

Université de Montréal

**Partitions spectrales optimales pour les problèmes
aux valeurs propres de Dirichlet et de Neumann**

par

Hélène Péloquin-Tessier

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques
orientation mathématiques fondamentales

31 octobre 2014

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Partitions spectrales optimales pour les problèmes
aux valeurs propres de Dirichlet et de Neumann**

présenté par

Hélène Péloquin-Tessier

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Yvan Saint-Aubin

(président-rapporteur)

Iosif Polterovich

(directeur de recherche)

Marlène Frigon

(membre du jury)

Mémoire accepté le

31 octobre 2014

SOMMAIRE

Les façons d'aborder l'étude du spectre du laplacien sont multiples. Ce mémoire se concentre sur les partitions spectrales optimales de domaines planaires. Plus précisément, lorsque nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet, nous cherchons à trouver la ou les partitions qui réalisent l'infimum (sur l'ensemble des partitions à un certain nombre de composantes) du maximum de la première valeur propre du laplacien sur tous ses sous-domaines. Dans les dernières années, cette question a été activement étudiée par B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini et leurs collaborateurs, qui ont obtenu plusieurs résultats analytiques et numériques importants.

Dans ce mémoire, nous proposons un problème analogue, mais pour des conditions aux limites de Neumann cette fois. Dans ce contexte, nous nous intéressons aux partitions spectrales maximales plutôt que minimales. Nous cherchons alors à vérifier le maximum sur toutes les k -partitions possibles du minimum de la première valeur propre non nulle de chacune des composantes. Cette question s'avère plus difficile que sa semblable dans la mesure où plusieurs propriétés des valeurs propres de Dirichlet, telles que la monotonie par rapport au domaine, ne tiennent plus. Néanmoins, quelques résultats sont obtenus pour des 2-partitions de domaines symétriques et des partitions spécifiques sont trouvées analytiquement pour des domaines rectangulaires. En outre, des propriétés générales des partitions spectrales optimales et des problèmes ouverts sont abordés.

Mots-clés : géométrie spectrale, spectre du laplacien, conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, partition spectrale optimale, multiplicité des valeurs propres.

SUMMARY

There exist many ways to study the spectrum of the Laplace operator. This master thesis focuses on optimal spectral partitions of planar domains. More specifically, when imposing Dirichlet boundary conditions, we try to find partitions that achieve the infimum (over all the partitions of a given number of components) of the maximum of the first eigenvalue of the Laplacian in all the subdomains. This question has been actively studied in recent years by B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini and their collaborators, who obtained a number of important analytic and numerical results.

In the present thesis we propose a similar problem, but for the Neumann boundary conditions. In this case, we are looking for spectral maximal, rather than minimal, partitions. More precisely, we attempt to find the maximum over all possible k -partitions of the minimum of the first non-zero Neumann eigenvalue of each component. This question appears to be more difficult than the one for the Dirichlet conditions, since many properties of Dirichlet eigenvalues, such as domain monotonicity, no longer hold in the Neumann case. Nevertheless, some results are obtained for 2-partitions of symmetric domains, and specific partitions are found analytically for rectangular domains. In addition, some general properties of optimal spectral partitions and open problems are also discussed.

Keywords : spectral geometry, Laplace spectrum, Dirichlet and Neumann boundary conditions, optimal spectral partition, eigenvalue multiplicity.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Remerciements	1
Introduction	3
Chapitre 1. Les problèmes aux valeurs propres	5
1.1. Quelques cas particuliers	6
1.1.1. Les domaines rectangulaires	6
1.1.2. Les domaines circulaires	8
1.2. La caractérisation variationnelle des valeurs propres	10
Chapitre 2. Les partitions spectrales minimales de Dirichlet	15
2.1. Les domaines nodaux et le théorème de Courant	15
2.2. Les propriétés des partitions spectrales minimales	17
2.3. Un algorithme itératif pour trouver les partitions minimales	21
2.4. Le problème inverse	24
Chapitre 3. Les partitions spectrales maximales de Neumann	27
3.1. Les 2-partitions maximales	27
3.1.1. Les domaines rectangulaires	28
3.1.2. Les domaines à deux axes de symétrie	29
3.1.3. Les domaines invariants par rapport à une rotation	34

3.2. Les partitions à plus de deux sous-domaines	38
3.3. Certaines propriétés conjecturées.....	42
Conclusion	45
Bibliographie	47

LISTE DES FIGURES

0.1	Partitions possiblement minimales (source : [8])	4
2.1	Algorithme itératif appliqué sur le carré (source : [1])	24
3.1	Exemple de ligne nodale reliant deux points d'un même secteur	31
3.2	Exemples de ligne nodale reliant deux points de secteurs différents	32
3.3	Exemples de lignes nodales de φ_2^N	33
3.4	Exemples de prolongements pour $\varphi_1^N(D_1)$ sur Ω	33

LISTE DES TABLEAUX

3.1	Premières valeurs propres non nulles de Neumann pour un domaine rectangulaire	39
-----	---	----

REMERCIEMENTS

D'emblée, je voudrais offrir toute ma reconnaissance à mon directeur de recherche, Iosif Polterovich, qui a contribué en grande partie à l'aboutissement de ce projet. Sans ses belles idées, ses précieux conseils et son incroyable disponibilité, ce mémoire n'aurait pu voir le jour. En outre, sa patience et sa compréhension dans les moments plus difficiles ont été d'un grand réconfort et m'ont aidée à relever les défis rencontrés. Peu d'étudiants ont la chance de trouver un superviseur aussi bienveillant.

Je voudrais ensuite remercier Gerasim Kokarev et Guillaume Roy-Fortin pour leur aide sur certaines preuves, ainsi que Nicolas Bouchard pour ses nombreux coups de main en programmation. J'ai également un merci bien spécial à offrir à Guillaume Poliquin qui est le premier, par son enthousiasme, à m'avoir intéressée à la géométrie spectrale. Au fil des ans, ses nombreux encouragements et sa foi indéfectible en mes capacités m'ont poussée à me surpasser. Pour son aide avec les preuves, ses judicieux conseils et la lecture attentive qu'il a faite de ce mémoire, il mérite certainement toute ma reconnaissance. Ce sera un honneur de travailler avec lui dans les années à venir.

Enfin, l'accomplissement d'un tel travail de recherche ne peut se faire sans l'aide de ses proches. Ainsi, j'ai une reconnaissance infinie envers mes parents et ma soeur pour leur support inconditionnel. Il a assurément fait une différence à chaque étape du processus et il continue de faire de moi, chaque jour, une mathématicienne plus acharnée à s'améliorer.

INTRODUCTION

Depuis la découverte des motifs sonores de Chladni avec du sable saupoudré sur une plaque vibrante [28], la géométrie spectrale a bien évolué. Les lignes de sable sont devenues des lignes nodales et nous avons compris qu'elles représentaient les endroits où l'amplitude des vibrations était nulle. Devenus essentiels, ces ensembles nodaux, ou ensembles de zéros, délimitent maintenant des composantes connexes appelées domaines nodaux. Ces dernières permettent d'ailleurs de partitionner un domaine, c'est-à-dire de le diviser en sections, de la manière la plus intuitive possible. Cependant, des méthodes alternatives de partitionnement constituent également des axes de recherche pertinents. L'une d'entre elles, les partitions spectrales minimales, forme la base de la recherche qui sera exposée dans ce mémoire.

Pour le problème de Dirichlet, les partitions spectrales minimales permettent de minimiser, pour un domaine donné, le maximum de la plus petite valeur propre du laplacien de Dirichlet sur les ouverts disjoints qui les constituent. La figure 0.1 présente quelques partitions candidates à être minimales obtenues par les physiciens polonais V. Babin, O. Cybulski et R. Holyst. Tous les articles traitant du sujet n'abordant d'ailleurs que le cas du problème de Dirichlet, le projet consistera à explorer ce problème, mais également son homologue, le problème de Neumann. Pour ce dernier, nous chercherons plutôt à trouver des partitions qui permettent d'atteindre le maximum sur toutes les partitions possibles du minimum de la première valeur propre non nulle sur chacun des sous-domaines. En commençant par déterminer certaines partitions optimales pour Neumann sur des domaines de géométrie simple et en s'inspirant des résultats déjà établis pour Dirichlet, nous déterminerons quelques propriétés générales liées notamment aux symétries du domaine.

Pour les lecteurs peut-être un peu moins familiers avec la théorie spectrale et les problèmes aux valeurs propres, il peut être avisé de porter d'abord attention aux exemples détaillés et aux multiples expressions de la caractérisation variationnelle des valeurs propres explicités au chapitre 1. Cela servira de référence tout au long

de la réflexion qui suivra. Les cas des domaines rectangulaires et circulaires seront effectivement d'une grande importance dans le développement de nos résultats sur les partitions spectrales. Le chapitre 2 donnera un aperçu de ce qui a déjà été établi sur les partitions spectrales minimales de Dirichlet. Nous nous attarderons surtout aux liens entre ces partitions et les domaines nodaux ainsi qu'à la façon de les obtenir. Enfin, le chapitre 3 portera sur la recherche réalisée sur les partitions pour le problème de Neumann et contiendra essentiellement les nouveaux résultats obtenus au cours de la maîtrise, ainsi que certains problèmes toujours ouverts.

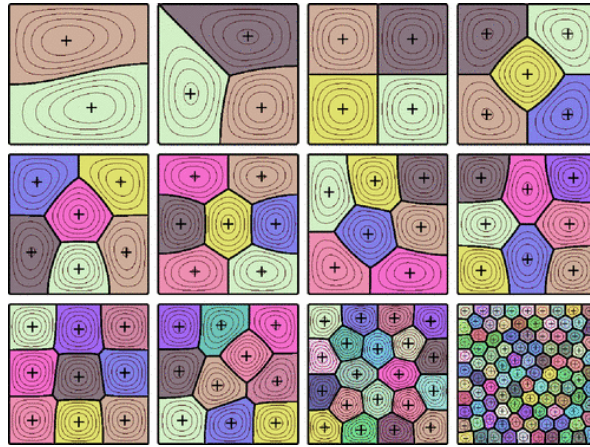


FIGURE 0.1. Partitions possiblement minimales (source : [8])

Chapitre 1

LES PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

Tout au long de ce mémoire, c'est l'opérateur laplacien, nommé ainsi en l'honneur du mathématicien et physicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), qui sera au coeur de notre étude. Puisqu'à moins d'indication contraire nous considérerons des domaines planaires $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à bord régulier, nous utiliserons le **laplacien** à deux dimensions. En coordonnées cartésiennes, celui-ci est défini par

$$\Delta = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Advenant le cas où le domaine qui nous intéresse est circulaire, il sera parfois plus pratique d'utiliser sa forme polaire

$$\Delta = - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

En théorie spectrale, deux catégories de problèmes liés au laplacien, appelés **problèmes aux valeurs propres**, retiennent généralement l'attention :

(1) le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta u = \lambda u \\ u|_{\partial\Omega} = 0; \end{cases}$$

(2) le problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta u = \mu u \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dans ce qui précède, $\frac{\partial}{\partial n} = \nabla \cdot \mathbf{n}$ réfère à la dérivée directionnelle le long de la normale à la frontière $\partial\Omega$ pointant vers l'extérieur. Les λ et μ , quant à elles, sont les

valeurs propres qui nous intéressent. Leur ensemble constitue ce que nous appelons le **spectre** de Dirichlet ou de Neumann selon le cas. De multiplicité finie, ces valeurs propres forment généralement un ensemble discret infini. Cependant, des situations particulières peuvent mener à un spectre de Neumann continu comme nous pouvons le voir dans [15]. Ces cas demeurent pour le moins extrêmes et seront par conséquent exclus de notre étude. En supposant que les valeurs propres soient notées en ordre croissant, nous représenterons par λ_k la k -ième valeur propre de Dirichlet et par μ_k l'équivalent pour Neumann. Notons toutefois qu'étant donné que la première valeur propre de Neumann s'avère toujours 0, nous désignerons par μ_0 cette première valeur propre nulle et par μ_1 la première valeur propre non nulle de Neumann. Relevons en outre que, dans la situation où un domaine est formé de plusieurs composantes non connexes entre elles, le spectre consistera simplement en l'union ordonnée des spectres de chacune des composantes connexes.

Les fonctions u associées aux valeurs propres dans les problèmes de Dirichlet et de Neumann s'appellent des **fonctions propres**. Ces dernières ont la particularité de pouvoir être choisies de manière à former une base orthogonale (ou orthonormée) de l'espace de fonctions considéré. Nous les représenterons par φ_k^D et φ_k^N en omettant le D et le N quand cela ne porte pas à confusion.

1.1. QUELQUES CAS PARTICULIERS

Les problèmes aux valeurs propres qui peuvent être résolus explicitement, c'est-à-dire pour lesquels il est possible de trouver les valeurs propres et les fonctions propres associées, s'avèrent malheureusement l'exception plutôt que la règle. Néanmoins, des domaines de géométrie simple tels que le rectangle ou le disque permettent une résolution complète. Puisque ces exemples seront utiles afin de développer l'intuition, il convient d'en donner dès maintenant la solution.

1.1.1. Les domaines rectangulaires

D'abord, pour un domaine rectangulaire $[0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$, avec a et b positifs, nous souhaitons résoudre l'équation aux dérivées partielles $\Delta u = \lambda u$ ou encore $\Delta u = \mu u$ assujettie à une condition aux limites. Les calculs menant à la résolution des problèmes aux valeurs propres de Dirichlet et de Neumann s'avérant assez similaires, faisons-les pour Dirichlet. L'astuce est d'utiliser la technique de séparation de variables présentée par exemple dans [29] et de supposer que la fonction $u(x, y)$

vérifiant $\Delta u = \lambda u$ peut être écrite comme le produit d'une fonction dépendant seulement de la variable x et d'une autre dépendant seulement de la variable y :

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

En insérant cela dans l'équation aux dérivées partielles, en divisant par XY , puis en séparant les parties en X de celles en Y de part et d'autre de l'égalité, nous obtenons

$$-\frac{X''}{X} = \frac{\lambda Y + Y''}{Y} = \omega^2 > 0.$$

La constante ω obtenue résulte du fait que la seule façon d'avoir une fonction dépendant de x seulement égale à une autre fonction dépendant de y seulement est que ces deux fonctions soient égales à la même constante. Un argument simple nous permet de conclure que cette constante est strictement positive sans quoi nous aurions une fonction u identiquement nulle. Nous obtenons ainsi une équation différentielle ordinaire pour X ,

$$X'' + \omega^2 X = 0,$$

ayant pour solution, avec α_1 et α_2 des constantes à fixer,

$$X(x) = \alpha_1 \cos(\omega x) + \alpha_2 \sin(\omega x).$$

De même, pour Y , nous avons

$$Y'' + (\lambda - \omega^2)Y = 0$$

qui nous permet d'obtenir, pour β_1 et β_2 d'autres constantes,

$$Y(y) = \beta_1 \cos(\sqrt{\lambda - \omega^2}y) + \beta_2 \sin(\sqrt{\lambda - \omega^2}y).$$

Ce sont les conditions aux limites (Dirichlet ou Neumann) qui nous permettent de fixer les constantes et d'ainsi obtenir le spectre et les fonctions propres. Pour Dirichlet, les conditions aux limites se traduisent par $X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0$. Le spectre du laplacien est donc

$$\left\{ \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

et les fonctions propres associées peuvent être exprimées par

$$\varphi_{m,n}^D(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Quant au problème de Neumann, les conditions $X'(0) = X'(a) = Y'(0) = Y'(b) = 0$ nous permettent d'obtenir le spectre

$$\left\{ \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

jumelé aux fonctions propres

$$\varphi_{m,n}^N(x, y) = \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

Fait intéressant, toutes les valeurs propres $\lambda_{m,n}$ et $\mu_{m,n}$ trouvées ci-haut sont simples si $\frac{a^2}{b^2}$ est irrationnel. Cela se démontre en utilisant la contraposée qui statue que si une valeur propre $\lambda_{m,n}$ ou $\mu_{m,n}$ est multiple, alors $\frac{a^2}{b^2} \in \mathbb{Q}$. Pour le montrer, prenons $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tels que $m_1 \neq m_2$ ou $n_1 \neq n_2$ et tels que

$$\pi^2 \left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} \right) = \pi^2 \left(\frac{m_2^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right).$$

Supposons, sans perte de généralité, que $n_1 \neq n_2$. Alors, l'équation précédente est équivalente à

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{m_2^2 - m_1^2}{n_2^2 - n_1^2} \in \mathbb{Q},$$

ce qui montre le résultat.

Cet exemple du domaine rectangulaire demeure de loin l'exemple avec lequel il est le plus aisé de travailler. Nous nous en servons donc à quelques reprises pour vérifier un résultat avant de le démontrer en toute généralité. En outre, nous nous intéresserons aux domaines extrémaux afin de voir comment ils affectent les valeurs propres. Le cas d'un rectangle infiniment mince sera alors pertinent à notre réflexion.

1.1.2. Les domaines circulaires

Bien que le cas du rectangle soit très naturel lorsque nous commençons à nous intéresser au calcul des valeurs propres du laplacien, il peut également être intéressant d'utiliser le laplacien sous sa forme polaire afin de déterminer son spectre sur un disque. Résolvons cette fois l'équation $\Delta u = \lambda u$ pour le disque $(r, \theta) \in [0, \mathcal{R}] \times [0, 2\pi]$, où $\mathcal{R} > 0$, sous contrainte de périodicité $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$. Tout comme pour les domaines rectangles, un calcul similaire s'avère nécessaire pour résoudre le problème aux valeurs propres de Dirichlet et de Neumann. Celui-ci fait d'ailleurs intervenir les fonctions de Bessel de première espèce J_n que nous pouvons apprendre à connaître plus amplement en se référant à [30].

En vertu de la technique de séparation de variables, nous avons, pour $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$,

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) R\Theta = \lambda R\Theta.$$

Un remaniement de l'équation nous permet de déduire que, pour ω une constante non nulle,

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} + \lambda r^2 = \frac{-\Theta''}{\Theta} = \omega^2 > 0.$$

Une première équation différentielle ordinaire pour Θ ,

$$\Theta'' + \omega^2 \Theta = 0,$$

indique que le facteur Θ sera de la forme

$$\Theta(\theta) = A \cos(\omega\theta) + B \sin(\omega\theta),$$

où $\omega = n \in \mathbb{N}$, car nous devons avoir $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. Quant à ce que nous obtenons pour R , il s'agit de l'équation de Bessel

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda r^2 - n^2) R = 0$$

ayant pour solution la fonction de Bessel de première espèce $R(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$. En effet, la fonction de Bessel de deuxième espèce, ou fonction de Neumann, n'apparaît pas puisque cette dernière n'est pas bornée à l'origine. Elle ne convient donc pas au type de fonction propre réelle que nous recherchons.

En conclusion, les spectres du laplacien sur le disque de rayon \mathcal{R} s'écrivent

$$\left\{ \lambda_{m,n} \mid J_n(\sqrt{\lambda_{m,n}} \mathcal{R}) = 0 \text{ et } n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

pour Dirichlet et

$$\left\{ \mu_{m,n} \mid J'_n(\sqrt{\mu_{m,n}} \mathcal{R}) = 0 \text{ et } n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

pour Neumann. Par suite, chacun a comme fonctions propres

$$\varphi_{m,n}(r, \theta) = J_n(\sqrt{\lambda_{m,n}} r) (\cos(n\theta) + \sin(n\theta))$$

en y insérant les valeurs propres $\lambda_{m,n}$ ou $\mu_{m,n}$ appropriées.

Puisqu'il n'est pas si facile de travailler avec les zéros des fonctions de Bessel, nous emploierons plutôt des approximations numériques obtenues par ordinateur pour étudier de tels exemples. Ainsi, l'outil d'équations aux dérivées partielles de MATLAB, le *pdetool*, assez simple d'utilisation, nous sera d'un grand secours.

1.2. LA CARACTÉRISATION VARIATIONNELLE DES VALEURS PROPRES

Comme nous l'avons mentionné plus tôt, pour des domaines quelconques, il est très fréquent de ne pas pouvoir déterminer explicitement le spectre associé aux problèmes aux valeurs propres de Dirichlet et de Neumann. Il est cependant possible d'en déduire certaines propriétés en exprimant les valeurs propres sous une forme particulière appelée **caractérisation variationnelle**. Pour ce faire, nous devons d'abord définir le **quotient de Rayleigh** pour le laplacien. Que ce soit pour Dirichlet ou pour Neumann, celui-ci peut être exprimé comme

$$R[u] = \frac{(\Delta u, u)}{(u, u)} = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx},$$

où (\cdot, \cdot) représente le produit scalaire de l'espace hilbertien $L^2(\Omega)$ des fonctions à carré intégrable au sens de Lebesgue. Pour avoir plus de détails, il est possible de se référer à [2].

Donnons donc quelques représentations explicites des valeurs propres. Nous allons démontrer les résultats pour Dirichlet, mais admettre ceux pour Neumann sans preuve. Notons que, dans ce qui suit, l'espace $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles que leur première dérivée est aussi dans $L^2(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$, quant à lui, désigne la fermeture de l'espace des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, où l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ réfère à l'ensemble des fonctions de $\bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} qui s'annulent sur la frontière de Ω . Nous avons donc que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Montrons d'abord une expression pour la première valeur propre de Dirichlet.

Théorème 1.2.1.

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u]$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ non nulle. On peut exprimer u comme une combinaison linéaire de fonctions propres φ_j de norme unitaire qui forment, rappelons-le, une base orthonormée. Autrement dit, pour certains coefficients $c_j \in \mathbb{R}$,

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j.$$

Ainsi, par linéarité du laplacien et orthogonalité des valeurs propres et en utilisant le développement précédent, nous avons

$$(\Delta u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |c_j|^2 \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2 = \lambda_1 (u, u),$$

où la première somme converge par définition du domaine du laplacien ($u \in H_0^1$ tel que $\Delta u \in L_2$). Remarquons que, si $u = c\varphi_1$ pour $c \in \mathbb{R}$, nous avons l'égalité. D'où le résultat. \square

Le résultat correspondant pour une valeur propre de Dirichlet λ_k quelconque s'énonce comme suit.

Théorème 1.2.2.

$$\lambda_k(\Omega) = \max_{\substack{L \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k-1}} \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u]$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat se démontre en deux temps. D'abord, considérons le sous-espace engendré par les $k-1$ premières valeurs propres $\Phi_{k-1} = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1} \rangle$. Fixons $L = \Phi_{k-1} \subset H_0^1(\Omega)$ et tel que $\dim L = k-1$. Alors, λ_k devient la première valeur propre du laplacien dans l'espace $L^\perp \cap H_0^1(\Omega)$. En vertu du théorème précédent, nous avons donc

$$\lambda_k = \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u].$$

Ainsi,

$$\lambda_k \leq \max_{\substack{L \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k-1}} \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{(\Delta u, u)}{(u, u)}$$

Afin de démontrer l'inégalité inverse, soit $L \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $\dim L = k-1$. Montrons qu'il existe $u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, tel que $(\Delta u, u) \leq \lambda_k(u, u)$. Pour ce faire, observons que $\Phi_k \cap L^\perp \neq \emptyset$. C'est le cas étant donné que $\dim \Phi_k = k > k-1 = \dim L$. Prenons donc ce $u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega)$. Alors, pour certains coefficients c_j , u peut être écrit comme

$$u = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j.$$

Ainsi, puisque λ_k constitue la plus élevée des k premières valeurs propres, nous avons

$$(\Delta u, u) = \sum_{j=1}^k \lambda_j |c_j|^2 \leq \lambda_k(u, u),$$

ce qui implique que, pour tout $L \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $\dim L = k-1$,

$$\lambda_k \geq \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u].$$

Puisque L avait été choisi de façon arbitraire, nous pouvons prendre le maximum de chaque côté de cette dernière inégalité

$$\lambda_k(\Omega) \geq \max_{\substack{L \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k-1}} \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u]$$

et, par suite, déduire l'énoncé du théorème. □

Les deux prochains théorèmes fournissent des expressions alternatives pour les valeurs propres de Dirichlet. Les techniques de preuve demeurent d'ailleurs identiques à celle que nous venons d'utiliser.

Théorème 1.2.3.

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}}} R[u]$$

DÉMONSTRATION. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$. Alors, pour certains coefficients c_j , nous pouvons écrire

$$u = \sum_{j=k}^{\infty} c_j \varphi_j.$$

Il est alors possible de faire le raisonnement suivant :

$$(\Delta u, u) = \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j |c_j|^2 \geq \lambda_k \sum_{j=k}^{\infty} |c_j|^2 = \lambda_k(u, u)$$

avec une égalité si $u = c \varphi_k$ pour $c \in \mathbb{R}$. D'où le résultat. □

Théorème 1.2.4.

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{\substack{L \subset H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} R[u]$$

DÉMONSTRATION. L'approche utilisée pour cette preuve consiste encore une fois à montrer les deux inégalités. Ainsi, soit un sous-espace engendré par les k premières fonctions propres $\Phi_k = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k \rangle$. Prenons $L = \Phi_k$ et soit $u \in L$. Alors, u peut être écrite comme la combinaison linéaire

$$u = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_j.$$

Donc,

$$(\Delta u, u) = \sum_{j=1}^k \lambda_j |c_j|^2 \leq \lambda_k \sum_{j=1}^k |c_j|^2 = \lambda_k(u, u)$$

avec une égalité si $u = c\varphi_k$. D'où

$$\lambda_k = \max_{\substack{u \in L = \Phi_k \\ u \neq 0}} R[u],$$

ce qui implique que

$$\lambda_k \geq \min_{\substack{L \in H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} R[u].$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit maintenant $L \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $\dim L = k$. Nous souhaitons montrer qu'il existe $u \in L$ non nul tel que $\lambda_k(u, u) \leq (\Delta u, u)$. En fait, puisque u est un élément d'un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ de dimension k , il peut être exprimé comme une combinaison linéaire de k fonctions propres φ_{k_j} :

$$u = \sum_{j=1}^k c_j \varphi_{k_j}.$$

Ainsi, en exprimant λ_k , la k -ième valeur propre associée à ce sous-espace, c'est-à-dire λ_{k_k} , nous avons

$$(\Delta u, u) = \sum_{j=1}^k |c_j|^2 \lambda_{k_j} \leq \lambda_k(u, u)$$

avec égalité si $u = c\varphi_{k_k}$. D'où, pour L arbitraire,

$$\lambda_k = \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} R[u].$$

De plus, il est facile de se convaincre que, si $L = \Phi_k$, alors $\lambda_k = \lambda_k^{\Phi_k} \leq \lambda_k^L$. D'où l'inégalité

$$\lambda_k \leq \min_{\substack{L \in H_0^1(\Omega) \\ \dim L = k}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} R[u]$$

qui mène à l'énoncé que nous voulions démontrer. □

Dans le cas de Neumann, nous obtenons les résultats correspondants suivants que nous admettrons sans démonstration.

Théorème 1.2.5 (Principe variationnel pour le problème de Neumann).

$$\mu_1(\Omega) = \min_{u \in H^1(\Omega)} R[u]$$

$$\begin{aligned}
\mu_k(\Omega) &= \max_{\substack{L \subset H^1(\Omega) \\ \dim L = k-1}} \min_{\substack{u \in L^\perp \cap H^1(\Omega) \\ u \neq 0}} R[u] \\
&= \min_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}}} R[u] \\
&= \min_{\substack{L \in H^1(\Omega) \\ \dim L = k}} \max_{\substack{u \in L \\ u \neq 0}} R[u]
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque nous ferons référence à la caractérisation variationnelle par la suite, ce sera à ces différentes représentations des valeurs propres que nous ferons allusion. D'ailleurs, avec ces outils sur les problèmes aux valeurs propres en poche, nous sommes maintenant prêts à entrer dans le vif du sujet de ce mémoire : les partitions spectrales minimales. Les lecteurs avides d'en apprendre davantage sur les problèmes aux valeurs propres pourront consulter l'ouvrage classique de R. Courant et D. Hilbert [6] avant de s'y intéresser.

Chapitre 2

LES PARTITIONS SPECTRALES MINIMALES DE DIRICHLET

Au cours des dernières années, une littérature s'est développée sur les partitions spectrales minimales. Ces dernières trouvent notamment leurs applications en physique et en dynamique des populations comme le montrent les articles [5] et [8]. Ce chapitre se veut un survol des définitions, théorèmes et autres résultats qui constituent la base de tout ce qui touche les partitions spectrales minimales pour le problème de Dirichlet. Quelques preuves, pour la plupart omises dans les articles à cause de leur simplicité, seront explicitées afin de forger plus clairement notre compréhension du sujet. Cela nous permettra de revoir certains résultats de la théorie spectrale qui ressortiront naturellement. Pour obtenir plus de détails, il est possible de consulter les notes de cours en français de B. Helffer [11] ou encore les articles [12] et [14]. Un bel article de vulgarisation sur le sujet de V. Bonnaillie-Noël et B. Helffer [1] vaut aussi le coup d'oeil.

2.1. LES DOMAINES NODAUX ET LE THÉORÈME DE COURANT

Comme c'est le cas depuis le début de ce mémoire, nous nous intéressons à l'opérateur laplacien dans \mathbb{R}^2 . Puisque les résultats relatifs aux conditions de Dirichlet s'avèrent souvent plus faciles à obtenir, ce sera sur elles que nous nous concentrerons pour l'instant. D'ailleurs, l'essentiel de la recherche sur le sujet porte sur ce type de problème. En ce qui concerne les domaines avec lesquels nous travaillerons, nous nous restreindrons à des domaines Ω bornés de \mathbb{R}^2 à bord régulier.

Une façon assez naturelle de partitionner un domaine en théorie spectrale consiste à déterminer les domaines nodaux associés à une fonction propre. Afin de délimiter ces domaines, pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, nous définissons son **ensemble nodal**,

ou ensemble de zéros, par

$$N(u) = \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) = 0\}}.$$

Chacune des composantes connexes de $\Omega \setminus N(u)$ forme alors un **domaine nodal**. Nous désignons par $\mu(u)$ le nombre de ces composantes. Le résultat fondamental suivant établit une relation entre ce nombre et le rang des valeurs propres [25].

Théorème 2.1.1 (Courant). *Soit $k \in \mathbb{N}$ et λ_k, μ_k les k -ièmes valeurs propres pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann. Alors, pour toute fonction u de l'espace propre associé à λ_k ou μ_k , nous avons*

$$\mu(u) \leq k \text{ pour Dirichlet} \quad \text{et} \quad \mu(u) \leq k + 1 \text{ pour Neumann.}$$

Nous disons d'ailleurs qu'une fonction u est **strictement Courant** si elle appartient à l'espace propre associé à λ_k ou μ_k tout en respectant l'égalité $\mu(u) = k$ ou $\mu(u) = k + 1$ selon le cas. En ce qui concerne la première fonction propre du problème de Dirichlet, il est évident par ce résultat que celle-ci ne possède qu'un seul domaine nodal : Ω . Nous la choisirons donc de sorte qu'elle soit strictement positive sur ce domaine. Il s'agit d'une convention classique. Du reste, l'orthogonalité des fonctions propres nous indique qu'il s'agit de la seule et unique fonction propre avec cette propriété. Autrement, il serait impossible de vérifier l'égalité

$$\int_{\Omega} \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0, \quad \text{où } \varphi_1(x) > 0 \forall x \in \Omega.$$

Puisque φ_2 change donc de signe sur Ω , le théorème de Courant 2.1.1 implique qu'elle possède exactement deux domaines nodaux. C'est donc à partir de la troisième fonction propre que nous pouvons obtenir des fonctions qui ne sont pas strictement Courant.

Globalement, l'objectif ici est d'analyser les relations entre les domaines nodaux des fonctions propres du laplacien que nous venons de définir et les partitions du domaine Ω qui sont minimales en un certain sens. Plus précisément, pour $k \in \mathbb{N}$, nous entendons par **partition**, ou **k-partition** si nous voulons préciser son nombre de composantes, toute famille d'ensembles deux à deux disjoints $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k$ de Ω telle que $\cup_{i=1}^k D_i \subset \Omega$. Intuitivement, nous qualifions les partitions en fonction de leurs caractéristiques. Ainsi, une **partition ouverte** est constituée exclusivement de composantes D_i ouvertes, une **partition connexe** possède des sous-ensembles D_i tous connexes et une **partition nodale** s'avère formée de domaines nodaux d'une fonction propre. Puisque le plus souvent ce sont les k -partitions ouvertes qui nous préoccupent, nous désignons leur ensemble par \mathfrak{D}_k pour plus de facilité.

2.2. LES PROPRIÉTÉS DES PARTITIONS SPECTRALES MINIMALES

Nous avons maintenant introduit une notion plus rigoureuse de partition, mais en quel sens demandons-nous qu'elle soit minimale ? Pour bien le comprendre, contextualisons notre problème en nous inspirant de [1]. Supposons que k populations, où $k \in \mathbb{N}$, cherchent à se partager un territoire Ω de façon optimale tout en respectant un certain nombre de conditions. D'une part, ces populations refusent de se mélanger, c'est-à-dire de se partager une même portion de territoire. D'autre part, elles admettent l'idée d'un désagrément minimal pour chacune d'entre elles ne dépendant pas de la population en question, mais bien uniquement de la zone qu'elle occupe. Pour trouver le partage optimal du territoire Ω , nous cherchons à minimiser le désagrément global des populations. Ce dernier consiste en le maximum du désagrément de chaque population. C'est exactement ce genre de problème que nous devons résoudre pour trouver une partition spectrale minimale.

En physique, plus précisément en thermodynamique non-extensive [8], les k populations s'avèrent en fait un système de k types différents de particules browniennes confinées dans une boîte. Des processus d'annihilations et de nucléations spontanées font en sorte que le nombre de particules de chaque type demeure constant dans la boîte. Ainsi, ces particules peuvent atteindre un état stationnaire tel que l'espace disponible est divisé en k sous-régions distinctes, chacune occupée par un seul type de particules. C'est la division de Ω obtenue dans cet état stationnaire qui nous préoccupe.

Mathématiquement, la quantité qui nous intéresse correspond donc au minimum d'un maximum. Définissons l'**état fondamental d'énergie** du laplacien de Dirichlet par $\lambda_1(D_i)$, la plus petite valeur propre de Dirichlet sur le sous-domaine D_i , que nous noterons parfois simplement $\lambda(D_i)$ lorsque le contexte ne porte pas à confusion. Cet état fondamental d'énergie correspond au désagrément minimal d'une population dans notre mise en situation. Cette quantité nous permet d'établir, pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k$, l'**énergie de la partition** :

$$\Lambda(\mathcal{D}) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda(D_i).$$

On détermine qu'une k -partition $\mathcal{D}_0 \in \mathfrak{D}_k$ est **minimale** si

$$\mathfrak{L}_k \stackrel{\text{déf.}}{=} \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}) = \Lambda(\mathcal{D}_0).$$

Intuitivement, les partitions spectrales minimales respectent deux conditions importantes. D'abord, elles couvrent forcément tout le domaine Ω . Mathématiquement,

cela signifie que

$$\text{int} \left(\overline{\bigcup_{i=1}^k D_i} \right) \setminus \partial\Omega = \Omega.$$

En effet, supposons que ce n'est pas le cas et qu'une région \mathcal{R} de Ω n'est pas couverte par les D_i . Alors, un des D_i est connexe à cette région. Nous posons D_i^* le sous-domaine $D_i \cup \mathcal{R}$. Par monotonie, puisque $D_i \subset D_i^*$, nous avons $\lambda_1(D_i^*) < \lambda_1(D_i)$. Nous supposons ici sans perte de généralité que \mathcal{R} est connexe. Autrement, nous répétons l'argument avec chacune de ses composantes connexes jusqu'à l'obtention d'une partition \mathcal{D}^* couvrant tout Ω . En modifiant les frontières des D_i^* obtenus si nécessaire, il est possible d'agrandir le sous-domaine D_i qui possédait la plus grande valeur propre de façon à diminuer $\Lambda(\mathcal{D})$. Cela montre que la partition \mathcal{D} initiale ne pouvait être optimale. Une telle partition qui couvre tout le domaine est appelée une **partition forte**.

Discutons maintenant de l'autre particularité des partitions spectrales minimales : le fait qu'elles soient telles que $\lambda(D_i) = \lambda(D_j)$ pour tout D_i, D_j de la partition. Cela s'explique par λ qui varie continûment avec le domaine. Supposons que D_i et D_j soient connexes, mais ne possèdent pas la même première valeur propre ($\lambda(D_i) < \lambda(D_j)$ par exemple). Alors, nous pouvons modifier leur frontière commune en agrandissant D_j au détriment de D_i . Ainsi, nous faisons diminuer $\lambda(D_j)$ tout en augmentant $\lambda(D_i)$. À cause de la continuité, à un certain point, nous aurons l'égalité entre les deux valeurs propres. En utilisant ce raisonnement avec chacune des paires de D_i et D_j jusqu'à ce que toutes les premières valeurs propres soient identiques, nous obtenons un $\Lambda(\mathcal{D})$ inférieur. Énoncée plus rigoureusement, cette propriété mène à la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Soit $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i=1}^k \in \mathfrak{D}_k$ une k -partition spectrale minimale. Alors, elle vérifie*

$$\mathfrak{L}_k(\Omega) = \lambda_1(D_i) \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

*On dira alors qu'elle forme une **équipartition spectrale**.*

Les deux propositions suivantes établissent deux propriétés supplémentaires de \mathfrak{L}_k . Nous pouvons les retrouver dans [14] notamment.

Proposition 2.2.2. *La suite $\{\mathfrak{L}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.*

DÉMONSTRATION. Soit une $(k+1)$ -partition minimale de Ω . Alors, si nous considérons n'importe quelle sous-partition à k éléments de cette $(k+1)$ -partition, il est impossible d'obtenir une k -partition minimale. Cela s'explique par le fait que la k -partition obtenue ne pourra être forte, car elle ne couvrira pas tout Ω . Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{L}_k(\Omega) < \mathfrak{L}_{k+1}(\Omega)$. \square

Proposition 2.2.3. *Soit Ω et Ω^* deux domaines tels que $\Omega \subset \Omega^*$. Alors $\mathfrak{L}_k(\Omega^*) \leq \mathfrak{L}_k(\Omega)$ et ce, $\forall k \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit d'observer que toute partition de Ω est aussi une partition de Ω^* . Ainsi, plus de partitions sont admissibles pour Ω^* que pour Ω . Puisque \mathfrak{L}_k représente en fait un infimum sur toutes les partitions possibles, il sera possiblement plus petit si nous l'évaluons sur un plus grand nombre d'éléments. \square

Voyons maintenant en quoi les partitions spectrales minimales peuvent être liées aux partitions nodales. Posons L_k la plus petite valeur propre dont la fonction propre associée admet exactement k domaines nodaux. Si une telle fonction n'existe pas, nous posons alors $L_k = \infty$. Ainsi, si $\lambda_k = L_k$, la fonction propre associée est strictement Courant. Le théorème suivant met ces valeurs en relation.

Théorème 2.2.4. *Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors,*

$$\lambda_k \leq \mathfrak{L}_k \leq L_k. \quad (2.2.1)$$

DÉMONSTRATION. La preuve est inspirée de [14]. Dans un premier temps, montrons que $\mathfrak{L}_k \leq L_k$. Soit u la fonction propre associée à L_k et \mathcal{D}_0 la collection de ses k domaines nodaux D_1, \dots, D_k (qui forment alors une partition forte). Nous avons

$$\mathfrak{L}_k = \inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}) \leq \Lambda(\mathcal{D}_0) = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda(D_i) = L_k.$$

La dernière égalité découle du fait que, pour tout $1 \leq i \leq k$, $u|_{D_i}(\Omega) = \varphi_1(D_i)$ étant donné l'absence de changement de signe de u sur les domaines nodaux D_i et l'unicité de la fonction propre possédant cette propriété. Donc, pour tout i , $L_k(\Omega) = \lambda_1(D_i)$. Cela permet de justifier l'inégalité $\mathfrak{L}_k \leq L_k$.

Montrons maintenant que $\lambda_k \leq \mathfrak{L}_k$. En vertu de la proposition 2.2.2, nous savons que $\mathfrak{L}_k(\Omega) < \mathfrak{L}_{k+1}(\Omega)$ pour $k \geq 1$. Or, nous pouvons nous servir de cette information pour supposer que $\lambda_{k-1} < \lambda_k$. En effet, si $\lambda_{k-1} = \lambda_k$, nous pourrions reproduire notre raisonnement avec la plus grande valeur propre inférieure à λ_{k-1} , disons λ_j . Nous en déduisons alors que $\lambda_{j+1} = \lambda_{k-1} = \lambda_k \leq \mathfrak{L}_{j+1} < \mathfrak{L}_k$.

Supposons donc que $\lambda_{k-1} < \lambda_k$ et considérons \mathcal{D}_0 une partition minimale. Alors, un espace à k dimensions dans $H_0^1(\Omega)$ est généré par les $\lambda_1(D_i)$, où $i = 1, \dots, k$. En effet, pour $\lambda_1(D_i)$, il suffit d'utiliser la fonction propre associée définie sur D_i et de la définir comment étant nulle partout ailleurs sur Ω . Les k fonctions ainsi obtenues nous permettent d'obtenir l'espace en question. Puisque ce dernier est constitué de k dimensions, il est possible d'y trouver un élément non trivial orthogonal à l'espace propre correspondant aux valeurs propres inférieures ou égales à λ_{k-1} dont l'énergie

est $\mathfrak{L}_k = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_1(D_i)$. La caractérisation variationnelle nous donne donc

$$\lambda_k = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \perp \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}}} \frac{(\Delta u, u)}{(u, u)} \leq \mathfrak{L}_k.$$

□

Le dernier théorème nous permet d'affirmer que la partition nodale correspondant à une fonction propre strictement Courant, c'est-à-dire pour laquelle $\lambda_k = L_k$, est minimale. Nous avons alors effectivement $\lambda_k = \mathfrak{L}_k = L_k$. Cela s'avère toujours faux si la fonction propre n'est pas strictement Courant. Plus encore, le résultat suivant complète admirablement bien le théorème 2.2.4.

Théorème 2.2.5 (Théorème 1.17 de [14]). *Si $\lambda_k = \mathfrak{L}_k$ ou $\mathfrak{L}_k = L_k$, alors nous avons les égalités $\lambda_k = \mathfrak{L}_k = L_k$.*

Plusieurs petits résultats découlent de ce théorème et mettent en lumière quelques-unes des particularités de l'inégalité (2.2.1).

Corollaire 2.2.6. *En une dimension, $\lambda_k = \mathfrak{L}_k = L_k$ et ce, $\forall k \geq 1$.*

DÉMONSTRATION. En fait, il suffit de montrer que λ_k est associée à une fonction propre à k domaines nodaux, c'est-à-dire que $\lambda_k = L_k \forall k \geq 1$. Or, la théorie de Sturm-Liouville [18] nous indique que la k -ième fonction propre du problème éponyme possède exactement $k - 1$ zéros sur l'intervalle de définition. Nous en déduisons que cette fonction a k domaines nodaux, un entre chaque zéro. Il s'en suit que $\lambda_k = L_k$. D'où le résultat. □

Corollaire 2.2.7. *Peu importe la dimension, nous avons $\lambda_1 = \mathfrak{L}_1 = L_1$ et $\lambda_2 = \mathfrak{L}_2 = L_2$.*

DÉMONSTRATION. En vertu du théorème de Courant 2.1.1, nous savons que la première fonction propre ne possède qu'un domaine nodal. Ainsi, $\lambda_1 = L_1$, ce qui implique la première partie du corollaire $\lambda_1 = \mathfrak{L}_1 = L_1$. En outre, comme nous l'avons déjà mentionné, la deuxième fonction propre du laplacien pour un domaine donné possède, quant à elle, exactement deux domaines nodaux en vertu de l'orthogonalité des fonctions propres. Nous avons alors $\lambda_2 = L_2$ qui implique la dernière partie de l'énoncé. □

Enfin, le résultat ci-après est de la plus grande utilité. Il sert en quelque sorte de pont entre la notion de partition spectrale minimale et de domaine nodal. En particulier, il s'avérera indispensable à l'algorithme explicité à la section 2.3 qui nous servira à trouver numériquement certaines bonnes candidates pour former des partitions optimales.

Théorème 2.2.8 (Remarque 1.6 (i) de [13]). *Toute 2-partition spectrale minimale correspond à une partition nodale.*

Évidemment, beaucoup de résultats déjà établis sur les partitions spectrales minimales n'ont pas été présentés ici. Nous avons simplement voulu donner un aperçu du genre de propriétés qu'il était possible de développer. Par exemple, un élément omis dans cette section consiste en le lien existant entre les partitions et les graphes que nous pouvons leur associer. Cela divergeait quelque peu de notre ligne directrice. Il est néanmoins possible de trouver plus d'information à ce sujet dans n'importe quel article cité en début de chapitre. Il en va de même pour la notion de partition régulière qui apparaît comme une hypothèse nécessaire dans certains résultats.

Malgré toutes les belles propriétés associées aux valeurs propres de Dirichlet, des problèmes aussi simples que de trouver les 3-partitions spectrales minimales sur des domaines circulaires, carrés ou ayant la forme d'un triangle équilatéral n'ont toujours pas été résolus analytiquement. Par contre, les conjectures abondent à ce sujet.

Dans le cas du disque, il est possible de montrer la proposition qui suit.

Proposition 2.2.9 (Proposition 17 de [11]). *Sauf si $k = 1, 2$ ou 4 , les partitions minimales ne sont jamais nodales.*

Cela complique grandement la recherche de telles partitions. Il est cependant avancé que la 3-partition minimale sur le disque serait formée des trois secteurs d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Nous surnommons cette partition la partition de Mercedes puisqu'elle rappelle le logo de la célèbre compagnie. Plusieurs résultats semblent sous-entendre l'optimalité de cette partition, mais cela n'a pas été démontré définitivement.

Pour ce qui est du domaine de forme carré, la conjecture vient, entre autres, de ce qui a été obtenu numériquement. L'algorithme présenté à la section qui suit a justement servi à obtenir cette partition conjecturée que nous pouvons voir à la figure 2.1 de la section 2.3.

2.3. UN ALGORITHME ITÉRATIF POUR TROUVER LES PARTITIONS MINIMALES

Décidément, trouver les partitions spectrales minimales à plus de deux composantes pour le problème de Dirichlet ne constitue pas une tâche facile. Heureusement pour nous, le calcul numérique pallie cette difficulté en permettant l'exécution d'algorithmes itératifs menant à l'obtention de bonnes candidates pour les partitions

cherchées. Nous en présentons un ici dont la clé réside en la monotonie des valeurs propres du laplacien de Dirichlet avec le domaine. Les détails sont présentés dans l'article [3].

La méthode sur laquelle nous nous attardons maintenant a été pensée afin de trouver des 3-partitions minimales. Nous pourrions par contre la généraliser assez facilement pour des k -partitions plus générales. Cet algorithme se base sur le théorème 2.2.8 de la section précédente qui nous indique la façon imparable pour trouver une 2-partition optimale. En effet, celle-ci se définit toujours à partir des domaines nodaux de la deuxième fonction propre, qui sont au nombre de deux en vertu du théorème de Courant 2.1.1, rappelons-le. La proposition suivante, issue de [11], servira de complément au théorème 2.2.8 pour élaborer notre algorithme. Elle nous indique que toute sous-partition d'une partition minimale sera elle-même une partition minimale. En particulier, toute paire de composantes voisines (D_i, D_j) d'une partition optimale devra forcément correspondre à la 2-partition minimale obtenue à partir des domaines nodaux de la deuxième fonction propre.

Proposition 2.3.1. *Soit $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ une k -partition spectrale minimale de Ω . Alors, toute sous-partition $\mathcal{D}^I = \{D_i\}_{i \in I}$ telle que $I \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ vérifie*

$$\mathfrak{L}_k = \Lambda(\mathcal{D}^I) = \mathfrak{L}_{|I|}(\Omega_I^*),$$

où $|I|$ réfère à la cardinalité de l'ensemble I et où $\Omega_I^* = \text{int}(\overline{\cup_{i \in I} D_i} \setminus \partial\Omega)$.

Sachant cela, voici comment nous pouvons procéder pour trouver une candidate pour une 3-partition minimale en se servant du calcul numérique et ce, peu importe la forme du domaine. Soit Ω le domaine planaire pour lequel nous souhaitons trouver une partition minimale. Prenons d'abord $\mathcal{D}^0 = \{D_1^0, D_2^0, D_3^0\}$ une 3-partition initiale quelconque de Ω qui n'est pas optimale. Pour faciliter le processus, nous imposons en plus que cette partition \mathcal{D}^0 soit telle que chacune de ses composantes soit voisine des deux autres. Nous distinguerons les partitions obtenues à chacune des étapes de l'algorithme en indiquant le numéro de l'étape en exposant comme nous l'avons fait pour notre étape initiale 0.

Une fois la partition initiale fixée, nous calculons la première valeur propre de chacun des sous-domaines qui la constituent afin de déterminer quelle composante de la partition possède la plus petite première valeur propre. Sans perte de généralité, supposons que $\lambda_1(D_1^0)$ est inférieure à $\lambda_1(D_2^0)$ et à $\lambda_1(D_3^0)$. Alors, nous posons $D_1^1 = D_1^0$. Nous considérons ensuite le domaine obtenu en supprimant D_1^1 , c'est-à-dire $\Omega \setminus \overline{D_1^1}$. Nous repartitionnons ce domaine de façon à exhiber une 2-partition minimale trouvée à partir des domaines nodaux de la deuxième fonction propre de

$\Omega \setminus \overline{D_1^1}$. Les deux composantes formant cette nouvelle partition sont rebaptisées respectivement D_2^1 et D_3^1 . Nous avons alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_2(\Omega \setminus \overline{D_1^1}) &\stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \inf_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_2} \max\{\lambda_1(D_2^0), \lambda_1(D_3^0)\} \\
&= \lambda_2(\Omega \setminus \overline{D_1^1}), \quad \text{par le th\u00e9or\u00e8me 2.2.8} \\
&= \lambda_1(D_2^1) = \lambda_1(D_3^1) \\
&\leq \max\{\lambda_1(D_1^0), \lambda_1(D_2^0), \lambda_1(D_3^0)\} \\
&= \Lambda(\mathcal{D}^0).
\end{aligned}$$

D'o\u00f9

$$\Lambda(\mathcal{D}^1) \stackrel{\text{d\u00e9f.}}{=} \max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_1(D_i^1) \leq \Lambda(\mathcal{D}^0).$$

L'algorithme que nous sommes en train de d\u00e9crire est it\u00e9ratif dans le sens o\u00f9 chacune des \u00e9tapes subs\u00e9quentes est identique \u00e0 celle permettant l'obtention de \mathcal{D}^1 que nous venons de d\u00e9tailler. Ainsi, \u00e0 l'\u00e9tape n , nous posons D_i^n comme \u00e9tant l'un ou l'autre des sous-domaines obtenus lors du repartitionnement de l'\u00e9tape pr\u00e9c\u00e9dente $n - 1$, c'est-\u00e0-dire soit D_2^{n-1} soit D_3^{n-1} . Par exemple, nous pouvons poser $D_1^n = D_2^{n-1}$. Nous trouvons ensuite la 2-partition minimale du sous-domaine $\Omega \setminus \overline{D_1^n}$ \u00e0 l'aide du th\u00e9or\u00e8me 2.2.8, ce qui permet de fixer D_2^n et D_3^n en fonction des composantes obtenues. Les in\u00e9galit\u00e9s \u00e9tablies plus haut sont \u00e9videmment toujours valables.

En somme, au fil des \u00e9tapes, nous obtenons une suite $\{\Lambda(\mathcal{D}^n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ d\u00e9croissante et positive. Cette suite monotone born\u00e9e est \u00e9videmment convergente. Autrement dit, en faisant tendre n vers l'infini, si nous trouvons une partition $\mathcal{D}^\infty = \{D_1^\infty, D_2^\infty, D_3^\infty\}$, elle respectera forc\u00e9ment

$$\lambda_1(D_1^\infty) = \lambda_1(D_2^\infty) = \lambda_1(D_3^\infty).$$

Cette partition constituera alors une bonne candidate de 3-partition minimale puisqu'elle s'av\u00e8rera notamment une \u00e9quipartition spectrale forte.

On peut trouver un exemple d'application de cet algorithme appliqu\u00e9 \u00e0 une 3-partition de carr\u00e9 dans l'article [1]. Les r\u00e9sultats ont \u00e9t\u00e9 reproduits \u00e0 la figure 2.1. \u00c0 chaque fois, c'est la r\u00e9gion bleue d'une it\u00e9ration donn\u00e9e qui demeure inchang\u00e9e \u00e0 l'it\u00e9ration suivante. Bien qu'il s'agisse d'un cas tr\u00e8s particulier, cela nous donne une bonne id\u00e9e de la relative facilit\u00e9 avec laquelle il est possible de trouver une partition spectrale minimale approximative par calcul num\u00e9rique. Nous verrons que cela est loin d'\u00eatre le cas lorsque nous modifions les param\u00e8tres de notre probl\u00e8me.

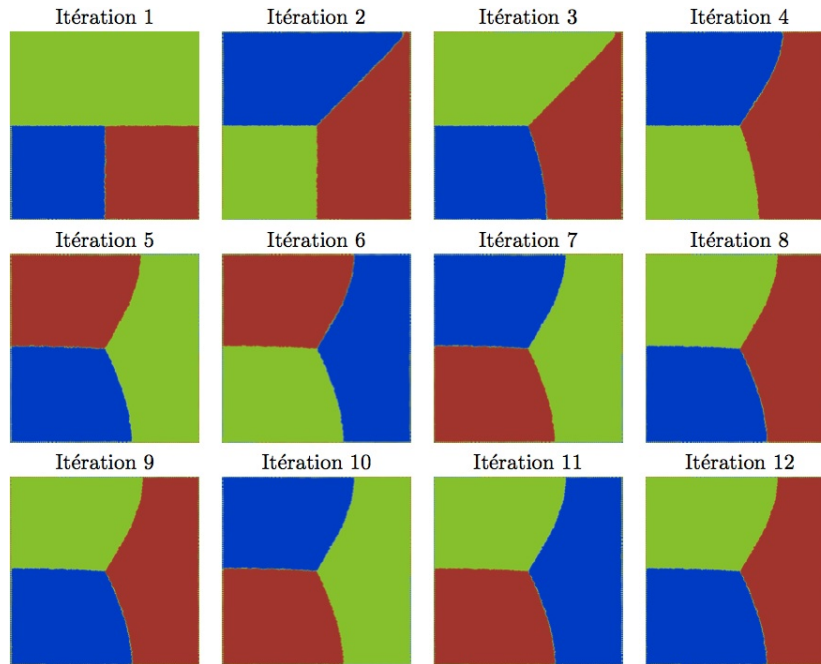


FIGURE 2.1. Algorithme itératif appliqué sur le carré (source : [1])

2.4. LE PROBLÈME INVERSE

À partir de ce que nous avons appris, une première avenue que nous pouvons explorer est le problème inverse de celui menant à l'obtention des partitions optimales. Plus précisément, au lieu de travailler avec l'infimum d'un maximum, nous suggérons que la quantité

$$\sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \lambda(D_i) \quad (2.4.1)$$

peut être établie avec exactitude et qu'en fait, elle est égale à l'infini.

Pour démontrer cela, une borne inférieure sur la première valeur propre du laplacien de Dirichlet s'avère nécessaire. Dans l'étude des problèmes aux valeurs propres, trouver des bornes inférieures est toujours plus difficile que de borner supérieurement une valeur propre de rang donné. Heureusement pour nous, plusieurs mathématiciens se sont déjà penchés sur la question. J. Hersch [16], W. Hayman [10], R. Osserman [23] et C. B. Croke [7], pour ne nommer que ceux-là, ont tous trouvé un même type d'inégalité :

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{\alpha}{\rho^2},$$

où ρ est le rayon inscrit du domaine Ω et α est une constante positive qu'ils ont sans cesse cherché à améliorer. Pour les besoins de notre démonstration, la valeur précise de la constante nous importe peu. Nous nous contenterons donc d'utiliser α

tout simplement. Un résumé des différentes constantes trouvées jusqu'à présent se trouve néanmoins dans [26]. Le rayon inscrit, quant à lui, représente le rayon du plus grand disque qu'il est possible d'inscrire dans notre domaine. Nous le définissons précisément ainsi :

$$\rho(\Omega) = \sup \left\{ r \mid \exists B_r \subset \Omega \right\}.$$

La notation B_r ci-dessus réfère évidemment à une boule de rayon r .

Montrons maintenant que l'expression (2.4.1) est égale à l'infini à l'aide de l'inégalité que nous venons de présenter. La preuve exposée ici n'étant pas d'une rigueur absolue, elle donne tout de même une bonne idée de la situation. Imaginons une k -partition \mathcal{D} de Ω constituée exclusivement de bandes infiniment minces qui serpentent de façon à couvrir tout le domaine. Autrement dit, pour chaque composante D_i de la partition, nous avons que $\rho(D_i) \rightarrow 0$. Alors, nous avons que

$$\lambda_1(D_i) \geq \frac{\alpha}{\rho(D_i)^2} \rightarrow \infty \text{ lorsque } \rho(D_i) \rightarrow 0,$$

ce qui implique que

$$\lambda_1(D_i) \rightarrow \infty, \quad \forall D_i \in \mathcal{D}.$$

On en conclut aisément que

$$\sup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \lambda(D_i) = \infty.$$

Somme toute, ce problème ne s'est pas avéré très intéressant et nous ne nous apprend à peu près pas d'information sur les partitions spectrales minimales. Une autre façon d'étendre cette notion de partition consisterait à imposer des conditions aux limites de Neumann sur Ω et sur chacune des composantes des partitions cherchées. Cette nouvelle approche, qui est le sujet du dernier chapitre, constitue le coeur de ce mémoire.

Chapitre 3

LES PARTITIONS SPECTRALES MAXIMALES DE NEUMANN

La question principale sur laquelle nous souhaitons nous attarder est de déterminer des propriétés des partitions spectrales minimales pour le problème aux valeurs propres de Neumann. En fait, dans ce cas-ci, nous parlerons plutôt de **partitions spectrales maximales** puisque nous chercherons à déterminer, pour divers domaines planaires, des partitions qui permettent de réaliser

$$\sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i), \quad (3.0.2)$$

où, rappelons-le, $\mu_1(D_i)$ représente la plus petite valeur propre non nulle sur le sous-domaine D_i pour le problème de Neumann. Cela n'a, à notre connaissance, jamais été fait auparavant. Ce chapitre contient donc les nouveaux résultats obtenus au cours de la recherche.

3.1. LES 2-PARTITIONS MAXIMALES

Dans la situation où $k = 2$, c'est-à-dire où nous conservons les partitions sur Ω formées seulement de deux sous-domaines, le lemme suivant constitue un outil essentiel.

Lemme 3.1.1. *Soit Ω un domaine quelconque auquel sont associées les valeurs propres de Neumann positives suivantes $0 < \mu_1(\Omega) \leq \dots$. Si nous divisons ce domaine en deux sous-domaines D_1 et D_2 en imposant la condition de Neumann sur la frontière ainsi créée et si $0 < \mu_1(D_i) \leq \dots$, pour $i = 1, 2$, représentent les valeurs propres de Neumann pour chacun des sous-domaines, alors*

$$\min\{\mu_1(D_1), \mu_1(D_2)\} \leq \mu_2(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. Puisque $H^1(\Omega) \subset H^1(D_1) \cup H^1(D_2)$, la caractérisation variationnelle nous permet de constater que le spectre de Ω diminue lorsque nous coupons Ω pour obtenir $D_1 \cup D_2$. De plus, $D_1 \cup D_2$ est un domaine disjoint puisque D_1 et D_2 sont ouverts et disjoints. Par conséquent, le spectre de ce domaine est équivalent à l'union réordonnée des spectres de D_1 et de D_2 . Ainsi, nous avons

$$\min\{\mu_1(D_1), \mu_1(D_2)\} = \mu_1(D_1 \cup D_2) \leq \mu_2(D_1 \cup D_2) \leq \mu_2(\Omega).$$

Nous en concluons le lemme. □

Remarquons que, si nous parvenons à trouver une partition telle que $\mu_1(D_1) = \mu_1(D_2) = \mu_2(\Omega)$, alors ce lemme nous affirme que nous aurons trouvé une partition spectrale maximale pour le problème de Neumann. Voyons comment cela peut s'appliquer à des domaines planaires de géométrie assez simple.

3.1.1. Les domaines rectangulaires

Considérons un domaine rectangulaire quelconque donné par $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. Nous allons montrer qu'une partition spectrale maximale est obtenue lorsque nous coupons le domaine au centre des plus longs côtés de façon à obtenir deux petits rectangles identiques. Pour ce faire, supposons sans perte de généralité que $0 < a \leq b$ et rappelons que les valeurs propres pour un tel rectangle sont données par

$$\mu_{m,n}(\Omega) = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \text{où } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Subséquentement,

$$\begin{aligned} \mu_1(\Omega) &= \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2} \right\} = \frac{\pi^2}{b^2}, \\ \mu_2(\Omega) &= \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{4}{b^2} \right\}. \end{aligned}$$

Si nous partitionnons maintenant de façon à obtenir deux sous-domaines rectangulaires identiques de dimension $a \times \frac{b}{2}$, les valeurs propres obtenues sont

$$\mu_{m,n}(D_i) = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{4n^2}{b^2} \right), \quad \text{où } m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Nous pouvons ainsi déduire que

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{4}{b^2} \right\} = \mu_2(\Omega).$$

Le lemme précédent nous permet de conclure que c'est bien une partition spectrale maximale.

Remarque 3.1.2. *Couper le domaine rectangulaire au centre des plus petits côtés ne nous permet pas nécessairement d'atteindre le maximum espéré comme c'est le cas dans le raisonnement que nous venons de compléter.*

3.1.2. Les domaines à deux axes de symétrie

Généralisons le résultat obtenu pour le rectangle à des domaines possédant deux axes de symétrie (réflexion). Pour ce faire, nous aurons besoin des résultats bien connus suivants.

Lemme 3.1.3. *Pour le problème de Neumann sur un domaine simplement connexe, la première ligne nodale ne peut pas être fermée.*

DÉMONSTRATION. Sans grande surprise, la preuve se fait par contradiction. Supposons en effet que la première ligne nodale d'un domaine planaire Ω est fermée. Nommons Ω^D le sous-domaine délimité par cette ligne nodale et considérons φ_1^N la fonction propre associée à $\mu_1(\Omega)$ pour laquelle la ligne nodale est fermée. Alors, φ_1^N s'annule sur la frontière de Ω^D . Ainsi, en utilisant la monotonie des valeurs propres de Dirichlet, nous obtenons que

$$\mu_1(\Omega) = \lambda_1(\Omega^D) \geq \lambda_1(\Omega).$$

Or, une inégalité bien connue, que nous pouvons trouver dans [24] par exemple, veut que $\mu_1(\Omega) < \lambda_1(\Omega)$. Une contradiction est donc obtenue, nous permettant de conclure à la véracité de l'énoncé du lemme.

□

Remarquons que ce résultat ne tient pas dans le cas d'un domaine non simplement connexe comme un anneau, par exemple. En effet, pour une ligne nodale fermée faisant le tour du trou du domaine, la fonction propre de Neumann ne s'annule pas sur une partie de la frontière de son domaine nodal, celle délimitant le trou du domaine. L'inégalité entre les valeurs propres de Dirichlet et de Neumann ne peut donc pas être employée.

Le lemme suivant nous sera également utile.

Lemme 3.1.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine admettant un axe de symétrie α . Alors, nous pouvons choisir une base de fonctions propres (pour le problème de Dirichlet ou de Neumann) telle que chaque fonction propre φ vérifie l'une ou l'autre des conditions de Dirichlet ($\varphi|_\alpha = 0$) ou de Neumann ($\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_\alpha = 0$) sur α .*

DÉMONSTRATION. Nous ferons la démonstration pour le problème de Neumann puisque c'est celui qui nous sera utile dans les résultats subséquents. Notons Ω^D le domaine formé de l'une des sections symétriques de Ω pour lequel les fonctions propres vérifient la condition de Dirichlet sur a et la condition de Neumann sur $\partial\Omega$ et Ω^N l'équivalent pour lequel les fonctions propres vérifient plutôt la condition de Neumann sur a . Pour démontrer ce lemme, il suffit de voir que le spectre de Ω peut être exprimé comme l'union des spectres de Ω^D et Ω^N . Autrement dit,

$$\text{spectre}(\Omega) = \text{spectre}(\Omega^D) \cup \text{spectre}(\Omega^N).$$

L'inclusion $\text{spectre}(\Omega^D) \cup \text{spectre}(\Omega^N) \subseteq \text{spectre}(\Omega)$ est assez simple à justifier. Soit φ une fonction propre associée à une valeur propre du spectre de Ω^D . Alors, il est possible d'étendre φ à tout Ω en lui admettant un prolongement impair par rapport à a . La fonction ainsi obtenue respectera les conditions aux limites exigées. Elle sera donc continue par construction et encore une fonction propre, mais associée à Ω cette fois. Ce dernier point découle du principe de réflexion, une conséquence de la régularité elliptique. De même, si φ est plutôt une fonction propre associée au spectre de Ω^N , c'est un prolongement pair par rapport à a qui nous permettra d'obtenir une fonction propre continue sur tout Ω respectant la condition de Neumann sur a . L'invariance du laplacien sous les rotations est utile pour bien assimiler l'argument ici. Il est effectivement toujours possible de faire subir une rotation à Ω afin de ramener a vertical. Ainsi, les prolongements deviennent analogues à ceux appliqués sur les fonctions réelles.

Pour montrer l'autre inclusion, il suffit de voir qu'une fonction propre sur Ω peut être exprimée comme la somme d'une fonction propre paire par rapport à a et d'une autre impaire par rapport a . Ceci se fait exactement de la même manière que pour les fonctions paires et impaires réelles. Nous en déduisons ainsi l'égalité.

Par conséquent, il est possible d'associer au spectre de notre domaine Ω des fonctions propres qui vérifient toutes l'une ou l'autre des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur l'axe de symétrie a . Comme c'était le cas pour les fonctions propres quelconques, ces fonctions propres particulières peuvent être choisies de façon à former une base de notre espace de fonction. Or, c'est exactement ce que nous souhaitons démontrer. \square

Nous sommes maintenant prêts à montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 3.1.5. *Pour un domaine simplement connexe possédant deux axes de symétrie a et b , partitionner selon l'un des deux axes permet d'obtenir une partition spectrale maximale pour Neumann.*

DÉMONSTRATION. Cette preuve n'est pas difficile à comprendre, mais demeure néanmoins délicate dans le sens où tous les cas possibles doivent être envisagés. Pour illustrer notre propos, nous avons représenté Ω comme une ellipse à quelques reprises. Cependant, ce choix est arbitraire et n'influe en rien sur la preuve qui demeure vraie pour tout domaine simplement connexe à deux axes de symétrie. Nous nommerons *secteur* chacun des quatre sous-domaines identiques délimités par les axes de symétrie.

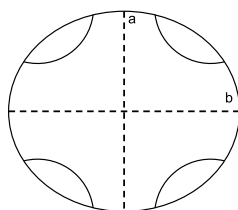


FIGURE 3.1. Exemple de ligne nodale reliant deux points d'un même secteur

Dans un premier temps, remarquons que, si Ω possède deux axes de symétrie a et b , alors $\varphi_1^N(\Omega)$ s'annule sur a ou sur b . En effet, en vertu du théorème de Courant 2.1.1, nous savons que φ_1^N doit avoir deux domaines nodaux. Par le lemme 3.1.3, il est impossible que la ligne nodale soit fermée. La ligne nodale doit donc relier deux points de la frontière de Ω . À cause des symétries, il est également impossible que la ligne nodale relie deux points de la frontière d'un même secteur. Nous obtiendrions alors plus de deux domaines nodaux, ce qui est absurde (voir figure 3.1). Enfin, il est impossible que la ligne nodale relie deux points de la frontière de secteurs différents sauf si cette ligne coïncide avec l'un des axes. Les principaux cas sont illustrés à la figure 3.2. Cette énumération des différentes situations possibles implique l'affirmation faite en début de paragraphe.

Supposons sans perte de généralité que $\varphi_1^N(\Omega)|_a = 0$. Nous allons maintenant montrer que $\varphi_2^N(\Omega)$ satisfait la condition de Neumann sur a . Considérons d'abord le cas où la première valeur propre non nulle est multiple, c'est-à-dire où $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$. Puisque l'ordre des valeurs propres est alors arbitraire, φ_1^N et φ_2^N doivent chacune s'annuler seulement sur a ou sur b . Étant donné qu'elles doivent être différentes, le fait que nous ayons supposé que $\varphi_1^N(\Omega)|_a = 0$ implique que $\varphi_2^N(\Omega)$ satisfait

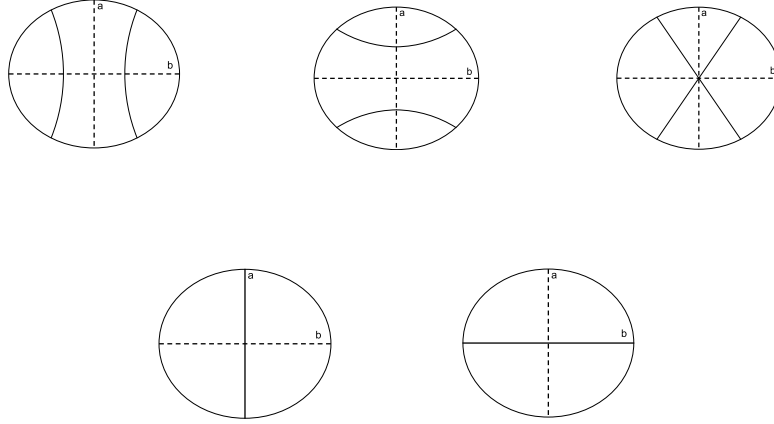


FIGURE 3.2. Exemples de ligne nodale reliant deux points de secteurs différents

la condition de Neumann sur a et la condition de Dirichlet sur b en vertu du lemme 3.1.4.

Le cas où $\mu_1(\Omega) < \mu_2(\Omega)$ se démontre, quant à lui, par l'absurde. Supposons effectivement que φ_2^N satisfait la condition de Dirichlet plutôt que la condition de Neumann sur a . Alors, elle doit admettre une ligne nodale autre que l'axe a afin d'être différente de φ_1^N et ce, tout en admettant au maximum trois domaines nodaux en vertu du théorème de Courant 2.1.1. Or, dans tous les cas, nous obtenons plus de trois domaines nodaux (voir figure 3.3). En effet, si la ligne nodale est fermée, nous obtenons au minimum quatre domaines nodaux. De même, si la ligne nodale n'est pas fermée, elle a la possibilité de relier deux points de la frontière d'un même secteur ou de deux secteurs différents. Chacun des cas mène inévitablement à un total d'au moins quatre domaines nodaux. Ainsi, φ_2^N ne peut satisfaire la condition de Dirichlet sur a , ce qui indique qu'elle y satisfait plutôt la condition de Neumann.

Sachant cela, nous affirmons maintenant que, si φ_2^N satisfait la condition de Neumann sur a , alors a permet de partitionner Ω et nous avons $\mu_2(\Omega) = \mu_1(D_i)$ pour chacun des deux D_i symétriques formant la partition. Supposons, en fait, que $\mu_2(\Omega) = \mu_k(D_1) > \mu_1(D_1)$ pour un certain k . Considérons $\varphi_1^N(D_1)$. Remarquons que, puisque $\varphi_1^N(D_1)$ peut être étendue à Ω par un prolongement pair de façon à demeurer une fonction propre, nous avons alors $\varphi_1^N(D_1) = \varphi_1^N(\Omega)|_{D_1}$. Il est en effet impossible que $\varphi_1^N(D_1) = \varphi_k^N(\Omega)$ pour $k \neq 1$, car μ_1 est la seule valeur propre non nulle inférieure

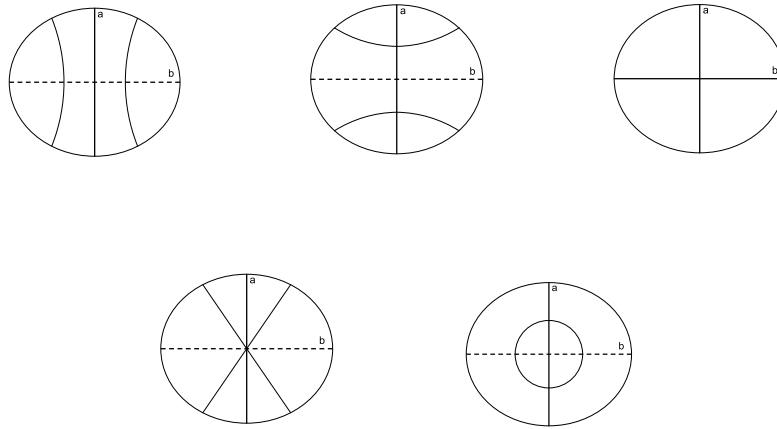


FIGURE 3.3. Exemples de lignes nodales de φ_2^N

à μ_2 . La fonction $\varphi_1^N(\Omega)$ est donc la seule possibilité, car l'espace propre est de dimension un. Elle doit d'ailleurs admettre une ligne nodale (non fermée par le lemme 3.1.3) respectant la symétrie de D_1 par rapport à l'axe b . Quelques cas sont envisageables.

Si la ligne nodale relie deux points de l'intérieur de Ω , c'est-à-dire deux points de l'axe a , alors, une fois prolongée, celle-ci s'avère fermée. Ceci contredit le lemme 3.1.3. Si elle relie plutôt deux points de l'extérieur du domaine, alors nous obtenons trois domaines nodaux au minimum, ce qui est une fois de plus absurde. Enfin, si la ligne nodale coïncide avec l'axe de symétrie, elle coïncide avec b une fois prolongée. Or, nous avons admis que $\varphi_1^N(\Omega)$ s'annule sur a . Il est impossible qu'elle s'annule sur b également en vertu du théorème de Courant 2.1.1. Ces trois situations sont représentées, une fois prolongées sur tout Ω , dans la figure 3.4.

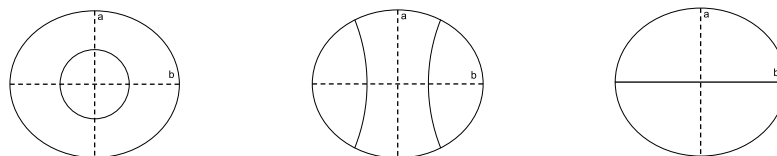


FIGURE 3.4. Exemples de prolongements pour $\varphi_1^N(D_1)$ sur Ω

Puisque tous les cas mènent à une contradiction, nous concluons que $\mu_2(\Omega) = \mu_1(D_1)$. Par le lemme 3.1.1, nous avons atteint le max min cherché, car $\mu_1(D_1) = \mu_1(D_2)$ par symétrie. \square

3.1.3. Les domaines invariants par rapport à une rotation

Un résultat de N. S. Nadirashvili [22] nous permet de généraliser un peu le résultat précédent. Pour des domaines respectant certaines conditions d'invariance par rapport à une rotation, nous allons montrer que la multiplicité de la première valeur propre non nulle du problème de Neumann μ_1 est exactement 2. Pour ce faire, nous allons d'abord avoir besoin de deux lemmes assez techniques. Notons que ces résultats ont été initialement énoncés pour des variétés riemanniennes dans l'article [22]. Nous les avons simplement adaptés de façon à respecter ce dont nous avons besoin ici, c'est-à-dire de domaines planaires. Cela a permis de simplifier certaines preuves.

Le premier lemme s'inscrit dans la lignée du lemme 3.1.3.

Lemme 3.1.6. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné simplement connexe de frontière lisse. Alors, la restriction de φ_1^N à $\partial\Omega$ change de signe sur $\partial\Omega$. De plus, la ligne nodale de φ_1^N est un arc simple lisse dans Ω avec ses extrémités sur $\partial\Omega$.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire que la restriction de φ_1^N à $\partial\Omega$ ne change pas de signe sur $\partial\Omega$. Sans perte de généralité, supposons que $\varphi_1^N \geq 0$ sur $\partial\Omega$. Rappelons que la première fonction propre de Neumann φ_0^N consiste en une fonction constante que nous pouvons présumer égale à 1. Ainsi, puisque $\varphi_0 \perp \varphi_1$, nous avons

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_{\Omega} \varphi_1 \, du = 0.$$

Cela implique l'existence de $\Omega^D \subset \Omega$ tel que $\varphi_1^N(\Omega) < 0$ dans Ω^D et $\varphi_1^N(\Omega) = 0$ sur $\partial\Omega^D$. Autrement dit, $\varphi_1^N(\Omega)$ respecte la condition de Dirichlet sur le sous-domaine Ω^D . Nous en déduisons ainsi que $\partial\Omega^D$ forme une ligne nodale pour $\varphi_1^N(\Omega)$. Or, nous avons déjà démontré au lemme 3.1.3 que la ligne nodale de φ_1 n'est pas fermée. Il s'agit donc d'une contradiction impliquant que $\varphi_1^N|_{\partial\Omega}$ change bel et bien de signe sur $\partial\Omega$.

Nommons γ l'arc servant de ligne nodale à φ_1^N . Cet arc est évidemment simple. En effet, s'il s'intersectait, nous obtiendrions au minimum 3 domaines nodaux : un de chaque côté de cet arc, puis un dernier formé par la boucle créée par l'intersection. Cela entrerait en contradiction avec le théorème de Courant 2.1.1.

Il ne reste donc plus qu'à prouver que cet arc γ est lisse. Pour ce faire, rappelons que les fonctions propres sont analytiques. L'arc γ est donc lisse sauf aux points où

$\nabla \varphi_1^N = 0$ (voir [27], section III.6, où le cas général pour les variétés lisses est discuté). Il suffit donc de montrer que $\nabla \varphi_1^N$ ne s'annule pas sur γ . Allons-y par l'absurde encore une fois et supposons que $\nabla \varphi_1^N$ s'annule sur γ . Soit $x_0 \in \gamma$ tel que φ_1^N a un zéro d'ordre $N \geq 2$ en x_0 . Cela signifie qu'en x_0 , φ_1^N s'annule ainsi que ses $N - 1$ premières dérivées. Alors, nous avons que x_0 est un point de selle d'ordre N pour φ_1^N , c'est-à-dire que x_0 constitue le point de jonction de N lignes nodales. Puisque nous avons présumé $N \geq 2$, nous déduisons que φ_1^N possède plus de deux domaines nodaux sur Ω . Puisque cela contredit le théorème de Courant 2.1.1, nous concluons que γ est lisse. D'où le lemme. □

L'usage que nous ferons du second lemme semble de prime abord plus mystérieux. En fait, puisque notre domaine Ω est simplement connexe et qu'il possède une frontière lisse, nous pouvons affirmer qu'il est difféomorphe à un disque. Nous allons donc recourir au lemme suivant, utilisant des fonctions définies sur un cercle, afin de faire un parallèle avec des fonctions qui seront éventuellement définies sur la frontière de notre domaine.

Lemme 3.1.7. *Soit u_1, u_2 et u_3 des fonctions lisses linéairement indépendantes définies sur le cercle $\Gamma = \mathbb{R} \pmod{1}$, c'est-à-dire $u_i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$. Supposons que toute combinaison linéaire non nulle de u_1, u_2 et u_3 change de signe sur Γ . Alors, il existe une combinaison linéaire $u = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i$, $u \neq 0$, qui possède au moins 3 zéros distincts sur Γ .*

DÉMONSTRATION. Grosso modo, la preuve se divise en deux cas selon le fait que les fonctions u_i aient ou non une racine commune. Supposons pour commencer qu'elles ont effectivement une racine commune $\theta_1 \in \Gamma$ telle que $u_1(\theta_1) = u_2(\theta_1) = u_3(\theta_1) = 0$. Fixons maintenant $\theta_2, \theta_3 \in \Gamma$ différents de θ_1 . Alors, il existe une combinaison linéaire $u = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i$ telle que $u(\theta_2) = u(\theta_3) = 0$. En effet, savoir que chacune des u_i s'annule en θ_1 permet d'enlever un degré de liberté. Nous nous retrouvons donc avec les équations

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1(\theta_2) + \alpha_2 u_2(\theta_2) + \alpha_3 u_3(\theta_2) &= 0 \\ \alpha_1 u_1(\theta_3) + \alpha_2 u_2(\theta_3) + \alpha_3 u_3(\theta_3) &= 0, \end{aligned}$$

équations admettant une solution non triviale pour les α_i en vertu de l'indépendance linéaire des u_i . Puisque nous avons supposé que $u(\theta_1) = 0$, il s'en suit que le résultat est vérifié.

Le second cas consiste à présumer que les trois fonctions u_i n'ont aucune racine commune sur Γ . Soit la fonction du cercle dans la sphère $F : \Gamma \rightarrow S^2$ définie par

$$F(\theta) = \frac{(u_1(\theta), u_2(\theta), u_3(\theta))}{\sqrt{u_1(\theta)^2 + u_2(\theta)^2 + u_3(\theta)^2}}.$$

Nous allons montrer que, sur S^2 , il est possible de trouver un grand cercle qui intersecte $F(\Gamma)$ en au moins 3 points. Voici comment cela impliquera le résultat. Chaque grand cercle sur la sphère consiste en l'intersection d'un plan déterminé par un vecteur normal avec ladite sphère. Puisque, ici, les plans qui engendrent les grands cercles passent tous par l'origine, ils sont uniquement déterminés par leur vecteur normal. Soit Π le plan contenant le grand cercle à trois points d'intersection $F(z_j)$, pour $j = 0, 1, 2$, que nous aurons trouvé et son vecteur normal $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Alors, les vecteurs $(u_1(z_j), u_2(z_j), u_3(z_j))$, pour $j = 0, 1, 2$, appartiendront au plan Π . Ils seront donc orthogonaux à α . Ainsi, nous aurons

$$((u_1(z_j), u_2(z_j), u_3(z_j)), \alpha) = \alpha_1 u_1(z_j) + \alpha_2 u_2(z_j) + \alpha_3 u_3(z_j) = 0 \quad \text{pour } j = 0, 1, 2.$$

La combinaison linéaire $u = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i$ s'avérera donc celle recherchée.

Montrons donc l'existence d'un grand cercle possédant trois points d'intersection avec $F(\Gamma)$. Choisissons un intervalle $[\theta_1, \theta_2] \subset \Gamma$ tel que $F([\theta_1, \theta_2])$ forme un segment de courbe lisse sur S^2 . Soit $z_0 \in]\theta_1, \theta_2[$ et γ le grand cercle de S^2 qui est tangent à $F(\Gamma)$ en $F(z_0)$. Notons S^+ et S^- les deux hémisphères ainsi créés en lesquels γ divise S^2 . Encore une fois, deux cas doivent être examinés.

Considérons la situation où, pour tout voisinage de $F(z_0)$, $F(\Gamma) \cap S^+ \neq \emptyset$ et $F(\Gamma) \cap S^- \neq \emptyset$. Autrement dit, la courbe $F(\Gamma)$ traverse le cercle γ en $F(z_0)$. Remarquons que, dans la mesure où les u_i sont lisses sur le cercle, et donc périodiques, la courbe $F(\Gamma)$ est fermée sur S^2 . Ainsi, $F(\Gamma)$ doit obligatoirement retraverser le cercle γ en un autre point que nous nommerons $F(z_1)$. Pour $\epsilon > 0$, notons γ_ϵ le grand cercle sur S^2 passant par $F(z_0)$ et $F(z_0 + \epsilon)$. Alors, pour ϵ assez petit, γ_ϵ intersecte forcément $F(\Gamma)$ en au moins 3 points : $F(z_0)$, $F(z_0 + \epsilon)$ et un troisième point dans le voisinage de $F(z_1)$. Le cercle γ_ϵ constitue donc le grand cercle cherché dans cette situation.

Supposons maintenant que, pour un voisinage de $F(z_0)$, la courbe $F(\Gamma)$ demeure d'un seul côté de γ , c'est-à-dire que soit $F(\Gamma) \cap S^+ = \emptyset$ soit $F(\Gamma) \cap S^- = \emptyset$ dans ce voisinage. Puisque par hypothèse toute combinaison linéaire $u = \sum_{i=1}^3 \alpha_i u_i$ change de signe sur Γ , en considérant tout S^2 , nous avons $F(\Gamma) \cap S^+ \neq \emptyset$ et $F(\Gamma) \cap S^- \neq \emptyset$. En effet, cela se montre assez facilement par contradiction. Supposons sans perte de généralité que $F(\Gamma) \cap S^- = \emptyset$. Nous allons exhiber une combinaison linéaire ne changeant

pas de signe sur Γ . Pour ce faire, il suffit encore une fois de considérer le vecteur α normal au plan de γ pointant vers S^+ . Alors, le produit scalaire de (u_1, u_2, u_3) avec α est positif ou nul, d'où la contradiction. Ainsi, pour un certain $z_1 \neq z_0$, la courbe $F(\Gamma)$ doit traverser γ en $F(z_1)$ afin que $F(\Gamma) \cap S^- \neq \emptyset$. Le fait que la courbe $F(\Gamma)$ soit fermée implique l'existence de $z_2 \neq z_0, z_1$ pour lequel $F(\Gamma)$ retraverse γ en $F(z_2)$ afin de venir clore la courbe. Nous avons donc montré l'existence de $z_1, z_2 \in \Gamma$ tels que $F(z_1), F(z_2) \in \gamma$. Ainsi, le cercle γ intersecte bel et bien $F(\Gamma)$ en au moins trois points. Ceci démontre le lemme. □

Ces lemmes sont utiles pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné simplement connexe de frontière lisse. Alors, la multiplicité de $\mu_1(\Omega)$ est au plus 2.*

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire, c'est-à-dire que la multiplicité de $\mu_1(\Omega)$ est strictement supérieure à 2. Alors, il existe au moins trois fonctions propres $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ associées à μ_1 linéairement indépendantes. En vertu du résultat d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour les équations elliptiques (voir [17]), nous savons que les restrictions de chacune des φ_i à la frontière $\partial\Omega$ sont linéairement indépendantes sur $\partial\Omega$. Aussi, en vertu du lemme 3.1.6, chaque $\varphi_i|_{\partial\Omega}$ change de signe sur $\partial\Omega$. Puisque chaque combinaison linéaire des φ_i s'avère aussi une fonction propre associée à μ_1 , chacune de ces combinaisons linéaires restreintes à $\partial\Omega$ change de signe sur $\partial\Omega$ selon le lemme. Le lemme 3.1.7 et le fait que Ω soit difféomorphe à un disque nous permettent de déduire l'existence d'une combinaison linéaire $\varphi = \sum \alpha_i \varphi_i$ possédant au moins 3 zéros distincts sur $\partial\Omega$. Un autre résultat classique, le lemme sur les dérivées normales, pour lequel nous pouvons consulter [21], nous permet d'affirmer que, dans le voisinage de chacun de ces zéros distincts, φ change de signe sur Ω . Cela mène à une contradiction avec le fait que, selon le lemme 3.1.6, la ligne nodale de φ consiste en un arc simple lisse dans Ω dont les extrémités se trouvent sur $\partial\Omega$. □

Le résultat qui nous intéresse particulièrement se déduit du théorème que nous venons de démontrer.

Corollaire 3.1.9. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné simplement connexe de frontière lisse. Supposons que ce domaine est invariant sous une rotation de $\frac{2\pi}{n}$, $n > 2$, autour de l'origine. Alors, la multiplicité de $\mu_1(\Omega)$ est exactement 2.*

DÉMONSTRATION. Le théorème 3.1.8 nous indique que la multiplicité de $\mu_1(\Omega)$ est 1 ou 2. Supposons qu'elle est égale à 1. Soit φ_1 la fonction propre correspondant à $\mu_1(\Omega)$. Puisque φ_1 est de multiplicité 1, elle doit être invariante sous rotation de $\frac{2\pi}{n}$, $n > 2$. En effet, une rotation de $\frac{2\pi}{n}$ ne modifie pas le domaine ici. φ_1 doit donc pouvoir rester elle-même pour un domaine inchangé, c'est-à-dire pour toute rotation de $\frac{2\pi}{n}$. Nous savons par le lemme 3.1.6 que la ligne nodale de φ_1 n'est pas fermée et qu'elle relit simplement 2 points de $\partial\Omega$. Or, pour avoir l'invariance par rapport à la rotation, nous devons avoir que la ligne nodale relit au moins n points de la frontière, où $n > 2$. Nous obtenons une contradiction. La multiplicité de $\mu_1(\Omega)$ est donc 2. \square

En fait, pour trouver une partition spectrale maximale pour Neumann, seul le fait que la multiplicité de la première valeur propre non nulle ne peut être 1 nous est vraiment utile. De plus, pour montrer que cela est impossible, il est inutile de supposer la frontière de Ω lisse. Nous obtenons donc le théorème suivant.

Théorème 3.1.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine invariant sous une rotation de $\frac{2\pi}{n}$, avec $n > 2$, et admettant un axe de symétrie. Alors, partitionner selon cet axe nous permet d'obtenir une partition spectrale maximale pour Neumann.*

DÉMONSTRATION. En vertu du corollaire précédent, nous savons que la multiplicité de la première valeur propre non nulle de Neumann sur Ω est 2. L'ordre des deux premières fonctions propres peut donc être choisi arbitrairement. Comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 3.1.5, nous pouvons exiger que la première fonction propre respecte la condition de Neumann sur l'axe de symétrie α . Il s'avère alors impossible que $\mu_1(D_1) < \mu_1(\Omega)$, car nous pouvons prolonger $\varphi_1(D_1)$ sur tout Ω . Toute valeur propre de D_1 est donc aussi une valeur propre de Ω . Ainsi, $\mu_1(D_1) = \mu_1(D_2) = \mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ et la conclusion découle une fois de plus du lemme 3.1.1. \square

3.2. LES PARTITIONS À PLUS DE DEUX SOUS-DOMAINES

Une question naturelle suite à ce que nous venons d'établir consiste à se demander si nous pouvons établir des résultats similaires pour des partitions à plus de deux composantes. Le domaine rectangulaire nous permet encore une fois de faire des calculs directement pour des partitions de trois ou quatre composantes. Pour déterminer des situations où une partition spectrale maximale est atteinte, nous utiliserons une généralisation du lemme 3.1.1.

Lemme 3.2.1. Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^2 et D_1, \dots, D_k les composantes d'une k -partition de Ω . Alors,

$$\min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i) \leq \mu_k(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. La preuve ressemble beaucoup à celle du lemme 3.1.1. Nous utilisons une fois de plus le fait que, dû à la caractérisation variationnelle, le spectre diminue si nous coupons Ω de façon à imposer une condition de Neumann sur l'une de ses courbes.

$$\min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i) = \mu_k\left(\bigcup_{i=1}^k D_i\right) \leq \mu_k(\Omega).$$

La première égalité s'explique par le fait qu'un domaine disjoint à k composantes tel que $\bigcup_{i=1}^k D_i$ aura k valeurs propres nulles, une pour chacune de ses composantes. \square

Calculons les premières valeurs propres non nulles pour le problème de Neumann sur le rectangle $\Omega = [0, a] \times [0, b]$. Nous considérons, sans perte de généralité, $a \leq b$. L'ordre des valeurs propres dépend du rapport entre a et b . Le tableau 3.1 résume les résultats calculés.

TABLEAU 3.1. Premières valeurs propres non nulles de Neumann pour un domaine rectangulaire

Intervalles	$\mu_1(\Omega)$	$\mu_2(\Omega)$	$\mu_3(\Omega)$	$\mu_4(\Omega)$
$a \leq \frac{b}{4}$	$\frac{\pi^2}{b^2}$	$\frac{4\pi^2}{b^2}$	$\frac{9\pi^2}{b^2}$	$\frac{16\pi^2}{b^2}$
$\frac{b}{4} \leq a \leq \frac{b}{3}$	$\frac{\pi^2}{b^2}$	$\frac{4\pi^2}{b^2}$	$\frac{9\pi^2}{b^2}$	$\frac{\pi^2}{a^2}$
$\frac{b}{3} \leq a \leq \frac{b}{2}$	$\frac{\pi^2}{b^2}$	$\frac{4\pi^2}{b^2}$	$\frac{\pi^2}{a^2}$	$\frac{9\pi^2}{b^2}$
$\frac{b}{2} \leq a \leq \frac{2b}{3}$	$\frac{\pi^2}{b^2}$	$\frac{\pi^2}{a^2}$	$\frac{4\pi^2}{b^2}$	$\frac{9\pi^2}{b^2}$
$\frac{2b}{3} \leq a \leq b$	$\frac{\pi^2}{b^2}$	$\frac{\pi^2}{a^2}$	$\frac{4\pi^2}{b^2}$	$\frac{4\pi^2}{a^2}$

En utilisant le lemme 3.2.1 et le tableau 3.1, certaines partitions optimales sont trouvées assez facilement. Comme 3-partition, il est possible de diviser le rectangle de dimension $a \times b$ en trois rectangles identiques en suivant le sens de la largeur (côté de mesure a). Autrement dit, nous considérons maintenant trois rectangles de longueur $\frac{b}{3}$ et de largeur a . Une partition maximale est alors obtenue pour $a \leq \frac{b}{2}$. En effet, si $a \leq \frac{b}{3}$, nous avons

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{9}{b^2} \right\} = \frac{9\pi^2}{b^2} = \mu_3(\Omega).$$

Si $\frac{b}{3} \leq a \leq \frac{b}{2}$, le résultat s'avère plutôt

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{9}{b^2} \right\} = \frac{\pi^2}{a^2} = \mu_3(\Omega).$$

En ce qui concerne les 4-partitions, toujours pour le même domaine rectangulaire, les résultats sont similaires. En partitionnant de façon à obtenir quatre rectangles identiques de longueur $\frac{b}{4}$ et de largeur a , nous atteignons notre critère d'optimalité pour $a \leq \frac{b}{3}$. Si $a \leq \frac{b}{4}$, nous trouvons

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{16}{b^2} \right\} = \frac{16\pi^2}{b^2} = \mu_4(\Omega),$$

alors que si $\frac{b}{4} \leq a \leq \frac{b}{3}$, nous avons plutôt

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{16}{b^2} \right\} = \frac{\pi^2}{a^2} = \mu_4(\Omega).$$

Qu'est-ce qui fait en sorte que l'inégalité fournie par le lemme 3.2.1 ne nous permet de trouver une partition maximale que jusqu'à une certaine valeur de a , soit $a = \frac{b}{2}$ pour une 3-partition et $a = \frac{b}{3}$ pour une 4-partition? Cela vient du fait que nous avons un changement de comportement des valeurs propres à ces valeurs puisqu'elles deviennent alors de multiplicité 2. Il existe assurément d'autres partitions optimales lorsque ces valeurs critiques sont dépassées, mais nous aurions besoin d'une autre méthode pour démontrer leur maximalité. D'ailleurs, un exemple supplémentaire de partitions spectrales maximales peut être exhibé dans le cas particulier où Ω est un carré ($a = b$). Il suffit en effet de diviser le domaine en quatre petits carrés identiques de côté $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$. Nous avons alors

$$\mu_1(D_i) = \frac{4\pi^2}{b^2} = \frac{4\pi^2}{a^2} = \mu_4(\Omega).$$

De ce que nous venons d'établir, il est possible de déduire l'obtention d'une k -partition spectrale maximale dans un cas très particulier du rectangle. En effet, si $a \leq \frac{b}{k}$, nous avons

$$\min \left\{ \frac{k^2}{b^2}, \frac{1}{a^2} \right\} = \frac{k^2}{b^2}.$$

Cela signifie que, pour tout $1 \leq i \leq k$, nous avons

$$\mu_i(\Omega) = \frac{i^2\pi^2}{b^2}.$$

En séparant notre rectangle de dimension $a \times b$ en k rectangles de longueur $\frac{b}{k}$ et de largeur a , nous avons une partition optimale :

$$\mu_1(D_i) = \pi^2 \min \left\{ \frac{k^2}{b^2}, \frac{1}{a^2} \right\} = \frac{k^2}{b^2} = \mu_k(\Omega).$$

Insistons encore une fois sur le fait que les partitions mentionnées ici ne sont probablement pas les seules qui vérifient notre critère d'optimalité. A priori, il n'est pas impossible qu'une partition soit optimale sans pour autant que les premières valeurs propres de ses sous-domaines atteignent la borne donnée par le lemme 3.2.1.

Avant de tenter une quelconque généralisation, jetons maintenant un coup d'oeil sur ce qui se passe du côté des domaines circulaires. Comme nous l'avons mentionné au début de ce travail, espérer trouver des valeurs exactes pour ce type de problème relève de l'utopie. Cependant, l'intuition nous dicte que les partitions optimales sur un disque devraient pouvoir être trouvées en divisant ce disque en k secteurs identiques d'angle $\frac{2\pi}{k}$. En utilisant l'outil d'équations aux dérivées partielles de MATLAB, nous trouvons que les premières valeurs propres non nulles du laplacien pour le problème de Neumann sur un disque sont approximativement

$$\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) \approx 3,391 \quad \text{et} \quad \mu_3(\Omega) = \mu_4(\Omega) \approx 9,331.$$

Or, lorsque nous comparons ces valeurs à celles obtenues pour des secteurs identiques de disque, nous obtenons

$$\mu_1(D_i) \approx 6,055 < \mu_3(\Omega)$$

pour une 3-partition formée de 3 secteurs d'angle $\frac{2\pi}{3}$, alors que, pour une 4-partition constituée de 4 secteurs d'angle $\frac{\pi}{2}$, nous observons plutôt

$$\mu_1(D_i) \approx 9,331 \approx \mu_4(\Omega).$$

Le lemme 3.2.1 semble donc nous indiquer une 4-partition spectrale maximale, mais cela demeure des résultats numériques approximatifs. Pour ce qui est de la 3-partition testée, il est impossible d'en déduire quoi que ce soit. Il se peut très bien qu'elle s'avère néanmoins une partition optimale puisque les autres exemples de partitions moins symétriques que nous avons testés avaient un minimum de première valeur propre non nulle inférieure à 6,055. Il n'en demeure pas moins que nous n'avons fait qu'un nombre fini (évidemment !) de tests et que cela ne peut être considéré comme une preuve. Il est donc clair que l'élaboration de propriétés plus générales de notre maximum de minimum (3.0.2) est maintenant nécessaire. C'est le sujet sur lequel nous concluons ce chapitre.

3.3. CERTAINES PROPRIÉTÉS CONJECTURÉES

L'objectif de cette section consiste à établir des propriétés générales de l'expression mathématique (3.0.2)

$$\sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i).$$

Alors que le défi n'était déjà pas facile pour les partitions spectrales minimales de Dirichlet, il est d'autant plus grand ici puisque plusieurs belles propriétés des valeurs propres de Dirichlet ne tiennent plus pour Neumann. L'exemple le plus flagrant est assurément la monotonie des valeurs propres dont nous nous étions abondamment servis au chapitre 2. Nous devons donc recourir à des résultats alternatifs qui demeurent souvent plus difficiles à appliquer.

Les deux propriétés principales qui nous ont servi de point de départ dans le cas du problème de Dirichlet étaient le fait qu'une partition spectrale minimale devait remplir tout le domaine Ω , puis qu'à chacun des sous-domaines de la partition devait correspondre la même première valeur propre. Il semble donc naturel de vouloir transposer ces belles propriétés aux partitions spectrales maximales de Neumann. Cependant, cela ne mène pas à des résultats aussi satisfaisants que ceux de la section 2.2. Voyons tout de même ce que nous pouvons en tirer.

Attardons-nous d'abord sur le premier point voulant qu'une partition spectrale maximale de Neumann couvre forcément tout le domaine Ω en question. En fait, il s'agit d'une hypothèse que nous nous étions imposée jusqu'ici et nous avons raison de le faire. Effectivement, lorsqu'il s'agit du problème de Neumann, il ne va pas de soi qu'une partition optimale couvre tout le domaine. Pour s'en convaincre, il suffit d'imaginer, pour un Ω donné, une partition formée uniquement de disques ou de rectangles très petits de sorte que le domaine ne soit pas entièrement couvert par cette partition. Par exemple, pour une k -partition formée de petits carrés de côté a , nous aurions, pour chacun des sous-domaines, une première valeur propre non nulle égale à $\frac{\pi^2}{a^2}$, où a tend vers 0. Ainsi, nous aurions

$$\sup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i) = \infty.$$

Mathématiquement, cela n'est pas très intéressant et ne nous avance pas à grand-chose. Il convient donc d'imposer que toute partition spectrale maximale de Neumann couvre tout le domaine, tandis que cela était une conséquence directe de la monotonie des valeurs propres pour le problème de Dirichlet.

La question portant sur l'égalité des premières valeurs propres non nulles des composantes d'une partition optimale semble beaucoup plus difficile à résoudre. Nous ne pouvons d'ailleurs qu'en conjecturer le résultat.

Conjecture 3.3.1. *Supposons que le maximum*

$$\max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \min_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i)$$

est atteint pour une certaine k -partition spectrale. Alors, nous avons

$$\mu_1(D_i) = \mu_1(D_j) \quad \forall i \neq j, \text{ où } i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Le travail de D. Bucur et G. Buttazzo [4] faisant notamment intervenir la convergence de Mosco semble nous confirmer l'existence d'une partition spectrale maximale pour un domaine borné donné. Cependant, aucune des avenues explorées jusqu'à présent n'a permis de démontrer que cette partition formait en fait une équi-partition spectrale. L'une des options envisagées faisait notamment intervenir la formule d'Hadamard [9] pour le problème de Neumann. Malheureusement, le défi s'est révélé beaucoup plus difficile qu'il n'y paraissait de prime abord. Une recherche plus poussée sur le sujet serait donc nécessaire à la démonstration définitive de la conjecture.

Enfin, concluons ce chapitre de la même manière que le chapitre précédent : en étudiant le problème inverse. Autrement dit, qu'arrive-t-il si nous inversons le maximum et le minimum qui nous permettraient de trouver nos partitions spectrales maximales pour Neumann ? Cela mène à une autre conjecture.

Conjecture 3.3.2.

$$\inf_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_k} \max_{1 \leq i \leq k} \mu_1(D_i) = 0.$$

La démonstration de cette conjecture nécessite assurément plus de travail que ne le demandait la preuve du problème inverse pour Dirichlet. Néanmoins, nous sommes dans l'impression que partitionner le domaine de façon à obtenir des composantes très minces nous permettrait d'obtenir notre conjecture. Il n'en demeure pas moins que cela devrait être démontré rigoureusement avant de pouvoir être accepté définitivement. Cette affirmation, une fois prouvée, montrerait d'ailleurs que nous avons raison d'inverser le maximum et le minimum de l'expression mathématique des partitions spectrales minimales de Dirichlet pour étudier celles de Neumann. Autrement, le résultat se serait avéré superficiel et peu intéressant.

CONCLUSION

Tout au long de ce travail, une méthode de partitionnement de domaine bien particulière a été mise à l'honneur : les partitions spectrales optimales. Cette avenue de recherche relativement nouvelle en géométrie spectrale s'applique, par exemple, lorsque vient le temps de partager un territoire entre ses occupants tout en minimisant leur désagrément [1] ou encore lorsque nous souhaitons prévoir comment des particules couvriront un espace bien défini afin de réduire au maximum leur énergie. L'objectif du projet de maîtrise était non seulement d'étudier ce qui avait déjà été élaboré sur les partitions spectrales minimales pour le problème de Dirichlet, mais également de généraliser un peu la question en abordant une question analogue tout à fait inédite pour le problème de Neumann.

Après avoir effectué un rapide survol des caractéristiques des problèmes aux valeurs propres, nous avons tenté de rapatrier les principaux résultats touchant les partitions spectrales minimales de Dirichlet. En nous attardant sur quelques propriétés générales et sur une manière de les trouver numériquement, il est rapidement apparu que la monotonie des valeurs propres de Dirichlet vis-à-vis du domaine semblait indispensable. Ceci explique d'ailleurs en partie les difficultés supplémentaires rencontrées lors du passage aux conditions aux limites de Neumann. Nous avons tout de même pu trouver explicitement quelques partitions spectrales maximales pour des domaines de géométrie très simple. Forts de ces découvertes, il nous a été possible d'établir quelques résultats de base en nous servant notamment des symétries du domaine avec lequel nous travaillions. Il est d'ailleurs important de noter que l'ensemble de la recherche a été réalisé sur des domaines planaires seulement, mais que rien n'empêcherait de le généraliser à de plus grandes dimensions. Malgré tous nos efforts, certaines propriétés des partitions maximales demeurent non démontrées.

Ce créneau de recherche se trouve en pleine expansion et peut conduire à toutes sortes de questions intéressantes. Puisque les partitions spectrales minimales de Dirichlet sont aussi étroitement liés aux domaines nodaux des fonctions propres, une piste de recherche future consisterait à tenter des rapprochements entre les partitions spectrales maximales trouvées pour Neumann et les domaines nodaux de Neumann mis de l'avant notamment par R. B. McDonald dans [19] et [20] et dont nous pouvons voir un exemple à la figure. Ces domaines nodaux originaux sont plus difficiles à déterminer puisque leur construction s'effectue à partir des courbes reliant les points de selle dont le vecteur tangent en chaque point est parallèle au gradient d'une fonction propre donnée. Néanmoins, ils offrent l'avantage d'une plus grande stabilité relativement à des perturbations de la fonction propre associée en plus de bien mettre en évidence ses extrémums. Bien sûr, la condition de Neumann est vérifiée sur chacune des frontières de ces domaines nodaux. Rien n'empêche donc qu'ils forment une partition spectrale maximale de Neumann. Or, identifier certaines situations où les domaines nodaux de Neumann forment une partition spectrale maximale pourrait possiblement mettre en lumière de toutes nouvelles propriétés qui n'ont pas encore été envisagées.

Bibliographie

- [1] Bonnaillie-Noël, V. et B. Helffer. 2012, «À la découverte des partitions spectrales minimales», *Images des Mathématiques*, CNRS.
- [2] Boulton, L. et M. Levitin. 2007, *Trends and Tricks in Spectral Theory*, Ediciones IVIC, 99 p..
- [3] Bozorgnia, F. 2009, «Numerical algorithm for spatial segregation of competitive systems», *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 31, n° 5, p. 3946–3958.
- [4] Bucur, D. et G. Buttazzo. 2005, «Variational methods in shape optimization problems», *Progress in Nonlinear Equations and Their Applications*, vol. 65.
- [5] Burdzy, K., R. Holyst, D. Ingerman et P. March. 1996, «Configurational transition in a fleming-viot-type model and probabilistic interpretation of laplacian eigenfunctions», *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 29, p. 2633–2642.
- [6] Courant, R. et D. Hilbert. 1953, *Methods of mathematical physics*, vol. 1, 2^e éd., Interscience Publishers Inc.
- [7] Croke, C. B. 1981, «The first eigenvalue of the laplacian for plane domains», *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 81, n° 2, p. 304–305.
- [8] Cybulski, O., V. Babin et R. Holyst. 2005, «Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process», *Physical Review E*, vol. 71.
- [9] Grinfeld, P. 2010, «Hadamard’s formula inside and out», *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 146, p. 654–690.
- [10] Hayman, W. 1978, «Some bounds for principal frequency», *Applicable Analysis*, vol. 7, p. 247–254.
- [11] Helffer, B. 2006, «Domaines nodaux et partitions spectrales minimales», *Séminaire EDP de l’École Polytechnique*. D’après B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini.
- [12] Helffer, B. 2010, «On spectral minimal partitions : a survey», *Milan Journal of Mathematics*, vol. 78, p. 575–590.

- [13] Helffer, B. et T. Hoffmann-Ostenhof. 2007, «Converse spectral problems for nodal domains», *Moscow Mathematical Journal*, vol. 7, n° 1, p. 67–84.
- [14] Helffer, B., T. Hoffmann-Ostenhof et S. Terracini. 2009, «Nodal domains and spectral minimal partitions», *Annales de l'Institut Henri Poincaré, analyse non linéaire*, vol. 26, p. 101–138.
- [15] Hempel, R., L. A. Seco et B. Simon. 1991, «The essential spectrum of Neumann laplacians on some bounded singular domains», *Journal of functional analysis*, vol. 102, p. 448–483.
- [16] Hersch, J. 1960, «Sur la fréquence fondamentale d'une membrane vibrante : évaluations par défaut et principe du maximum», *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, vol. 11, n° 5, p. 387–413.
- [17] Landis, E. M. 1991, *Second Order Equations of Elliptic and Parabolic Type*, American Mathematical Society.
- [18] Levitan, B. M. et I. S. Sargsjan. 1975, *Introduction to Spectral Theory, Translations of Mathematical Monographs*, vol. 39, American Mathematical Society.
- [19] McDonald, R. B. 2008, «Neumann bounded partitions of eigenfunctions», *Research Scholar Thesis, Texas A&M University*.
- [20] McDonald, R. B. et S. A. Fulling. 2013, «Neumann nodal domains», *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, vol. 372.
- [21] Miranda, C. 1970, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, 2^e éd., Springer.
- [22] Nadirashvili, N. S. 1988, «Multiple eigenvalues of the Laplace operator», *Mathematics of the USSR-Sbornik*, vol. 61, n° 1, p. 225–238.
- [23] Osserman, R. 1977, «A note on Hayman's theorem on the bass note of a drum», *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 52, p. 545–555.
- [24] Payne, L. E. 1967, «Isoperimetric inequalities and their applications», *SIAM Review*, vol. 9, n° 3.
- [25] Pleijel, A. 1956, «Remark on Courant's nodal line theorem», *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 9, p. 543–550.
- [26] Poliquin, G. «Bounds on the principal frequency of the p-laplacian», *AMS Contemporary Mathematics (to appear)*.
- [27] Schoen, R. et S.-T. Yau. 1994, *Lectures on Differential Geometry*, International Press.
- [28] Stockmann, H.-J. 2007, «Chladni meets Napoleon», *European Physical Journal Special Topics*, vol. 145, p. 15–23.
- [29] Strauss, W. A. 2008, *Partial Differential Equations, an Introduction*, 2^e éd., Wiley.
- [30] Watson, G. N. 1966, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2^e éd., Cambridge University Press.