Université de Montréal

Les actions de groupes en géométrie symplectique et l'application moment

par

Jordan Payette

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en Mathématiques

novembre 2014

Université de Montréal
Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

Les actions de groupes en géométrie symplectique et l'application moment

présenté par

Jordan Payette

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin
(président-rapporteur)

François Lalonde
(directeur de recherche)

Frédéric Rochon
(membre du jury)

Mémoire accepté le :
27 novembre 2014

SOMMAIRE

Ce mémoire porte sur quelques notions appropriées d'actions de groupe sur les variétés symplectiques, à savoir en ordre décroissant de généralité : les actions symplectiques, les actions faiblement hamiltoniennes et les actions hamiltoniennes. Une connaissance des actions de groupes et de la géométrie symplectique étant prérequise, deux chapitres sont consacrés à des présentations élémentaires de ces sujets. Le cas des actions hamiltoniennes est étudié en détail au quatrième chapitre : l'importante application moment y est définie et plusieurs résultats concernant les orbites de la représentation coadjointe $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathfrak{g}^*$, tels que les théorèmes de Kirillov et de Kostant-Souriau, y sont démontrés. Le dernier chapitre se concentre sur les actions hamiltoniennes des tores, l'objectif étant de démontrer le théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg. Une discussion d'un théorème de classification de Delzant-Laudenbach est aussi donnée. La présentation se voulant une introduction assez exhaustive à la théorie des actions hamiltoniennes, presque tous les résultats énoncés sont accompagnés de preuves complètes. Divers exemples sont étudiés afin d'aider à bien comprendre les aspects plus subtils qui sont considérés. Plusieurs sujets connexes sont abordés, dont la préquantification géométrique et la réduction de Marsden-Weinstein.

Mots clefs : action de groupe, géométrie symplectique, action symplectique, action hamiltonienne, représentation coadjointe, orbite coadjointe, application moment, action torique, théorème de convexité.

SUMMARY

This Master thesis is concerned with some natural notions of group actions on symplectic manifolds, which are in decreasing order of generality : symplectic actions, weakly hamiltonian actions and hamiltonian actions. A knowledge of group actions and of symplectic geometry is a prerequisite ; two chapters are devoted to a coverage of the basics of these subjects. The case of hamiltonian actions is studied in detail in the fourth chapter : the important moment map is introduced and several results on the orbits of the coadjoint representation $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathfrak{g}^*$ are proved, such as Kirillov's and Kostant-Souriau's theorems. The last chapter concentrates on hamiltonian actions by tori, the main result being a proof of Atiyah-Guillemin-Sternberg's convexity theorem. A classification theorem by Delzant and Laudenbach is also discussed. The presentation is intended to be a rather exhaustive introduction to the theory of hamiltonian actions, with complete proofs to almost all the results. Many examples help for a better understanding of the most tricky concepts. Several connected topics are mentioned, for instance geometric prequantization and Marsden-Weinstein reduction.

Key words : group action, symplectic geometry, symplectic action, hamiltonian action, coadjoint representation, coadjoint orbit, moment map, toric action, convexity theorem.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire v

Summary vii

Remerciements xi

Introduction 3

Chapitre 1. Les actions de groupes et d'algèbres de Lie 13

1.1. Les groupes et les algèbres de Lie 13

1.2. Les actions de groupes 16

1.3. Les actions infinitésimales 19

Les groupes de difféomorphismes des variétés 20

Les représentations adjointes 22

1.4. Quelques caractéristiques des orbites et des ensembles de points fixes 24

1.5. La cohomologie des algèbres de Lie 31

Chapitre 2. La géométrie et la topologie symplectiques 37

2.1. Les espaces vectoriels symplectiques 37

2.2. Les variétés symplectiques 41

2.3. Les symplectomorphismes 43

2.4. Les algèbres et variétés de Poisson 46

2.5. Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein 49

L'argument de Moser 50

Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein 51

Preuve du théorème de Darboux 53

2.6. Les structures presque complexes 54

Chapitre 3. Les actions symplectiques de groupes 59

3.1. Les orbites et les ensembles de points fixes 59

3.2. Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein équivariant 61

Chapitre 4. Les actions hamiltoniennes de groupes 65

4.1. L'application moment 68

4.2. Les orbites coadjointes 71

4.3. L'information dissimulée dans l'application moment 75

4.4. Exemples 77

4.5. L'application moment revisitée 81

Chapitre 5. Les actions hamiltoniennes toriques 87

5.1. Les actions faiblement hamiltoniennes abéliennes 87

5.2. Les actions hamiltoniennes abéliennes 88

5.3. Les actions hamiltoniennes toriques 90
Le cas des actions linéaires 91
Le cas des actions non linéaires 93

5.4. Le théorème de convexité 98
Considérations locales 98
Considérations globales 100

5.5. Les actions effectives maximales 102

Bibliographie 107

Annexe A. Rudiments de la théorie de Morse-Bott ..... A-i

A.1. Notions et résultats fondamentaux ..... A-i

A.2. Les sous-variétés stables et instables associées à une fonction de Morse-Bott ..... A-iv

REMERCIEMENTS

Malgré tous les efforts que nous puissions faire dans la réalisation de nos projets, il faut bien admettre que leur parachèvement est impossible sans l'aide d'autrui. Cela est d'autant plus vrai pour les projets foncièrement abstraits comme les mathématiques : sans la compréhension et le dévouement de notre entourage, le concret de nos existences aurait vite fait de nous écarter de tout environnement favorable à l'épanouissement de nos pensées.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur, François Lalonde. Il y a plus de quatre ans, je lui demandais pour la première fois d'être mon superviseur de stage ; après une courte hésitation du fait qu'il dirigeait déjà huit étudiants, il m'expliquait avec entrain les grandes idées de la topologie et me prêtait deux de ses livres sur la topologie algébrique. C'était sa façon de dire qu'il acceptait de me superviser, bien que j'aie quitté son bureau sans en être tout à fait certain ! Pour être honnête, il a accepté de me superviser deux fois plutôt qu'une : une méprise de ma part m'ayant empêché de concourir pour une bourse, il s'est proposé pour me financer lui-même. Considérant que c'est durant cet été de stage mémorable que j'ai appris ce que sont vraiment les mathématiques, je dois admettre que c'est un véritable et formidable cadeau que m'a fait François Lalonde à cette époque. Mon appréciation de l'aide et de la liberté qu'il offre à ses étudiants est démontrée par le fait que j'étudie sous sa direction depuis ce temps et que cela m'a permis d'apprendre les plus belles idées que je connaisse à ce jour. Avec le doctorat que j'entame sous sa tutelle, j'aspire à pouvoir enfin l'aider en retour.

Je dois remercier plusieurs autres enseignants pour avoir pavé le chemin m'ayant mené vers la passion des mathématiques. Je remercie qui que ce soit ayant eu l'idée de me refiler dès mon entrée en deuxième secondaire cet immense projet sur un certain mathématicien grec du nom d'Euclide ; si le sujet m'a été accordé au hasard, c'est alors le karma que je tiens à remercier ! Parlant de karma, je remercie mes professeurs de troisième secondaire Jean-François Côté (qui n'était pas supposé être mon enseignant de mathématiques) et Jean-Simon Sénécal (qui, malgré ses études supérieures en mathématiques, a accepté cette année-là un poste d'enseignant en biologie) d'avoir su s'intéresser aux petites études en géométrie auxquelles je m'adonnais suite à ma rencontre avec Euclide. Je remercie Frédérick Tremblay pour son aide dans mon « émancipation scientifique » lors de mes études au Collège de Bois-de-Boulogne et pour ses excellentes blagues.

Je remercie Iosif Polterovich pour sa pédagogie et ses vastes connaissances mathématiques, qualités dont j'ai pu profiter dès mes premiers jours de baccalauréat en assistant aux séances préparatoires du concours Putnam et qui ont certainement contribué à ma « mathématisation ». Je remercie Marlène Frigon pour son impressionnant cours d'analyse fonctionnelle, qui a grandement fait mûrir ma réflexion mathématique et mon appréciation de cette science, et pour toute son aide par la suite, entre autres dans mes demandes de bourses pour la maîtrise. Je remercie Octav Cornea pour son enseignement informel, mais rigoureux et exigeant qui me semble si appréciable en géométrie et en topologie, ainsi que pour son aide dans mes demandes de bourses pour le doctorat.

Qui me connaît suffisamment sait que ma principale passion fut pendant longtemps la physique théorique et que j'y attache encore une importance toute particulière malgré mon tournant vers les mathématiques pures. C'est pourquoi je tiens à remercier Richard MacKenzie, Yvan Saint-Aubin et Luc Vinet pour m'avoir, plus ou moins directement, permis de cultiver cette passion de la physique théorique et mathématique à l'Université de Montréal. Leur enseignements pédagogiques et intéressés sont assurément parmi les meilleurs qui soient.

Je remercie aussi Johannes Walcher de l'Université McGill qui fut pendant quelques temps officieusement mon codirecteur. Nous nous sommes rencontrés alors que j'étais très incertain du cursus que je voulais suivre entre la physique théorique et les mathématiques et que je m'en ressentais beaucoup. Malgré le bien peu d'impression que j'ai dû lui faire, il s'est montré d'une bonté et d'une aide dont je lui serai éternellement reconnaissant. Mon projet de maîtrise a évolué hors de ses principaux intérêts, mais il m'a tout de même grandement aidé au cours de ma maîtrise.

Je remercie à nouveau François Lalonde ainsi que les organismes subventionnaires CRSNG et FQRNT pour m'avoir financé depuis la fin de mon baccalauréat. Cela m'a donné une paix d'esprit inestimable lors des deux dernières années afin de me concentrer sur la science.

Je remercie chaudement les trois membres du jury de ce mémoire, à savoir François Lalonde, Frédéric Rochon et Yvan Saint-Aubin. Leurs commentaires ont grandement contribué à rehausser la qualité et l'exactitude de ce texte.

Je remercie mes amis de longues dates, tout spécialement Marc-André Grégoire, Sébastien Trudel et Frédérick Laliberté, pour être les individus remarquables qu'ils sont. Je remercie Samuel April, Jean-François Arbour, Noé Aubin-Cadot, Charles Bédard, Geoffroy Bergeron, Jason Boisselle, Laurent Chaurette, Paule Dagenais, Florian Duquerroix, Kevin Gervais, Bruno Joyal, Jean Lagacé, Jean-Michel Lemay, Marc-André Miron, Michael Morin et Nicolas Simard pour les passionnantes discussions de mathématiques, de physique et de vie que nous avons eues ainsi que pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée depuis cinq ans. Une reconnaissance particulière va à Vincent Létourneau, mon premier frère d'arme dans notre combat contre l'ignorance et plus proche ami depuis deux ans. Je leur souhaite à tous bonne chance dans leurs projets.

Je remercie ma famille et ma belle famille pour l'aide qu'elles m'ont apportée depuis toujours. En particulier, je remercie mes parents, Jean-Pierre Payette et Sylvie Turmel, pour m'avoir fait découvrir tant de choses, pour m'avoir toujours donné l'occasion de m'adonner à ce qui me passionnait et pour avoir mis tant de temps et de ressources à m'aider à développer ces passions. Quoiqu'ils en pensent, je sais que je suis rendu là où j'en suis avant tout grâce à eux et je ne pourrai jamais leur dire à quel point je leur suis reconnaissant.

Je remercie mon jeune frère, Joël Payette, d'être l'individu courageux, généreux, vif d'esprit, brillant et complet (le *Jack of all trades* !) qu'il est. Je ne saurais lui dire de vive voix, mais il devrait savoir que je l'admire beaucoup.

Pour conclure, je remercie mon amoureuse, Karen Joannette. Je la remercie déjà d'avoir eu le courage et la patience de lire ce mémoire afin d'y corriger et d'y améliorer le français. Je la remercie encore plus d'avoir relevé tous les défis que je lui ai lancés, certains très ardus, ainsi que de m'avoir lancé des défis bien difficiles. C'est que j'en suis ressorti gagnant, gagnant d'être à ses côtés depuis cinq merveilleuses années. Puisqu'elle a profité des joies et a écopé des peines que j'aie connues au cours de ma maîtrise, je lui dédie ce mémoire.

INTRODUCTION

Les sujets abordés dans ce mémoire prennent racine dans la longue et riche édification de la physique, et plus particulièrement de la mécanique. La meilleure justification de l'intérêt de ces sujets étant la fascinante histoire de cette théorie, nous proposons ici d'en faire le récit, la rigueur de l'historien en moins.

Les deux plus importantes contributions d'Isaac Newton à la physique, si importantes qu'elles fondent les assises sur lesquelles cette science s'est pendant longtemps érigée, sont ses traités intitulés *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* et *Opticks*, parus respectivement pour la première fois en 1687 et en 1704. Dans le premier ouvrage, Newton élabora un cadre conceptuel permettant l'étude méthodique des phénomènes *mécaniques*, depuis une description des mouvements des corps (la *cinématique*) jusqu'à la manière dont les corps sont sources de mouvement des uns pour les autres (la *dynamique*). Dans le second, il relata diverses observations de longue date sur le comportement des rayons lumineux, de leur réflexion à leur dispersion en passant par leur réfraction. Remarquant certaines analogies entre ces divers mouvements des rayons lumineux et les mouvements des corps mécaniques qu'il avait étudiés, Newton tenta une certaine réduction de l'optique à la mécanique à travers sa théorie corpusculaire de la lumière.

L'optique géométrique donnait déjà une bonne description des phénomènes de réflexion et de réfraction de la lumière. Pierre de Fermat avait su réduire cette théorie à un seul principe simple, maintenant nommé en son honneur, et dont l'essence s'énonce comme suit : *afin de se rendre d'un point à un autre, la lumière emprunte le chemin de plus courte durée.* En fait, en encodant les propriétés optiques d'un milieu de propagation M à l'aide d'un *indice de réfraction*[1] $n : \mathbb{P}TM \to [1, +\infty]$, le principe général s'énonce en termes plus modernes : *afin de se*

1. La dépendance de l'indice de réfraction sur l'espace tangent projectif $\mathbb{P}TM$ permet de rendre compte de l'inhomogénéité et de l'anisotropie de certains matériaux. La considération de $+\infty$ comme valeur potentielle de l'indice permet de modéliser la réflexion. La restriction $n \geq 1$

rendre d'un point A à un point B, la lumière emprunte un trajet γ_0 qui est un point critique de la fonctionnelle « chemin optique » $S[\gamma] = \int_0^1 n(\gamma(s), \gamma'(s))\|\gamma'(s)\|ds$ définie sur les courbes $\gamma : (I; 0, 1) \to (M; A, B)$. Le principe de Fermat en découle comme suit : en notant $v(m, \xi)$ la vitesse d'un rayon lumineux passant par $m \in M$ dans la direction générée par le vecteur $\xi \in T_m M - \{0\}$, l'indice de réfraction $n(m, \xi)$ vaut alors $c/v(m, \xi)$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Puisque $\|\gamma'(s)\|ds$ est un incrément de longueur d'arc le long du chemin γ, il en résulte que $S[\gamma] = cT[\gamma]$ avec $T[\gamma]$ le temps de parcours du chemin γ [2].

Les expériences relatées dans *Opticks* couvrent davantage de propriétés physiques de la lumière, dont la dispersion des couleurs lors du passage de la lumière blanche à travers un prisme. La théorie corpusculaire de Newton venait donner une explication mécanique de ces divers phénomènes, un peu à la manière dont on expliquerait le comportement d'un jet de sable en appliquant les lois de la mécanique à chacun des grains le composant. Il y avait cependant un phénomène observé par Newton qu'il ne parvenait pas à expliquer par ce modèle : étant donné une lentille ayant la forme d'une calotte sphérique, reposant par sa face arrondie sur un miroir plan et éclairée par le haut, Newton pouvait voir des cercles lumineux concentriques plutôt qu'une tâche diffuse.

Cette lacune n'était pas partagée par la théorie ondulatoire élaborée par Ignace-Gaston Pardies et Christiaan Huygens au fil des années 1660 et 1670. Leur modèle présentait la lumière comme la propagation à vitesse finie d'une onde de nature inconnue. Cette théorie expliquait assez aisément la réflexion et la réfraction de la lumière et impliquait incidemment que la lumière voyage plus lentement dans un milieu d'indice de réfraction plus élevé (en désaccord avec l'interprétation mécanique de Newton). En effet, lorsqu'un rayon lumineux passe d'un milieu d'indice de réfraction n_1 vers un milieu d'indice de réfraction n_2, la loi de Snell-Descartes indique que les angles θ_1 et θ_2 que sous-tendent respectivement le rayon incident et le rayon réfracté avec la droite normale à l'interface des deux milieux sont liés via la relation

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

est physiquement vérifiée dans le cadre d'expériences optiques « courantes » telles que celles accessibles au XVII^e siècle.

2. C'est en termes de la durée d'un trajet plutôt que de chemin optique que Fermat préféra formuler son principe en 1662. Cela présupposait de sa part une vitesse finie pour la lumière, ce qui est remarquable considérant que la preuve expérimentale de la finitude de la vitesse de la lumière ne vint qu'en 1676 suite aux observations des éclipses joviales de satellites galiléens par Giovanni Cassini, Ole Rømer et Jean Picard.

En particulier, lorsque $n_1 < n_2$, il en résulte que $\theta_1 > \theta_2$, indiquant que le rayon réfracté est plus près de la direction normale que ne l'était le rayon incident. Le modèle mécanique de Newton identifiant la vitesse d'un rayon lumineux à la vitesse de ses corpuscules, ce rapprochement à la normale ne peut se produire que si la composante normale de la vitesse des corpuscules s'accroît lors du changement de milieu, d'où le gain de vitesse de la lumière évoqué plus haut. Le modèle ondulatoire de Huygens identifiant plutôt la vitesse d'un rayon lumineux à la vitesse du déplacement de ses fronts d'onde, c'est-à-dire des hypersurfaces de phase constante, et la direction d'un rayon lumineux étant perpendiculaire aux fronts d'onde dans un milieu homogène, ce rapprochement à la normale ne peut se produire que si les fronts d'onde se rapprochent de l'interface, d'où la perte de vitesse des fronts d'onde évoquée.

Or, en accordant à la lumière des caractéristiques d'amplitude et de longueur d'onde que les grains de lumière de Newton n'avaient pas, Pardies et Huygens pouvaient expliquer les anneaux que Newton avait vus comme la manifestation de l'interférence entre les ondes réfléchies par la lentille et les ondes réfléchies par le miroir plan. En raison de la notoriété de Newton que lui procuraient les succès de sa théorie de la mécanique, leurs travaux d'optique ne connurent que relativement peu d'écho. Les choses changèrent avec les recherches de Thomas Young et d'Augustin Fresnel au début de XIX$^{\text{e}}$ siècle. Non seulement mirent-ils en évidence l'interférence à l'aide d'expériences conceptuellement simples, mais ils découvrirent aussi la diffusion de la lumière et sa polarisation et offrirent un cadre mathématique plus développé que ne l'avaient fait Pardies et Huygens.

L'élaboration de la mécanique fut longue, mais fascinante. Le mérite de Newton fut peut-être par-dessus tout d'en donner un formalisme mathématique praticable. Nous pouvons attribuer à tout corps une masse (inertielle) m telle que tout mouvement $\vec{x} = \vec{x}(t)$ vérifie l'équation différentielle $m\,\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$, $\vec{F}$ désignant ici le cumul des forces exercées par l'environnement du corps sur celui-ci. En certaines circonstances, par exemple pour la gravité entre corps massifs, la force dérive d'un potentiel V : $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, V$. Il fut éventuellement remarqué par quelques scientifiques que l'équation ci-dessus est de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^i} \qquad \text{où} \qquad L = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} - V(\vec{x}) = \frac{1}{2}\, m \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 - V(\vec{x}, t)\,.$$

L'équation de gauche est maintenant connue sous le nom d'*équation d'Euler-Lagrange* et la fonction L est le *lagrangien* du corps. Pierre Louis Moreau de

Maupertuis aurait été parmi les premiers savants à réaliser que cette équation différentielle régissant le mouvement d'un corps signifiait que le chemin emprunté était un point critique de la fonctionnelle « action » $S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma, \dot{\gamma}, t)dt$. Le principe de Maupertuis ou principe d'action stationnaire rappelle clairement celui de Fermat : à un aspect de paramétrage près des courbes γ, il suffit d'appliquer le principe de Maupertuis au « lagrangien » $L(\gamma, \gamma', t) = n(\gamma, \gamma')\|\gamma'\|$ pour retrouver le principe de Fermat. Les mathématiciens Joseph-Louis Lagrange et Leonhard Euler développèrent vers la moitié du XVIII$^{\text{e}}$ siècle le calcul variationnel permettant une interprétation rigoureuse de ces principes physiques. Cette formulation analytique de la mécanique s'avèra très puissante ; résumons-la à l'aide d'un langage géométrique moderne. Les configurations que peut prendre un système physique, qu'il soit composé ou pas de plusieurs particules et qu'il y ait des contraintes ou pas sur les emplacements de ces particules, forment un espace abstrait C dont les points sont les dites configurations. L'ensemble des vitesses des particules dans une configuration c donnée correspond à un vecteur $v \in T_cC$. La fonction lagrangienne L est alors une fonction réelle (dépendant possiblement du temps) $TC \to \mathbb{R}$. Le couple (TC, L) contient alors toute l'information sur le système physique considéré et les évolutions possibles s'obtiennent en utilisant le principe de l'action stationnaire.

Au cours des années 1820, William Rowan Hamilton enrichit beaucoup la mécanique analytique, lui conférant non seulement une solidité mathématique accrue, mais en relevant aussi divers parallèles entre la mécanique et l'optique. L'optique géométrique et la mécanique pouvant toutes deux se fonder sur un principe variationnel, il est possible que Hamilton y ait trouvé un motif pour rechercher une formulation plus fine de la mécanique, un peu à la façon dont le modèle ondulatoire de la lumière raffine l'optique géométrique. Pour bien comprendre l'idée qui lui vint, il est utile de se souvenir des explications de la réfraction données respectivement par Newton et par Huygens. Newton accordait surtout de l'importance au rayon lumineux, s'intéressant à sa direction et lui conférant même une vitesse. La notion primordiale pour Huygens était plutôt le front d'onde, la direction de propagation de la lumière étant localement la direction normale au front et sa vitesse étant celle du front. Mathématiquement parlant, Newton accordait davantage une nature covariante à la lumière, décrite par divers chemins ou rayons lumineux $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, tandis que Huygens lui préférait une nature contravariante : un front d'onde n'est qu'une surface de niveau de la fonctionnelle « chemin optique » $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ évaluée depuis l'emplacement de la source lumineuse.

Hamilton travailla sur le passage entre ces deux formulations et tenta de l'étendre à la mécanique. Il remarqua qu'en considérant la transformée de Legendre[3] $H(\vec{x}, \vec{p}, t)$ du lagrangien $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$, les problèmes mécaniques revenaient à résoudre en S l'équation de Hamilton-Jacobi

$$H\left(\vec{x}, \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t} .$$

Ici, S est une fonctionnelle « action ». Notons que $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{x}}$ est en fait un champ de covecteurs correspondant à la vitesse du « front d'onde » de S comprenant $\vec{x}$. Si l'évolution du système étudié est représentée par une courbe $\vec{x}(t)$ dans l'espace de configuration C, alors nous calculons le long de ce chemin

$$\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}\dot{\vec{x}} + \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}\dot{\vec{p}} = 0 .$$

Cette équation est vérifiée lorsque $\vec{x}(t)$ solutionne les équations de Hamilton :

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i} .$$

Ainsi, en étudiant plutôt le hamiltonien $H : T^*C \to \mathbb{R}$, Hamilton put identifier les évolutions $\gamma : \mathbb{R} \to C$ d'un système physique en trouvant plutôt des solutions $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to T^*C$ aux équations ci-dessus.

Au fil des décennies, notamment grâce aux travaux d'Henri Poincaré, il devint évident pour la communauté scientifique que la formulation hamiltonienne reflétait l'existence d'une géométrie différente. La notion de variété symplectique vint éventuellement éclaircir la situation, notion que nous présentons au chapitre 2 de ce mémoire.

La mécanique statistique, élaborée vers la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle par Ludwig Boltzmann, James Clerk Maxwell et Josiah Willard Gibbs afin d'expliquer les phénomènes thermodynamiques, fut l'objet d'importants débats qui changèrent pour toujours la physique. Cette théorie reposait sur l'idée, essentiellement oubliée et repugnée depuis Newton, selon laquelle la matière est composée de corpuscules, à savoir de molécules, d'atomes et de particules. C'est que ni la mécanique, ni la

3. Plus précisément, posons $\vec{p} = \partial L/\partial \dot{\vec{x}}$; il s'agit d'une fonction de $\vec{x}$, de $\dot{\vec{x}}$ et de t. Si la condition de Legendre est vérifiée, soit celle consistant à ce que la « hessienne » $\partial \vec{p}/\partial \dot{\vec{x}}$ soit non dégénérée, alors il est possible d'exprimer $\dot{\vec{x}}$ comme fonction de $\vec{x}$, de $\vec{p}$ et de t. Dans ce cas, la transformation de Legendre de $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ est définie comme étant la fonction $H(\vec{x}, \vec{p}, t) := \dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{p}, t)\vec{p} - L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{p}, t), t)$.

récente théorie de l'électromagnétisme de Maxwell (qui réalisait le tour de force d'unifier les phénomènes électriques, magnétiques et optiques) ne nécessitaient cette hypothèse atomique. L'accumulation de confirmations expérimentales aux prédictions de la mécanique statistique et la découverte éventuelle de l'électron en 1897 par Joseph John Thomson convainquirent peu à peu les physiciens du bien-fondé de cette hypothèse. La situation n'était cependant pas si glorieuse : malgré ces quelques théories physiques aptes à décrire presque l'ensemble de ce qui était connu, elles semblaient sur divers points en contradiction les unes avec les autres.

La solution envisagée afin de résoudre plusieurs problèmes fut drastique : l'hypothèse atomique ne devait pas seulement tenir pour la matière, mais aussi pour la lumière (d'une façon néanmoins bien plus subtile que ne l'avait considérée Newton) et pour des quantités abstraites comme l'énergie et le moment cinétique. C'était la naissance de la théorie des quanta, un amalgame d'hypothèses et de résultats plus ou moins cohérent et limpide développé entre 1900 et 1920 environ dont le leitmotiv était « tout vient en quantités discrètes ».

C'est vers 1925 que des formalismes plus précis furent enfin développés pour fonder la théorie quantique. Louis de Broglie proposa dans sa thèse l'idée que la dualité onde-particule, obtenue par Albert Einstein pour décrire les divers comportements observés de la lumière, soit étendue à la matière ; cet aspect continu de la matière semblait paradoxalement capable d'expliquer la quantification des orbites atomiques du fait que les ondes harmoniques, par rapport auxquelles toute onde se décompose, sont dénombrables. Erwin Schrödinger s'inspira de cette idée afin d'associer à chaque particule massive une « onde » $\psi(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ solutionnant l'équation aux dérivées partielles

$$H\left(\vec{x}, -i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\,.$$

Werner Heisenberg, en réfléchissant à la manière de formaliser le fait expérimental indiquant que l'excitation d'un atome par une énergie donnée E_i donne lieu en réaction à un dégagement d'énergie E_f avec probabilité $p(E_i, E_f)$, tenta quant à lui de travailler avec des « tableaux » constitués de ces probabilités (ce qui, comme il l'apprit plus tard, était une utilisation du calcul matriciel). En identifiant un système physique à la donnée d'une matrice $\hat{H}$, il aboutit à une équation différentielle dictant l'évolution dans ce système de toute quantité matricielle $\hat{A}$:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}] \; .$$

Paul Maurice Dirac montra un peu plus tard l'équivalence entre les formalismes de Schrödinger et de Heisenberg. C'est qu'à bien des égards, ces deux équations sont les penchants quantiques respectivement de l'équation de Hamilton-Jacobi et de l'équation de Poisson $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}$ qui généralise les équations de Hamilton à d'autres quantités que la position ou la quantité de mouvement (ici, $\{-,-\}$ dénote le crochet de Poisson ; voir section 2.4). John von Neumann s'attaqua à la même période à l'unification et à l'axiomatisation de la mécanique quantique. Possiblement en raison de sa connaissance de l'analyse fonctionnelle, où par exemple les fonctions réelles définies sur un ensemble forment un espace vectoriel sur lequel les opérateurs différentiels agissent à l'instar de matrices, il postula qu'un état quantique est un vecteur $|\psi\rangle$ d'un espace vectoriel abstrait et que les quantités physiques attribuables à un système physique sont des valeurs propres d'opérateurs hermitiens agissant sur cet espace. Dans ce formalisme, les équations de Schrödinger et de Heisenberg ne représentent que deux descriptions (duales) d'un même processus abstrait.

À partir de là, la mécanique quantique se développa rapidement et proposa de nouvelles façons de conceptualiser la physique. Un exemple important est donné par les travaux du physicien Eugene Paul Wigner. Celui-ci utilisa grandement la théorie des groupes et de leurs représentations sur les espaces vectoriels afin d'élucider les symétries des lois de la mécanique quantique. Cette étude permit de mieux comprendre ce que pouvait être un « système physique quantique », concept-clef dans l'interprétation de la mécanique quantique. Ainsi, Wigner pu définir une particule libre comme étant un sous-espace de l'espace abstrait des $|\psi\rangle$. D'une part, ce sous-espace est invariant sous l'action du groupe de symétrie de l'environnement dans lequel se meut la particule et, d'autre part, il est « le plus petit » possible. En termes spécialisés, il s'agit d'une sous-représentation irréductible. Cette définition stipule qu'une particule est essentiellement l'ensemble des états dans lesquels elle peut se trouver et que ces états diffèrent nécessairement par des symétries. L'idée de Wigner trouve alors son sens et rend possible une étude riche d'enseignements : décrire divers genres de particules. Une telle étude n'a aucun intérêt en mécanique classique, puisqu'une particule y est définie comme un corps rigide sans extension, c'est-à-dire comme un point, un objet sans autre structure. Cela soulève une question toute intéressante : est-il possible d'adapter les idées de Wigner afin d'obtenir en mécanique classique une notion de particule qui soit plus riche ?

Le problème de la quantification, c'est-à-dire du passage de la mécanique classique à la mécanique quantique, se posa dès les débuts de la théorie des quanta. Sur le plan purement mathématique, la question est de savoir comment la géométrie symplectique sur laquelle se développe la théorie classique peut mener d'une quelconque façon à l'analyse fonctionnelle et à la théorie des représentations qui ont cours dans la théorie quantique.

Une approche tentant explicitement de répondre à cette problématique est celle de la quantification géométrique. La première étape de ce programme, la préquantification, considère l'espace des sections ψ d'un fibré en droites complexes $\mathbb{C} \hookrightarrow E \to M$ sur une variété symplectique (M, ω) tel que le tenseur de courbure de E soit donné par ω. Cette dernière requête permet d'induire une évolution des sections du fibré à partir de l'évolution hamiltonienne ayant cours sur M, ce qui est bel et bien l'essence la plus simple du principe de quantification. En particulier, si un groupe G agit sur l'espace M d'une façon qui « préserve » le système physique correspondant, ceci induit directement une action sur les sections de E. En ce sens, l'étude des groupes de symétries d'un système physique classique conduit naturellement, après (pré)quantification, à l'étude des représentations de groupes en mécanique quantique.

L'histoire de cette approche offre un exemple bien intéressant de la symbiose existant entre la physique et les mathématiques. Alexander Kirillov initia au début des années 1960 la méthode des orbites en théorie des représentations, méthode consistant à ramener l'étude des représentations unitaires à celle d'une représentation spéciale, à savoir la représentation coadjointe. Comme nous le verrons au chapitre 4, les orbites de l'action coadjointe sont des variétés symplectiques ; Kirillov nota qu'en appliquant la quantification à ces « systèmes physiques », une large part de la théorie développée pour aborder les représentations unitaires en résultait plutôt aisément. Bertram Kostant et Louis Auslander développèrent et généralisèrent la méthode dans les années suivantes, leurs travaux donnant forme à la quantification géométrique. Essentiellement à la même époque, fort probablement en raison du cheminement de leur réflexion en physique, mais possiblement aussi après avoir eu écho des travaux de Kirillov et de Kostant, Vladimir Arnold et Jean-Marie Souriau obtinrent plusieurs résultats sur les actions hamiltoniennes sur les variétés symplectiques, et plus précisément sur les propriétés de l'application moment. Souriau amorça même une bonne partie de la quantification géométrique. Ces sujets connurent d'importantes avancées durant les années 1970 et 1980, le théorème de convexité démontré indépendamment par Atiyah et par Guillemin et Sternberg en 1982 étant potentiellement le plus emblématique.

Ce mémoire présente les notions et les résultats fondamentaux concernant les actions de groupes symplectiques et hamiltoniennes.

Les groupes et les algèbres de Lie sont définis au chapitre 1, tout comme les actions de groupes sur les variétés différentielles. Nous y prouvons plusieurs résultats que nous utiliserons à répétition par la suite. Nous y présentons aussi brièvement ce qu'est la cohomologie des algèbres de Lie, que nous utiliserons au chapitre 4 pour établir l'existence et l'unicité d'actions hamiltoniennes sur une variété symplectique.

Le chapitre 2 présente les rudiments de la géométrie symplectique. Le cas des espaces vectoriels symplectiques est d'abord considéré, puis nous abordons le cas des variétés symplectiques. Les fonctions lisses définies sur une variété symplectique forment naturellement une algèbre de Poisson, concept que nous étudions étant donné son rôle central dans la théorie hamiltonienne. Nous y prouvons le théorème de Darboux-Moser-Weinstein précisant la structure locale de toute variété symplectique, puis nous poursuivons sur la théorie des structures presque complexes qui nous simplifiera la vie à l'occasion.

Nous entamons le sujet principal du mémoire au chapitre 3. Nous y définissons ce qu'est une action symplectique. Quelques résultats intéressants concernant ce type relativement général d'action sont présentés.

Les actions faiblement hamiltoniennes et hamiltoniennes font leur apparition au chapitre 4. Nous mentionnons en quoi celles-ci généralisent la formulation hamiltonienne de la mécanique. Les orbites coadjointes ainsi que l'importante application moment y sont définies. Nous prouvons le théorème de Kirillov selon lequel les orbites coadjointes sont des variétés symplectiques, voire en fait des systèmes hamiltoniens, ainsi qu'un théorème de Kostant et de Souriau sur la classification des systèmes hamiltoniens dont l'action est transitive. Plusieurs exemples sont étudiés afin d'élucider les spécificités de ces objets et nous concluons sur une généralisation de l'application moment existant pour toute action symplectique.

Le cinquième et dernier chapitre porte sur le cas plus particulier des actions hamiltoniennes par les tores. Du fait qu'il s'agit de groupes abéliens compacts, ce genre d'action admet plusieurs propriétés exceptionnelles. Nous y démontrons le théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg stipulant que l'image de l'application moment est un polyèdre convexe pour ces actions. Nous terminons en mentionnant quelques résultats très intéressants obtenus par Thomas Delzant.

L'annexe A porte sur les aspects élémentaires de la théorie de Morse-Bott, dont nous ferons usage à quelques occasions au cours du mémoire.

Bien que nous ayons tenté d'être aussi contenu que possible dans notre exposé, une certaine connaissance de la topologie et de la géométrie différentielle est nécessaire afin de lire ce mémoire, comme en témoignent déjà certains passages de cette introduction. Cependant, les livres de Kobayashi et Nomizu [**10**], de Lee [**11**], d'Olver [**14**] et de Sharpe [**15**] traitent de tous les résultats de géométrie différentielle que nous pourrions évoquer. En rédigeant ce mémoire, nous nous sommes grandement inspiré de l'ouvrage de Guillemin et de Sternberg [**6**] en raison de sa clarté et de son exhaustivité en ce qui a trait aux actions hamiltoniennes. Nous invitons le lecteur à lire leur livre ainsi que l'excellente référence par Arnold [**1**] afin d'en apprendre plus sur la mécanique analytique et sur ses liens avec l'optique. Pour un résumé historique de la découverte de la mécanique quantique, de ses axiomes et de la classification de Wigner des particules, les premiers chapitres du livre de Weinberg [**17**] sont à consulter. La méthode de l'orbite est exposée dans le livre de Kirillov [**7**], tandis qu'une présentation très compréhensible de la préquantification géométrique se trouve dans l'article de Kostant [**9**]. L'ouvrage de Souriau [**16**] couvre à peu près l'ensemble du sujet, de la géométrie différentielle à la quantification. Un exposé plus complet sur la quantification géométrique se trouve chez Woodhouse [**18**] ; nous invitons d'ailleurs le lecteur interpellé par ce sujet à se référer au récent mémoire de Noé Aubin-Cadot [**3**].

Chapitre 1

LES ACTIONS DE GROUPES ET D'ALGÈBRES DE LIE

Ce chapitre présente les éléments de base de la théorie des groupes et des algèbres de Lie, ainsi que de leurs actions sur les variétés lisses. Il est inconcevable d'aborder ces sujets de façon exhaustive en un seul chapitre, même en ne se restreignant qu'aux notions nous important le plus ; c'est pourquoi plusieurs notions seront supposées déjà connues et certains résultats seront énoncés sans aucune démonstration. Nous référons cependant le lecteur aux ouvrages de Kirillov [**7**], de Knapp [**8**], de Lee [**11**] et de Sharpe [**15**] pour des présentations détaillées des aspects primordiaux de la théorie. Ces préalables nous mèneront à des sujets plus avancés concernant les actions de groupes et la cohomologie d'algèbres de Lie, dont nous aurons cruellement besoin à partir du chapitre 3. Nous serons alors moins parcimonieux dans nos explications de ces notions.

1.1. Les groupes et les algèbres de Lie

Sans tarder, définissons les deux types d'objets centraux de ce chapitre.

Définition 1.1.1.

*(1) Un **groupe de Lie** est une variété lisse G munie d'une structure de groupe telle que la multiplication $m : G \times G \to G$ et l'inversion $i : G \to G$ sont des applications lisses.*

*(2) Une **algèbre de Lie** est un espace vectoriel V muni d'un produit bilinéaire antisymétrique $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$ vérifiant l'identité de Jacobi : quels que soient $a, b, c \in V$, $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$.*

Bien que ces deux concepts apparaissent séparés de prime abord, ils sont en fait intimement liés. D'une part, pour tout groupe de Lie G, il est possible de définir une algèbre de Lie, notée $\mathfrak{g}$. D'autre part, pour toute algèbre de Lie V (du moins de dimension finie), il est possible de définir un groupe de Lie G tel que $V = \mathfrak{g}$. Nous décrirons cette correspondance dans cette section.

Rappelons tout d'abord que pour toute variété M, l'ensemble $\mathcal{X}(M)$ des champs vectoriels lisses sur M est une algèbre de Lie de dimension infinie lorsque doté du crochet de Lie. Le crochet de Lie est aussi un objet naturel à l'égard des différentielles d'applications lisses entre variétés : si M et N sont des variétés lisses, si $\phi : M \to N$ est lisse et si $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, alors $\phi_*[X,Y]_M = [\phi_* X, \phi_* Y]_N$.

Si G est un groupe de Lie et si $g \in G$ est un élément quelconque, alors nous appellons **translation à gauche par** g l'application $L_g = m(g, \cdot)$ et **translation à droite par** g l'application $R_g = m(\cdot, g)$. Il s'agit de difféomorphismes de G avec lui-même, les applications inverses étant $L_{i(g)}$ et $R_{i(g)}$ pour tout $g \in G$. Un champ vectoriel X sur G est qualifié d'**invariant à gauche ou à droite** si quels que soient $g, h \in G$ nous avons $X_{L_g h} = (L_g)_* X_h$ ou $X_{R_g h} = (R_g)_* X_h$, respectivement. Au vu de la naturalité du crochet de Lie, le crochet de deux champs invariants à gauche ou à droite est un champ invariant à gauche ou à droite. Ceci nous indique que la définition suivante a du sens.

Définition 1.1.2. *Soit G un groupe de Lie. L'**algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$ **associée à** G est l'ensemble des champs vectoriels sur G invariants à gauche muni du crochet de Lie sur les champs vectoriels.*

L'évaluation d'un champ vectoriel en l'identité du groupe étant un isomorphisme linéaire entre le plan tangent $T_e G$ et l'ensemble des champs vectoriels invariants à gauche, il est habituel de penser à $\mathfrak{g}$ comme étant $T_e G$ doté du crochet de Lie induit par cette isomorphisme.

Définition 1.1.3.

(1) *Soient G et H des groupes de Lie. Une application $\phi : G \to H$ est un **homomorphisme de groupes de Lie** s'il s'agit d'un homomorphisme de groupes lisses.*

(2) *Soient V et W des algèbres de Lie. Une application $L : V \to W$ est un **homomorphisme d'algèbres de Lie** s'il s'agit d'une application linéaire préservant les crochets, c'est-à-dire satisfaisant pour tous $a, b \in V$ la relation $L([a,b]_V) = [L(a), L(b)]_W$.*

Il s'avère que la différentielle en l'identité de tout homomorphisme de groupes de Lie est un homomorphisme entre les algèbres de Lie associées. Cela établit l'existence d'un foncteur entre la catégorie des groupes de Lie et celle des algèbres de Lie.

Définition 1.1.4.

(1) Soit G un groupe de Lie. Un ***sous-groupe de Lie de*** *G est un sous-groupe de G ayant la structure d'une sous-variété immergée.*

(2) Soit V une algèbre de Lie. Une ***sous-algèbre de Lie de*** *V est un sous-espace vectoriel W tel que $[W,W]_V \subseteq W$. Il s'agit d'un* ***idéal de Lie de*** *V si c'est une sous-algèbre de Lie de V vérifiant en fait $[W,V]_V \subseteq W$.*

Le foncteur ci-haut a la propriété d'envoyer tout sous-groupe de Lie $\iota : H \hookrightarrow G$ vers une sous-algèbre $\iota_{*e} : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$; si H est normal, alors $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Réciproquement, il s'avère que toute sous-algèbre de Lie V de l'algèbre associée à G est l'algèbre d'un (unique) sous-groupe connexe H de G ; si $V = \mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$ et si G est connexe, alors H est aussi normal.

Étant donné une algèbre de Lie V de dimension finie, le théorème d'Ado stipule qu'il existe un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie $L : V \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ où n est un entier dépendant de V suffisamment grand et $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie des matrices réelles $n \times n$ (le crochet n'étant que le commutateur de matrices). Ainsi, V peut être vue comme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$. Il résulte du paragraphe précédent que V est l'algèbre de Lie associée à un certain groupe de Lie, montrant ainsi que les groupes et les algèbres de Lie sont profondément interreliés.

Considérant un groupe de Lie G, tout vecteur $v \in \mathfrak{g}$ définit un champ vectoriel $v^\dagger$ invariant à gauche sur G. Par un fameux théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles linéaires, le flot $\phi^t_{v^\dagger}$ de ce champ existe au moins pour une courte durée $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. En raison de l'invariance du champ $v^\dagger$, il est aisé de voir que le flot existe en fait éternellement. Nous définissons l'**application exponentielle** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ par $\exp(v) = \phi^1_{v^\dagger}(e)$.

Une caractéristique intéressante de l'exponentielle est qu'il s'agit d'une transformation naturelle en ce sens que pour $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes de Lie, nous avons $f \circ \exp_G = \exp_H \circ f_{*e}$ comme applications de $\mathfrak{g}$ dans H. Une autre est qu'elle opère un difféomorphisme entre un voisinage ouvert de $0 \in \mathfrak{g}$ et un voisinage de $e \in G$. Ces deux propriétés impliquent en particulier que deux groupes de Lie ayant des algèbres isomorphes sont localement difféomorphes et qu'ils ont essentiellement la « même » structure de groupe près de leur identité. Il s'avère que toute algèbre de Lie est associée à un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe, à isomorphisme de groupes de Lie près, et que celui-ci revêt par un homomorphisme de groupes de Lie n'importe quel autre groupe de Lie connexe associé à cette algèbre.

Le théorème suivant tire toute son importance du fait qu'il caractérise partiellement les sous-groupes d'un groupe de Lie héritant d'une structure de groupe de Lie.

Théorème 1.1.1 (Sous-groupe fermé)**.** *Soient G un groupe de Lie et H un sous-groupe de G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *H est fermé dans G ;*
- *H est une sous-variété plongée de G ;*
- *H est un sous-groupe de Lie plongé de G.*

1.2. Les actions de groupes

Étant donné un groupe de Lie G et une variété M, une **action (lisse) à gauche de G sur M** est une application lisse $\alpha : G \times M \to M$ telle que pour tous $g, h \in G$ et $m \in M$ nous avons $\alpha(g, \alpha(h, m)) = \alpha(gh, m)$ et $\alpha(e, m) = m$. Nous en déduisons facilement que chaque fonction $\alpha_g := \alpha(g, \cdot) : M \to M$ est un difféomorphisme, de sorte qu'une action à gauche peut être redéfinie comme un homomorphisme [1] $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M) : g \mapsto \alpha_g$. Cette dernière application est souvent désignée comme étant la **représentation du groupe G sur M** associée à l'action α. Il est coutume de noter $g \cdot m$ afin de désigner $\alpha(g, m)$ lorsque l'action est sous-entendue. Une **action (lisse) à droite de G sur M** est une application β définie essentiellement de la même façon, la composition étant plutôt donnée par $\beta(g, \beta(h, m)) = \beta(hg, m)$, c'est-à-dire que l'action induit un *anti*-homomorphisme $\tilde{\beta} : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Il est à noter que si β est une action à droite de G sur M, alors la composition $\gamma = \beta \circ (i \times Id)$ donnée par $\gamma(g, m) = \beta(g^{-1}, m)$ est une action à gauche de G sur M, et vice versa. Ainsi, il n'est nécessaire que d'exposer la théorie pour des actions à gauche, le cas des actions à droite s'en déduisant facilement.

Les translations à gauche et à droite d'un groupe de Lie G sont des exemples d'actions (respectivement à gauche et à droite) de G sur lui-même. Nous étudierons dans la prochaine section la famille d'applications $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ formant une autre action à gauche de G sur lui-même fixant l'identité e. Si α est une action de G sur M et si H est un sous-groupe de Lie de G, alors l'application

1. Il est évidemment plus délicat de préciser dans quelle mesure ce morphisme peut être lisse, puisque $\mathrm{Diff}(M)$ n'est pas une variété de dimension finie.

$\alpha|_H = \alpha \circ (\iota_H \times Id)$ définit une action de H sur M. Plusieurs autres exemples d'actions seront rencontrés dans ce mémoire.

Définition 1.2.1. *Soient $\cdot$ une action de G sur M et X un sous-ensemble quelconque de G.*

*(1) Pour tout $m \in M$, l'**orbite passant par** m **de l'action de** X **sur** M est l'ensemble $m^X = \{g \cdot m \,|\, g \in X\}$.*

*(2) L'**ensemble des points fixes de** X **dans** M est défini comme étant l'ensemble $M_X = \{m \in M \,|\, g \cdot m = m\,,\, \forall g \in X\}$.*

*(3) Pour tout $m \in M$, le **stabilisateur de** m **dans l'ensemble** G est l'ensemble $G_m = \{g \in G \,|\, g \cdot m = m\}$.*

*(4) Le **noyau de l'action** est l'ensemble $G_M = \bigcap_{m \in M} G_m$.*

Mentionnons en vrac quelques propriétés simples de ces objets.

– Le stabilisateur de tout point ainsi que le noyau sont des sous-groupes de G, le noyau étant même normal.
– Si X est un sous-ensemble de G, alors les points $m \in M_X$ sont précisément ceux satisfaisant $X \subseteq G_m$.
– Si m et p sont des points appartenant à une même orbite, c'est-à-dire s'il existe $g_0 \in G$ tel que $p = g_0 \cdot m$, alors les stabilisateurs G_m et G_p sont conjugués : $G_p = g_0 G_m g_0^{-1}$.

Proposition 1.2.1. *Soit $\alpha : G \times M \to M$ une action. D'une part, tous les stabilisateurs G_m ainsi que le noyau sont des sous-variétés fermées plongées dans G. D'autre part, l'ensemble de points fixes M_X est fermé quel que soit $X \subseteq G$.*

Démonstration. La variété M étant Hausdorff, la diagonale $\Delta \subset M \times M$ est fermée. L'application $\alpha' : G \times M \to M \times M : (g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$ étant continue, l'ensemble $Z = (\alpha')^{-1}(\Delta)$ est aussi fermé. Considérons les plongements $p_g = \{g\} \times Id_M : M \to G \times M$ et $q_m = Id_G \times \{m\} : G \to G \times M$ définis pour chaque $g \in G$ et chaque $m \in M$; les ensembles $M_g = p_g^{-1}(Z)$ et $G_m = q_m^{-1}(Z)$ sont alors fermés dans M et G respectivement. Cela implique d'une part que les stabilisateurs sont fermés, donc le noyau aussi, et d'autre part que l'ensemble des points fixes $M_X = \cap_{g \in X} M_g$ est fermé. Le fait que les stabilisateurs et le noyau soient des sous-variétés plongées se déduit du théorème du sous-groupe fermé.

□

Définition 1.2.2. *Soit une action $\cdot$ de G sur M.*

*(1) L'action est dite **transitive** si l'orbite m^G d'un certain point $m \in M$ (et donc de n'importe quel point) est tout M. Dans ce cas, M est une **variété G-homogène**.*

*(2) L'action est dite **effective** si le noyau G_M est le sous-groupe trivial $\{e\}$. Dans ce cas, M est une **variété G-effective**.*

*(3) L'action est dite **libre** ou **fidèle** si chaque stabilisateur G_m est trivial. Dans ce cas, M est une **variété G-principale**.*

En guise d'exemple, les translations à gauche ou à droite d'un groupe G forment deux actions tant transitives que fidèles de G sur lui-même. De manière tout à fait générale, une action libre est automatiquement effective, mais la réciproque n'est pas vraie.

Définition 1.2.3. *Soient G un groupe de Lie, M et N deux variétés lisses et $\alpha : G \times M \to M$ et $\beta : G \times N \to N$ deux actions. Une application $\phi : M \to N$ est dite **équivariante pour les actions respectives de G sur M et sur N** si $\phi \circ \alpha = \beta \circ (Id_G \times \phi)$ comme applications de $G \times M$ dans N.*

En fait, les variétés admettant une action de G et les applications G-équivariantes forment une catégorie. Il est facile de voir que si $\phi : M \to N$ est G-équivariante, alors pour tout $m \in M$, l'orbite m^G est envoyée surjectivement sur l'orbite $(\phi(m))^G$ dans N. Nous remarquons aussi que $G_m \subseteq G_{\phi(m)}$ pour tout $m \in M$, ce qui implique l'inclusion $\phi(M_G) \subseteq N_G$. De plus, si ϕ est surjective, alors $G_M \subseteq G_N$.

Revenons aux espaces homogènes. Si G est un groupe de Lie et H un sous-groupe fermé (donc un sous-groupe de Lie plongé), alors l'espace G/H des classes à gauche de G suivant H admet une unique structure de variété lisse pour laquelle la projection $\pi : G \to G/H$ est une submersion lisse [2]. L'espace G/H admet naturellement une action à gauche de G, ce qui en fait un espace G-homogène. Ces espaces de classes à gauche de G listent essentiellement toutes les variétés G-homogènes, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 1.2.1. *Soient G un groupe de Lie et M une variété lisse G-homogène. Fixant n'importe quel point $m \in M$, l'application $\phi : G/G_m \to M$ définie par la relation $\phi(gG_m) = g \cdot m$ est un difféomorphisme G-équivariant.*

2. Ce théorème est démontré dans le livre de Lee [**11**], théorème 9.22. Sharpe prouve à l'annexe E dans [**15**] un résultat un peu plus général caractérisant les fibrés G-principaux lisses.

Démonstration. Le lecteur est référé au théorème 9.24 dans [**11**] pour une démonstration. □

Nous verrons à la section 1.4 que les orbites de n'importe quelle action lisse sur une variété M sont des variétés immergées dans M. L'action de G se restreignant bien aux orbites, il s'agit d'espaces G-homogènes ; le théorème précédent implique que toute orbite est difféomorphe à G/G_m, quel que soit m dans l'orbite.

1.3. Les actions infinitésimales

Les actions de groupes induisent d'autres actions que nous pourrions qualifier d'« infinitésimales » ou de « locales ». Ces dernières actions sont souvent plus simples à étudier, étant pour ainsi dire davantage « linéaires », et permettent indirectement de mieux comprendre les actions de groupes de départ.

Considérons une action lisse α d'un groupe G sur une variété M. De façon tout à fait générale, la prise des *pushforward* des difféomorphismes α_g induit une action de G sur $\mathcal{X}(M)$. L'idée clef ici est évidemment que la différentielle d'une application α_g envoie n'importe quel vecteur $v \in T_mM$ vers un vecteur $\alpha_{g*}v \in T_{\alpha_g m}M$. En particulier, en supposant que $m \in M$ soit un point fixe de l'action α, il en résulte une action *linéaire* de G sur T_mM, c'est-à-dire une application (lisse) $\bar{\alpha}_m : G \to \mathrm{Gl}(T_mM)$. Il s'agit de la **représentation isotropique de G en m**. L'intérêt de la représentation isotropique est qu'elle conserve essentiellement toutes les spécificités de l'action α dans un voisinage de m, tout en ramenant l'étude de ces spécificités à des considérations d'algèbre linéaire. Nous tirerons avantage de ce fait à quelques reprises dans la prochaine section.

Toute action α (à gauche) du groupe G sur une variété M induit un homomorphisme[3] $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ que nous pouvons décrire comme suit. Pour $v^\dagger$ le champ vectoriel invariant à gauche sur G associé à un élément $v \in T_eG$, considérons l'application exponentielle $\exp_v : \mathbb{R} \to G$ donnée par $\exp_v(t) = \phi^t_{v^\dagger}(e)$. La différentielle en $t = 0$ de cette fonction envoie le vecteur $\partial_t|_0$ sur v. L'application qui à t associe $\exp_v(t) \cdot m$ trace une courbe dans M débutant en m et dont le vecteur tangent en m définit le champ $\tilde{\alpha}_*v$ en ce point. Il est habituel de désigner $\tilde{\alpha}_*v$ comme le **champ fondamental associé à** v et de le noter v^*

3. Rappelons qu'une action α induit un homomorphisme $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Intuitivement, l'algèbre de Lie associée au groupe des difféomorphismes de M n'est nulle autre que l'espace $\mathcal{X}(M)$ des champs vectoriels sur M. L'analogie au cas des groupes de dimension finie nous amène à penser que la différentielle de $\tilde{\alpha}$ est effectivement un homomorphisme d'algèbres de Lie entre $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{X}(M)$.

ou X_v lorsque l'action α est implicitement connue. Il nous arrivera de parler de l'**action (induite) de $\mathfrak{g}$ sur** M afin de désigner l'application $\tilde{\alpha}_*$. Évidemment, un phénomène similaire se produit pour les actions à droite.

Exemple 1.3.1 : Considérons l'anti-homomorphisme $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(G)$ donné par les translations à droite : $\tilde{\alpha}(g) = R_g$ pour tout $g \in G$. Quel que soit $v \in \mathfrak{g}$, considérons le sous-groupe à un paramètre donné par $H_v : t \mapsto \exp(tv)$. Il s'avère que le flot $\phi^t_{v^\dagger}$ du champ $v^\dagger$ invariant sous les translations à gauche est $\tilde{\alpha} \circ H_v$, c'est-à-dire que pour tout $g \in G$, $\phi^t_{v^\dagger}(g) = R_{\exp(tv)} g$. En d'autres termes, tout champ vectoriel invariant à gauche génère un sous-groupe à un paramètre de translations à droite. Ceci montre que le champ fondamental v^* associé à v est $v^\dagger$.

Cet exemple montre que l'action induite d'une algèbre de Lie sur une variété donne lieu à une généralisation de la notion de champs vectoriels invariants sur un groupe de Lie. Tout comme un champ $v^\dagger$ est partout tangent aux classes à gauche de G suivant le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \exp(tv)$, les champs fondamentaux associés à une action α de G sur M sont tangents aux orbites de α dans M. Ce fait nous sera régulièrement utile et ce dès la prochaine section afin de montrer que les orbites sont des sous-variétés.

Les groupes de difféomorphismes des variétés

Jusqu'à maintenant, nous avons discuté du groupe de difféomorphismes d'une variété de façon plutôt superficielle. Cependant, plusieurs subtilités se tapissent dans ce manque de rigueur ; ne pas les aborder serait faire preuve d'une insouciance que nous aurions toutes les chances de regretter plus tard, surtout au quatrième chapitre ...

Pour une variété lisse M de dimension finie, considérons l'ensemble des champs vectoriels sur M, noté $\mathcal{X}(M)$. Chaque champ vectoriel $X \in \mathcal{X}(M)$ agit comme une dérivation sur l'algèbre des fonctions $(C^\infty(M), +, \cdot)$ via

$$X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) : f(m) \mapsto (Xf)(m) = (\mathcal{L}_X f)(m) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \phi^t)(m) ,$$

où $\phi^t \in \mathrm{Diff}_{\mathrm{loc}}(M)$ désigne ici le flot « local » du champ X : pour tout $m \in M$, il existe des ouverts $m \in U \subset V \subset M$ et un réel $\epsilon > 0$ tels que $\phi^t : U \to V$ existe pour tout $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Ceci donne naturellement lieu à un crochet de Lie sur $\mathcal{X}(M)$: pour $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, nous définissons $[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$ comme étant la dérivation $f(m) \mapsto [X(Yf) - Y(Xf)](m)$. C'est un résultat bien connu en géométrie différentielle que

$$[X, Y]_m \text{ vaut } (\mathcal{L}_X Y)_m := \lim_{t \to 0} \frac{\phi^{-t}{}_* Y_{\phi^t(m)} - Y_m}{t} .$$

Pour être précis, notons $[-, -]_M$ le crochet sur $\mathcal{X}(M)$.

Nous savons qu'une action à gauche $\alpha : G \times M \to M$ donne lieu à un homomorphisme $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M)$. Bien que le groupe de difféomorphisme $\mathrm{Diff}(M)$ soit de dimension infinie dès que $\dim M > 0$, nous nous attendons par analogie aux cas de dimension finie que la différentielle $\tilde{\alpha}_{*e} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{diff}(M)$ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie. Le crochet de Lie dont est ici doté $\mathfrak{diff}(M)$ n'est évidemment pas quelconque : il s'agit de $[-, -]_{\mathrm{Diff}(M)}$.

Plus explicitement, il semble vraisemblable que $\mathfrak{diff}(M)$ soit le sous-ensemble de $\mathcal{X}(\mathrm{Diff}(M))$ constitué des champs vectoriels invariants à gauche sur $\mathrm{Diff}(M)$ (et non pas sur M), sa structure d'algèbre provenant du crochet de Lie $[-, -]_{\mathrm{Diff}(M)}$ défini de manière analogue au cas de dimension finie ci-dessus. En évaluant ces champs à l'identité $Id : M \to M$, $\mathfrak{diff}(M)$ s'identifie alors à $T_{Id}\mathrm{Diff}(M)$ comme espaces vectoriels, soit intuitivement avec $\mathcal{X}(M)$. Or, ce dernier espace devient une algèbre de Lie lorsque doté du crochet $[-, -]_M$. La question est alors de savoir comment sont liées les algèbres de Lie $(\mathfrak{diff}(M), [-, -]_{\mathrm{Diff}(M)})$ et $(\mathfrak{diff}(M), [-, -]_M)$.

L'exemple 1.3.1 pointe vers la relation $[-, -]_M + [-, -]_{\mathrm{Diff}(M)} = 0$. En effet, l'anti-homomorphisme $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(G)$ qui y est considéré donne lieu à un anti-homomorphisme $\tilde{\alpha}_{*e} : (\mathfrak{g}, [-, -]_G) \to (\mathfrak{diff}(G), [-, -]_{\mathrm{Diff}(G)})$ correspondant essentiellement à l'application identité, c'est-à-dire à $v \mapsto v^\dagger$, d'où l'association $[v, w]_G \mapsto [v, w]_G^\dagger$ valant d'une part $[v^\dagger, w^\dagger]_G$ et valant d'autre part $-[v^\dagger, w^\dagger]_{\mathrm{Diff}(G)}$.

Une démonstration formelle, mais générale de cette relation est aussi inspirée de l'exemple 1.3.1. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs vectoriels et notons $X^\dagger, Y^\dagger$ les champs invariants à gauche correspondants sur $\mathrm{Diff}(M)$. Remarquons que si ϕ^t est le flot sur M associé à X, alors pour chaque instant t, le difféomorphisme ϕ^t correspond à $\exp(tX)$ où $\exp : \mathcal{X}(M) \to \mathrm{Diff}(M)$. Ainsi, le flot Φ^t de $X^\dagger$ sur $\mathrm{Diff}(M)$ correspond à l'action de R_{ϕ^t}. Notons aussi ψ^s pour le flot de Y sur M.

Nous avons alors pour tout $m \in M$ que

$$[X,Y]_{\mathrm{Diff}(M)}\Big|_m := [X^\dagger, Y^\dagger]_{Id}\Big|_m = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-t}{}_* Y^\dagger_{\Phi^t(Id)}\right)\bigg|_m = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi^{-t}{}_* L_{\Phi^t *} Y^\dagger_{Id}\right)\bigg|_m$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} R_{\Phi^{-t}}\, L_{\Phi^t}\, e^{sY}(m) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \phi^t \circ \psi^s \circ \phi^{-t}(m)\,,$$

tandis que

$$[X,Y]_M|_m := \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi^{-t}{}_* Y_{\phi^t(-)}\right)\bigg|_m = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \phi^{-t} \circ \psi^s \circ \phi^t(m)\,,$$

de sorte que les champs $[X,Y]_{\mathrm{Diff}(M)}$ et $[X,Y]_M$ sont clairement opposés. Nous en concluons alors qu'un homomorphisme $\mathfrak{g} \to (\mathfrak{Diff}(M), [-,-]_{\mathrm{Diff}(M)})$ est toujours un anti-homomorphisme $\mathfrak{g} \to (\mathfrak{Diff}(M), [-,-]_M)$ et vice versa.

Dans ce mémoire, nous adopterons les conventions suivantes. Quelle que soit la variété M, la structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{X}(M)$ sera toujours donnée par $[-,-]_{\mathrm{Diff}(M)}$ et le caractère de chaque application $\mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ sera toujours déterminée par rapport à cette structure. Cependant, nous continuerons de désigner $[-,-]_M$ simplement par $[-,-]$, cette notation étant universelle. Nous aurons ainsi une certaine disparité entre nos discussions « abstraites », où nous considérerons presque seulement des homomorphismes, et nos considérations plus pratiques, où nous interprèterons parfois les applications comme des anti-homomorphismes [4].

Une telle convention est plus ou moins nécessaire si nous souhaitons utiliser des actions à gauche, c'est-à-dire si nous souhaitons que les $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M)$ soient des homomorphismes, ce qui est un caprice plutôt pardonnable. Au contraire, afin de pouvoir adopter en aval des conventions simples, il faut en amont porter notre attention sur des actions à droite, ce qui paraît moins naturel. Pour une autre facette de cette problématique, le lecteur est référé à la remarque 3.3 de [**13**].

Les représentations adjointes

Considérons une application de ces concepts, dont l'importance à la théorie de Lie et pour ce mémoire est sans équivoque.

4. Nous adoptons alors des conventions similaires à celles utilisées dans [**13**], à ceci près que dans cet ouvrage la notation $[-,-]$ désigne $[-,-]_{\mathrm{Diff}(M)}$, excepté peut-être lorsque $M = G$ . . .

Soit G un groupe de Lie. Considérons l'action à gauche $C : G \to \mathrm{Diff}(G)$ donné par la conjugaison : $C_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$. Il s'avère que l'image de C se situe dans l'ensemble $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Hom}(G, G)$ des automorphismes de G dans lui-même. Les sous-groupes normaux de G sont précisément les sous-groupes invariants sous cette action, c'est-à-dire obtenus comme réunions d'orbites[5]. L'ensemble des points fixes $M_G = \mathrm{Fix}(G)$ pour cette action est le centre $Z(G)$ de G, soit le sous-groupe (normal) $\{g \in G \,|\, gh = hg,\ \forall h \in G\}$.

L'identité e étant un point fixe, il est possible de considérer la représentation isotropique de C en e. En reprenant une notation introduite ci-haut, l'application $\bar{C}_e : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g})$ est donnée par $\bar{C}_e(g) = L_{g\,*\,g^{-1}} \circ R_{g^{-1}\,*\,e}$. Il s'agit de la **représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g}$** et elle est plutôt notée $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Diff}(\mathfrak{g})$.

L'action de G sur $\mathfrak{g}$ associée à cette représentation induit alors une action de l'algèbre $\mathfrak{g}$ sur elle-même, $\mathrm{Ad}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{X}(\mathfrak{g})$. Il s'agit de la **représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}$** et elle est notée $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Un aspect primordial de cette représentation est qu'elle vérifie $\mathrm{ad}(v)w = [v, w]$ quels que soient $v, w \in \mathfrak{g}$. Cela montre quelque peu *a posteriori* toute l'importance de l'action par conjugaison.

Considérant le fait que toute action infinitésimale $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M)$ est un morphisme d'algèbres de Lie ainsi que les liens profonds tout juste effleurés entre la structure d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et la représentation adjointe $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$, nous pouvons nous attendre à ce que la représentation adjointe intervienne dans une étude un peu plus approfondie des actions de groupes sur les variétés lisses. Le résultat suivant va dans ce sens.

Lemme 1.3.1. *Soient α une action lisse d'un groupe de Lie G sur une variété M et $\mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M) : \xi \mapsto X_\xi$ l'action infinitésimale induite. Alors $X_{\mathrm{Ad}(g)\xi} = \alpha_{g\,*} X_\xi$ en tant que champs vectoriels sur M, quels que soient $g \in G$ et $\xi \in \mathfrak{g}$.*

Démonstration. Soit $g_\xi : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ un chemin vérifiant les conditions $g_\xi(0) = e$ et $\dot{g}_\xi(0) = \xi$. Alors en tout point $m \in M$, $X_\xi(m) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha_{g_\xi(t)}(m)$. Nous employons cette identité comme suit :

$$(\alpha_{g\,*} X_\xi)(m) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha_g \alpha_{g_\xi(t)} \alpha_{g^{-1}}(m) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \alpha_{C_g[g_\xi(t)]}(m) = X_{\mathrm{Ad}(g)\xi}(m)\,.$$

□

5. Cela justifie l'appellation « invariants » parfois rencontrée pour désigner les sous-groupes normaux.

1.4. Quelques caractéristiques des orbites et des ensembles de points fixes

Tel que mentionné à la section précédente, passer de l'action de G sur M à celle, induite, de $\mathfrak{g}$ sur M permet souvent de ramener des problèmes *a priori* globaux à des considérations locales pour ensuite revenir d'une façon ou d'une autre au global. Par exemple, démontrons que les orbites d'une action de G sont des sous-variétés immergées. Définissons une distribution $\mathcal{D}$ (de rang possiblement variable) dans TM comme suit : le sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_m \subseteq T_mM$ est linéairement engendré par l'ensemble $\{(\tilde{\alpha}_* v)_m \,|\, v \in \mathfrak{g}\}$. Ce sous-espace vectoriel a pour dimension la codimension de G_m dans G, de sorte que $\dim \mathcal{D}_m$ est constant sur les orbites de l'action de G. Le fait que $\tilde{\alpha}_*$ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie montre que cette distribution est en involution. Le théorème de Frobenius-Hermann (voir [**14**], p. 39) implique ainsi que $\mathcal{D}$ est intégrable, les variétés intégrées étant immergées. Il est plutôt clair qu'elles sont incluses dans des orbites et des considérations dimensionnelles imposent alors l'égalité aux orbites.

En considérant les aspects « infinitésimaux » d'une action de groupe de Lie G sur une variété M, nous pouvons déduire bien plus de choses encore sur les orbites et les ensembles de points fixes de l'action. Nous proposons ici d'obtenir plusieurs résultats de cet ordre, notre traitement suivant de près celui effectué par Guillemin et Sternberg ([**6**], p.200-203).

Définition 1.4.1. *Soient α une action de G sur M et m un point de M. Une **tranche à travers** m **pour l'action** α est un sous-ensemble $S \subset M$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) S est fermé dans le sous-ensemble $G \cdot S = \{\alpha(g,s) \in M \,|\, g \in G\,,\, s \in S\}$;

(2) $G \cdot S$ est un voisinage ouvert de l'orbite $G \cdot m = m^G$;

(3) S est invariant sous l'action de G_m : $G_m \cdot S = S$;

(4) quel que soit $g \in G$ n'appartenant pas à G_m, $(g \cdot S) \cap S = \varnothing$.

Notons que la condition (4) implique d'une part l'inclusion $G_p \subseteq G_m$ pour tout point $p \in S$ et, d'autre part, qu'une tranche à travers un point m n'intersecte l'orbite m^G qu'en un seul point, à savoir m.

L'idée essentielle derrière le concept de tranche va comme suit : s'il existe une tranche à travers chaque point d'une orbite $\mathcal{O}$, alors il est possible d'utiliser ces tranches afin de construire un voisinage tubulaire $V_{\mathcal{O}}$ de l'orbite qui soit invariant sous l'action de G et qui se comporte sous cette action « de la même façon » que la dite orbite, comme si les tranches du voisinage remplaçaient les points correspondants de l'orbite. Dans de telles circonstances, l'action de G restreinte à une orbite renseigne beaucoup sur l'action de G dans un voisinage de l'orbite.

Exemple 1.4.1 : Considérons l'action usuelle du groupe $\mathrm{SO}(3)$ sur l'ensemble $\mathbb{R}^3$. Les orbites sont évidemment l'origine $\{0\}$ ainsi que, pour $r > 0$, les sphères S^2_r de rayon r centrées à l'origine. Pour tout point $m \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$, tout sous-intervalle ouvert de la demi-droite $d_m := \{\lambda m \,|\, \lambda > 0\}$ qui contient m est une tranche à travers m. Par ailleurs, n'importe quelle boule ouverte centrée en $\{0\}$ est une tranche à travers l'origine.

Exemple 1.4.2 : Plus généralement, supposons que $m \in M$ est un point fixe d'une action α de G sur M. Alors, la variété M toute entière est une tranche à travers m pour l'action α.

Exemple 1.4.3 : Toutefois, comme le démontre la situation suivante, une tranche n'existe pas toujours. Considérons l'application $\alpha : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par l'association $((t, s), (x, y)) \mapsto (x, y + t + \rho(x)s)$ où $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse positive s'annulant précisément sur $(-\infty, 0]$. Il est clair qu'il s'agit d'une application lisse vérifiant les axiomes d'une action de groupe (avec $G = (\mathbb{R}^2, +)$ et $M = \mathbb{R}^2$). Considérons l'origine $(x, y) = (0, 0)$ du plan ; son stabilisateur sous cette action est $H = \{(0, s) \in \mathbb{R}^2\}$ et son orbite est la droite $\{x = 0\}$. H fixe tout le demi-plan fermé $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \leq 0\}$ et agit librement sur le complément. Si une tranche S de l'origine existait, elle devrait contenir au moins un point du complément de R (sans quoi la condition (2) d'une tranche ne tiendrait pas) et pour tout point p de ce genre, elle contiendrait toute la droite p^H (sans quoi la condition (3) ne tiendrait pas). Or ces deux faits empêchent la satisfaction de la condition (4), puisque les droites p^H sont préservées par l'action du groupe entier.

Exemple 1.4.4 : Un contre-exemple moins tarabiscoté à l'existence d'une tranche est offert par l'action usuelle de la composante identité du groupe de Lorentz, $\mathrm{SO}_0(2, 1)$, sur $\mathbb{R}^3$. En effet, les points appartenant aux cônes futur et passé ne possèdent aucune tranche à travers eux. Une démonstration de ce fait nous éloignerait cependant trop de notre sujet.

Il s'avère cependant que si G est un groupe de Lie compact, des tranches existent à travers tout point d'une variété sur laquelle G agit. Avant de démontrer ce résultat, il est avantageux d'énoncer un lemme grandement utile dans l'étude des actions de groupes compacts.

Lemme 1.4.1. *Soit α une action lisse du groupe de Lie compact H sur la variété M. Alors il existe une métrique riemannienne g sur M invariante sous l'action de H, c'est-à-dire que $\alpha_h^* g = g$ pour tout $h \in H$, où $\alpha_h = \alpha(h, \cdot)$.*

Démonstration. Notons tout d'abord qu'il existe sur H une mesure $d\mu$ invariante sous les translations à gauche [6]. En effet, si ω_H dénote la forme de Maurer-Cartan de H et si $\dim H = n$, alors la n-forme $\wedge^n \omega_H$ est une forme volume invariante sous les translations à gauche.

Prenons au hasard une métrique riemannienne g_0 sur M. L'action à gauche de H sur M induit via la prise des *pullback* une action à droite de H sur l'espace des métriques riemanniennes. Nous définissons un 2-tenseur g par la relation

$$g(v, w)_m = \int_H (\alpha_h^* g_0)(v, w)\, d\mu$$

où $m \in M$ et $v, w \in T_m M$. Le terme de droite de cette égalité est bien défini puisque H est compact. Il s'agit encore d'une métrique riemannienne puisque l'espace de ces métriques est convexe. L'invariance de g sous l'action de H est évidente. $\square$

Proposition 1.4.1 (Koszul-Mostow)**.** *Soit α une action lisse du groupe de Lie compact G sur la variété M. Il existe pour tout point $m \in M$ une tranche S à travers m. Qui plus est, S peut être prise comme une sous-variété de M admettant une carte centrée en m pour laquelle S est un disque ouvert d'un espace vectoriel invariant sous une action linéaire de G_m.*

Démonstration. Du lemme précédent, nous pouvons prendre une métrique G-invariante sur M. Soit $m \in M$ un point quelconque et considérons l'orbite m^G. Nous savons qu'il s'agit d'une sous-variété immergée dans M. Plus encore, elle est plongée, étant donné que G est compact et donc l'orbite aussi.

Soit N le fibré normal de m^G relativement à la métrique invariante. L'action de G induit une action sur N par morphismes de fibrés vectoriels. Plus explicitement, si $p \in m^G$ et $v \in N_p$, il existe une unique géodésique dans M passant par p et

6. Le groupe H étant supposé compact, il s'agit d'un groupe unimodulaire : $d\mu$ s'avère aussi invariante sous les translations à droite. Voir le corollaire 8.31 à la page 535 dans [**8**].

ayant v comme vecteur tangent en p. Cette courbe est envoyée sous l'action de G vers une géodésique intersectant m^G perpendiculairement en $g \cdot p$, puisque la métrique est G-invariante. Ceci définit un vecteur normal $g \cdot v \in N_{g \cdot p}$ et l'ensemble de ces applications définit la dite action de G sur N.

L'orbite étant plongée dans M, l'application exponentielle « géodésique » définit un difféomorphisme G-équivariant entre un voisinage tubulaire de la section nulle dans N et un voisinage tubulaire de l'orbite dans M. La métrique induisant une métrique sur les fibres de N et l'orbite étant compacte, il existe un nombre $r > 0$ tel que le fibré en disques de rayon r, noté D, soit inclus dans le voisinage tubulaire de la section nulle. Clairement, D est G-invariant. Pour un point $\tilde{m}$ de la section nulle, le disque au-dessus de $\tilde{m}$ est une tranche à travers $\tilde{m}$ pour l'action de G sur D. Prenant l'exponentielle, l'image de ces disques consiste en des tranches à travers les points de m^G. Que ces tranches aient les propriétés énoncées dans le théorème est plutôt clair par construction. □

Dans la démonstration ci-dessus, en tirant profit de la ressemblance d'un voisinage d'une orbite à un fibré vectoriel défini sur cette orbite, nous avons « linéarisé » l'action autour de l'orbite, permettant ainsi de clarifier l'argumentaire. Cette idée s'avère souvent très fructueuse et elle le sera particulièrement pour nous avec l'arrivée prochaine dans le portrait de la topologie symplectique, sujet où plusieurs problèmes de nature locale se prêtent bien à la linéarisation.

La proposition précédente démontre, dans le cas où G est compact, que toute orbite admet un voisinage tubulaire G-équivariant et ainsi feuilleté par des orbites. Ceci est un premier pas dans la connaissance de la manière dont les orbites s'organisent les unes avec les autres. Avançant dans cette direction, nous montrons que dans un voisinage de chaque orbite, les orbites n'incarnent qu'un nombre fini de types de variétés.

Proposition 1.4.2. *Soit G un groupe de Lie compact agissant de façon lisse sur une variété M. Tout point $m \in M$ admet un voisinage ouvert U pour lequel le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de G apparaissant comme stabilisateurs de points de U est fini. En particulier, si M est aussi compacte, alors le nombre de classes de conjugaison de sous-groupes de G apparaissant comme stabilisateurs de points de M est fini.*

Démonstration. La démonstration sera effectuée par induction sur la dimension de M, la dimension de G ainsi que le nombre de composantes de G, l'idée étant de ne considérer que des actions sur des espaces plus petits ou par des groupes plus petits, au besoin. Tout d'abord, le résultat est certainement vrai si $\dim M = 0$ ou si $G = \{e\}$. Supposons alors qu'une action de G sur M nous est donnée et que le résultat est connu vrai pour tout sous-groupe propre de G et toute sous-variétés de M de dimension strictement inférieure à $\dim M$. Soit $m \in M$; deux cas s'offrent à nous :

$G_m \subsetneq G$: Par la proposition précédente, il existe une tranche S à travers m qui soit une sous-variété de dimension strictement inférieure à $\dim M$. Par induction, il existe un voisinage ouvert V de m dans S pour lequel le résultat est vrai. Par les propriétés d'une tranche, l'espace $U = G \cdot V$ est un voisinage ouvert de m dans M et les stabilisateurs de points de cet ouvert sont nécessairement conjugués à des stabilisateurs de points de V. Il n'y a donc pas plus de classes de conjugaison dans U que dans V, ce qui prouve le résultat dans ce cas.

$G_m = G$: Le point m étant fixé, nous pouvons passer à la représentation isotropique de G sur sur $T_m M$. Cette action étant linéaire, les groupes stabilisateurs de vecteurs non nuls colinéaires sont identiques. Employant n'importe quelle métrique G-invariante, cela permet de se ramener à la sphère unité dans $T_m M$, une variété invariante sous l'action de G et de dimension strictement inférieure à $\dim M$. Le résultat de la proposition tient donc pour cette sphère et ainsi pour $T_m M$. L'application exponentielle produisant un difféomorphisme local G-équivariant entre le plan tangent et un voisinage de m dans M, cela termine la preuve.

$\square$

Les plans tangents aux orbites étant générés par l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur M, nous nous attendons à ce que la dimension de ces plans (et donc des orbites) soit donnée par une fonction localement non-décroissante. En fait, pour une action α de G sur M, considérons l'application $\alpha' : G \times M \to M \times M$ donnée par $(g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$. Il est facile de voir que $\alpha'(G \times \{m\}) = m^G \times \{m\}$ et donc que le rang de α' en (g, m) vaut $\dim M + \dim m^G$. Le rang étant une fonction semi-continue inférieurement, cela confirme nos attentes ci-dessus. Ceci signifie que pour tout entier naturel n, les points de M vérifiant $\dim G_m \geq n$ s'unissent pour former un fermé de la variété, puisque $\dim G = \dim G_m + \dim m^G$; en particulier, les points de M ayant les stabilisateurs de plus basse dimension forment une sous-variété ouverte de M. Les propositions suivantes vont plus loin dans la compréhension de ces sous-ensembles.

Proposition 1.4.3. *Soient une action lisse du groupe compact G sur la variété M et $r = \min_{m \in M} \dim G_m$. Pour $n \geq r$, posons F_n l'ensemble des points $m \in M$*

ayant $\dim G_m \geq n$ *et* $K_n := F_n - F_{n+1}$*. Alors chaque* K_n *est une variété plongée possiblement disconnexe dans* M*,* F_{r+1} *est de codimension au moins 2 et* K_r *est ainsi un ouvert connexe dense de* M*.*

Démonstration. Soit $m \in M$ un point arbitraire. L'idée est d'étudier plus finement la façon dont les groupes stabilisateurs sont répartis dans un voisinage de m, espérant ainsi récolter des informations locales sur les ensembles K_n. Considérons la représentation isotropique de G_m sur T_mM. En linéarisant le problème de la sorte, nous concevons maintenant l'orbite m^G comme étant $W = T_m m^G \subset T_mM$ et la tranche S à travers m comme étant l'espace vectoriel V orthogonal (selon une métrique G-invariante sur M) à W. L'action linéarisée de G_m laisse ces deux espaces invariants. D'une part, en tout point p de l'orbite, $\dim G_p = \dim G_m$. D'autre part, puisque $G_p \subseteq G_m$ quel que soit $p \in S$, ceux-ci ne peuvent vérifier $\dim G_p = \dim G_m$ que si $G_p = G_m$. Il s'agit précisément des vecteurs fixés dans V par la représentation isotropique, ceux-ci formant clairement un sous-espace vectoriel. Notons-le V_0 et posons V_1 pour le complément orthogonal de V_0 dans V. Ces deux espaces sont aussi préservés par la représentation isotropique. Nous déduisons de tout ceci que pour un certain voisinage de m dans M, les points de $K_{\dim G_m}$ (soit, dans ce voisinage, deux de $F_{\dim G_m}$) sont ceux atteints par des géodésiques engendrées par les vecteurs de $V_0 + W$ dans T_mM. En particulier, les K_n sont des sous-variétés plongées de codimension locale $\dim V_1$.

Ainsi, si $\dim V_1 = 0$, les orbites dans un voisinage de m sont toutes de dimension identique et $F_{\dim G_m}$ est localement ouvert. Si $\dim V_1 > 0$, alors la représentation isotropique se restreint à V_1 en agissant de façon non triviale via des transformations orthogonales. Ainsi, il doit exister un élément $g \in G_m$ dont l'action sur V_1 est représentée par une matrice orthogonale ξ différente de la matrice identité. En fait, nous pouvons choisir sans perte de généralité ξ dans la composante connexe G_m^0 et même « proche » de l'identité. C'est un fait bien connu que les matrices orthogonales ont toutes leurs valeurs propres dans le cercle unité dans $\mathbb{C}$; V_1 étant un espace vectoriel réel, les valeurs propres non réelles doivent se produire en paires conjuguées. Par notre choix de ξ, cette matrice doit avoir une paire de valeurs propres non réelles, ce qui oblige $\dim V_1 \geq 2$.

Il nous reste à exclure la possibilité que $\dim V_1 = 0$ si $\dim G_m > r$. Pour cela, nous revenons à la constatation que $\dim G_m$ est une fonction semi-continue supérieurement de m, de sorte que l'ensemble F_{r+1} des points ayant $\dim G_m > r$ est fermé. Considérons un point m appartenant au bord de F_{r+1}, de sorte que $\dim V_1 > 0$. Du paragraphe précédent, nous avons $\dim V_1 \geq 2$, ce qui signifie que

F_{r+1} est de mesure nulle dans un voisinage de m dans M. Bref, F_{r+1} n'est ouvert nulle part. Les conclusions de la proposition suivent aisément. $\square$

Proposition 1.4.4. *Soient une action lisse du groupe compact G sur la variété M et H un sous-groupe fermé de G. Dénotons par $\mathrm{Fix}(H) \subseteq M_H$ l'ensemble des points de M exclusivement fixés par H, c'est-à-dire*

$$\mathrm{Fix}(H) = \{m \in M \mid G_m = H\} .$$

Alors $\mathrm{Fix}(H)$ est une sous-variété plongée de M et l'espace tangent $T_m\mathrm{Fix}(H)$ en tout point $m \in \mathrm{Fix}(H)$ consiste en l'ensemble des vecteurs $v \in T_mM$ fixés par la représentation isotropique de H sur T_mM.

Démonstration. À l'instar de la preuve de la proposition précédente, considérons la représentation isotropique de H en un point $m \in \mathrm{Fix}(H)$. En reprenant les mêmes notations que celles introduites dans la preuve précédente, les seuls vecteurs de V fixés par H sont ceux de V_0. Il est possible que certains vecteurs de W soient fixés par H, ceux-ci formant un sous-espace vectoriel W_0. Ainsi, l'action de H sur T_mM est triviale précisément sur le sous-espace $V_0 + W_0$. Or ceci ne caractérise *a priori* que la structure locale de M_H et non celle de $\mathrm{Fix}(H)$, d'où le besoin de retirer les espaces M_L avec $H \subsetneq L$. Chaque M_L est une sous-variété contenue dans M_H et de dimension strictement inférieure (par des arguments similaires à ceux de la démonstration précédente) et seuls un nombre fini de tels M_L sont non vides par la proposition 1.4.2.. Il existe alors un ouvert de M_H autour de m qui n'intersecte aucun des M_L, de telle sorte que $T_mM_H = T_m\mathrm{Fix}(H) = V_0 + W_0$. $\square$

Il faut bien comprendre que dans les dernières propositions, l'hypothèse de compacité n'était réellement utile qu'à démontrer l'existence d'une métrique G-invariante sur la variété. S'en déduit alors l'existence de tranches et de linéarisations « fidèles » des actions des stabilisateurs. C'est à ces derniers points que les propositions doivent leur véracité.

Exemple 1.4.5 : Considérons de nouveau la situation de l'exemple 1.4.3. Nous y avons vu qu'aucune tranche à travers l'origine n'existait pour l'action α. Nous inférons ainsi de nos plus récents résultats qu'aucune métrique riemannienne est invariante sous cette action. Cela se prouve directement en étudiant l'action du sous-groupe $\{t = 0\}$, ce qui est l'objet du prochain exemple.

Exemple 1.4.6 : Considérons l'application $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par l'association $(s, (x, y)) \mapsto (x, y + \rho(x)s)$ où ρ est une fonction lisse ne s'annulant que sur $(-\infty, 0]$. Il est clair que α est une application lisse vérifiant les axiomes d'une action de groupe (avec $G = (\mathbb{R}, +)$ et $M = \mathbb{R}^2$). Il est aisé de voir que les points de la région $R^- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}$ sont tous fixés, tandis que l'action est libre sur $R^+ = \{(x, y) \mid x > 0\}$.

– Il existe pour cette action une tranche à travers tout point. Pour les points dans R^-, le plan entier est une tranche. Pour ceux dans R^+, des segments de courbes horizontales inclus dans R^+ effectuent le travail.
– La représentation isotropique de l'action sur $T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ est triviale, fixant tous les vecteurs. Ceci signifie qu'aucun difféomorphisme local G-équivariant n'existe entre $T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$ et un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2$.
– Une idée fort similaire démontre qu'il n'y a pas de métrique G-invariante sur le plan. En effet, il suffirait de considérer l'unique géodésique passant par un vecteur « horizontal » $h \in T_{(0,0)}\mathbb{R}^2$: d'une part, h est fixé sous l'action, donc la géodésique ne change pas ; d'autre part, l'action étant libre sur R^+, la géodésique doit changer.
– L'espace F_1 est R^-. Il s'agit d'une variété à bord de codimension 0.

Exemple 1.4.7 : Dans l'exemple 1.4.3, considérons plutôt le sous-groupe $\{s = 0\}$. Bien que $G = (\mathbb{R}, +)$ ne soit pas compact, la métrique euclidienne est invariante sous cette action. Il existe une tranche de la forme $[y = c]$ à travers chaque point. L'action étant libre, $K_0 = \mathbb{R}^2$.

1.5. La cohomologie des algèbres de Lie

Étant donné une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, que nous supposerons de dimension finie afin d'éviter certaines technicités, considérons les espaces vectoriels [7] $\left(\wedge^k \mathfrak{g}\right)^*$ pour $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Définissons des applications linéaires $d_k : \left(\wedge^k \mathfrak{g}\right)^* \to \left(\wedge^{k+1} \mathfrak{g}\right)^*$ comme suit : pour tout $\omega \in \left(\wedge^k \mathfrak{g}\right)^*$ et pour tout élément « primitif » $\sigma \in \wedge^{k+1}\mathfrak{g}$, c'est-à-dire pour un élément de la forme $\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$ (chaque σ_j étant pris dans $\mathfrak{g}$), posons

7. Les constructions suivantes fonctionnent tout aussi bien en remplaçant chaque $\left(\wedge^k \mathfrak{g}\right)^*$ par $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vect}}(\wedge^k \mathfrak{g}, V)$ avec V un espace vectoriel quelconque. La notation est cependant plus lourde.

$$\begin{aligned}(d_k\omega)(\sigma) &= \frac{1}{2(k-1)!}\sum_{\text{permutations}\,\rho}(-1)^{\operatorname{sgn}\rho+1}\,\omega\big([\sigma_{\rho(1)},\sigma_{\rho(2)}]\wedge\cdots\wedge\sigma_{\rho(k+1)}\big)\\ &= \sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\,\omega\big([\sigma_i,\sigma_j]\wedge\sigma_1\wedge\cdots\wedge\hat\sigma_i\cdots\wedge\hat\sigma_j\cdots\wedge\sigma_{k+1}\big)\,,\end{aligned}$$

tandis que pour tout autre élément $\sigma\in\wedge^{k+1}\mathfrak{g}$ (qui est par définition une combinaison linéaire finie d'éléments primitifs), $(d_k\omega)(\sigma)$ est défini par linéarité. Notons que pour $k=0$, $(\wedge^0\mathfrak{g})^*$ est identifié au corps de base $\mathbb{K}$ de $\mathfrak{g}$ (qui sera toujours $\mathbb{R}$ dans nos applications futures) et $d_0:\mathbb{K}\to\mathfrak{g}^*$ est tout simplement l'application nulle. Puisque les cas $k=1,\,2$ nous seront d'un plus grand intérêt, écrivons explicitement l'expression ci-dessus pour les applications d_1 et d_2 :

$$\begin{array}{lll}\text{Pour } \omega\in\mathfrak{g}^*, & (d_1\omega)(\sigma\wedge\xi) & = \quad -\omega([\sigma,\xi])\,;\\ \text{Pour } \omega\in(\wedge^2\mathfrak{g})^*, & (d_2\omega)(\sigma\wedge\xi\wedge\eta) & = \; -[\omega([\sigma,\xi]\wedge\eta)+\omega([\eta,\sigma]\wedge\xi)+\omega([\xi,\eta]\wedge\sigma)]\,.\end{array}$$

En utilisant l'identité de Jacobi, il est aisé de vérifier que les applications d_k satisfont aux relations $d_{k+1}\circ d_k=0$ pour tout $k\ge 0$: les espaces $\left(\wedge^k\mathfrak{g}\right)^*$ forment avec les d_k un complexe de cochaînes. En prenant la cohomologie de ce complexe, nous obtenons pour chaque k le **groupe de cohomologie** [8] $H^k(\mathfrak{g})$ **de l'algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$:

$$H^k(\mathfrak{g}) := \frac{\operatorname{Ker} d_k}{\operatorname{Im} d_{k-1}} =: \frac{Z^k(\mathfrak{g})}{B^k(\mathfrak{g})}\,.$$

Notons que $H^1(\mathfrak{g})=\{\omega\in\mathfrak{g}^*\ :\ \omega|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]}=0\}$, où $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ dénote le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par tous les éléments de la forme $[\sigma,\xi]$ pour $\sigma,\ \xi\ \in\mathfrak{g}$. Il est clair que $H^1(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}^*$ précisément lorsque $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$, tout comme il est clair que $H^1(\mathfrak{g})=0$ précisément lorsque $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\mathfrak{g}$. La première situation correspond au cas d'une algèbre abélienne. La seconde stipule que $\mathfrak{g}$ n'est pas une algèbre soluble ; cette situation se produit par exemple lorsque $\mathfrak{g}$ est simple (et non abélienne).

Bien qu'il soit évident que les groupes de cohomologie d'une algèbre de Lie recèlent des informations importantes sur la structure de l'algèbre, il n'est pas aisé de développer une intuition sur la nature de ces informations (comme c'est hélas souvent le cas avec les théories (co)homologiques). Il est cependant intéressant

8. Nous notons plutôt $H^k(\mathfrak{g},V)$ les groupes de cohomologie construits dans la généralité offerte par la note de bas de page précédente.

de noter que lorsque $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie associée à un groupe de Lie compact connexe G, les groupes de cohomologie $H^k(\mathfrak{g})$ s'identifient aux groupes de de Rham $H^k_{dR}(G;\mathbb{R})$ qui, c'est bien connu, ne dépendent que de la topologie de G. La justification de ceci vient grossièrement du fait que pour toute k-forme ω définie sur G, il est possible par compacité de moyenner cette forme via l'action des translations à gauche. La k-forme $\bar{\omega}$ invariante qui en résulte appartient à la même classe de cohomologie, essentiellement parce que la connexité du groupe permet de définir une homotopie de cochaînes du complexe des formes vers lui-même entre les applications identité et moyenne. L'invariance permet de penser $\bar{\omega}$ comme élément de $\wedge^k\mathfrak{g}^*$. Un simple calcul permet alors de voir [9] que la $(k+1)$-forme invariante $\mathrm{d}\bar{\omega}$ s'identifie avec $d_k\bar{\omega}$. Cela conduit à d'étonnantes corrélations entre la structure topologique et la structure algébrique d'un tel groupe G !

En ce qui a trait à ce mémoire, les groupes de cohomologie d'algèbres de Lie sont dignes d'intérêt en raison de leur apparition dans le problème suivant. Considérons [10] la suite exacte suivante dans la catégorie des algèbres de Lie :

$$0 \xrightarrow{0} \mathfrak{a} \xhookrightarrow{a} \mathfrak{b} \xrightarrow{b} \mathfrak{c} \xrightarrow{0} 0$$

Supposons par ailleurs que $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = 0$, c'est-à-dire que $[\alpha,\beta] = 0$ quels que soient $\alpha \in \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{b}$ et $\beta \in \mathfrak{b}$. En d'autres termes, supposons que $\mathfrak{a}$ fasse partie du centre de l'algèbre $\mathfrak{b}$. En particulier, ceci signifie que nous supposons l'algèbre $\mathfrak{a}$ abélienne. Dans ces circonstances, $\mathfrak{b}$ est une **extension centrale de $\mathfrak{c}$ par $\mathfrak{a}$.**

Considérons maintenant une algèbre de Lie (de dimension finie) $\mathfrak{g}$ et un homomorphisme d'algèbres de Lie $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$. Est-il possible de relever ν vers l'algèbre $\mathfrak{b}$? Dit autrement, existe-t-il un homomorphisme λ rendant le diagramme suivant commutatif ?

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] & \mathfrak{a} \arrow[r, hook, "a"] & \mathfrak{b} \arrow[r, two heads, "b"] & \mathfrak{c} \arrow[r, "0"] & 0 \\ & & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\nu"'] \arrow[ul, dotted, "\lambda"] & \end{tikzcd}$$

9. C'est d'ailleurs en considérant les formes invariantes par les translations à gauche et l'expression de la dérivation extérieure sur celles-ci que Guillemin et Sternberg justifient les définitions des d_k ; voir [**6**], p.170.

10. Pour être tout à fait explicite, dire que cette suite est prise dans la catégorie des algèbres de Lie signifie que $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont des algèbres de Lie et que a et b sont des homomorphismes d'algèbres de Lie. L'exactitude de la suite signifie ici que a est un monomorphisme, que b est un épimorphisme et que $\operatorname{Im} a = \operatorname{Ker} b$ comme applications linéaires.

Puisque $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel de dimension finie $\dim \mathfrak{g} = n$, il existe une base $\{g_1, \ldots, g_n\}$. L'application b étant surjective, chaque $\nu(g_j) \in \mathfrak{c}$ admet une préimage dans $\mathfrak{b}$. En définissant $\lambda(g_j)$ par un choix d'élément dans $b^{-1}(\nu(g_j))$, il est possible par linéarité de définir une application $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$. Évidemment, la principale ambiguité de cette construction est le choix des éléments des préimages, chaque $\lambda(g_j)$ pouvant différer par l'ajout d'un élément arbitraire de $\mathfrak{a}$. Il est ainsi toujours possible de construire le diagramme commutatif ci-haut dans la catégorie des espaces vectoriels.

Il en va autrement dans la catégorie des algèbres de Lie. En effet, rien n'indique qu'un de ces λ préserve les crochets. Pour comprendre l'obstruction à l'existence d'un tel homomorphisme d'algèbres de Lie, prenons n'importe quel relèvement linéaire λ de ν. Les applications ν et b étant des homomorphismes d'algèbres de Lie, il s'avère que pour n'importe quels éléments $g, h \in \mathfrak{g}$,

$$b(\lambda([g,h])) = \nu([g,h]) = [\nu(g), \nu(h)] = [b(\lambda(g)), b(\lambda(h))] = b([\lambda(g), \lambda(h)]),$$

$$\text{c'est-à-dire que} \qquad b\left(\lambda([g,h]) - [\lambda(g), \lambda(h)]\right) = 0\,.$$

Ainsi, l'élément $c_\lambda(g \wedge h) := \lambda([g,h]) - [\lambda(g), \lambda(h)]$ fait partie de $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Chaque relèvement linéaire λ de ν définit donc un élément c_λ de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vect}}(\wedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Il est facile de calculer que $d_2 c_\lambda = 0$ à l'aide de l'identité de Jacobi, définissant ainsi une classe de cohomologie $[c_\lambda] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Afin de connaître de quelle manière cette classe dépend du choix de λ, supposons que μ soit un autre relèvement linéaire de ν. Considérons $\delta := \mu - \lambda$, qui est élément de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Vect}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ selon ce que nous avons vu plus haut. Ainsi, quels que soient $g, h \in \mathfrak{g}$,

$$c_\mu(g \wedge h) = c_\lambda(g \wedge h) + c_\delta(g \wedge h) - [\delta g, \lambda h] - [\lambda g, \delta h]\,.$$

Or, puisque $\mathrm{Im}\,\delta \subset \mathfrak{a}$, la partie $c_\delta(g \wedge h) - [\delta g, \lambda h] - [\lambda g, \delta h]$ est incluse dans $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] = \{0\}$. Ainsi, c_μ et c_λ diffèrent par un 2-cobord, d'où $[c_\mu] = [c_\lambda]$. Ainsi, dans le cas des extensions centrales, l'application $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ définit une classe de cohomologie $[c] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ bien précise, indépendante du relèvement de ν choisi.

En revenant à la définition des c_λ, nous voyons que la condition $c_\lambda = 0$ signifie précisément que le relèvement λ de ν est un homomorphisme d'algèbres de Lie. Si $[c] \neq 0$, il ne peut clairement exister aucun relèvement linéaire λ de ν vérifiant $c_\lambda = 0$. Au contraire, si $[c] = 0$, alors quel que soit le relèvement linéaire λ de ν, il existe une application linéaire $\delta_\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{b}$ telle que $c_\lambda = d_1\delta_\lambda$; l'application $\mu := \lambda + \delta_\lambda$ relève aussi ν et vérifie[11] $c_\mu = 0$. Ceci prouve le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. *Soient* $0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{b} \to \mathfrak{c} \to 0$ *une extension centrale et* $\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ *un homomorphisme dans la catégorie des algèbres de Lie. Il existe une classe de cohomologie* $[c] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ *déterminant l'obstruction qu'il y a à identifier un homomorphisme d'algèbres de Lie* $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathfrak{b}$ *relevant* ν*. En fait, un tel homomorphisme existe si et seulement si* $[c] = 0$*.*

Advenant le cas où un homomorphisme d'algèbres de Lie λ relevant ν existe, nous pouvons toujours nous demander dans quelle mesure cet homomorphisme est unique. En fait, μ est un relèvement de ν vérifiant $c_\mu = 0$ précisément si l'application $\delta := \mu - \lambda$ considérée plus tôt vérifie la relation $d_1\delta = 0$. Ceci détermine alors un classe de cohomologie $[\delta] \in H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, d'où l'ajout suivant au théorème ci-dessus :

Théorème 1.5.1. (suite) Advenant le cas où $[c] = 0$, l'ensemble des ces homomorphismes est en bijection avec $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Nous déduisons alors aisément les conditions suffisantes suivantes pour l'existence et l'unicité de relèvement dans la catégorie des algèbres de Lie.

Corollaire 1.5.1. *Si* $\mathfrak{g}$ *est telle que* $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$*, alors quels que soient l'extension centrale et l'homomorphisme* ν*, il existe toujours un relèvement* λ *de* ν*. Si de plus* $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$*, alors ce relèvement est unique.*

En guise d'exemple simple, puisque $S^3 = \mathrm{SU}(2)$ n'a pas de cohomologie (de de Rham) en degré un ou deux, l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ vérifie les deux conditions du corollaire précédent. Rappelons par ailleurs que $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ et que le groupe SO(3) est compact ; cela fournit au passage une preuve aisée du fait que la cohomologie de de Rham de $\mathrm{SO}(3) \cong \mathbb{RP}(3)$ est la même que celle de la 3-sphère.

Remarquons que si $\dim \mathfrak{a} = n$ est fini, alors $\mathfrak{a}$ est isomorphe (comme algèbre de Lie) à la somme directe de n copies de son corps de base $\mathbb{K}$, de sorte que $H^k(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ est isomorphe à la somme directe de n copies de $H^k(\mathfrak{g}, \mathbb{K})$.

11. Notons que ce constat repose lui aussi sur le caractère abélien de $\mathfrak{a}$, justement pour se débarasser du terme $[\delta_\lambda(g), \delta_\lambda(h)]$ dans le calcul de $c_\mu(g \wedge h)$. C'est peut-être là le principal intérêt des extensions *centrales* : nous pourrions toujours travailler avec une multitude de classes de cohomologie de la forme $[c_\lambda]$, mais il nous importe certainement d'avoir le luxe d'inférer de la condition $[c_\lambda] = 0$ l'existence d'un relèvement μ de ν satisfaisant $c_\mu = 0$.

Chapitre 2

LA GÉOMÉTRIE ET LA TOPOLOGIE SYMPLECTIQUES

Nous présentons dans ce chapitre les briques fondamentales de toute la théorie symplectique. Nous débutons par l'étude des espaces vectoriels symplectiques, dont la relative simplicité ne saurait en minimiser l'importance considérant qu'une large part de la théorie générale des variétés symplectiques provient d'une exceptionnelle faculté de réduction au cas linéaire. Nous passons un certain temps à discuter des algèbres de Poisson associée aux variétés symplectiques, puisqu'il s'agit de la pierre angulaire des sujets traités ultérieurement dans ce mémoire. Nous démontrons ensuite le théorème de Darboux-Moser-Weinstein, manifestation par excellence du principe de linéarisation tout juste évoqué. Nous terminons le chapitre avec un bref aperçu des liens entre la théorie symplectique et la géométrie presque complexe dont nous aurons quelques usages par la suite.

La référence principale pour la matière de ce chapitre est l'ouvrage de McDuff et Salamon [**13**]. D'autres présentations utiles de la géométrie symplectique se trouvent chez Arnold [**1**], Audin et Damian [**2**], Guillemin et Sternberg [**6**], Souriau [**16**] et Woodhouse [**18**].

2.1. Les espaces vectoriels symplectiques

Définissons l'objet d'étude central de ce sujet.

Définition 2.1.1. *Soient V un espace vectoriel sur le corps des réels et ω une* ***forme symplectique (linéaire) sur*** *V, c'est-à-dire une forme bilinéaire antisymétrique $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ non dégénérée en ce sens que l'unique vecteur x vérifiant $\omega(x, y) = 0$ quel que soit le vecteur y est l'élément neutre de V. Un* ***espace vectoriel symplectique*** *est la donnée d'un tel couple (V, ω).*

L'espace vectoriel V est souvent lui-même appelé l'espace symplectique, lorsque la forme symplectique ω est sous-entendue. L'exemple typique d'espace vectoriel symplectique est celui de $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$, où la forme symplectique ω_0 est définie par $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$, dénotant par p et par q les fonctions coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^2$. Il s'agit en effet d'une forme symplectique, la bilinéarité étant évidente et la non-dégénérescence se déduisant de la relation $\omega_0(\partial/\partial p, \partial/\partial q) = 1$ sachant que $\mathbb{R}^2$ est généré comme espace vectoriel par la base $\{\partial/\partial p, \partial/\partial q\}$. Plus généralement, si p_1, q_1, ..., p_n et q_n dénotent les fonctions coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^{2n}$, alors nous prouvons de façon analogue que la forme bilinéaire $\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$ est symplectique ; il s'agit de la **forme symplectique standard sur** $\mathbb{R}^{2n}$.

La qualification « standard » pour désigner ces formes est justifiée par le fait que tout espace vectoriel symplectique (V, ω) est en bijection linéaire avec $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ pour un unique entier n, de sorte que nous avons déjà énuméré (à isomorphisme près) tous les espaces vectoriels symplectiques existants. La preuve de cette affirmation est plutôt simple, mais un peu de travail préliminaire s'avère utile.

Définition 2.1.2. *Soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $A \subset V$ un sous-ensemble, pas nécessairement linéaire. Nous notons A^ω* ***l'orthogonal symplectique de*** *A (par rapport à la forme ω) l'ensemble défini comme étant $\{x \in V \,|\, \omega(x, y) = 0, \ \forall\, y \in A\}$.*

Effectuons diverses constatations.

(1) La non-dégénérescence de la forme symplectique s'exprime tout simplement $V^\omega = \{0\}$.

(2) Si A est compris dans un sous-espace vectoriel de dimension 1, alors l'antisymétrie de la forme symplectique implique $A \subseteq A^\omega$.

(3) Par linéarité de ω dans son premier argument, il est clair que A^ω est un sous-espace vectoriel de V, strictement plus petit si $A \neq \{0\}$. Ce fait, jumelé au prochain résultat, explique en quoi les cas les plus intéressants sont souvent ceux où A est un sous-espace vectoriel de V.

Proposition 2.1.1. *Soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie et $A \subseteq V$ un sous-espace vectoriel. Alors ω induit un isomorphisme entre V et son dual V^*, $\dim A + \dim A^\omega = \dim V$ et $(A^\omega)^\omega = A$.*

Démonstration. La forme symplectique induit une application linéaire m de V vers V^* définie par $m(x)(\cdot) = \omega(x, \cdot)$ pour $x \in V$, cette application étant injective par non-dégénérescence de ω et surjective puisqu'en dimension finie $\dim V =$

$\dim V^*$. Notons par $A^0 \subset V^*$ l'annihilateur de A, soit l'ensemble des covecteurs $f : V \to \mathbb{R}$ s'annulant sur les éléments de A. Il s'agit d'un fait bien connu d'algèbre linéaire que $\dim A + \dim A^0 = \dim V$. L'isomorphisme $m : V \to V^*$ mettant en bijection A^ω et A^0, la première relation s'en suit. Finalement, par définition de l'orthogonal symplectique, nous avons clairement l'inclusion $A \subseteq (A^\omega)^\omega$, l'égalité se déduisant de $\dim A = \dim V - \dim A^\omega = \dim(A^\omega)^\omega$. □

Pour le reste de ce mémoire, l'hypothèse de finitude de la dimension sera admise. Le lemme suivant se révèlera d'une grande aide dans le théorème qui suivra.

Lemme 2.1.1. *Soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique et $A, B \subseteq V$ des sous-espaces vectoriels. Alors $(A+B)^\omega = A^\omega \cap B^\omega$ et $(A \cap B)^\omega = A^\omega + B^\omega$.*

Démonstration. La preuve demande de jouer avec divers sous-espaces en présence, même implicitement. Remarquons que si X et Y sont des sous-espaces vectoriels de V vérifiant $X \subseteq Y$, alors $Y^\omega \subseteq X^\omega$. Ceci implique, d'une part, que $(A+B)^\omega$ est inclus tant dans A^ω que dans B^ω, donc aussi dans $(A+B)^\omega \subseteq A^\omega \cap B^\omega$. En « prenant l'orthogonal » de cette relation, notons que cela implique $A+B \supseteq (A^\omega \cap B^\omega)^\omega$. D'autre part, A^ω et B^ω sont tous deux inclus dans $(A \cap B)^\omega$ et ce dernier ensemble étant un sous-espace, nous devons avoir $A^\omega + B^\omega \subseteq (A \cap B)^\omega$. Remplaçant dans cette dernière relation A et B par leur orthogonal symplectique respectifs, nous avons alors $A + B \subseteq (A^\omega \cap B^\omega)^\omega$. Cela démontre la première relation ; la seconde suit de la première en employant les mêmes idées que ci-dessus. □

Théorème 2.1.1 (Classification des espaces symplectiques)**.** *Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Alors il existe un isomorphisme linéaire ρ entre V et un certain espace $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $\omega = \rho^*\omega_0$. Ainsi, les espaces vectoriels symplectiques sont distingués uniquement par leur dimension qui est paire.*

Démonstration. Prenons un vecteur non nul e_1 quelconque de V. Par la non-dégénérescence de ω, il existe un vecteur f_1 satisfaisant $\omega(e_1, f_1) \neq 0$. En remplaçant f_1 par un vecteur colinéaire approprié, nous pouvons supposer qu'en fait $\omega(e_1, f_1) = 1$. Nécessairement, f_1 n'est pas colinéaire à e_1, car sinon l'antisymétrie de la forme symplectique imposerait $\omega(e_1, f_1) = 0$. Désignons par V_1 le sous-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $\{e_1, f_1\}$, à savoir $V_1 = E_1 + F_1$ avec $E_1 = \mathbb{R}e_1$ et $F_1 = \mathbb{R}f_1$. L'orthogonal $W_1 = V_1^\omega$ s'avère être un complémentaire vectoriel à V_1, c'est-à-dire que $V = V_1 \oplus W_1$. En effet, le lemme ci-haut indique que cela revient à montrer que $V_1 \cap W_1 = \{0\}$. Or $V_1 \cap W_1 = V_1 \cap (E_1^\omega \cap F_1^\omega)$, ce qui vaut $(V_1 \cap E_1^\omega) \cap F_1^\omega$. Puisque E_1 est unidimensionnel, $E_1 \cap E_1^\omega = E_1$. Évidemment $F_1 \cap E_1^\omega = \{0\}$, d'où $V_1 \cap E_1^\omega = E_1$; ceci donne bien $(V_1 \cap E_1^\omega) \cap F_1^\omega = \{0\}$.

Supposons que $W_1 \neq \{0\}$; soit $e_2 \in W_1$ un vecteur non nul quelconque. En employant les notations évidentes, l'espace E_2^ω est de codimension 1 et comprend l'espace bidimensionnel V_1 ; il ne peut ainsi comprendre W_1 tout entier. La fonction linéaire $\omega(e_2, \cdot)$ n'est donc pas identiquement nulle sur W_1. Nous concluons alors que $(W_1, \omega|_{W_1})$ est un espace vectoriel symplectique. Nous pouvons ainsi appliquer le raisonnement du premier paragraphe à W_1, réduisant le problème à un espace symplectique de dimension encore moindre et ainsi de suite.

Puisque nous ne considérons que des espaces vectoriels finis, cette procédure s'arrête nécessairement. Cela nous laisse alors avec une base $b_1 = e_1, b_2 = f_1, \ldots, b_{2n} = f_n$ de V vérifiant (pour $i < j$) $\omega(b_i, b_j) = 0$, sauf si $i = 2k - 1$ et $j = 2k$, dans quel cas $\omega(b_i, b_j) = 1$. Définissons une application $\rho : V \to \mathbb{R}^{2n}$ envoyant cette base vers la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$ et étendue par linéarité. Cette application vérifie toutes les propriétés du théorème. $\square$

Définition 2.1.3. *Soient (V, ω) et (W, η) deux espaces vectoriels symplectiques. Une application linéaire $L : V \to W$ est un* ***symplectomorphisme (linéaire)*** *si $\omega = L^*\eta$. Si de surcroît l'inverse de L existe et s'il s'agit aussi d'un symplectomorphisme, alors V et W sont dits* ***symplectomorphes****.*

Nous pouvons reformuler le théorème de classification ainsi : « tout espace symplectique (V, ω) est symplectomorphe à un espace standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. » Une propriété importante des symplectomorphismes linéaires est leur injectivité.

Proposition 2.1.2. *Soit $L : (V, \omega) \to (W, \eta)$ un symplectomorphisme. Alors L est injective.*

Démonstration. Il nous faut prouver que le noyau $K = \ker L$ est trivial. Soit $x \in K$ un élément arbitraire. Quel que soit $y \in V$, nous calculons que $\omega(x, y)$ vaut $(L^*\eta)(x, y) = \eta(Lx, Ly) = \eta(0, Ly) = 0$. La non-dégénérescence de ω implique alors $x = 0$, ce qui termine la preuve. $\square$

Définition 2.1.4. *Étant donné un espace symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, l'ensemble $\mathrm{Sp}(2n)$ est défini comme l'ensemble des automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^{2n}$ préservant la forme standard. Plus généralement, pour un espace vectoriel symplectique (V, ω), l'ensemble des endomorphismes symplectiques est noté $\mathrm{Sp}(\omega)$.*

Il est aisé de montrer que $\mathrm{Sp}(2n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^{2n})$ sous la multiplication matricielle et que $\mathrm{Sp}(\omega)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gl}(V)$ sous la composition. Le théorème de classification implique que pour tout (V, ω), il existe un unique entier n tel que $\mathrm{Sp}(\omega) \cong \mathrm{Sp}(2n)$, l'isomorphisme étant induit par $\rho : (V, \omega) \to (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Ce constat permet la réinterprétation suivante du théorème de classification : « pour une action de $\mathrm{Sp}(2n)$ sur (V^{2n}, ω) et pour son action évidente sur $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, il existe un isomorphisme $\rho : V \to \mathbb{R}^{2n}$ qui soit $\mathrm{Sp}(2n)$-équivariant. » Nous mettrons cet énoncé en perspective au chapitre 3 alors que nous discuterons des actions symplectiques de groupe.

Les résultats de cette section montrent une certaine ressemblance entre les espaces vectoriels symplectiques et les espaces vectoriels préhilbertiens, c'est-à-dire ceux munis d'un produit scalaire. Cela n'a rien de bien étonnant considérant que ces deux notions diffèrent seulement par la symétrie de la forme bilinéaire non dégénérée. Un exemple notable : ces deux types d'espaces admettent une classification similaire, les espaces hilbertiens finis de dimension n admettant toujours une base (dite orthonormée) selon laquelle le produit scalaire s'exprime sous la forme usuelle.

2.2. Les variétés symplectiques

Alors qu'un produit scalaire permet de définir la distance entre deux points et l'angle entre deux courbes s'intersectant dans un espace vectoriel, la géométrie riemannienne permet d'en faire autant pour les variétés différentiables en profitant de la ressemblance locale de ces variétés à des espaces vectoriels pour lesquels un produit scalaire est disponible. Par analogie, il est possible de définir la notion de variété symplectique en introduisant localement des formes symplectiques.

Définition 2.2.1. *Soit M une variété différentiable. Une* ***forme symplectique sur*** *M est une 2-forme différentielle fermée ω se restreignant sur chaque plan tangent T_pM à une forme symplectique linéaire. Un tel couple (M, ω), ou seulement M si la forme est sous-entendue, est une* ***variété symplectique****.*

Notons qu'un espace vectoriel symplectique (V, η) peut naturellement être perçu comme une variété symplectique (V, ω) en identifiant chaque espace tangent T_pV avec V et chaque forme ω_p avec η. La fermeture de ω suit par son invariance sous toutes les translations. Les détails sont laissés au lecteur.

À la différence de la géométrie riemannienne dont le champ d'étude est assez vaste du fait que toute variété différentiable admet au moins une métrique riemannienne, l'existence d'une forme symplectique sur une variété nécessite le respect de contraintes topologiques strictes. À la vue du théorème 2.1.1, une variété symplectique M est nécessairement de dimension paire. Une conséquence plus subtile de la définition est l'orientabilité de la variété : si M est de dimension $2n$, alors la non-dégénérescence de ω est équivalente à la non-annulation de la $2n$-forme $\wedge^n \omega$ sur M, soit à l'orientabilité de M.

Remarquons l'imposition d'une condition spéciale dans la définition d'une forme différentielle symplectique ω, à savoir l'équation différentielle $\mathrm{d}\omega = 0$. Une grande partie des résultats que nous rencontrerons dans ce mémoire serait invalidée si cette condition était ignorée. Notons déjà qu'elle implique qu'une variété symplectique possède certaines classes de cohomologie distinguées, à savoir celles construites à partir de la classe $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$.

Définition 2.2.2. *Une variété symplectique (M, ω) est dite* ***exacte*** *si la classe de cohomologie de ω est triviale, c'est-à-dire s'il existe globalement une 1-forme différentielle λ telle que $\omega = \mathrm{d}\lambda$.*

Par exemple, si M est telle que $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$, alors toute forme symplectique sur M est exacte. Ce constat a quelques conséquences. Une d'elles est que si M est aussi fermée, c'est-à-dire compacte et sans bord, alors aucune forme symplectique n'existe. En effet, c'est un fait général qu'il y a égalité des classes de cohomologie $[\wedge^n \omega]$ et $\smile^n [\omega]$, de sorte que $[\omega] = 0$ implique $[\wedge^n \omega] = 0$. M était supposée fermée, l'intégration de $2n$-formes descend au niveau de la cohomologie et donne en fait un isomorphisme linéaire $\int_M : H^{2n}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Ainsi, $\int_M \wedge^n \omega = 0$, ce qui n'est possible par continuité que si la forme $\wedge^n \omega$ s'annule quelque part. Autrement dit, n'importe quelle 2-forme fermée ω sur M doit être dégénérée en un point et ne peut ainsi pas être symplectique. En particulier, bien qu'elles soient toutes de dimension paire et orientables, les sphères S^{2n} pour $n > 1$ ne sont pas symplectifiables. Plus généralement, une variété symplectique exacte ne peut être compacte.

Une classe importante de variétés exactes est celle des fibrés cotangents. Si X^n est une variété différentiable quelconque, alors son fibré cotangent $M^{2n} = T^*X$ est naturellement symplectifiable, la forme symplectique étant par ailleurs exacte. Notons $\pi : M \to X$ la fibration évidente. Soient $(q, p) \in M$ où $q \in X$ et $p \in T^q X$ et $v \in T_{(q,p)}M$. Alors nous définissons une 1-forme globale λ sur M, appelée la *forme de Liouville* ou la *forme tautologique*, par $\lambda(v) = p(\pi_{*(q,p)} v)$. Ceci est bien défini, car $\pi_{*(q,p)} : T_{(q,p)}M \to T_q X$ et $p : T_q X \to \mathbb{R}$ sont linéaires. Posons $\omega = \mathrm{d}\lambda$, une 2-forme nécessairement fermée. Pour montrer qu'il s'agit d'une forme symplectique, il suffit alors de s'assurer qu'elle est non dégénérée. Pour ce faire, le plus simple est de travailler dans des trivialisations appropriées et de constater que dans ces coordonnées, ω correspond à une forme symplectique standard de $\mathbb{R}^{2n}$. Cette étape n'est pas difficile, mais un peu longue à exposer pour nos besoins ; c'est pourquoi le lecteur est invité à consulter la preuve dans l'une des références en bibliographie. Mentionnons que les fibrés cotangents sont d'une importance capitale en physique : ils servent à formaliser géométriquement l'approche hamiltonienne à la mécanique, X étant alors compris comme l'espace de configuration d'un système physique.

2.3. Les symplectomorphismes

Dans la précédente section, nous avons identifié quelques contraintes de nature topologique sur une variété pour que l'existence d'une forme symplectique sur celle-ci soit possible. Il s'avère qu'une fois l'existence d'une forme symplectique ω sur M établie, l'existence d'une infinité d'autres s'en suit : si $\phi : M \to M$ est un difféomorphisme quelconque, alors $(M, \phi^*\omega)$ est aussi une variété symplectique. Les formes ω et $\phi^*\omega$ étant généralement différentes, les variétés symplectiques (M, ω) et $(M, \phi^*\omega)$ sont généralement distinctes. Il semble cependant clair que ces deux variétés détiennent la même information, qu'elles ont des structures « isomorphes ». Plus précisément, ces deux variétés sont *symplectomorphes*.

Définition 2.3.1. *Soient (M, ω) et (N, η) deux variétés symplectiques. Une application différentiable $f : M \to N$ est un **symplectomorphisme** si $\omega = f^*\eta$. Si de surcroît l'inverse de f existe et s'il s'agit aussi d'un symplectomorphisme, alors M et N sont dits **symplectomorphes**.*

Cette notion de symplectomorphisme étend aux variétés symplectiques celle définie plus haut entre espaces vectoriels symplectiques : la différentielle d'un symplectomorphisme agit sur chaque espace tangent comme un symplectomorphisme linéaire. Par ailleurs, interprétant les espaces vectoriels symplectiques comme des variétés symplectiques, tous les symplectomorphismes linéaires sont automatiquement des symplectomorphismes de variétés.

Une problématique intéressante est la classification des diverses variétés symplectiques non isomorphes existantes. Plus précisément, la définition ci-dessus montre clairement que deux variétés symplectomorphes sont difféomorphes. Le programme de classification des variétés symplectiques peut alors se décomposer comme suit :

Existence : Déterminer les classes de variétés difféormorphes admettant une forme symplectique.

> **Énumération :** Pour chaque classe de variétés difféomorphes symplectifiable, déterminer toutes les structures symplectiques non isomorphes.

Il se trouve que ce problème est bien plus difficile que celui de la classification des espaces vectoriels symplectiques (que nous avons déjà résolu dans la section 2.1.). Ce n'est pas un objectif de ce mémoire de relater les divers efforts et avancées effectués dans ce sujet, malgré quelques mentions notables. Ce problème nous servira plutôt de phare, permettant d'éclairer les divers résultats qui seront présentés sous un angle fort intéressant. Pour cela, il faut d'abord mieux comprendre ce que sont les symplectomorphismes et comment les variétés symplectiques sont liés via ceux-ci.

Proposition 2.3.1. *Soit $f : (M, \omega) \to (N, \eta)$ un symplectomorphisme. Alors f est une immersion.*

DÉMONSTRATION. Soit p un point quelconque de M. Nous souhaitons montrer que le noyau de la différentielle $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N$ est trivial. Cela découle directement de la proposition 2.1.2.. $\square$

Nous déduisons alors qu'un symplectomorphisme est localement injectif, c'est-à-dire que tout point $p \in M$ admet un voisinage ouvert U tel que $f|_U : U \to N$ est une application injective. Dans les cas où f est aussi une submersion, f est alors un difféomorphisme local et il est immédiat que l'inverse local de f est un symplectomorphisme. Ainsi, deux variétés symplectiques sont symplectomorphes si et seulement si elles ont même dimension et s'il existe un symplectomorphisme injectif de l'une vers l'autre. Dans le même ordre d'idées, si $\rho : M \to N$ est un revêtement différentiable et si η est une forme symplectique sur N, il existe alors une unique forme symplectique ω sur M telle que ρ est un symplectomorphisme. Dans le cas où l'application de revêtement est injective, cette construction rejoint celle de la discussion précédant la définition de symplectomorphisme.

Parmi le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ d'une variété symplectique (M, ω), nous pouvons considérer le sous-ensemble $\mathrm{Symp}(\omega)$ des symplectomorphismes de ω, c'est-à-dire des applications $f : M \to M$ vérifiant $\omega = f^*\omega$. Il est facile de montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe. Afin d'étudier les propriétés de ce groupe, en se fiant au succès de la théorie des groupes de Lie finis, il est avantageux de débuter par l'étude de son algèbre de Lie, $\mathfrak{symp}(\omega)$. Cependant, nous prouverons bientôt que ce groupe a la particularité d'être de dimension infinie, ce qui complique une analyse rigoureuse de ce genre de questions. Qu'à cela ne tienne, notre intuition nous amène à penser que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Diff}(M)$

n'est nul autre que l'ensemble $\mathfrak{diff}(M) = \mathcal{X}(M)$ des champs vectoriels lisses sur M muni du crochet de Lie. L'exponentiation $\exp : \mathcal{X}(M) \dashrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ est alors l'évaluation du flot d'un champ vectoriel au temps 1, pour autant que cette application soit bien définie. À partir de ces considérations, nous pouvons caractériser $\mathfrak{symp}(\omega)$ de la façon suivante. Supposons que $X \in \mathfrak{symp}(\omega)$ génère localement autour de $p \in M$ un flot $\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \dashrightarrow M$, alors nous avons par définition de symplectomorphisme

$$(\mathcal{L}_X \omega)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t^* \omega)(p) - \omega(p)}{t} = 0.$$

Inversement, si $\mathcal{L}_X(\omega) = 0$ partout, alors X est le générateur d'un sous-groupe local à un paramètre de $\mathrm{Symp}(\omega)$. Nous avons ainsi obtenu que $\mathfrak{symp}(\omega)$ correspond au sous-espace vectoriel $\{X \in \mathcal{X}(M) \,|\, \mathcal{L}_X \omega = 0\}$. Par la formule de Cartan et par fermeture de ω, $\mathfrak{symp}(\omega) = \{X \in \mathfrak{diff}(M) \,|\, X \lrcorner\, \omega \text{ est fermée}\}$. La non-dégénérescence de ω implique que l'application $\omega(\cdot,)$ est un isomorphisme entre $\mathcal{X}(M)$ et $\Omega^1(M)$ dont la restriction est un isomorphisme entre $\mathfrak{symp}(\omega)$ et les 1-formes fermées $Z^1(M)$.

Pour $X, Y \in \mathfrak{symp}(\omega)$, considérons $[X, Y] \in \mathfrak{diff}(M)$. Pour montrer que $\mathfrak{symp}(\omega)$ est stable sous les crochets de Lie, il suffit de prouver que $[X, Y] \lrcorner\, \omega$ est fermée. Utilisant $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ et la règle de Leibniz, nous calculons que cette 1-forme est égale à $\mathcal{L}_X(Y \lrcorner\, \omega) - Y \lrcorner\, \mathcal{L}_X \omega$. Le second terme est nul par définition de X et le premier terme se récrit $X \lrcorner\, \mathrm{d}(Y \lrcorner\, \omega) - \mathrm{d}(\omega(X, Y))$ grâce à la formule de Cartan. Par définition de Y, $\mathrm{d}(Y \lrcorner\, \omega) = 0$, nous donnant l'expression $[X, Y] \lrcorner\, \omega = -\mathrm{d}(\omega(X, Y))$ et par le fait même la fermeture recherchée. Autrement dit, $\mathfrak{symp}(\omega)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{X}(M)$.

Définition 2.3.2. *Un champ vectoriel $X \in \mathfrak{symp}(\omega)$ est qualifié de **symplectique**. S'il est tel que $X \lrcorner\, \omega$ est une 1-forme exacte, alors X est un **champ vectoriel hamiltonien**. L'ensemble des champs hamiltoniens de (M, ω) est noté $\mathfrak{ham}(\omega)$. Une **fonction hamiltonienne** H pour un champ hamiltonien X est une fonction $H : M \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}H = X \lrcorner\, \omega$. Au besoin, X est alors noté X_H.*

Puisque l'algèbre $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ des fonctions réelles lisses est de dimension (réelle) infinie pour $\dim M > 0$ et que seules les fonctions (localement) constantes sont annihilées par la dérivation extérieure, nous obtenons bien que $\mathfrak{ham}(\omega)$ est de dimension réelle infinie. Cela donne une bonne idée de l'immense quantité de symplectomorphismes qu'admet une variété symplectique.

2.4. Les algèbres et variétés de Poisson

Définition 2.4.1. *Le quadruplet* $(A, +, \star, \{\cdot, \cdot\})$ *est une* ***algèbre de Poisson*** *si les trois conditions suivantes sont réunies :*

(1) $(A, +, \star)$ *est une algèbre réelle ou complexe,*

(2) $(A, +, \{\cdot, \cdot\})$ *est une algèbre de Lie,*

(3) pour tout $f, g, h \in A$*, la règle de Leibniz* $\{f, g \star h\} = \{f, g\} \star h + g \star \{f, h\}$ *est satisfaite.*

L'opération $\{\cdot, \cdot\}$ *est appelée le* ***crochet de Poisson*** *de l'algèbre.*

L'exemple le plus connu d'algèbre de Poisson est l'ensemble des endomorphismes $\mathrm{End}(V)$ d'un espace vectoriel V, le produit étant donné par la composition d'endomorphismes $\circ$ et le crochet par le commutateur $\{A, B\} = A \circ B - B \circ A$.

L'intérêt de ce concept pour la topologie symplectique tient au fait que l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions lisses, muni de l'addition et de la multiplication usuelles, admet naturellement une structure d'algèbre de Poisson lorsque M est une variété symplectique (M, ω).

Définition 2.4.2. *Soit* (M, ω) *une variété symplectique. Le crochet de Poisson sur* $(C^\infty(M), +, \cdot)$ *associé à* ω *est donné par*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) \text{ quels que soient } f, g \in C^\infty(M) \ .$$

Remarquons que nous avons $\{f, g\} = \mathrm{d}f(X_g) = -\mathrm{d}g(X_f)$, indiquant que le crochet de Poisson mesure (à un signe près) la dérivée d'une fonction le long du flot (du champ vectoriel) hamiltonien assosié à une autre. La bilinéarité et l'antisymétrie de ce crochet sont clairs. La règle de Leibniz du crochet suit de la règle de Leibniz pour la dérivée extérieure. Pour l'identité de Jacobi, elle découle du résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *L'application* $\delta : C^\infty(M) \to \mathfrak{diff}(M)$ *donnée par* $H \overset{\delta}{\mapsto} X_H$ *est un homomorphisme d'algèbres de Lie.*

Démonstration. La linéarité de l'application est claire. L'application envoie aussi le crochet de Poisson sur le crochet de Lie $[-, -]_{\mathrm{Diff}(M)}$, ce qui est opposé à $[-, -]$ selon nos conventions de la section 1.3. En effet, nous avons déjà montré dans la précédente section que $-[X_f, X_g] \lrcorner\, \omega = \mathrm{d}(\omega(X_f, X_g))$. Ceci vaut $\mathrm{d}\{f, g\}$

par définition du crochet de Poisson, soit encore $X_{\{f,g\}} \lrcorner\, \omega$ par définition de δ. La forme ω étant non dégénérée, cela implique bel et bien $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]_{\mathrm{Diff}(M)}$.

Pour compléter la preuve de cette proposition, il ne reste qu'à montrer que $(C^\infty(M), +, \{-,-\})$ est une algèbre de Lie en prouvant que l'identité de Jacobi est vérifiée. Nous avons

$$\begin{aligned}
\{\{f,g\},h\} &= \omega(X_{\{f,g\}}, X_h) = \omega(X_h, [X_f, X_g]) = \omega(X_h, \mathcal{L}_{X_f} X_g) \\
&= \mathcal{L}_{X_f}\left(\omega(X_h, X_g)\right) - \left(\mathcal{L}_{X_f}\omega\right)(X_h, X_g) - \omega(\mathcal{L}_{X_f} X_h, X_g) \\
&= \mathcal{L}_{X_f}\{h,g\} - \left(X_f \lrcorner\, \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(X_f \lrcorner\, \omega)\right)(X_h, X_g) + \omega(X_g, \mathcal{L}_{X_f} X_h) \\
&= \mathrm{d}\{h,g\}(X_f) - \mathrm{d}\omega(X_f, X_h, X_g) - (\mathrm{d}^2 f)(X_h, X_g) + \{\{f,h\},g\} \\
&= \{f,\{g,h\}\} - \mathrm{d}\omega(X_f, X_h, X_g) - \{\{h,f\},g\} \\
\Rightarrow \quad & \{\{f,g\},h\} + \{\{g,h\},f\} + \{\{h,f\},g\} = \mathrm{d}\omega(X_f, X_g, X_h) = 0\,.
\end{aligned}$$

Cette preuve montre bien l'importance de la fermeture de ω pour la satisfaction de l'identité de Jacobi et motive cette condition *a posteriori*. □

Lemme 2.4.1. *Soient (M,ω) et (N,η) deux variétés symplectiques telles qu'il existe un symplectomorphisme $\psi : M \to N$ qui soit submersif. Alors quels que soient $f, g \in C^\infty(N)$, nous avons $\{\psi^* f, \psi^* g\}_M = \psi^*\{f,g\}_N$.*

Démonstration. Soient un symplectomorphisme $\phi : (M,\omega) \to (N,\eta)$, une fonction $f \in C^\infty(N)$ et un vecteur $Y = \phi_{*m} Z$ dans $\mathrm{Im}\,\phi_{*m}$, alors

$$\begin{aligned}
\left((\phi_{*m} X_{\phi^* f}) \lrcorner\, \eta\right)(Y) &= \eta_{\phi(m)}(\phi_* X_{\phi^* f}, Y) = \omega_m(X_{\phi^* f}, Z) \\
&= (\mathrm{d}(\phi^* f))(Z) = (\phi^*(\mathrm{d}f))(Z) = \mathrm{d}f(\phi_* Z) \\
&= \eta(X_f, Y) = (X_f \lrcorner\, \eta)(Y)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi_* X_{\phi^* f} - X_f \in (\mathrm{Im}\,\phi_*)^\eta$; donc pour ψ comme dans l'énoncé, nous avons $(\mathrm{Im}\,\psi_*)^\eta = \{0\}$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\{\psi^* f, \psi^* g\}_M(m) &= \omega_m(X_{\psi^* f}, X_{\psi^* g}) = \eta_{\psi(m)}(\psi_* X_{\psi^* f}, \psi_* X_{\psi^* g}) \\
&= \eta_{\psi(m)}(X_f, X_g) = \{f,g\}_N(\psi(m))\,.
\end{aligned}$$

□

Le fait que l'espace des fonctions lisses d'une variété symplectique soit naturellement doté d'un crochet de Poisson motive la généralisation suivante de la notion de variété symplectique.

Définition 2.4.3. *Une variété différentiable M est une* ***variété de Poisson*** *si un crochet de Poisson sur $C^\infty(M)$ est spécifié.*

Dans ce contexte, la règle de Leibniz nous permet de définir une application $\delta : C^\infty(M) \to \mathfrak{diff}(M)$ associant à la fonction f la dérivation sur les fonctions, c'est-à-dire le champ vectoriel, $X_f = \{-, f\}$. Nous avons encore $\{f, g\} = X_g f = \mathrm{d}f(X_g)$ et l'énoncé de la proposition 2.4.1 tient toujours. En effet, quels que soient $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}[]
[\delta(f), \delta(g)]h &= -[X_f, X_g]h = -(X_f \circ X_g - X_g \circ X_f)h = X_f\{h, g\} - X_g\{h, f\} \\
&= \{\{h, g\}, f\} - \{\{h, f\}, g\} = -\{f, \{h, g\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\
&= \{h, \{g, f\}\} = \{\{f, g\}, h\} = \delta(\{f, g\})h\,.
\end{aligned}$$

Tout comme dans le cas symplectique, l'application δ se décompose uniquement sous la forme $b \circ \mathrm{d}$ avec $b : \Omega^1(M) \to \mathfrak{diff}(M)$ linéaire. En fait, b est obtenue d'une collection d'applications $b|_p : T_p^*M \to T_pM$ pour p parcourant M. Cependant, ces applications des espaces cotangents aux espaces tangents ne sont généralement pas injectives, au contraire du cas symplectique. Plus précisément, en tout point p de M, la restriction en p des champs vectoriels images de δ nous donne une collection de vecteurs de T_pM formant par linéarité un sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_p$.

Définition 2.4.4. *Pour p un point quelconque d'une variété de Poisson M, le* ***rang de la variété en*** *p est la dimension de l'image de δ restreinte à T_pM, c'est-à-dire de $\mathcal{D}_p$.*

Dans cette terminologie, une variété symplectique est tout simplement une variété de Poisson de rang constant égal à la dimension de l'espace, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_p = T_pM$ partout. Plus généralement, la collection $\{\mathcal{D}_p\}_{p\in M}$ est une distribution (de rang possiblement variable) sur M et nous la qualifions de **canonique**.

Théorème 2.4.1. *La distribution canonique est intégrable au sens de Frobenius-Hermann et chaque feuille hérite d'une structure de variété symplectique.*

Démonstration. Étant donné que l'application δ envoie le crochet de Poisson sur le crochet de Lie, cette distribution est en involution au sens de Frobenius. Elle s'avère aussi de « rang constant » au sens de Hermann[1] . En vertu du théorème 1.41 énoncé à la page 40 dans [**14**], la distribution canonique est intégrable.

Montrons d'abord que chaque $\mathcal{D}_m$ hérite d'une structure d'espace vectoriel symplectique. Soient $X, Y \in \mathcal{D}_m$; par définition, il existe localement des fonctions f, g telles que $X = \delta(f)_m$ et $Y = \delta(g)_m$. Nous posons

$$\omega_m(X, Y) = \{f, g\}(m)\,.$$

Ceci est bien défini : par exemple, si $X = \delta(f')_m$, alors $\{f - f', -\}$ est la dérivation nulle en m et donc $\{f - f', g\}(m) = 0$ pour tout g. Il est clair que ω est une forme bilinéaire alternée. Elle est non dégénérée, car si $\omega(X, \delta(-)) = 0$, alors puisque $\omega(X, \delta(-)) = X(-)$, nous avons $X = 0$.

Pour toute feuille N de la distribution canonique, la collection $\{\omega_m\}_{m\in N}$ définit évidemment une 2-forme différentielle non dégénérée ω sur N. Puisque le crochet de Poisson satisfait l'identité de Jacobi, la démonstration de la proposition 2.4.1 prouve que $\mathrm{d}\omega = 0$. $\square$

La catégorie des variétés de Poisson forme le cadre d'étude naturel de plusieurs des considérations abordées dans ce mémoire. Cela justifie l'intérêt que nous leur porterons à l'occasion, mais nous n'exposerons pas systématiquement la théorie sous cette perspective générale. Pour plus de détails sur les variétés de Poisson, le lecteur est renvoyé au chapitre 6 du livre de Olver, [**14**].

2.5. Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein

Le théorème de Darboux est un résultat primordial en topologie symplectique. Il généralise en quelque sorte le théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques en indiquant que toute variété symplectique (M^{2n}, ω) ressemble localement à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Plus précisément :

Théorème 2.5.1 (Darboux)**.** *Soit* (M^{2n}, ω) *une variété symplectique. Alors pour tout point* $p \in M$*, il existe une carte (lisse)* $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ *autour de* p *telle que* ϕ *soit un symplectomorphisme entre* $(U, \omega|_U)$ *et* $(V, \omega_0|_V)$*.*

1. Consulter la page 39 dans [**14**] pour la définition de « rang constant » au sens de Hermann ainsi que le corollaire 6.17 à la page 401 pour la démonstration de notre affirmation.

Pour nos besoins ultérieurs de la version équivariante de ce théorème due à Weinstein (voir chapitre 3), nous démontrerons ce théorème via celui de Darboux-Moser-Weinstein qui utilise l'argument de Moser. Cette approche est bien connue dans la littérature et peut être trouvée dans les ouvrages de Guillemin et Sternberg ([**6**], section 22), de McDuff et Salamon ([**13**], section 3.2) et de Woodhouse ([**18**], section 1.4). Le théorème de Darboux lui-même se démontre par une approche plus géométrique exposée dans le livre d'Arnold ([**1**], section 43B) et qui est généralisée aux variétés de Poisson dans celui d'Olver ([**14**], p.404-406).

L'argument de Moser

Étant donné une famille (ω_t) de formes symplectiques sur M, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ vérifiant pour une certaine famille de 1-formes (σ_t) la condition d'exactitude

$$\frac{d}{dt}\omega_t = \mathrm{d}\sigma_t\,, \tag{2.5.1}$$

existe-t-il une famille de difféomorphismes (ψ_t) de M telle que[2] $\psi_t^*\omega_t = \omega_0$? L'argument de Moser établit une condition suffisante pour répondre à cette question par l'affirmative. Par la non-dégénérescence des formes symplectiques ω_t, il existe une unique famille de champs vectoriels (X_t) sur M satisfaisant la relation

$$X_t \lrcorner\, \omega_t + \sigma_t = 0\,, \quad \text{en tout temps et en tout point.}$$

Ainsi nous avons qu'en tout instant t

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}(X_t \lrcorner\, \omega_t + \sigma_t) = X_t \lrcorner\, \mathrm{d}\omega_t + \mathrm{d}(X_t \lrcorner\, \omega_t) + \mathrm{d}\sigma_t \\ &= \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \mathrm{d}\sigma_t = \mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{ds}\omega_s\bigg|_{s=t}\,. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la famille de champs (X_t) soit globalement intégrable[3] et qu'un flot ψ_t existe pour la durée $t \in (a,b)$. En d'autres termes,

2. Pour la durée de cette discussion sur l'argument de Moser, ω_0 ne dénotera pas une forme standard sur un quelconque espace $\mathbb{R}^{2n}$.

3. L'existence et l'unicité d'une solution pour une certaine durée sont localement assurées par un fameux théorème de la théorie des équations différentielles linéaires, mais l'existence globale n'est pas garantie. Cependant, si M s'avère compact, une solution globale existe nécessairement.

supposons qu'il existe une famille de difféomorphismes (ψ_t) de M vérifiant en tout instant $t \in (a, b)$:

$$\frac{d}{ds}\psi_s\bigg|_{s=t} = X_t \circ \psi_t\,,\ \psi_0 = Id\,.$$

Dans ce cas, nous avons en tout instant t

$$\begin{aligned}
0 &= \psi_t^*\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t + \frac{d}{ds}\omega_s\bigg|_{s=t}\right) = \psi_t^*\left(\frac{d}{ds}\psi_s^*\omega_t\bigg|_{s=0} + \psi_0^*\,\frac{d}{ds}\omega_{t+s}\bigg|_{s=0}\right) \\
&= \psi_t^*\left(\frac{d}{ds}\psi_s^*\omega_{t+s}\bigg|_{s=0}\right) = \frac{d}{ds}(\psi_s \circ \psi_t)^*\omega_{t+s}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\psi_s^*\omega_s\bigg|_{s=t}\,.
\end{aligned}$$

La famille (ψ_t) vérifie donc bien $\omega_0 = \psi_t^*\omega_t$ quel que soit t.

L'intérêt d'une réponse affirmative à la question que nous avons posée précédemment est que pour deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 sur une variété M, pour démontrer que (M, ω_0) est symplectomorphe à (M, ω_1), il est suffisant de trouver des familles $(\omega_t) \subset \Omega^2(M)$ et $(\sigma_t) \subset \Omega^1(M)$ vérifiant $d\omega_t/dt = \mathrm{d}\sigma_t$. En effet, le difféomorphisme ψ_1 construit ci-haut sera alors tel que $\psi_1^*\omega_1 = \omega_0$.

Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein

L'argument de Moser nous servira à prouver le théorème suivant.

Théorème 2.5.2. *Soient M^{2n} une variété, N une sous-variété (plongée) compacte et V un voisinage ouvert de N. Soient aussi ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques définies sur V et coïncidant sur N, c'est-à-dire que les deux formes sont égales sur chaque plan tangent T_pM pour $p \in N$. Alors il existe deux voisinages ouverts $V_0, V_1 \subset V$ de N et un difféomorphisme $\psi : V_0 \to V_1$ tels que $\psi^*(\omega_1|_{V_1}) = \omega_0|_{V_0}$ et $\psi|_N = Id$.*

Démonstration. Considérant l'argument de Moser, il nous suffit essentiellement de trouver des familles (ω_t) et (σ_t) vérifiant l'équation (2.5.1). Nous prouverons qu'en prenant $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$, il est possible de trouver une « famille constante » $\sigma_t = \sigma$ complétant la tâche.

Remarquons tout d'abord que la famille proposée (ω_t) ne consiste près de N qu'en des formes symplectiques. En effet, il est clair que pour tout $t \in [0,1]$, les ω_t sont des 2-formes différentielles fermées sur V. Nous avons aussi $\omega_t|_N = \omega_0|_N = \omega_1|_N$ quel que soit t, ce qui signifie que les ω_t sont non dégénérées sur N et donc aussi dans un voisinage de N (éventuellement plus petit que V). Ainsi, nous pouvons supposer que la famille $\omega_t = \omega_0 + t\beta$ est une famille de formes symplectiques sur V, où $\beta = \omega_1 - \omega_0$ est une 2-forme fermée valant 0 sur N.

Il nous faut prouver que $\beta = \mathrm{d}\sigma$ pour une 1-forme σ appropriée. Puisque N est une sous-variété plongée, elle admet un voisinage tubulaire [4], que nous prendrons comme étant V. De fait, il existe alors une rétraction par déformation de V sur N, c'est-à-dire une famille d'applications lisses $\{\phi_s : V \to V \mid s \in [0,1]\}$ qui sont des difféomorphismes pour $s \in [0,1)$ et vérifiant $\phi_0 = Id$, $\phi_1(V) = N$ et $\phi_s|_N = Id|_N$ pour tout s. Cette famille définit (pour $s < 1$) un champ de vecteurs variable Y_s dont elle est le flot. Pour toute forme différentielle γ sur V, nous calculons

$$\begin{aligned}\phi_1^*\gamma - \gamma &= \int_0^1 \frac{d}{dr}(\phi_r^*\gamma)\bigg|_{r=s} ds = \int_0^1 \phi_s^*(\mathcal{L}_{Y_s}\gamma)\, ds\\ &= \int_0^1 \phi_s^*(Y_s \lrcorner\, \mathrm{d}\gamma)\, ds + \mathrm{d}\int_0^1 \phi_s^*(Y_s \lrcorner\, \gamma)\, ds\,.\end{aligned}$$

En introduisant l'opérateur $I : \Omega^*(V) \to \Omega^{*-1}(V)$ défini par la relation $I(\gamma) = \int_0^1 \phi_s^*(Y_s \lrcorner\, \gamma)\, ds$, nous avons alors $\phi_1^*\gamma - \gamma = I(\mathrm{d}\gamma) + \mathrm{d}(I\gamma)$. En appliquant cette égalité au cas $\gamma = \beta$, nous obtenons

$$\beta = \beta - \phi_1^* 0 = \beta - \phi_1^*\beta = I(\mathrm{d}\beta) + \mathrm{d}(I\beta) = \mathrm{d}(I\beta)\,.$$

La 1-forme $\sigma = I\beta$ a les propriétés recherchées, ayant par ailleurs la particularité de s'annuler sur N : $\sigma|_N = I(\beta|_N) = 0$.

Pour légitimement utiliser l'argument de Moser, il ne nous reste plus qu'une condition à vérifier : l'intégrabilité sur l'intervalle $[0,1]$ du champ de vecteurs variable X_t défini par la relation $\sigma + X_t \lrcorner\, \omega_t = 0$. Puisque $\sigma|_N = 0$, le champ X_t s'annule en tout point de N en tout temps. Il est alors clair que $X_t|_N$ s'intègre globalement et pour une durée arbitrairement grande. Par l'intégrabilité locale du champ X_t, il est possible de trouver des voisinages de chaque point de N

4. Pour prouver cette affirmation, l'idée est d'introduire sur V une métrique riemannienne et d'utiliser l'application exponentielle « géodésique » pour obtenir un difféomorphisme entre un voisinage de la section nulle du fibré normal de N et un voisinage de N dans V ; voir le théorème 10.19 dans [**11**] pour plus de détails.

suffisamment petits pour que le champ y soit intégrable sur l'intervalle $[0, 1]$. Par la compacité de N, il suffit de réunir un nombre fini de ces petits ouverts pour obtenir un voisinage ouvert V_0 de N pour lequel le flot du champ X_t existe pour tout l'intervalle $t \in [0, 1]$.

L'argument de Moser prouve que le champ X_t s'intègre en un flot ψ_t définissant des voisinages $V_t = \psi_t(V_0)$ fixant la sous-variété N et tel que $\psi_1^* \omega_1 = \omega_0$. □

Preuve du théorème de Darboux

Pour démontrer le théorème de Darboux, il suffit essentiellement de préciser le théorème de Darboux-Moser-Weinstein au cas spécifique où N n'est qu'un point p d'une variété symplectique (M^{2n}, ω). Plus explicitement, en introduisant une métrique riemannienne sur M, nous pouvons obtenir un voisinage ouvert U de p dont la pré-image par l'application exponentielle donne un voisinage ouvert V de l'origine dans T_pM difféomorphe à U. Si $\exp : V \to U$ dénote l'application exponentielle, posons $\eta_1 = \exp^* \omega|_U$, de sorte que (V, η_1) soit une variété symplectique. Nous pouvons définir sur V (et en fait sur tout T_pM) une autre forme symplectique « constante » η_0 telle que $\eta_0|_{\{0\}} = \eta_1|_{\{0\}}$ en tant que formes symplectiques linéaires sur $T_{\{0\}}V$. Par le théorème de Darboux-Moser-Weinstein, il existe des voisinages V_0 et V_1 de $\{0\}$ dans V et un difféomorphisme $\psi : V_1 \to V_0$ tels que $\psi^* \eta_0 = \eta_1$. Par le théorème de classification des espaces symplectiques linéaires (théorème 2.1.1.), il existe un isomorphisme $\rho : T_pM \to \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\rho^* \omega_0 = \eta_0$. Donc, l'application $\Psi = \rho \circ \psi \circ \exp^{-1}$ est un difféomorphisme $\Psi : \exp(V_1) \to \rho(V_0)$ tel que $\Psi^* \omega_0 = \omega$, ce qui termine la preuve.

Il s'avère donc que pour toute variété symplectique (M^{2n}, ω), il est possible de trouver en tout point une carte $\Psi : U \subset M \to \mathbb{R}^{2n}$ telle que dans ces coordonnées ω s'exprime comme la forme standard ω_0. Un corollaire immédiat est la ressemblance locale de toutes les variétés symplectiques de même dimension. Il s'agit d'un résultat primordial pour la topologie symplectique, car il dénote que seule la dimension sert d'invariant local pour distinguer les variétés symplectiques. Le problème de classification de ces variétés n'en est alors pas tant un de géométrie qu'un de *topologie*, étant donné l'absence de structure locale distinctive.

Cet état des choses est parfois opposé au cas des variétés riemanniennes, pour lesquelles des invariants locaux existent et permettent une première distinction de ces objets, l'invariant par excellence étant le tenseur de courbure. Nous aimerions prendre un bref moment pour discuter cette opposition qui nous paraît quelque peu trompeuse. Il est indéniable que des différences profondes existent entre la catégorie des variétés symplectiques et celle des variétés riemanniennes, surtout dans leurs relations à la catégorie des variétés différentiables. Cependant, une catégorie beaucoup plus analogue à celle des variétés riemanniennes est celle des variétés **quasi-symplectiques**, dont les objets sont définis de la même façon que le sont les variétés symplectiques, mais pour lesquels aucune condition n'est imposée sur la dérivée extérieure de la forme *quasi*-symplectique. Dans ce cas, un invariant local évident existe, à savoir la dérivée extérieure de la forme quasi-symplectique. Cette 3-forme joue un rôle analogue à celui de la courbure de la connexion de Levi-Civita. Par exemple, il s'agit d'un résultat bien connu [5] qu'une variété riemannienne est *plate*, c'est-à-dire qu'elle admet en tout point une carte pour laquelle la métrique s'exprime de façon usuelle, si et seulement si sa courbure est identiquement nulle. Les variétés plates n'ont alors pas plus de géométrie que n'en ont les variétés symplectiques. Ce n'est donc pas à ce niveau que la différence profonde entre le cas symétrique et le cas antisymétrique se joue réellement. Nous n'explorerons pas davantage la question de cette différence dans ce mémoire.

2.6. Les structures presque complexes

Débutons par la définition de l'objet principal de cette section.

Définition 2.6.1. *Soit M une variété différentiable. Une section lisse J de* $\operatorname{End} TM$ *est une **structure presque complexe sur** M si J_m est une structure complexe pour chaque plan tangent T_mM, c'est-à-dire si $J_m^2 = -Id_{T_mM}$. Le couple (M, J) est alors une **variété presque complexe**.*

Remarquons que cette définition oblige M d'être de dimension (réelle) paire et qu'elle implique que J est une section de $\operatorname{Aut} TM$.

L'intérêt de ce concept pour la topologie symplectique provient du fait (partiellement démontré dans cette section) que les variétés presque complexes correspondent, dans un sens approprié, aux variétés quasi-symplectiques. Ceci laisse présager que les variétés symplectiques se « comporteraient » de façon similaire aux variétés complexes, pour lesquelles une impressionnante théorie a été développée. Les succès de la théorie des courbes pseudo-holomorphes semblent grandement conforter cet espoir. Cependant, sans faire de haute voltige, cette autre facette des variétés symplectiques se révèle souvent la meilleure façon de les étudier et de les comprendre.

5. Le lecteur peut consulter le théorème 7.3 de [**12**] pour une preuve.

Revenons un instant sur la preuve du théorème 2.1.1 sur la classification des espaces vectoriels symplectiques. Étant donné un espace symplectique (V, ω), nous en déduisons l'existence d'une base $\mathfrak{B} = \{e_1,\, f_1,\, \dots\, , e_n,\, f_n\}$ *symplectique*[6], c'est-à-dire vérifiant les relations $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ et $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$. Nous pouvons définir une application linéaire $J_{\mathfrak{B}} : V \to V$ dont l'action sur cette base est donnée par $e_i \mapsto f_i$ et $f_i \mapsto -e_i$. Ceci fait de $(V, \omega, J_{\mathfrak{B}})$ un espace vectoriel complexe (la multiplication par $\sqrt{-1}$ étant donnée par l'application de $J_{\mathfrak{B}}$) ayant les deux particularités suivantes.

- L'inégalité $\omega(v, Jv) > 0$ est satisfaite quel que soit $v \in V$ non nul. Nous disons que J est **dominée** par ω.
- Quels que soient $v, w \in V$, $\omega(v, w) = \omega(Jv, Jw)$: J est une transformation symplectique de ω.

Nous disons qu'un triplet (V, ω, J) vérifiant ces deux conditions est **compatible**. De manière réciproque, si (V, J) est un espace vectoriel complexe et si $\mathfrak{B} = \{e_1,\, Je_1,\, \dots\, , e_n,\, Je_n\}$ est une base de V, alors il n'existe qu'une unique structure symplectique $\omega_{\mathfrak{B}}$ telle que le triplet $(V, \omega_{\mathfrak{B}}, J)$ soit compatible et $\mathfrak{B}$ symplectique. Nous voyons ainsi que pour un espace vectoriel, la notion d'être symplectique et celle d'être complexe sont intimement liées.

Pour guider notre réflexion sur cette question dans le cas non linéaire, considérons la chose suivante. Le théorème de Darboux stipulant la ressemblance locale d'une variété symplectique (M, ω) à un espace modèle $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, nous voyons qu'il existe localement des structures presque complexes sur M compatibles avec ω. Plus explicitement, étant donné une carte (U, ϕ) pour M autour du point m telle que $\phi^*\omega_0 = \omega|_U$, il existe une structure presque complexe J_U sur U telle que les triplets (T_pU, ω, J_U) sont compatibles pour chaque point $p \in U$. Il est cependant moins clair qu'une seule structure presque complexe J globalement définie sur M soit compatible avec ω. Pour les variétés quasi-symplectiques, ceci est une question d'autant plus difficile, puisque le théorème de Darboux n'est plus disponible ; pourtant, il n'y a aucune raison évidente pour qu'une variété presque complexe ait davantage à voir avec une variété symplectique qu'avec une quasi-symplectique. De fait, la « correspondance » annoncée outrepasse le domaine de validité du théorème de Darboux.

Notons qu'étant donné une structure complexe J sur l'espace vectoriel symplectique (V, ω) dominée par ω, l'expression $\frac{1}{2}\left(\omega(v, Jw) + \omega(w, Jv)\right)$ détermine

6. Il est plutôt clair que toute autre base symplectique s'obtient en agissant sur $\mathfrak{B}$ avec le groupe $\mathrm{Sp}(\omega)$.

sur V un produit scalaire défini positif $g_{\omega,J}(v,w)$. Si de surcroît $J \in \mathrm{Sp}(\omega)$, alors ce produit scalaire vaut simplement $\omega(v, Jw)$.

En conséquence, si (M,ω) est une variété quasi-symplectique et si J est une structure presque complexe globalement dominée ou compatible avec ω, alors la construction précédente sur chaque plan tangent attribue à M une structure riemannienne $g_{\omega,J}$. L'importance de cette observation tient au fait que l'ensemble de métriques riemanniennes possède une structure bien plus simple que celle de l'ensemble des structures presque complexes ou que celle des formes quasi-symplectiques. C'est essentiellement pour cette raison que le résultat suivant tient.

Proposition 2.6.1. *Soit (M,ω) une variété quasi-symplectique. Dénotons par $\mathfrak{Met}(M)$ l'ensemble des métriques riemanniennes sur M et par $\mathcal{J}(M,\omega)$ l'ensemble des structures presque complexes sur M compatibles avec ω. Il existe alors une application $r : \mathfrak{Met}(M) \to \mathcal{J}(M,\omega)$ satisfaisant par ailleurs $r(g_{\omega,J}) = J$ quel que soit $J \in \mathcal{J}(M,\omega)$.*

Démonstration. Soit $g \in \mathfrak{Met}(M)$ quelconque. Puisque g et ω sont non dégénérés, il existe une unique section $A \in \mathrm{Aut}\, TM$ définie par la relation

$$\omega_m(v,w) = g_m(A_m v, w)\,, \quad \forall\, m \in M,\ \forall\, v, w\, \in T_m M\,.$$

La symétrie de g et l'antisymétrie de ω impliquent $g(Av,w) = -g(v,Aw)$, c'est-à-dire que A est g-antiautoadjoint. Ainsi, en notant A^* l'opérateur g-adjoint à A, nous avons $A^* = -A$. Il est résulte que l'opérateur $P := A^*A = -A^2$ est g-autoadjoint (ce qui est équivalent à dire que A est un opérateur g-normal) et g-défini positif, c'est-à-dire que $g_m(v, P_m v) = g_m(A_m v, A_m v) > 0$ pour tout $m \in M$ et pour tout $v \in T_m M$ non nul. Il existe donc une unique racine carrée Q de P qui soit g-autoadjoint et g-positif.

Les opérareurs A et P étant g-normaux et commutant, le théorème spectral pour les opérateurs normaux stipule qu'ils sont simultanément diagonalisables (cela tient évidemment en chaque point). Par définition de Q, cet opérateur est aussi diagonalisé dans une telle base et commute ainsi avec A. Il en résulte que $[Q^{-1}, A] = 0$.

Posons $J = Q^{-1}A$; sur chaque plan tangent, $J^2 = Q^{-2}A^2 = P^{-1}(-P) = -Id$, ce qui prouve que J est une structure presque complexe sur M. Par un raisonnement semblable, il est aisé de montrer qu'il s'agit d'une structure compatible avec ω. Notons qu'il n'y a aucune ambiguité dans cette construction de ce J, ce qui donne lieu à une application $r : \mathfrak{Met}(M) \to \mathcal{J}(M, \omega)$ bien définie. Si $g = g_{\omega,J}$, alors dès le départ $A = J$, d'où $P = Q = Id$ et donc $r(g_{\omega,J}) = J$. $\square$

Il en résulte que $\mathcal{J}(M, \omega)$ n'est jamais vide et qu'il est toujours possible de voir une variété quasi-symplectique comme une variété presque complexe. La réciproque est aussi vraie, mais puisque ce résultat ne nous sera d'aucune utilité dans ce mémoire, nous ne le démontrerons pas.

Remarquons pour finir que l'idée de cette preuve montre qu'il est parfois possible de trouver une structure presque complexe $J \in \mathcal{J}(M, \omega)$ vérifiant certaines conditions précises : il suffit d'arguer qu'il existe une métrique g satisfaisant des conditions telles que $r(g)$ a les propriétés recherchées. Cette approche fonctionne souvent justement parce que l'ensemble $\mathfrak{Met}(M)$ est plutôt simple, étant par exemple convexe, ce qui n'est (du moins généralement) pas le cas de $\mathcal{J}(M, \omega)$.

Chapitre 3

LES ACTIONS SYMPLECTIQUES DE GROUPES

Nous avons étudié au premier chapitre diverses propriétés des actions de groupes dans la catégorie des variétés lisses. Nous entamons dans ce chapitre le sujet d'étude central de ce mémoire en élaborant les principaux aspects des actions de groupes dans la catégorie des variétés symplectiques.

Définition 3.0.2. *Soient G un groupe de Lie et (M, ω) une variété symplectique. Une action lisse α de G sur M est dite **symplectique** si l'image de l'application $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M)$ est dans $\mathrm{Symp}(\omega)$, c'est-à-dire si $\alpha_g^* \omega = \omega$ pour tout $g \in G$.*

Notons que l'action induite $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M) : \xi \mapsto X_\xi$ est alors à valeurs dans l'algèbre des champs symplectiques $\mathfrak{symp}(\omega) = \{X \in \mathcal{X}(M) \ : \ X \lrcorner \, \omega \ \text{ est fermée}\}$.

Ce chapitre plutôt court porte sur divers aspects généraux des actions symplectiques et pave la voie vers le prochain chapitre, où un type plus spécifique et riche d'actions symplectiques sera considéré. Nous en profitons pour ratisser le sujet d'une façon un peu plus large que ne le propose la ligne directrice de ce mémoire, informant ainsi le lecteur de quelques autres propriétés et utilités des actions symplectiques.

3.1. Les orbites et les ensembles de points fixes

La question posée dans cette section est la suivante : étant donné une action symplectique de G sur (M, ω), comment se « comportent » les orbites et les ensembles de points fixes de l'action respectivement à la forme symplectique ω ? Dit autrement, si $N \subset M$ est une orbite ou un ensemble de points fixes, que pouvons-nous dire sur $\omega|_N$?

Considérons tout d'abord le cas des ensembles de points fixes et faisons l'hypothèse que le groupe de Lie G est compact. Si $H \subset G$ est un sous-groupe de Lie tel que la sous-variété $N = \mathrm{Fix}(H)$ de M est non vide, de sorte que H est aussi compact (voir proposition 1.2.1), alors N est symplectique lorsque dotée de la 2-forme restreinte $\omega|_N$. Pour montrer ceci, il suffit de montrer que ω est non dégénérée sur chaque plan T_pN quel que soit $p \in N$. Le lemme suivant s'avère utile.

Lemme 3.1.1. *Soient (M, ω) une variété quasi-symplectique et α une action du groupe de Lie compact G sur M préservant la forme quasi-symplectique. Il existe une structure presque complexe J sur M qui soit d'une part compatible avec la forme quasi-symplectique et qui soit d'autre part équivariante sous l'action de G, c'est-à-dire que $\alpha_{g*} \circ J = J \circ \alpha_{g*}$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Nous procédons conformément à la remarque faite à la fin du chapitre 2. Prenons n'importe quelle métrique riemannienne g invariante sous l'action de G. En revenant à la définition de l'application $r : \mathfrak{Met}(M) \to \mathcal{J}(M, \omega)$ de la section 2.6, il est facile de voir que $r(g)$ est une structure presque complexe ayant toutes les propriétés recherchées. $\square$

En considérant de nouveau la situation précédant le lemme, fixons n'importe quelle structure presque complexe J ayant les propriétés énoncées dans le lemme pour l'action induite de H sur M. Puisque J est équivariante sous l'action de H, nous avons $J(T_pN) \subseteq T_pN$. En d'autres termes, T_pN est stable sous l'action de J. Ce fait implique aussitôt la non-dégénérescence de ω sur T_pN : si $v \in T_pN$ est tel que $\omega(v, w) = 0$ pour tout $w \in T_pN$, alors puisque $\omega(v, w) = -g_J(v, Jw)$ avec g_J induisant un produit scalaire défini positif sur T_pN, nous avons $v = 0$.

Cette démarche fonctionne également dans le cas des variétés $N = M_H$ vérifiant $\mathrm{Fix}(H) \neq \varnothing$. Il s'agit donc aussi de sous-variétés symplectiques. Plus généralement encore, si le nombre de sous-groupes stabilisateurs de dimension n est fini, alors $N = F_n$ (voir la proposition 1.4.3) est une union finie de sous-variétés de la forme M_H et est donc elle-même symplectique. Ces résultats raffinent ceux obtenus dans la section 1.4, puisque des sous-variétés symplectiques sont automatiquement de codimension paire.

Dans le cas des orbites, il n'y a généralement rien de particulier à dire. Si $N = m^G$ est une orbite, nous avons vu au premier chapitre que le plan tangent T_pN en tout point $p \in N$ est donné par $\{X_\xi|_p : \xi \in \mathfrak{g}\}$. Puisque $\tilde{\alpha}_*$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, nous avons $[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]}$ pour tout $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$. En utilisant un résultat obtenu au deuxième chapitre, nous en déduisons que

$X_{[\xi,\eta]} \lrcorner\, \omega = \mathrm{d}(\omega(X_\eta, X_\xi))$. De prime abord, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ peut être assez complexe, tout comme l'action, ce qui ne suggère aucune contrainte générale sur la 2-forme ω restreinte à T_pN.

Il est utile de considérer la chose sous une perspective plus générale. Soit M une variété munie d'une 2-forme fermée ω ; ce peut être une variété symplectique, mais l'hypothèse de non-dégénérescence n'est pas imposée. Nous définissons sur M la **distribution caractéristique** de ω comme étant la collection

$$(\mathcal{D}_m := \{X \in T_mM \ : \ X \lrcorner\, \omega = 0\})_{m \in M} \ \subset TM\,.$$

Si (M, ω) s'avère symplectique, alors chaque $\mathcal{D}_m$ vaut $\{0\}$. Nous avons l'important résultat suivant :

Théorème 3.1.1 (Réduction)**.** *La distribution caractéristique est en involution. Ainsi, si elle est de rang constant, il s'agit d'une distribution intégrable au sens de Frobenius. De plus, en supposant que l'espace des feuilles $\bar{M}$ soit une variété et en dénotant par $\pi : M \to \bar{M}$ la projection canonique, il existe une unique forme symplectique $\bar{\omega}$ sur $\bar{M}$ telle que $\pi^*\bar{\omega} = \omega$.*

Le couple $(\bar{M}, \bar{\omega})$ est alors la **réduction symplectique** de (M, ω). Une démonstration de ce théorème est effectuée au théorème 25.2 dans [**6**].

En guise d'exemple, si (M, ω) est une variété symplectique sur laquelle le groupe de Lie G agit de façon symplectique, alors il est possible que la réduction symplectique d'une orbite $(N, \omega|_N)$ existe. Cet exemple est plutôt artificiel, mais il n'est pas si étranger à certaines utilisations importantes de la réduction symplectique que nous aurons l'occasion d'effleurer dans ce mémoire ...

3.2. Le théorème de Darboux-Moser-Weinstein équivariant

Une particularité intéressante du théorème de Darboux-Moser-Weinstein est qu'il peut être adapté au cas d'une variété symplectique (M, ω) admettant une action symplectique. Plus précisément :

Théorème 3.2.1. *Soient M^{2n} une variété, $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Diff}(M)$ une action lisse du groupe compact G et N une sous-variété (plongée) compacte de M invariante sous l'action de G. Considérons deux formes symplectiques ω_0 et ω_1 sur M invariantes sous l'action de G et coïncidant sur N, c'est-à-dire dont les restrictions à T_NM sont égales. Alors il existe deux voisinages ouverts V_0 et V_1 de N et un difféomorphisme G-équivariant $\psi : V_0 \to V_1$ tels que $\psi^*(\omega_1|_{V_1}) = \omega_0|_{V_0}$ et $\psi|_N = Id$.*

Démonstration. La preuve de ce théorème est pratiquement la même que celle du théorème original 2.5.2. Nous y avions implicitement introduit une métrique riemannienne (voir la note de bas de page 4) afin de créer une rétraction par déformation d'un voisinage tubulaire V de N vers N. Puisque G est supposé compact, nous pouvons choisir la métrique riemannienne de sorte qu'elle soit aussi invariante sous l'action de G. Du coup, la rétraction par déformation de V sur N se fait via une famille d'applications $\{\phi_s : V \to V \mid s \in [0,1]\}$ G-équivariantes. Le champ de vecteurs variable Y_s que cette famille définit est aussi invariant sous l'action de G. Il en résulte que l'opérateur $I : \Omega^*(V) \to \Omega^{*-1}(V)$ défini au théorème 2.5.2 commute avec l'action induite de G sur l'anneau $\Omega^*(V)$: pour tout $g \in G$ et $\gamma \in \Omega^k(V)$ pour $0 \leq k \leq 2n$,

$$\begin{aligned} I\alpha_g^*\gamma &= \int_0^1 \phi_s^*(Y_s \lrcorner\, \alpha_g^*\gamma)\, ds = \int_0^1 \phi_s^* \left((\alpha_{g\,*}\alpha_{g^{-1}\,*}Y_s) \lrcorner\, \alpha_g^*\gamma \right) ds \\ &= \int_0^1 \phi_s^*\alpha_g^* \left((\alpha_{g^{-1}\,*}Y_s) \lrcorner\, \gamma \right) ds = \int_0^1 \phi_s^*\alpha_g^* \left(Y_s \lrcorner\, \gamma \right) ds \\ &= \int_0^1 \alpha_g^*\phi_s^* \left(Y_s \lrcorner\, \gamma \right) ds = \alpha_g^* I\gamma\,. \end{aligned}$$

Évidemment, toutes les formes $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1 = \omega_0 + t\beta$ sont invariantes sous l'action de G et β aussi. Ainsi, la 1-forme $\sigma = I\beta$ vérifiant $\frac{d}{dt}\omega_t = \mathrm{d}\sigma$ est invariante sous l'action de G. Ainsi, le champ vectoriel symplectique variable X_t intervenant dans l'argument de Moser est G-invariant tandis que son flot ψ_t est G-équivariant à chaque instant. Le difféomorphisme $\psi = \psi_1$ vérifie toutes les propriétés de l'énoncé. □

À l'instar de la section 2.5, nous pouvons déduire de ce théorème un résultat équivariant fort similaire au théorème de Darboux : dans le contexte du théorème, si N est un point (fixe) de M, alors il est possible de trouver une carte (U, ϕ) autour de N vers un espace vectoriel symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n}, \eta)$ doté d'une représentation $G \to \mathrm{Sp}(\eta)$ de telle sorte que $\phi^*\eta = \omega$ et que ϕ soit G-équivariante.

À la différence du théorème de Darboux, le résultat ne tient que pour des voisinages de points fixes d'une action symplectique donnée. Cependant, le théorème original de Darboux découle moralement de cette version équivariante : si m est un point quelconque de la variété symplectique (M, ω), nous pouvons considérer le groupe $\mathrm{Symp}(\omega)_m$ des symplectomorphismes fixant m (qui n'est cependant pas compact). C'est dans cet esprit que nous devons comprendre la réinterprétation faite à la section 2.1 du théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques.

Une nuance plus importante distingue le théorème de Darboux et ce résultat équivariant. Pour ainsi dire, la forme symplectique linéaire « standard » η dont nous avons discuté n'est pas nécessairement la forme standard ω_0 de la section 2.1. En vue du théorème de classification, cette affirmation exige des précisions.

Rappelons-nous que la preuve originale du théorème de Darboux utilise le théorème de classification pour montrer qu'il existe des ouverts $U \subset M$ et $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ tels que (U, ω) et (V, ω_0) sont symplectomorphes. Cependant, le théorème de classification tel que nous l'avons énoncé ne fait intervenir aucune action symplectique d'un groupe G ; nous ne pouvons directement prétendre que l'isomorphisme ρ construit au théorème 2.1.1 peut être choisi G-équivariant lorsque la situation s'y prête. Pourtant, une telle chose est nécessaire pour que la forme η soit remplaçable par la forme standard ω_0 dans l'énoncé du théorème de Darboux équivariant.

Contrairement à ce que nous pouvons lire parfois [1], le théorème de classification ne tient pas dans le cas équivariant sans y apporter quelques modifications. En fait, si (V, ω) et (W, η) sont deux espaces vectoriels symplectiques de même dimension sur lesquels un même groupe de Lie G agit via des symplectomorphismes (linéaires), il n'existe pas toujours d'isomorphisme G-équivariant $\rho : V \to W$ tel que $\rho^*\eta = \omega$. En guise d'exemple simple, considérons $G = \mathrm{SO}(2) = S^1 = U(1) \subset \mathbb{C}^*$ agissant sur $V = W = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ de façon usuelle. Si $\rho : V \to W$ est S^1-équivariante, il est aisé de montrer qu'il s'agit de la multiplication par un élément $\rho \in \mathbb{C}$; il s'agit d'un isomorphisme si $\rho \neq 0$. Ainsi, $\rho^*\omega_0 = |\rho|^2\omega_0$ et donc $(V, -\omega_0)$ et (W, ω_0) ne sont pas symplectomorphes via une application S^1-équivariante, bien que n'importe quelle réflexion de $\mathrm{O}(2)$ soit un symplectomorphisme. Il en résulte que la forme symplectique $-\omega_0$ est une forme standard distincte dans le cas S^1-équivariant.

L'adaptation appropriée du théorème de classification des espaces vectoriels symplectiques dans le contexte équivariant est donnée dans [**4**]. Il s'avère que la classification des formes symplectiques linéaires « G-standards » est intimement liée aux représentations de G sur le corps des réels, des complexes et des quaternions. Plus précisément, étant donné un espace vectoriel réel V et une représentation irréductible $G \to \mathrm{Gl}\, V$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_G(V)$ des transformations

1. Par exemple, à la page 156 de [**6**].

linéaires G-équivariantes $\rho : V \to V$ est en fait un corps sur les réels. Cet ensemble s'avère donc isomorphe comme corps à $\mathbb{R}$, à $\mathbb{C}$ ou à $\mathbb{H}$ et il en va de même pour V dans la catégorie des espaces vectoriels. En laissant tomber l'hypothèse d'irréductibilité de la représentation $G \to \mathrm{Gl}\, V$, il est naturel de considérer une notion un peu plus générale : un G-module V est dit **isotypique** s'il se décompose en somme directe de G-modules irréductibles isomorphes. D'après les résultats obtenus précédemment, ceci signifie que $V \cong \mathcal{D}^m$ pour $\mathcal{D} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Les seuls G-module isotypiques V admettant possiblement plus d'une forme symplectique « G-standard » sont ceux satisfaisant $\mathrm{Hom}_G(V) \cong \mathbb{C}^m$.

Dans l'exemple du S^1-module $V = \mathbb{R}^2$ étudié plus haut, nous avons obtenu que $\mathrm{Hom}_{S^1}(V) \cong \mathbb{C}$, ce qui explique la présence de deux formes symplectiques standards distinctes. Dans le cas de l'espace symplectique $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ muni de la représentation naturelle $\mathrm{Sp}(2) \to \mathrm{Gl}(2)$, nous savons que $\mathrm{Sp}(2)$ consiste en l'ensemble des transformations linéaires de déterminant 1. Un moment de réflexion suffit alors pour constater que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sp}(2)}(\mathbb{R}^2)$ ne consiste qu'en les homothéties de centre 0 ; il s'agit du corps $\mathbb{R}$. Ceci donne une autre justification du théorème de classifications des espaces symplectiques, du moins en dimension 2.

Chapitre 4

LES ACTIONS HAMILTONIENNES DE GROUPES

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une action $\tilde{\alpha} : G \to \mathrm{Symp}(\omega)$ sur une variété symplectique induit un homomorphisme $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{symp}(\omega)$ vers les champs vectoriels symplectiques. Supposons maintenant que cette application a image dans l'ensemble des champs vectoriels hamiltoniens $\mathfrak{ham}(\omega) \subseteq \mathfrak{symp}(\omega)$ qui, rappelons-le, est $\{X \in \mathcal{X}(M) \,|\, X \lrcorner\, \omega \text{ est exacte}\}$. Nous disons dans ce cas que l'action est **faiblement hamiltonienne**. Cette situation est résumée par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & \mathbb{R}^{|\pi_0(M)|} \arrow[r, hook, "\iota"] & C^\infty(M) \arrow[r, two heads, "\delta"] & \mathfrak{ham}(\omega) \arrow[r, "0"] & 0 \\
& & & \mathfrak{g} \arrow[u, "\tilde{\alpha}_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Ici, $C^\infty(M)$ dénote l'algèbre de Poisson de la variété symplectique (M, ω), $\mathbb{R}^{|\pi_0(M)|}$ est le centre[1] de $C^\infty(M)$ constitué des fonctions réelles localement constantes et δ est l'application définie à la proposition 2.4.1. Dorénavant, nous supposerons sans perte de généralité que M est connexe, d'où $|\pi_0(M)| = 1$. Nous avons vu à la section 1.5 qu'il est toujours possible de relever $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{ham}(\omega)$ vers une fonction linéaire $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$; s'il existe un relèvement qui est par ailleurs un

1. Il est clair que $\mathbb{R}^{|\pi_0(M)|}$ est un idéal central de l'algèbre de Poisson. Inversement, pour tout élément central $f \in C^\infty(M)$, nous avons $\{f, g\} = \omega(\delta(f), \delta(g)) = 0$ quelle que soit la fonction réelle g. Puisqu'il est toujours possible d'étendre un vecteur $X \in T_m M$ en un champ de vecteur hamiltonien $\delta(g)$, la non-dégénérescence de la forme symplectique implique $\delta(f) = 0$. Ceci signifie que f est localement constante. Dans le cas particulier où M est connexe, f est donc constante.

homomorphisme d'algèbres de Lie, alors l'action est qualifiée de **hamiltonienne**. Dans ce dernier cas, un quadruplet (M, ω, G, λ) est un **système G-hamiltonien**.

Remarque : L'appellation « hamiltonienne » est celle utilisée par la majorité des auteurs. Cette désignation est justifiée par le formalisme hamiltonien de la mécanique classique, où la transformation par excellence de l'espace de phase (M, ω), à savoir l'évolution temporelle du système physique sous étude, est le flot du champ vectoriel généré par un hamiltonien $H : M \to \mathbb{R}$ via l'application δ. Cependant, Arnold [**1**] désigne ce genre d'action de groupes comme étant « Poisson », les actions « faiblement hamiltoniennes » étant ce qu'il qualifie d'actions « hamiltoniennes ». Ses conventions ont le mérite de mieux correspondre aux noms des algèbres de Lie correspondantes, mais les adopter ici engendreraient possiblement trop de confusion.

Nous avons établi à la section 1.5 quelques critères permettant de déterminer en quelles circonstances une action faiblement hamiltonienne s'avère hamiltonienne. En fait, la proposition 1.5.1 donne une condition nécessaire et suffisante sur $\tilde{\alpha}_*$ pour que cela se produise. Le corollaire à cette proposition indique qu'il est suffisant que le groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{g})$ soit trivial ; il s'agit là bien sûr d'une condition sur le groupe G.

Nous pouvons obtenir d'autres critères assurant l'existence d'un relèvement à $\tilde{\alpha}_*$, ces critères provenant davantage de conditions sur la variété symplectique. Par exemple, il suffit que la suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to \mathfrak{ham}(\omega) \to 0$ se *scinde*, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme $s : \mathfrak{ham}(\omega) \to C^\infty(M)$ vérifiant $\delta \circ s = Id_{\mathfrak{ham}(\omega)}$. Des scissions similaires se produisent dans deux situations de grand intérêt et mutuellement exclusives.

– Supposons que M^{2n} soit une variété compacte et sans bord. Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{N}(M) := \{f \in C^\infty(M) \mid \int_M f \, \frac{\omega^n}{n!} = 0\}$. Évidemment, la restriction $\delta|_{\mathcal{N}(M)}$ est un isomorphisme linéaire. Nous affirmons que $\mathcal{N}(M)$ est une sous-algèbre de Poisson de $C^\infty(M)$, de sorte que $s := \delta|_{\mathcal{N}(M)}^{-1}$ scinde bel et bien la suite exacte. Ce fait découle de l'observation plus forte selon laquelle pour tous $f, g \in C^\infty(M)$, $\{f, g\} \in \mathcal{N}(M)$. En effet, puisque $\mathcal{L}_X\omega$ est nul pour tout $X \in \mathfrak{ham}(\omega)$, nous avons

$$\{f, g\}\omega^n = (X_g f)\omega^n = \mathcal{L}_{X_g}(f\omega^n) = \mathrm{d}(f\, X_g \lrcorner\, \omega^n)\,,$$

la troisième égalité tenant en vertu de la formule de Cartan et de l'absence de $(2n+1)$-forme non triviale sur M. Le théorème de Stokes implique alors $\int_M \{f,g\}\omega^n = 0$.

– Supposons que ω soit exacte, c'est-à-dire que $\omega = \mathrm{d}\eta$ pour une certaine forme η. Posons $s : \mathfrak{ham}(\omega) \to C^\infty(M) : X \mapsto -X \lrcorner \eta$ qui est certainement une application linéaire. Quels que soient $f, g \in C^\infty(M)$, nous avons d'une part

$$(\mathrm{d} \circ s)X_f = -\mathcal{L}_{X_f}\eta + \mathrm{d}f$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \{f, s(X_g)\} &= -\mathrm{d}(s(X_g))(X_f) = -[\,\mathrm{d}g - (\mathcal{L}_{X_g}\eta)](X_f) \\ &= \{f,g\} + (\mathcal{L}_{X_g}\eta)(X_f) \\ \Rightarrow\ \{s(X_f), s(X_g)\} &= \{f,g\} - (\mathcal{L}_{X_f}\eta)(X_g) + (\mathcal{L}_{X_g}\eta)(X_{s(X_f)})\,. \end{aligned}$$

Supposons qu'un groupe G agisse de façon faiblement hamiltonienne sur la variété symplectique exacte (M, η) tout en préservant la 1-forme η (ce que nous qualifions d'**action exacte**), alors $\mathcal{L}_X\eta = 0$ pour tout $X \in \operatorname{Im}\tilde{\alpha}_*$. Les relations ci-dessus montrent ainsi que $s \circ \tilde{\alpha}_*$ est un relèvement de $\tilde{\alpha}_*$ dans la catégorie des algèbres de Lie : l'action α est donc hamiltonienne.

Cette observation implique que toute action faiblement hamiltonienne α d'un groupe *compact* G sur une variété symplectique (M, ω) est hamiltonienne. En effet, l'espace $\mathcal{S}(\omega)$ des 1-formes η telles que $\mathrm{d}\eta = \omega$ est affine et est invariant sous l'action induite de G sur $\Omega^1(M)$. Par compacité du groupe, les orbites de G dans $\mathcal{S}(\omega)$ sont compactes. Si $\mathcal{O}$ est une telle orbite et $\eta \in \mathcal{O}$, le barycentre $b_{\mathcal{O}} = \frac{1}{\mathrm{Vol}_\mu G}\int_G \alpha_g^*\eta\, d\mu_G$ est dans $\mathcal{S}(\omega)$ et est un point fixe de l'action de G. L'action α est bel et bien exacte pour $(M, b_{\mathcal{O}})$.

Ceci est de grand intérêt en physique classique, où presque toutes les variétés symplectiques rencontrées sont des espaces cotangents $(T^*C, \mathrm{d}\lambda)$ avec C un espace de configurations. Il est assez aisé de montrer que l'action sur C d'un groupe G quelconque induit une action exacte de G sur (T^*C, λ), tandis que nous venons de voir qu'une action faiblement hamiltonienne d'un groupe compact G sur $(T^*C, \mathrm{d}\lambda)$ est exacte. Il en résulte qu'une très large partie des actions qu'on peut considérer en mécanique classique sont hamiltoniennes.

Étant donné un système hamiltonien (M, ω, G, λ), il est possible de voir le morphisme $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : \xi \mapsto H_\xi(-)$ comme une fonction réelle de domaine $\mathfrak{g} \times M$, cette dernière fonction pouvant elle-même s'interpréter comme une application $\mu : M \to \mathfrak{g}^* : m \mapsto H_-(m)$. Le fait que λ soit un homomorphisme d'algèbres de Lie ne se traduit pas de façon immédiate et « naturelle » en une quelconque propriété de μ ; afin d'obtenir une traduction satisfaisante de ce fait, nous avons besoin du prochain résultat.

Lemme 4.1.1. *Soit un système hamiltonien (M, ω, G, λ), le morphisme λ étant plus explicitement décrit par les associations $\xi \mapsto H_\xi$ où $\xi \in \mathfrak{g}$. Dénotons par α l'action associée de G sur M et par G_0 la composante identité de G, c'est-à-dire la composante connexe contenant l'élément neutre de G. Alors nous avons*

$$H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi} = H_\xi \circ \alpha_g \quad \text{pour tout } g \in G_0 \text{ et tout } \xi \in \mathfrak{g} \ .$$

Démonstration. Nous avons le morphisme $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{ham}(\omega) : \xi \mapsto X_{H_\xi} = X_\xi$. Nous savons du lemme 1.3.1 que $X_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi} = \alpha_{g^{-1}*} X_\xi$. Le champ vectoriel de gauche est généré par le hamiltonien $H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi}$, tandis que celui de droite provient de $\alpha_g^* H_\xi$; en effet, comme dans le lemme 2.4.1, quel que soit $Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned}((\alpha_{g^{-1}*} X_\xi) \lrcorner\, \omega)(Y) = \omega(\alpha_{g^{-1}*} X_\xi \,,\, Y) &= \left(\alpha_{g^{-1}}^* \omega\right)(X_\xi \,,\, \alpha_{g*} Y) \\ &= \omega(X_\xi \,,\, \alpha_{g*}Y) = \mathrm{d}H_\xi(\alpha_{g*}Y) \\ &= (\alpha_g^* \mathrm{d}H_\xi)(Y) = \mathrm{d}(\alpha_g^* H_\xi)(Y) \,.\end{aligned}$$

Ainsi, les deux hamiltoniens $H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi}$ et $\alpha_g^* H_\xi = H_\xi \circ \alpha_g$ donnent lieu au même champ vectoriel hamiltonien. Pour toute paire $(g, \xi) \in G \times \mathfrak{g}$, la différence $H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi} - \alpha_g^* H_\xi$ est ainsi dans le noyau de l'application $\delta : C^\infty(M) \to \mathfrak{ham}(\omega)$ et il s'agit donc d'une constante $c = c(g, \xi)$ sur M . Nous souhaitons montrer que c est identiquement nulle sur G_0. Il est évident que $c(e, \xi) = 0$ quel que soit ξ. La suite de la démonstration procède en deux étapes. La première consiste à voir que c est nulle sur $G \times [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$; en effet, il suffit de voir que

$$\begin{aligned}H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})[\xi,\zeta]} &= H_{[\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi, \mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta]} = \{H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi} \,, H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})\zeta}\} \\ &= \{\alpha_g^* H_\xi + c(g,\xi) \,,\, \alpha_g^* H_\zeta + c(g,\zeta)\} = \{\alpha_g^* H_\xi \,,\, \alpha_g^* H_\zeta\} \\ &= \alpha_g^* \{H_\xi \,,\, H_\zeta\} = \alpha_g^* H_{[\xi,\zeta]} \,.\end{aligned}$$

Pour la seconde étape, prenons un chemin $g(t) : ([0,1];0,1) \to (G_0; g_0, g_1)$ quelconque. Posons $\eta(t) = R_{g(t)^{-1}*}\dot{g}(t)$, ce qui définit un chemin dans $\mathfrak{g}$. Remarquons qu'en $t = \tau$,

$$\frac{d}{dt}\alpha_{g(t)}(m) = X_{\eta(\tau)} \circ \alpha_{g(\tau)}(m) \;\text{ et que }\; \frac{d}{dt}\mathrm{Ad}(g(t)^{-1})\xi = \mathrm{Ad}(g(\tau)^{-1})[\xi, \eta(\tau)]\,.$$

Ainsi, nous avons que (la dépendance en t étant partout implicite afin d'alléger l'écriture)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}c(g,\xi) &= H_{\mathrm{Ad}(g^{-1})[\xi,\eta]} - \mathrm{d}(\alpha_g^* H_\xi)(\alpha_{g^{-1}*}X_\eta)\\ &= \alpha_g^* H_{[\xi,\eta]} - \omega(X_{\alpha_g^* H_\xi}\,,\, \alpha_{g^{-1}*}X_\eta)\\ &= \alpha_g^*\{H_\xi, H_\eta\} - \omega(X_{\alpha_g^* H_\xi}\,,\, X_{\alpha_g^* H_\eta})\\ &= \alpha_g^*\{H_\xi, H_\eta\} - \{\alpha_g^* H_\xi\,,\, \alpha_g^* H_\eta\} = 0\,.\end{aligned}$$

Ceci signifie que la fonction c est constante sur chaque composante connexe de G. En particulier, en prenant $g_0 = e$, nous en déduisons que c est identiquement nulle sur la composante nulle G_0, ce qui prouve le lemme. □

La preuve montre inversement que si α est une action faiblement hamiltonienne de G sur (M,ω) et si $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : \xi \mapsto H_\xi$ est un relèvement *linéaire* de $\tilde{\alpha}_*$ tel que $\lambda(\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi) = (\alpha_g^* \circ \lambda)(\xi)$ pour tout $g \in G_0$ et tout $\xi \in \mathfrak{g}$, alors λ est un morphisme dans la catégorie des algèbres de Lie.

Dénotons par $\langle\,,\,\rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ le produit de dualité. Le lien entre les applications λ et μ se résume à la relation

$$\lambda(\xi)(m) = \langle \mu(m), \xi\rangle \qquad \text{pour tout } m \in M \text{ et tout } \xi \in \mathfrak{g}\,.$$

Le lemme est alors équivalent à l'identité

$$\langle (\mu\circ\alpha_g)(m)\,,\,\xi\rangle = \langle \mu(m)\,,\,\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi\rangle \text{ pour tout } m \in M,\text{ tout } \xi \in \mathfrak{g} \text{ et tout } g \in G_0\,.$$

Nous pouvons récrire ceci à l'aide de la **représentation adjointe contragrédiente ou coadjointe de G sur $\mathfrak{g}^*$**, c'est-à-dire grâce à $\mathrm{Ad}^* : G \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}^*)$

qui associe à tout $g \in G$ l'opérateur dual $\mathrm{Ad}(g^{-1})^\dagger : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$. Ceci nous donne la traduction recherchée sur μ :

$$\alpha_g^* \mu = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mu \quad \text{pour tout } g \in G_0.$$

D'après la remarque suivant la démonstration du lemme, étant donné une action faiblement hamiltonienne α de G sur (M, ω) et une application $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ satisfaisant la condition précédente, l'application associée $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ est un morphisme d'algèbres de Lie. Ainsi, un système G-hamiltonien peut s'exprimer plutôt comme la donnée d'un quadruplet (M, ω, G, μ) et **l'application moment** associée à ce système hamiltonien est l'application μ.

La condition ci-dessus indique que l'application moment $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ est G_0-équivariante. Cette constatation nous mène naturellement à étudier les orbites de l'action coadjointe de G_0 sur $\mathfrak{g}^*$, ce qui est l'objet de la prochaine section.

Attardons-nous cependant un peu à expliquer l'appellation « moment » pour désigner cette application. Ce nom fait allusion aux diverses notions de moments en physique, telles que la quantité de mouvement (le moment linéaire) et le moment cinétique (ou angulaire). En effet, l'application moment généralise en quelque sorte ces concepts. Pour bien comprendre, considérons le cas d'un *système mécanique* (M, ω, H) où (M, ω) est l'espace de phase du système et H est la fonction hamiltonienne. Il est alors fréquent de chercher des intégrales premières de ce système, c'est-à-dire pour des fonctions $F_i : M \to \mathbb{R}$ commutant avec le hamiltonien : $\{F_i, H\} = 0$. La raison de cette quête est que le flot ϕ_i^t de chaque champ vectoriel hamiltonien $X_i = \delta F_i$ préserve à la fois la forme symplectique ω et le hamiltonien H : $\phi_i^{t*}\omega = \omega$ et $\phi_i^{t*}H = H$ pour tout i et pour tout instant t. Ces flots sont alors des symétries du système mécanique : les solutions aux équations de Hamilton sont envoyées par chaque ϕ_i^t sur d'autres solutions. Cette situation peut alors s'interpréter comme une action faiblement hamiltonienne de l'algèbre $\mathfrak{g} = \mathbb{R}\{X_1, \ldots, X_N\}$ sur (M, ω) se relevant à une action hamiltonienne via $\lambda(X_i) = F_i$. L'application $m \mapsto F_-(m)$ indique alors, en précisant l'argument $-$, quelle est la valeur de tel *moment* au point $m \in M$. Par exemple, dans le cas d'une particule libre, les transformations euclidiennes de l'espace dans lequel se meut la particule sont des symétries du système mécanique correspondant : les moments linéaires $F_i = p_i$ induisent les translations tandis que les moments angulaires $F_i = L_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j p_k$ induisent les rotations.

4.2. Les orbites coadjointes

Soient $G = G_0$ un groupe de Lie connexe et $\mathfrak{g}^*$ son algèbre de Lie duale. Comme nous l'avons vu, G agit sur $\mathfrak{g}^*$ via la représentation coadjointe :

$$\langle \mathrm{Ad}^*(g)\sigma\,,\,\xi\rangle = \langle \sigma\,,\,\mathrm{Ad}(g^{-1})\xi\rangle \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{g}^*, \text{ tout } \xi \in \mathfrak{g} \text{ et tout } g \in G.$$

Soit $\mathcal{O}$ l'orbite coadjointe passant par $\sigma \in \mathfrak{g}^*$. Nous pouvons décrire le plan tangent $T_\sigma\mathcal{O}$ en considérant toutes les courbes $g_\eta : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ de la forme $g_\eta(t) = \exp(t\eta)$ avec $\eta \in \mathfrak{g}$, puis en évaluant $\frac{d}{dt}(\mathrm{Ad}^*(g_\eta(t))\sigma)$ en $t = 0$, ce que nous notons[2] v_η. Évidemment, un tel plan tangent s'identifie par translation à un sous-espace vectoriel W_σ de $\mathfrak{g}^*$: l'élément $w_\eta \in W_\sigma$ correspondant à $v_\eta \in T_\sigma\mathcal{O}$ est implicitement donné par la relation obtenue en dérivant l'identité ci-dessus :

$$\langle w_\eta\,,\,\xi\rangle = \langle \sigma\,,\, \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}(\exp(-t\eta))\xi\,\rangle = \langle \sigma\,,\,[\xi,\eta]\rangle \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathfrak{g}\ .$$

Cette dernière relation cache en elle bien plus qu'une description des plans tangents aux orbites.

Théorème 4.2.1 (Kirillov)**.** *Soit G un groupe de Lie connexe. Son algèbre duale $\mathfrak{g}^*$ est naturellement munie d'une structure de variété de Poisson. De plus, les feuilles de la distribution canonique sont les orbites coadjointes ; en particulier, chaque orbite est une variété symplectique.*

Démonstration. Soit $f : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Notons que sa différentielle $\mathrm{d}f_\sigma : T_\sigma\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ s'identifie à une fonction linéaire $\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ qui elle-même s'identifie à un élément de $\mathfrak{g}$ via l'isomorphisme $J : \mathfrak{g} \to (\mathfrak{g}^*)^*$ défini par

$$\langle J(\xi), \sigma\rangle_{\mathfrak{g}^*} = \langle \sigma, \xi\rangle_{\mathfrak{g}} \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathfrak{g} \text{ et tout } \sigma \in \mathfrak{g}^*\ .$$

Afin d'alléger l'écriture, nous n'écrirons que $\mathrm{d}f_\sigma$ pour désigner l'élément correspondant de $\mathfrak{g}$.

2. Nous pourrions très bien utiliser la notation X_η dont nous nous servons habituellement pour désigner les champs vectoriels obtenus via une action symplectique infinitésimale, puisque c'est ce dont il s'agit. Les orbites coadjointes tenant cependant une place privilégiée dans l'édifice théorique des actions hamiltoniennes, nous préférons adopter une notation différente.

Nous définissons le crochet de deux fonctions f et g comme étant la fonction $\{f, g\}(\sigma) = \langle \sigma \, , \, [\mathrm{d}f_\sigma \, , \, \mathrm{d}g_\sigma] \rangle$. Ce crochet définit certainement une structure d'algèbre de Lie sur $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, tandis que la règle de Leibniz découle essentiellement de celle pour la dérivée extérieure d. Ainsi, ce crochet détermine bel et bien une structure de Poisson. La naturalité de ce crochet sous les morphismes d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ découle aisément de la naturalité de l'opérateur d sous les applications lisses.

Rappelons de la section 2.4 que la distribution canonique $\{\mathcal{D}_\sigma\}_{\sigma \in \mathfrak{g}^*}$ s'obtient en considérant en chaque point $\sigma \in \mathfrak{g}^*$ le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\delta(f)_\sigma = \{-, f\}(\sigma) = \langle \sigma, [-, \mathrm{d}f_\sigma] \rangle$. D'après les calculs précédant l'énoncé du théorème, ceci vaut $\langle w_{\mathrm{d}f_\sigma}, - \rangle$, de sorte que $\mathcal{D}_\sigma \subseteq T_\sigma \mathcal{O}$. En considérant les fonctions linéaires de la forme $f = \eta \in \mathfrak{g}$, nous en déduisons que $\mathcal{D}_\sigma = T_\sigma \mathcal{O}$. Ceci prouve que les orbites coadjointes sont les variétés intégrales de la distribution canonique de $\mathfrak{g}^*$. Le théorème 2.4.1 implique alors que chaque orbite hérite naturellement d'une forme symplectique Ω. Cela conclut la preuve du théorème. $\square$

Bien que nous ayons défini les orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ par l'action d'un groupe G ayant $\mathfrak{g}$ pour algèbre de Lie, cette proposition indique que les composantes connexes des orbites ne dépendent pas du groupe G particulier. En fait, ces composantes connexes s'obtiennent en intégrant la distribution canonique, distribution obtenue à partir d'un crochet de Poisson défini à même l'algèbre ! Nous aurions tout aussi bien pu partir d'une algèbre de Lie de dimension finie ; le théorème d'Ado nous indique néanmoins que ceci ne confère aucune généralité supplémentaire.

Remarquons aussi que ce théorème implique le résultat non trivial selon lequel les orbites coadjointes sont de dimensions paires. Nous déduisons aussi de cette démonstration que l'action coadjointe est hamiltonienne, chaque $\xi \in \mathfrak{g}$ servant de hamiltonien H_ξ et l'application moment sur chaque orbite n'étant que l'inclusion de ladite orbite dans $\mathfrak{g}^*$.

Revenons au contexte plus général d'un système G-hamiltonien (M, ω, G, μ) quelconque, G étant supposé connexe. L'application moment μ étant G-équivariante, elle envoie chaque orbite m^G de l'action de G sur M dans une orbite coadjointe $\mu(m)^G$. Il en résulte aussi que la différentielle μ_* envoie chaque champ vectoriel X_ξ sur le champ v_ξ. Ceci implique que chacune des restrictions $\mu : m^G \to \mu(m)^G$ est une submersion (nous avions vu ce résultat général à la section 1.2).

Un cas particulièrement intéressant de ceci se produit lorsque l'action de G sur (M, ω) est transitive, de sorte que m^G soit la variété M toute entière. Dans ces circonstances, le système hamiltonien (M, ω, G, μ) est dit **élémentaire** [3].

Théorème 4.2.2 (Kostant-Souriau)**.** *Soit (M, ω, G, μ) un système élémentaire. Alors l'image par μ de M est une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ et $\mu : M \to \mathcal{O}$ est un symplectomorphisme. Il en résulte que μ est un revêtement de $\mathcal{O}$ par M.*

Démonstration. Il est clair que $\mu(M)$ est une orbite et nous savons que μ est une submersion. Par la proposition 2.3.1, μ est une immersion (et donc un revêtement) s'il s'agit d'un symplectomorphisme.

Par transitivité, les champs X_ξ engendrent $T_m M$ pour tout m, tandis que les champs v_ξ engendrent chacun des $T_\sigma \mathcal{O}$. Ainsi, l'application moment μ est un symplectomorphisme si $\omega_m(X_\xi, X_\zeta) = \Omega_{\mu(m)}(v_\xi, v_\zeta)$ pour tout $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ et tout $m \in M$, Ω désignant ici la forme symplectique naturelle sur $\mathcal{O}$. Or,

$$\begin{aligned}(\mu^*\Omega)_m(X_\xi, X_\zeta) &= \Omega_{\mu(m)}(\mu_* X_\xi, \mu_* X_\zeta) = \Omega_{\mu(m)}(v_\xi, v_\zeta)\\ &= (\{\xi, \zeta\}_{\mathfrak{g}^*} \circ \mu)(m) = \langle \mu(m), [\xi, \zeta] \rangle = \lambda([\xi, \zeta])(m)\\ &= \{\lambda(\xi), \lambda(\zeta)\}_M(m) = \{H_\xi, H_\zeta\}_M(m)\\ &= \omega_m(X_\xi, X_\zeta)\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\mu^*\Omega = \omega$, c'est-à-dire que μ est un symplectomorphisme. □

Rappelons-nous de la section 1.5 qu'étant donné une action hamiltonienne de G sur (M, ω), un morphisme d'algèbres de Lie $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ relevant l'application $\tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{ham}(\omega)$ n'est défini qu'à un homomorphisme $\beta : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ près, soit plus explicitement à un élément $\beta \in \mathfrak{g}^*$ s'annulant sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Donc si μ_λ est l'application moment associée à un relèvement λ et si β est du type susmentionné, alors nous avons $\mu_{\lambda+\beta} = \mu + \beta$. Dans le membre de droite, β est compris comme une fonction constante sur M. De façon réciproque, en partant d'une application moment $\mu = \mu_\lambda$ et en y ajoutant $\beta \in H^1(\mathfrak{g})$, nous obtenons un nouveau relèvement $\lambda + \beta$. Ceci conduit facilement à la proposition suivante.

Proposition 4.2.1 (Kostant)**.** *Soit α une action hamiltonienne transitive de G sur (M, ω), impliquant qu'il existe un système élémentaire $(M, \omega, G, \mu_\lambda)$ associé*

3. L'idée derrière cette appellation vient aussi de la physique. Étant donné un système mécanique (M, ω, H) sur lequel un groupe G agit via des symétries, de telle sorte que (M, ω, G, μ) soit élémentaire, la connaissance d'une seule solution aux équations de Hamilton implique la connaissance de toutes les autres. Une autre raison vient de la quantification géométrique où les systèmes élémentaires correspondent aux particules dans la classification de Wigner.

à cette action. Tout revêtement G-équivariant τ d'une orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ par M s'écrit de façon unique sous la forme $\mu + \beta$ avec $\beta \in H^1(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Nous associons à l'application $\tau : M \to \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ la fonction $\nu : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : \xi \mapsto \xi \circ \tau$. Nous savons de la discussion suivant le lemme 4.1.1 qu'il s'agit d'un relèvement à $\tilde{\alpha}_*$ dans la catégorie des algèbres de Lie. Ainsi, l'association $\xi \mapsto \lambda(\xi) - \nu(\xi)$ est un morphisme dans la sous-algèbre centrale de Poisson constituée des fonctions constantes sur M, donc $\beta := \lambda - \nu \in H^1(\mathfrak{g})$. L'unicité de β est claire. $\square$

En particulier, si un groupe connexe G est tel que ses orbites coadjointes sont simplement connexes, il en résulte que les seuls systèmes G-hamiltoniens élémentaires sont des orbites coadjointes. C'est un fait non trivial qu'une condition suffisante sur G pour que cela se produise soit sa compacité.

Proposition 4.2.2. *Si G est un groupe connexe compact, alors ses orbites coadjointes dans $\mathfrak{g}^*$ sont compactes, connexes et simplement connexes.*

Démonstration. La compacité et la connexité sont des propriétés évidentes des orbites. Afin d'établir la connexité simple, il faut faire appel à des résultats démontrés plus loin dans ce mémoire. Définissons pour chaque $\xi \in \mathfrak{g}$ une fonction « coordonnée » sur $\mathfrak{g}^*$: $x^\xi = J(\xi) = \langle -, \xi \rangle$. En appliquant le lemme A.1.1 au cas où $V = \mathfrak{g}^*$ et où $M = \mathcal{O}$ est une orbite coadjointe, nous en déduisons que la restriction de x^ξ à $\mathcal{O}$ est une fonction de Morse pour tout ξ appartenant à un sous-ensemble dense $\mathcal{S} \subset \mathfrak{g}$. L'orbite $\mathcal{O}$ étant invariante sous l'action coadjointe de G, $\mathcal{S}$ est invariant sous l'action adjointe de G. En vertu du théorème 4.36 dans [**8**], il existe un tore $T \subset G$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ intersecte $\mathcal{S}$. Pour ξ appartenant à cette intersection, le théorème 5.3.1 indique que le hamiltonien x^ξ sur la variété symplectique $\mathcal{O}$ n'a que des points critiques d'indices pairs. La connexité simple de $\mathcal{O}$ résulte alors du corollaire A.2.1. $\square$

Il s'agit somme toute d'un résultat étonnant considérant la remarque faite à la suite du théorème 4.2.1 : les orbites ne dépendent que de l'algèbre de Lie ! Évidemment, cela indique que l'algèbre de Lie contient en elle-même l'information révélant s'il s'agit de l'algèbre associée à un certain groupe compact. La notion clef ici est celle d'*algèbre de Lie compacte* et le lecteur est référé au chapitre IV.4 dans [**8**] pour plus de détails à ce propos.

4.3. L'information dissimulée dans l'application moment

Nous avons discuté au chapitre précédent de quelques propriétés particulières des actions symplectiques, en notant par exemple que les ensembles de points fixes sont des sous-variétés symplectiques. Dans le contexte plus spécifique des actions hamiltoniennes, l'équivariance des applications moments leur permet d'encoder divers aspects des actions auxquelles elles sont associées.

Rappelons la relation liant un morphisme $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ et l'application moment associée $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$:

$$H_\xi(m) = \lambda(\xi)(m) = \langle \mu(m)\, , \, \xi \rangle \quad \text{quels que soient } m \in M \text{ et } \xi \in \mathfrak{g}.$$

En appliquant la différentiation extérieure $\mathrm{d} = \mathrm{d}_M$, nous obtenons alors

$$\omega_m(X_\xi, v) = (\mathrm{d}H_\xi)_m(v) = \langle \mu_{*\,m}(v), \xi \rangle \text{ quels que soient } m \in M,\ v \in T_mM \text{ et } \xi \in \mathfrak{g}.$$

Cette relation implique les égalités

$$\operatorname{Ker} \mu_{*\,m} = \operatorname{Im}(\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*)^\omega =: \mathcal{D}_m^\omega \text{ , et} \tag{4.3.1}$$

$$(\operatorname{Im} \mu_{*\,m})^0 = \operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*) \ . \tag{4.3.2}$$

Ici, A^ω est l'orthogonal symplectique de $A \subset T_mM$ défini à la section 2.1 et $\mathfrak{a}^0$ désigne l'annihilateur dans $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^*$.

La première égalité stipule que le noyau de la différentielle de l'application moment en m est l'orthogonal symplectique du plan tangent à l'orbite passant par m. Par exemple, $\operatorname{Ker} \mu_{*\,m} = 0$ si G agit de façon transitive, puisque $\mathcal{D}_m$ est le plan tangent à l'orbite de l'action α passant par m ; ceci explique pourquoi μ est une immersion dans le théorème de Kostant-Souriau.

La seconde égalité est riche d'enseignements. Par exemple, elle stipule que $\mu_{*\,m}$ est surjective si et seulement le groupe stabilisateur G_m est discret, la raison étant que $\operatorname{Ker}(\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*)$ est l'algèbre de Lie de ce sous-groupe. En reprenant la notation de la proposition 1.4.3, ceci signifie que sur l'ensemble ouvert $M - F_1 \subset M$ (possiblement vide), μ est une submersion ; il en résulte que $\mu(M - F_1)$ est ouvert dans $\mathfrak{g}^*$. Plus généralement,

Proposition 4.3.1. *Soient* (M, ω, G, μ) *un système hamiltonien et* $H \subseteq G$ *un sous-groupe tel que* $\mathrm{Fix}(H) \neq \varnothing$. *Alors* $\mathrm{Im}\,\mu_{*\,m} = \mathfrak{h}^0$ *pour tout* $m \in \mathrm{Fix}(H)$. *Ceci implique que chaque composante connexe* C *de* $\mathrm{Fix}(H)$ *est envoyée par* μ *de façon submersive sur son image dans le sous-espace affine* $\mu(m) + \mathfrak{h}^0$ *pour* $m \in C$.

Démonstration. Notons tout d'abord que la seconde égalité implique l'identité $\mathrm{Im}\,\mu_{*\,m} = \mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*)^0$. Il suffit en effet de montrer que $\mathrm{Im}\,\mu_{*\,m} = ((\mathrm{Im}\,\mu_{*\,m})^0)^0$: l'inclusion $\subseteq$ est évidente et des considérations de dimensionnalité démontrent l'égalité. Puisque $G_m = H$ pour tout $m \in \mathrm{Fix}(H)$, d'où $\mathrm{Ker}(\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*) = \mathfrak{h}$, nous avons bien $\mathrm{Im}\,\mu_{*\,m} = \mathfrak{h}^0$. Le reste de la proposition découle aisément. $\square$

Remarquons que $\mathrm{Fix}(H) \subseteq M_H$; nous déduisons aisément de la proposition ci-dessus que l'image par μ de chaque composante connexe C de M_H est incluse dans $\mu(m) + \mathfrak{h}^0$ avec $m \in C$. Nous n'avons cependant plus la submersivité.

Précisons maintenant le contexte de la proposition précédente en supposant que H est un sous-groupe normal fermé. Il en résulte que pour tout $m \in \mathrm{Fix}(H)$ (ou plus généralement tout $m \in M_H$), l'orbite m^G est comprise dans $\mathrm{Fix}(H)$ (respectivement dans M_H). Nous avons montré au chapitre précédent que $\mathrm{Fix}(H)$ et M_H sont des sous-variétés symplectiques, admettant dans le cas présent une action hamiltonienne par le groupe G. L'application moment μ de l'action de G sur M se restreint sur ces sous-variétés à l'application moment de l'action induite de G sur celles-ci. Nous pouvons alors utiliser la proposition en remplaçant M par $\mathrm{Fix}(H)$, obtenant ainsi que $\mathfrak{h}^0 = \mu_{*\,m}(T_m\mathrm{Fix}(H)) = \mu_{*\,m}(T_m M)$; l'application μ restreinte à $\mathrm{Fix}(H)$ est une submersion sur son image. Notons que l'égalité (4.3.1) mentionnée plus haut cadre bien avec ces résultats.

Quelle que soit l'action, il y a toujours les sous-groupes normaux évidents $H = \{e\}$ et $H = G$. Le cas du groupe trivial est compris dans la situation discutée tout juste avant la proposition 4.3.1. Le cas $H = G$ nous mène à considérer les points fixes de l'action de G sur M ; puisque $\mathfrak{g}^0 = 0$ dans $\mathfrak{g}^*$, nous voyons que chaque composante connexe C de $\mathrm{Fix}(G)$ est envoyée sur un fixe de l'action coadjointe. Ces points sont appelés les **sommets de l'application moment**. Si M est compacte, alors $\mathrm{Fix}(G)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de composantes connexes (car il est compact, puisque fermé), impliquant que le nombre de sommets de l'application moment est fini.

L'égalité (4.3.2) impliquant $\mathrm{rang}\,\mu_{*\,m} = \dim \mathfrak{h}^0$, nous avons aussi $\mathrm{corang}\,\mu_{*\,m} = \dim \mathfrak{h} = \dim G_m$. Le résultat suivant n'est que la proposition 1.4.3.

Corollaire 4.3.1. *Soit (M, ω, G, μ) un système hamiltonien. L'ensemble F_{r+1} correspond à $\{m \in M \,|\, \operatorname{corang} \mu_{*m} > r\}$ et est de codimension au moins deux dans M.*

4.4. Exemples

Malgré la simplicité de l'énoncé et de la preuve de la proposition 4.3.1, il est facile de se méprendre sur sa signification. Les quelques exemples suivants devraient permettre d'y voir plus clair, tout en mettant en action plusieurs des résultats obtenus.

Exemple 4.4.1 : Soit $M_\lambda = (S^2_\lambda, \omega_\lambda)$ la variété symplectique obtenue en considérant la sphère de rayon $\lambda > 0$ dans $\mathbb{R}^3$ dotée de la forme superficie ω_λ habituelle : si $v \in S^2_\lambda$ et $x, y \in T_v S^2_\lambda$, alors $\omega_\lambda(x, y) = \lambda^{-1} \det(x, y, v)$. Laissons le groupe $G = \mathrm{SO}(3)$ agir sur M_λ de façon évidente, soit via les rotations de la sphère. Évidemment, ω_λ est invariante sous cette action ; l'action des rotations est symplectique. Par simple connexité de la sphère, $\mathfrak{symp}(\omega_\lambda) = \mathfrak{ham}(\omega_\lambda)$ et l'action est donc faiblement hamiltonienne. La sphère étant compacte, nous savons que cette action est hamiltonienne. Un argument alternatif consiste à se rappeler de la fin du premier chapitre que $H^1(\mathfrak{so}(3)) = H^2(\mathfrak{so}(3)) = 0$, de sorte que toute action faiblement hamiltonienne de $\mathrm{SO}(3)$ s'avère hamiltonienne de façon unique. Il est aisé d'être plus explicite ici.

N'importe quel groupe à un paramètre $\rho = \rho_{n,a} : \mathbb{R} \to G$ est de la forme $\theta \mapsto R_n(a\theta)$, a étant un réel positif, n étant un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et $R_n(a\theta)$ étant la rotation agissant sur l'hyperplan orthogonal à n par $v \mapsto v \cos a\theta + (n \times v) \sin a\theta$, soit sur tout $\mathbb{R}^3$ par

$$v \mapsto (n \cdot v)n + (v - (n \cdot v)n) \cos a\theta + (n \times v) \sin a\theta \,.$$

Évidemment, $R_n(a\theta) = R_{-n}(-a\theta)$, mais il s'agit de la seule ambiguité dans cette description des sous-groupes à un paramètre. En dérivant ceci par rapport à θ, nous obtenons que ce groupe à un paramètre est le flot du champ vectoriel $a(n \times v)$ en $v \in M_\lambda$. Nous pouvons ainsi décrire l'action infinitésimale de $\mathfrak{so}(3)$ sur M_λ en associant à chaque $w \in \mathbb{R}^3$ le champ vectoriel X_w valant $w \times v$ en $v \in M_\lambda$.

Chacun de ces champs provient d'un hamiltonien H_w de la façon suivante. Pour $w = 0$, prenons $H_w \equiv 0$. Pour $w \neq 0$, dénotons par π_w la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}w \cong \mathbb{R}$ et posons $H_w : M_\lambda \to \mathbb{R}$ la fonction « latitude » $v \mapsto \lambda\|w\|\pi_w(v)$. Autrement dit, $H_w(v) = \lambda\, w \cdot v$. Un raisonnement simple montre que $\delta H_w = X_w$: pour $x \in T_v M_\lambda$, considérons l'unique champ vectoriel X_{w_x} étendant x et vérifiant $w_x/\|w_x\| = (v \times x)/\|v \times x\| = \lambda^{-1}\|x\|^{-1}(v \times x)$, de sorte que $\|w_x\| = \|x\|/\lambda$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}H_w(x) = X_{w_x}\, H_w &= \left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} \lambda\, w \cdot R_{w_x/\|w_x\|}(\|w_x\|\theta)v \\
&= \lambda\|w_x\| \left(w \cdot \left(\frac{w_x}{\|w_x\|} \times v \right) \right) = -\lambda\|w_x\| \left(\frac{w_x}{\|w_x\|} \cdot (w \times v) \right) \\
&= -\lambda\|w_x\| \left(\frac{v \times x}{\lambda\,\|x\|} \cdot X_w \right) = \frac{1}{\lambda}\,(X_w \cdot (x \times v)) \\
&= \omega_\lambda(X_w, x)\,.
\end{aligned}$$

Il est clair que $\int_{M_\lambda} H_w\, \omega_\lambda = 0$, de sorte que nos considérations en début de chapitre montrent que l'association $X_w \mapsto H_w$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie.

Notons que chaque élément non nul de $\mathfrak{so}(3)$ s'identifie à un unique X_w et donc à $w \in \mathbb{R}^3$ lui-même. L'application hamiltonienne $\mathfrak{so}(3) \to C^\infty(M_\lambda)$ est alors $w \mapsto H_w(v) = \lambda\, w \cdot v$ et l'application moment qui lui est associée, $\mu_\lambda : M_\lambda \to \mathfrak{so}(3)^*$, est donnée par $v \mapsto \lambda\,(v \cdot -)$.

Ces résultats sont parfaitement cohérents avec le théorème de Kostant-Souriau : la variété M_λ étant un système SO(3)-élémentaire simplement connexe, il faut qu'elle soit symplectomorphe à l'orbite coadjointe $\mu_\lambda(M_\lambda)$, ce que nous avons effectivement obtenu. Puisque cette application moment est la seule existante pour cette action [4], nous aurions pu obtenir tous ces résultats en étudiant plutôt l'action coadjointe de SO(3).

4. Nous entendons par « unicité » le fait que $H^1(\mathfrak{so}(3)) = 0$. Or, les descriptions utilisées dans cet exemple, à savoir d'associer la forme symplectique ω_λ à la sphère de rayon λ, ne cadrent pas parfaitement avec les applications moments sur les orbites coadjointes mentionnées à la suite de la preuve du théorème de Kirillov. Ainsi, l'application moment est unique à une ambiguité de description près.

Exemple 4.4.2 : Soient (M, ω, G, μ) un système hamiltonien et α l'action de G associée. Quel que soit le sous-groupe $H \subset G$, l'inclusion $i : \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ donne lieu à un système hamiltonien (M, ω, H, μ') associé à l'action $\alpha|_H$, avec $\mu' = i^\dagger \circ \mu = \mathrm{rest} \circ \mu$, où $\mathrm{rest} : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ est la restriction de fonctions.

Revenons à l'exemple précédent. Considérons le sous-groupe H_n de SO(3) donné par l'ensemble des rotations $R_n(\theta)$. Dans la catégorie des groupes de Lie, chacun de ces sous-groupes est difféomorphe au cercle S^1. Nous pouvons identifier l'algèbre $\mathfrak{h}_n$ avec l'ensemble des $X_{an}(v) = an \times v$, où $a \in \mathbb{R}$, qui lui-même s'identifie avec l'axe réel via $X_{an} \mapsto a$. L'action induite de $\mathfrak{h}_n$ sur M_λ est générée par les hamiltoniens $H_a(v) = \lambda\, an \cdot v$; l'application moment associée est $v \mapsto [a \mapsto \lambda\, an \cdot v]$. Autrement dit, $\mu'(v)$ est la multiplication de $a \in \mathfrak{h}_n$ par le scalaire $\lambda\, n \cdot v$. Ainsi, nous avons $\mathrm{Im}\, \mu' = [-\lambda^2, \lambda^2]$. Les sommets de cette application sont $\{\pm\lambda^2\}$ et ils correspondent respectivement aux points fixes $\pm\, \lambda n$.

Exemple 4.4.3 : Étant donné deux variétés M_1 et M_2 sur lesquels agit un même groupe de Lie G, ce groupe agit naturellement sur le produit $M_1 \times M_2 : g \cdot (m_1, m_2) = (g \cdot m_1, g \cdot m_2)$.

Étant donné deux variétés symplectiques (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2), leur produit $M_1 \times M_2$ est naturellement doté d'une structure symplectique $\omega_1 \times \omega_2$ donnée par $\pi_1^* \omega_1 + \pi_2^* \omega_2$, avec $\pi_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ les projections canoniques.

Étant donné deux systèmes hamiltoniens $(M_1, \omega_1, G, \mu_1)$ et $(M_2, \omega_2, G, \mu_2)$, l'action naturelle de G sur $(M_1 \times M_2, \omega_1 \times \omega_2)$ est nécessairement hamiltonienne, l'application moment étant $\mu = \pi_1^* \mu_1 + \pi_2^* \mu_2$. En particulier, nous avons l'égalité des ensembles $\mathrm{Im}\, \mu$ et $\mathrm{Im}\, \mu_1 + \mathrm{Im}\, \mu_2$ dans $\mathfrak{g}^*$.

Considérons donc $G = \mathrm{SO}(3)$ agissant comme à l'exemple 4.4.1 sur les variétés symplectiques M_λ et M_σ vues comme des orbites coadjointes dans $\mathfrak{so}(3)^*$. Ainsi, μ_λ et μ_σ sont les injections dans l'algèbre duale. Nous en déduisons que l'image de l'application moment de l'action de G sur le produit $(S_2 \times S_2, \omega_\lambda \times \omega_\sigma)$ a pour image $\{\eta \in \mathfrak{so}(3)^* \mid \lambda + \sigma \geq \|\eta\| \geq |\lambda - \sigma|\}$.

Afin de s'en assurer, pensons M_λ comme la même variété *lisse* que M_σ, disons la sphère de rayon 1 dans $\mathfrak{so}(3)^*$, dotée d'une structure symplectique normalisée différemment : $\sigma^2 \omega_\lambda = \lambda^2 \omega_\sigma$. Remarquons que l'application $m : S^2 \times S^2 \to [-1, 1]$ définie par $m(v, w) = v \cdot w$ est invariante le long de toute orbite $(v,w)^G$. Étant donné deux autres vecteurs x et y tels que $x \cdot y = v \cdot w$, il existe un élément $g \in \mathrm{SO}(3)$ envoyant (v,w) sur (x,y) ; il suffit d'abord d'appliquer une rotation h envoyant v sur x, puis d'agir par la rotation appropriée $R_x(\theta)$ afin d'envoyer $\alpha_h w$ sur y. Cet argument convainc aussi de l'unicité d'un tel g.

Ainsi, les orbites de SO(3) sur $S^2 \times S^2$ sont les préimages $m^{-1}(c)$ pour $c \in [-1,1]$. Seules les orbites $m^{-1}(1)$ et $m^{-1}(-1)$, à savoir respectivement la diagonale $\Delta = \{(v,v)\}$ et l'antidiagonale $\bar{\Delta} = \{(v,-v)\}$, sont bidimensionnelles, toutes les autres étant tridimensionnelles et difféomorphes à SO(3). Nous avons

$$\begin{aligned} K_1 &:= F_1 - F_2 = m^{-1}(\{-1\} \cup \{1\}) \text{ et} \\ K_0 &:= F_0 - F_1 = m^{-1}((-1,1))\,. \end{aligned}$$

Puisque $\mu(v,w) = \lambda v + \sigma w$, la paire (v,w) est envoyée sur l'orbite coadjointe de rayon $\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2 + 2\,\lambda\sigma\, m(v,w)}$, d'où $\mu(K_1) = \partial(\operatorname{Im}\mu)$ ainsi que $\mu(K_0) = \operatorname{int}(\operatorname{Im}\mu)$. Ces résultats corroborent ceux attendus par la proposition 4.3.1.

Exemple 4.4.4: Dans l'exemple précédent, l'action de SO(3) sur la variété lisse $S^2 \times S^2$ est la même quelles que soient les valeurs de λ et de σ. La proposition 4.3.1 indique alors que pour tout $m \in S^2 \times S^2$, l'image de la différentielle $\mathrm{d}\mu_m$ est indépendante de la structure symplectique $\omega_\lambda \times \omega_\sigma$.

Considérons le cas particulier où $\lambda = \sigma$. Dans ce cas, l'image de l'application moment est la boule fermée de rayon 2λ. En fait, l'antidiagonale correspond à la pré-image par μ du point $0 \in \operatorname{int}(\operatorname{Im}\mu) \subset \mathfrak{so}(3)^*$. Ainsi, pour chaque $m \in \bar{\Delta}$, l'image de $\mu_{*\,m}$ est bidimensionnelle. Cela nous amène à remarquer deux phénomènes de prime abord étonnants.

(1) Puisque $\mu(\bar{\Delta}) = \{0\}$, nous avons $(\mu|_{\bar{\Delta}})_{*\,m} = 0$, bien que nous n'ayons pas $(\mu_{*\,m})|_{\bar{\Delta}} = 0$. Ceci montre que l'application moment ne se restreint pas à la sous-variété $\bar{\Delta}$ en donnant lieu à une autre application moment. La raison est que pour la forme symplectique $\omega_\lambda \times \omega_\lambda$, l'antidiagonale est une variété *isotrope*[5], c'est-à-dire que la forme symplectique se restreint à la forme nulle sur chaque plan tangent $T_m\bar{\Delta}$, $m \in \bar{\Delta}$.

5. Étant par ailleurs de dimension moitié celle de la variété totale, il s'agit d'une sous-variété *lagrangienne*.

(2) Bien que $\mu(\bar{\Delta}) = \{0\} \subset \mathrm{int}(\mathrm{Im}\,\mu)$, l'image de la différentielle $\mathrm{d}\mu_m$, pour $m \in \bar{\Delta}$, n'est jamais égale au plan tangent $T_{\{0\}}(\mathrm{Im}\,\mu)$. Ceci montre que l'image de l'application moment ne détient pas à elle seule tout ce qu'il y a à savoir sur l'application ; il faut généralement tenir compte de l'agencement des orbites coadjointes et cela ne suffit pas toujours.

Cet exemple montre aussi plus généralement que pour $i > 0$, la restriction de μ à la sous-variété $K_i := F_i - F_{i+1}$ n'est pas une submersion sur son image, car K_i n'est généralement pas une sous-variété symplectique.

4.5. L'application moment revisitée

L'identité $\omega_m(X_\xi, v) = \langle \mu_{*m}(v), \xi \rangle$ offre aussi une autre perspective sur ce qui distingue les actions hamiltoniennes des actions symplectiques en général. En fait, par abus de langage, nous pouvons interpréter cette relation comme suit :

$$\mu_{*m} \textit{ est l'opérateur dual de } \mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_* : \mathfrak{g} \to \mathcal{X}(M) \to T_m M \ .$$

En effet, l'opérateur dual de $\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*$ est une fonction linéaire $T_m^* M \to \mathfrak{g}^*$ que nous précomposons ensuite par l'isomorphisme $\flat := \iota(-)\omega_m : T_m M \to T_m^* M$ donné par le produit intérieur avec la forme symplectique, soit $X \mapsto X \lrcorner\, \omega_m$.

Cet argument ne faisant appel à aucune propriété particulière de l'action, il est clair que le dual de $\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*$ existe quelle que soit l'action lisse α.

La question est alors de savoir quelles contraintes la collection d'opérateurs $\{\psi_m := (\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*)^\dagger \circ \flat : T_m M \to \mathfrak{g}^*\}_{m \in M}$, collection que nous pouvons concevoir comme une 1-forme ψ sur M à valeur dans $\mathfrak{g}^*$, doit satisfaire afin qu'il s'agisse de la différentielle d'une application *moment*[6] $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$.

De façon tout à fait générale, une 1-forme $\psi : TM \to \mathfrak{g}^*$ est exacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont remplies (voir [**15**], théorème **3**.7.14) :

a) : La 1-forme ψ doit être fermée : si $\psi = \mu_* = \mathrm{d}\mu$, alors la fermeture découle de la relation $\mathrm{d}^2 = 0$.

6. Pour toute action lisse, nous avons l'identité $X_{\mathrm{Ad}(g)\xi} = \alpha_{g\,*} X_\xi$, qui s'écrit encore sous la forme $\tilde{\alpha}_* \circ \mathrm{Ad}(g) = \alpha_{g\,*} \circ \tilde{\alpha}_*$. Ainsi, $\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_* \circ \mathrm{Ad}(g) = \alpha_{g\,*} \circ \mathrm{ev}_{(\alpha_g)^{-1} m} \circ \tilde{\alpha}_*$, dont la relation duale est $\mathrm{Ad}^*(g^{-1}) \circ (\mathrm{ev}_m \circ \tilde{\alpha}_*)^\dagger = (\mathrm{ev}_{(\alpha_g)^{-1} m} \circ \tilde{\alpha}_*)^\dagger \circ \alpha_g^*$. Puisque $\alpha_g^* \circ \flat = \flat \circ \alpha_{g^{-1}\,*}$ pour une action symplectique, nous avons $\mathrm{Ad}^*(g^{-1}) \circ \psi_m = \psi_{(\alpha_g)^{-1} m} \circ \alpha_{g^{-1}\,*}$. Donc si $\psi_m = \mathrm{d}\mu_m$, alors $p_\mu(g) := \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mu - \alpha_g^* \mu$ est une fonction constante sur M pour tout g. Une application μ est *moment* si et seulement si la fonction $p_\mu : G \to \mathfrak{g}^*$ est constante sur chaque composante de G.

b) : Lorsque la condition précédente est remplie, la monodromie de ψ est bien définie, c'est-à-dire l'homomorphisme $\Phi_\psi : \pi_1(M,m) \to \mathfrak{g}^*$ obtenu en intégrant ψ le long de chemins $\gamma_i : (S^1;1) \to (M;m)$ représentant les diverses classes de $\pi_1(M,m)$:

$$\Phi_\psi([\gamma_i]) = \int_{S^1} \gamma_i^* \psi = \int_{[0,2\pi]} (\psi \circ \gamma_{i\,*}) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \mathrm{d}t \ .$$

Dans ce cas, $\psi = \mathrm{d}\mu_p$ si et seulement si la monodromie de ψ est triviale, c'est-à-dire que $\Phi_\psi = 0$: nous avons alors pour $p \in M$ fixé une primitive bien définie $\mu_p(m) = \int_{[0,1]} \gamma^* \psi$ pour n'importe quel chemin $\gamma : ([0,1];0,1) \to (M;p,m)$.

Un calcul direct montre aisément que l'identité $\omega(X_\xi, v) = \langle \psi(v), \xi \rangle$ implique

$$\langle \mathrm{d}\psi_m(v,w), \xi \rangle = \left(\mathcal{L}_{X_\xi} \omega\right)_m (v,w)$$

quels que soient $v, w \in T_m M$ et $\xi \in \mathfrak{g}$, de sorte que la condition **a)** est satisfaite précisément par les actions symplectiques. Nous savons qu'une action symplectique $\mathfrak{g} \to \mathfrak{symp}(\omega)$ admet un relèvement linéaire $\mathfrak{g} \to C^\infty(M)$ si et seulement si l'action est faiblement hamiltonienne : la satisfaction de la condition **b)** est équivalente à ce que l'action soit faiblement hamiltonienne. Cette conclusion est tirée facilement en étudiant le contenu de la condition **b)**. Soient $\xi \in \mathfrak{g}$ et $\gamma : (S^1;1) \to (M;m)$, alors

$$\left(\Phi_\psi[\gamma]\right)(\xi) = \int_{S^1} \gamma^*(\psi(\xi)) = \int_{S^1} \gamma^* \flat((\mathrm{ev} \circ \tilde{\alpha}_*)(\xi)) = \int_{S^1} \gamma^* \left(X_\xi \lrcorner\, \omega\right) \ .$$

De ceci, nous pouvons déduire que la monodromie de ψ est triviale si et seulement si $X_\xi \lrcorner\, \omega$ est exacte pour tout ξ : la partie « si » est une simple application du théorème de Stokes et la partie « seulement si » nécessite l'isomorphisme $H^1_{dR}(M) \cong H^1_{\text{sing}}(M;\mathbb{R})$.

La note de bas de page précédente montre qu'une primitive μ à ψ détermine une fonction $p_\mu : G \to \mathfrak{g}^*$ via $p_\mu(g) = (\mathrm{Ad}^*(g))\,\mu(m) - (\alpha_g^* \mu)(m)$, cette expression étant la même quel que soit le point $m \in M$. Toute autre primitive de ψ s'obtient de μ en ajoutant un élément quelconque $\mu_0 \in \mathfrak{g}^*$ compris comme une fonction constante sur M. Une action est hamiltonienne si et seulement s'il existe une primitive μ qui soit *moment*, c'est-à-dire telle que $p_\mu \equiv 0$. Si une primitive moment existe, alors toute autre s'obtient à ajoutant un point fixe μ_0 de l'action coadjointe. Ces conditions sur l'existence et l'unicité d'une application moment sont forcément équivalentes aux conditions cohomologiques considérées auparavant, bien que la traduction ne soit pas transparente.

La discussion précédente n'est qu'une réinterprétation géométrique de nos considérations de début de chapitre ; la poursuite de cette voie ne promet pas davantage de progrès que l'approche cohomologique. C'est pourquoi nous prenons encore un autre chemin qui lui mène vers de nouvelles contrées.

Considérons à nouveau l'identité $\omega_m(X_\xi, v) = \langle \mu_{*m}(v), \xi \rangle$ et plus particulièrement les cas où $v = X_\eta$ pour $\eta \in \mathfrak{g}$; nous avons vu à la section 4.2 qu'alors

$$\omega_m(X_\xi, X_\eta) = -\langle \mu(m), [\xi, \eta] \rangle \ .$$

Pour chaque $m \in M$, la quantité $\Psi(m) := -\langle \mu(m), [-,-] \rangle$ définit un élément de $\wedge^2\mathfrak{g}^*$. Plus encore, la relation ci-dessus montre que $\Psi(m) = d_1(\mu(m))$ selon la notation de la section 1.5, de sorte que $\Psi(m) \in B^2(\mathfrak{g}) \subseteq Z^2(\mathfrak{g})$. L'intérêt de cette observation tient au fait que *toute* action symplectique d'un groupe G sur une variété (M, ω) détermine une application $\Psi : M \to Z^2(\mathfrak{g})$ aux propriétés fort similaires à celles d'une application moment. Les actions hamiltoniennes se distinguent alors du fait que les classes de cohomologie Ψ qu'elles définissent sont exactes.

Le raisonnement menant à l'assignation pour toute action symplectique d'une section $\Psi \in C^\infty(M, \wedge^2\mathfrak{g}^*)$ s'apparente à une modification du raisonnement présenté lors de notre étude des actions exactes sur les variétés symplectiques exactes.

Soient M^m une variété et $\alpha : G \times M \to M$ une action lisse. Pour tout $p \in M$, α induit une application lisse $\beta_p : G \to M : g \mapsto \alpha_g(p)$ et ainsi des morphismes $\beta_p^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(G)$ pour tout $0 \leq k \leq m$. Notons maintenant que pour $g, h \in G$ quelconques, $\beta_p(gh) = \alpha_{gh}(p) = \alpha_g(\alpha_h(p))$, ce qui se récrit des deux façons suivantes

$$\beta_p \circ L_g = \alpha_g \circ \beta_p \quad \text{ et } \quad \beta_p \circ R_h = \beta_{\alpha_h(p)} \ .$$

Ainsi, si $\sigma \in \Omega^k(M)$ est invariante sous l'action de α, c'est-à-dire si $\alpha_g^*\sigma = \sigma$ pour tout $g \in G$, alors la première relation implique que

$$L_g^* \left(\beta_p^* \sigma\right) = \sigma \left(\beta_p \circ L_g\right)_* = \sigma \left(\alpha_g \circ \beta_p\right)_* = \beta_p^* \left(\alpha_g^* \sigma\right) = \beta_p^* \sigma \,,$$

ce qui montre que $\beta_p^* \sigma$ est une k-forme invariante sous les translations à gauche, soit encore un élément de $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ en l'évaluant en l'identité du groupe. En retour, ces constatations et la seconde relation ci-dessus donnent

$$\beta_{\alpha_g(p)}^* \sigma = R_g^* \left(\beta_p^* \sigma\right) = R_g^* L_{g^{-1}}^* \left(\beta_p^* \sigma\right) = \mathrm{Ad}^*(g) \left(\beta_p^* \sigma\right) \,.$$

Ici, la représentation coadjointe Ad^* sur $\wedge^k \mathfrak{g}^*$ est définie de façon tout à fait analogue à ce que nous avons vu à la section 4.1 lorsque $k = 1$. Ceci prouve :

Proposition 4.5.1. *Soit $\alpha : G \times M \to M$ une action lisse. Toute k-forme σ sur M invariante sous l'action de α détermine une application $\Psi = \Psi_\sigma : M \to \wedge^k \mathfrak{g}^*$ via la relation $\Psi(m) = \beta_m^* \sigma$. L'application Ψ est G-équivariante pour l'action coadjointe sur $\wedge^k \mathfrak{g}^*$, c'est-à-dire que $\alpha_g^* \Psi = \mathrm{Ad}^*(g)\, \Psi$ pour tout $g \in G$. De plus, cette construction commute avec les différentielles : $\Psi_{\mathrm{d}\sigma} = d_k \Psi_\sigma$.*

La dernière affirmation de la proposition découle simplement de la naturalité de la dérivation extérieure d ainsi que de la remarque faite dans la note de bas de page 1.9. Pour une action symplectique générale, la forme symplectique ω définit ainsi une application $\Psi_\omega : M \to Z^2(\mathfrak{g})$ comme nous l'avions annoncé. Dans le cas plus spécifique d'une action exacte sur une variété symplectique exacte (M, λ), la forme λ détermine une application $\Psi_\lambda : M \to \mathfrak{g}^*$ vérifiant $d_1 \Psi_\lambda = \Psi_{\mathrm{d}\lambda}$; Ψ_λ n'est nulle autre qu'une application moment. En ce sens, la notion de système hamiltonien peut s'interpréter comme une généralisation de celle de variété symplectique exacte dotée d'une action exacte.

Dans la section 25 de leur ouvrage [**6**], Guillemin et Sternberg donnent un critère nécessaire et suffisant pour qu'une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ dans $Z^2(\mathfrak{g}) \subset \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ soit l'image d'une application Ψ_ω associée à une action symplectique transitive de G sur une variété (M, ω). En fait :

Théorème 4.5.1. *Pour qu'une orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset Z^2(\mathfrak{g})$ soit l'image d'une application de la forme Ψ_ω, il faut et il suffit que pour $\tilde{\omega} \in \mathcal{O}$ une 2-forme fermée invariante à gauche sur G quelconque, le sous-groupe connexe[7] $H_{\tilde{\omega}}$ ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{\tilde{\omega}} := \{\xi \in \mathfrak{g} \,|\, \xi \lrcorner \tilde{\omega}_e = 0\}$ soit fermé dans G.*

7. La connexité du groupe n'importe pas vraiment ici, mais cette exigence fixe les définitions.

Démonstration.

Suffisance : La distribution sur G donnée par $\mathcal{D}_g = L_{g*}\mathfrak{h}_{\tilde{\omega}}$ correspond précisément à la distribution canonique de $\tilde{\omega}$, les feuilles étant toutes de la forme $gH_{\tilde{\omega}}$; la fermeture de $H_{\tilde{\omega}}$ est la condition précise assurant que $M_{\tilde{\omega}} := G/H_{\tilde{\omega}}$ soit une variété. Le processus de réduction symplectique est alors possible, de sorte qu'il existe une forme symplectique ω sur $M_{\tilde{\omega}}$ telle que $\pi^*\omega = \tilde{\omega}$ pour la projection canonique $\pi : G \to M_{\tilde{\omega}}$. Les translations à gauche $L : G \times G \to G$ induisent une action à gauche symplectique $\alpha : G \times M_{\tilde{\omega}} \to M_{\tilde{\omega}}$ telle que $\tilde{\omega} = \pi^*\omega =: \Psi_\omega([e])$. Ainsi, $\Psi_\omega : M_{\tilde{\omega}} \to \mathcal{O}$.

Nécessité : Soit (M, ω) une variété symplectique G-homogène pour une action symplectique α. Ainsi, il existe une orbite coadjointe $\mathcal{O}$ telle que $\Psi_\omega : M \to \mathcal{O}$. Pour $m \in M$ arbitraire, posons $H = G_m$; nous savons que les groupes stabilisateurs sont fermés, donc H_0 est aussi fermé. Il existe un difféomorphisme G-équivariant $\rho : M \to G/H$, l'action sur G/H étant celle induite par les translations à gauche, c'est-à-dire tel que $\rho(m) = [e]$ et que $\rho(\beta_q(g)) = g\rho(q)$ pour tout $q \in M$. Notons $p = \rho^{-1} \circ \pi : G \to M$ la projection associée. D'une part, $\operatorname{Ker} p_{*\,e} = \mathfrak{h}$. D'autre part, $\xi \in \operatorname{Ker} p_{*\,e}$ si et seulement si $p_*\,\xi^\dagger \equiv 0$, soit précisément lorsque $X_{\mathrm{Ad}(g)\xi} \lrcorner\, \omega \equiv 0$ puisque

$$p_{*\,g}\xi_g^\dagger = p_{*\,g}L_{g*e}\xi_e^\dagger = \alpha_{g*p(e)}p_{*e}\xi_e^\dagger = \alpha_{g*p(e)}X_\xi(p(e)) = X_{\mathrm{Ad}(g)\xi}(p(g))\ .$$

Ainsi, le noyau de $p_{*\,e}$ consiste en les $\xi \in \mathfrak{g}$ tels que $\xi \lrcorner\,(p^*\omega)_e = 0$. Autrement dit, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{p^*\omega}$. Or, $\Psi_\omega(m) = \beta_m^*\omega = \left(\rho^{-1}L_{-}[e]\right)^*\omega = \left(\rho^{-1}\pi\right)^*\omega = p^*\omega$. Ceci démontre que le groupe $H_{\Psi_\omega(m)} = H_0$ est fermé.

□

Nous terminons ce chapitre en ayant recours à cette « application moment généralisée » afin de tirer quelques conclusions assez intéressantes.

En utilisant le fait que les applications adjointes $\mathrm{Ad}(g)$ sont des endomorphismes de $\mathfrak{g}$, il est aisé de vérifier que les opérateurs de cobords d_k sont G-équivariants pour les actions coadjointes sur $\wedge^k\mathfrak{g}^*$ et sur $\wedge^{k+1}\mathfrak{g}^*$. Soit $\tilde{\omega}$ un élément quelconque dans $B^2(\mathfrak{g})$; il existe ainsi $\tilde{\mu} \in \mathfrak{g}^*$ tel que $d_1\tilde{\mu} = \tilde{\omega}$. La constatation précédente implique que l'orbite coadjointe $\tilde{\mu}^G$ est envoyée via d_1 sur l'orbite coadjointe $\tilde{\omega}^G$. Ceci prouve que l'ensemble $B^2(\mathfrak{g})$ contient les orbites coadjointes qu'il intersecte. Incidemment, puisque $\tilde{\mu}^G$ est un système G-hamiltonien élémentaire dont l'application moment généralisée $\Psi : \tilde{\mu}^G \to Z^2(\mathfrak{g})$ consiste en la restriction de d_1 à $\tilde{\mu}^G$, la condition du théorème précédent est automatiquement vérifiée pour les éléments dans $B^2(\mathfrak{g})$.

Considérons un groupe G tel que $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$, c'est-à-dire un groupe satisfaisant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ et $B^2(\mathfrak{g}) = Z^2(\mathfrak{g})$, ainsi qu'une variété symplectique (M, ω) admettant une action symplectique transitive par G. Selon la proposition 4.5.1, Ψ_ω est une orbite coadjointe dans $Z^2(\mathfrak{g})$. En raison de nos hypothèse sur G et de nos résultats du dernier paragraphe, d_1 est injective, de sorte qu'il existe une orbite coadjointe $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ et une application G-équivariante $\mu : M \to \mathcal{O}$ relevant Ψ_ω, c'est-à-dire telle que $d_1 \circ \mu = \Psi_\omega$. L'application $\lambda : \mathfrak{g} \to C^\infty(M) : \xi \mapsto \langle \mu(m), \xi \rangle$ définit des hamiltoniens $H_\xi = \lambda(\xi)$ induisant l'action de G sur M. Bref, (M, ω, G, μ) est un système G-hamiltonien élémentaire.

Il faut bien prendre conscience de la portée de ces résultats. Nous savions qu'une condition suffisante pour qu'une action faiblement hamiltonienne de G sur (M, ω) soit hamiltonienne était que $H^2(\mathfrak{g}) = 0$. Or ici, nous avons montré que cette condition est suffisante si l'action de G sur (M, ω) n'est que symplectique, quoique transitive. En combinant ce résultat à ceux de la section 4.2, nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 4.5.2. *Soit (M, ω) une variété symplectique admettant une action symplectique transitive par G : (M, ω, G) est un système G-symplectique élémentaire. Supposons que le groupe G soit compact et qu'il vérifie $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$. Alors (M, ω, G) est isomorphe à une (unique) orbite coadjointe $(\mathcal{O}, \Omega, G, \iota) \subset \mathfrak{g}^*$.*

Les lemmes de Whitehead stipulent que les groupes semi-simples satisfont $H^1(\mathfrak{g}) = H^2(\mathfrak{g}) = 0$; voir la section 52 de [**6**] ou la proposition 3.4.3 dans [**18**] pour des démonstrations de ces lemmes. Plusieurs groupes de Lie bien connus sont semi-simples ; c'est le cas de pratiquement tous les groupes orthogonaux ainsi que du groupe de Lorentz étudié en théorie de la relativité restreinte (qui n'est cependant pas compact). Les groupes semi-simples étant ainsi omniprésents en physique, nous comprenons mieux pourquoi les systèmes hamiltoniens le sont d'autant.

Chapitre 5

LES ACTIONS HAMILTONIENNES TORIQUES

5.1. Les actions faiblement hamiltoniennes abéliennes

Supposons que G soit un groupe de Lie connexe et *abélien*, c'est-à-dire satisfaisant $L_g = R_g$ pour tout $g \in G$. Si $\dim G = n < \infty$, G est isomorphe à un groupe quotient de la forme $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^r$ avec $0 \leq r \leq n$. Dans cette expression, $\mathbb{R}^n$ est le groupe abélien dont l'opération est l'addition. Le groupe $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^r$ s'écrit encore $T^r \times R^{n-r}$, T^r désignant le tore de dimension r obtenu en faisant le produit direct de r copie de $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $\times$ désigne ici le produit direct de groupes. Cette classification est plutôt intuitive ; sa démonstration découle essentiellement des arguments présentés à la section 50 de [**1**]. Notons que pour n fixe, tous les groupes $T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ ont des algèbres de Lie isomorphes, toutes identifiables à l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire à l'algèbre de Lie dotée d'un crochet nul : $[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n] = 0$

Si $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^n$ est une algèbre de Lie abélienne, les définitions pour les opérateurs de cobords d_k montrent qu'ils sont tous nuls. Il en résulte que les groupes de cohomologie de $\mathfrak{g}$ sont simplement donnés par $H^k(\mathfrak{g}) = \wedge^k \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$.

Considérons alors une action faiblement hamiltonienne d'un groupe abélien G sur (M, ω). Puisque $H^2(\mathfrak{g}) = 0$ uniquement si $\dim G = 1$, il n'est pas assuré que l'action soit hamiltonienne. L'exemple principal d'action abélienne faiblement hamiltonienne qui n'est pas hamiltonienne est celui du groupe $G = \mathbb{R}^{2n}$ agissant sur $M = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ via toutes les translations. La raison de ceci tient essentiellement au fait que les fonctions p_i et q_j donnent lieu aux translations infinitésimales X_{p_i} et X_{q_i} vérifiant $[X_{p_i}, X_{q_i}] = 0$, mais $\{p_i, q_i\} = 1 \neq 0$.

Étant donné une action hamiltonienne de G sur (M,ω), nous savons que l'image de l'application Ψ_ω doit se trouver dans $B^2(\mathfrak{g})$. Dans le cas d'un groupe abélien, ce dernier ensemble ne consiste qu'en $\{0\}$, d'où $\Psi_\omega = 0$. Ceci signifie que $\beta_m^*\omega = 0$ pour tout $m \in M$, soit encore que chaque $\beta_{m*e} : T_eG \to T_mM$ a pour image un sous-espace isotropique de T_mM. Bref, $\operatorname{Im}\beta_{m*e} \subseteq (\operatorname{Im}\beta_{m*e})^\omega$. Une autre façon de formuler ceci consiste à dire que les orbites de l'action de G sont des variétés isotropiques. Ce n'est pas le cas dans l'exemple du paragraphe précédent : l'action y étant transitive, l'orbite est une variété symplectique.

5.2. Les actions hamiltoniennes abéliennes

Puisque les conjugaisons C_g sur G correspondent toutes à l'identité, la représentation adjointe Ad est triviale sur $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire que $\operatorname{Ad}(g)\xi = \xi$ pour tout $g \in G$ et tout $\xi \in \mathfrak{g}$. Nous en déduisons que les orbites coadjointes ne sont que les singletons dans $\mathfrak{g}^*$.

Considérons un système hamiltonien (M,ω,G,μ) avec G un groupe connexe abélien. Puisque l'application moment μ est G-équivariante, nous déduisons du paragraphe ci-dessus que μ est constante sur les orbites. En fait, si $m \in M$ et si $\mathcal{O} = m^G$, alors l'équation (4.3.1) nous apprend que le sous-espace $(T_m\mathcal{O})^\omega$ (qui comprend $T_m\mathcal{O}$) est le noyau de la différentielle μ_{*m}. Si l'ensemble $V_{\mu(m)} := \mu^{-1}(\mu(m))$ est une sous-variété de M, son espace tangent en chaque point m est nécessairement compris dans $(T_m\mathcal{O})^\omega$. Sous certaines conditions, cette inclusion est une égalité et V est alors une variété *coisotrope*, c'est-à-dire telle que $(T_pV_{\mu(m)})^\omega \subseteq T_pV_{\mu(m)}$ pour tout $p \in V$.

Remarque : Sous l'hypothèse que $V_{\mu(m)}$ est une variété, la restriction de la forme symplectique ω à $V_{\mu(m)}$ donne une 2-forme fermée dont la distribution canonique est $\mathcal{D}_p = (T_pV_{\mu(m)})^\omega = T_pp^G$: la variété $V_{\mu(m)}$ est « canoniquement » feuilletée par les orbites qu'elle contient. En supposant que l'espace quotient de $V_{\mu(m)}$ par ces feuilles soit aussi une variété, le processus de réduction symplectique est possible. Dans ce contexte, la réduction $(M_{\mu(m)},\bar{\omega})$ est appellée la **réduction de Marsden-Weinstein associée à** $\mu(m)$.

La commutativité de G implique par ailleurs que tout sous-groupe de G est normal. Ainsi, si $H = G_m$ désigne le groupe stabilisateur d'un point m de la variété M, nous savons des considérations suivant la proposition 4.3.1 que l'ensemble $\operatorname{Fix} H$ est une sous-variété symplectique sans bord et que $\mu|_{\operatorname{Fix} H}$ est une submersion sur un ouvert de l'espace affine $\mu(m) + \mathfrak{h}^0$. Afin d'être tout à fait explicite, notons qu'en tout point $m \in \operatorname{Fix} H$, les sous-espaces $T_m \operatorname{Fix} H$ et $(T_m m^G)^\omega$ sont transverses.

Malgré ces quelques particularités des actions hamiltoniennes abéliennes, ces actions sont pour la plupart assez complexes comme en témoigne la diversité des images des applications moments qui leur sont associées. L'exemple suivant donne un aperçu de la complexité possible.

Exemple 5.2.1 : Soient $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ et $f \in C^\infty(M)$ une fonction sans point critique. Tous les ensembles de niveau de f sont des sous-variétés et l'image de f est une 1-variété ouverte s'identifiant naturellement à l'espace N des ensembles de niveau. Soit $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction sans point critique, de sorte que $g = h \circ f \in C^\infty(M)$ soit aussi sans point critique. Par construction, les fonctions f et g sur M ont les mêmes ensembles de niveau, d'où $\{f, g\} = 0$. Aussi, les champs vectoriels X_f et X_g sont colinéaires dans chaque espace tangent, impliquant l'existence de fonctions $a, b \in C^\infty(M)$ ne s'annulant pas simultanément telles que $aX_f + bX_g \equiv 0$. Nous construisons une algèbre abélienne $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^2$ formellement comme étant $\mathbb{R}\langle e_1\,, e_2\rangle$. Le groupe abélien $G \cong \mathbb{R}^2$ agit alors sur M de sorte que $\exp(te_1) \cdot m = \phi^t_{X_f}(m)$ et $\exp(te_2) \cdot m = \phi^t_{X_g}(m)$. Il s'agit d'une action hamiltonienne en posant $\lambda(re_1 + se_2) = rf + sg$. Cette action de G sur M n'est certainement pas libre, puisque $\exp(t[a(m)e_1 + b(m)e_2]) \cdot m = m$. En fait, la composante connexe de G_m est donnée par l'ensemble des $\exp(t[a(m)e_1 + b(m)e_2])$ pour $t \in \mathbb{R}$. En vertu de l'équation (4.3.2), la différentielle μ_{*m} a pour image $\mathbb{R}\langle b(m)e_1 - a(m)e_2\rangle$ sous l'isomorphisme $e_i \leftrightarrow e_i^*$. Il n'est pas difficile de montrer que l'application moment est constante sur les ensembles de niveau [1], de sorte que $\mu \circ f^{-1} : N \to \mathfrak{g}^*$ est un paramétrage de $\operatorname{Im} \mu$. En choisissant la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de façon suffisamment complexe, les fonctions a et b le deviennent tout autant et donc $\operatorname{Im} \mu$ aussi.

Cet exemple laisse comprendre que la complexité potentielle de l'application moment est due à une certaine « malléabilité » des fonctions lisses. Moralement, ceci signifie que même un petit ouvert dans M peut être franchement distordu sous une action hamiltonienne abélienne générale.

1. Ces ensembles sont des exemples de variétés $V_{\mu(m)}$ mentionnées à la page précédente.

5.3. Les actions hamiltoniennes toriques

Comme nous le verrons dans cette section, il en va différemment pour les actions hamiltoniennes des tores en raison de la cyclicité de ces groupes.

Pour bien comprendre, notons d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ d'un tore $T = T^r$ admet une base privilégiée[2] $\{e_1, \ldots, e_r\}$: pour chaque $1 \leq i \leq r$,

(1) $\exp(e_i) = e$ est l'élément neutre et

(2) $\exp([0,1]e_i)$ est un générateur de $\pi_1(T, e)$.

Dans ce cas, T est naturellement isomorphe comme groupe de Lie à $\mathfrak{t}/\mathbb{Z}\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ et l'exponentielle $\exp(\xi)$ est alors simplement la classe $[\xi]$ dans ce groupe quotient.

Ainsi, les champs vectoriels X_{e_i} sur M associés à une action torique ont des flots tels que $\phi^1_{X_{e_i}} = Id_M$. Encore une fois moralement, il en résulte que si un petit ouvert dans M peut évoluer de manière complexe pour un court laps de temps, cette complexité est « bornée » du fait d'une simplicité revenant périodiquement. Ceci dit, il est encore possible d'imaginer des actions toriques plus complexes les unes que les autres. Cependant, en réfléchissant à la façon par laquelle une fonction génère un flot sur une variété symplectique, une action torique *hamiltonienne* apparaît comme un type d'action plutôt contraint.

Fixons les notations utilisées dans cette section. Soient (M, ω, T, λ) un système hamiltonien et $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base canonique de $\mathfrak{t}$. Les fonctions hamiltoniennes $H_{e_i} = H_i = \lambda(e_i)$ définissent chacune des actions hamiltoniennes du cercle sur (M, ω). Évidemment, si $\xi = \sum_{i=1}^r t_i e_i$, alors $H_\xi = \sum_{i=1}^r t_i H_i$. Remarquons que $\exp(t\xi) = [t\xi] = e$ pour un certain t si et seulement si ξ est une combinaison linéaire *rationnelle* des e_i. Ceci implique en particulier que pour la plupart des ξ, le hamiltonien H_ξ induit seulement une action de $\mathbb{R}$ sur M et non pas une action du cercle. Quoiqu'il en soit, si $\pi : \mathfrak{t} \to \mathfrak{t}/\mathbb{Z}\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ dénote la projection canonique, alors l'ensemble $\pi^{-1}(\pi(\mathbb{R}\langle\xi\rangle))$ est dense dans un unique sous-espace vectoriel $\mathfrak{t}_\xi \subseteq \mathfrak{t}$. Nous notons T_ξ le tore $\pi(\mathfrak{t}_\xi)$ ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{t}_\xi$. Avant de poursuivre, notons $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base de $\mathfrak{t}^*$ duale à $\{e_i\}$, à savoir la base vérifiant $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$ pour tous les i et les j.

---

2. Cette base est bien définie modulo les permutations des e_i et les transformations $e_i \mapsto -e_i$.

Le cas des actions linéaires

L'espace vectoriel symplectique $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ admet une action symplectique linéaire du cercle d'une importance capitale, à savoir l'action donnée par les rotations. Fait intéressant, il s'agit essentiellement du flot hamiltonien d'un oscillateur harmonique n'ayant qu'un degré de liberté. Plus précisément, il s'agit du flot hamiltonien associé à la fonction $H_{osc} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par l'expression

$$H_{osc}(p, q) = -\pi \left(p^2 + q^2\right) .$$

Le champ hamiltonien $X_{H_{osc}}$ correspondant est $2\pi \left(-q\frac{\partial}{\partial p} + p\frac{\partial}{\partial q}\right)$ et un calcul simple montre que les courbes intégrales de ce champ sont de la forme

$$(p(t), q(t)) = \sqrt{\frac{H_{osc}(p(0), q(0))}{\pi}} \left(\cos(2\pi t + \delta), \sin(2\pi t + \delta)\right) .$$

Il est clair que toutes ces courbes sont périodiques et de période $T = 1$; en notant e l'élément de $\mathfrak{so}(2)$ correspondant à $X_{H_{osc}}$, l'action hamiltonienne du cercle est donnée par l'application $\lambda : \mathfrak{so}(2) \to C^\infty(\mathbb{R}^2) : te \mapsto tH_{osc}$. En notant $e^* \in \mathfrak{so}(2)^*$ l'unique élément satisfaisant $e^*(e) = 1$, nous avons que l'application moment associée est $\mu(p, q) = H_{osc}(p, q)\, e^*$.

Considérons maintenant l'espace vectoriel symplectique standard $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$; par définition de cet espace, il existe une base symplectique induisant un isomorphisme symplectique de cet espace avec $\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{R}^2, \omega_0) = (\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{R}^2, \bigoplus_{i=1}^n \omega_0)$. Ainsi, le tore n-dimensionnel $T^n = \times_{i=1}^n S^1$ agit de façon hamiltonienne sur cet espace simplement en laissant agir chaque S^1 comme au paragraphe précédent sur le $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ correspondant : pour tout $\xi \in \mathfrak{t}^n$,

$$H_\xi(p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n) = \sum_{i=1}^n H_{osc}(p_i, q_i)\, e_i^*(\xi) .$$

De façon générale, soient (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension réelle $2n$ et $\tilde{\alpha} : T^r \to \mathrm{Sp}(\omega)$ une action hamiltonienne linéaire du tore de dimension r.

Il existe une application linéaire $J : V \to V$ qui soit d'une part invariante sous l'action de T et qui vérifie d'autre part $J^2 = -Id$. En effet, en partant d'un produit scalaire quelconque sur V, la preuve du lemme 1.4.1 implique l'existence d'un produit scalaire T-invariant sur V ; de celui-ci, le lemme 3.1.1 exhibe une application J ayant les propriétés recherchées.

Étant donné une base $\{v_1, Jv_1, \ldots, v_n, Jv_n\}$ de V, nous obtenons une identification $V \cong \mathbb{C}^n$, d'où une représentation $\tilde{\alpha} : T^r \to \mathrm{U}(n)$ dans les matrices unitaires $n \times n$. En vertu du corollaire 4.35 dans [**8**], il existe une matrice $U \in \mathrm{U}(n)$ telle que le tore $(C_U \circ \tilde{\alpha})(T^r)$ est inclus dans l'ensemble des matrices unitaires diagonales ; en d'autres termes, les matrices unitaires de la collection $\tilde{\alpha}(T^r)$ commutant les unes avec les autres, elles sont simultanément diagonalisables en raison d'une version forte du théorème spectral. Nous en déduisons que la base $\{U(v_1 + Jv_1), \ldots, U(v_n + Jv_n)\}$ de $\mathbb{C}^n$ diagonalise l'action de T^r.

Chacun des vecteurs propres $Z_i := U(v_i + Jv_i)$ de $\mathbb{C}^n$ donne lieu à une fonction « valeur propre », c'est-à-dire à un **caractère** $\gamma_i : T^r \to \mathbb{C}$ défini par la relation

$$\tilde{\alpha}(g)Z_i = \gamma_i(g)Z_i \quad \text{pour tout } g \in T^r \text{ et } 1 \leq i \leq n \ .$$

Du fait que la représentation $\tilde{\alpha}$ est unitaire, chaque γ_i est en fait à valeur dans $U(1) \subset \mathbb{C}$. Ceci souligné, en passant à la différentielle, nous obtenons un **poids** $w_i : \mathfrak{t}^r \to \mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$ donné par la relation

$$\gamma_i(\exp(\xi)) = \exp(2\pi i w_i(\xi)) \ , \quad \text{pour tout } \xi \in \mathfrak{t}^r \text{ et } 1 \leq i \leq n \ .$$

En particulier, quel que soit l'élément de base $e_j \in \mathfrak{t}^r$, $\gamma_i(\exp\, e_j) = \gamma_i(Id) = 1$, de sorte que $w_i(e_j) \in \mathbb{Z}$. Ceci signifie que pour un paramètre s parcourant l'intervalle $[0, 1]$, le plan $\mathbb{R}\langle Uv_i, UJv_i\rangle$ effectue $w_i(e_j)$ tours sur lui-même autour de l'origine sous l'action de $\tilde{\alpha}(\exp(se_j))$. L'action $\tilde{\alpha}$ de T^r sur V est ainsi induite par les hamiltoniens

$$H_\xi\left(\sum_{i=1}^{n}(p_i Uv_i + q_i UJv_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} H_{osc}(p_i, q_i)\, w_i(\xi) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathfrak{t}^r \ .$$

Ceci se comprend aussi comme suit. Les n fonctions de poids donnent lieu à une application linéaire $\rho : \mathfrak{t}^r \to \mathbb{R}^n$ définie par l'association $\xi \mapsto (w_1(\xi), \ldots, w_n(\xi))$. En pensant $\mathbb{R}^n$ comme l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}^n$ du tore n-dimensionnel, ρ est alors la différentielle d'une « insertion » de T^r dans T^n. La représentation $\tilde{\alpha}$ de T^r sur V n'est alors que la composition de cette « insertion » avec la représentation particulière de T^n sur $V = \mathbb{R}\langle Uv_1, \ldots, UJv_n\rangle$ étudiée plus haut.

Le cas des actions non linéaires

Nous revenons à la situation d'une action torique hamiltonienne sur une variété symplectique. Afin de mieux comprendre le degré de complexité que peut avoir une telle action, il est utile d'étudier tout d'abord les actions des sous-groupes à un paramètre, soit les actions générées par un seul hamiltonien. En particulier, en analysant le flot d'un tel hamiltonien autour d'un de ses points fixes, le principe de linéarisation nous permet de nous ramener aux considérations ci-dessus.

Théorème 5.3.1. *Soient (M, ω) une variété symplectique et $\tilde{\alpha} : T \to \mathrm{Symp}(\omega)$ une action hamiltonienne. Pour chaque $\xi \in \mathfrak{t} - \{0\}$, le hamiltonien $H_\xi \in C^\infty(M)$ est une fonction de Morse-Bott dont les indices et les dimensions des variétés critiques sont tous pairs*[3].

Démonstration. Le hamiltonien H_ξ génère toujours une action hamiltonienne $\tilde{\alpha}_\xi : \mathbb{R} \to \mathrm{Symp}(\omega) : t \mapsto (\tilde{\alpha} \circ \pi)(t\xi)$ où $\pi : \mathfrak{t} \to T$ est la projection sur le quotient introduite plus haut. Les ensembles critiques correspondent précisément aux points $m \in M$ où $X_\xi(m) = 0$, bref aux points fixes de l'action : nous avons $\mathrm{Crit}\, H_\xi = \mathrm{Fix}\, \tilde{\alpha}_\xi$. Autrement dit, le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \phi^t_{X_\xi} = \tilde{\alpha}_\xi(t)$ fixe les ensembles critiques de H_ξ. Par continuité de l'action et par densité de ce sous-groupe dans T_ξ, il en résulte que T_ξ fixe aussi $\mathrm{Crit}\, H_\xi$, c'est-à-dire que $\mathrm{Crit}\, H_\xi = M_{T_\xi}$. Puisque T_ξ est un groupe compact, nous savons que M_{T_ξ} est une sous-variété symplectique. Ceci prouve que les ensembles critiques de H_ξ sont des sous-variétés de dimension paire.

Ici, nous avons eu recours aux raffinements dans le contexte symplectique de la proposition 1.4.4 appliqués au groupe compact T_ξ ; afin de poursuivre, il faut revenir aux idées derrières ces résultats. Soit $m \in \mathrm{Crit}\, H_\xi = M_{T_\xi}$. En vertu d'un principe de linéarisation équivariant utilisé par exemple au théorème 3.2.1, nous pouvons supposer que m est l'origine de l'espace vectoriel symplectique $(T_m M, \omega_m)$ et plutôt étudier la représentation isotropique et hamiltonienne de T_ξ sur cet espace. En notant w_i les poids de cette représentation et $p_1, \ldots, q_n$ les coordonnées relatives à la base de vecteurs propres associée, alors T_ξ agit via les hamiltoniens[4]

3. Les nouvelles notions apparaissant dans cet énoncé sont définies à l'annexe A.

4. Évidemment, si $\phi : (T_m M; m) \dashrightarrow (M; m)$ est le difféomorphisme symplectique implicitement utilisé dans la linéarisation du problème, alors $\tilde{H}_\eta(v)$ vaut $(\phi^* H_\eta)(v) - H_\eta(m)$.

$$\tilde{H}_\eta\,(p_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} H_{osc}(p_i, q_i)\, w_i(\eta) \qquad \text{pour tout } \eta \in \mathfrak{t}_\xi \ .$$

Pour une raison analogue à celle expliquant que la hessienne d'une fonction est bien définie en un point critique, la hessienne de H_ξ en m peut se calculer de la hessienne de $\tilde{H}_\xi$ en 0. En dénotant par π_i la projection $(p_1, \ldots, q_n) \mapsto (p_i, q_i)$, nous calculons :

$$\begin{aligned}(\nabla^2 \tilde{H}_\xi)(X_0, Y_0) = Y_0(X\,\tilde{H}_\xi) &= \sum_{i=1}^{n} Y_0(X\,\pi_i^* H_{osc})\, w_i(\xi) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\nabla^2 H_{osc})(\pi_{i*} X_0, \pi_{i*} Y_0)\, w_i(\xi)\,.\end{aligned}$$

Sachant que l'espace tangent en m à M_{T_ξ} correspond à l'ensemble des points où $\tilde{H}_\xi = 0$, ensemble que nous savons linéaire, le fait que H_{osc} soit une forme quadratique définie négative implique que cet ensemble est la somme directe des plans $\pi_i T_m M$ tels que $w_i(\xi) = 0$. C'est une autre preuve que les ensembles critiques de H_ξ sont des sous-variétés symplectiques.

De façon similaire, la fibre en m du fibré normal de $\operatorname{Crit} H_\xi$ s'identifie à la somme directe des $\pi_i T_m M$ tels que $w_i(\xi) \neq 0$. Or, $H_{osc}(X) = (\nabla^2 H_{osc})(X, X)$, de sorte que la hessienne de $\tilde{H}_\xi$ est clairement non dégénérée sur cette fibre. Cela démontre que H_ξ est une fonction de Morse-Bott.

L'indice en m de H_ξ valant l'indice en 0 de $\tilde{H}_\xi$, il est aisé de constater qu'il s'agit du double du nombre de i tels que $w_i(\xi) < 0$, ce qui est évidemment pair. □

Corollaire 5.3.1. *Dans le contexte du théorème précédent, chaque H_ξ n'admet au plus qu'un unique maximum local (alors global) ainsi au plus qu'un unique minimum local (alors global). Si M est une variété compacte, non seulement ce maximum et ce minimum existent, mais chaque ensemble de niveau est connexe.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la proposition A.2.1 démontrée en annexe à la fonction de Morse-Bott H_ξ. □

Nous en déduisons le fait autrement vraisemblable selon lequel parmi les surfaces compactes, bien qu'elles soient toutes symplectifiables, seule la sphère admet une action hamiltonienne d'un tore.

Notons que la conclusion du théorème 5.3.1 ne détermine pas le caractère torique des actions hamiltoniennes : toute fonction de Morse sur la sphère n'ayant que deux points critiques induit une action hamiltonienne dont les indices et les dimensions des variétés critiques sont tous pairs. Cependant, la démonstration du théorème montre que les actions hamiltoniennes toriques agissent autour des points fixes via divers « exemplaires » de la fonction H_{osc}. Or, c'est cette fonction qui caractérise les actions hamiltoniennes circulaires sur un plan symplectique.

Proposition 5.3.1. *Soit $(\mathbb{R}^2, \omega)$ un plan symplectique une fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ n'ayant qu'un seul point critique, point étant par ailleurs un extremum, et dont les autres ensembles de niveau sont des courbes plongées compactes. Le champ hamiltonien X_H est partout tangent aux courbes de niveau, de sorte que celles-ci forment les lieux des courbes intégrales du flot de X_H. Du plus, si $C(E)$ désigne la courbe de niveau correspondant à la valeur $H = E$ et si $D(E)$ correspond à la région du plan à l'intérieur de $C(E)$, alors la durée $T(E)$ qu'il faut pour parcourir $C(E)$ en suivant le flot de X_H est donnée par la valeur absolue de*

$$\frac{d}{dE} \operatorname{Aire}_\omega D(E) = \frac{d}{dE} \int_{D(E)} \omega \ .$$

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons que le point critique soit l'origine de $\mathbb{R}^2$, que $H(0) = 0$ et que $H > 0$ ailleurs. Ainsi, chaque réel $E > 0$ est une valeur régulière de H et l'ensemble $C(E) = H^{-1}(E)$ est alors une courbe plongée en vertu du théorème de la fonction implicite. La compacité de ces courbes tient par hypothèse. C'est un fait général que X_H est tangent aux ensembles de niveau qui sont ici unidimensionnels. H n'ayant pas de point critique ailleurs qu'en 0, X_H ne s'annule qu'à l'origine.

Cherchons à obtenir un paramétrage du plan qui soit « naturel » pour cette situation. Définissons tout d'abord une fonction $A : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ par la relation $A(p) = \operatorname{Aire}_\omega D(H(p))$. Notons que X_A est de la forme $f X_H$ avec f une fonction ne s'annulant possiblement qu'à l'origine. Désignons par $\bar{A} \in (0, \infty]$ le supremum de A sur le plan ; remarquons qu'il n'est pas atteint en raison de nos hypothèses sur H et de la non-dégénérescence de ω. Ensuite, notons qu'il existe une courbe régulière $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ intersectant chaque courbe de niveau précisément une fois, et ce transversalement. Nous définissons alors une application

$$\psi : (0, \bar{A}) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^2 - \{0\} : (A, T) \mapsto (\phi^T_{X_A} \circ \gamma^{-1})(A) \ .$$

Il s'agit clairement d'une surjection non injective. Puisque $X_A \neq 0$ ailleurs qu'en 0 et que les courbes $\phi^T_{X_A} \circ \gamma$ sont transverses aux courbes de niveau, il s'agit aussi d'une immersion et donc d'un difféomorphisme local. Ainsi, localement, ψ^{-1} est une carte et les fonctions A et T y servent de coordonnées. Nous voyons que $\omega(X_T, X_A) = \mathrm{d}T(X_A) = \mathrm{d}A(-X_T) = 1$, ce qui nous mène aux identifications $\partial/\partial T = X_A$, $\partial/\partial A = -X_T$ et $\psi^*\omega = -\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}T$.

Considérons maintenant un anneau de courbes de niveau, par exemple la région ouverte $R(A_0, \epsilon) := \{p \in \mathbb{R}^2 - \{0\} \,:\, A(p) \in (A_0, A_0+\epsilon)\}$. Notons $R'(A_0, \epsilon)$ le complément dans $R(A_0, \epsilon)$ de la courbe γ et $S(A_0, \epsilon)$ la partie connexe de $\psi^{-1}R'(A_0, \epsilon)$ sur laquelle $T > 0$ et dont la frontière intersecte l'axe $T = 0$. En fait, la région $S(A_0, \epsilon)$ est bornée par les courbes $A = A_0$, $A = A_0 + \epsilon$, $T = 0$ et $T =$ la période d'une courbe intégrale de X_A. Ainsi, $\psi : S(A_0, \epsilon) \to R'(A_0, \epsilon)$ est un difféomorphisme. Par définition de la fonction A, nous avons $\epsilon = \int_{R'(A_0,\epsilon)} \omega$; cette intégrale vaut aussi $\int_{S(A_0,\epsilon)} \mathrm{d}T \wedge \mathrm{d}A = \int_{[A_0, A_0+\epsilon]} \text{pér. de}\, X_A \; dA$. Si $\bar{T}(A_0, \epsilon)$ dénote la moyenne de la valeur des périodes pour $A \in [A_0, A_0+\epsilon]$, cette intégrale vaut $\epsilon\, \bar{T}(A_0, \epsilon)$. Bref, $\bar{T}(A_0, \epsilon) = 1$ quels que soient A_0 et ϵ, ce qui implique que la période de toutes les courbes intégrales de X_A est 1.

Revenons à la fonction H. Par définition de la fonction A, il existe une fonction réelle $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $H = g \circ A$, d'où $\mathrm{d}H = (\mathrm{d}g \circ A) \cdot \mathrm{d}A$, soit $X_H = (\mathrm{d}g \circ A)\, X_A$ ($\mathrm{d}g \circ A$ est ainsi l'inverse multiplicatif de la fonction f considérée plus haut). Le long d'une courbe de niveau de A, $\mathrm{d}g \circ A$ est constante ; il en résulte que la période de la courbe intégrale de X_H est f. Par ailleurs,

$$\frac{d}{dH} \int_{D(H)} \omega = \frac{dA}{dH} \frac{d}{dA} \int_{D(H)} \omega = \frac{dA}{dH} = f\,.$$

Ceci termine la démonstration.

□

Corollaire 5.3.2. *Soient* $(\mathbb{R}^2, \omega)$ *un plan symplectique et* H *une fonction ayant les propriétés énoncées à la proposition précédente. Alors il existe un symplectomorphisme* $\Psi : (\mathbb{R}^2, \omega) \to (\mathbb{R}^2, \omega_0)$ *tel que les cercles centrés à l'origine dans l'image correspondent aux courbes de niveau de* H*.*

Démonstration. En coordonnées polaires (r, θ), la forme standard ω_0 est donnée par $-r\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta$, ce qui s'écrit aussi $-\mathrm{d}A \wedge \mathrm{d}T$ avec $A = \pi r^2$ l'aire des cercles centrés à l'origine et $T = \theta/2\pi$. Les coordonnées A et T obtenues dans la démonstration précédente pouvant s'identifier à ces dernières, nous obtenons le symplectomorphisme recherché. □

Remarques :

(1) La fonction H_{osc} a pour courbes de niveau les cercles centrés à l'origine et elle associe à un cercle C (au signe près) la superficie du disque de frontière C. La proposition nous dit alors que toutes les courbes intégrales du flot de $X_{H_{osc}}$ sur $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ sont de période un. Ceci montre que H_{osc} induit une action circulaire sur le plan symplectique standard. À l'inverse, toute action hamiltonienne circulaire sur un plan symplectique correspond (via un symplectomorphisme S^1-équivariant) à l'action de H_{osc} sur le plan symplectique standard.

(2) Nous savons que toutes les surfaces réelles orientables sont symplectifiables, ce qui répond à la question de l'existence des formes symplectiques sur les variétés réelles de dimension deux. L'autre versant du problème de classification, à savoir l'énumération des formes symplectiques sur une variété symplectifiable, est virtuellement résolu par le corollaire 5.3.2 : étant donné une surface orientable M et un réel $A > 0$, il n'existe à difféomorphisme près qu'une seule structure symplectique ω telle que $\int_M \omega = A$. Cette unicité de la structure symplectique sur les surfaces se déduit dans le cas des surfaces fermées du théorème de stabilité de Moser ainsi que par la trivialité du fibré $\wedge^2 T^* M$: voir [**13**], exercice 3.22(i).

(3) Notons que les coordonnées T et A construites dans la proposition 5.3.1 correspondent aux coordonnées « angle-action » du système mécanique classique $(\mathbb{R}^2, \omega, H)$. Pour plus d'informations à ce sujet, consulter [**1**] section 50.

Remarquons qu'avec ces résultats en main, il nous est possible de classifier toutes les actions hamiltoniennes toriques sur les sphères symplectiques. À difféomorphisme de la sphère près, les seules actions hamiltoniennes circulaires sont les rotations autour d'un axe (dans un sens ou l'autre) et de périodes $1/n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Pour les actions hamiltoniennes toriques, il suffit de décomposer le tore en produit de cercles : l'action étant abélienne, l'action induite de chacun de ces cercles sur la sphère se doit d'être des rotations autour d'un même axe, sans toutefois aucune contrainte sur les diverses périodes. Remarquons que par connexité simple de la sphère, toute action symplectique est faiblement hamiltonienne et que par compacité de la sphère, toute action faiblement hamiltonienne est hamiltonienne. Ainsi, nous avons classifié à difféomorphisme près toutes les actions symplectiques toriques sur les sphères symplectiques.

5.4. Le théorème de convexité

À la section 5.2, nous avons aperçu la complexité potentielle d'une application moment associée à une action hamiltonienne abélienne. Il s'avère que dans le cas plus particulier des actions toriques, les applications moments ont des propriétés étonnantes.

Théorème 5.4.1 (Théorème de convexité d'Atiyah-Guillemin-Sternberg)**.** *Soit* (M^m, ω, T^r, μ) *un système hamiltonien avec* M *compacte et connexe. Alors l'image de* μ *est l'enveloppe convexe des sommets de* μ*.*

Cela détonne de la situation exhibée dans l'exemple 5.2.1 où $\operatorname{Im}\mu$ n'a généralement rien d'une courbe droite.

La démonstration de ce théorème est scindée en deux étapes. La première consiste à montrer qu'une action hamiltonienne torique quelconque est « localement convexe » ; la seconde s'emploie à déduire de ceci et des hypothèses sur M la convexité globale.

Considérations locales

Soit (M^{2n}, ω, T, μ) un système hamiltonien. Nous savons de la proposition 1.4.2 appliquée au groupe abélien $G = T$ que tout point $m \in M$ admet un voisinage ouvert U pour lequel seul un nombre fini de sous-groupes de T apparaissent comme stabilisateurs de points de U. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que U est si petit que G_m contient tous les sous-groupes stabilisateurs de points de U. Dans tous les cas, U se divise en un nombre fini d'ensembles de points fixes $\operatorname{Fix} G_p$. Chacun de ces sous-groupes étant normal, nous savons de la section 5.2 que $\mu|_{\operatorname{Fix} G_p}$ est une submersion sur l'espace affine $\mu(p) + \mathfrak{g}_p^0$; si U est connexe, alors ceci s'écrit encore $\mu(m) + \mathfrak{g}_p^0$ et $\mu(m)$ appartient à la fermeture de cet ouvert. Ceci montre que près de $\mu(m)$, $\operatorname{Im}\mu$ est un ensemble linéaire par morceaux, mais il n'est pas encore tout à fait clair si cela ressemble à un polyhèdre. Afin de s'en convaincre, nous revenons à la même idée : étudier une représentation isotropique.

Considérons l'action isotropique du tore stabilisateur T_m sur $T_m M$. Nous savons que pour chaque $\xi \in \mathfrak{t}_m$, le hamiltonien correspondant est donné par

$$H_\xi\,(p_1, \ldots, q_n) = \sum_{i=1}^{n} H_{osc}(p_i, q_i)\, w_i(\xi)$$

où les w_i sont les poids de la représentation isotropique de T_m. Ceci signifie que l'application moment $\mu : T_mM \to \mathfrak{t}_m^*$ associée à l'action isotropique est

$$\mu\,(p_1,\ldots,q_n) = \sum_{i=1}^{n} H_{osc}(p_i,q_i)\,w_i \;\in\; S_{T_m} := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \;:\; \lambda_i \geq 0 \;\; \forall\, i \right\}. \qquad (5.4.1)$$

L'ensemble S_{T_m} est assurément convexe et ressemble à un coin de polyèdre. De plus, il est aisé de voir que $\operatorname{Im}\mu = S_{T_m}$. Nous savons que l'application moment $\mu' : M \to \mathfrak{t}_m^*$ est dans un voisinage de m de la forme $\mu'(p) = \mu'(m) + (\mu\circ\phi)(p)$ avec ϕ un difféomorphisme issu du processus de linéarisation. Nous avons ainsi démontré un cas particulier de la proposition suivante, soit lorsque $T_m = T$.

Proposition 5.4.1 (Convexité locale)**.** *Soit (M^{2n},ω,T,μ) un système hamiltonien. Considérons un point $m\in M$ et son tore stabilisateur $H = T_m$. Dénotons par $\rho : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{h}^*$ la restriction des fonctions linéaires réelles de $\mathfrak{t}$ à $\mathfrak{h}$. Alors il existe des ouverts $m \in U \subset M$ et $\mu(m) \in V \subset \mathfrak{t}^*$ tels que*

$$\mu(U) = V \cap \Big(\mu(m) + \rho^{-1}S_H\Big)\;.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons nous restreindre à des considérations locales et linéariser le problème, de façon à ce que la variété M soit perçue comme un ouvert U de T_mM dont l'origine est m, que la forme ω sur U ne soit que la restriction de $\omega|_{T_mM}$ et que le groupe stabilisateur H agisse selon la représentation isotropique. Évidemment, dans ces circonstances, le groupe T doit être remplacé par un *groupe local* (que nous notons toujours T) dont l'action n'est pas linéaire, ni même nécessairement affine, et contenant H.

Nous savons que M_H est l'intersection de U avec un sous-espace linéaire W de T_mM. Ce sous-espace (symplectique) s'avère ainsi fixé par l'action linéaire de H sur T_mM. Il s'agit donc d'une somme directe de $\frac{1}{2}\dim W$ sous-espaces symplectiques bidimensionnels fixés par H auxquels correspondent les $\frac{1}{2}\dim W$ poids w_i nuls de la représentation isotropique de H.

Considérons l'application moment μ_H associée à l'action de H. La formule (5.4.1) nous apprend ainsi que pour μ_H est constante sur chaque espace affine $W_v := v + W$ avec $v \in U$. La raison de ceci tient au fait qu'ajouter un élément de W à v ne changent que les coordonnées (p_i,q_i) associées à des poids w_i nuls. En particulier, $\mu_H(W) = 0$.

Or, $\mu_H = \rho\circ\mu$. Nous calculons donc que pour tout $v \in T_mM$,

$$\begin{aligned}\mu(W_v) &= (\rho^{-1}\circ\mu_H)(W_v) = (\rho^{-1}\circ\mu_H)(v) + (\rho^{-1}\circ\mu_H)(W)\\ &= \mu(v) + \rho^{-1}(0) = \mu(v) + \operatorname{Ker}\rho = \mu(v) + \mathfrak{h}^0\,.\end{aligned}$$

Notons ensuite que l'application moment $\mu : U \to \mathfrak{t}^*$ envoie M_H de façon submersive vers un ouvert de l'espace affine $\mu(0) + \mathfrak{h}^0$. En fait, la différentielle $\mathrm{d}\mu_p : T_pM_H = W \to \mathfrak{h}^0$ est surjective pour tout $p \in M_H$ et en particulier pour $p = 0$. Ainsi, μ est submersive en tout point près de $v = 0$, c'est-à-dire que pour tout $v \in U$, $U \cap W_v$ est envoyé de façon submersive par μ sur un ouvert de $\mu(v)+\mathfrak{h}^0$ contenant $\mu(v)$. Donc, quitte à prendre un voisinage $U \ni 0$ plus petit, $\mu(U)$ est un ouvert V de $\mu(0)$ dans $\rho^{-1}(\mu_H(U))$. En raison des arguments précédant l'énoncé de la proposition, $\mu_H(U)$ contient un voisinage ouvert de 0 dans $S_H \subset \mathfrak{h}^*$, ce qui conclut la démonstration.

□

Considérations globales

La variété M étant supposée compacte et connexe dans le théorème 5.4.1, l'image $\operatorname{Im}\mu$ l'est aussi. La proposition 1.4.2 indique alors qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes de T qui soient des stabilisateurs de points de M, de sorte que l'image de μ n'est « supportée » que par un nombre fini de plans affines. En fait, considérons un ensemble $\operatorname{Fix} H \ni m$, son image par μ étant un ouvert de $\mu(m) + \mathfrak{h}^0$. Par continuité de μ et par compacité de M, le bord de cet ouvert consiste en l'ensemble des images par μ de $M_H - \operatorname{Fix} H$, soit en une réunion finie de sous-espaces affines. Par induction sur la dimension de H, nous en déduisons donc que $\operatorname{Im}\mu$ est une réunion finie de polyèdres convexes.

À cette étape, plusieurs « pathologies » sont possibles. Par exemple, ce raisonnement n'implique pas encore que $\operatorname{Im}\mu$ est convexe, de la même façon qu'un pentagone étoilé est une réunion de convexes sans être convexe lui-même. Une autre complication possible (et qui n'est pas étrangère à la précédente) est que l'image de μ puisse « s'intersecter elle-même », en ce sens que deux points de M appartenant à des M_H différents puissent avoir le même moment. La proposition 5.4.1 est un pas important afin d'écarter ces possibilités.

L'élément crucial de la preuve est la constatation suivante : pour $\xi \in \mathfrak{t}$, le hamiltonien $H_\xi(-) = \langle\mu(-),\xi\rangle : M \to \mathbb{R}$ peut aussi s'interpréter comme une fonction « coordonnée » $x^\xi = J(\xi) = \langle -,\xi\rangle : \mathfrak{t}^* \to \mathbb{R}$ évaluée sur le sous-ensemble

$\operatorname{Im}\mu$. Le corollaire 5.3.1 indiquant que H_ξ n'a qu'un unique maximum local (et donc global) fini pour chaque $\xi \in \mathfrak{t} - \{0\}$, que nous notons $m(\xi)$, nous en déduisons que $x^\xi(\operatorname{Im}\mu) \subset (-\infty, m(\xi)]$.

Démonstration du théorème 5.4.1. Considérons $p \in \partial \operatorname{Im}\mu$ et $m \in \mu^{-1}(p)$ quelconques. Dénotons par $H = T_m$ le groupe stabilisateur de m dans M et par $Z(m)$ l'ensemble convexe $p + \rho_H^{-1} S_H$ où $\rho_H : \mathfrak{t}^* \to \mathfrak{h}^*$ est la restriction de fonctions. La proposition 5.4.1 nous indique qu'il existe des voisinages ouverts $U_m \ni m$ et $V_m \ni p$ tels que $\mu(U_m) = V_m \cap Z(m)$.

D'une part, soit un point $q \notin Z(m)$. Par convexité du fermé $Z(m)$, il est possible de trouver $\xi \in \mathfrak{t}$ tel que $x^\xi(Z(m)) \leq x^\xi(p)$ et $x^\xi(q) > x^\xi(p)$. Ainsi, $x^\xi(p)$ est un maximum sur $\mu(U_m)$, c'est-à-dire un maximum local sur $\operatorname{Im}\mu$. Le corollaire 5.3.1 implique alors $x^\xi(\operatorname{Im}\mu) \leq x^\xi(p)$, ce qui exclut la possibilité que q soit dans $\operatorname{Im}\mu$. Ainsi, $\operatorname{Im}\mu \subset Z(m)$ pour tout $m \in \mu^{-1}(\partial \operatorname{Im}\mu)$. Il en résulte que $\operatorname{Im}\mu \subseteq \cap_{m \in \mu^{-1}(\partial \operatorname{Im}\mu)} Z(m)$, cette intersection étant convexe puisque chaque $Z(m)$ l'est. D'autre part, si $q \notin \operatorname{Im}\mu$, alors notons p le point de $\operatorname{Im}\mu$ le plus près de q et prenons $m \in \mu^{-1}(p)$. Le segment droit $[q, p)$ tout entier n'est pas dans $\operatorname{Im}\mu$, mais il intersecte V_m ; le segment est alors disjoint de $Z(m)$. Il en résulte que $\operatorname{Im}\mu = \cap_{m \in \mu^{-1}(\partial \operatorname{Im}\mu)} Z(m)$, ce qui termine la démonstration. □

Remarque : Cette démonstration du théorème 5.4.1 est largement inspirée des arguments offerts par Guillemin et Sternberg au chapitre 2 de [**6**]. Presque à la même époque, Atiyah a vraisemblablement présenté une démonstration davantage versée dans la topologie différentielle et la théorie de Morse-Bott que McDuff et Salamon relatent à la section 5.5 dans [**13**].

Le théorème de convexité fut généralisé de diverses façons. La première adaptation trouvée concerne les actions hamiltoniennes de groupes compacts connexes G. Guillemin et Sternberg eux-mêmes avaient faits quelques découvertes dans cette direction et avaient conjecturé un résultat sur la convexité de certains sous-ensembles de l'image de l'application moment analogue au théorème 5.4.1 ; Frances Kirwan confirma rapidement cette conjecture. Cependant, ne serait-ce que pour énoncer les résultats les plus simples de ce sujet, il nous faudrait introduire des notions sur la structure des groupes et des algèbres de Lie plus avancés que tout ce que nous avons abordé dans ce mémoire. C'est pourquoi le lecteur est référé à la section 32 dans [**6**], à la section 5.5 dans [**13**] et aux références que ces ouvrages contiennent pour plus d'information à ce sujet.

5.5. Les actions effectives maximales

Afin de motiver quelque peu les considérations de cette sous-section, portons de nouveau notre attention à la résolution des équations de Hamilton $(\dot{p}, \dot{q}) = X_H$ associées à un système mécanique (M^{2n}, ω, H). Nous avons mentionné vers la fin de la section 4.1 qu'il s'avèrait utile pour ce problème d'identifier une sous-algèbre de Poisson $\mathfrak{g} \subset C^\infty(M)$ ne contenant pas H, mais commutant avec cet hamiltonien : $\{H, \mathfrak{g}\} = 0$. Il arrive parfois qu'une sous-algèbre $\mathfrak{g}$ *abélienne* puisse être trouvée, dans quel cas le système mécanique est dit *partiellement intégrable*. Si $\{F_1, \ldots, F_k\}$ est linéairement indépendant dans $\mathfrak{g}$, considérons une valeur régulière c de l'application $F : M \to \mathbb{R}^k : m \mapsto (F_1(m), \ldots, F_k(m))$. Si $F^{-1}(c)$ est non vide, il s'agit forcément d'une sous-variété isotrope de M. Il en résulte en particulier que l'algèbre abélienne $\mathfrak{g}$ est tout au plus de dimension $n-1$. S'il est possible d'identifier une sous-algèbre abélienne dont la dimension est maximale, le système mécanique est alors dit *complètement intégrable*. Les systèmes complètement intégrables ont des propriétés bien spéciales : par exemple, les pré-images des valeurs régulières de l'application $M \to \mathbb{R}^n : m \mapsto (H(m), F_1(m), \ldots, F_{n-1}(m))$ sont des tores lagrangiens ; voir [**1**], section 49.C pour une preuve.

Revenons au cas des actions hamiltoniennes toriques sur une variété symplectique (M^{2n}, ω). Dans [**5**], Delzant s'est intéressé plus spécifiquement aux actions hamiltoniennes *effectives* d'un tore de dimension n, c'est-à-dire de dimension moitié celle de la variété symplectique. Étant donné que les orbites d'une action symplectique torique sont isotropes, il est assuré qu'aucune action effective n'existe pour un tore de dimension supérieure à n. En ce sens, le cas $\dim T = n$ est maximal. Il n'est pas difficile de se convaincre que pour tout $\xi \in \mathfrak{t}$ non nul, le triplet (M, ω, H_ξ) donne lieu à un système mécanique complètement intégrable, l'algèbre $\mathfrak{g}$ pouvant être n'importe quel supplémentaire à ξ dans $\mathfrak{t}$. Cela suggère que les actions hamiltoniennes toriques effectives maximales ont des propriétés très particulières.

En premier lieu, notons que pour une action hamiltonienne quelconque du tore T^r sur la variété (M^{2n}, ω), si l'orbite m^T passant par $m \in M$ est de dimension d, alors les équations (4.3.1) et (4.3.2) impliquent que $\mu(m)$ appartient à une face du polyèdre $\operatorname{Im}\mu$ de dimension au moins $r - d$. Il n'est alors pas assuré que la dimension d'une orbite m^T puisse être inférée de la dimension de la face à laquelle appartient $\mu(m^T)$.

Lemme 5.5.1. *Soit* $(M^{2n}, \omega, T^n, \mu)$ *un système hamiltonien correspondant à une action effective maximale. Si l'orbite* m^T *pour* $m \in M$ *est de dimension* d*, alors la face du polyèdre* $\operatorname{Im}\mu$ *contenant* $\mu(m)$ *est de dimension* $n - d$*.*

Démonstration. Notons tout d'abord que si l'action hamiltonienne de T sur (M, ω) est effective, alors l'ensemble $\operatorname{Fix}\{e\}$ est un ouvert dense de M ; autrement dit, l'action de T est libre sur pratiquement tout M. Rappelons que pour $\xi \in \mathfrak{t}$, T_ξ désigne la fermeture du groupe à un paramètre $\mathbb{R}\langle\xi\rangle$ dans T et $\operatorname{Fix} T_\xi = \operatorname{Crit} H_\xi$. Il ressort du théorème 5.3.1 que le complément de $\operatorname{Crit} H_\xi$ est un ouvert dense de M quel que soit $\xi \neq 0$. Notons que chaque sous-groupe fermé de T autre que $\{e\}$ est de la forme T_ξ pour un certain $\xi \neq 0$. Puisque $\operatorname{Fix}\{e\}$ est l'intersection de tous les ensembles complémentaires aux $\operatorname{Fix} H$ pour H parcourant l'ensemble (dénombrable) des sous-groupes fermés de T autres que $\{e\}$, nous déduisons du théorème de catégorie de Baire qu'il s'agit d'un ensemble dense de M. En fait, il s'agit aussi d'un ouvert : si $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{t}$ est une base quelconque, alors il est aisé de déduire de la description ci-dessus que $\operatorname{Fix}\{e\}$ correspond à l'ensemble de points $m \in M$ où l'ensemble $\left\{ \mathrm{d}H_{b_j}\Big|_m : b_j \in \mathfrak{B} \right\}$ est linéairement indépendant, ce qui est une condition ouverte. Bref, $\operatorname{Fix}\{e\}$ est un ouvert dense de M.

Pour l'instant, considérons seulement une action hamiltonienne d'un tore T^r quelconque ; l'importance des hypothèses d'effectivité et de maximalité émanera au fil de l'argumentaire.

Remarquons que si $m \in M$ est un point régulier de l'application moment μ, alors le rang de $\mu_{*\,m}$ est nécessairement n ; il n'y a rien à démontrer. Choisissons alors un point critique $m \in M$ de μ et dénotons par $n - d$ le rang de $\mu_{*\,x}$, de sorte que $\dim T_m = d$ et que $\dim m^T = r - d$. Considérons maintenant $\xi \in \mathfrak{t}_m$ tel que $T_\xi = T_m^0$, la composante neutre de T_m. Il en résulte que $m \in \operatorname{Crit} H_\xi$ et notons $C \subset \operatorname{Crit} H_\xi$ la variété critique connexe contenant m. Nous savons qu'il s'agit d'une sous-variété symplectique de M ; étant donné qu'elle contient la variété isotrope m^T, nous avons $2(r - d) = 2 \dim m^T \leq \dim C$. En d'autres termes, $\operatorname{codim} C \leq 2(n - r + d)$.

En utilisant à nouveau l'idée sous-jacente au théorème de Darboux-Moser-Weinstein équivariant, linéarisons le problème et considérons la représentation isotropique de T_m^0 sur $T_m M$. La variété critique C correspond alors au sous-espace vectoriel W formé des vecteurs fixés par T_m^0. En utilisant une métrique riemannienne équivariante compatible avec ω, posons $V = W^\perp$. Il s'agit d'un espace symplectique stable sous l'action (symplectique) de T_m^0. En utilisant enfin l'hypothèse de l'action effective, le premier paragraphe nous apprend que T agit librement presque partout sur T_mM. Il faut qu'il en soit de même pour T_m^0, de sorte que l'action de T_m^0 sur V est libre presque partout. Puisque dim $T_m^0 = d$, cela n'est possible que si dim $V \geq 2d$. Sachant que dim $V = \operatorname{codim} C \leq 2(n-r+d)$, nous en déduisons que $2r \leq 2n$. Cette dernière inégalité est évidemment vérifiée quelle que soit l'action effective ; en supposant cependant la maximalité de l'action, il en résulte les égalités $\dim V = 2d$ et $\dim C = 2(n-d)$. Cela n'est qu'une manifestation du fait que les orbites m^T sont dans ce cas des tores *lagrangiens*.

En poursuivant avec la pleine puissance des hypothèses de l'énoncé, il existe alors des coordonnées $v_1, \ldots, v_{2d}$ de V et $w_1, \ldots, w_{2(n-d)}$ de W telles que l'action de T_m^0 sur T_mM est donnée par l'application moment

$$\mu(v_1, \ldots, v_{2d}, w_1, \ldots, w_{2(n-d)}) = \mu(m) + \sum_{i=1}^{d} H_{osc}(v_{2i-1}, v_{2i})\, e_i^*$$

où $\{e_i^*\}$ dénote la base de $\mathfrak{t}_m^*$ duale à une base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{t}_m$ induisant un isomorphisme $T_m^0 \cong \mathfrak{t}_m/\mathbb{Z}\langle e_1, \ldots, e_d\rangle$. Nous utilisons implicitement ici le fait que l'action de T_m^0 sur V est libre presque partout. Ainsi, les d hamiltoniens $H_i = H_{e_i} = \mu(e_i)$ ont tous un maximum local en m ; en vertu théorème 5.3.1, il s'agit de leur maximum global. Ainsi, le point $\mu(m)$ appartient à l'intersection des d hyperplans linéairement indépendants $[x^{e_i} = \mu(m)(e_i)]$ supportant le polyèdre $\operatorname{Im} \mu$. Cette intersection étant un sous-espace affine de dimension $n-d$, la face du polyèdre contenant $\mu(m)$ a tout au plus cette dimension. D'après le commentaire précédant l'énoncé du lemme, cette face est aussi tout au moins de cette dimension. $\square$

Notons que la base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{t}$ introduite au dernier paragraphe est, du fait même qu'elle induit un isomorphisme $T_m^0 \cong \mathfrak{t}_m/\mathbb{Z}\langle e_1, \ldots, e_d\rangle$, un sous-ensemble bien particulier de $\mathfrak{t}$. En fait, si une base E de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ d'un tore T induit un isomorphisme $T \cong \mathfrak{t}/\mathbb{Z}\langle E\rangle$, alors toute autre base F de $\mathfrak{t}$ induit un isomorphisme $T \cong \mathfrak{t}/\mathbb{Z}\langle F\rangle$ si et seulement si les réseaux $\mathbb{Z}\langle E\rangle$ et $\mathbb{Z}\langle F\rangle$ coïncident. Ainsi, bien que des générateurs canoniques de $\pi_1(T, e)$ n'existent habituellement pas, l'algèbre $\mathfrak{t}$ admet un $\mathbb{Z}$-réseau canonique, à savoir le noyau de l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{t} \to T$. Une base de ce réseau canonique est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathfrak{t}$. En considérant le $\mathbb{Z}$-réseau dual dans $\mathfrak{t}^*$, nous constatons que la démonstration ci-dessus implique en particulier :

Lemme 5.5.2. *Soient une action hamiltonienne effective d'un tore T^n sur une variété symplectique (M^{2n}, ω) et μ une application moment pour cette action. Alors de chaque sommet du polyèdre $\mu(M)$ partent n arêtes engendrées par une $\mathbb{Z}$-base du réseau canonique de $\mathfrak{t}^*$.*

Il s'agit d'une contrainte importante sur les polyèdres pouvant être réalisés comme image d'une application moment associée à une action hamiltonienne torique effective maximale.

Exemple 5.5.1 : Nous avons considéré à l'exemple 4.4.2 la sphère symplectique $(S^2_\lambda, \omega_\lambda)$ obtenue en restreignant la forme volume standard de $\mathbb{R}^3$ sur la sphère de rayon λ et une action hamiltonienne du cercle $S^1 = T^1$ sur celle-ci donnée par les hamiltoniens $H_a(v) = a\,\lambda\hat{z}\cdot v$. Cette action est évidemment effective et maximale. Nous avions alors trouvé que l'image de l'application moment μ_λ associée était $[-\lambda^2, \lambda^2] \subset \mathfrak{t}^1$. Tout ceci corrobore évidemment nos plus récents résultats.

Exemple 5.5.2 : Considérons la 4-variété symplectique $(S^2_\lambda \times S^2_\sigma, \omega_\lambda \times \omega_\sigma)$. Nous définissons une action hamiltonienne du 2-tore $T^1 \times T^1$ via l'application moment

$$\mu(v_\lambda, w_\sigma)(\xi_1, \xi_2) = \mu_\lambda(v_\lambda)(\xi_1) + \mu_\sigma(w_\sigma)(\xi_2)\,.$$

Ici, nous avons $v_\lambda \in S^2_\lambda$ et $w_\sigma \in S^2_\sigma$, tandis que l'élément $(\xi_1, \xi_2) \in \mathfrak{t}^2$ est exprimé en termes d'une certaine $\mathbb{Z}$-base $\{e_1, e_2\}$ de l'algèbre de Lie du 2-tore. Comme l'action de l'exemple précédent est effective, il en va de même pour l'action actuelle. Il n'est pas difficile de se rendre compte que $\operatorname{Im}\mu = [-\lambda^2, \lambda^2] \times [-\sigma^2, \sigma^2]$. De chaque sommet de ce rectangle émanent deux arêtes engendrées par la $\mathbb{Z}$-base duale $\{e_1^*, e_2^*\}$. Les longueurs des côtés de ce rectangle sont cependant arbitraires, puisque λ et σ le sont. Remarquons que

(1) pour $p \in \operatorname{int}\mu(M)$, $\mu^{-1}(p)$ est un tore lagrangien ;

(2) pour $p \in \partial\,\mu(M)$ qui n'est pas un sommet, $\mu^{-1}(p)$ est un cercle se projetant sur un pôle de l'une des « sphères facteurs » ;

(3) pour p un sommet, $\mu^{-1}(p)$ est l'un des quatre points $(\pm\lambda\hat{z}, \pm\sigma\hat{z})$.

Ce dernier exemple révèle d'autres propriétés parfaitement générales des actions hamiltoniennes toriques effectives maximales.

Lemme 5.5.3. *Soient (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et μ une application moment associée à une action hamiltonienne effective du tore T^n. Alors pour tout point $p \in \operatorname{Im}\mu$, l'ensemble $\mu^{-1}(p)$ est un tore plongé de dimension égale à celle de la face du polyèdre $\mu(M)$ contenant p.*

Démonstration. La preuve de ce résultat est donnée au lemme 2.2 dans [**5**]. □

Remarque : Il faut comparer ce résultat avec notre discussion du début de la section 5.2. Bien que l'ensemble $V := \mu^{-1}(\mu(m))$ s'avère parfois être une sous-variété de M, le lemme 5.5.3 indique qu'il ne s'agit pas toujours d'une sous-variété coisotrope : si tel était le cas, nous aurions $\dim V \geq n$, or le lemme stipule l'inégalité inverse. Guillemin et Sternberg définissent dans la section 25 de [**6**] la notion d'*intersection franche*[5] entre une application lisse $f : X \to Y$ et une sous-variété plongée $W \subset Y$: il faut d'une part que $f^{-1}(W)$ soit une sous-variété de X, et d'autre part que l'égalité $T_x\left(f^{-1}(W)\right) = (f_*)^{-1}\left(T_{f(x)}W\right)$ tienne pour tout $x \in f^{-1}(W)$. Le concept d'intersection franche généralise celui d'intersection transversale dont l'utilité en topologie différentielle est sans équivoque. Guillemin et Sternberg présentent par la suite divers résultats concernant la réduction de Marsden-Weinstein (dont plusieurs d'existence) dans les cas où l'application moment μ intersecte de manière franche une sous-variété de $\mathfrak{g}^*$, en particulier les orbites coadjointes. Dans la section 5.4 de [**13**], McDuff et Salamon présentent quelques résultats du même genre. Quoi qu'il en soit, nous pouvons inférer du lemme 5.5.3 que l'intersection de μ avec le bord de son image n'est pas franche pour les actions hamiltoniennes toriques effectives maximales.

Énonçons maintenant le théorème le plus impressionnant de cette section.

Théorème 5.5.1 (Delzant-Laudenbach)**.**

- **Unicité :** *Soient* $(M_1^{2n}, \omega_1, T^n, \mu_1)$ *et* $(M_2^{2n}, \omega_2, T^n, \mu_2)$ *deux systèmes hamiltoniens associés à des actions effectives telles que* $\operatorname{Im}\mu_1 = \operatorname{Im}\mu_2$. *Alors ces deux systèmes sont isomorphes : il existe un difféomorphisme symplectique* T*-équivariant* $\phi : M_1 \to M_2$ *vérifiant de plus* $\mu_2 \circ \phi = \mu_1$.
- **Existence :** *Soit* $P \subset (\mathfrak{t}^n)^*$ *un polyèdre convexe tel que de chacun de ses sommets émanent* n *arêtes engendrées par une* $\mathbb{Z}$*-base du réseau canonique de* $(\mathfrak{t}^n)^*$. *Alors il existe un système hamiltonien* $(M^{2n}, \omega, T^n, \mu)$ *tel que* $\operatorname{Im}\mu = P$.

La démonstration de ce théorème est l'objectif principal de [**5**].

5. Il s'agit d'une traduction personnelle du terme anglais *clean intersection* qu'ils utilisent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold, Vladimir I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. New-York, Springer Science+Business Media, Graduate Texts in Mathematics, deuxième édition, 1989.

[2] Audin, Michèle et Damian, Mihai. *Théorie de Morse et homologie de Floer*. Paris, EDP Sciences/CNRS Éditions, Savoirs actuels, première édition, 2010.

[3] Audin-Cadot, Noé. *Introduction à quelques aspects de quantification géométrique*. Mémoire de maîtrise, Montréal, Université de Montréal, 2013, 86 pages.

[4] Dellnitz, Michael et Melbourne, Ian. The equivariant Darboux theorem. *Exploiting Symmetry in Applied and Numerical Analysis,* (E. Allgower et al eds.) 1992 AMS-SIAM Summer Seminar Proceedings. Lectures in Appl. Math. 29 (1993), p. 163-169.

[5] Delzant, Thomas. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 116, n°3 (1988), p. 315-339.

[6] Guillemin, Victor et Sternberg, Shlomo. *Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge, Cambridge University Press, 1984.

[7] Kirillov, Aleksandr A. *Elements of the Theory of Representations*. Berlin, Springer-Verlag, A Series of Comrehensive Studies in Mathematics, 1976.

[8] Knapp, Anthony W. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Boston, Birkhäuser, Progress in Mathematics, deuxième édition, 2005 (2002).

[9] Kostant, Bertram. « Quantization and Unitary Representations » dans C.T. Taam (dir.), *Lectures in Modern Analysis and Applications III*. Berlin, Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 1970, p. 87-208.

[10] Kobayashi, Shoshichi et Nomizu, Katsumi. *Foundations of Differential Geometry - Vol. I*. New-York, John Wiley & Sons, Wiley Classics Library, première édition, 1991 (1963).

[11] Lee, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New-York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, première édition, 2002.

[12] LEE, JOHN M. *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature.* New-York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, première édition, 1997.

[13] MCDUFF, DUSA ET SALAMON, DIETMAR. *Introduction to Symplectic Topology.* Oxford, Oxford University Press, Oxford Mathematical Monographs, deuxième édition 2005.

[14] OLVER, PETER J. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* New-York, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, deuxième édition, 1991.

[15] SHARPE, RICHARD W. *Differential Geometry : Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program.* New-York, Springer-Verlag, 1996.

[16] SOURIAU, JEAN-MARIE. *Structure des systèmes dynamiques.* Paris, Dunod, Collection Dunod Université, 1970.

[17] WEINBERG, STEPHEN. *The Quantum Theory of Fields - Volume I : Foundations.* New-York, Cambridge University Press, 1995.

[18] WOODHOUSE, NICHOLAS M.J. *Geometric Quantization.* Oxford, Oxford University Press, Oxford Mathematical Monographs, deuxième édition 1991.

Annexe A

RUDIMENTS DE LA THÉORIE DE MORSE-BOTT

Cette annexe rassemble une poignée de résultats en théorie de Morse-Bott, la plupart étant énoncée sinon démontrée dans [**6**] ou dans [**13**]. L'ouvrage [**2**] offre une présentation détaillée de la théorie de Morse et de ses extensions fort utiles en topologie symplectique.

A.1. Notions et résultats fondamentaux

Définition A.1.1. *Soient M^m et N^n deux variétés lisses et $f \in C^\infty(M,N)$ une fonction. Si $p \in M$ est un point tel que* $\operatorname{rang} \mathrm{d}f_p < n$, *c'est-à-dire si* $\mathrm{d}f_p$ *surjective, alors p est un* ***point régulier de*** f *; il s'agit d'un* ***point critique*** *autrement. Un point $q \in N$ est une* ***valeur critique de*** f *si l'ensemble $f^{-1}(q) \subset M$ contient un point critique ; il s'agit d'une* ***valeur régulière*** *autrement. L'****ensemble des points critiques de*** f *est noté* $\operatorname{Crit} f$.

Il est à noter que si $q \notin \operatorname{Im} f$, alors q est une valeur régulière de f. Les deux théorèmes suivants concernant les valeurs régulières des fonctions lisses sont primordiaux.

Théorème A.1.1. *Soient M^m et N^n deux variétés lisses, $f \in C^\infty(M,N)$ une fonction et $q \in N$ une valeur régulière. Alors l'ensemble $f^{-1}(q) \subset M$ est une sous-variété lisse plongée de codimension n.*

Théorème A.1.2 (Théorème de Sard)**.** *Soient M^m et N^n deux variétés lisses et $f \in C^\infty(M,N)$ une fonction. Alors l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N.*

Nous pouvons comprendre un point critique d'une fonction f comme un endroit où la fonction « dégénère ». Afin d'élucider l'importance de cette dégénérescence, il peut paraître opportun d'y dériver la fonction une fois de plus, ce qui nous conduit naturellement vers la notion de *hessienne*.

Définition A.1.2. *Soient M une variété lisse et $f \in C^\infty(M)$ une fonction. Pour $m \in \operatorname{Crit} f$, nous définissons la* ***hessienne de f en*** *m comme étant la forme bilinéaire* $(\operatorname{Hess} f)_m = (\nabla^2 f)_m : T_mM \times T_mM \to \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto Y(\tilde{X}f)$*, où $\tilde{X}$ est une extension lisse quelconque du vecteur X dans un voisinage de m.*

Cette définition de la hessienne est sensée. En effet, si $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 : U \to T_UM$ sont deux extensions lisses du vecteur $X \in T_mM$, alors il existe une fonction lisse $\phi : U \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{X}_2 = \phi\,\tilde{X}_1$. Notons que $\phi(m) = 1$ puisque les deux champs étendent le même vecteur et que $Xf = 0$ puisque m est un point critique de f. Ainsi, pour tout $Y \in T_mM$,

$$Y(\tilde{X}_2 f) = Y(\phi\,\tilde{X}_1 f) = (Y\phi)(Xf) + \phi(m)\,Y(\tilde{X}_1 f) = Y(\tilde{X}_1 f)\,.$$

Cet argument montre par ailleurs l'obstacle qu'il y a à définir la hessienne d'une fonction ailleurs qu'en ses points critiques de façon à la fois ponctuelle et invariante (c'est-à-dire indépendante des extensions des vecteurs X et Y), et ce sans spécifier de structure auxiliaire (telle une connexion). Mentionnons aussi que le crochet de champs vectoriels $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_m = X \circ \tilde{Y} - Y \circ \tilde{X}$ s'avérant être un opérateur différentiel d'ordre un, malgré ce qu'il y paraît à première vue, de sorte que $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_m f = 0$ pour $m \in \operatorname{Crit} f$, nous en déduisons que la hessienne $(\operatorname{Hess} f)_m$ est symétrique dans ses arguments.

Définition A.1.3. *Soient M une variété riemannienne lisse et $f \in C^\infty(M)$ une fonction. Cette fonction est dite* ***de Morse-Bott*** *si d'une part* $\operatorname{Crit} f$ *est une réunion de sous-variétés lisses plongées disjointes dites critiques et si, d'autre part, la hessienne est une forme bilinéaire non dégénérée sur le fibré normal de chacune des sous-variétés critiques. Dans ces circonstances, les sous-variétés critiques sont dites* ***non dégénérées****. Si* $\operatorname{Crit} f$ *ne consiste qu'en des points isolés, alors une fonction de Morse-Bott est tout simplement dite* ***de Morse****.*

Parmi les fonctions admettant des points critiques, les fonctions de Morse-Bott sont pour ainsi dire les moins « dégénérées » qui soient.

Théorème A.1.3. *Soit M une variété lisse. Non seulement existe-t-il une fonction de Morse $f \in C^\infty(M)$, mais l'ensemble des fonctions de Morse est dense dans $C^\infty(M)$ selon la topologie compact-ouvert.*

Pour nos besoins, nous ne démontrerons que l'existence, qui suit du lemme suivant en raison du théorème de plongement de Whitney.

Lemme A.1.1. *Soient V un espace vectoriel réel de dimension n et M^m une sous-variété lisse plongée. Alors presque toutes les formes linéaires $f \in V^*$ sont des fonctions de Morse lorsque restreintes à M.*

Démonstration. Choisissons une base de V et définissons un produit scalaire en la désignant orthonormée. Ainsi, $V \cong \mathbb{R}^n$ et chaque $f \in V^*$ s'identifie au produit scalaire avec un vecteur $\xi = \xi_f \in \mathbb{R}^n : f(x) = x \cdot \xi$. Ainsi, un point $x \in M$ est critique pour $f|_M$ si et seulement si T_xM est perpendiculaire à ξ. Considérons un paramétrage $\phi : (\mathbb{R}^m; 0) \to (M; x) \subset \mathbb{R}^n$ près d'un point critique x et désignons par $y^1, \ldots, y^m$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^m$. Pour ces coordonnées, la hessienne est tout simplement donnée par la matrice des derivées secondes. Ainsi, $x = \phi(0)$ est un point critique non dégénéré si et seulement si

(1) $\frac{\partial \phi}{\partial y^j}(0) \cdot \xi = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m$, et

(2) la matrice $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^k \partial y^j}(0) \cdot \xi$ est de rang maximal m, c'est-à-dire inversible.

Considérons le fibré normal de M dans $\mathbb{R}^n$: $N = \{(v, \zeta) : v \in M, \zeta \in T_vM^\perp\}$ ainsi que l'application $F : N \to \mathbb{R}^n : (v, \zeta) \mapsto \zeta$. Il s'agit assurément d'une fonction surjective. Remarquons qu'il est possible d'étendre ϕ afin d'obtenir un paramétrage local de N : si $n_1, \ldots, n_{n-m}$ dénotent des sections orthonormées de N engendrant chaque fibre au-dessus d'un ouvert $\phi(U)$ contenant x, alors

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to N : (y^1, \ldots, y^m, z^1, \ldots, z^{n-m}) \mapsto \left(\phi(y), \sum_{j=1}^{n-m} z^j (n_j \circ \phi)(y) \right).$$

Calculons « la » matrice jacobienne de F en usant des coordonnées suivantes : dans le domaine, nous prenons les coordonnées (y, z) ci-dessus, et dans le codomaine, nous prenons les coordonnées associées à la base « mobile » $(\frac{\partial \phi}{\partial y}, n)$, qui sont pour ainsi dire encore (y, z). La matrice jacobienne est alors

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n-m} z^k \frac{\partial n_k}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y^j} & \sum_{k=1}^{n-m} z^k \frac{\partial n_k}{\partial y^i} \cdot n_l \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang n si et seulement si la sous-matrice $\left(\sum_{k=1}^{n-m} z^k \frac{\partial n_k}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y^j}\right)$ est de rang m. Or, puisque les $\partial\phi/\partial y^j$ et les n_l sont orthogonaux,

$$0 = \frac{\partial}{\partial y^i}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y^j} \cdot n_l\right) = \frac{\partial n_l}{\partial y^i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y^j} + n_l \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^i \partial y^j}\,.$$

Il en résulte que la matrice jacobienne est de rang maximal si et seulement si la sous-matrice $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^i \partial y^j} \cdot \sum_{k=1}^{n-m} z^k\, n_k\right)$ est inversible.

En d'autres termes, les conditions (1) et (2) sur $f \in V^*$ sont équivalentes à la condition que 0 soit un point régulier à l'application $F \circ \tilde{\phi}$. En vertu du théorème de Sard, l'ensemble des valeurs régulières de $F \circ \tilde{\phi}$ est dense. Or, l'image de $F \circ \tilde{\phi}$ contient un ouvert de son codomaine. Il est ainsi possible, quitte à choisir un f' légèrement différent de f, d'obtenir un point critique non dégénéré x' de f' proche de x, l'ensemble de ces couples (f', x') étant un ouvert dense. Puisque les points critiques x de f sont dénombrables, le théorème de catégorie de Baire nous assure que les fonctions de Morse dans V^* sont denses près de toute fonction f, ce qui prouve le lemme.

$\square$

A.2. Les sous-variétés stables et instables associées à une fonction de Morse-Bott

Étant donné une variété riemannienne (M, g) et une fonction $f \in C^\infty(M)$, il est possible d'étudier le **flot gradient** de f, c'est-à-dire le flot ϕ_f^t du champ vectoriel $-\mathrm{grad}\, f$. Il est aisé de voir que la fonction f décroît le long de ce flot et que les points fixés par le flot gradient correspondent précisément aux points critiques de f.

Définition A.2.1. *Dans le contexte précédent, si a est une valeur critique de f et si C_k est une composante connexe de l'ensemble critique $f^{-1}(a)$, alors l'**ensemble instable** associé est $W^i(C_k) = \{m \in M : \lim_{t\to-\infty} \phi_f^t(m) \in C_k\}$ et l'**ensemble stable** associé est $W^s(C_k) = \{m \in M : \lim_{t\to+\infty} \phi_f^t(m) \in C_k\}$.*

Il s'avère très utile d'étudier le flot gradient dans le cas où f est une fonction de Morse-Bott.

Lemme A.2.1 (Lemme de Morse-Bott)**.** *Soient (M^m, g) une variété riemannienne, $f \in C^\infty(M)$ une fonction de Morse-Bott, C^c une sous-variété critique* *connexe de f et $m \in C$ un point critique. Alors il existe une carte (U, ϕ) centrée en m pour laquelle la fonction f s'exprime en coordonnées sous la forme*

$$(f \circ \phi^{-1})(x^1, \ldots, x^m) = f(m) - \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 + \sum_{j=n+1}^{m-c} (x^j)^2 \,.$$

Définition A.2.2. *Le nombre n apparaissant dans l'énoncé du lemme précédent est l'**indice de la variété critique** C et est noté* $\operatorname{ind} C$. *Le nombre $m - c - n$ est quant à lui le **coindice de la variété critique** C et est noté* $\operatorname{coind} C$. *Ainsi, l'égalité* $\dim M = \dim C + \operatorname{ind} C + \operatorname{coind} C$ *tient pour toute variété critique connexe d'une fonction de Morse-Bott.*

Le lemme A.2.1 implique que $\phi(W^s(C) \cap U) = \{x \,:\, x^j = 0,\ \forall\, 1 \leq j \leq n\}$ et que $\phi(W^i(C) \cap U) = \{x \,:\, x^j = 0,\ \forall\, n+1 \leq j \leq m-c\}$; la carte peut être prise telle que $\phi(C \cap U) = \{x \,:\, x^j = 0,\ \forall\, m-c+1 \leq j \leq m\}$. En d'autres termes, du moins dans un voisinage tubulaire de C, les variétés stable $W^s(C)$ et instable $W^i(C)$ sont des fibrés « cellulaires » sur C de rang respectif $\operatorname{coind} C$ et $\operatorname{ind} C$. En particulier, il en ressort que les ensembles instables et stables sont des sous-variétés de M ; cela tient évidemment près de la variété critique et il n'est pas difficile de se convaincre que le flot gradient ne change pas ce caractère.

Notons que $W^i(C) \cap W^s(C) = C$ et que les variétés stables ou instables de deux sous-variétés critiques distinctes ne s'intersectent pas. Il est cependant inévitable que certaines variétés stables et instables associées à différentes variétés critiques s'intersectent, considérant que tout point « provient » de quelque part et « se dirige » ailleurs.

Théorème A.2.1. *Soit f une fonction de Morse-Bott sur une variété riemannienne M. Alors nous avons les décompositions suivantes en fibrés cellulaires*

$$M = \bigsqcup_{k \in \pi_0(\operatorname{Crit} f)} W^i(C_k) = \bigsqcup_{k \in \pi_0(\operatorname{Crit} f)} W^s(C_k) \,.$$

Ce résultat n'est bien sûr qu'une généralisation du fait qu'une fonction de Morse détermine une structure de CW-complexe sur M .

Proposition A.2.1. *Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse-Bott sur une variété compacte M telle qu'aucune de ses variétés critiques n'ait un indice ou un coindice valant 1. Alors les ensembles de niveau $f^{-1}(c)$ pour $c \in f(M)$ sont tous connexes et* $\max f(M)$ *et* $\min f(M)$ *sont les seuls extrema locaux de f.*

Démonstration. Avant toute chose, remarquons que les hypothèses sur M et sur f obligent qu'il n'y ait qu'un nombre fini de variétés critiques. Montrons maintenant que f n'a qu'un seul minimum local (le cas du maximum se déduisant alors de ceci en considérant $-f$). Pour ce faire, notons que $c \in f(M)$ est un minimum local si et seulement si une des composantes connexes de $f^{-1}(c)$ est d'indice nul ; notons donc C_0 la réunion des variétés critiques connexes d'indice nul. Désignons par $W^s(C_0)$ la réunion de variétés stables de C_0. En vertu du théorème A.2.1, son complément est la réunion de toutes les variétés stables des variétés critiques d'indice deux ou plus. En d'autres termes, le complément de $W^s(C_0)$ est un ensemble qui est partout de codimension au moins deux et ayant un nombre fini de composantes connexes. Il en résulte que $W^s(C_0)$ est connexe, ce qui n'est possible que si C_0 l'est ; f a bien un seul minimum local. La connexité de tous les ensembles de niveau étant d'un intérêt limité pour ce mémoire, nous invitons le lecteur à consulter [**13**], lemme 5.51 pour une démonstration. □

Corollaire A.2.1. *Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction de Morse sur une variété compacte dont les indices de tous ses points critiques sont différents de un. Alors M est simplement connexe.*

Démonstration. La proposition précédente indique que f n'admet qu'un unique minimum local, réalisé disons au point $m \in M$. Considérons maintenant une courbe fermée γ passant par m. Étant donné que la réunion $W^s(\operatorname{Crit} f - \{m\})$ est partout de codimension au moins deux, il est possible de perturber γ par une homotopie de façon à ce qu'elle n'intersecte pas cette réunion. En suivant le flot gradient, la courbe est contractée sur le point m, ce qui conclut … ce mémoire !

□