0, \tilde{\mathbf{x}}_0) + c \mathbf{v}(t, \mathbf{x}_i) \equiv \tilde{\mathbf{v}} . \quad (3.10)$$

Here, the weights $c + c_0 = 1$, together with the algorithm used to solve the implicit system of nonlinear equations (3.9) for the unknowns $\tilde{\mathbf{x}}_0$, determine the form of the discrete integral, whereupon $\tilde{\mathbf{v}}$ is identifiable with a path-mean velocity.

From (3.4), it can be seen that the vortical part of the velocity does not induce any change in the volume of a fluid element. Consequently, this motivates a correction to the estimated velocities in (3.10) as the gradient of a scalar potential, so that (3.9)

results in

$$(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C = \mathbf{x}_i - \Delta t (\tilde{\mathbf{v}} - \nabla\phi) . \quad (3.11)$$

Notably, the estimated velocity $\tilde{\mathbf{v}}$ constructed from fields that satisfy the Eulerian form of the mass-continuity equation (3.5) on the grid does not ensure (3.6). In particular, the compatibility of (3.1) and (3.3) with (3.6) demands that both Eulerian and Lagrangian forms of the mass continuity equation be fulfilled simultaneously. For an incompressible fluid, this requires that both the prognostic velocity field \mathbf{v} , which is used to construct $\tilde{\mathbf{v}}$, satisfies (3.5) and that (3.11) satisfies (3.8). Therefore, (3.11) has the interpretation of a path integrated implicit pressure correction to the explicit estimate of $\tilde{\mathbf{v}}$.

Focusing, hereafter, the attention on incompressible flows, the enforcement of the compatibility of (3.11) with (3.6) amounts to substituting (3.11) in (3.8). This leads readily to a MA equation for the potential ϕ . For simplicity we discuss the 2D case considered in section IV.6.3 of [36]. For any $\Delta t > 0$, the resulting MAE can be written compactly as

$$A\phi_{xx} + 2B\phi_{xy} + C\phi_{yy} + E(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) + D = 0 , \quad (3.12)$$

where subscripts x and y denote the respective partial differentiations. Given (3.11), the coefficients of (3.12) depend only on partial derivatives of $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$, such that

$$\begin{aligned} A &= 1 - \Delta t \tilde{v}_y \\ B &= 1/2 \Delta t (\tilde{u}_y + \tilde{v}_x) \\ C &= 1 - \Delta t \tilde{u}_x \\ D &= -\tilde{u}_x - \tilde{v}_y - \Delta t (\tilde{u}_y \tilde{v}_x - \tilde{u}_x \tilde{v}_y) \\ E &= \Delta t . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Solutions to (3.12) fall into either one of two categories given the discriminant

$$\Lambda \equiv AC - B^2 - DE > 0 , \quad (3.14)$$

everywhere inside the domain Ω . Solutions of the first type obey the inequalities

$$E\phi_{xx} + C > 0, \quad E\phi_{yy} + A > 0; \quad (3.15)$$

whereas, those of the second type satisfy

$$E\phi_{xx} + C < 0, \quad E\phi_{yy} + A < 0, \quad (3.16)$$

which are referred to as the type-1 and type-2 solutions, respectively [36]. In particular, the MAE (3.12) is elliptic if and only if both (3.14) and (3.15) are fulfilled, which is necessary to ensure the uniqueness of solutions to (3.12). Importantly, the Lipschitz condition

$$L \equiv \Delta t \max_i \left(\sum_{j,i} |v^i_{,j}| \right) < 1, \quad (3.17)$$

which assures non-intersection of the estimated flow trajectories (3.9) guarantees (3.14). Here, the superscript i identifies a component of the velocity vector and the subscript j refers to spatial differentiation [169]. We refer the reader to appendices A and B for further discussion on the existence and unicity of both types of solutions.

3.2.2 Elemental flows; closed-form solutions.

To develop an intuition for properties of (3.12) in terms of fluid flow, we examine some of its solutions in the context of the Euler-forward approximation for (3.9) (i.e. $c_0=0$ and $c = 1$ in (3.10)) applied to the elemental incompressible pure-rotational $\mathbf{v}_R = \alpha(-y, x)$ and pure-deformational $\mathbf{v}_D = \alpha(y, x)$ flows, where $\alpha = 1s^{-1}$ denotes the flow's amplitude — see fig.3.1. Accordingly, the tensors of rotation $\Omega_{ik} = 1/2 (\partial u_i/\partial x_k - \partial u_k/\partial x_i)$ and the strain rate $D_{ik} = 1/2 (\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$ have the constant entries ($\Omega_{12} = -\Omega_{21} = -\alpha$, $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 0$, $\mathbf{D} \equiv 0$) for \mathbf{v}_R and ($D_{12} = D_{21} = \alpha$, $D_{11} = D_{22} = 0$, $\mathbf{\Omega} \equiv 0$) for \mathbf{v}_D .

MAEs associated with \mathbf{v}_R and \mathbf{v}_D are given by, respectively,

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \Delta t(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) + \alpha^2\Delta t = 0 \quad (3.18)$$

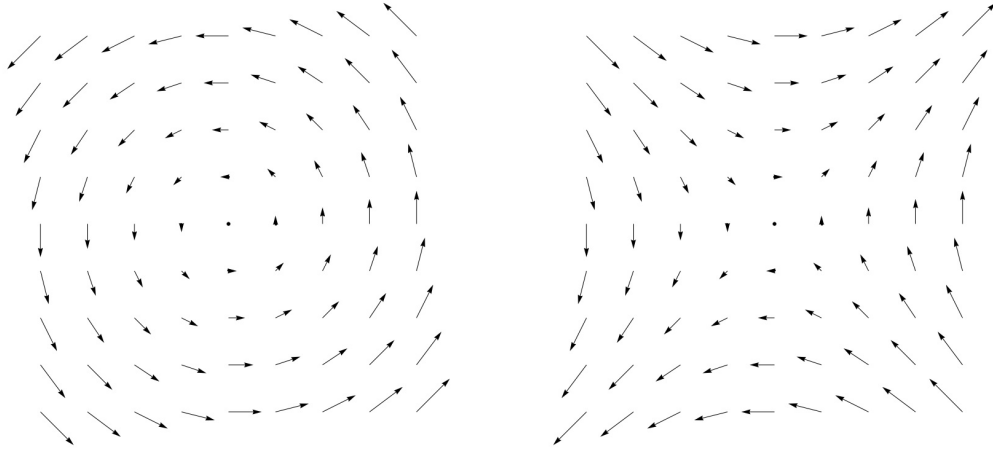


Figure 3.1. Examples of incompressible, pure-rotational (left) and pure-deformational flows \mathbf{v}_R and \mathbf{v}_D .

and

$$\phi_{xx} + 2\alpha\Delta t\phi_{xy} + \phi_{yy} + \Delta t(\phi_{xx}\phi_{yy} - \phi_{xy}^2) - \alpha^2\Delta t = 0. \quad (3.19)$$

3.2.2.1 Pure rotation

One can exploit the rotational symmetry of \mathbf{v}_R to find solutions to (3.18) of the form $\phi(x, y) = F(\xi) \equiv F(x^2 + y^2)$. Substituting F into (3.18) and using the chain rule yields the second order nonlinear ODE

$$4F_\xi(1 + \Delta t F_\xi) + 4\xi F_{\xi\xi} + 8\Delta t \xi F_\xi F_{\xi\xi} + \alpha^2 \Delta t = 0. \quad (3.20)$$

Let $G(\xi) = F_\xi$, so that (3.20) becomes

$$-\frac{4(1 + 2\Delta t G)}{4G(1 + \Delta t G) + \alpha^2 \Delta t} dG = \frac{d\xi}{\xi}, \quad (3.21)$$

which has the general solution

$$G = \frac{-1 \pm (1 - \Delta t^2 \alpha^2 - C_s \xi^{-1})^{1/2}}{2\Delta t}, \quad (3.22)$$

where $C_s > 0$ is an integration constant. Derivatives of F will be real outside the circle $x^2 + y^2 = \xi = C_s/\beta$ centered about the origin, where $\beta = (1 - \alpha^2\Delta t^2)^{1/2}$. Therefore, we let $C_s \rightarrow 0$, which yields the particular solutions

$$F_{\pm} = -\frac{\xi}{2\Delta t}(1 \mp \beta) + C_{\pm} , \quad (3.23)$$

together with the associated trajectory corrections

$$(\tilde{\mathbf{x}}_0)_{C,\pm} = \tilde{\mathbf{x}}_0 + \Delta t F_{\xi} \nabla \xi = \tilde{\mathbf{x}}_0 - (1 \mp \beta) \mathbf{x}_1 . \quad (3.24)$$

For the purely rotational flow the discriminant (3.14) becomes

$$\Lambda = 1 - \alpha^2\Delta t^2 = \beta^2 > 0 ; \quad (3.25)$$

the type-1 solution satisfies

$$E\phi_{xx} + C = \Delta t\phi_{xx} + 1 > 0, \quad E\phi_{yy} + A = \Delta t\phi_{yy} + 1 > 0 , \quad (3.26)$$

and the type-2 solution is such that

$$E\phi_{xx} + C = \Delta t\phi_{xx} + 1 < 0, \quad E\phi_{yy} + A = \Delta t\phi_{yy} + 1 < 0 . \quad (3.27)$$

Indeed, we find

$$F_{xx,\pm} = -\frac{1}{\Delta t}(1 \mp \beta) \quad (3.28)$$

and therefore one has $F_{xx,+} > -1/\Delta t$ and $F_{xx,-} < -1/\Delta t$. A similar expression yields $F_{yy,+} > -1/\Delta t$ and $F_{yy,-} < -1/\Delta t$. Thus, F_+ and F_- qualify as the type-1 and type-2 solutions, respectively. Observe that for (3.24) to be well-defined, (3.25) must be satisfied, for otherwise the correction would have an imaginary part.

The left and right panels of figure 3.2 illustrate, respectively, the effect of the type-1 and type-2 trajectory corrections implied by (3.24) for the choice $\alpha\Delta t = 0.85$, which assures (3.25). Arrival points \mathbf{x}_1 (squares), lie on an exact flow trajectory (solid line) and are linked to their respective departure points \mathbf{x}_0 (diamonds) by the thick red lines. Likewise, the \mathbf{x}_1 are linked to their corresponding estimated departure points $\tilde{\mathbf{x}}_0$

(circles) by straight line segments that represent the associated estimated trajectories. The set of all estimated departure points (dashed line) and its corresponding set of arrival points therefore may be regarded as the boundaries of initial and final fluid elements, respectively. Black dots show the position of the trajectory correction (3.11), which amounts to the displacement $\tilde{\mathbf{x}}_0 \rightarrow (\tilde{\mathbf{x}}_0)_C$, everywhere parallel to $\nabla\phi$ (arrows). Notably, the Euler-forward prediction $\mathbf{x}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_0$ deviates away from the exact departure point \mathbf{x}_0 given by (3.3) and fails to preserve the volume (area in 2D) of the fluid elements. The flow Jacobian associated with the latter is $\hat{J} = 1 + (\alpha\Delta t)^2 > 1$ and indicates that the volume of initial fluid parcels is always larger than that of final elements, which is consistent with the expansion of solid circles into dashed circles seen in fig. 3.2. The flow Jacobian that corresponds to the forward-in-time motion (i.e. $\tilde{\mathbf{x}}_0 \rightarrow \mathbf{x}_i$), is therefore $J = \hat{J}^{-1} = 1/(1 + (\alpha\Delta t)^2) < 1$ and implies that the trajectory estimates cause final fluid parcels to contract relative to the initial ones. From this perspective — the one that we shall consider in this paper — trajectory errors that arise from pure rotation are responsible for the anomalous contraction of fluid parcels.

Observe that the corrected departure points all lie somewhere on the exact flow trajectory for both type-1 and type-2 solutions, so that anomalous contraction is avoided. Also, the corrected departure points lie much closer to the exact solution in the type-1 case than in the type-2 case. Although it is volume-preserving, the type-2 correction lies farther away from the exact solution than the original estimate.

3.2.2.2 *Pure deformation*

We now consider solutions to (3.19), for which no obvious symmetries can be directly determined from the flow geometry, as was the case for \mathbf{v}_R . We will attempt to find exact solutions to (3.19) by making the assumption that ϕ exists such that $(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C \equiv \mathbf{x}_0$, i.e. the trajectory correction yields the exact departure point, which is given by the

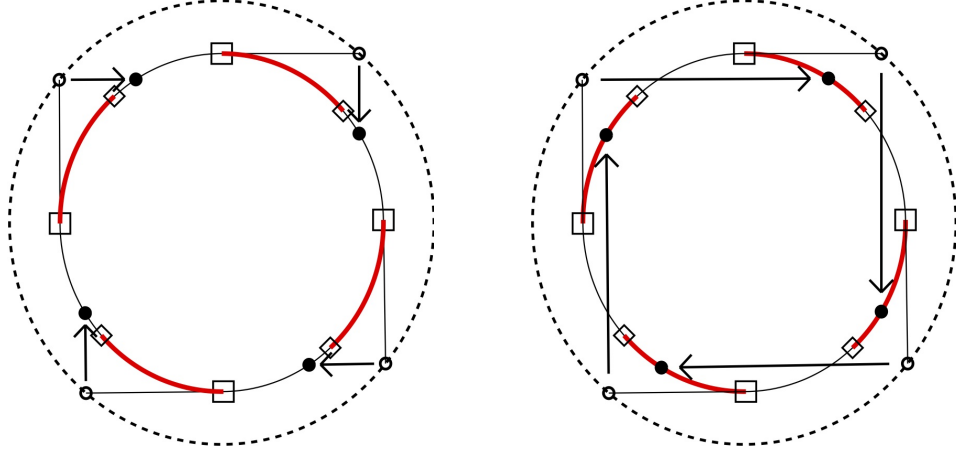


Figure 3.2. Anomalous fluid contraction and the type-1 (left) and type-2 (right) MA corrections in the vicinity of the stationary point $(x_o, y_o) = (0, 0)$ for the pure rotational flow. Solid lines denote exact trajectories, whereas; dashed lines mark the set of the departure points. Straight line segments represent computed trajectories that link particular arrival points (squares) to their respective standard departure points (open circles). Arrows indicate the direction of the applied correction that gives the corrected trajectory estimates (black dots).

hyperbolic rotation

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\alpha\Delta t) & -\sinh(\alpha\Delta t) \\ -\sinh(\alpha\Delta t) & \cosh(\alpha\Delta t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

where $(x, y) = \mathbf{x}_i$ and $(x_0, y_0) = \mathbf{x}_0$. This allows one to construct solutions to (3.19) from the first order linear PDEs implied by (3.11)

$$\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_i + \Delta t(\mathbf{v} - \nabla\phi) = 0, \quad (3.29)$$

from which we find that

$$\phi(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{2\Delta t} \right) (\cosh(\alpha\Delta t) - 1) - \frac{xy}{\Delta t} (\sinh(\alpha\Delta t) - \alpha\Delta t) + C, \quad (3.30)$$

where C is a constant of integration. Substituting (3.30) into (3.19) shows that it corresponds to a MAE solution with associated trajectory correction given by

$$(\tilde{x}_0)_C = \tilde{x}_0 + x(\cosh(\alpha\Delta t) - 1) - y(\sinh(\alpha\Delta t) - \alpha\Delta t),$$

$$(\tilde{y}_0)_C = \tilde{y}_0 + y(\cosh(\alpha\Delta t) - 1) - x(\sinh(\alpha\Delta t) - \alpha\Delta t) . \quad (3.31)$$

One can easily verify that (3.30) satisfies $\phi_{xx}, \phi_{yy} > 0$ for $\alpha\Delta t > 0$ and therefore that it corresponds to a type-1 solution. Effects of (3.31) for $\alpha\Delta t = 0.7$ and $\alpha\Delta t = 1.7$ are illustrated, respectively, in the left and right panels of figure 3.3.

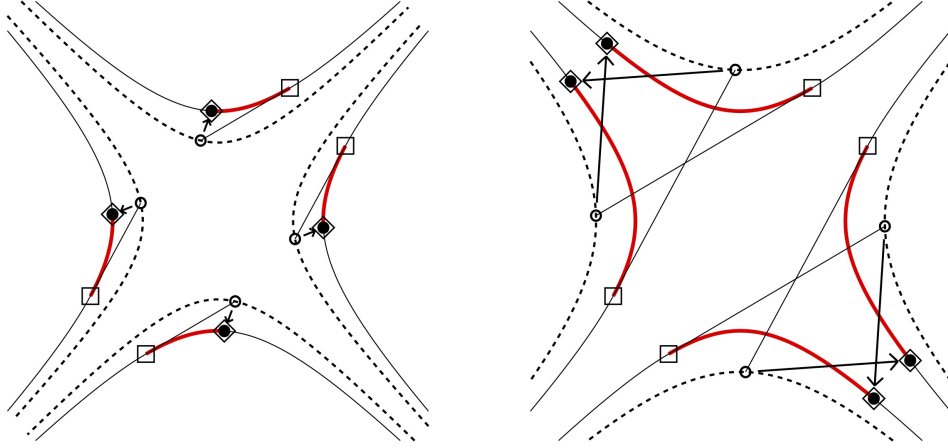


Figure 3.3. Anomalous fluid expansion (left) and trajectory intersections (right) with their respective MA correction in the vicinity of the stationary point $(x_o, y_o) = (0, 0)$ for the pure deformational flow.

In this case, the mapping $\tilde{\mathbf{x}}_0 \rightarrow \mathbf{x}_i$ has the Jacobian $J = (1 - (\alpha\Delta t)^2)^{-1}$, which increases monotonically for $0 < \alpha\Delta t < 1$, becomes singular at $\alpha\Delta t = 1$ and is strictly negative for $\alpha\Delta t > 1$. Thus, $\tilde{\mathbf{x}}_0$ is responsible for anomalous expansion when $0 < \alpha\Delta t < 1$ (i.e. $J > 1$ or $0 < \hat{J} < 1$) and trajectory intersections when $\alpha\Delta t > 1$ (i.e. $J < 0, \hat{J} < 0$), as shown by the left and right panels of fig. 3.3, respectively. Unlike (3.24), (3.31) remains well-defined for all timesteps that violate (3.17), as shown by the case of intersecting flow trajectories depicted here. For instance, the \mathbf{v}_D flow gives $L = 2(1.7) = 3.4 > 1$ for $\alpha\Delta t = 1.7$, thereby violating (3.17). However, its associated MAE (3.19) yields $\Lambda = 1 > 0$, so that (3.14) is satisfied regardless of the value of $\alpha\Delta t$, a special case illustrating that (3.17) is only sufficient for (3.14) to be applicable.

A straightforward computation reveals that (3.29) has no solution when $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R$, which implies that solutions to (3.18) yielding $(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C \equiv \mathbf{x}_0$ do not exist. Furthermore, $\nabla \times (\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0) = 0$ for the $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$ case, and $\nabla \times (\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0) \neq 0$ for $\mathbf{v} = \mathbf{v}_R$, meaning that the Helmholtz decomposition of the truncation error for the case of pure rotation has a non-vanishing curl component. Thus, by design, the MA correction is unable to compensate for this part of the trajectory error, which, however, does not produce any change in the parcels' volume — see fig. 3.2. This property is also what restricts the existence of (3.24) to cases where (3.25) is satisfied.

The analysis in terms of the elemental flows shows that anomalous fluid contraction and expansion due to Euler-forward trajectory approximations can be attributed to, respectively, pure rotation and pure deformation. In particular, the case of pure deformation shows that the physical realizability of the flow can be compromised by trajectory intersections arising from the anomalous motions if (3.8) is not ensured. The example of pure rotation has shown that either type-1 or type-2 solutions were possible candidates for a trajectory correction. The type-2 trajectory correction provided a less accurate (although volume-preserving) estimate than the prediction given by the Euler-forward scheme, whereas; the type-1 correction was both more accurate and volume-preserving.

In general the shear $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{D}$ is a combination of rotation and deformation. Thus, although elemental flows provide insight into the mechanics of the MAE enhancement of the standard SL scheme, assessing the impact of (3.11) on the physics of fluids requires the use of a numerical solver.

3.3 Numerical implementation

3.3.1 MHD solver

To assess the impact of the MA trajectory correction onto the flow solution we consider the physical system studied in [12], which consists of the perfectly conduct-

ing, constant density magneto-fluid described by the classical MHD incompressible Navier-Stokes equations

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\pi' + \frac{1}{\rho_o\mu_o}\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{v} , \quad (3.32)$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{v} , \quad (3.33)$$

$$\nabla \cdot \rho_o\mathbf{v} = 0 , \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad (3.35)$$

where \mathbf{B} is the magnetic field vector (in Tesla units) and π' incorporates both a density-normalized pressure perturbation and magnetic pressure [165]. Here we use $\rho_o = 1\text{kg m}^{-3}$ and $\mu_o = 1\text{N A}^{-2}$, with $\nu = 0.0039\text{m}^2\text{ s}^{-1}$ denoting a uniform, constant kinematic viscosity.

Using (3.35), the Lorentz force $\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B}$ and magnetic induction $\mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{v}$ terms are further written in conservative form

$$\mathbf{B} \cdot \nabla B^I = \nabla \cdot (\mathbf{B}B^I), \quad \mathbf{B} \cdot \nabla v^I = \nabla \cdot (\mathbf{B}v^I) , \quad (3.36)$$

where I stands for the I^{th} components of (3.32) and (3.33).

To outline numerical approximations for the system (3.32)-(3.35) it is useful to symbolize the prognostic equations of the system in the form of (3.1)

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{R} , \quad (3.37)$$

where $\mathbf{\Psi} = \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\}^T$ and $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_v, \mathbf{R}_B\}^T$ denote, respectively, the vectors of prognosed dependent variables and associated forcings on the rhs of (3.32) and (3.33).

The equations (3.37) are integrated using the MHD extension of the EULAG model, a general-purpose simulation code built on the non-oscillatory forward-in-time algorithms — see [165] for a detailed exposition —

$$\mathbf{\Psi}_i^n = LE_i(\tilde{\mathbf{\Psi}}) + 0.5\Delta t\mathbf{R}_i^n \equiv \hat{\mathbf{\Psi}}_i + 0.5\Delta t\mathbf{R}_i^n , \quad (3.38)$$

where $\Psi_{\mathbf{i}}^n$ is the solution sought at the grid point $(t^n, \mathbf{x}_{\mathbf{i}})$, $\tilde{\Psi} \equiv \Psi^{n-1} + 0.5\Delta t \mathbf{R}^{n-1}$, and LE denotes a two-time-level, optionally advective semi-Lagrangian [169] or flux-form Eulerian [164] nonoscillatory transport operator (viz. advection scheme). Because of the focus of the current paper on the semi-Lagrangian integrations of the governing equations such as (3.32)-(3.35), the template algorithm (3.38) is thought as a realization of the trapezoidal approximation of the path integral (3.1).

To allow for such features as grid adaptivity and to facilitate the implementation of boundary conditions in the possibly time-dependent geometries (e.g. spherical, cylindrical, etc.) that some problems dictate, EULAG performs all computations (3.38) in a computational space $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}})$, distinct, in general, from the physical space (t, \mathbf{x}) , in which the solution is sought [149]. Here we shall restrict ourselves to the impact of the MA correction in the context of static and uniform Cartesian meshes, in which case both spaces are identical $(\bar{t}, \bar{\mathbf{x}}) \equiv (t, \mathbf{x})$.

The template algorithm (3.38) is implicit with respect to all prognosed dependent variables and must be inverted algebraically subject to the discrete forms of the divergence constrains (3.34) and (3.35). To achieve this, (3.38) is written as a fixed-point iteration

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{n,\nu} = \widehat{\Psi}_{\mathbf{i}} + 0.5\Delta t \mathbf{L}(\Psi)_{\mathbf{i}}^{n,\nu} + 0.5\Delta t \mathbf{N}(\Psi)_{\mathbf{i}}^{n,\nu-1} - 0.5\Delta t \nabla \Phi_{\mathbf{i}}^{n,\nu}, \quad (3.39)$$

that separates \mathbf{R} into terms that are linear $\mathbf{L}(\Psi)$ and nonlinear $\mathbf{N}(\Psi)$ with respect to Ψ as well as a gradient of the potential $\Phi = (\pi', \pi', \pi', \pi^*, \pi^*, \pi^*)$ that incorporates the physical pressure gradient of (3.32) together with $\nabla \pi^*$, an auxiliary perturbation added to the rhs of (3.33) that compensates truncation error departures from (3.35) at each outer iteration ν of (3.39). Lagging the nonlinear term behind all the other terms in (3.39) enables one to recover a closed form expression for $\Psi_{\mathbf{i}}^{n,\nu}$ linear in $\Phi_{\mathbf{i}}^{n,\nu}$

$$\Psi_{\mathbf{i}}^{n,\nu} = [\mathbf{I} - 0.5\Delta t \mathbf{L}]_{\mathbf{i}}^{-1} \left(\widehat{\Psi} - 0.5\Delta t \nabla \Phi^{n,\nu} \right), \quad (3.40)$$

where $\widehat{\Psi} = \tilde{\Psi} + 0.5\Delta t \mathbf{N}(\Psi)^{n,\nu-1}$. Acting on (3.40) with the discrete analogs of (3.34)

and (3.35) produces two large sparse linear, generally nonsymmetric systems which are then inverted for π' and π^* by using the preconditioned generalized conjugate residual (GCR) method [57], highlighted in the next section. The trapezoidal integral in (3.39) assumes that all contributions to \mathbf{R} are treated to second-order accuracy. However, here we treat the Fickian diffusion term on the rhs of (3.32), which we denote by $\tilde{\mathbf{R}}$, separately from other forcings by reproducing the Euler forward integral structure in the argument of the transport operator LE in (3.38): $\tilde{\Psi} \equiv \Psi^{n-1} + 0.5\Delta t(\mathbf{R} + 2\tilde{\mathbf{R}})$. Upon recovery of $\Psi^{n,\nu}$, the total implicit forcing $\mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{L}\Psi - \nabla\Phi$ is returned as $\mathbf{R}\mathbf{I}^n = (0.5\Delta t)^{-1}(\Psi^{n,\nu} - \hat{\Psi})$; whereas, the total explicit forcing $\mathbf{R}\mathbf{E}^n = \mathbf{N}(\Psi) + \tilde{\mathbf{R}}$ is obtained from its definition using the updated solution $\Psi^{n,\nu}$.

In the actual implementation, the sequence of steps that leads from $\Psi^{n,\nu-1}$ to $\Psi^{n,\nu}$ consists of two consecutive blocks that amount to, respectively, the solution of (3.32)-(3.34) and (3.33)-(3.35). Each step in the sequence $\nu = \{1, \dots, \nu^*\}$ uses the most current update of the velocity and magnetic field, whenever those are made available inside each block. The first block begins with finding a first guess for the magnetic field through the inversion of the evolutionary form of (3.33)

$$\mathbf{B}_i^{\nu-1/2} = \hat{\mathbf{B}}_i + 0.5\Delta t(\mathbf{B}^{\nu-1/2} \cdot \nabla \mathbf{v}^{\nu-1})_i, \quad (3.41)$$

in which an $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ estimate of the velocity $\mathbf{v}^0 = 2\mathbf{v}^{n-1} - \mathbf{v}^{n-2}$ is used at $\nu = 1$. Here the superscript $\nu - 1/2$ means that (3.41) is half-way from the completion of the outer iteration. Together, $\hat{\mathbf{v}}_i$ and (3.41) produce the explicit part of (3.40), which now becomes available for the solution of the elliptic problem for π'

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^\nu &= \hat{\mathbf{v}}_i + \frac{0.5\Delta t}{\rho_o\mu_o}(\nabla \cdot \mathbf{B}\mathbf{B})_i^{\nu-1/2} - 0.5\Delta t\nabla\pi'|_i^\nu \\ \frac{1}{\rho_o}(\nabla \cdot \rho_o\mathbf{v})_i^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

The second block begins with finding a new solution to (3.41) using the updated velocity

$$\mathbf{B}_i^{\nu-1/4} = \hat{\mathbf{B}}_i + 0.5\Delta t(\mathbf{B}^{\nu-1/4} \cdot \nabla \mathbf{v}^\nu)_i, \quad (3.43)$$

to be used in the elliptic problem for π^*

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i^\nu &= \widehat{\mathbf{B}}_i + 0.5\Delta t(\nabla \cdot \mathbf{B}^{\nu-1/4}\mathbf{v}^\nu)_i - 0.5\Delta t\nabla\pi^*|_i^\nu \\ (\nabla \cdot \mathbf{B})_i^\nu &= 0 ,\end{aligned}\tag{3.44}$$

the solution of which completes the outer iteration. Typically, two or three iterations are sufficient for a practically converged solution, and so here we use $\nu^* = 2$ [165].

3.3.2 Trajectory schemes

We approximate path integrals (3.3) by selecting either of $c_0 = 0$ and $c_1 = 1$ or $c_0 = c_1 = 1/2$ in (3.10). The former gives the Euler-forward approximation to (3.3)

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^0 \equiv \mathbf{x}_i - \Delta t\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}_i, t)\tag{3.45}$$

that either provides the final approximation or the initial iterate for the second-order-accurate mid-point rule

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^\kappa = \mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\Delta t(\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}_0^{\kappa-1}, t_0) + \mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t)) \quad , \quad \kappa = 1, \dots, \kappa^* ,\tag{3.46}$$

that arises from the latter choice of coefficients. Two iterations of (3.46) suffice for a second-order accuracy, while its convergence is assured provided the Lipschitz constant L (3.17) is smaller than unity [169]. First-order linear extrapolation of $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_0)$ gives an estimate of $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t)$ and a fourth-order-accurate monotone interpolation procedure is used to map the former to the footpoint of the estimated trajectory $\mathbf{v}(\mathbf{x}_i, t_0) \rightarrow \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}_0^{\kappa-1}, t_0)$ [166].

Once the estimated departure points are obtained from (3.45) or (3.46), they are corrected according to (3.11);

$$(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C = \tilde{\mathbf{x}}_0^{\kappa^*} + \Delta t\nabla\phi, \quad \kappa^* = 0, 1, 2, \dots .\tag{3.47}$$

To obtain ϕ , we solve approximately the nonlinear boundary value problem given by substitution of (3.47) into (3.8)

$$\mathcal{F}(\phi)_i \equiv \det \left\{ \frac{\partial(\tilde{\mathbf{x}}_0)_C}{\partial\mathbf{x}} \right\}_i - 1 = 0 ,\tag{3.48}$$

where $\partial/\partial\mathbf{x}$ symbolizes centered finite-differences. For simplicity, we employ periodic boundary conditions for the trajectory correction, $\nabla\phi$, in (3.11) and use a Jacobian-Free Newton-Krylov (JFNK) approach to find a solution to (3.48) [106, 121, 200]. Under condition (3.17), periodicity implies that the only admissible solutions are type-1 — see the discussion in appendices A and B.

JFNK methods derive from the expansion of (3.48) into a multivariate Taylor series

$$\mathcal{F}_i(\phi^{m+1}) = \mathcal{F}_i(\phi^m) + (\mathcal{J}(\phi^m)\delta\phi^m)_i + \text{H.O.T.} \quad (3.49)$$

where $\mathcal{J} = \partial\mathcal{F}/\partial\phi$ is the $N \times N$ Jacobi matrix of \mathcal{F} with N representing the number of grid points, $\delta\phi^m = \phi^{m+1} - \phi^m$ and H.O.T. denote the higher-order terms of the expansion. Neglecting H.O.T. and setting $\mathcal{F}_i(\phi^{m+1}) = 0$ gives rise to the classical Newton's method: for any initial guess ϕ^0 ,

For $m = 0, 1, 2, \dots$ until convergence do :

$$\text{Solve } (\mathcal{J}(\phi^m)\delta\phi^m)_i + \mathcal{F}_i(\phi^m) = 0 \quad \text{for } \delta\phi_i^m, \quad (3.50)$$

$$\text{Set } \phi_i^{m+1} = \phi_i^m + \delta\phi_i^m, \quad (3.51)$$

$$\text{Exit if } \|r^{m+1}\|/\|r^0\| \leq \varepsilon, \quad (3.52)$$

enddo.

where $\|\cdot\|$ is a user-defined norm, $r^m = \mathcal{F}(\phi^m)$ is the residual and $\varepsilon < 1$. Using a direct method to solve (3.50) requires explicit evaluation and storage of \mathcal{J} 's entries. However, in problems arising from physical applications, obtaining an analytical expression for \mathcal{J} may not always be practical or possible. In particular, the cost of storing matrix entries when the number of unknowns is large ($N \approx 10^6 - 10^7$ in this study) may become prohibitively expensive memory-wise. Instead, we solve (3.50) approximately using an iterative Krylov method until the following convergence criterion is satisfied

$$\|\mathcal{J}(\phi^m)\delta\phi^m + \mathcal{F}(\phi^m)\| \leq \eta_m \|\mathcal{F}(\phi^m)\|, \quad (3.53)$$

where η_m is the so-called forcing term, which controls the accuracy of the linearized problem (3.50) [18]. The forcing term must be chosen such as to avoid solving (3.50) with unnecessary accuracy (viz. oversolving) and to assure quadratic convergence of the Newton iteration when sufficiently close to the solution. This is done using the approach discussed in section 6.3 of [102], in which

$$\eta_m = \min(\eta_{\max}, \max(\eta_m^C, 0.5\tau_t/\|\mathcal{F}(\phi^m)\|)) , \quad (3.54)$$

$$\eta_m^C = \begin{cases} \eta_{\max}, & m = 0 \\ \min(\eta_{\max}, \eta_m^A), & m > 0, \gamma\eta_{m-1}^2 \leq 0.1 \\ \min(\eta_{\max}, \max(\eta_m^A, \gamma\eta_{m-1}^2)), & m > 0, \gamma\eta_{m-1}^2 > 0.1 \end{cases} \quad (3.55)$$

and $\eta_m^A = \gamma(\|\mathcal{F}(\phi^m)\|/\|\mathcal{F}(\phi^{m-1})\|)^2$ and $\tau_t = \tau_a + \tau_r\|\mathcal{F}(\phi^0)\|$. In contrast to [102], where $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm in \mathbb{R}^N (e.g. L^2), here it represents the L_∞ norm.

To reduce the effort in coding and because of our own experience with the numerical machinery already imbedded in the EULAG-MHD model, we seek the solution of (3.50) by employing the GCR algorithm, the use of which is first and foremost intended for the solution of elliptic problems (3.42) and (3.44). For the reader's convenience, here we outline GCR as customized for (3.50). Toward this end, we write the linear system (3.50) as

$$\mathcal{L}(\delta\phi^m) = \mathcal{Q} , \quad (3.56)$$

where $\mathcal{L}(\delta\phi^m) \equiv \mathcal{J}(\phi^m)\delta\phi^m$ and $\mathcal{Q} \equiv -\mathcal{F}(\phi^m)$. As a result of its use in all-scale atmospheric applications on the sphere, the formulation of the GCR solver in EULAG-MHD allows for operator preconditioning. Left-preconditioning is assumed, which consists in replacing (3.56) with the alternate problem

$$\mathcal{P}^{-1}[\mathcal{L}(\delta\phi^m) - \mathcal{Q}] = 0 , \quad (3.57)$$

where \mathcal{P} is the preconditioning operator. Under this assumption, augmenting (3.56) with a k th-order damped oscillation equation and using variational arguments that

determine the parameters of its discretization to assure the minimization of the residual errors $\langle aa \rangle$ in the norm defined by the inner product $\langle \cdot \cdot \rangle$ leads to the following algorithm for the progression of the solution [181]. For any initial guess $\delta\phi^{m,0}$, set $a_{\mathbf{i}}^0 = \mathcal{L}(\delta\phi^{m,0}) - \mathcal{Q}_{\mathbf{i}}$, $p_{\mathbf{i}}^0 = \mathcal{P}_{\mathbf{i}}^{-1}(a^0)$; then iterate:

For $i = 1, 2, \dots$ until convergence do

for $j = 0, \dots, k - 1$ do

$$\beta = -\frac{\langle a^j \mathcal{L}(p^j) \rangle}{\langle \mathcal{L}(p^j) \mathcal{L}(p^j) \rangle},$$

$$\delta\phi_{\mathbf{i}}^{m,j+1} = \delta\phi_{\mathbf{i}}^{m,j} + \beta p_{\mathbf{i}}^j,$$

$$a_{\mathbf{i}}^{j+1} = a_{\mathbf{i}}^j + \beta \mathcal{L}_{\mathbf{i}}(p^j),$$

exit if $\|a^{j+1}\| \leq \eta_m \|r^m\|$,

$$q_{\mathbf{i}} = \mathcal{P}_{\mathbf{i}}^{-1}(a^{j+1}),$$

Evaluate $\mathcal{L}_{\mathbf{i}}(q)$,

$$\forall_{l=0,j} \alpha_l = \frac{\langle \mathcal{L}(q) \mathcal{L}(p^l) \rangle}{\langle \mathcal{L}(p^l) \mathcal{L}(p^l) \rangle},$$

$$p_{\mathbf{i}}^{j+1} = a_{\mathbf{i}}^{j+1} + \sum_{l=0}^j \alpha_l p_{\mathbf{i}}^l,$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{i}}(p^{j+1}) = \mathcal{L}_{\mathbf{i}}(a^{j+1}) + \sum_{l=0}^j \alpha_l \mathcal{L}_{\mathbf{i}}(p^l),$$

end do ,

reset $[\delta\phi^m, a, p, \mathcal{L}(p)]_{\mathbf{i}}^k$ to $[\delta\phi^m, a, p, \mathcal{L}(p)]_{\mathbf{i}}^0$,

end do .

Only one matrix-vector operation per solver iteration is needed in the above procedure, which we approximate as

$$\mathcal{L}_{\mathbf{i}}(q) = (\mathcal{J}(\phi^m)q)_{\mathbf{i}} \approx \frac{\mathcal{F}_{\mathbf{i}}(\phi^m + \epsilon(\phi^m, q)q) - \mathcal{F}_{\mathbf{i}}(\phi^m)}{\epsilon(\phi^m, q)}, \quad (3.58)$$

whereupon no knowledge of the Jacobi matrix itself is needed, hence the name

‘Jacobian-Free’. To ensure that ϕ^m is properly perturbed each time (3.58) is evaluated, the increment ϵ is scaled according to

$$\epsilon(\phi, q) := \max(|\langle \phi^m q \rangle| / \|q\|_2, 1.) \operatorname{sgn}(\langle \phi^m q \rangle) h / \|q\|_2, \quad (3.59)$$

where $\|\cdot\|_2$ symbolizes the L^2 norm; see [18] for a detailed discussion on the definition of (3.59). Since (3.58) is $\mathcal{O}(\epsilon)$ -accurate, h must be larger than the machine epsilon ϵ_{mach} to prevent contamination by cancellation errors. In our double-precision calculations we have used $h = \mathcal{O}(\sqrt{\epsilon_{\text{mach}}}) = 1 \times 10^{-7}$ [102]. Our solver uses $\delta\phi^{m,0} = 0$, initializes ϕ^0 with the solution from the previous timestep and employs parameters $k = 2$, $\gamma = 0.9$, $\eta_{\text{max}} = 0.5$, $\tau_a = 1 \times 10^{-15}$ and $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$ for the absolute and relative error tolerances, respectively.

The GCR solver used for the solution of elliptic problems (3.42) and (3.44) employs a line-relaxation preconditioner based on an implicit Richardson iteration [181]. Although one could devise a similar approach for (3.48) and incorporate it into the JFNK framework, here we do not study the impact of left-preconditioning on the convergence of the solution and chose $\mathcal{P} = \mathcal{I} \equiv$ the identity matrix.

Mappings of $\tilde{\Psi}$ variables to the departure points given by either of (3.45), (3.46) or (3.47) are carried out with the fourth-order-accurate monotone interpolation scheme and give the output of the LE operator in (3.38).

3.4 Scalar advection

Scalar advection experiments were first used in [34] to demonstrate the benefit of the MA trajectory correction for mass and shape preservation. In this section we use similar experiments to analyze the impact of the solver’s accuracy and to present a concrete example of anomalous fluid contraction produced by standard trajectory estimates (cf. section 3.2.2.1). Solutions are sought for two different initial scalars using a cellular flow given by the stream-function $\zeta = \sin(x)\sin(y)$, with $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. The first scalar is specified as $\psi_1 = \max(0, 2|\zeta - 7|)$; sine hills located

at the center the flow's vortices, whereas; the second uses the same distribution shifted to the right by $\delta x = 0.25\pi$ (hereafter, ψ_2). Each panel of figure 3.4 shows isolines of initial/evolved scalars in a single cell $[0, \pi] \times [0, \pi]$ at a time $t^* = t/\tau$, where t is physical time and $\tau \equiv \pi/1 \text{ ms}^{-1} \approx 3.14s$ is defined as the cell's turn-over time. The latter is displayed at the top of each figure, along with the minimum (mn) and maximum (mx) of the advected scalar. Arrows mark flow trajectories and indicate the flow magnitude and direction across the domain. Table 3.1 shows statistics of scalar advection experiments using either of ψ_1 or ψ_2 as initial condition. Each row displays, from left to right, the identifier of the experiment, the L_∞ norm of the MA solver residual, its variance σ , the time t^* at which the data has been taken, and finally the first and second moments of the conservation error $\delta\psi \equiv \int_\Omega \psi(t) dV / \int_\Omega \psi(t=0) dV - 1$ and $\delta\psi^2 \equiv \int_\Omega \psi(t)^2 dV / \int_\Omega \psi(t=0)^2 dV - 1$. The first slot in the identifier of each experiment corresponds to the initial condition used (i.e. $i = \{1, 2\}$ for ψ_i), next comes the order of accuracy of the trajectory scheme that is employed (i.e. first-order or second-order) and finally the logarithm to the base 10 of the convergence threshold ε , with zero meaning that no correction has been applied.

Isolines of ψ_1 , shown as solid lines in the top-left panel of fig. 3.4, are, to a constant, identical to the streamlines and therefore $\mathbf{v} \cdot \nabla \psi_1 = 0$ implies that $\partial \psi_1 / \partial t = 0$. Top-right and bottom-left panels show, respectively, the evolved ψ_1 scalar distribution resulting from the uncorrected scheme (run 1-1-0) and the solution obtained by applying the MA trajectory correction using $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ (run 1-1-2) at $t^* = 6.38$. Scalar isolines, also identifiable with boundaries of fluid elements, have moved inwards toward the center of the vortex in the solution using the uncorrected scheme as a result of the anomalous fluid contraction, whereas; those of the MA-enhanced solution appear almost unchanged by the revolutions — see figure 3.2 for an illustration of anomalous fluid contraction produced by first-order-accurate trajectory estimates. While the former has lost more than 98% of its total mass and 33% of its amplitude after ≈ 6 revolutions, the latter only suffered 0.2% mass and 2% amplitude losses

SL run	$ \hat{J} - 1 _\infty$	σ	t^*	$\delta\psi(t)$	$\delta\psi^2(t)$
1-1-0	4.00×10^{-2}	4.00×10^{-2}	6.38	-0.9759	-0.9813
1-1-2	1.37×10^{-4}	9.20×10^{-5}	6.38	-0.0021	-0.0105
1-1-4	1.98×10^{-6}	1.98×10^{-6}	6.38	0.0062	-0.0010
1-2-0	4.03×10^{-4}	3.95×10^{-4}	6.38	-0.0214	-0.0320
1-2-2	1.37×10^{-7}	1.37×10^{-7}	6.38	0.0053	-0.0009
1-2-0	4.03×10^{-3}	3.95×10^{-4}	315.29	-0.8101	-0.8728
1-2-2	1.37×10^{-7}	1.37×10^{-7}	315.29	0.1014	0.0347
2-1-0	4.00×10^{-2}	4.00×10^{-2}	6.38	-0.9087	-0.9685
2-1-2	1.37×10^{-4}	9.20×10^{-5}	6.38	-0.0372	-0.2327

Table 3.1. Results of scalar advection experiments. The first integer in the first column indicates which initial condition is used (i.e. ψ_1 or ψ_2), the second stands for the order of accuracy of the trajectory scheme and the third is the base-10 logarithm of ε (zero means no correction is performed). The second and third columns show, respectively, the L_∞ norm and variance of the inverse flow Jacobian residual. The fourth column displays the non-dimensional time corresponding to the first and second moments of the conservation error, which are shown in the fifth and sixth columns, respectively.

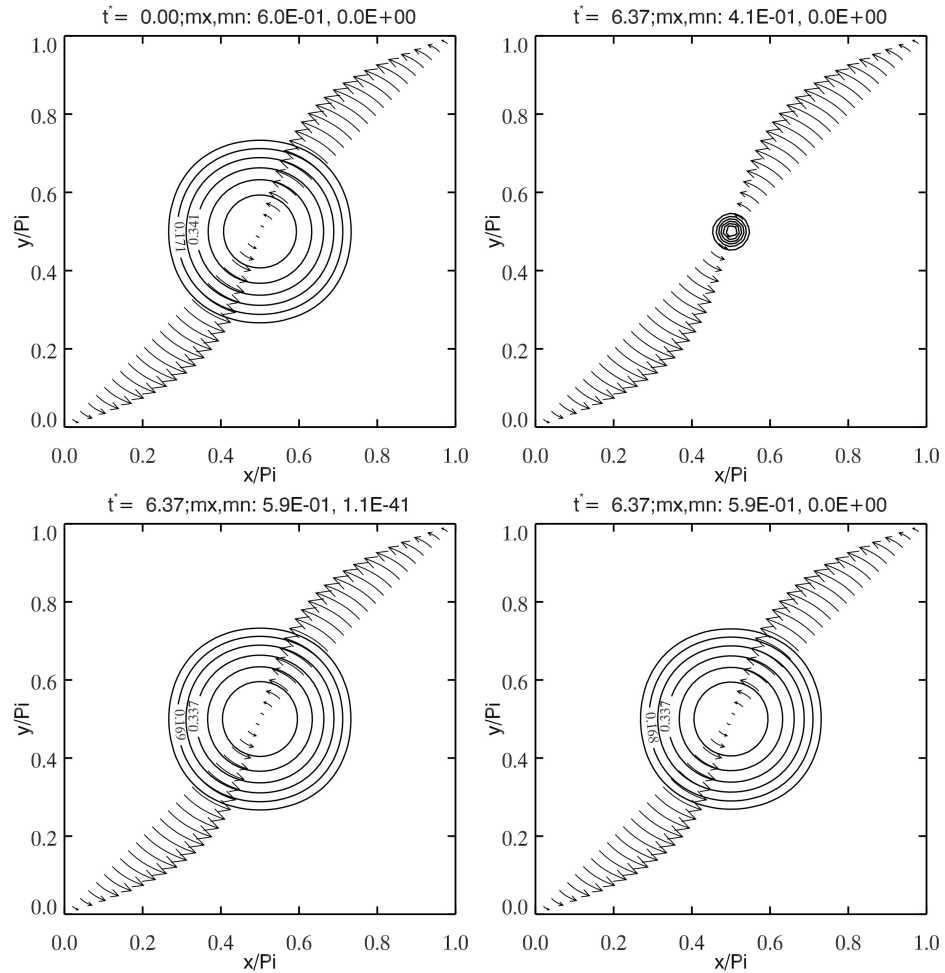


Figure 3.4. Initial and evolved passive scalars for selected runs displayed in table 3.1. Each panel shows a snapshot of a tracer’s isolines, where arrows denote the magnitude of the constant flow velocity along a panel’s diagonal. The time at which each snapshot is taken, along with the minimum and maximum of the advected scalar are displayed at the top of each panel. The upper left panel shows the initial condition for the ψ_1 -experiments. Classical SL (run 1-1-0) and MA-enhanced results (run 1-1-2) are plotted, respectively, after 6.4 turn-over times in the top-right and bottom-left panels. The bottom-right panel shows the solution of run 1-2-0 at the same instant.

— see table 3.1. Imposing $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ (run 1-1-4) instead produces a 0.6% mass increase and improves the conservation of $\delta\psi^2$ by a factor of 10 with respect to run 1-

1-2. The solution of run 1-2-0 (bottom right panel), which uses second-order-accurate uncorrected trajectory estimates, can hardly be distinguished from the MA-enhanced solution of run 1-1-2 by its isolines, apart from a 10 times larger mass loss.

The top-left panel of fig. 3.5 shows the tracer that results from corrected second-order-accurate trajectory estimates (run 1-2-2). Its solution is qualitatively similar to

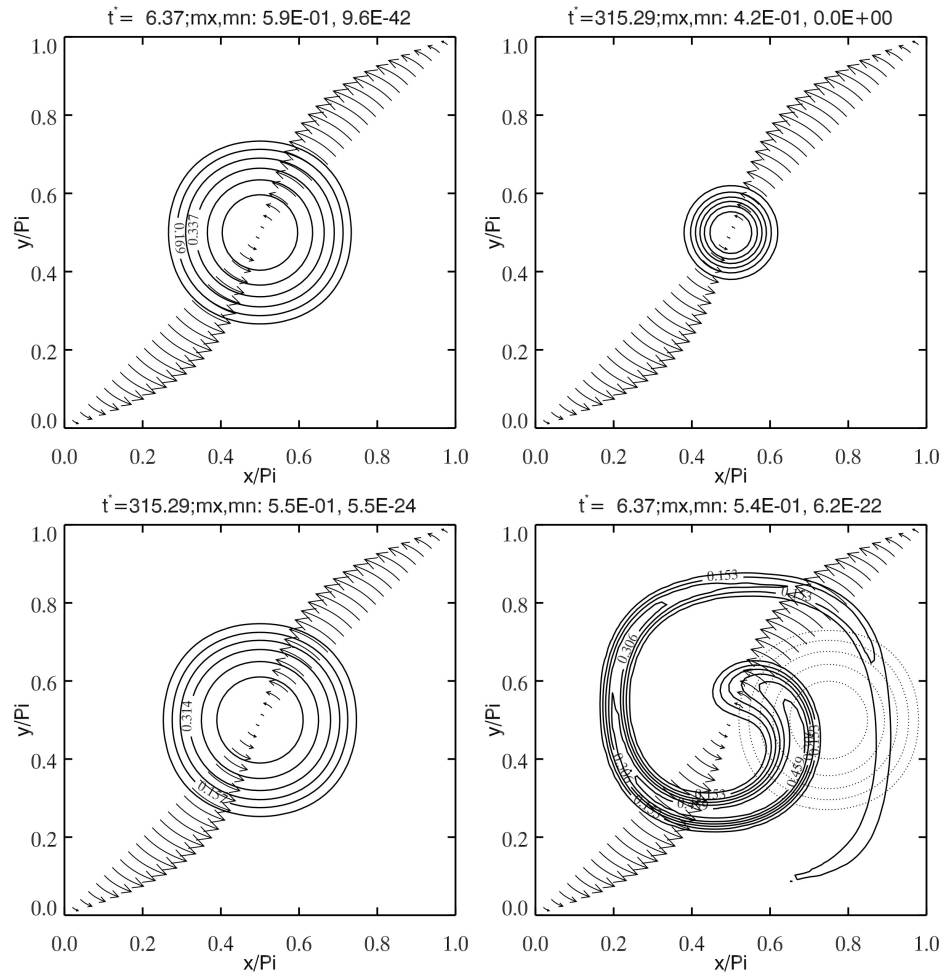


Figure 3.5. Evolved passive scalars for run 1-2-2 at $t^* = 6.38$ (top left), run 1-2-0 at $t^* = 315.29$ (top right), run 1-2-2 at $t^* = 315.29$ (bottom left) and run 2-1-2 at $t^* = 6.38$, which uses ψ_2 (pale dotted lines) as initial condition (bottom right).

those of runs 1-1-2 and 1-2-0, as far as its shape is concerned. However, it loses 4 times less mass than run 1-2-0 and has a $\delta\psi^2$ smaller by two orders of magnitude. Notably, runs 1-2-2 and 1-1-4 give basically the same statistics. Top right and bottom left panels show, respectively, the solutions of runs 1-2-0 and 1-2-2 after ≈ 315 turn-over times, at which point the MA-enhanced solution still gives a result that looks very similar to the tracer obtained after only six turn-over times, whereas; the classical SL solution exhibits noticeable anomalous contraction of the fluid elements. Thus, even when employing a second-order-accurate trajectory scheme, the standard SL solution loses 81% of its total mass after a very long time; whereas, the MA-enhanced run gains a mere 10%.

The bottom-right panel of figure 3.5 shows the result of MA-enhanced advection for the ψ_2 scalar (run 2-1-2), where the initial scalar is represented by the pale dotted lines. Unlike ψ_1 , ψ_2 does not satisfy $\mathbf{v} \cdot \nabla\psi_2 = 0$ at $t^* = 0$ and transport occurs perpendicular to the isolines, thereby leading to the formation of filamentary structures that prevent an equally accurate treatment by the interpolation algorithm. Consequently, the MA-enhanced run loses ≈ 15 times more mass when evolving ψ_2 than ψ_1 (run 1-1-2). Nevertheless, this loss is still only 4%, as opposed to 91% for the uncorrected scheme (run 2-1-0). Thus, even though runs 1-1-2 and 2-1-2 both use the same set of corrected departure points, the accuracies to which they effectively enforce (3.6) differs entirely as a result of interpolation.

The analysis of the 2D MAEs in section 3.2 shows that type-1 and type-2 solutions are the only possible candidates for a trajectory correction if (3.14) is satisfied. Moreover, the type-1 solution turned out to be the most accurate for the case of pure rotation. The discussion in appendix B further shows that type-2 solutions are forbidden by periodic boundary conditions if (3.17) is satisfied. Table 3.2 displays the properties of MAE solutions that were found in the context of scalar advection tests, for which $L \approx 0.4 < 1$. The first column shows the identifier of each MA-enhanced run, the second shows the minimum of the discriminant Λ in (3.14); whereas, third

SL run	$\min\{\Lambda\}$	$\min\{E\phi_{xx} + C\}$	$\min\{E\phi_{yy} + A\}$
1-1-2	0.9200	0.5934	0.5935
1-1-4	0.9200	0.5934	0.5935
1-2-2	0.1939	0.8168	0.8168

Table 3.2. Properties of MAE solutions found for scalar advection tests. The first column displays the run’s identifier, the second displays the minimum on the grid of the discriminant Λ in (3.14), and the last two columns show the minima of functions $E\phi_{xx} + C$ and $E\phi_{yy} + A$ that are used to discriminate between type-1 and type-2 solutions, as per inequalities (3.15) and (3.16).

and fourth columns show the minima of functions $E\phi_{xx} + C$ and $E\phi_{yy} + A$ that are used to discriminate between type-1 and type-2 solutions based on (3.15) and (3.16), respectively. Since (3.14) and (3.15) are fulfilled by all three solutions, they are all type-1, which is in accordance with the theoretical predictions.

Scalar advection tests demonstrate that the MA-enhanced solutions supersede those of the standard SL scheme with respect to the accuracy to which (3.6) is enforced. The impact of the MA enhancement of the estimated departure points on conservativity, however, is ultimately controlled by interpolation, which becomes a key player in the numerical realization of (3.6) whenever sharp gradients appear in the solution — recall the discussion in the introduction.

3.5 Relaxation of an ideal magneto-fluid

The zero-resistivity plasma described by equations (3.32)-(3.35) belongs to ideal MHD, a special case of the general MHD approximation. In this regime, the magnetic flux through a material fluid surface is constant and the field lines are said to be ‘frozen’ into the fluid, as per Alfvén’s theorem [63]. Consider the situation where fluid

motions have brought into contact two surfaces having zero normal magnetic flux, or simply flux surfaces. If the tangential component of \mathbf{B} at their common interface changes direction discontinuously as one moves across it, we say that a tangential discontinuity (TD) has formed. By Ampère's law ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$), a TD implies the existence of a thin layer of increased current density \mathbf{j} , or current sheet (CS) [142]. For this reason, the terms TD and CS refer to the same physical entity and they may be used interchangeably. In a real plasma with finite but small resistivity, the enhanced dissipation of magnetic energy (ME) within the CS can lead to a local breakdown of the frozen-in condition thereby allowing field lines pertaining to each flux surface to reconnect [12]. Consequently, reconnection is accompanied by a release of ME into other forms of energy, such as kinetic and internal energies. It is fundamental to explaining phenomena such as solar coronal mass ejections, flares, and geomagnetic substorms [86, 105, 189]. The heating that results from Joule dissipation also makes it a likely candidate that could account for the million-degree temperatures observed to characterize the solar corona [44, 141, 152]. The ubiquitous nature of reconnection may be understood as a manifestation of the tendency for fields in a close-to-ideal MHD regime to spontaneously develop TDs. In particular, analytical studies show that the topology of continuous fields in a static equilibrium (i.e. for which $-\nabla\pi' + \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B})/(\mu_0\rho_0) = 0$ in (3.32)) is not compatible, in general, with that of an arbitrary, non-equilibrium configuration [99]. The only way for the system to attain such an equilibrium is therefore to modify its topology by means of reconnection.

Under the frozen-in condition, TD formation may be captured by following the evolution of pairs of flux surfaces, collectively represented by sets of level surfaces $S_1(\mathbf{x}, t)$ and $S_2(\mathbf{x}, t)$, also called Euler potentials

$$DS_1/Dt = 0 , \tag{3.60}$$

$$DS_2/Dt = 0 . \tag{3.61}$$

Since the field is tangent to the flux surfaces, it must be everywhere parallel to their intersection

$$\mathbf{B} = W(S_1, S_2) \nabla S_1 \times \nabla S_2 , \quad (3.62)$$

where $W(S_1, S_2)$ controls the field amplitude. Together with (3.62), (3.60) and (3.61) completely determine the evolution of \mathbf{B} [12]. However, the possibility of infinitely long field lines or torsion limits the description in terms of Euler potentials to the case of zero magnetic helicity

$$\mathfrak{H} \equiv \int_{\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV = 0 , \quad (3.63)$$

where \mathbf{A} is the magnetic vector potential [12, 122].

Here we will assess the impact of the MA correction on the evolution of a relaxing magneto-fluid by solving (3.32)-(3.35). In this system, total energy decreases monotonically as the viscous force drags the fluid toward a state of minimum magnetic energy with $\mathbf{v} = 0$ (i.e. the total energy rate-of-change $\chi = d\mathcal{E}/dt \leq 0$) [12]. Moreover, the finite resistivity that is necessary to achieve topological change must arise from the truncation terms of numerical approximations (3.38). The initial condition for the velocity and magnetic field are given by $\mathbf{v} = 0$ and (3.62) with $S_1 = \cos^2(y) \sin(x)$, $S_2 = z$ and $W = 1$. In addition to (3.32)-(3.35), (3.60) and (3.61) are integrated in time and space as $S_{j\mathbf{i}}^n = LE_{\mathbf{i}}(\hat{S}_j)$, $j = \{1, 2\}$ to recover the Euler potentials, which are useful for the identification of TDs. This approach obviates the need to integrate \mathbf{B} to obtain S_1 and S_2 and therefore eliminates errors that come along with such a procedure. Although the approach consisting of (3.60), (3.61) and (3.62) could be used as a alternative to the algorithm exposed in section 3.3, it is less general than the latter and involves errors of its own, e.g. see [14]. However, in the present context it provides a convenient means of assessing the uncertainty of numerical solutions and the enforcement of the frozen-in condition, as will be shown shortly.

Before the start of each simulation, the field resulting from the finite-difference operators used to evaluate (3.62), which is denoted by \mathbf{B}_a , undergoes divergence

cleaning through the elliptic problem for π^* : $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B}_a - \nabla \pi^*) = 0$ to ensure the discrete form of (3.35) to a round-off error. The pressure perturbation π' is set to zero initially, thereby setting up an imbalance in (3.32), (i.e. $-\nabla \pi' + \nabla \cdot (\mathbf{B}\mathbf{B})/(\mu_0 \rho_0) \neq 0$). We shall describe the system's evolution using the non-dimensional time $t^* = t/t_A$, where t is simulated physical time and $t_A \equiv 2\pi/v_A \approx 6.28s$ is the typical time it takes for a magnetic disturbance to cross the system, also called dynamical time. Here $v_A = (B_0/\sqrt{\mu_0 \rho_0})$ is the Alfvén velocity and $B_0 = 1T$ is the maximal strength of the initial field. The timestep size is $\Delta t = 8 \times 10^{-3}s$ or, equivalently, 1.27×10^{-3} dynamical times, which is five times smaller than the maximal timestep required for the stability of viscous dissipation and 15 times smaller than the timescale of reconnection (based on the shortest timescale of magnetic energy release in a reconnection event from our 2D experiments). We begin by considering a 2D setup and then move on to 3D analogs of the same experiment.

3.5.1 2D magneto-fluid

Analyzed in this section are an uncorrected classical SL and a MA-enhanced solution using $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ in (3.52), both of which employ a second-order-accurate trajectory scheme. The domain is a doubly-periodic square box of size $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ and a uniform grid resolution $NX = NY = 256$ is used.

Figure 3.6 shows the magneto-fluid at various times during its evolution for the experiment using the MA trajectory correction. Each panel displays isolines of the Euler potential S_1 (white lines), which are superposed over a color map of the vertical component of the current density (j_z). Since the fluid is 2D, the isolines can be identified with individual magnetic field lines as long as the frozen-in condition holds to a satisfactory degree. Black arrows show randomly selected magnetic field lines constructed from the prognosed field and indicate the sense of \mathbf{B} . The alignment between isolines and random field lines therefore provides a measure of the enforcement of the frozen-in condition.

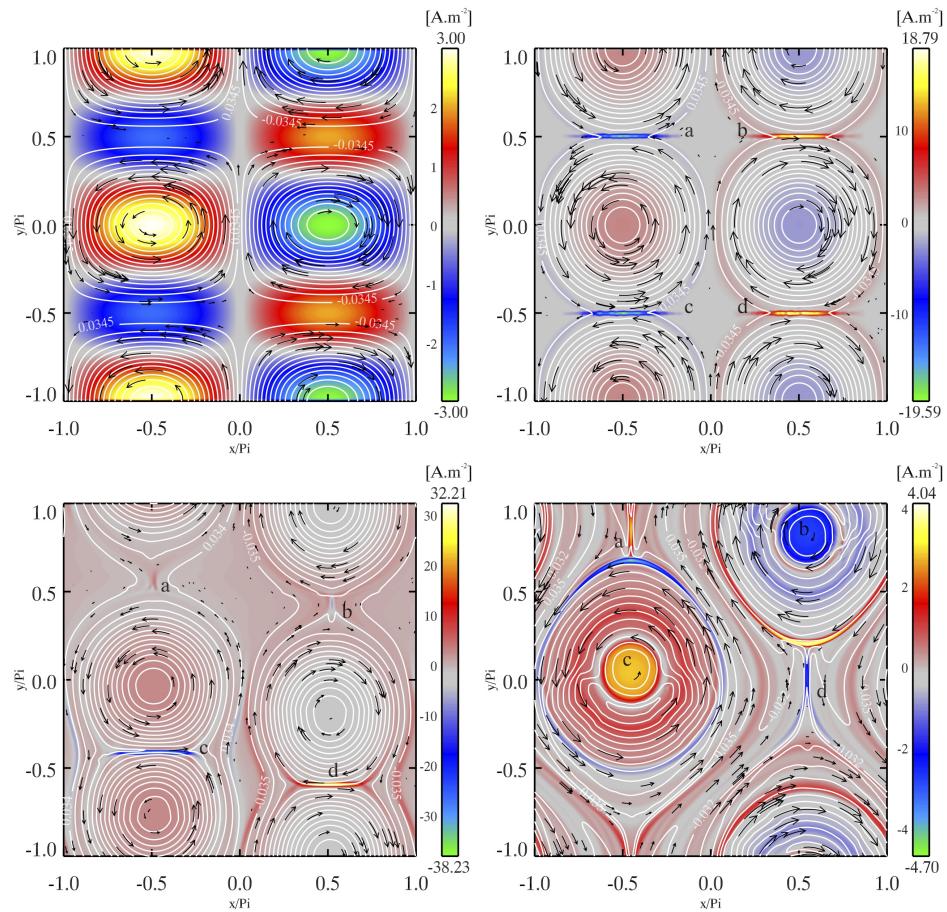


Figure 3.6. Relaxation of a magneto-fluid into equilibrium. Each panel shows a color map of the vertical component of the current density, over which are superposed isolines of the Euler potential S_1 along with randomly selected magnetic field lines (arrows). The upper-left panel shows the initial (un-balanced) condition. Other panels correspond to snapshots taken at non-dimensional times $t^* = 5.6$ (top-right), $t^* = 12.74$ (bottom-left) and $t^* = 51$ (bottom-right). Note the widely differing ranges of scales of the current density in all four panels.

The initial state at $t^* = 0$ (upper-left panel) consists of six sub-systems of closed field lines, or ‘magnetic islands’. Islands to the left of the $x = 0$ axis have counter-clockwise oriented field lines and therefore a positive current density pointing into the plane of the figure at their center, whereas; those to the right have a clockwise

orientation and a corresponding negative current density. This state is unstable as a result of its unbalanced magnetic stresses and so it will seek an equilibrium in which the balance of forces is met. At $t^* = 5.6$ (upper-right panel), the islands already have contracted horizontally and expanded vertically so that they now press against each other across the former neutral lines at $y = \pm 0.5\pi$. Observe that the horizontally component of \mathbf{B} abruptly changes sign across those two lines and that CSs have formed in these regions, also called magnetic X-points, which have been labeled by letters a,b,c and d. In particular, the level curves $S_1 = \pm 0.0345$, which used to represent closed field lines at $t^* = 0$, now extend from $y = -\pi$ to $y = +\pi$ as a result of their reconnection across the $y = \pm 0.5\pi$ lines. TDs appear here as cusps in the isolines where the field lines are non-differentiable. This quasi-static flow configuration (or quasi-static state) persists until $t^* \approx 10$, when it finally destabilizes as islands on each side of CSs at c and d are propelled towards each other by the tension of the reconnected field lines and begin merging into larger structures — see the lower-left panel of fig. 3.6 ($t^* = 12.74$). Only three subsystems out of six remain at $t^* = 51$, where the system appears to have attained another quasi-static state — see the lower-right panel of fig. 3.6. Apart from slight misalignments between isolines and field lines taking place close to the O-shaped current-carrying regions at c and b in the final state, the agreement between the field predicted from the Euler potentials and the one obtained from the integration of (3.32)-(3.35) throughout the rest of the evolution is remarkable. The process depicted by fig. 3.6 and by which reconnected field lines evolve from the harmonic into the subharmonic mode is known as the coalescence instability and has been widely studied both analytically and numerically [42, 148, 162].

Histories of the normalized total kinetic energy (KE) and total magnetic energy (ME) corresponding to the time sequence displayed in figure 3.6 appear in the top panel of figure 3.7, where they are displayed by black and red curves, with continuous and dotted curves corresponding to runs using the classical SL and MA-enhanced

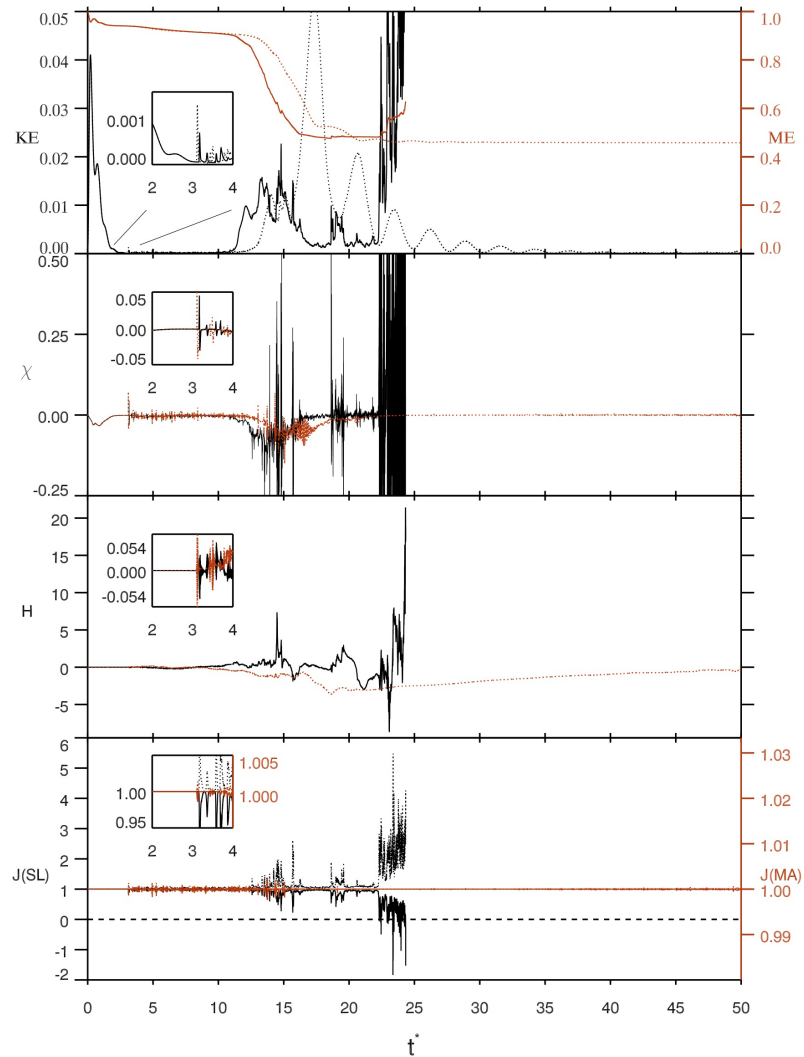


Figure 3.7. Top: Kinetic energy (black) and magnetic energy (red) for the classical SL solution (continuous) and for the MA-enhanced solution (dots). 2nd panel from the top: Total energy rate-of-change for standard (black continuous line) and MA-enhanced runs (red dots). 3rd panel from the top: Cross-helicity for the classical SL (black continuous) and MA-enhanced solutions (red dots). Bottom panel: Minimum (continuous) and maximum of \hat{J} (dots) for the classical SL (black) and MA-enhanced solutions (red). The time axis is non-dimensional time t^* .

algorithms, respectively. The panel immediately below shows the total energy rate-of-change χ , where black continuous and red dotted curves correspond to the standard

SL and MA-enhanced SL runs. The KE first increases from zero to reach approximately 4% of the total initial ME as the islands are set into motion and as X points are formed, only to fall back down near zero around $t^* \approx 3$ under the action of the viscous force. This period is characterized by a magnetic back-reaction causing a short feedback of KE into ME. The latter is not the result of reconnection but rather is the effect of an Alfvén wave propagating throughout the domain; see the animation in the supplementary material online. Notably, both solutions remain identical until the quasi-static state is reached at $t^* \approx 3$, when a KE burst associated with $\chi > 0$ (i.e. an increase of the total energy \mathcal{E}) appears for the first time — see the insets showing a close-up view of the interval $\langle 2, 4 \rangle$. The latter therefore clearly is a non-ideal effect that can be attributed to a reconnection event taking place at a magnetic X point. KE bursts keep occurring during the quasi-static state until the onset of the merging process at $t^* \approx 10$, during which more than 30% of both solutions' total ME is converted into KE. Remarkably, violations of $\chi \leq 0$ are about 10 times larger in the standard than in the MA-enhanced run during the merging phase and those are much more frequent when the MA correction is not applied. In the MA-enhanced solution, the KE is almost completely dissipated by viscous forces to produce the quasi-static state at $t^* \approx 50$. This is not the case for the classical SL run, however, in which both KE and ME start to increase unboundedly past $t^* \approx 22$, dramatically violating conservation of the total energy. Consequently, the standard SL run was terminated shortly after $t^* \approx 24$.

The third panel of figure 3.7 shows the histories of cross-helicities

$$H \equiv \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{B} dV , \quad (3.64)$$

associated with the standard SL (continuous curve) and MA-enhanced solutions (dotted curve). Cross-helicity is an invariant of ideal MHD without dissipation that provides a measure of linkage between vortex and magnetic field lines [133]. Since $\mathbf{v} = 0$ initially, departures from $H = 0$ indicate changes in the flow/field topology that are

either due to reconnection or viscous losses. The inset indicates that the first departure coincides with the KE burst attributed to the first reconnection event at $t^* \approx 3$. Both MA-enhanced and classical SL solutions compare well during the quasi-static state prior to $t^* \approx 10$; whereas, they begin to diverge past this time as the island coalescence takes its course. This phase is characterized by large fluctuations in the classical SL solution, the most dramatic being the erratic growth seen to occur in the interval $t^* \in \langle 22, 24 \rangle$ and simultaneously with the spurious generation of ME — compare with the top panel. Fluctuations and departures from $H = 0$ occurring in the MA-enhanced run are, on the other hand, much more tempered.

Histories of $\min\{\hat{J}\}$ and $\max\{\hat{J}\}$ are displayed by solid and dotted curves for the classical SL (black curves) and MA-enhanced solutions (red curves) in the bottom panel of figure 3.7, respectively. A dashed line has been drawn that marks the ordinate where $\hat{J} = 0$ on the scale of the classical SL solution. As it was the case for H , the largest departures from (3.8) are observed during the coalescence phase, with the classical SL solution exhibiting singular mappings ($\hat{J} \leq 0$) as its magnetic energy starts to grow spuriously. The MA-enhanced solution, on the other hand, shows departures from (3.8) no greater than 1% throughout the whole evolution.

Left and right panels of figure 3.8 show, respectively, snapshots of S_1 isolines superposed over color maps of j_z and \hat{J} immediately before the termination of the classical SL run at $t^* = 24$. Although islands appear to have merged as in the MA-enhanced solution, field lines pertaining to the bundle at (c) are quite distorted and the alignment between the isolines of S_1 and the field lines is lost. Interestingly, the intense and spatially complex current distribution observed at c in the left panel corresponds to the region where the largest \hat{J} errors appear (right panel). Those errors can be attributed to both anomalous contraction ($\hat{J} > 1$) and anomalous expansion ($\hat{J} < 1$).

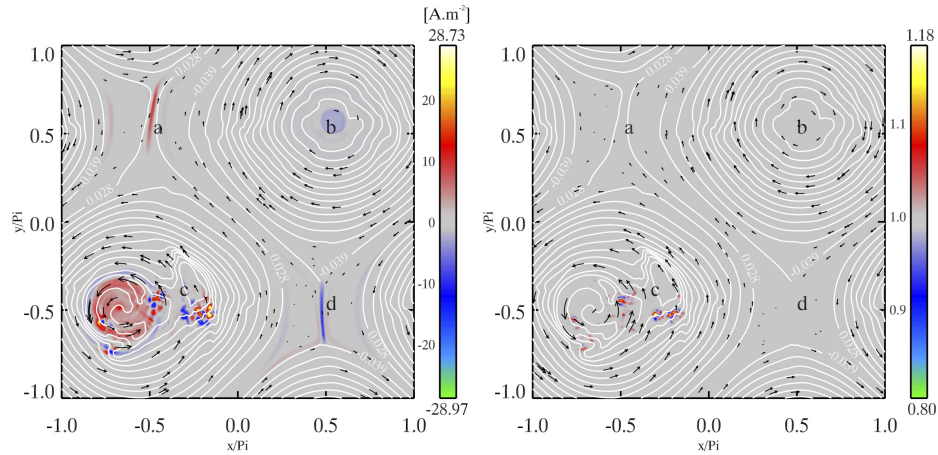


Figure 3.8. Anomalous fluid expansion and contraction in a classical SL solution at $t^* = 24$, immediately before its termination. Left and right snapshots show, respectively, S_1 isolines superposed over a color map of the j_z and a color map of \hat{j}_z .

3.5.2 3D magneto-fluid

The fact that most natural systems evolve in more than two space dimensions demands further assessment of the MA-enhanced scheme in a 3D environment. Hence, we further explore its comparison with the classical SL scheme using 3D analogs of the experiments of section 3.5.1. Here the domain is a triply-periodic box $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [0, \pi/4]$ with grid resolution $NX = NY = 256$, $NZ = 32$ and initial conditions are given as before by $\mathbf{v} = 0$, (3.62), $S_1 = \cos^2(y) \sin(x)$, $S_2 = z$, $W = 1$. Thus, field lines at $t^* = 0$ all lie in horizontal planes with the configuration shown in the top-left panel of figure 3.6. We begin by comparing results from second-order-accurate uncorrected and corrected trajectory schemes. The MA-enhanced run uses $\varepsilon = 1 \times 10^{-2}$ in (3.52).

The upper graph of figure 3.9 shows histories of the KE and of the ratio of volume-integrated vertical ME to total ME ($\langle B_z^2 \rangle / \langle \mathbf{B}^2 \rangle$) for the first 10 dynamical times of each run. The lower graph shows, snapshots of field lines in the region

$-\pi < x, y < 0$ for standard SL (top panels) and MA-enhanced runs (bottom panels) at various times during their evolution (from left to right). As in the 2D solution, KE

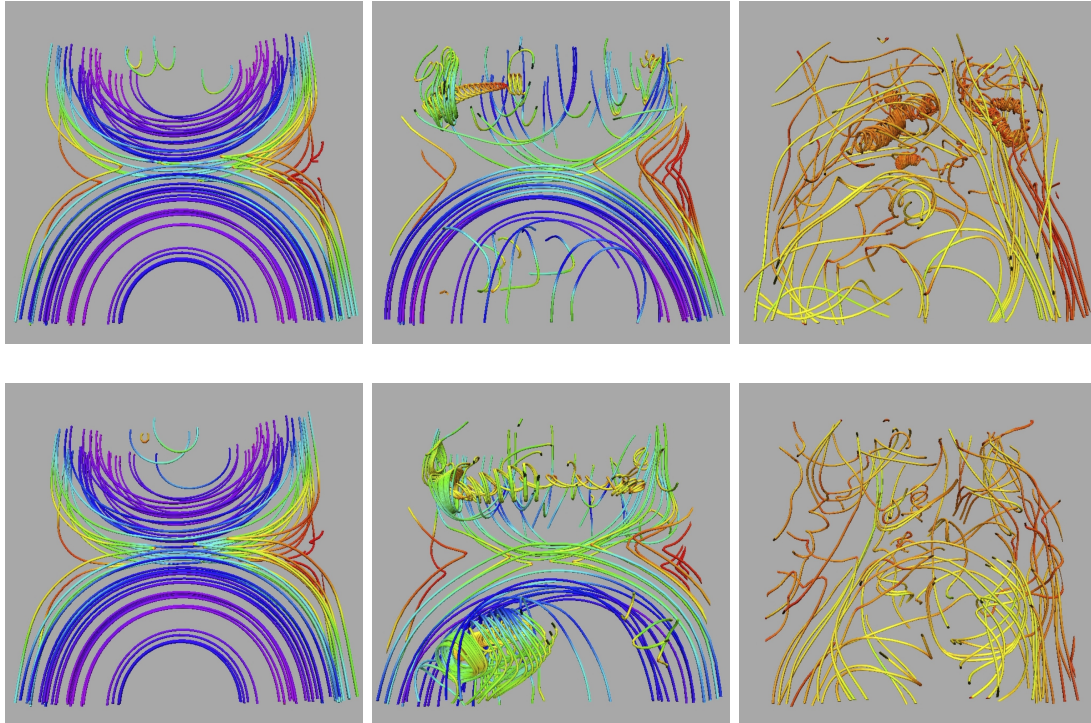
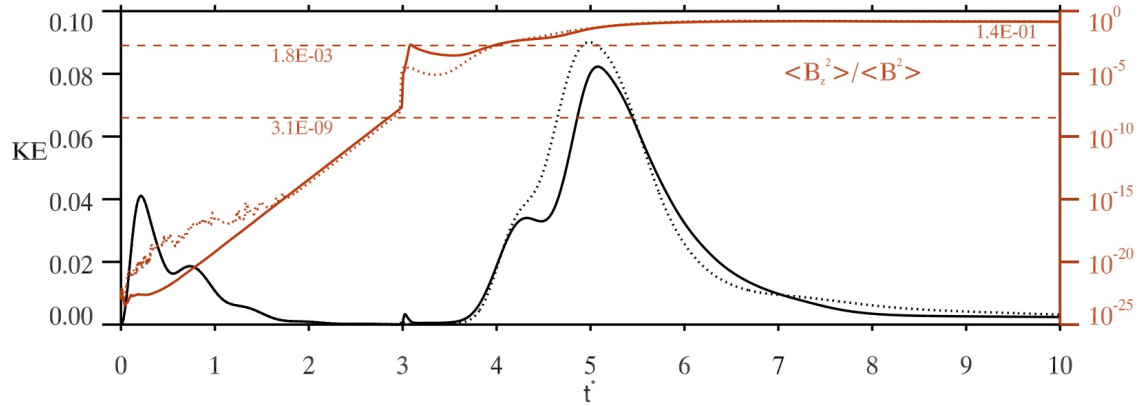


Figure 3.9. Top graph: Kinetic energy (black curves) and ratio $\langle B_z^2 \rangle / \langle B^2 \rangle$ (red curves) histories for the classical SL solution (continuous curves) and for the MA-enhanced solution (dots). Lower graph: color rows show consecutive snapshots of the magnetic field lines in classical SL (top) and MA-enhanced runs (bottom) taken at, respectively, $t^* = 3.82$, $t^* = 5.09$ and $t^* = 10.19$.

initially grows out from the instability that leads to the formation of the four X-points and a quasi-static state; see the two leftmost snapshots in the lower graph. Here, however, an infinitesimal but non-zero amount of ME lies in the vertical magnetic field at $t^* = 0$ as a result of the enforcement of (3.35) for the initial condition. The latter eventually settles into a phase of exponential increase that lasts until $t^* \approx 3$, when a first KE burst appears due to reconnection, causing it to jump by several orders of magnitude almost instantaneously. Notably, the first reconnection event occurs at the same instant as in the 2D runs at $t^* \approx 3$, prior to which the flow evolution is purely 2D, with only a billionth of the total ME residing in B_z . Profuse liberation of ME into KE takes place shortly after, only to be dissipated away by viscous forces. The growth of the main KE peak at $t^* \approx 5$ is accompanied by significant build up of vertical ME that shows up as kinking of the field lines in the central regions of the islands — see central panels of the lower graph, corresponding to $t^* = 5.09$. By $t^* = 10$, the vertical magnetic field contains $\approx 15\%$ of the total ME and the field itself has become chaotic, as shown by the two rightmost panels. Thus, the growth of B_z overwhelms the 2D state before the islands can complete merging together and, as a result, the state of the 3D solution at $t^* = 10$ is very different from the one obtained at $t^* = 51$ in the 2D experiments — compare with the bottom-right panel of fig. 3.6.

Noteworthy, experiments that have been studying the growth of 3D modes starting from a 2D static equilibrium containing magnetic islands also report a diminished role of the coalescence instability [42]. In particular, 3D modes are observed to grow faster than any of the 2D modes associated with the relaxation of the reconnected field into the subharmonic mode and so field lines move out of their respective planes quicker than they reconnect, thereby preventing the merging of the islands.

Histories of cross-helicity H (3.64) and the current helicity

$$H_c \equiv \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} dV , \quad (3.65)$$

are shown in the top panel of figure 3.10 with black and red curves, respectively.

Unlike H , H_c is not an MHD invariant and instead gives a measure of torsion in the field lines. Both quantities are well conserved for the classical SL (solid curve) and MA-enhanced run (dotted curve) prior to the onset of reconnection. However, jumps appear in their evolution in the classical SL run which coincide with the first KE burst — see the inset showing a magnification of interval $t^* \in \langle 2.8, 4 \rangle$. Those jumps are, on the other hand, smaller in amplitude by at least an order of magnitude in the MA-enhanced run. Moreover, H grows linearly at a higher rate in the classical SL than in the MA-enhanced run during the dynamical time following $t^* \approx 3$. In contrast, nothing precise can be said about the behavior of both schemes with respect to conservation of both quantities past $t^* \approx 4$ as the flow becomes chaotic. Histories of $\min\{\hat{J}\}$ and $\max\{\hat{J}\}$ for the classical (black curves) and MA-enhanced runs (red curves) are shown in the bottom panel. Observe that the largest errors take place in the classical SL run simultaneously with the large jumps in H and H_c at $t^* \approx 3$. Notably, departures from $\hat{J} = 1$ only appear during the brief interval $t^* \in \langle 3, 5 \rangle$ and diminish as the flow transits toward a 3D configuration and a chaotic state. By contrast, they persisted over a much longer period of time in the 2D experiments, in which reconnection kept on going for several dynamical times as a result of island coalescence; cf. bottom panel of fig. 3.7.

Table 3.3 provides a quantitative measure of fluctuations of H and H_c occurring at the beginning of the brief reconnection phase by displaying total time variations $\Delta H \equiv \int |dH/dt| dt$ and $\Delta H_c \equiv \int |dH_c/dt| dt$. Using timeseries data of H and H_c , we computed $\delta H \equiv \sum_i |H_{i+1} - H_i|$ and $\delta H_c \equiv \sum_i |(H_c)_{i+1} - (H_c)_i|$ for the interval $t^* \in \langle 2.8, 4 \rangle$ for runs that employ various accuracies of the inverse flow Jacobian. The first column identifies each run, with an integer corresponding to the base-10 logarithm of ε . The normalized time-to-solution (wallclock time) relative to the standard SL run t/t_{standard} is displayed in the last column. The classical SL experiment (run 0) indeed possesses the largest of all variations. In particular, δH appears to converge to a value $\delta H \approx 2.5$ after the residual has been decreased by 2 orders of magnitude;

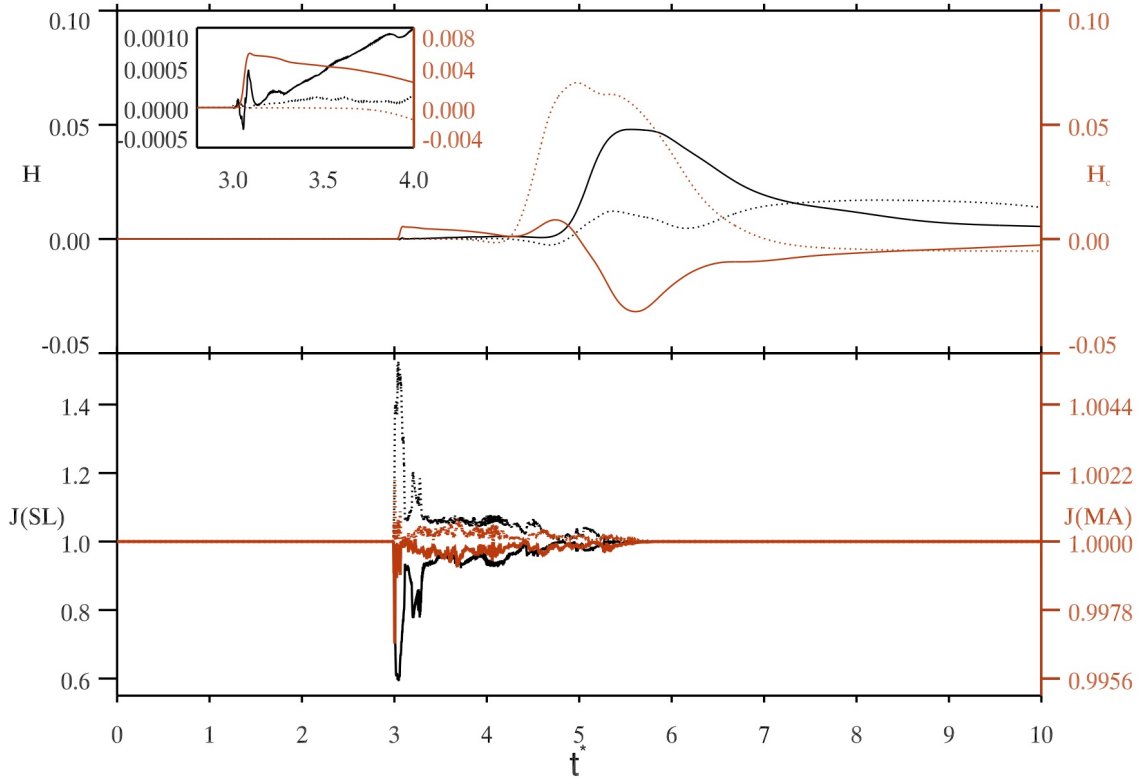


Figure 3.10. Top: Cross-helicity (black curves) and current helicity histories (red curves) for the classical SL (continuous curve) and MA-enhanced solutions (dotted curve). Bottom: Histories of minimum (continuous lines) and maximum (dots) of the (time-independent) inverse flow Jacobian taken over the computational grid for the classical SL (black curves) and MA-enhanced solutions (red curves).

whereas δH_c converges to $\delta H_c \approx 0.5$ after a 3 orders-of-magnitude decrease.

Fluctuations of H and H_c taking place for $t^* > 4$ are, by opposition, far greater and are especially strong during the growth of B_z and transition to chaos; see the central panels of both solutions in the lower graph of fig. 3.9. The fact that no systematic impact due to the use of the MA correction can easily be discerned from histories of H and H_c in this time period either points to interpolation errors smearing out the effect of the trajectory correction (recall the discussion in the last paragraph of section 3.4) or simply to the chaotic flow behavior that prevails past $t^* \approx 4$.

SL run	$\delta H[\times 10^3]$	$\delta H_c[\times 10^3]$	t/t_{standard}
0	4.66	8.40	1.00
1	1.74	0.96	0.97
2	2.55	1.27	1.03
3	2.52	0.51	1.27
4	2.53	0.54	1.68

Table 3.3. Sensitivity to Jacobian residual and performance of the 3D solver. The first column identifies the experiment, where the integer denotes the base-10 logarithm of the MA solver convergence threshold ε . Second and third columns display the time variations δH and δH_c for the interval $t^* \in \langle 2.8, 4 \rangle$, while the last column indicates the total wallclock time normalized with respect to the standard SL scheme.

Notheworthy, discrepancies in the current-helicities predicted by corrected and uncorrected schemes will manifest themselves as differing amounts of twist in fields of both solutions. This would appear to be consistent with the observed differences between the morphologies of field lines from each run (fig. 3.9)

3.6 Summary

We studied the impact of incompatible integrations of the equations of incompressible fluid and magneto-fluid dynamics using the semi-Lagrangian approximation. A necessary condition for the compatibility of an SL scheme has been defined through the solution of (3.8) using the fundamental Euler expansion formula and the mass continuity equation. Closed-form solutions to the MAEs arising from purely rotational and deformational elemental flows have shown that the anomalous contraction and expansion resulting from Euler-forward trajectory approximations to the trajectory integrals (3.3) are eliminated by the MA trajectory correction. Scalar advection ex-

periments using the MA correction support the theoretical results from section 3.2 by removing a substantial part of the anomalous contraction introduced by the standard trajectory estimates and by improving mass conservation.

Magnetic relaxation experiments have provided an extreme example where the consequences of breaking the flow topology and neglecting to enforce (3.8) altogether can be disastrous to the numerical solution. In particular, enforcing (3.8) has proven to be crucial for assuring the physical realizability and nonlinear stability of the 2D experiments, in which the lack of MA correction leads to unbounded growth of the total energy and trajectory intersections. Applying the MA correction in 2D and 3D experiments further has improved the conservation of the cross-helicity MHD invariant during phases of reconnection.

Future studies of the impact of compatibility on the flow features could be extended to stratified flows in more complex geometries (with suitable boundary conditions) by deriving corresponding generalized MAEs from (3.6), such as, for instance, global MHD simulations of the solar convection zone [7, 33, 76, 151].

Acknowledgments

We would like to thank three anonymous referees for their comments, which helped to improve the presentation. The numerical simulations reported in this paper were carried out primarily on the computing facilities of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium. This work is supported by Canada's Foundation for Innovation, Natural Sciences and Engineering Research Chair program and Discovery Grant program (PC), and the NSERC Graduate Fellowship Program (JFC). J.F.C. acknowledges NSERC Graduate Fellowship Program (PDF-453986-2014); whereas P.C. acknowledges support by Canada Foundation for Innovation (Grant No. 18382), NSERC Chair program (Grant No. CRC-203812) and Discovery Grant program (Grant No. RGPIN/261430-2013).

Appendix A: Ellipticity of the 2D MAE

Let Ω be a convex domain in which the MAE solution is sought and $\partial\Omega$ its boundary. A nonlinear PDE in M variables of the form

$$P(x_1, \dots, x_M, \phi, \phi_1, \dots, \phi_{MM}) = 0, \quad (3.66)$$

is said to be elliptic if the quadratic form

$$\sum_{i,k=1}^M \frac{\partial P}{\partial \phi_{ik}} \theta_i \theta_k, \quad (3.67)$$

is positive-definite in the parameters θ for all x_1, x_2, \dots, x_M in Ω and all values of the other arguments of P (cf. section IV.6.2 of [36]); here $\phi_i \equiv \partial\phi/\partial x_i$ and $\phi_{ik} \equiv \partial^2\phi/\partial x_i\partial x_k$. Therefore, the quadratic form associated to (3.12) may be expressed as

$$Q(\theta_1, \theta_2) \equiv (E\phi_{yy} + A)\theta_1^2 - 2(E\phi_{xy} - B)\theta_1\theta_2 + (E\phi_{xx} + C)\theta_2^2, \quad (3.68)$$

and is positive-definite provided $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ is a minimum. This is the case if the discriminant $\Lambda \equiv 0.25(Q_{\theta_1\theta_1}Q_{\theta_2\theta_2} - Q_{\theta_1\theta_2}^2) > 0$, $Q_{\theta_1\theta_1} > 0$ and $Q_{\theta_2\theta_2} > 0$. Using (3.12), we find that the condition for ellipticity is given by

$$\Lambda = (E\phi_{yy} + A)(E\phi_{xx} + C) - (E\phi_{xy} - B)^2 = AC - B^2 - DE > 0, \quad (3.69)$$

and

$$E\phi_{xx} + C > 0, \quad E\phi_{yy} + A > 0. \quad (3.70)$$

On the other hand, a negative-definite Q is defined by $\Lambda > 0$, $Q_{\theta_1\theta_1} < 0$ and $Q_{\theta_2\theta_2} < 0$, which implies

$$E\phi_{xx} + C < 0, \quad E\phi_{yy} + A < 0. \quad (3.71)$$

Importantly, Q is either positive-definite or negative-definite given (3.69), whereby ϕ must fall into either one of the two solution classes defined by (3.70) and (3.71). For the special case where $A = B = C = D = 0$, (3.70) and (3.71) imply, respectively,

convexity and concavity of the MAE solution ϕ , whereby (3.12) is elliptic if and only if ϕ is convex [8, 72]. In general, however, one cannot expect the MAE solution to be either convex or concave. Consequently, in this paper we shall simply refer to solutions satisfying (3.70) and (3.71) as the type-1 and type-2 solutions. Hence, (3.12) is elliptic if and only if ϕ is a type-1 solution.

To obtain an interpretation of (3.69) in terms of fluid flow, we substitute (3.13) into (3.69), and express the latter in terms of the derivatives of the path-mean velocity $\tilde{\mathbf{v}}$. This leads readily to $\Lambda = 1 - (0.5\Delta t(\tilde{u}_y - \tilde{v}_x))^2 = 1 - (0.5\Delta t\tilde{\omega})^2 > 0$, whereupon

$$\left| \frac{\tilde{\omega}\Delta t}{2} \right| < 1 \quad (3.72)$$

becomes both the necessary and sufficient condition for (3.69). Furthermore, the inequality (3.72) is closely linked to the Lipschitz condition

$$L := \Delta t \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{x}} \right\| < 1, \quad (3.73)$$

which gives a measure of convergence/divergence of the estimated flow trajectories (3.9) and suffices for preventing their intersections, where the velocity field is assumed to be at least $C^{(1)}$ [169]. Now, rearranging (3.73) gives

$$\begin{aligned} 1 &> L := \Delta t (|\tilde{v}_x| + |\tilde{u}_y| + |\tilde{v}_y| + |\tilde{u}_x|) \\ &\geq \Delta t (|\tilde{v}_x - \tilde{u}_y| + |\tilde{v}_y| + |\tilde{u}_x|) \\ &\geq \Delta t |\tilde{v}_x - \tilde{u}_y| \\ &\geq 0.5\Delta t |\tilde{v}_x - \tilde{u}_y| = 0.5\Delta t |\tilde{\omega}|. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Thus, $L < 1$ is sufficient for (3.72) and therefore also (3.69).

Appendix B: Unicity of MAE solutions

To determine the unicity of solutions to (3.12), one must have some knowledge of the imposed boundary conditions. For instance, the Dirichlet problem for the MAE consists in finding a solution to (3.12) in a domain Ω with specified solution at the

boundary $\partial\Omega$, e.g. $\phi|_{\partial\Omega} = \Gamma$, where Γ is a known function of the coordinates. At most two solutions to the Dirichlet problem exist, which assume the same boundary values Γ , given the non-negative discriminant (3.14). This result, known as the Rellich theorem, follows from the demonstration that for specified Γ the type-1 and type-2 solutions are unique (cf. appendix A and section IV.6.3 of [36]). For example, it is possible to choose the constants C_+ and C_- in (3.23) such that $F_+(\xi^*) \equiv F_-(\xi^*) = \Gamma$ on a circle of radius $R = \sqrt{\xi^*}$ centered at the origin, whereby F_+ and F_- are unique for a given Γ .

Moreover, for arbitrary boundary conditions, a solution to (3.12) is either type-1 or type-2 if (3.14) is satisfied, although the authors know of no corresponding proof of uniqueness. In such a case, however, the type of solution can be verified once a particular solution has been found, for instance with the use of a numerical solver; see sections 3.3.2 and 3.4.

Substituting (3.13) in the left inequalities of (3.15) and (3.16) implies, respectively,

$$\Delta t \phi_{xx}^{\{1\}} > \Delta t \tilde{u}_x - 1 \geq -\Delta t |\tilde{u}_x| - 1 > -L - 1 > -2 \quad (3.75)$$

and

$$\Delta t \phi_{xx}^{\{2\}} < \Delta t \tilde{u}_x - 1 \leq \Delta t |\tilde{u}_x| - 1 < L - 1 < 0, \quad (3.76)$$

where $\phi_{xx}^{\{1\}}$ and $\phi_{xx}^{\{2\}}$ correspond to the type-1 and type-2 solutions. Similarly, $\phi_{yy}^{\{1\}} > -2/\Delta t$ and $\phi_{yy}^{\{2\}} < 0$. This last property imposes severe constraints on solutions of the second type, namely, that they possess only one stationary point (a maximum).

If periodic boundary conditions are assumed for all prognosed dependent variables the trajectory correction, $\nabla\phi$, in (3.11) must also be periodic, whereupon one has the additional constraint

$$0 = \phi_x|_X - \phi_x|_0 = \int_0^X \phi_{xx}, \quad (3.77)$$

and similarly for ϕ_{yy} . This clearly forbids the existence of type-2 solutions, as per inequality (3.76) and the associated upper bound on ϕ_{yy} .

The above argument can also be applied to a bounded domain Ω , since in this case one would have $\phi_x|_0 = \phi_x|_X = 0$ in (3.77) as a result of prescribing zero normal velocity on $\partial\Omega$. In this situation, observing (3.17) would also assure that the departure points remain inside the domain, since fluid elements from its interior could not leave Ω without intersecting trajectories of the elements moving alongside $\partial\Omega$. Generally, for problems with the normal components of the trajectory displacements specified at the domain boundary, boundary conditions for (3.12) may be derived from (3.11), which naturally leads to a Neumann problem for the MAE [9, 48, 186, 191].

Chapitre 4

CYCLIC THERMAL SIGNATURE IN A GLOBAL MHD SIMULATION OF SOLAR CONVECTION

Cette lettre a été publiée comme l'indique la référence bibliographique

Cossette, J.-F., Charbonneau, P. et Smolarkiewicz, P.K. 2013 , Cyclic thermal signature in a global MHD simulation of solar convection, dans *Astrophysical Journal Letters*, vol. 777, L29.

Les résultats présentés dans cet article résultent d'une analyse préliminaire de la modulation du transport convectif observée dans une simulation de convection solaire MHD générée par EULAG. Les fondements d'une analyse approfondie de cette simulation sont présentés au Chapitre 5, qui fait partie d'un article en préparation pour l'*Astrophysical Journal* (Cossette & al. 2014, ApJ). Ces deux analyses sont au coeur du deuxième volet de cette thèse portant sur l'origine des variations décadales et multi-décadales de l'irradiance (section 1.1.1) et mettent en évidence pour la toute première fois une signature cyclique du flux convectif variant en phase avec le cycle magnétique produit par une simulation MHD globale (section 1.3.1). Ces résultats ont été présentés dans le cadre des conférences internationales suivantes: *Workshop on Large-Eddy simulations of MHD turbulence, Boulder (CO), États-Unis*; *SORCE science meeting, Cocoa Beach, Florida, États-Unis, 2014*.

Abstract

Global magnetohydrodynamical simulations of the solar convection zone have recently achieved cyclic large-scale axisymmetric magnetic fields undergoing polarity reversals on a decadal time scale [7, 76, 151]. In this Letter, we show that these simulations also display a thermal convective luminosity that varies in-phase with the magnetic

cycle, and trace this modulation to deep-seated magnetically-mediated changes in convective flow patterns. Within the context of the ongoing debate on the physical origin of the observed 11-year variations in total solar irradiance, such a signature supports the thesis according to which all, or part of the variations on decadal time scales and longer could be attributed to a global modulation of the Sun's internal thermal structure by magnetic activity.

4.1 Irradiance variations and the solar dynamo

Total solar irradiance (TSI) has been measured almost continuously by earth-orbiting satellites for more than three decades and is now known to vary on time scales from minutes to days and months as well as on the longer time scale of the 11-year solar-cycle; see [74, 107]. Perhaps the most striking feature that emerges from observational measurements is the slight increase of the TSI ($\approx 0.1\%$) at solar activity maxima relative to its value at solar minima. Models that include the contributions of sunspots, faculae and magnetic network to reconstruct irradiance time series succeed very well at reproducing the observations on the short, intra-cycle time scales (e.g. shorter than a year). So far, however, pin-pointing the source of the longer decadal fluctuations has remained the subject of controversy. In particular, one school of thought argues that surface magnetism alone is sufficient to explain the entire TSI variance (Foukal et al. 2006; Lean et al. 1998); whereas, the other emphasizes the effect of a global modulation of thermal structure by magnetic activity (Sofia & Li 2006; Li et al. 2003). Within a broader context, establishing the contribution of a global thermal modulation to TSI variability relative to that of emerging magnetic flux structures at the solar surface is valuable for quantifying the coupling between periods of quiet surface magnetism and the Earth's climate, such as the postulated relationship between the Maunder Minimum and the Little Ice Age (Foukal et al. 2011). It is the potential for the occurrence of such changes which we consider in this Letter.

In principle, magnetically-modulated global structural changes could take place through the action of the Lorentz force onto the large-scale heat-carrying convective flows, which would then affect temperature and pressure conditions throughout the solar interior. Evidence for such a hypothetical mechanism is partly supported by helioseismic observations that show a positive correlation between low-degree p -mode acoustic oscillations frequencies and the TSI cycle, as well as recent evidence for a long-term trend in the TSI record that is not seen in indicators of surface magnetism; (Fröhlich 2013; Bhatnagar et al. 1999; Woodward 1987). Other observations document possible variations of the surface temperature and changes in the solar diameter; (Harder et al. 2009; Thuillier et al. 2005; Gray & Livingston 1997; Kuhn et al. 1988).

Notably, structural models of the Sun have shown that by incorporating the effect of a magnetically-modulated turbulent mechanism into the 1D stellar structure equations, it is possible to reproduce the time-dependence of the observed p -mode frequency oscillations along with the expected variations in solar radius, luminosity and effective temperature (Sofia & Li 2006; Li et al. 2003). However, these models relied upon an ad-hoc parametrization of the alleged process and therefore solving the full set of equations governing the self-consistent evolution of the solar plasma remains necessary to obtain a complete physical picture of the mechanism at the origin of the modulation.

Fortunately, global magnetohydrodynamical (MHD) simulations of the solar convection zone (SCZ) have recently been able to produce regular, solar-like magnetic cycles undergoing hemispheric polarity reversals on a decadal time scale [7, 76, 100, 151], and therefore offer the opportunity for the search and investigation of potential global structural changes. In this paper we report on a global MHD simulation of the SCZ that shows a modulation of the convective heat flux by a solar-like cyclic large-scale magnetic field. In section 4.2 we briefly document the physical setup of our experiment and describe the main results. In section 4.3, we further explore the simulation data in search of plausible physical mechanisms that could explain the observed ther-

modynamic signal and we conclude the paper in section 4.4 by pointing out a few possible observational signatures.

4.2 *Results: Modulation of the convective heat flux*

We solve the anelastic form of the ideal MHD equations for momentum, potential temperature fluctuations (tantamount to fluctuations of specific entropy) and magnetic induction inside a thick spherical shell of electrically-conducting fluid extending from $r = 0.602R_{\odot}$ to $r = 0.96R_{\odot}$ in radius, rotating at the solar rate $\Omega_{\odot} = 2.69 \times 10^{-6} \text{rad s}^{-1}$ and spanning 3.4 density scale-heights. Rather than forcing convection by applying large-amplitude solar heating and cooling fluxes at bottom and top boundaries, as it is customary in simulations of stellar convection, a Newtonian-cooling term in the potential temperature equation damps naturally-occurring departures from an ambient state representative of the current-day Sun on a user-defined time scale τ . The ambient state is subadiabatically-stratified in the lower portion of the shell corresponding to the radiative interior ($0.602R_{\odot} \leq r \leq 0.71R_{\odot}$) and is weakly superadiabatic in the range associated with the bulk of the convective layer ($0.71R_{\odot} \leq r \leq 0.96R_{\odot}$). This approach has led to convective dynamo solutions exhibiting a number of solar-like properties, the most prominent of which is a large-scale axisymmetric magnetic field component undergoing polarity reversals about the equatorial plane on a 40-year time scale; see the following publications for an in-depth exploration of various solar-like features found to this day: [7, 76, 151]. Solutions are generated with the MHD-extended version of the EULAG model [165], an all-scale high-performance hydrodynamical code used primarily in atmospheric and climate research (Prusa et al. 2008). We hereby focus on a recent simulation covering 32 magnetic polarity reversals (similar in design and the resulting flow regime to the one presented in Ghizaru et al. 2010) in which global structural changes have been observed.

Convection and Newtonian cooling are the dominant modes of thermal energy transport in the unstable layer and nearly cancel each other out to yield a quasi-stationary turbulent state, with the contribution from radiation being negligible. The means by which we quantify the efficiency of convective energy transfer is the convective heat flux, or enthalpy flux, which in the anelastic approximation is given by $F \equiv c_p \rho_o u_r \tilde{T}$, where c_p is the specific heat at constant pressure, ρ_o is the density associated with the reference state of the approximation, u_r is the vertical component of the velocity and \tilde{T} is the temperature perturbation with respect to the mean horizontal state. The convective luminosity is the integrated flux F over a spherical surface $L_{cv} \equiv \int F d\sigma$.

The top and bottom panels of figure 4.1 show, respectively, a snapshot of F in a Mollweide projection (longitude vs latitude) at $r = 0.87R_\odot$ and a correlation plot of F versus u_r at the same height, with numbers indicating the fraction of points contained in each quadrant. The two dashed lines in the top plot delimit, respectively, the inside and the outside regions (hereafter, the mid/high latitudes) of the equatorial band comprised between the latitude circles $\theta = \pm 30^\circ$. Notably, the flux at the mid/high latitudes is spatially very intermittent, despite the low grid resolution of the experiment ($N_\phi \times N_\theta \times N_r = 128 \times 64 \times 47$), where N_ϕ , N_θ and N_r stand for, respectively, the number of grid points in the longitudinal, latitudinal and radial directions. In particular, the strongest heat fluxes (i.e. $F \geq 1.5 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) appear in the form of localized concentrations or ‘hot spots’; whereas, cooling regions (i.e. $F < 0$) correspond to the weaker fluxes that are interspersed among the latter. By contrast, the equatorial band is dominated by North-south positive and negative flux lanes, which are the thermal signature of the convective modes commonly known as ‘banana cells’ and are characteristic of flows in a rotating spherical shell (see Miesch and Toomre 2009 for an in-depth discussion of global convective dynamics). The bottom plot shows that approximately 70% of upflows and downflows contribute to positive fluxes, while the remaining 30% is responsible for cooling by fluid entrainment; a

landmark of flows operating in a highly turbulent regime. Here the asymmetry between distributions associated with $u_r > 0$ and $u_r < 0$ can be traced back to the pattern of broad upflows and narrow downflow lanes typical of thermal convection in a density-stratified environment; see, e.g., fig. 1 of [76] and fig. 2 of [132].

Figure 4.2 displays time-latitude plots of the zonally-averaged toroidal component of the magnetic field (top panel) and zonally-averaged deviation about the temporal mean of F at $r = 0.87R_\odot$ (bottom) for a segment of the simulation spanning slightly more than 150 years. The axisymmetric toroidal field is clearly antisymmetric about the equator and is split into a large-scale component at mid/high latitudes reversing polarities on a period varying between 30 and 40 years and another flux concentration located in the equatorial band evincing a shorter, 3 to 5 year oscillatory signal. Interestingly, helioseismic frequency analysis and indicators of geomagnetic activity suggest the presence of a short-term magnetic cycle operating inside the Sun, in addition to the well-known 11-year signal [65, 135]. The bottom plot shows the global thermal modulation. In particular, at mid/high latitudes, the convective heat flux is temporally well correlated with the absolute value of the zonally-averaged toroidal magnetic field. Likewise, the signature of the short-term magnetic cycle can be seen in the flux comprised within the equatorial band, although it appears to be in anti-phase with the flux variation at the mid/high latitudes. Here, however, we postpone a thorough discussion of the short-term magnetic signal to a future publication and focus on changes related to the long-term cycle.

The top panel of fig. 4.3 displays histories of both the unstable layer's normalized total magnetic energy $E_m^* \equiv E_m / \max(E_m)$ (black curve) and temporal perturbation of the normalized convective luminosity $\Delta L_{cv}^* \equiv (L_{cv} - \bar{L}_{cv}) / \bar{L}_{cv}$ at $r = 0.87R_\odot$ (red curve) and its 5-year running mean (yellow curve), where the maximum of magnetic energy is taken over the full time-sequence of the simulation and \bar{L}_{cv} is the time-averaged convective luminosity. Thus, the combination of the mid/high latitudes in-phase flux modulation and the equatorial band's signal gives a total convective

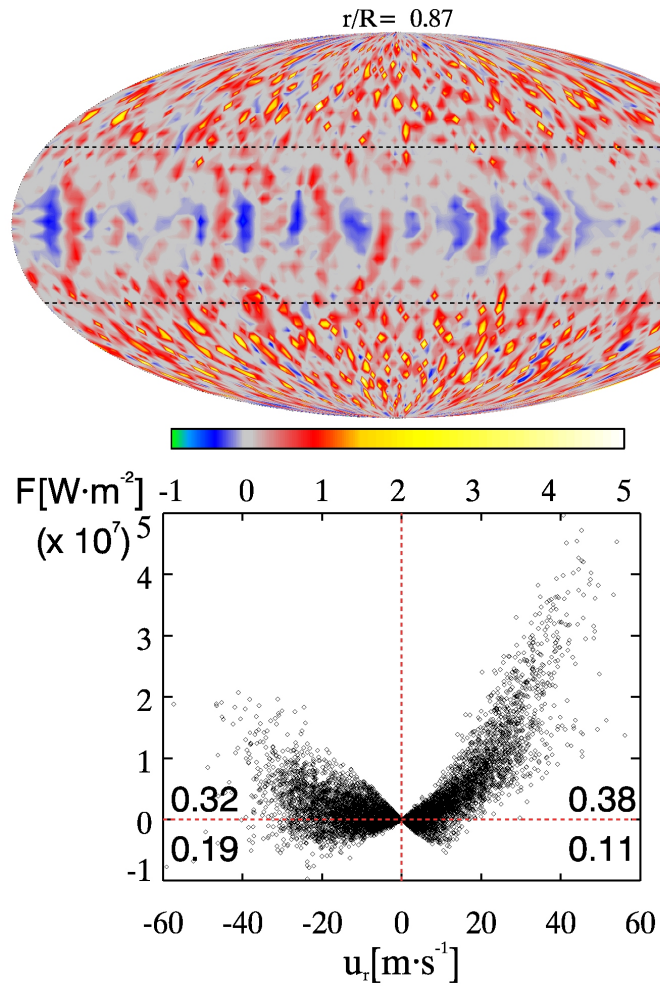


Figure 4.1. A simulation snapshot: Mollweide projection of the convective heat flux $F(\theta, \phi)$ at $r = 0.87R_{\odot}$ (top) and its correlation with the vertical flow velocity at the same height (bottom). Each diamond corresponds to the value of F at a grid point on the spherical shell, and the numbers give the fraction of grid point values appearing in each quadrant.

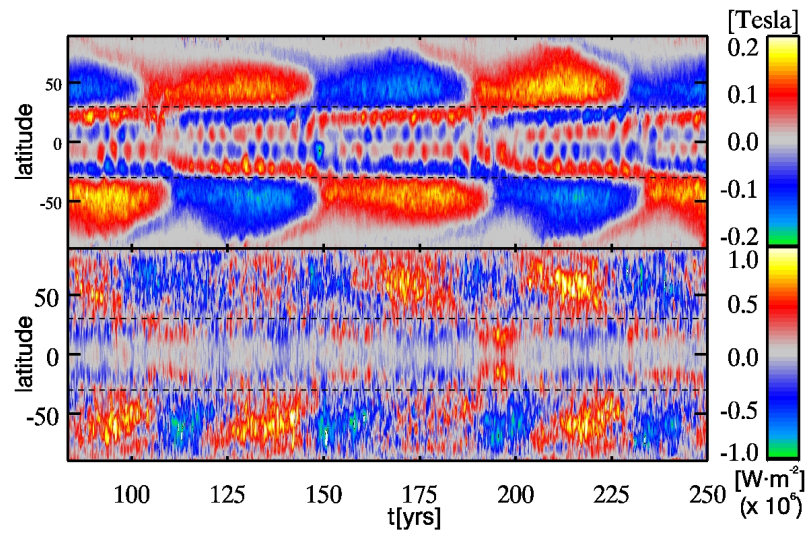


Figure 4.2. Temporal evolution: Zonally-averaged toroidal component of the magnetic field (top) and zonally-averaged deviation of the convective heat flux F (bottom) at $r = 0.87R_{\odot}$. At mid/high latitudes, the absolute value of the zonally-averaged toroidal field has a period and phase comparable to that of the flux variation.

flux variation that has the same phase as E_m . Its amplitude is of the order of 10% of \bar{L}_{cv} , which itself only reaches 3% of the true solar luminosity L_\odot at this given height, thereby yielding a modulation of amplitude $0.003L_\odot$. Although the amplitude of the modulation is comparable to that of the actual decadal TSI fluctuations, it must be kept in mind that this specific simulation is quite subluminous, with L_{cv} peaking at $\approx 0.1L_\odot$ at mid-depth of the domain. We shall comment further on this issue in section 4.4. Nevertheless, the sign of the correlation between E_m^* and ΔL_{cv}^* is positive ($r = +0.63$) and therefore consistent with an increase of TSI at solar maxima, as shown by the bottom panel, in which ΔL_{cv}^* is plotted as a function of E_m^* . Notably, the scattering of points along the vertical axis can be attributed to the influence of the short-term magnetic cycle on the total convective luminosity. The fact that convective heat transport correlates positively with magnetic activity forcibly points to an intricate interplay between the flow and magnetic field topologies, since the presence of a magnetic field generally tends to inhibit, rather than enhance, the flow of an electrically conducting fluid, at least in the parameter regime relevant to solar interior conditions.

4.3 *The hunt for the physical mechanism*

As a first step towards the identification of the physical mechanism causing the observed modulation, we shall examine how strongly the convective flux at each grid point is modulated by the magnetic field. The top panel of figure 4.4 shows cumulative convective heat flux PDFs corresponding to, respectively, every minima (black continuous curve) and maxima (red dashed curve) of the simulation for the spherical surface located at $r = 0.87R_\odot$; cf. fig. 4.1. Observe that at peak time of the magnetic cycle, the amount of flux values corresponding to the hot spots increases with respect to its value at minimum time; whereas, the opposite phenomenon characterizes the negative flux values. The bulk of the positive flux distribution (i.e.

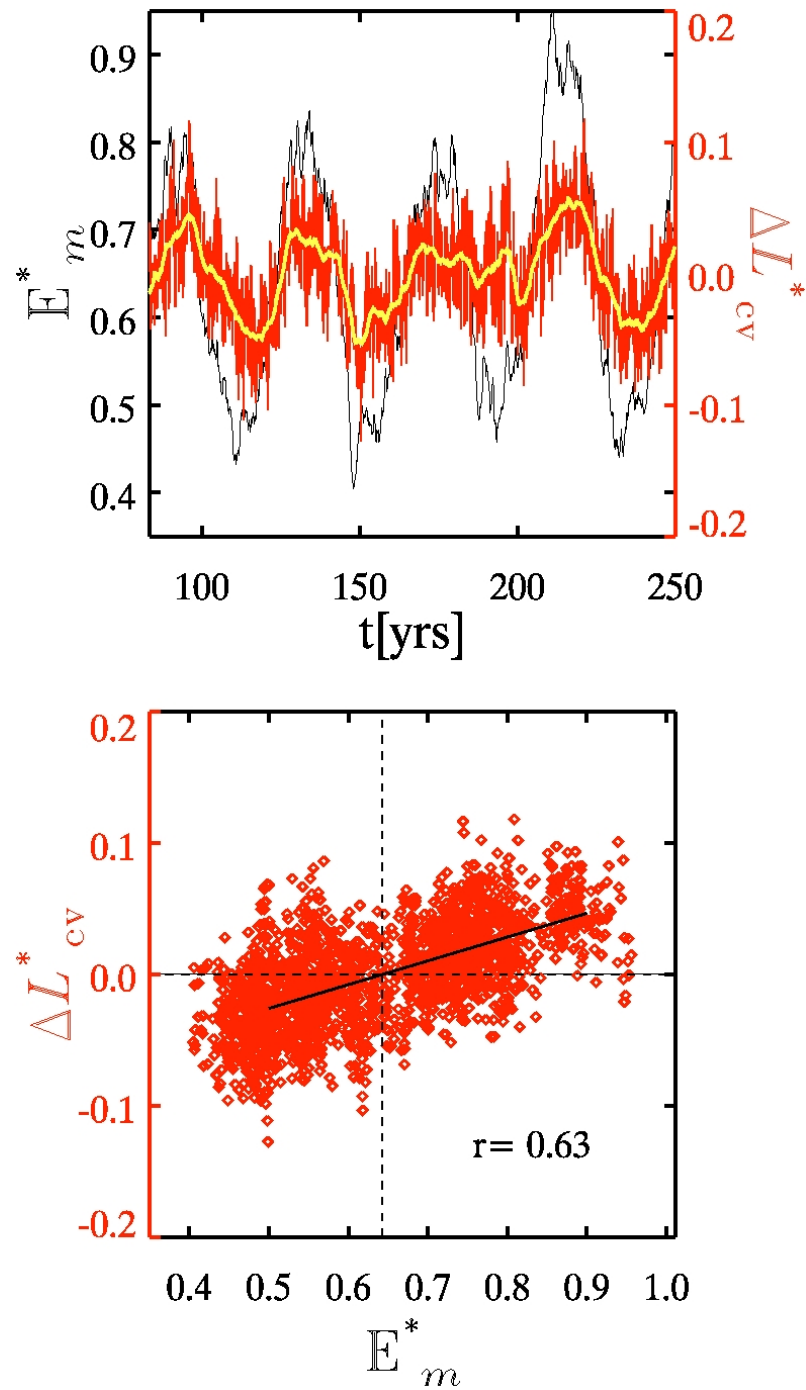


Figure 4.3. Top: Histories of normalized total magnetic energy (black curve) and temporal perturbation of the normalized convective luminosity (red curve) with its 5-year running mean (yellow curve). Bottom: Correlation between the temporal perturbation of convective luminosity and magnetic energy.

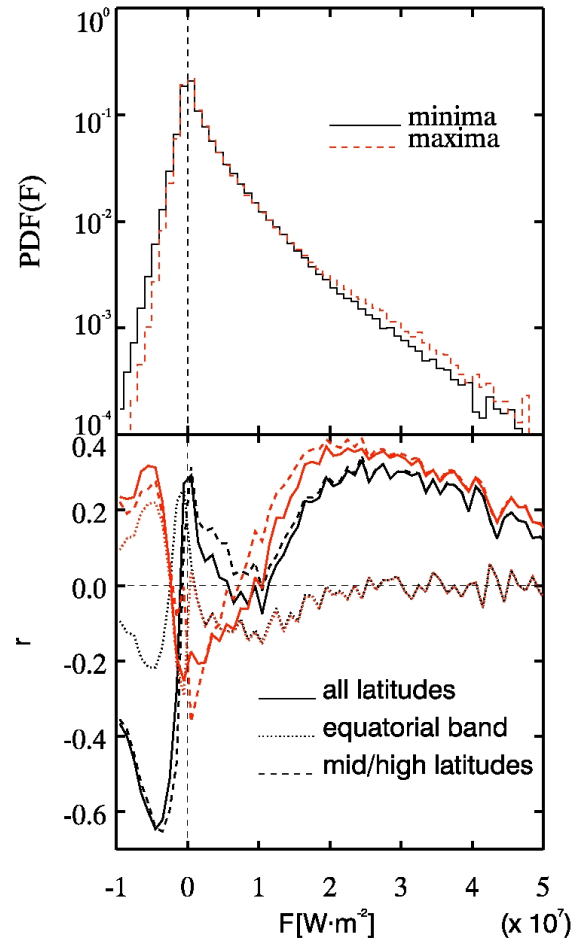


Figure 4.4. Top: Cumulative convective heat flux PDFs corresponding to, respectively, every minima (black continuous curve) and maxima (red dashed curve) of the simulation at grid points located at $r = 0.87R_{\odot}$. Here, maxima and minima are defined as extremal points in time of magnetic energy. Bottom: The black curves show the correlation coefficient of each bin of the convective heat flux's PDF with the time series of total magnetic energy for regions consisting of the full spherical shell (solid curve), the equatorial band (dotted curve) and the mid/high latitudes (dashed curve). Red curves display the correlation coefficient of each bin's associated luminosity input variation with total magnetic energy.

$0 \leq F < 1.5 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$), on the other hand, shows no obvious change. To substantiate this, we have computed the correlation coefficient of the time sequence of each of the convective heat flux PDF's histogram bins with the time series of E_m for grid points on the full spherical shell (black continuous curve), the equatorial band (black dotted curve) and the mid/high latitudes (black dashed curve) and plotted the result in the bottom panel of fig. 4.4. Each bin contributes to some fraction of the total convective luminosity variation (cf. fig. 4.3), and red curves display their correlation with E_m . The correlation analysis confirms what could already be inferred from the cumulative PDFs, namely, that there is a significant modulation of hot spot and negative flux populations by the magnetic cycle. Notably, the strong anti-correlation ($r \approx -0.6$) of the mid/high latitudes negative fluxes with E_m is the sign of a pronounced diminution of fluid entrainment at peak cycle time, which could be due to the suppression of turbulence by the intensification of the magnetic field. The bulk of the positive flux distribution does show a weak positive correlation with E_m , even though this change cannot be easily detected in the minima-maxima PDFs. Interestingly, this fluctuation translates into a decrease of the luminosity at cycle maximum, as shown by the anti-correlation with E_m near $F = 0$, and therefore implies a corresponding decrease of the filling factor of the associated flux regions. The means and variances of the luminosity variations implied by hot spots, elements from the bulk of the positive flux distribution and negative flux elements are, respectively, as expressed in terms of fractions of \bar{L}_{cv} : (0.320; 0.039), (0.781; 0.024) and (-0.102; 0.007). The PDF of vertical velocities (not shown), on the other hand, is invariant with respect to magnetic energy and therefore implies that the action of the Lorentz force on the flow is not simply a straightforward suppression of buoyancy-driven flows by the magnetic field, which again suggests that the interplay between flow and field topologies is magnetohydrodynamically complex.

4.4 *Remarks*

We have presented a basic analysis of a global MHD simulation of solar convection evincing a modulation of thermal structure by regular, solar-like, large-scale cyclic magnetic fields undergoing polarity reversals. Most importantly, the convective luminosity correlates positively with the magnetic cycle, which is consistent with the enhanced value of the TSI observed at solar maxima. The time analysis of the distribution of convective heat fluxes on a spherical surface allows to classify each flow feature according to the size of its contribution to the variance of the luminosity modulation; the most important effect being associated with the intense and localized positive flux elements known as hot spots, followed by a luminosity deficit coming from the bulk of the positive flux distribution, and a positive contribution due to a diminution of cooling via fluid entrainment. The latter may be attributed, for instance, to the suppression of turbulence by the enhanced magnetic field; whereas, the other two could be interpreted as manifestations of the flow's response to the modulation of turbulent entrainment by the cycle (recall the strong anti-correlation $r \approx -0.6$) while simultaneously satisfying the constraint of mass conservation and energy transport requirement imposed by the thermal forcing of the system. If such a speculative mechanism turned out to be real, it could well explain the weaker correlation of positive flux values with magnetic energy.

We have carried out our analysis of the flux variation at the given height $0.87R_{\odot}$, and find that the amplitude of the luminosity fluctuations implied by the modulation at this specific level is of the order of 0.3% of the true solar luminosity. However, the mean convective luminosity at this spherical shell is only of the order of $0.03L_{\odot}$ and the fact that our domain stops below the photosphere limits the type of comparisons that can be made with respect to the real Sun. For instance, the amplitude of the TSI variation implied by the global modulation may vary depending upon the subphotospheric layers' ability to store/release the heat flowing up from below as a

result of the deep-seated flux signal (Foukal et al. 2006). Moreover, the use of an impenetrable velocity boundary condition at the top of our model, a common feature of global MHD simulations, suppresses convective motions in the outer layers and therefore prevents one from making accurate predictions as to potential impacts of the flux modulation on the upper SCZ's dynamics. Nevertheless, our observation of a positive correlation between convective energy transport efficiency and magnetic energy suggests that magnetically-modulated global structural changes could contribute to an enhancement of the TSI at peak cycle time. A quantitative estimate of the corresponding amplitude contribution will require further modeling of the upper SCZ's physical connection to the photosphere as well as carrying out a similar analysis at higher luminosity.

We are currently engaged in a detailed analysis of the modulation and its underlying physical mechanism, briefly discussed in this Letter. The overarching aim is to assess the implications that these results might have for the existence of activity cycle-driven structural changes inside the Sun, and predict potential observational signatures. In this respect, the results presented here already indicate that the response of the convective flux to the magnetic activity cycle shows a significant latitudinal dependency, which could translate in cyclic variations of the surface pole-to-equator temperature contrast (viz. Rast et al. 2008; Kuhn et al. 1988), and/or asphericity of the solar photosphere (Thuillier et al. 2005).

Comments from an anonymous referee helped to improve the presentation. The numerical simulations reported in this paper were carried out primarily on the computing facilities of Calcul Québec, a member of the Compute Canada consortium. This work is supported by Canada's Foundation for Innovation, Natural Sciences and Engineering Research Chair program and Discovery Grant program (PC), and the NSERC Graduate Fellowship Program (JFC). PKS is supported by the European Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2012/ERC Grant agreement No. 320375).

Chapitre 5

MODULATION DU TRANSPORT CONVECTIF

Les résultats récents de simulations MHD globales de la convection solaire produisant des cycles magnétiques similaires à ceux qui sont observés sur le Soleil montrent un flux convectif thermique variant en phase avec l'énergie magnétique, et suggèrent donc que des changements de la structure globale de l'étoile pourraient apporter leur contribution aux variations à long terme de l'irradiance (Chapitre 4). Dans ce chapitre, nous présentons une analyse approfondie du mécanisme physique de modulation étant à l'origine de la signature thermique rapportée dans [33]. Dans un premier temps, nous discutons des propriétés des variations de la luminosité convective en relation avec les cycles magnétiques (section 5.1). Deuxièmement, nous explorons en détail les caractéristiques de l'écoulement causant cette modulation dans le but d'identifier le mécanisme physique en question (section 5.2). Les conclusions et les résultats présentés dans cette section font partie d'un article en préparation (Cossette & al. 2014, ApJ).

5.1 Cycles magnétiques et variations de la luminosité

Cette étude élabore l'analyse de l'expérience MHD considérée dans [33]; une simulation à basse résolution ($N_\phi \times N_\theta \times N_r = 128 \times 64 \times 47$) de la zone convective solaire couvrant 1380 ans. Cette basse résolution permet d'utiliser un pas de temps assez long ($\Delta t = 30$ min.), ce qui permet d'effectuer de longues intégrations temporelles en maintenant un temps de calcul relativement bas. Le panneau du haut de la figure 5.1 montre l'évolution de la composante zonale du champ magnétique moyennée en longitude près du bas de la zone convectivement instable en fonction de la latitude et pour l'intervalle complet de la simulation. Les panneaux du milieu et du bas montrent, respectivement, une vue élargie du champ toroïdal moyen en projections

latitude vs. temps et rayon vs. temps pour l'intervalle (480, 560) ans. La simulation

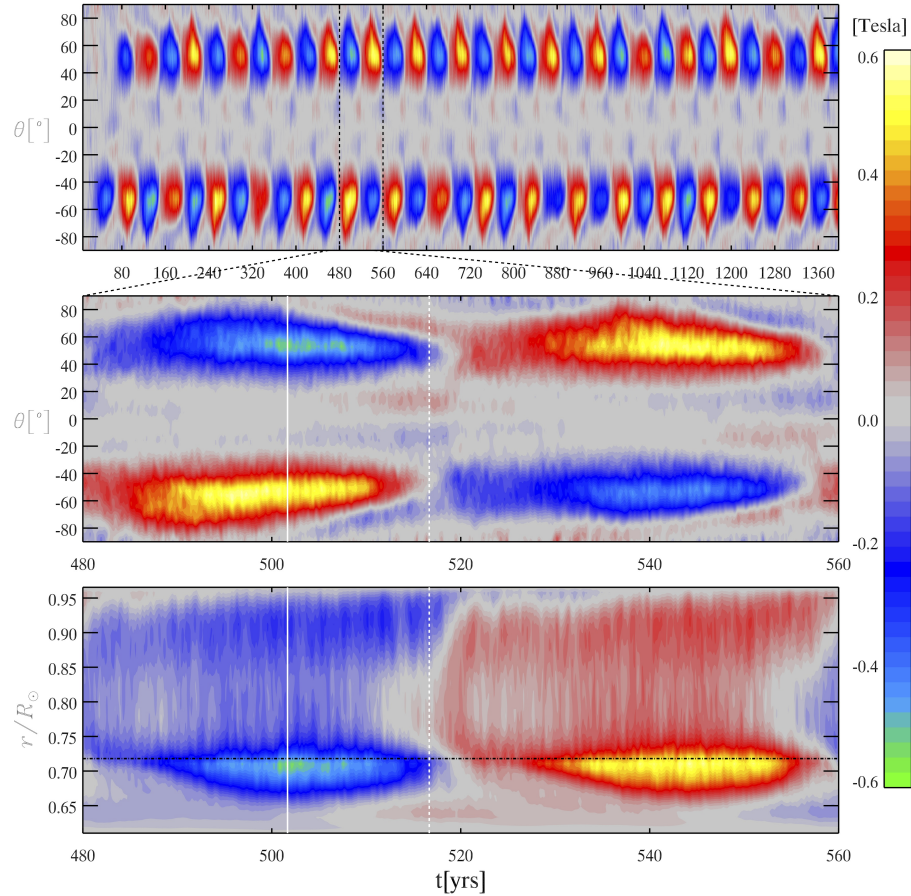


Figure 5.1. Évolution de la moyenne zonale du champ toroïdal en fonction de la latitude à la base de la zone instable (panneaux du haut et du centre) et en fonction du rayon à la latitude $\theta = 50^\circ$ (panneau du bas). L'interface coeur-enveloppe est ici représenté par la ligne noire pointillée. Les courbes blanches continues et les tirets dénotent les maximum et minimum de l'énergie magnétique totale.

produit des cycles magnétiques très similaires à ceux du Soleil, comme les simulations précédentes [7, 76, 151]. En particulier, l'intensité du champ toroïdal atteint son maximum à mi-latitude ($\approx \theta = 50^\circ$) et immédiatement sous l'interface entre la zone stable et la zone instable (voir le panneau du bas), où celui-ci s'organise en paires de bandes aux grandes échelles alignées en longitude, qui sont antisymétriques par rapport à

l'équateur et dont la polarité subit des inversions sur une période d'environ 40 ans [144]. Ces propriétés constituent des ingrédients essentiels à la dynamo de type interface, dans laquelle l'amplification et l'emmagasinement des tubes de flux magnétique à l'intérieur de la couche stable, et leur déstabilisation subséquente et remontée à la surface par effet de flottaison magnétique conduit à l'émergence de régions bipolaires en surface obéissant aux lois de polarité de Hale (voir la section 1.1). Notamment, la partie supérieure de chaque bande migre légèrement vers l'équateur au cours de chaque moitié de cycle. Cependant, celles-ci apparaissent à trop haute latitude par rapport aux régions actives observées à l'aide des magnétogrammes.

Les panneaux du haut et du bas de la figure 5.2 montrent, respectivement, les composantes zonales et radiales du champ près de la surface du modèle. Le demi-cycle

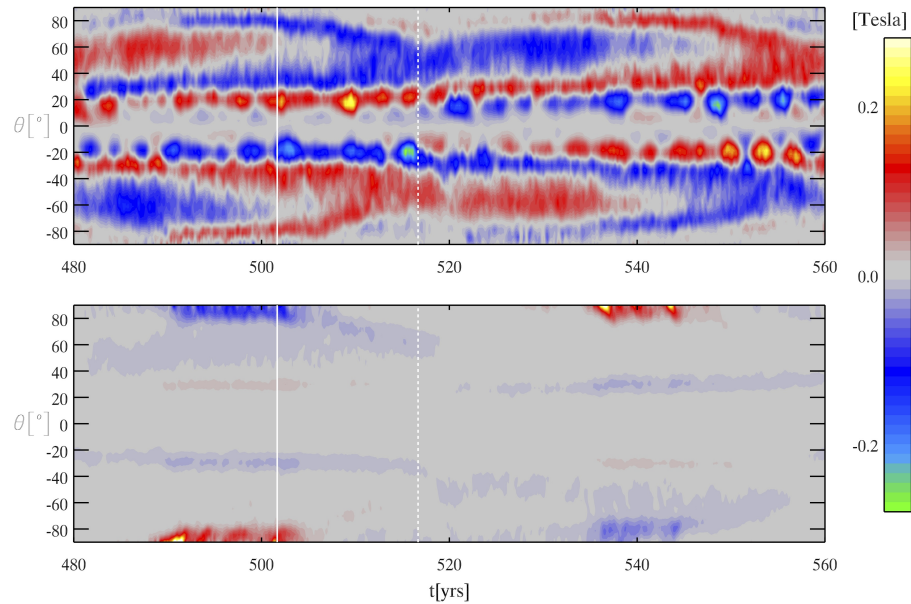


Figure 5.2. Évolution de la moyenne zonale des composantes toroïdales (haut) et radiales (bas) du champ magnétique à la surface du modèle ($r = 0.96R_{\odot}$).

de 40 ans est bien visible aux moyennes et aux hautes latitudes, tandis qu'un signal de période variant entre 3 et 5 ans est présent à basse latitude. Remarquablement,

les indicateurs d'activité géomagnétique et les fréquences héliosismiques des modes-p supportent aussi l'existence d'une double périodicité dans le vrai Soleil [10, 65, 135]. Le champ moyen radial, qui est de nature dipolaire et concentré près des pôles, change de polarité en phase avec le champ toroïdal à la base de la zone convective (cf. fig. 5.1), contrairement au champ radial à la surface du Soleil, qui est déphasé de $\pi/2$ avec le champ toroïdal profond (voir la figure 1.5).

La rotation différentielle joue un rôle crucial dans l'organisation du champ aux grandes échelles. Le panneau de gauche de la figure 5.3 montre une section du profil de la vitesse angulaire moyennée en longitude $\omega \equiv \langle u_\phi \rangle / (r \cos \theta)$ pour les latitudes pertinentes aux observations héliosismiques (ici, $|\theta| \leq 75^\circ$). La vitesse angulaire

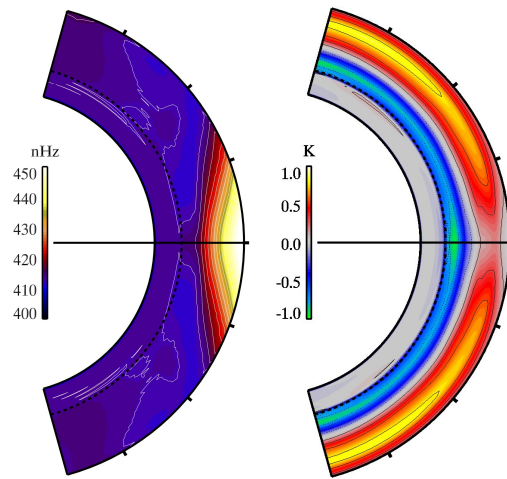


Figure 5.3. Vitesse angulaire par rapport au référentiel en rotation (à gauche) et perturbation en température moyennées en longitude (à droite).

est aussi marquée par une accélération équatoriale et un contraste fréquentiel pôle-équateur de ~ 40 nHz. Cependant, les isolignes de ω sont trop alignées avec l'axe de rotation aux basses latitudes, ce qui est typique de ce type de simulations de convection; voir [7, 90, 131, 151] et la section 1.3.1. L'interface coeur-enveloppe (dénotée par la ligne à tirets), est marquée par une transition rapide à une rotation solide,

qui peut être attribuée à l'accroissement de la subadiabaticité dans la zone stable, et à la très faible dissipation introduite par l'algorithme numérique; voir la section 3.3. L'analyse des perturbations en vitesse angulaire a également révélé la présence d'un signal d'oscillations torsionnelles bien défini et similaire en plusieurs aspects à celui du Soleil [7]. Les perturbations de la température moyennée en longitude (panneau de droite) sont positives près de la surface du modèle et diminuent de façon monotone vers la base de la couche instable où elles deviennent négatives suite à l'homogénéisation du champ de température par la convection, qui tend à produire un profil de température se rapprochant du profil adiabatique. Un contraste en température pôle-équateur existe ici aussi, qui a la forme d'un gradient latitudinal concentré dans la portion supérieure de la couche instable résultant en des pôles légèrement plus chauds que l'équateur. Notamment, des variations latitudinales de l'entropie impliquent l'existence d'un terme de forçage baroclinique dans l'équation de la vorticité, qui pourrait briser l'équilibre de Taylor-Proudman étant responsable de la forme cylindrique des profils de la vitesse angulaire; voir [130, 155] et la section 1.3.1.

En plus de ces caractéristiques très similaires à celles du Soleil, la simulation comprend également une luminosité convective thermique variant en phase avec le cycle magnétique [33]. Celle-ci résulte des corrélations entre la vitesse et la température, qui produisent un flux convectif de chaleur, aussi appelé flux d'enthalpie

$$F_e \equiv c_p \rho_o u_r \tilde{T} , \quad (5.1)$$

où u_r est la composante radiale de la vitesse et \tilde{T} est la déviation par rapport à la température moyennée sur une surface sphérique (c'est-à-dire, à une altitude constante). La figure 5.4 montre l'énergie magnétique totale (courbe noire continue) et le flux d'enthalpie intégré sur une surface sphérique à $r = 0.87R_\odot$ (ci-après, la luminosité enthalpique), avec la ligne jaune représentant sa moyenne courante sur une période de 5 ans. Ici, $\Delta L_e = (L_e - \bar{L}_e)/\bar{L}_e$ représente la déviation par rapport à la

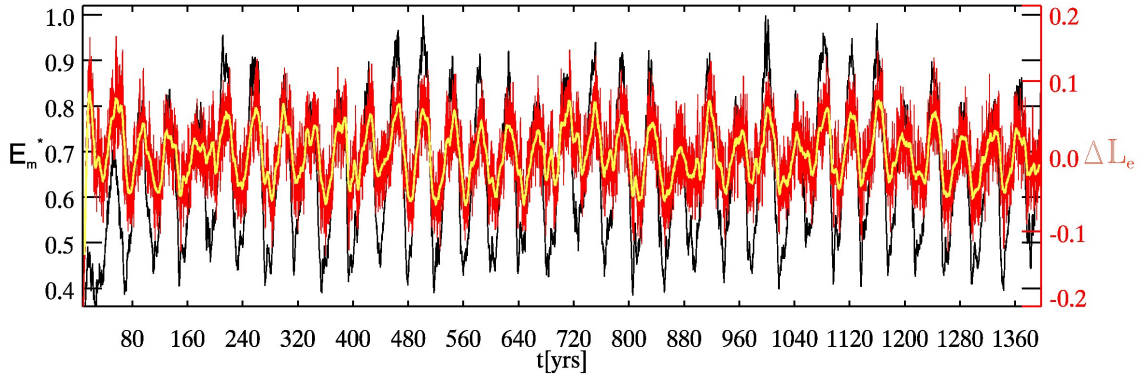


Figure 5.4. Énergie magnétique totale (courbe noire) et luminosité enthalpique à $r = 0.87R_{\odot}$ (courbe rouge), avec la courbe jaune correspondant à la moyenne courante sur 5 ans.

moyenne temporelle de la luminosité enthalpique \bar{L}_e normalisée par \bar{L}_e . L'analyse dans [33] s'est concentrée uniquement sur les variations au niveau $r = 0.87R_{\odot}$; là où l'amplitude de la modulation est de $\Delta L_e \sim 0.1$ et \bar{L}_e est environ 3% de la luminosité solaire. Cependant, la figure 5.5 montre que la modulation s'étend dans la majeure partie de la zone instable, et que son amplitude est proportionnelle à \bar{L}_e . Les triangles noirs et rouges dénotent, respectivement, la luminosité moyennée par rapport à chaque minimum et chaque maximum de l'énergie magnétique totale, et la ligne noire continue correspond au coefficient de corrélation de L_e avec l'énergie magnétique pour chaque niveau du domaine. Cette dernière est maximale dans la portion supérieure de la zone instable en-dessous du rayon $0.92R_{\odot}$, alors que plus haut les mouvements convectifs sont atténués rapidement à mesure qu'ils atteignent la surface du modèle, et fluctuent de manière erratique à des rayons plus petits que $\sim 0.82R_{\odot}$. Même si le flux d'enthalpie est près de zéro dans la zone stable, celui-ci semble être anticorrélé avec le cycle dans une petite région située tout près de l'interface avec la zone instable. Comprendre la cause des variations de la luminosité requiert l'étude des changements dans les caractéristiques de l'écoulement induits par l'activité magnétique, lesquels

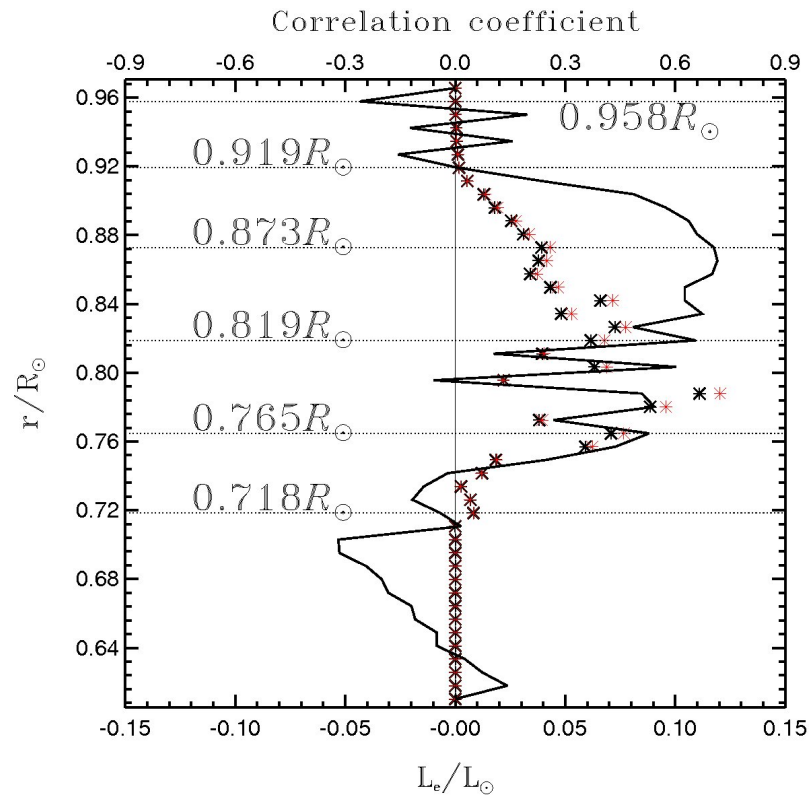


Figure 5.5. Profils de la luminosité enthalpique. Les triangles rouges et noirs dénotent la luminosité moyennée par rapport aux maxima et aux minima. La ligne solide représente le coefficient de corrélation entre la luminosité et l'énergie magnétique totale de la simulation.

doivent ultimement pointer vers le mécanisme physique de la modulation.

5.2 Caractérisation de l'écoulement

La figure 5.6 montre une vue instantanée de la composante radiale de la vitesse (rangée du haut) et de la déviation par rapport à la température moyennée sur une surface sphérique aux profondeurs $0.96R_{\odot}$, $0.92R_{\odot}$, $0.87R_{\odot}$ et $0.72R_{\odot}$ (de gauche à droite, respectivement). Près de la surface du modèle à $0.96R_{\odot}$ aux moyennes et aux hautes latitudes on observe le réseau de larges courants ascendants et de courants

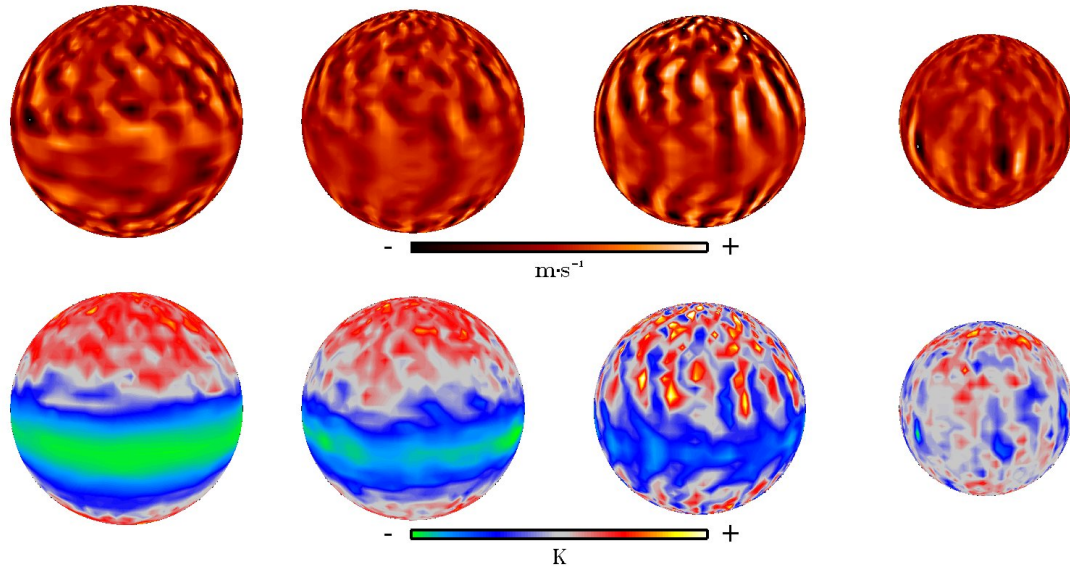


Figure 5.6. Vitesse radiale (rangée du haut) et perturbation en température par rapport à la moyenne sur une surface sphérique (rangée du bas) aux profondeurs $0.96R_{\odot}$, $0.92R_{\odot}$, $0.87R_{\odot}$ et $0.72R_{\odot}$ (de gauche à droite, respectivement).

descendants étroits, qui sont typiques de la convection dans un environnement stratifié en densité. En particulier, certains des courants les plus forts demeurent cohérents sur toute l'épaisseur de la zone convective depuis la surface en allant jusqu'à la base de la zone convective à $\sim 0.72R_{\odot}$. Les basses latitudes sont quant-à-elles dominées par un réseau de grandes cellules convectives ayant un alignement distinctif nord-sud. Ces dernières sont les fameuses 'cellules banane', qui sont confinées à une région définie par le cylindre tangent à la base de la zone convective et qui sont alignées selon l'axe de rotation (e.g. Miesch & al. 2000). La comparaison entre les rangées du haut et du bas de la figure 5.6 révèle que les forts courants ascendants sont associés au fluide chaud, tandis que les courants descendants transportent le fluide froid vers l'intérieur (voir [132] pour une discussion approfondie de la dynamique convective globale).

Le flux d'enthalpie correspondant aux courants ascendants et descendants est représenté par la carte de couleur apparaissant à la figure 5.7 pour la portion d'une

moitié de la sphère à la profondeur $0.87R_{\odot}$. La signature thermique des cellules

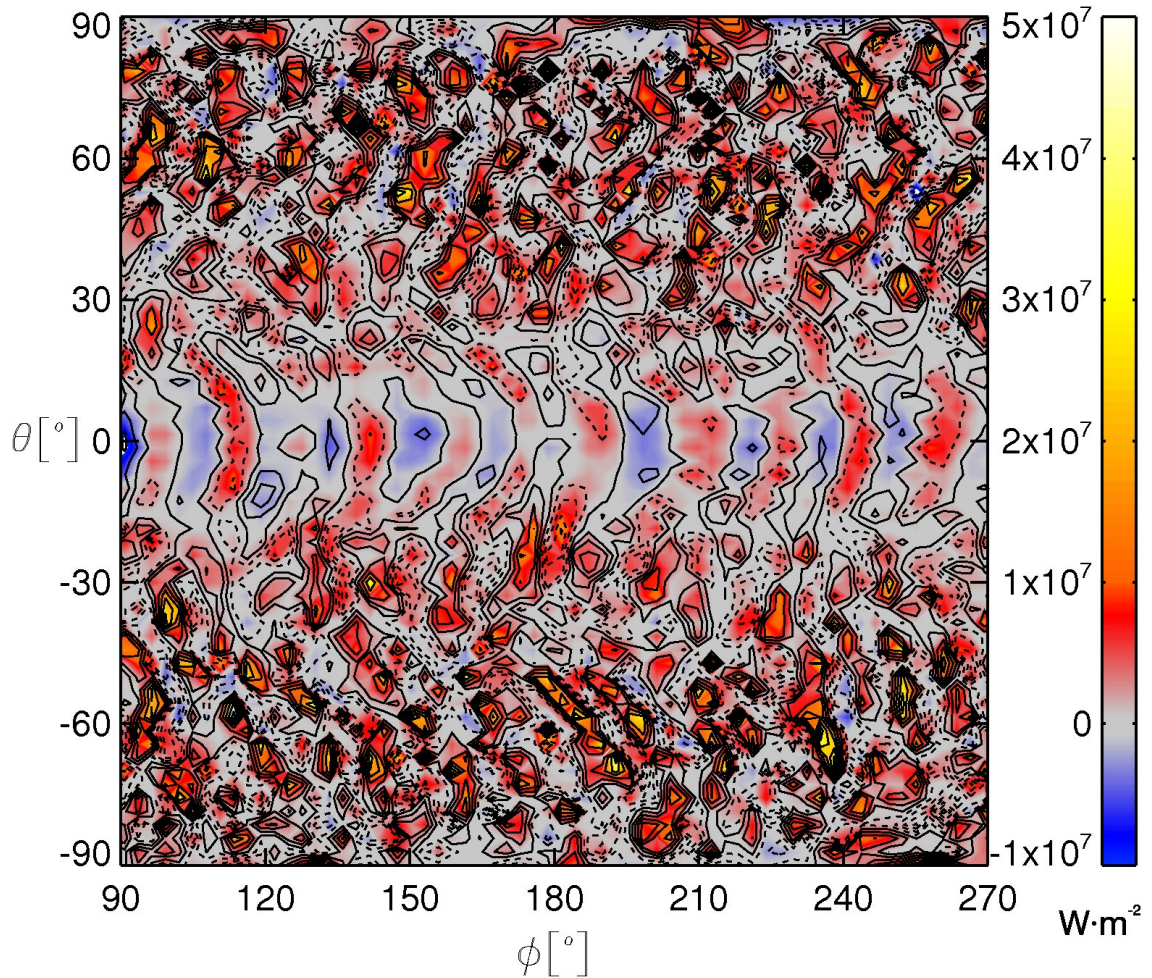


Figure 5.7. Carte de couleur du flux convectif à $r = 0.87R_{\odot}$. Les courbes continues et pointillées représentent les isolignes des vitesses radiales positives et négatives.

bananes apparaît clairement à basse latitude sous la forme de rouleaux convectifs contribuant à des flux positifs (rouge) et négatifs (bleu). Puisque les perturbations en température près de l'équateur sont plus uniformément distribuées et plus froides qu'à haute latitude (cf. fig. 5.6), les cellules bananes ne transportent que très peu de flux net vers le haut du domaine. À plus haute latitude le réseau de courants ascendants

et descendants contribue à un flux positif net, excepté pour les régions de flux négatif occupant une aire plus petite, qui sont le résultat de l'entraînement turbulent par le fluide. Notamment, les éléments de flux les plus intenses (i.e. $F_e \geq 2 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$) sont très localisés spatialement et sont presque tous associés avec des courants ascendants; tandis que le reste des éléments de flux moins intenses sont constitués autant par des courants ascendants que des courants descendants. Ces propriétés sont explicitées par la figure 5.8, qui montre les différentes corrélations entre les perturbations en température, vitesses radiales, et les flux d'enthalpie sur des surfaces sphériques situées à différentes profondeurs. Les panneaux de gauche montrent que les perturbations en température et les vitesses sont corrélées, ce qui est compatible avec le réseau de courants chauds ascendants et courants froids descendants observé à haute latitude dans la figure 5.6. Cependant, certains courants ascendants sont associés à des perturbations négatives, tandis que certains courants descendants ont des perturbations positives. Ces deux derniers correspondent au transport de la chaleur vers l'intérieur du domaine ($F_e < 0$) causé par l'entraînement turbulent, qui occupe une plus petite fraction de l'aire totale de la sphère comparé aux valeurs de flux positives. L'asymétrie entre les distributions des flux associés aux vitesses positives et négatives (panneaux du centre), résulte de la stratification en densité, et se traduit aussi par une distribution de température asymétrique (panneaux de droite).

Chaque caractéristique de l'écoulement contribue à une certaine fraction δL_e de la luminosité enthalpique L_e à une altitude donnée. La table 5.1 montre les contributions δL_e à la luminosité totale L_e de chacune des caractéristiques mentionnées au paragraphe précédent pour l'ensemble des minima et des maxima d'énergie magnétique compris dans la simulation. Les première et deuxième colonnes identifient, respectivement, le type de caractéristique et la région à laquelle elle appartient sur la sphère, qui est soit la bande équatoriale comprise entre les latitudes -20° et $+20^\circ$, ou le complément de cette région (i.e. les mi/hautes latitudes). Le type de car-

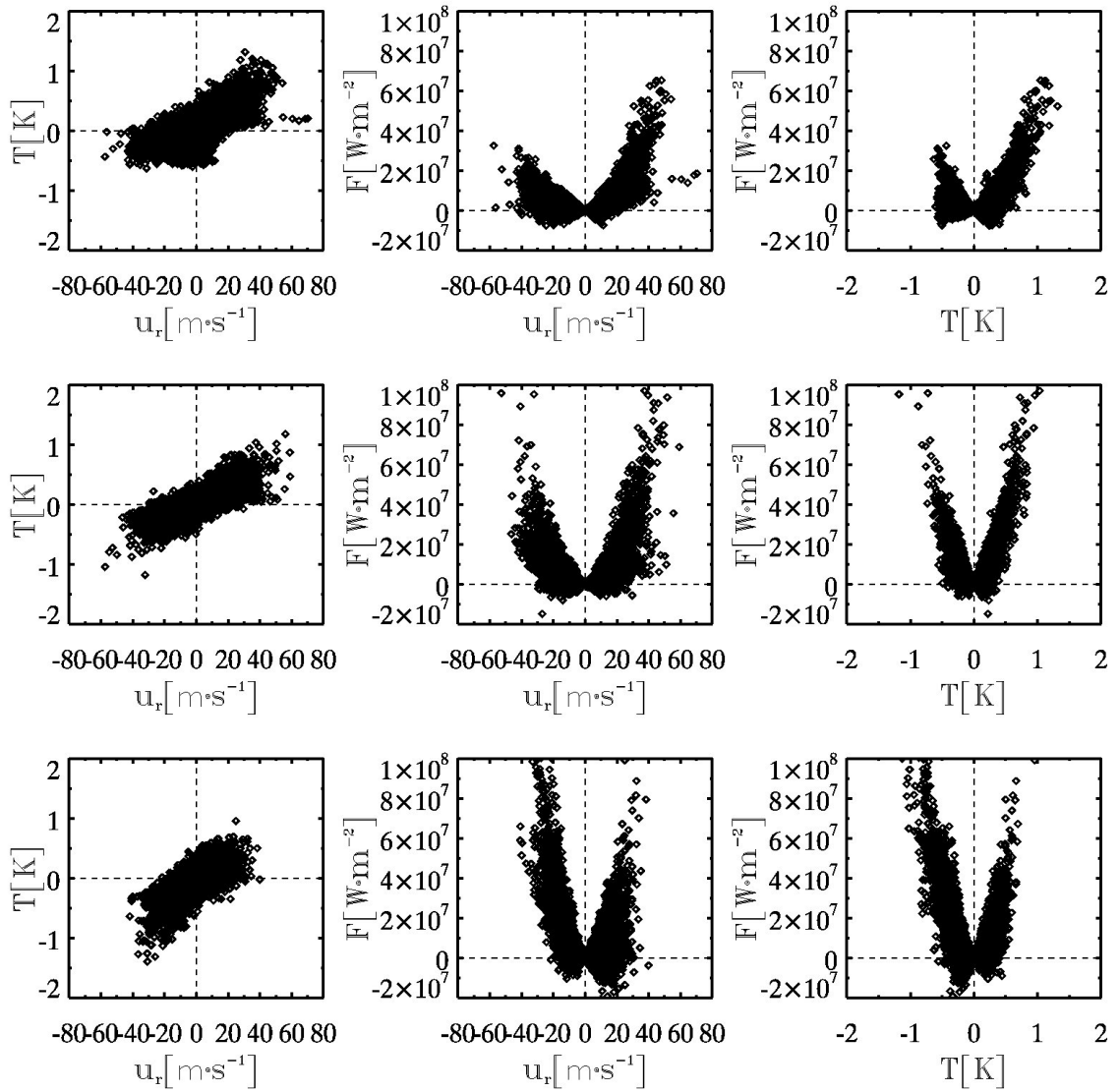


Figure 5.8. Corrélations entre les perturbations en température et la vitesse radiale (à gauche); entre le flux d'enthalpie et la vitesse radiale (au centre); entre le flux d'enthalpie et la perturbation en température (à droite) aux profondeurs $0.76R_{\odot}$ (rangée du bas), $0.82R_{\odot}$ (rangée du milieu) et $0.87R_{\odot}$ (rangée du haut).

actéristique est quant-à-lui défini par une combinaison des signes de la perturbation en température et de la vitesse radiale, tel qu'indiqué par les troisième et qua-

Caractéristique	Région	\tilde{T}	u_r	$\delta L_e(\text{min})$	$\delta L_e(\text{max})$	$\delta A(\text{min})$	$\delta A(\text{max})$
c. asc. chaud	mi/ht lat.	> 0	> 0	0.6356	0.7212	0.2934	0.2895
c. asc. froid	mi/ht lat.	< 0	> 0	-0.0024	-0.0028	0.0245	0.0245
c. des. chaud	mi/ht lat.	> 0	< 0	-0.0316	-0.0281	0.1162	0.1114
c. des. froid	mi/ht lat.	< 0	< 0	0.2284	0.2570	0.2290	0.2377
c. asc. chaud	basses lat.	> 0	> 0	0.0403	0.0303	0.0565	0.0498
c. asc. froid	basses lat.	< 0	> 0	-0.0439	-0.0431	0.1172	0.1219
c. des. chaud	basses lat.	> 0	< 0	-0.0011	-0.0009	0.0109	0.0095
c. des. froid	basses lat.	< 0	< 0	0.1231	0.1176	0.1524	0.1557
total	all	< 0	< 0	0.9483	1.0512	1.0000	1.0000

Table 5.1. Contributions de chaque type de caractéristique d'écoulement à la luminosité à $r = 0.87R_\odot$ moyennées sur l'ensemble des minima et des maxima du cycle magnétique. La première colonne indique le type de caractéristique, qui est donné par une combinaison de courant ascendant (c. asc.) ou courant descendant (c. des.) chaud ou froid, avec la deuxième colonne indiquant la région de la sphère à laquelle appartient l'élément en question, qui est soit la bande équatoriale comprise entre les latitudes -20° et $+20^\circ$ (basses lat.), ou le complément de cette région correspondant aux mi/hautes latitudes (mi/ht lat.).

trième colonnes. Les cinquième et sixième colonnes correspondent, respectivement, aux contributions associées à un type donné de caractéristique lorsque moyennées sur l'ensemble des minima ($\delta L_e(\text{min})$) et sur l'ensemble des maxima ($\delta L_e(\text{max})$) à la profondeur $r = 0.87R_\odot$. Les septième et huitième colonnes montrent la fraction moyenne de l'aire totale occupée par les éléments de flux associés. La plus grande contribution provient des courants ascendants chauds aux mi/hautes latitudes, d'où provient également la majeure partie de l'augmentation en luminosité en allant de minimum à maximum. En comparaison, les courants descendants froids contribuent trois fois moins que ces derniers au minimum du cycle. Une réduction de l'entraînement tur-

bulent est aussi présente dans les courants chauds descendants, qui pourrait être due à la suppression de la turbulence par le champ magnétique, tel que suggéré dans [33]. Cependant, les données ici recueillies montrent que cette suppression a un effet négligeable sur la modulation observée. Notamment, l'accroissement de la luminosité due aux cellules bananes aux basses latitudes est beaucoup plus petite ($\sim 0.02\bar{L}_e$) en comparaison à celui venant du réseau de cellules convectives aux mi/hautes latitudes ($\sim 0.1\bar{L}_e$).

Les images de gauche et de droite de la figure 5.9 montrent, respectivement, des vues de profil instantanées de la composante de la vorticité parallèle à l'axe de rotation et du flux d'enthalpie moyenné zonalement. Les courbes continues et les tirets dans l'image de gauche correspondent aux parties négatives et positives de la composante de la vitesse verticale (parallèle à l'axe de rotation). On observe que la vorticité s'organise en colonnes coïncidant spatialement avec les courants ascendants et descendants, lesquels sont responsables du transport de la chaleur via le flux d'enthalpie. En particulier, le fait que ces colonnes soient presque parallèles à l'axe de rotation à basse latitude explique en partie pourquoi les cellules bananes transportent peu de flux net dans la direction radiale par rapport aux cellules situées aux mi/hautes latitudes. L'image de droite montre en effet que la majeure partie du flux enthalpique est concentré à mi/haute latitude. De plus, le calcul de la différence entre les flux d'enthalpie au maxima et minima du cycle montre que l'excès de flux aux maxima est aussi concentré à haute latitude.

La figure 5.10 montre les fonctions de densité de probabilité correspondant aux flux d'enthalpie, à la perturbation en température et à la vitesse radiale à diverses hauteurs dans la couche instable. Les courbes rouges et noires représentent, respectivement, les densités de probabilité moyennes associées aux maxima et minima du cycle. La modulation de flux la plus importante prend place à l'intérieur des ailes des distributions via l'accumulation d'éléments avec $F_e > 1 - 2 \times 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ au maximum de chaque cycle (comparer avec les figures 4.1 et 4.4 du Chapitre 4). Au contraire,

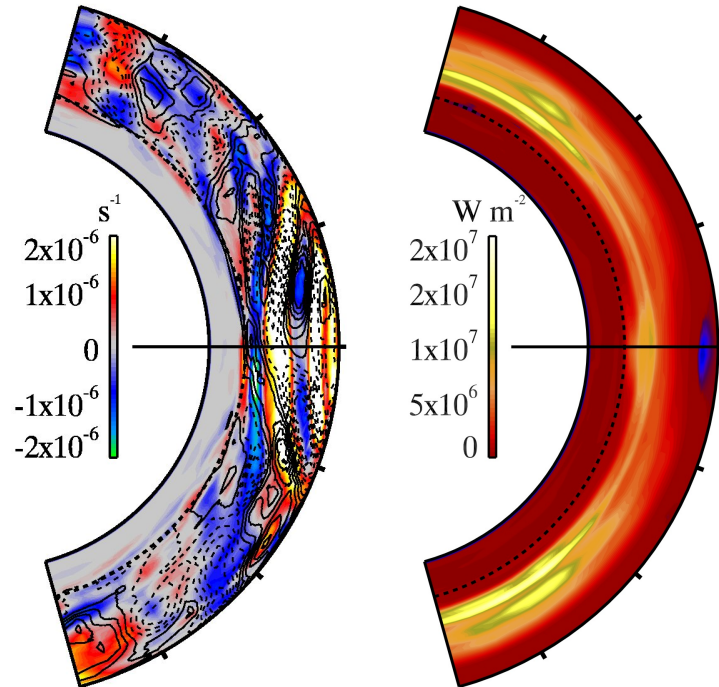


Figure 5.9. Carte de couleur de la composante de la vorticité parallèle à l'axe de rotation (à gauche) et flux d'enthalpie moyenné en longitude (à droite). Les courbes continues et les tirets dans l'image de gauche correspondent aux parties positives et négatives de la composante de la vitesse parallèle à l'axe de rotation.

les distributions des vitesses sont à toute fin pratique invariantes, à l'exception d'une réduction des populations des vitesses les plus élevées (voir en particulier les ailes des distributions à $r = 0.76R_{\odot}$ et à $r = 0.82R_{\odot}$). Par conséquent, la modulation des flux ne peut pas être due simplement à une modulation correspondante de l'écoulement induit par la force de flottaison via la force de Lorentz. Au contraire des vitesses radiales, des variations substantielles se produisent dans les distributions des perturbations en température. En particulier, à $r = 0.76R_{\odot}$ c'est le nombre de perturbations négatives ($T \lesssim -0.5\text{K}$) qui augmente au maximum du cycle, alors que le reste de la distribution demeure identique. L'effet contraire se produit à $r = 0.87R_{\odot}$, où on assiste

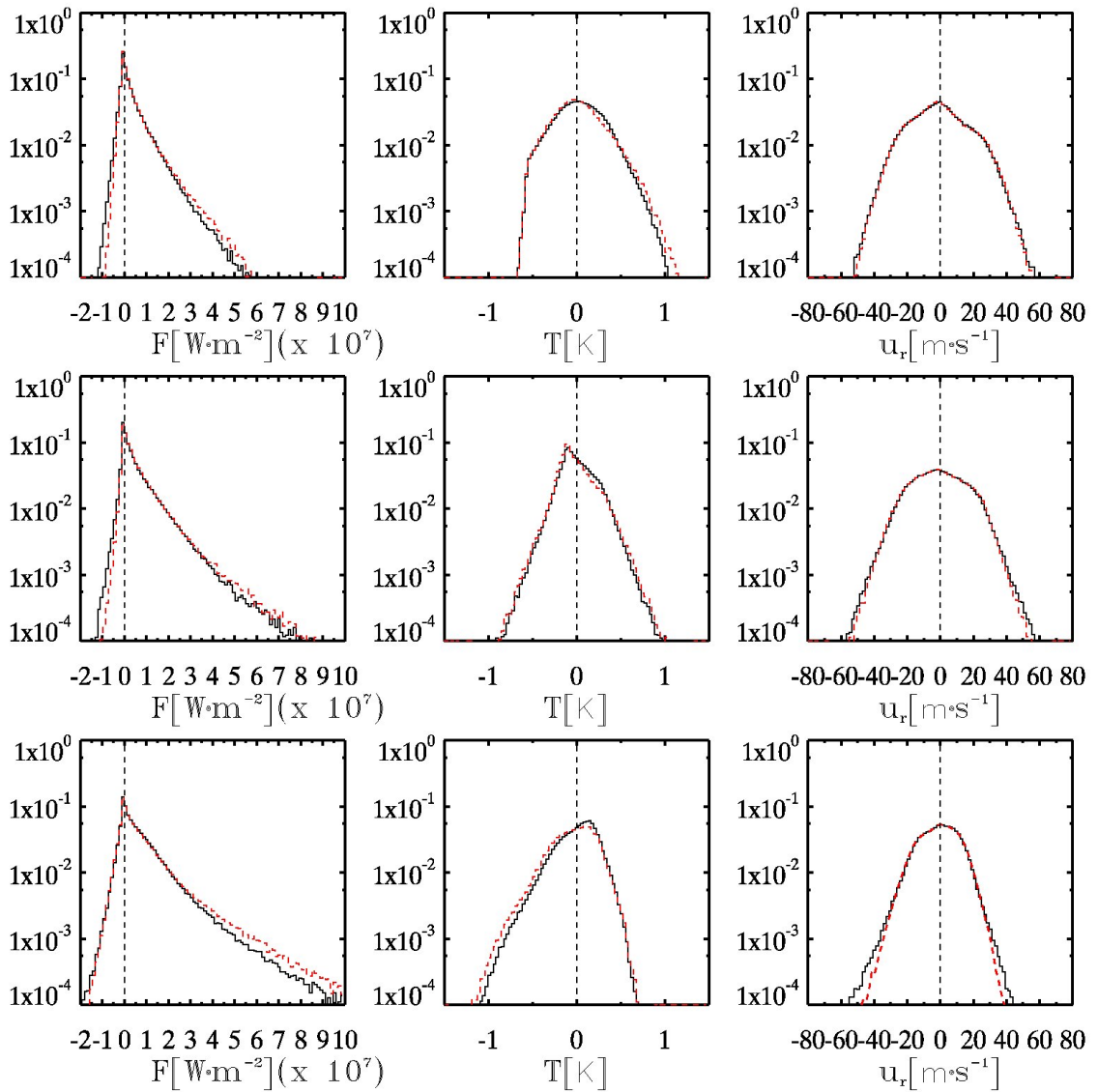


Figure 5.10. Fonctions de densité de probabilité correspondant au flux d'enthalpie (colonne de droite), à la perturbation en température (colonne du milieu) et à la vitesse radiale (colonne de gauche) aux profondeurs $0.76R_{\odot}$ (rangée du bas), $0.82R_{\odot}$ (rangée du milieu) et $0.87R_{\odot}$ (rangée du haut) moyennées par rapport à chaque minimum (courbe noire) et chaque maximum (courbe rouge).

à une augmentation significative des perturbations positives ($T \gtrsim 0.5\text{K}$), tandis qu'à $r = 0.82R_{\odot}$ les populations positives et négatives augmentent toutes les deux. Une

comparaison avec les panneaux de droite de la figure 5.8, révèle que les perturbations telles que ($|T| \gtrsim 0.5\text{K}$) sont toutes associées avec des flux $F_e > 1-2 \times 10^7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Par conséquent, la modulation du flux s'effectue via une redistribution des perturbations en température au maximum de chaque cycle, qui réchauffe/refroidit les courants ascendants/descendants les plus intenses.

Le mécanisme physique responsable de la modulation doit donc pouvoir expliquer la concentration de perturbations positives dans les courants ascendants dans la partie supérieure de la zone instable et la concentration de perturbations négatives dans les courants descendants dans la partie inférieure. Un tel mécanisme pourrait opérer de la manière suivante: en sachant que la conservation du flux magnétique en MHD idéale implique la relation suivante

$$B_1 A_1 = B_2 A_2 , \quad (5.2)$$

où A_1 et A_2 correspondent aux aires d'une surface matérielle avant et après le déplacement du fluide et B_1 et B_2 sont les champs magnétiques associés à A_1 et A_2 , respectivement (on a ici supposé des champs B_1 et B_2 uniformes à l'intérieur de chaque surface). L'intensification du flux magnétique au maximum du cycle d'activité pourrait, par exemple, mener à une réduction de l'aire occupée par les courants ascendants chauds (i.e. $u_r > 0, \tilde{T} > 0$), laquelle aurait l'effet d'augmenter la concentration en température, et par le fait même le flux d'enthalpie. On voit en effet d'après la table 5.1 que l'aire occupée par ces courants diminue au maximum du cycle, ce qui serait en faveur du mécanisme proposé ici. Cependant, une analyse plus détaillée de la morphologie de l'écoulement devra être effectuée afin de confirmer la robustesse de cette explication.

Chapitre 6

DISCUSSION ET CONCLUSION

Cette thèse s'est concentrée sur la modélisation numérique des écoulements magnétohydrodynamiques multi-échelles de la physique solaire. Les nombres de Reynolds gigantesques caractérisant le plasma du Soleil compliquent la solution aux équations MHD, de sorte que l'influence des termes nonlinéaires domine largement celle des termes dissipatifs associés à la diffusion microscopique. En raison des limitations informatiques, les simulations numériques doivent avoir recours à des diffusivités effectives explicites beaucoup plus grandes que les valeurs microscopiques caractérisant le plasma solaire. L'approche ILES a pour principe d'abandonner le traitement explicite de la dissipation pour déléguer son action aux termes de troncature du schéma numérique, permettant ainsi l'atteinte d'un régime maximalelement turbulent à résolution fixe. Seules certaines classes d'algorithmes se prêtent à l'approche ILES, comme les méthodes NFT, qui ont démontré pouvoir représenter l'effet des échelles non résolues de l'écoulement sur les échelles résolues sans l'utilisation d'un modèle sous-maille explicite. Les expériences présentées dans cette thèse ont toutes été réalisées avec le modèle EULAG, qui est basé sur des opérateurs de transport Eulérien et semi-Lagrangien NFT.

Le travail effectué dans le cadre du premier volet consistait à développer une correction aux estimés de trajectoire du schéma semi-Lagrangien pour satisfaire la forme Lagrangienne de l'équation de la conservation de la masse dans le contexte d'un fluide incompressible. Cette correction requiert la solution à une équation de Monge-Ampère à chaque pas de temps, qui est calculée au moyen d'un algorithme de type Newton-Krylov. Les résultats présentés dans les Chapitres 2 et 3 démontrent l'amélioration de la conservation de la masse due à l'application de la correction pour les cas de traceurs passifs. Celle-ci a également été appliquée

avec succès à des cas de turbulence isotrope et homogène, ainsi qu'à la formation de nappes de courant dans un scénario de magnéto-fluide relaxant vers un état d'équilibre. En particulier, les expériences de reconnexion magnétique en 2D montrent que la méthode améliore de façon spectaculaire la stabilité du schéma semi-Lagrangien classique, en éliminant la génération artificielle d'énergie magnétique et l'intersection des trajectoires des éléments de fluide. Cette avancée ouvre donc la voie à la modélisation de scénarios d'écoulements MHD auparavant inaccessibles avec l'approche semi-Lagrangienne, comme les cas de reconnexion magnétique présentés au Chapitre 3.

La deuxième partie de cette thèse concerne l'origine des mécanismes des variations de l'irradiance et la découverte de la modulation du transport thermique convectif par le cycle d'activité produit dans une simulation MHD globale de la convection solaire; une ILES à basse résolution effectuée avec le schéma Eulérien MPDATA (Chapitre 4). La corrélation positive de la luminosité avec l'énergie magnétique observée dans cette simulation supporte l'idée qu'une modulation globale de la structure thermodynamique solaire puisse contribuer aux variations de l'irradiance, et s'ajouter aux effets de surface purs résultant du couvrage surfacique par les taches, facules et réseau magnétique. Le fait que l'amplification du champ magnétique mène à l'accroissement de la luminosité et donc de l'efficacité du transport convectif au maximum du cycle est contre-intuitif, puisqu'en général on s'attend à ce que l'intensification du champ contribue à inhiber le déplacement d'un fluide conducteur d'électricité (comme pour le cas de la convection de type Rayleigh-Bénard, par exemple). Les analyses préliminaires de cette simulation ont révélé que la majeure partie de la modulation de la luminosité provient des structures de flux intenses et très localisées spatialement, qui correspondent aux forts courants ascendants appartenant au réseau de cellules convectives concentré aux moyennes et aux hautes latitudes (voir le Chapitre 5). L'absence de modulation significative de la composante radiale de la vitesse témoigne également de la complexité du mécanisme physique responsable de la variation de la

luminosité, qui n'est pas simplement une modulation de l'écoulement propulsé par la force de flottaison. La nature du mécanisme en question semble plutôt reposer sur une redistribution des perturbations en température par l'écoulement au maximum du cycle, de telle sorte que la quantité de chaleur nette transportée par le réseau de courants ascendants/descendants aux moyennes et hautes latitudes se trouve augmentée. Des analyses présentement en cours doivent identifier l'aspect de la force de Lorentz menant à cette redistribution et éventuellement mettre en évidence le processus physique via lequel la modulation s'effectue. Les résultats de ces travaux feront l'objet d'un article en préparation (Cossette & al. 2014, ApJ), qui est basé sur les résultats préliminaires inclus dans le Chapitre 5.

Les méthodes NFT Eulériennes et semi-Lagrangiennes font d'EULAG-MHD un outil unique pour la modélisation des écoulements MHD multi-échelles où les effets nonlinéaires dominent la dissipation. La production de cycles magnétiques similaires en plusieurs aspects à celui du Soleil rend désormais possible l'exploration des mécanismes de modulation structuraux de l'irradiance sur les échelles de temps décadales et multi-décadales. Les travaux futurs pourront tester la robustesse des solutions cycliques en variant la résolution de la maille numérique et en explorant l'espace des paramètres de forçage de la luminosité en ayant pour but ultime la prédiction de potentielles signatures observationnelles résultant de la modulation du flux convectif. En particulier, l'expérience SPHERIS, qui doit étudier les variations des propriétés globales telles le rayon et l'asphéricité avec un degré de précision sans précédent, permettra de mieux contraindre les modèles.

Il sera également intéressant d'étudier l'impact des algorithmes MPDATA et du schéma semi-Lagrangien amélioré avec la correction de Monge-Ampère dans le contexte d'expériences réalistes de reconnexion magnétique dans la couronne, dans le but d'approfondir notre connaissance des mécanismes de chauffage et de production des éruptions et des éjections de masse.

RÉFÉRENCES

- [1] K. I. Abdusamatov. Bicentennial decrease of the solar constant leads to the Earth's unbalanced heat budget and deep climate cooling. *Kinematics and Physics of Celestial Bodies*, 28:62–68, Avril 2012.
- [2] H. M. Antia. Does the Sun Shrink with Increasing Magnetic Activity? *Astrophys. J.*, 590:567–572, Juin 2003.
- [3] M. Aschwanden. *Physics of the solar corona: An introduction with Problems and Solutions*. Springer, 2009.
- [4] W. T. Ball, Y. C. Unruh, N. A. Krivova, S. Solanki, T. Wenzler, D. J. Mortlock, et A. H. Jaffe. Reconstruction of total solar irradiance 1974-2009. *Astron. Astrophys.*, 541:A27, Mai 2012.
- [5] P. R. Bannon. On the Anelastic Approximation for a Compressible Atmosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, 53:3618–3628, Decembre 1996.
- [6] D. Basu. Radius of the Sun in relation to solar activity. *Solar Phys.*, 183:291–294, Decembre 1998.
- [7] P. Beaudoin, P. Charbonneau, E. Racine, et P. K. Smolarkiewicz. Torsional Oscillations in a Global Solar Dynamo. *Solar Phys.*, 282:335–360, Février 2013.
- [8] J.-D. Benamou, B. D. Froese, et A. M. Oberman. Two numerical methods for the elliptic Monge-Ampère equation. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 44:737–758, 2010.

- [9] J.-D. Benamou, B. D. Froese, et A. M. Oberman. Numerical solution of the Optimal Transportation problem using the Monge-Ampère equation. *Journal of Computational Physics*, 260:107–126, Mars 2014.
- [10] E. E. Benevolenskaya. Double Magnetic Cycle of Solar Activity. *Solar Phys.*, 161:1–8, Octobre 1995.
- [11] A. Bhatnagar, K. Jain, et S. C. Tripathy. GONG p-Mode Frequency Changes with Solar Activity. 521:885–888, Août 1999.
- [12] R. Bhattacharyya, B. C. Low, et P. K. Smolarkiewicz. On spontaneous formation of current sheets: Untwisted magnetic fields. *Physics of Plasmas*, 17:112901, 2010.
- [13] C. P. Boyer et P. Winternitz. Symmetries of the self-dual Einstein equations. I. The infinite-dimensional symmetry group and its low-dimensional subgroups. *Journal of Mathematical Physics*, 30:1081–1094, Mai 1989.
- [14] A. Brandenburg. Magnetic field evolution in simulations with Euler potentials. 401:347–354, Janvier 2010.
- [15] Y. Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 44:375–417, 1991.
- [16] B. P. Brown, M. K. Browning, A. S. Brun, M. S. Miesch, et J. Toomre. Persistent Magnetic Wreaths in a Rapidly Rotating Sun. *Astrophys. J.*, 711:424–438, Mars 2010.
- [17] B. P. Brown, M. S. Miesch, M. K. Browning, A. S. Brun, et J. Toomre. Magnetic Cycles in a Convective Dynamo Simulation of a Young Solar-type Star. *Astrophys. J.*, 731:69, Avril 2011.

- [18] P. N Brown et Y. S. Saad. Hybrid Krylov methods for nonlinear systems of equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 11:450–481, 1990.
- [19] T. M. Brown et J. Christensen-Dalsgaard. Accurate Determination of the Solar Photospheric Radius. *Astrophys. J. Lett.*, 500:L195–L198, Juin 1998.
- [20] M. K. Browning, M. S. Miesch, A. S. Brun, et J. Toomre. Dynamo Action in the Solar Convection Zone and Tachocline: Pumping and Organization of Toroidal Fields. *Astrophys. J. Lett.*, 648:L157–L160, Septembre 2006.
- [21] A. S. Brun, M. S. Miesch, et J. Toomre. Global-Scale Turbulent Convection and Magnetic Dynamo Action in the Solar Envelope. *Astrophys. J.*, 614:1073–1098, Octobre 2004.
- [22] A. S. Brun, M. S. Miesch, et J. Toomre. Modeling the Dynamical Coupling of Solar Convection with the Radiative Interior. *Astrophys. J.*, 742:79, Decembre 2011.
- [23] A. S. Brun et J. Toomre. Turbulent Convection under the Influence of Rotation: Sustaining a Strong Differential Rotation. *Astrophys. J.*, 570:865–885, Mai 2002.
- [24] C. J. Budd, M. J. P. Cullen, et E. J. Walsh. Monge-Ampère based moving mesh methods for numerical weather prediction, with applications to the Eady problem. *Journal of Computational Physics*, 236:247–270, Mars 2013.
- [25] C. J. Budd et J. F. William. Moving mesh generation using the parabolic Monge-Ampère equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 31:3438–3465, 2009.

- [26] B. Caccin, V. Penza, et M. T. Gomez. Spectral line ratios as T_{eff} indicators in solar-like stars. *Astron. Astrophys.*, 386:286–295, Avril 2002.
- [27] P. Charbonneau. Dynamo Models of the Solar Cycle. *Living Reviews in Solar Physics*, 7:3, Septembre 2010.
- [28] P. Charbonneau. Where is the solar dynamo? *Journal of Physics Conference Series*, 440(1):012014, Juin 2013.
- [29] A. J. Chorin et J. E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics; 3rd. ed.* Springer-Verlag, 1993.
- [30] E. R. Chorin et T. Forbes. *Magnetic reconnection: MHD theory and applications; 3rd. ed.* Cambridge University Press, 2000.
- [31] J. N. Clelland et T. A. Ivey. Parametric Bäcklund transformations I : Phenomenology. *Transactions of the American Mathematical Society*, 357:1061–1093, 2004.
- [32] T. C. Clune, J. R. Elliott, M. S. Miesch, J. Toomre, et G. A. Glatzmaier. Computational aspects of a code to study rotating turbulent convection in spherical shells. *Astrophys. J.*, 25:361–380, 1999.
- [33] J.-F. Cossette, P. Charbonneau, et P. K. Smolarkiewicz. Cyclic Thermal Signature in a Global MHD Simulation of Solar Convection. *Astrophys. J. Lett.*, 777:L29, Novembre 2013.
- [34] J. F. Cossette et P. K. Smolarkiewicz. A Monge-Ampère enhancement for semi-Lagrangian methods. *Computers and Fluids*, 46:180–185, 2011.

- [35] J.-F. Cossette, P. K. Smolarkiewicz, et P. Charbonneau. The Monge-Ampère trajectory correction for semi-Lagrangian schemes. *Journal of Computational Physics*, 274:208–229, Octobre 2014.
- [36] R. Courant et D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Vol. 2*. Wiley-VCH, 1962.
- [37] J. P. Cox et R. T. Guili. *Principles of Stellar Structure*. Gordon & Breach, 1968.
- [38] A. D. Crouch, P. Charbonneau, G. Beaubien, et D. Paquin-Ricard. A Model for the Total Solar Irradiance Based on Active Region Decay. *Astrophys. J.*, 677:723–741, Avril 2008.
- [39] W. P. Crowley. Numerical Advection EXPERIMENTS1. *Monthly Weather Review*, 96:1, 1968.
- [40] M. J. P. Cullen, R. J. Douglas, I. Roulstone, et M. J. Sewell. Generalized semi-geostrophic theory on a sphere. *Journal of Fluid Mechanics*, 531:123–157, Mai 2005.
- [41] M. J. P. Cullen, J. Norbury, et R. J. Purser. Generalised Lagrangian solutions for atmospheric and oceanic flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 51:20–31, 1991.
- [42] R. B. Dahlburg et G. Einaudi. MHD unstable modes in the 3D evolution of 2D MHD structures and the diminished role of coalescence instabilities. *Physics Letters A*, 294:101–107, Février 2002.
- [43] R. B. Dahlburg, J. A. Klimchuk, et S. K. Antiochos. An Explanation for the

- “Switch-On” Nature of Magnetic Energy Release and Its Application to Coronal Heating. *Astrophys. J.*, 622:1191–1201, Avril 2005.
- [44] R. B. Dahlburg, J. A. Klimchuk, et S. K. Antiochos. An Explanation for the “Switch-On” Nature of Magnetic Energy Release and Its Application to Coronal Heating. *Astrophys. J.*, 622:1191–1201, Avril 2005.
- [45] R. B. Dahlburg, J.-H. Liu, J. A. Klimchuk, et G. Nigro. Explosive Instability and Coronal Heating. *Astrophys. J.*, 704:1059–1064, Octobre 2009.
- [46] P. A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2001.
- [47] P.A. Davidson. *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, 2004.
- [48] G. L. Delzanno, L. Chacón, J. M. Finn, Y. Chung, et G. Lapenta. An optimal robust equidistribution method for two-dimensional grid adaptation based on Monge Kantorovich optimization. *Journal of Computational Physics*, 227:9841–9864, Decembre 2008.
- [49] J. A. Domaradzki, Z. Xiao, et P. K. Smolarkiewicz. Effective eddy viscosities in implicit large eddy simulations of turbulent flows. *Physics of Fluids*, 15:3890–3893, Decembre 2003.
- [50] D. G. Dritschel et Á. Viúdez. A balanced approach to modelling rotating stably stratified geophysical flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 488:123–150, Août 2003.
- [51] C. Dubé et P. Charbonneau. Stellar Dynamos and Cycles from Numerical Simulations of Convection. *Astrophys. J.*, 775:69, Septembre 2013.

- [52] T. Dubois, F. Jauberteau, R. M. Temam, et J. Tribbia. Multilevel schemes for the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 207:660–694, Août 2005.
- [53] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, et S. P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications, Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. Springer, 1992.
- [54] T. L. Duvall, Jr. et L. Gizon. Time-Distance Helioseismology with f Modes as a Method for Measurement of Near-Surface Flows. *Solar Phys.*, 192:177–191, Mars 2000.
- [55] J. A. Eddy et A. A. Boornazian. Secular Decrease in the Solar Diameter, 1863-1953. Dans *Bulletin of the American Astronomical Society*, volume 11 de *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 437, Mars 1979.
- [56] A. Egidi, B. Caccin, S. Sofia, W. Heaps, W. Hoegy, et L. Twigg. High-Precision Measurements of the Solar Diameter and Oblateness by the Solar Disk Sextant (SDS) Experiment. *Solar Phys.*, 235:407–418, Mai 2006.
- [57] S. C. Eisenstat, H. C. Elman, et M. H. Schultz. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20:345–357, 1983.
- [58] J. R. Elliott, M. S. Miesch, et J. Toomre. Turbulent Solar Convection and Its Coupling with Rotation: The Effect of Prandtl Number and Thermal Boundary Conditions on the Resulting Differential Rotation. *Astrophys. J.*, 533:546–556, Avril 2000.
- [59] M. Emilio, J. R. Kuhn, R. I. Bush, et P. Scherrer. On the Constancy of the Solar Diameter. *Astrophys. J.*, 543:1007–1010, Novembre 2000.

- [60] M. Falcone et R. Ferreti. Convergence analysis for a class of high-order semi-Lagrangian advection schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35:909–940, 1998.
- [61] Y. Fan et F. Fang. A Simulation of Convective Dynamo in the Solar Convective Envelope: Maintenance of the Solar-Like Differential Rotation and Emerging Flux. *Astrophys. J.*, 789, Juillet 2014.
- [62] E. V. Ferapontov et Y. Nutku. On the Monge-Ampere equivalent of the sine-Gordon equation. *Journal of Physics A Mathematical General*, 27:7831–7834, Decembre 1994.
- [63] V. C. A. Ferraro et C. Plumpton. *An introduction to magneto-fluid mechanics*. Clarendon P., 1966.
- [64] J. Finn, G. L. Delzanno, B. Nadiga, et R. Chartrand. Conference Proceedings; Monge-Kantorovich Optimal Transport: Theory and Applications, Santa Fe, New Mexico, 2009.
- [65] S. T. Fletcher, A.-M. Broomhall, D. Salabert, S. Basu, W. J. Chaplin, Y. Elsworth, R. A. Garcia, et R. New. A Seismic Signature of a Second Dynamo? *Astrophys. J. Lett.*, 718:L19–L22, Juillet 2010.
- [66] P. Foukal, C. Fröhlich, H. Spruit, et T. M. L. Wigley. Variations in solar luminosity and their effect on the Earth’s climate. *Nature*, 443:161–166, Septembre 2006.
- [67] P. Foukal et J. Lean. The influence of faculae on total solar irradiance and luminosity. *Astrophys. J.*, 302:826–835, Mars 1986.

- [68] P. Foukal et J. Lean. Magnetic modulation of solar luminosity by photospheric activity. *Astrophys. J.*, 328:347–357, Mai 1988.
- [69] P. Foukal, A. Ortiz, et R. Schnerr. Dimming of the 17th Century Sun. *Astrophys. J. Lett.*, 733:L38, Juin 2011.
- [70] P. V. Foukal. The pressure and energy balance of the cool corona over sunspots. *Astrophys. J.*, 210:575–581, Decembre 1976.
- [71] P. V. Foukal. *Solar Astrophysics; 2th. ed.* Wiley-VCH, 2004.
- [72] B. D. Froese et A. M. Oberman. Fast finite difference solvers for singular solutions of the elliptic Monge-Ampère equation. *Journal of Computational Physics*, 230:818–834, Février 2011.
- [73] C. Fröhlich. Total Solar Irradiance: What Have We Learned from the Last Three Cycles and the Recent Minimum? *Space Sci. Rev.*, 176:237–252, Juin 2013.
- [74] C. Fröhlich et J. Lean. Solar radiative output and its variability: evidence and mechanisms. *Astron. Astrophys. Rev.*, 12:273–320, Decembre 2004.
- [75] X. Garbet, Y. Idomura, L. Villard, et T. H. Watanabe. Gyrokinetic simulations of turbulent transport. *Nuclear Fusion*, 50:43002, 2010.
- [76] M. Ghizaru, P. Charbonneau, et P. K. Smolarkiewicz. Magnetic Cycles in Global Large-eddy Simulations of Solar Convection. *Astrophys. J. Lett.*, 715:L133–L137, Juin 2010.
- [77] R. L. Gilliland. Solar radius variations over the past 265 years. *Astrophys. J.*, 248:1144–1155, Septembre 1981.

- [78] R. L. Gilliland. Theoretical interpretation of the variability of global solar properties. *Advances in Space Research*, 8:151–155, 1988.
- [79] P. A. Gilman. Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. II - Dynamos with cycles and strong feedbacks. *Astrophys. J. Suppl. Series*, 53:243–268, Octobre 1983.
- [80] P. A. Gilman et G. A. Glatzmaier. Compressible convection in a rotating spherical shell. I - Anelastic equations. II - A linear anelastic model. III - Analytic model for compressible vorticity waves. *Astrophys. J. Suppl. Series*, 45:335–388, Février 1981.
- [81] P. A. Gilman et J. Miller. Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in a rotating spherical shell. *Astrophys. J. Suppl. Series*, 46:211–238, Juin 1981.
- [82] G. A. Glatzmaier. Numerical simulations of stellar convective dynamos. I - The model and method. *Journal of Computational Physics*, 55:461–484, Septembre 1984.
- [83] G. A. Glatzmaier. Numerical simulations of stellar convective dynamos. II - Field propagation in the convection zone. *Astrophys. J.*, 291:300–307, Avril 1985.
- [84] J. P. Goedbloed et S. Poedts. *Principles of magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [85] J. M. Golub, G. H. Ortega. *Scientific computing and differential equations: an introduction to numerical methods*. Academic Press, 1992.

- [86] M. Gordovskyy, P. K. Browning, E. P. Kontar, et N. H. Bian. Particle acceleration and transport in reconnecting twisted loops in a stratified atmosphere. *Astron. Astrophys.*, 561:A72, Janvier 2014.
- [87] W. W. Grabowski et P. K. Smolarkiewicz. A Multiscale Anelastic Model for Meteorological Research. *Monthly Weather Review*, 130:939, 2002.
- [88] D. F. Gray et W. C. Livingston. Monitoring the Solar Temperature: Empirical Calibration of the Temperature Sensitivity of C I λ 5380. *Astrophys. J.*, 474:798–801, Janvier 1997.
- [89] D. F. Gray et W. C. Livingston. Monitoring the Solar Temperature: Spectroscopic Temperature Variations of the Sun. *Astrophys. J.*, 474:802–809, Janvier 1997.
- [90] G. Guerrero, P. K. Smolarkiewicz, A. G. Kosovichev, et N. N. Mansour. Differential Rotation in Solar-like Stars from Global Simulations. *Astrophys. J.*, 779:176, Decembre 2013.
- [91] C. E. Gutiérrez. *The Monge-Ampère Equation*. Birkhäuser, 2001.
- [92] S. Haker, L. Zhu, A. Tannenbaum, et S. Angenent. Optimal mass transport for registration and warping. *International Journal of Computer Vision*, 60:225–240, 2004.
- [93] G. E. Hale. On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots. *Astrophys. J.*, 28:315, Novembre 1908.
- [94] G. E. Hale. The Law of Sun-Spot Polarity. *Proceedings of the National Academy of Science*, 10:53–55, Janvier 1924.

- [95] Y. Hanaoka, J. Nakazawa, O. Ohgoe, Y. Sakai, et K. Shiota. Coronal Mass Ejections Observed at the Total Solar Eclipse on 13 November 2012. *Solar Phys.*, 289:2587–2599, Juillet 2014.
- [96] J. W. Harder, J. M. Fontenla, P. P. Pilewskie, Richard E. C., et T. N. Wood. Trends in solar spectral irradiance in the visible and infrared. *Geophys. Res. Lett.*, 36, 2009.
- [97] R. Howe. Solar Interior Rotation and its Variation. *Living Reviews in Solar Physics*, 6:1, Février 2009.
- [98] D. V. Hoyt. The Smithsonian Astrophysical Observatory solar constant program. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 17:427–458, 1979.
- [99] Å. M. Janse, B. C. Low, et E. N. Parker. Topological complexity and tangential discontinuity in magnetic fields. *Physics of Plasmas*, 17:92901, 2010.
- [100] P. J. Käpylä, M. J. Korpi, A. Brandenburg, D. Mitra, et R. Tavakol. Convective dynamos in spherical wedge geometry. *Astronomische Nachrichten*, 331:73, Janvier 2010.
- [101] P. J. Käpylä, M. J. Mantere, et A. Brandenburg. Cyclic Magnetic Activity due to Turbulent Convection in Spherical Wedge Geometry. *Astrophys. J. Lett.*, 755:L22, Août 2012.
- [102] C. T. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. SIAM, 1995.
- [103] P. A. Kidwell. Prelude to solar energy: Pouillet, Hershel, Forbes and the solar constant. *Annals of Science*, 38:457–476, 1981.
- [104] L. L. Kitchatinov et G. Ruediger. Differential rotation in solar-type stars: revisiting the Taylor-number puzzle. *Astron. Astrophys.*, 299:446, Juillet 1995.

- [105] B. Kliem, Y. N. Su, A. A. van Ballegoijen, et E. E. DeLuca. Magnetohydrodynamic Modeling of the Solar Eruption on 2010 April 8. *Astrophys. J.*, 779:129, Decembre 2013.
- [106] D. A. Knoll et D. E. Keyes. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193:357–397, Janvier 2004.
- [107] G. K. Kopp et J. Lean. A new, lower value of total solar irradiance. *Geophys. Res. Lett.*, 38, 2011.
- [108] R. H. Kraichnan et D. Montgomery. Two-dimensional turbulence. *Reports on Progress in Physics*, 43:547–619, Mai 1980.
- [109] N. A. Krivova, S. K. Solanki, M. Fligge, et Y. C. Unruh. Reconstruction of solar irradiance variations in cycle 23: Is solar surface magnetism the cause? *Astron. Astrophys.*, 399:L1–L4, Février 2003.
- [110] J. R. Kuhn. Irradiance and solar cycle variability: clues in cycle phase properties. *Advances in Space Research*, 34:302–307, Janvier 2004.
- [111] J. R. Kuhn, R. I. Bush, M. Emilio, et P. H. Scherrer. On the Constancy of the Solar Diameter. II. *Astrophys. J.*, 613:1241–1252, Octobre 2004.
- [112] J. R. Kuhn, R. I. Bush, P. Scherrer, et X. Scheick. The sun’s shape and brightness. *Nature*, 392:155, Mars 1998.
- [113] J. R. Kuhn, L. Floyd, C. Fröhlich, et J. M. Pap. Using Precise Solar Limb Shape Measurements to Study the Solar Cycle. *Space Sci. Rev.*, 94:169–176, Novembre 2000.

- [114] F. Laclare, C. Delmas, J. P. Coin, et A. Irbah. Measurements and Variations of the Solar Diameter. *Solar Phys.*, 166:211–229, Juillet 1996.
- [115] H. Lamb. *Hydrodynamics: 6th Edition*. Dover, 1945.
- [116] L. H. Li et S. Sofia. Measurements of Solar Irradiance and Effective Temperature as a Probe of Solar Interior Magnetic Fields. *Astrophys. J.*, 549:1204–1211, Mars 2001.
- [117] K. G. Libbrecht et M. F. Woodard. Solar-cycle effects on solar oscillation frequencies. *Nature*, 345:779–782, Juin 1990.
- [118] M. G. Linton, G. H. Fisher, R. B. Dahlburg, et Y. Fan. Relationship of the Multimode Kink Instability to δ -Spot Formation. *Astrophys. J.*, 522:1190–1205, Septembre 1999.
- [119] F. B. Lipps et R. S. Hemler. A Scale Analysis of Deep Moist Convection and Some Related Numerical Calculations. *Journal of Atmospheric Sciences*, 39:2192–2210, Octobre 1982.
- [120] W. Livingston et L. Wallace. The Sun’s immutable basal quiet atmosphere. *Solar Phys.*, 212:227–237, Février 2003.
- [121] G. Loeper et F. Rapetti. Numerical solution of the Monge-Ampère equation by a Newton’s algorithm. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematic*, 17:319–324, 2005.
- [122] B. C. Low. Magnetic Helicity in a Two-Flux Partitioning of an Ideal Hydro-magnetic Fluid. *Astrophys. J.*, 646:1288–1302, Août 2006.

- [123] S. Maeyama, A. Ishizawa, T.-H. Watanabe, N. Nakajima, S. Tsuji-Iio, et H. Tsutsui. A hybrid method of semi-Lagrangian and additive semi-implicit Runge-Kutta schemes for gyrokinetic Vlasov simulations. *Computer Physics Communications*, 183:1986–1992, Septembre 2012.
- [124] L. G. Margolin, W. J. Rider, et F. F. Grinstein. Modeling turbulent flow with implicit LES. *Journal of Turbulence*, 7:15, Janvier 2006.
- [125] L. G. Margolin, P. K. Smolarkiewicz, et Z. Sorbjan. Large-eddy simulations of convective boundary layers using nonoscillatory differencing. *Physica D Non-linear Phenomena*, 133:390–397, 1999.
- [126] S. K. Mathew, S. K. Solanki, A. Lagg, M. Collados, J. M. Borrero, et S. Berdyugina. Thermal-magnetic relation in a sunspot and a map of its Wilson depression. *Astron. Astrophys.*, 422:693–701, Août 2004.
- [127] R. J. McCann. Polar factorization of maps on Riemannian manifolds. *Geometric and Functional Analysis*, 11:589–608, 2001.
- [128] M. S. Miesch. Large-Scale Dynamics of the Convection Zone and Tachocline. *Living Reviews in Solar Physics*, 2:1, Avril 2005.
- [129] M. S. Miesch, A. S. Brun, M. L. De Rosa, et J. Toomre. Structure and Evolution of Giant Cells in Global Models of Solar Convection. *Astrophys. J.*, 673:557–575, Janvier 2008.
- [130] M. S. Miesch, A. S. Brun, et J. Toomre. Solar Differential Rotation Influenced by Latitudinal Entropy Variations in the Tachocline. *Astrophys. J.*, 641:618–625, Avril 2006.

- [131] M. S. Miesch, J. R. Elliott, J. Toomre, T. L. Clune, G. A. Glatzmaier, et P. A. Gilman. Three-dimensional Spherical Simulations of Solar Convection. I. Differential Rotation and Pattern Evolution Achieved with Laminar and Turbulent States. *Astrophys. J.*, 532:593–615, Mars 2000.
- [132] M. S. Miesch et J. Toomre. Turbulence, Magnetism, and Shear in Stellar Interiors. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41:317–345, Janvier 2009.
- [133] H. K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *Journal of Fluid Mechanics*, 35:117–129, 1969.
- [134] G. Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, pages 666–704, 1781.
- [135] K. Mursula, B. Zieger, et J. H. Vilppola. Mid-term quasi-periodicities in geomagnetic activity during the last 15 solar cycles: Connection to solar dynamo strength To the memory of Karolen I. Paularena (1957-2001). *Solar Phys.*, 212:201–207, Janvier 2003.
- [136] N. J. Nelson, B. P. Brown, A. S. Brun, M. S. Miesch, et J. Toomre. Magnetic Wreaths and Cycles in Convective Dynamos. *Astrophys. J.*, 762:73, Janvier 2013.
- [137] F. Noel. Variations of the apparent solar semidiameter observed with the astrolabe of Santiago. *Astron. Astrophys.*, 325:825–827, Septembre 1997.
- [138] J. M. Ottino. *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos, and Transport*. Dover, 1945.
- [139] E. N. Parker. Hydromagnetic Dynamo Models. *Astrophys. J.*, 122:293, Septembre 1955.

- [140] E. N. Parker. Magnetic Neutral Sheets in Evolving Fields - Part Two - Formation of the Solar Corona. *Astrophys. J.*, 264:642, Janvier 1983.
- [141] E. N. Parker. Nanoflares and the solar X-ray corona. *Astrophys. J.*, 330:474–479, Juillet 1988.
- [142] E. N. Parker. *Spontaneous current sheets in magnetic fields: with applications to stellar X-rays*. Oxford University Press, 1994.
- [143] J. H. Parkinson, L. V. Morrison, et F. R. Stephenson. The constancy of the solar diameter over the past 250 years. *Nature*, 288:548–551, Decembre 1980.
- [144] D. Passos et P. Charbonneau. Characteristics of magnetic solar-like cycles in a 3D MHD simulation of solar convection (submitted). *Astronomy and Astrophysics*, 2012.
- [145] V. Penza, B. Caccin, et D. Del Moro. The sensitivity of the C I 538.0 nm Fe I 537.9 nm and Ti II 538.1 nm lines to solar active regions. *Astron. Astrophys.*, 427:345–351, Novembre 2004.
- [146] A. V. Pogorelov. *Monge-Ampère equations of elliptic type, Translated from the first Russian edition by F. Leo Boron with the assistance of Albert L. Rabenstein, C. Richard, and P. Bollinger*. Noordhoff Ltd., 1964.
- [147] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge, 2000.
- [148] P. L. Pritchett et C. C. Wu. Coalescence of magnetic islands. *Physics of Fluids*, 22:2140–2146, Novembre 1979.
- [149] J. M. Prusa et P. K. Smolarkiewicz. An all-scale anelastic model for geophysical flows: dynamic grid deformation. *Journal of Computational Physics*, 190:601–622, Septembre 2003.

- [150] J. M. Prusa, P. K. Smolarkiewicz, et A. A. Wyszogrodzki. EULAG, a computational model for multiscale flows. *Computers and Fluids*, 37:1193–1207, 2008.
- [151] É. Racine, P. Charbonneau, M. Ghizaru, A. Bouchat, et P. K. Smolarkiewicz. On the Mode of Dynamo Action in a Global Large-eddy Simulation of Solar Convection. *Astrophys. J.*, 735:46, Juillet 2011.
- [152] A. F. Rappazzo, M. Velli, G. Einaudi, et R. B. Dahlburg. Nonlinear Dynamics of the Parker Scenario for Coronal Heating. *Astrophys. J.*, 677:1348–1366, Avril 2008.
- [153] M. P. Rast, A. Ortiz, et R. W. Meisner. Latitudinal Variation of the Solar Photospheric Intensity. *Astrophys. J.*, 673:1209–1217, Février 2008.
- [154] M. Rempel. Solar Differential Rotation and Meridional Flow: The Role of a Subadiabatic Tachocline for the Taylor-Proudman Balance. *Astrophys. J.*, 622:1320–1332, Avril 2005.
- [155] M. Rempel. Solar Differential Rotation and Meridional Flow: The Role of a Subadiabatic Tachocline for the Taylor-Proudman Balance. *Astrophys. J.*, 622:1320–1332, Avril 2005.
- [156] J. P. René Laprise et A. Plante. A Class of Semi-Lagrangian Integrated-Mass (SLM) Numerical Transport Algorithms. *Monthly Weather Review*, 123:553, 1995.
- [157] E. Ribes, J. C. Ribes, et R. Bartholot. Evidence for a larger sun with a slower rotation during the seventeenth century. *Nature*, 326:52–55, Mars 1987.

- [158] C. Schär et P. K. Smolarkiewicz. A Synchronous and Iterative Flux-Correction Formalism for Coupled Transport Equations. *Journal of Computational Physics*, 128:101–120, Octobre 1996.
- [159] B. Schmieder, P. Démoulin, et G. Aulanier. Solar filament eruptions and their physical role in triggering coronal mass ejections. *Advances in Space Research*, 51:1967–1980, Juin 2013.
- [160] J. Schou, A. G. Kosovichev, P. R. Goode, et W. A. Dziembowski. Determination of the Sun’s Seismic Radius from the SOHO Michelson Doppler Imager. *Astrophys. J. Lett.*, 489:L197, Novembre 1997.
- [161] J. Schrijver et L. Siscoe. *Heliophysics: Evolving Solar Activity and the Climates of Space and Earth*. Cambridge, 2010.
- [162] J. Schumacher et B. Kliem. Coalescence of magnetic islands including anomalous resistivity. *Physics of Plasmas*, 4:3533–3543, Octobre 1997.
- [163] P. K. Smolarkiewicz. On forward-in-time differencing for fluids. *Monthly Weather Review*, 119:2505–2510, Octobre 1991.
- [164] P. K. Smolarkiewicz. Multidimensional positive definite advection transport algorithm: an overview. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 50:1123–1144, Avril 2006.
- [165] P. K. Smolarkiewicz et P. Charbonneau. EULAG, a computational model for multiscale flows: An MHD extension. *Journal of Computational Physics*, 236:608–623, Mars 2013.
- [166] P. K. Smolarkiewicz et G. A. Grell. A Class of Monotone Interpolation Schemes. *Journal of Computational Physics*, 101:431–440, Août 1992.

- [167] P. K. Smolarkiewicz, L. G. Margolin, et A. A. Wyszogrodzki. A Class of Nonhydrostatic Global Models. *Journal of Atmospheric Sciences*, 58:349–364, Février 2001.
- [168] P. K. Smolarkiewicz et J. M. Prusa. VLES modelling of geophysical fluids with nonoscillatory forward-in-time schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39:799–819, Juillet 2002.
- [169] P. K. Smolarkiewicz et J. A. Pudykiewicz. A class of semi-Lagrangian approximations for fluids. *Journal of Atmospheric Sciences*, 49:2082–2096, Novembre 1992.
- [170] P.K. Smolarkiewicz et J. Prusa. *Forward-in-time differencing for fluids: simulation of geophysical turbulence*. In D. Drikakis and B. Guertz (Eds.), *Turbulent flow computation*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [171] S. Sofia et L. H. Li. Mechanisms for global solar variability. *Mem. Societa Astronomica Italiana*, 76:768, 2005.
- [172] S. K. Solanki et N. A. Krivova. Solar Irradiance Variations: From Current Measurements to Long-Term Estimates. *Solar Phys.*, 224:197–208, Octobre 2004.
- [173] H. Spruit. Theory of solar irradiance variations. *Space Sci. Rev.*, 94:113–126, Novembre 2000.
- [174] H. C. Spruit. Origin of the torsional oscillation pattern of solar rotation. *Solar Phys.*, 213:1–21, Mars 2003.
- [175] A. Staniforth et J. Côté. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models A Review. *Monthly Weather Review*, 119:2206, 1991.

- [176] A. Staniforth, J. Côté, et J. Pudykiewicz. Comments on “Swolarkiewicz’s Deformational Flow”. *Monthly Weather Review*, 115:894, 1987.
- [177] A. Staniforth et N. Wood. Aspects of the dynamical core of a nonhydrostatic, deep-atmosphere, unified weather and climate-prediction model. *Journal of Computational Physics*, 227:3445–3464, Mars 2008.
- [178] J. Strain. Semi-Lagrangian Methods for Level Set Equations. *Journal of Computational Physics*, 151:498–533, Mai 1999.
- [179] M. Sulman, J. F. Williams, et R. D. Russell. Optimal mass transport for higher dimensional adaptive grid generation. *Journal of Computational Physics*, 230:3302–3330, Mai 2011.
- [180] K. F. Tapping, D. Boteler, P. Charbonneau, A. Crouch, A. Manson, et H. Paquette. Solar Magnetic Activity and Total Irradiance Since the Maunder Minimum. *Solar Phys.*, 246:309–326, Decembre 2007.
- [181] S. J. Thomas, J. P. Hacker, P. K. Smolarkiewicz, et R. B. Stull. Spectral Preconditioners for Nonhydrostatic Atmospheric Models. *Monthly Weather Review*, 131:2464, 2003.
- [182] L. G. Thompson, E. Mosley-Thompson, W. Dansgaard, et P. M. Grootes. The Little Ice Age as Recorded in the Stratigraphy of the Tropical Quelccaya Ice Cap. *Science*, 234:361–364, Octobre 1986.
- [183] G. Thuillier, S. Sofia, et M. Haberreiter. Past, present and future measurements of the solar diameter. *Advances in Space Research*, 35:329–340, 2005.
- [184] M. Toulmonde. The diameter of the Sun over the past three centuries. *Astron. Astrophys.*, 325:1174–1178, Septembre 1997.

- [185] C. J. Tremback, J. Powell, W. R. Cotton, et R. A. Pielke. The Forward in-Time Upstream Advection Scheme: Extension to Higher Orders. *Monthly Weather Review*, 115:540, 1987.
- [186] N.S. Trudinger et X.-J. Wang. On the second boundary value problem for Monge-Ampère type equations and optimal transportation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 8:143–174, 2008.
- [187] C. T. Truesdell. *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*. Gordon & Breach, 1966.
- [188] S. Turcotte, J. Richer, G. Michaud, C. A. Iglesias, et F. J. Rogers. Consistent Solar Evolution Model Including Diffusion and Radiative Acceleration Effects. *Astrophys. J.*, 504:539–558, Septembre 1998.
- [189] M. Ugai. Propagation of plasmoids generated by fast reconnection in the geomagnetic tail. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 99:47–52, Juillet 2013.
- [190] R. K. Ulrich et L. Bertello. Solar-cycle dependence of the Sun’s apparent radius in the neutral iron spectral line at 525 nm. *Nature*, 377:214–215, Septembre 1995.
- [191] J. Urbas. On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 115–124, 1997.
- [192] I. G. Usoskin. A History of Solar Activity over Millennia. *Living Reviews in Solar Physics*, 10:1, Mars 2013.

- [193] J. F. Valdés-Galicia et V. M. Velasco. Variations of mid-term periodicities in solar activity physical phenomena. *Advances in Space Research*, 41:297–305, 2008.
- [194] Z. Wang, J. Yang, et F. Stern. A simple and conservative operator-splitting semi-Lagrangian volume-of-fluid advection scheme. *Journal of Computational Physics*, 231:4981–4992, Juin 2012.
- [195] A. Warn-Varnas, J. Hawkins, P. K. Smolarkiewicz, S. A. Chin-Bing, D. King, et Z. Hallock. Solitary wave effects north of Strait of Messina. *Ocean Modelling*, 18:97–121, 2007.
- [196] O. R. White et W. C. Livingston. Solar luminosity variation. III - Calcium K variation from solar minimum to maximum in cycle 21. *Astrophys. J.*, 249:798–816, Octobre 1981.
- [197] M. F. Woodard. Frequencies of low-degree solar acoustic oscillations and the phase of the solar cycle. *Solar Phys.*, 114:21–28, 1987.
- [198] M. F. Woodard et K. G. Libbrecht. Spatial and temporal variations in the solar brightness. *Solar Phys.*, 212:51–64, Janvier 2003.
- [199] D. Xiu et G. E. Karniadakis. A Semi-Lagrangian High-Order Method for Navier-Stokes Equations. *Journal of Computational Physics*, 172:658–684, Septembre 2001.
- [200] X. Yuan, S. C. Jardin, et D. E. Keyes. Numerical simulation of four-field extended magnetohydrodynamics in dynamically adaptive curvilinear coordinates via Newton-Krylov-Schwarz. *Journal of Computational Physics*, 231:5822–5853, Juillet 2012.

- [201] M. Zerroukat et T. Allen. A three-dimensional monotone and conservative semi-Lagrangian scheme (SLICE-3D) for transport problems. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 138:1640–1651, Juillet 2012.
- [202] V. Zheligovsky, O. Podvigina, et U. Frisch. The Monge-Ampère equation: Various forms and numerical solution. *Journal of Computational Physics*, 229:5043–5061, Juillet 2010.

Annexe A

ÉQUATION D'ÉNERGIE INTERNE

L'équation pour l'évolution de l'énergie interne dans sa forme standard utilisant l'entropie est donnée par

$$\rho T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla S \right) = \nabla \cdot \left(\kappa_r \rho c_p \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \rho T \nabla S \right), \quad (\text{A.1})$$

où κ_r regroupe les diffusivités thermiques associées à la radiation et à la conduction et κ dénote la diffusivité turbulente (en m^2s^{-1}) [32]. En utilisant la relation entre l'entropie spécifique et la température potentielle $dS = c_p d \ln \Theta$ on obtient

$$c_p \frac{\rho T}{\Theta} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta \right) = \nabla \cdot \left(\kappa_r c_p \rho \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\kappa c_p \frac{\rho T}{\Theta} \nabla \Theta \right). \quad (\text{A.2})$$

La forme anélastique s'obtient en faisant l'expansion de chaque variable thermodynamique en une série de puissance autour d'un état de référence et en supposant que les déviations par rapport à cet état demeurent suffisamment petites [5, 32, 119], ce qui permet d'écrire (A.2) sous la forme

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\Theta_o}{\rho_o T_o} \left[\nabla \cdot \left(\kappa_r \rho_o \nabla T \right) + \nabla \cdot \left(\kappa \frac{\rho_o T_o}{\Theta_o} \nabla \Theta \right) \right]. \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

ÉTAT AMBIANT

Dans le but d'illustrer le concept d'état ambiant on utilise des coordonnées cartésiennes (x, y, z) , avec $z \equiv r - r_b$ la hauteur mesurée à partir de la base r_b du domaine physique et r le rayon, ce qui permet d'éviter les complications résultant des facteurs métriques propres à la géométrie sphérique. De plus, on utilise des conditions aux frontières périodiques dans les deux directions horizontales en analogie avec les simulations globales effectuées dans une coquille sphérique; voir la section 1.3.1. On considère l'opérateur de moyenne spatio-temporelle suivant

$$\langle \Psi \rangle \equiv \frac{1}{XYT} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \int_0^X \int_0^Y \Psi \, dx \, dy \, d\tau, \quad (\text{B.1})$$

qui agit sur la variable $\Psi(x, y, z)$ définie dans le domaine cartésien $[0, X] \times [0, Y] \times [0, Z]$. Ici, T correspond à un temps à la fois beaucoup plus long que les périodes caractéristiques associées à l'activité solaire et beaucoup plus petit que le temps caractéristique correspondant aux changements structuraux résultant du brûlage thermonucléaire (e.g. le temps de Kelvin-Helmholtz pour le Soleil $T_{\text{KH}} \sim 10^7$ années). Nous faisons ici l'hypothèse que $\langle \Psi \rangle$ est une solution stationnaire (i.e. $\partial \langle \Psi \rangle / \partial t = 0$), et qu'elle correspond elle-même à une solution particulière du système d'équations générique.

Pour obtenir l'équation gouvernant l'évolution des perturbations d'entropie (1.4), on écrit d'abord (A.3) sous forme conservative en utilisant (1.6)

$$\frac{\partial \rho_o \Theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u} \Theta) = \frac{\Theta_o}{T_o} \left[\nabla \cdot (\kappa_r \rho_o \nabla \Theta \frac{T_o}{\Theta_o}) + \nabla \cdot (\kappa \frac{\rho_o T_o}{\Theta_o} \nabla \Theta) \right]. \quad (\text{B.2})$$

En appliquant (B.1) à (B.2), la dérivée partielle par rapport au temps dans la dérivée Lagrangienne disparaît et on obtient l'expression

$$\frac{d}{dz} \rho_o \langle u_z \Theta \rangle = \frac{\Theta_o}{T_o} \left[\frac{d}{dz} \left(\kappa_r \rho_o \frac{d T_o}{dz} \frac{\langle \Theta \rangle}{\Theta_o} \right) + \frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{\rho_o T_o}{\Theta_o} \frac{d \langle \Theta \rangle}{dz} \right) \right], \quad (\text{B.3})$$

où u_z est la composante verticale de la vitesse. En exprimant u_z et Θ en fonction de leur moyennes $\langle \dots \rangle$ et perturbations $\check{\dots}$ associées

$$\begin{aligned}\Theta &= \langle \Theta \rangle + \check{\Theta} , \\ u_z &= \langle u_z \rangle + \check{u}_z ,\end{aligned}\tag{B.4}$$

on peut récrire le terme advectif au côté gauche de (B.3) sous la forme

$$\frac{d}{dz} \rho_o \langle u_z \Theta \rangle = \frac{d}{dz} \rho_o \left(\langle u_z \rangle \langle \Theta \rangle + \langle \check{u}_z \check{\Theta} \rangle \right) .\tag{B.5}$$

En appliquant (B.1) à l'équation de conservation de la masse dans l'approximation anélastique (1.6) on trouve $\langle u_z \rangle = 0$ et en divisant (B.3) par la densité on a

$$0 = \frac{\Theta_o}{\rho_o T_o} \left[\frac{d}{dz} \left(\kappa_r \rho_o \frac{d}{dz} \frac{T_o}{\Theta_o} \Theta_e \right) + \frac{d}{dz} \left(\kappa \frac{\rho_o T_o}{\Theta_o} \frac{d}{dz} \Theta_e \right) \right] + \mathcal{H}^* ,\tag{B.6}$$

où $\Theta_e \equiv \langle \Theta \rangle$ est la température potentielle définissant l'état ambiant et $\mathcal{H}^* \equiv -d/dr(\rho_o \langle \check{u}_z \check{\Theta} \rangle)$. La dernière égalité exprime l'état stationnaire en équilibre thermodynamique global auquel correspond à l'état ambiant, qui est la condition de compatibilité (1.10) recherchée pour l'équation gouvernant les perturbations d'entropie (1.4). Cette dernière s'obtient d'abord en posant $\Theta \equiv \Theta_e + \Theta'$ puis en soustrayant (B.6) de (B.2), d'où on a

$$\frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta' = -\mathbf{u} \cdot \nabla \Theta_e + \mathcal{H}(\Theta') + \mathcal{H}^* ,\tag{B.7}$$

où on a supposé une diffusivité turbulente nulle ($\kappa = 0$) et $\mathcal{H}(\Theta')$ est donné par (1.8). En général, le terme \mathcal{H}^* ne peut pas être calculé explicitement puisque Θ n'est pas connue a priori. Dans les expériences de convection MHD globales présentées aux Chapitres 4 et 5, son action est modélisée au moyen d'un terme de relaxation Newtonienne $-\alpha \Theta'$, qui force la solution vers l'état ambiant sur une échelle de temps $\tau_\alpha = \alpha^{-1}$ beaucoup plus grande que le temps de retournement caractéristique τ_t des cellules convectives (e.g. $\tau_t \sim 20$ jours à la base de la zone convective).

L'état ambiant est approximé par un ensemble de polytropes obéissant la loi des gaz parfaits et satisfaisant l'équilibre hydrostatique

$$p = K\rho^{1+\frac{1}{m}}, \quad (\text{B.8})$$

$$p = \rho RT, \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g, \quad (\text{B.10})$$

où m est l'indice polytropique, $R = k/(\mu m_H) = nR^*$, μ est le poids moléculaire moyen, n est le nombre de moles par unité de masse, $R^* = 8.314472 \text{ J} \cdot \text{mole} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et $g = g_b(r_b/r)^2$ est l'accélération gravitationnelle. En substituant (B.8) et (B.9) dans (B.10) on obtient la relation

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{g}{(1+m)R}, \quad (\text{B.11})$$

Finalement, en intégrant (B.11) de r à $r + \Delta r$ tout en supposant un m constant on arrive aux expressions suivantes pour les température, densité, et pression

$$T_{r+\Delta r} = T_r \left[1 - \frac{r}{(m+1)H_r} \left(1 - \frac{r}{r+\Delta r} \right) \right], \quad (\text{B.12})$$

$$\rho_{r+\Delta r} = \rho_r \left[1 - \frac{r}{(m+1)H_r} \left(1 - \frac{r}{r+\Delta r} \right) \right]^m, \quad (\text{B.13})$$

$$p_{r+\Delta r} = p_r \left[1 - \frac{r}{(m+1)H_r} \left(1 - \frac{r}{r+\Delta r} \right) \right]^{m+1}, \quad (\text{B.14})$$

où $H_r \equiv p_r/(\rho_r g_r) = RT_r/g_r$ est la hauteur de colonne en pression. Les expressions (B.12)-(B.14) peuvent être résolues récursivement pour donner les profils ambiants $T_e(r)$, $p_e(r)$ and $\rho_e(r)$ pour des conditions initiales spécifiées à un rayon arbitraire $r = r_b$, tandis que la température potentielle est obtenue via sa définition

$$\Theta_e \equiv T_e \left(\frac{p_b}{p_e} \right)^{R/c_p}, \quad (\text{B.15})$$

Selon le critère de Schwarzschild pour la stabilité convective, une situation dans laquelle $d\Theta_e/dr > 0$ implique la stabilité, tandis que $d\Theta_e/dr < 0$ correspond au cas convectivement instable. Par conséquent, l'index m est utilisé pour prescrire, respectivement,

des stratifications convectivement stables et instables dans les régions correspondant à l'intérieur radiatif ($r \leq r_i$) et à la zone convective ($r > r_i$), où $r_i = 0.718R_\odot$ dénote la position de l'interface coeur-enveloppe et $r_b = 0.61R_\odot$ correspond à la base de la zone stable. Dans la zone stable, m décroît linéairement jusqu'à $r = r_i$

$$m(r) = m_b - (m_b - m_{\text{ad}}) \frac{r - r_b}{r_i - r_b}. \quad (\text{B.16})$$

Les transitions de la stratification subadiabatique à superadiabatique à l'interface coeur-enveloppe et de superadiabatique à subadiabatique près de la surface sont modélisées en utilisant une combinaison de fonctions hyperboliques

$$m(r) = m_{\text{ad}} + \frac{1}{2}(m_{\text{ad}} - m_{\text{cv}}) \left(\tanh \left[\varphi - \frac{r - r_i}{\delta} \right] + \tanh \left[\frac{r - r_t}{\delta} + \varphi \right] \right), \quad (\text{B.17})$$

où $m_{\text{cv}} < m_{\text{ad}}$, et δ et φ sont des paramètres contrôlant la largeur de la transition. Pour un gaz parfait monoatomique avec trois degrés de liberté $\gamma = 5/3$ et $m_{\text{ad}} = 3/2$. La figure B.1 montre Θ_e et le profil de l'indice polytropique résultant des choix $m_b = 2.6$ et $m_{\text{cv}} = 1.4999945$ correspondant à une forte sous-adiabaticité pour la zone stable et un profil légèrement superadiabatique pour la zone instable.

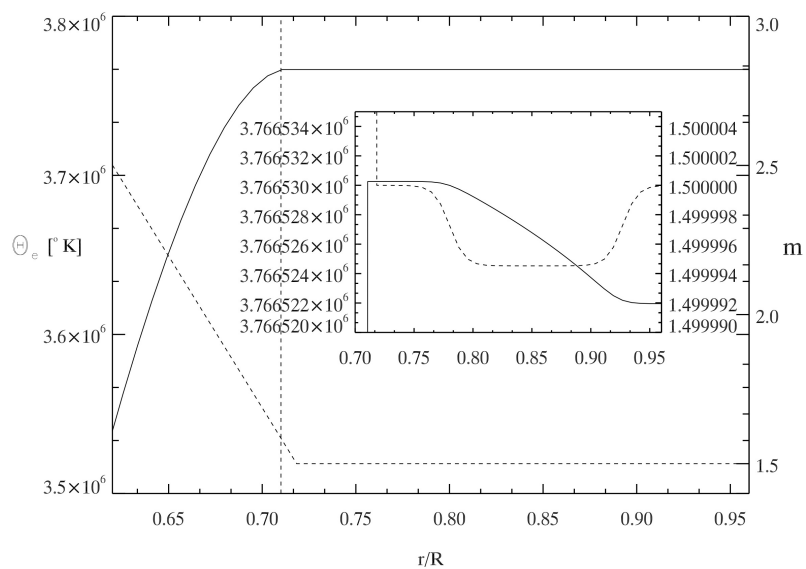


Figure B.1. Profils de la température potentielle (ligne continue) et de l'indice polytropic (tirets) associés à l'état ambiant, avec la ligne verticale à tirets indiquant la position de l'interface coeur-enveloppe. Le graphique inséré montre une vue rapprochée de chaque profil à l'intérieur de la zone instable.