

Université de Montréal

Étude du maximum et des hauts points
de la marche aléatoire branchante inhomogène
et du champ libre gaussien inhomogène

par

Frédéric Ouimet

Département de mathématiques et de statistique
Faculté des arts et des sciences

Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures
en vue de l'obtention du grade de
Maître ès sciences (M.Sc.)
en mathématiques

septembre 2014

Université de Montréal

Faculté des études supérieures

Ce mémoire intitulé

**Étude du maximum et des hauts points
de la marche aléatoire branchante inhomogène
et du champ libre gaussien inhomogène**

présenté par

Frédéric Ouimet

a été évalué par un jury composé des personnes suivantes :

Sabin Lessard

(président-rapporteur)

Louis-Pierre Arguin

(directeur de recherche)

Louigi Addario-Berry

(membre du jury)

Mémoire accepté le

3 septembre 2014

SOMMAIRE

Ce mémoire étudie le comportement du maximum et des hauts points de la marche aléatoire branchante et du champ libre gaussien discret en dimension deux lorsque la variance de leurs accroissements est inhomogène dans le temps. Nous regardons le cas où il y a un nombre fini d'échelles $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ et des paramètres de variance $\sigma_i > 0$ associés aux intervalles de temps $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. La marche aléatoire branchante inhomogène généralise le modèle considéré dans [25] et le champ libre gaussien inhomogène généralise le modèle introduit dans [4]. Le but du mémoire est d'étendre les résultats connus sur la convergence du maximum [6, 7, 25] et le nombre de hauts points [17] à ces deux nouveaux champs gaussiens. Les résultats aident à mieux comprendre comment la perturbation des corrélations dans l'un ou l'autre des modèles de base influence l'ordre de grandeur du maximum et l'ordre du nombre de hauts points.

Mots clés : champs gaussiens, marche aléatoire branchante, champ libre gaussien, valeurs extrêmes, loi des grands nombres.

SUMMARY

This thesis studies the behavior of the maximum and high points of the branching random walk and the Gaussian free field when the variance of their increments is time-inhomogeneous. We look at the case where there are a finite number of scales $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ and variance parameters $\sigma_i > 0$ associated with the time intervals $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$. The inhomogeneous branching random walk generalizes the model considered in [25] and the inhomogeneous Gaussian free field generalizes the model introduced in [4]. The purpose of the thesis is to extend known results on the convergence of the maximum [6, 7, 25] and the number of high points [17] to these new Gaussian fields. The results help to better understand how perturbations of the correlations in one or the other basic models influence the order of magnitude of the maximum and the order of the number of high points.

Keywords : Gaussian fields, branching random walk, Gaussian free field, extreme values, law of large numbers.

TABLE DES MATIÈRES

Sommaire	v
Summary	vii
Liste des figures	xi
Remerciements	1
Chapitre 1. Introduction	3
1.1. Motivation et trois questions d'intérêt	3
1.2. Trois champs gaussiens homogènes et résultats connus	6
1.2.1. Marches aléatoires indépendantes (MAI)	6
1.2.2. Marche aléatoire branchante (MAB)	11
1.2.3. Champ libre gaussien (CLG)	14
1.3. Contribution et présentation du mémoire	17
1.3.1. Contribution	17
1.3.2. Présentation	20
Chapitre 2. La marche aléatoire branchante inhomogène (MABI)	21
2.1. Définition et propriétés	21
2.2. Premier ordre de convergence du maximum (niveau γ^*)	25
2.3. Nombre de hauts points atteignant le niveau $\gamma \in]0, \gamma^*[$	38
2.4. Deuxième ordre de convergence du maximum et tension	50
Chapitre 3. Le champ libre gaussien (CLG)	71
3.1. Définitions	72

3.2. Propriétés	78
3.3. Estimés sur la variance des accroissements	87
Chapitre 4. Le champ libre gaussien inhomogène (CLGI)	93
4.1. Définition et propriétés	93
4.2. Estimés sur la variance des accroissements	96
4.3. Premier ordre de convergence du maximum (niveau γ^*)	101
4.4. Nombre de hauts points atteignant le niveau $\gamma \in]0, \gamma^*[$	109
Chapitre 5. Conclusion	119
5.1. Autres résultats et conjecture sur l'ordre 2 du maximum du CLGI	119
5.2. Questions ouvertes	120
Bibliographie	121
Annexe A. Application du théorème de Karush-Kuhn-Tucker	A-i
A.1. Problème d'optimisation # 1	A-ii
A.2. Problème d'optimisation # 2	A-iv
Annexe B. Deux lemmes utiles	B-i
B.1. Estimés gaussiens et l'inégalité de Paley-Zygmund	B-i

LISTE DES FIGURES

1.1	Simulation de 2^6 marches aléatoires indépendantes dont les accroissements sont de loi normale standard.....	6
1.2	Un arbre binaire à 6 niveaux et les représentants de deux points $u, v \in \mathbb{D}_6$	12
1.3	Simulation d'une marche aléatoire branchante binaire avec 2^6 particules et des accroissements de loi normale standard.	13
1.4	Simulation d'un champ libre gaussien avec $\sigma = 1$ et $N = 2^5$	15
2.1	Simulation d'une marche aléatoire branchante inhomogène binaire avec $M = 2$, $\lambda_1 = 1/2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$ et 2^6 particules.....	22
2.2	Exemple de \mathcal{J}_{σ^2} (ligne fermée) et son concavifié $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.	24
2.3	Comparaison entre la pente effective sur l'intervalle $]\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}[$ et les pentes $\overline{\nu_{\pi_0+1,k}}$ avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.....	25
2.4	Exemple de $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne foncée) et de son concavifié $\hat{\zeta}_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.	28
2.5	Exemple de $\zeta_{\gamma}(\cdot)$ (ligne foncée), $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne fermée) et $\hat{\zeta}_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.	41
2.6	Exemple de $M_{n,x}^*(\cdot)$ (partie foncée), $L_N^*(\cdot)$ (ligne fermée) et de $\hat{L}_N^*(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.....	54
3.1	Représentation des λ -boîtes fixes dans V_N	82
3.2	Représentation des λ -boîtes mobiles autour de deux points u et v dans V_N	83
3.3	Structure branchante du champ libre gaussien entre les temps 0 et $3/4$ où $N = 2^4$. 87	
4.1	La barrière \mathbb{B}_j (en pointillé) près du point $u = v_{V_N}$	100

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, j'aimerais remercier mon directeur de recherche, Louis-Pierre Arguin, pour sa patience, son support et son intuition. Nos rencontres hebdomadaires ont permis de bien me guider dans l'activité de recherche et de régler plusieurs problèmes qui sont intervenus à différentes étapes du processus. La bonne définition du champ libre gaussien inhomogène n'est qu'un exemple parmi d'autres. Louis-Pierre a aussi contribué à ma recherche par son appui financier généreux et j'en suis grandement reconnaissant.

J'aimerais également remercier tous les professeurs du DMS qui ont su me partager leurs connaissances et leur passion pour les mathématiques. Je pense particulièrement à Marlène Frigon qui est une professeure extraordinaire et qui m'a donné le goût de poursuivre mes études au baccalauréat dans les moments plus difficiles.

Merci à Louigi Addario-Berry pour ses remarques judicieuses ainsi qu'à tous les membres du jury pour leurs commentaires élogieux.

Enfin, j'aimerais remercier le CRSNG et le FQRNT pour les bourses de recherche octroyées tout au long de ma maîtrise.

Chapitre 1

Mathematics is the supreme judge; from its decisions there is no appeal. - Tobias Dantzig

INTRODUCTION

1.1. MOTIVATION ET TROIS QUESTIONS D'INTÉRÊT

Ce mémoire étudie certaines propriétés liées aux grandes valeurs de deux nouveaux champs gaussiens corrélés et l'effet des corrélations sur ces propriétés. Nous nous intéressons plus spécifiquement à la convergence du maximum et au nombre de *hauts points* pour une suite de tels champs, où le nombre de variables augmente de façon exponentielle. Les hauts points d'un champ désignent les variables dépassant un certain ordre fixé, allant de zéro à l'ordre du maximum. Les champs gaussiens concernés sont les particules en un temps fixe de la marche aléatoire branchante inhomogène (MABI) et le champ libre gaussien discret inhomogène en dimension deux (CLGI). L'inhomogénéité réfère aux changements de variance des accroissements des processus de branchement sous-jacents dans l'intervalle de temps $[0, 1]$ après normalisation. Nous traiterons le cas où la variance change un nombre fini de fois, entre les échelles $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$. Dans le cas du CLGI, les échelles jouent le rôle du temps. Notons que la MABI généralise le modèle considéré dans [25] (où $M = 2$ et $\lambda_1 = 1/2$) et le CLGI généralise le modèle introduit dans [4] (où $M = 3$).

Les deux champs sont issus de processus stochastiques branchants aux accroissements gaussiens et leur fonction de covariance est définie via ces processus. Ils font partie en particulier de la classe des champs gaussiens *log-corrélés* au sens où il y a une décroissance logarithmique de la covariance entre deux variables dont les indices sont de plus en plus éloignés sous une métrique appropriée. Cette propriété est souhaitable en finance par exemple pour modéliser les *log-rendements* de titres financiers, car il a été démontré empiriquement que l'autocorrélation à long terme de plusieurs log-rendements avait un tel comportement. Le lecteur intéressé peut consulter [15] pour une analyse de l'indice boursier SP500 et ses composantes, ainsi que [16] pour une vue d'ensemble. En pratique, l'ordre de grandeur

du maximum et le nombre de hauts points sont des quantités très pertinentes à estimer dans ce domaine afin d'utiliser efficacement l'*effet de levier* et pouvoir quantifier les risques y étant reliés. D'un point de vue mathématique, nous sommes ultimement intéressés à comprendre comment les corrélations entre les variables influencent la loi du maximum et des hauts points. Le but du mémoire est de revoir les résultats connus lorsque la variance des accroissements est homogène dans le temps et d'étendre nos connaissances à des champs gaussiens plus généraux.

Par définition, un champ de variables aléatoires $\{\xi_v\}_{v \in V}$ n'est qu'une collection de variables aléatoires indexées par un ensemble V non-ordonné et possédant une certaine loi jointe. Dans notre cas, la loi jointe sera toujours gaussienne par souci de simplicité et afin de profiter de certaines propriétés désirables comme la décomposition explicite des espérances conditionnelles et la propriété de Markov pour le champ libre gaussien (CLG). Le mot gaussien sera toujours utilisé pour désigner des variables aléatoires gaussiennes centrées. Puisque tous les ensembles d'indices V dans la suite seront finis, nous pouvons toujours introduire un ordre (sans réelle importance) parmi les indices de sorte qu'on puisse traiter un champ comme un vecteur (colonne) et sa fonction de covariance comme une matrice. À titre de référence, la densité d'un champ gaussien $\xi \doteq \{\xi_v\}_{v \in V}$ est donnée par

$$f_\xi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{|V^o|/2} \sqrt{\det(R)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^{o'} R^{-1} \mathbf{x}^o\right) \delta_{\{\xi_v\}_{v \in V^\partial}}(\mathbf{x}^\partial) \quad (1.1.1)$$

où $V^\partial \subseteq V$ est le sous-ensemble d'indices où les variables du champ sont constantes, $V^o \doteq V \setminus V^\partial$, R dénote la matrice de covariance des variables $\{\xi_v\}_{v \in V^o}$ et $\delta_{\{\xi_v\}_{v \in V^\partial}}(\cdot)$ dénote la distribution de Dirac au point $\{\xi_v\}_{v \in V^\partial}$. Si nous connaissons la valeur du champ sur l'ensemble V^∂ , alors R caractérise complètement la loi jointe.

Considérons maintenant une suite de champs gaussiens, $\{\xi_N\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$, où $\xi_N \doteq \{\xi_v^N\}_{v \in V_N}$ et $\tilde{\mathbb{N}}$ est un sous-ensemble infini de \mathbb{N} . Lorsque cette situation se présentera dans le reste du mémoire, nous travaillerons toujours sur un espace mesurable générique (Ω, \mathcal{F}) muni d'une famille de mesures de probabilité $\{\mathbb{P}_N\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$ respectivement induites par les densités de probabilité $\{f_{\xi_N}\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$ des champs correspondants. Afin de simplifier la notation, nous laissons tomber les indices N . Pour chaque $N \in \tilde{\mathbb{N}}$ fixé, le champ ξ_N sera simplement noté ξ et la mesure induite par ce champ sera notée \mathbb{P} plutôt que \mathbb{P}_N . De la même façon, les opérateurs d'espérance, de variance et de covariance, respectivement notés $\mathbb{E}[\cdot]$, $\mathbb{V}(\cdot)$ et $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$, dépendent de la variable N via la mesure \mathbb{P}_N , mais nous omettons d'écrire les indices.

Nous sommes intéressés par trois questions dans ce mémoire :

- (A) Est-ce que les maxima normalisés convergent en probabilité vers une constante, et si oui, quelle est cette constante? Mathématiquement, nous cherchons une suite $\{a_N\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$ telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{v \in V_N} \xi_v}{a_N} = c_1 \quad \text{en probabilité.}$$

C'est ce que nous appelons la *convergence de premier ordre du maximum*. La quantité $c_1 a_N$ est appelée *premier ordre du maximum* et c_1 est la *constante asymptotique de premier ordre*.

- (B) Est-ce qu'il existe des suites $\{\tilde{a}_N\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$ et $\{b_N\}_{N \in \tilde{\mathbb{N}}}$ telles que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{v \in V_N} \xi_v - \tilde{a}_N}{b_N} = c_2 \quad \text{en probabilité?}$$

C'est ce que nous appelons la *convergence de deuxième ordre du maximum*. La quantité $\tilde{a}_N + c_2 b_N$ est appelée *deuxième ordre du maximum* et c_2 est la *constante asymptotique de deuxième ordre*.

- (C) Comment se comporte le nombre de hauts points

$$|\{v \in V_N \mid \xi_v \geq c a_N\}|, \quad c \in]0, c_1[$$

lorsque N tend vers l'infini? Si cette quantité se comporte comme une puissance du nombre de points dans V_N , disons $|V_N|^\beta$ où $\beta \geq 0$, alors l'exposant β est appelé *l'ordre du nombre de hauts points*.

Dans les trois cas, nous aimerions comprendre comment une modification des corrélations pour la MABI et le CLGI affecte chacun des résultats. Nous écrirons alternativement ordre 1 pour premier ordre et ordre 2 pour deuxième ordre dans la suite, pour toutes les expressions ci-haut.

Dans la prochaine section, nous introduirons trois champs gaussiens homogènes préliminaires et nous répondrons aux trois questions posées plus haut en révisant ce qui est connu dans la littérature. La contribution du mémoire et les nouveaux résultats obtenus seront présentés de façon informelle dans la section qui suivra. Nous y décrirons aussi brièvement comment le reste du mémoire est présenté. L'introduction et le traitement des champs gaussiens inhomogènes se fera aux chapitres suivants.

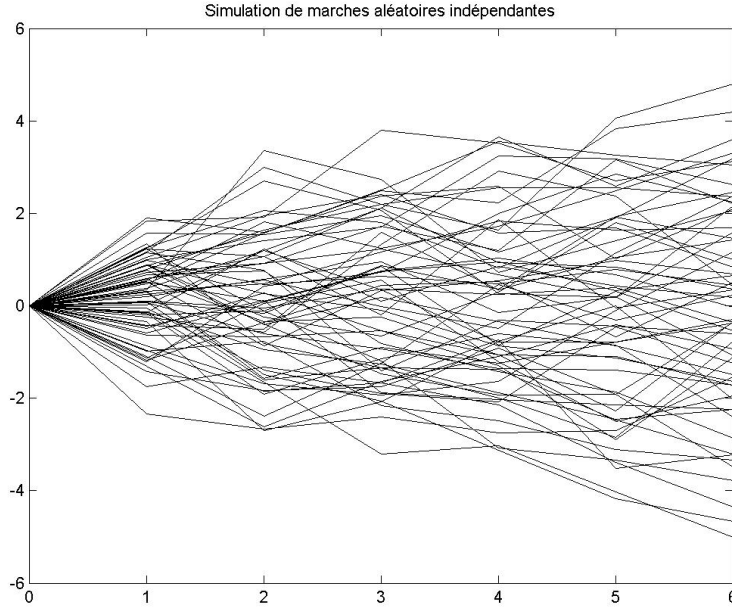


FIGURE 1.1. Simulation de 2^6 marches aléatoires indépendantes dont les accroissements sont de loi normale standard.

1.2. TROIS CHAMPS GAUSSIENS HOMOGENÈS ET RÉSULTATS CONNUS

1.2.1. Marches aléatoires indépendantes (MAI)

Le champ gaussien le plus intuitif et simple à considérer est celui où toutes les variables sont indépendantes. En particulier, nous pouvons voir les variables du champ comme des sommes de variables normales indépendantes de même variance σ^2 où le nombre de variables à sommer dépend de N . Nous restreignons la définition au cas où le champ contient $N^2 = 2^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) variables afin de pouvoir comparer les résultats aux questions posées plus haut avec les autres modèles. La généralisation au cas où il y a b^n ($b \in \mathbb{N}$) particules au temps n est triviale.

Définition 1.2.1 (Marches aléatoires indépendantes (MAI)). *Un processus de marches aléatoires indépendantes de longueur n est une collection de $N^2 = 2^{2n}$ marches aléatoires $\{\{S_v^{ind}(t)\}_{t=1}^n\}_{v=1}^{N^2}$ de la forme*

$$S_v^{ind}(t) = \sum_{k=1}^{n \wedge t} \sigma Z_v(k), \quad 0 \leq t \leq n, \quad v \in \{1, \dots, N^2\}$$

où toutes les variables aléatoires $\{Z_v(k)\}_{k \in \{1, \dots, n\}; v \in \{1, \dots, N^2\}}$ sont *i.i.d* de loi normale standard et $\sigma > 0$. Le champ gaussien associé à ce processus est $\{S_v^{ind}\}_{v=1}^{N^2} \stackrel{\circ}{=} \{S_v^{ind}(n)\}_{v=1}^{N^2}$ et en particulier, $\mathbb{V}(S_v^{ind}) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ et $\mathbb{C}(S_u^{ind}, S_v^{ind}) = 0 \quad \forall u, v \in \{1, \dots, N^2\}$.

L'indépendance entre les marches aléatoires dans la définition 1.2.1 nous permet de facilement répondre aux trois questions de l'introduction et même de montrer la tension du maximum avec son deuxième ordre ainsi que la convergence en loi. Par souci de concision, nous prouverons seulement la convergence d'ordre 1 et 2 et traiterons le comportement des hauts points. La preuve de la tension suit celle de l'ordre 2 et est démontrée dans [23]. La preuve de la convergence en loi est plus compliquée et est montrée dans [36]. Dans le reste du mémoire, les constantes c et C désignent respectivement des petites et grandes constantes et peuvent changer d'une ligne à l'autre. Elles peuvent dépendre du paramètre σ dans le reste du chapitre et des paramètres (σ, λ) dans les chapitres subséquents, mais d'aucune autre variable sauf si indiqué. Sans le mentionner, nous supposons toujours que les énoncés des propositions et les arguments dans les preuves sont vrais pour N assez grand où N peut dépendre de toutes les variables impliquées.

Théorème 1.2.2 (Convergence d'ordre 1 et 2 des MAI). *Soit $S_n^{ind,*} \triangleq \max_{v \in \{1, \dots, N^2\}} S_v^{ind}$ où le champ $\{S_v^{ind}\}_{v=1}^{N^2}$ suit la définition 1.2.1, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_n^{ind,*}}{\log N^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

au premier ordre et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_n^{ind,*} - \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N^2}{\log \log N} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

au deuxième ordre.

La prochaine démonstration est écrite à titre de référence. Même si les arguments devront être adaptés pour l'ordre 1 des champs inhomogènes, la structure reste un guide pour la suite. Nous décomposerons toujours la preuve d'une limite en probabilité en deux morceaux, la borne supérieure et la borne inférieure. Dans le cas présent, la borne supérieure pour l'ordre 1 du maximum consiste à montrer que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{ind,*} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} (1 + \epsilon) \log N^2 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad \epsilon > 0$$

et la borne inférieure pour l'ordre 1 du maximum consiste à montrer que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{ind,*} \leq \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log N^2 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Pour la MABI et le CLGI, la borne inférieure sera toujours plus délicate, car elle fera intervenir les covariances du champ, ce qui ne sera pas le cas de la borne supérieure.

Notons que les estimés gaussiens (voir le lemme B.1.1) et l'inégalité de Paley-Zygmund (voir le lemme B.1.2) seront fréquemment utilisés sans référence dans le reste du mémoire, le lecteur devrait donc prendre le temps de se familiariser avec ces deux lemmes de l'annexe B avant de poursuivre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.2.2. La première partie découle directement de la seconde. Pour obtenir la borne supérieure de l'ordre 2, nous voulons montrer que

$$\mathbb{P} \left(S_n^{ind,*} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

pour tout $\epsilon > 0$. Il suffit d'utiliser la sous-additivité suivi d'un estimé gaussien. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, la sous-additivité nous donne que

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(S_n^{ind,*} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right) \\ & \leq N^2 \max_{v \in \{1, \dots, N^2\}} \mathbb{P} \left(S_v^{ind} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Puisque $\mathbb{V} \left(S_v^{ind} \right) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \{1, \dots, N^2\}$, l'application d'un estimé gaussien borne supérieurement la probabilité en (1.2.1) (uniformément en v) par

$$\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right)} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right)^2}{\frac{\sigma^2}{\log 2} \log N} \right).$$

En bornant le premier ratio par $\frac{C}{\sqrt{\log N}}$, en développant le carré de l'exponentielle pour former trois exponentielles et en bornant la troisième par 1, la dernière expression est bornée par

$$\frac{C}{(\log N)^{1/2}} N^{-2} e^{\frac{1}{2}(1-\epsilon) \log \log N} = \frac{C}{(\log N)^{\epsilon/2}} N^{-2}.$$

En regroupant cette borne avec l'inégalité (1.2.1), nous trouvons

$$\mathbb{P} \left(S_n^{ind,*} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log \log N \right) \leq \frac{C}{(\log N)^{\epsilon/2}}$$

qui converge vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$ pour tout $\epsilon > 0$.

Maintenant pour la borne inférieure de l'ordre 2, définissons les variables aléatoires :

$$\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \stackrel{\circ}{=} \sum_{v=1}^{N^2} \mathbf{1}_{\{S_v^{ind} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1+\epsilon) \log \log N\}}$$

Nous voulons montrer que $\mathbb{P} \left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} = 0 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ pour tout $\epsilon > 0$. Il suffit d'appliquer une méthode de deuxième moment dans ce cas. L'idée en général est d'appliquer l'inégalité de

Paley-Zygmund afin de borner inférieurement la probabilité complémentaire et montrer que le ratio d'espérances qui intervient dans l'inégalité tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$. Ici, c'est plus simple, car nous n'avons pas besoin d'une borne supérieure sur le deuxième moment. En appliquant l'inégalité de Paley-Zygmund (avec $\theta = 0$), nous avons

$$\mathbb{P} \left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} > 0 \right) \geq \frac{\left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right] \right)^2}{\mathbb{E} \left[\left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right)^2 \right]}. \quad (1.2.2)$$

En utilisant l'indépendance entre les variables S_u^{ind} et S_v^{ind} pour $u \neq v$ et le fait qu'elles sont identiquement distribuées, nous pouvons réécrire le deuxième moment :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right)^2 \right] &= \sum_{\substack{u,v=1 \\ u \neq v}}^{N^2} \left(\mathbb{P} \left(S_u^{ind} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 + \epsilon) \log \log N \right) \right)^2 \\ &\quad + \sum_{u=1}^{N^2} \mathbb{P} \left(S_u^{ind} \geq \frac{2\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} (1 + \epsilon) \log \log N \right) \\ &= (1 - N^{-2}) \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right] \right)^2 + \mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right] \end{aligned}$$

car il y a $N^2(N^2 - 1)$ termes dans la première somme. Nous pouvons ainsi réécrire le ratio d'espérance de l'inégalité (1.2.2) comme

$$\frac{1}{1 - N^{-2} + \frac{1}{\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right]}}.$$

Or, par linéarité de l'espérance et l'application d'un estimé gaussien, où $\mathbb{V} \left(S_v^{ind} \right) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \{1, \dots, N^2\}$, nous avons la borne inférieure suivante sur le premier moment :

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right] \geq N^2 \frac{c}{(\log N)^{1/2}} N^{-2} e^{\frac{1}{2}(1+\epsilon) \log \log N} = c(\log N)^{\epsilon/2}.$$

En appliquant cette borne au ratio précédent, nous trouvons

$$\frac{\left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right] \right)^2}{\mathbb{E} \left[\left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^{ind} \right)^2 \right]} \geq \frac{1}{1 - N^{-2} + C(\log N)^{-\epsilon/2}}$$

qui converge vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$ pour tout $\epsilon > 0$. Ceci termine la preuve. \blacksquare

Le prochain théorème concerne les hauts points des MAI. La preuve est semblable à celle du dernier théorème. Le lecteur remarquera que l'utilisation de l'inégalité de Markov est caractéristique de la borne supérieure pour les hauts points et que l'inégalité de Paley-Zygmund quant à elle est caractéristique de la borne inférieure dans les deux cas.

Théorème 1.2.3 (Nombre de hauts points des MAI). *Soit $\gamma \in]0, \sigma[$ et l'ensemble des hauts points au niveau γ , $\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma) \doteq \left\{v \in \{1, \dots, N^2\} \mid S_v^{ind} \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N\right\}$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|)}{\log N^2} = (1 - (\gamma/\sigma)^2) \quad \text{en probabilité.}$$

DÉMONSTRATION. Pour obtenir la borne supérieure, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \geq N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Or, en appliquant l'inégalité de Markov suivi d'un estimé gaussien, où $\mathbb{V}\left(S_v^{ind}\right) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \{1, \dots, N^2\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \geq N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)}\right) &\leq N^{-2(1-(\gamma/\sigma)^2)} \mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|\right] \\ &\leq N^{-2(1-(\gamma/\sigma)^2)} N^2 \frac{C}{(\log N)^{1/2}} N^{-2(\gamma/\sigma)^2} \\ &= \frac{C}{(\log N)^{1/2}} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. Pour obtenir la borne inférieure, nous voulons montrer que

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| < N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)-\epsilon}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

pour tout $\epsilon > 0$. L'idée est la même qu'à la preuve précédente. Remarquons d'abord qu'en utilisant la linéarité de l'espérance et deux estimés gaussiens, où $\mathbb{V}\left(S_v^{ind}\right) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \{1, \dots, N^2\}$, nous avons les bornes suivantes sur le premier moment :

$$\frac{c}{(\log N)^{1/2}} N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)} \leq \mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|\right] \leq \frac{C}{(\log N)^{1/2}} N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)} \quad (1.2.3)$$

pour des constantes $c, C > 0$ appropriées. En particulier, $\frac{N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)-\epsilon}}{\mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|\right]} \in [0, 1]$ pour tout $\epsilon > 0$, alors nous pouvons utiliser l'inégalité de Paley-Zygmund :

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \geq N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)-\epsilon}\right) \geq \left(1 - \frac{N^{2(1-(\gamma/\sigma)^2)-\epsilon}}{\mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|\right]}\right)^2 \frac{\left(\mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|\right]\right)^2}{\mathbb{E}\left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|^2\right]}. \quad (1.2.4)$$

La grande parenthèse tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$ pour tout $\epsilon > 0$ par (1.2.3). Il suffit donc de montrer que le ratio d'espérances tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$ pour conclure.

L'indépendance entre les variables S_u^{ind} et S_v^{ind} pour $u \neq v$ et le fait qu'elles sont identiquement distribuées nous permet de réécrire le deuxième moment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)|^2 \right] &= \sum_{\substack{u,v=1 \\ u \neq v}}^{N^2} \left(\mathbb{P} \left(S_u^{ind} \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \right)^2 + \sum_{u=1}^{N^2} \mathbb{P} \left(S_u^{ind} \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \\
&= (1 - N^{-2}) \left(\mathbb{E} \left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \right] \right)^2 + \mathbb{E} \left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \right]
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

car il y a $N^2(N^2 - 1)$ termes dans la première somme.

En combinant la borne inférieure en (1.2.3) et l'équation (1.2.5), nous pouvons borner inférieurement le ratio d'espérances de l'inégalité (1.2.4) par

$$\frac{1}{1 - N^{-2} + \frac{1}{\mathbb{E} \left[|\mathcal{H}_N^{ind}(\gamma)| \right]}} \geq \frac{1}{1 - N^{-2} + C(\log N)^{1/2} N^{-2(1-(\gamma/\sigma)^2)}}$$

qui tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$, car $\gamma \in]0, \sigma[$ par hypothèse. Ceci termine la preuve. ■

1.2.2. Marche aléatoire branchante (MAB)

Comme son nom l'indique, la marche aléatoire branchante b -aire ($b \in \mathbb{N}$) de longueur n ($n \in \mathbb{N}$) peut être vue comme un système de particules performant des marches aléatoires tout en branchant (se séparant) n fois aux temps entiers dans l'intervalle de temps $[0, n]$. Le processus peut être vu comme un arbre dont les branches se séparent en b sous-branches à chaque temps et chacune d'elle se voit attribuer une variable aléatoire normale de variance σ^2 .

Nous décrivons la structure d'arbre b -aire sous-jacente au processus dans ce qui suit. Au temps $k = 0$, il y a une seule particule o que nous appelons l'origine et $\mathbb{D}_0 \doteq \{o\}$. Au temps $k = 1$, il y a b particules et un unique chemin les lie respectivement à leur descendant o . On note \mathbb{D}_1 l'ensemble des b particules au temps $k = 1$. On définit itérativement le processus de reproduction jusqu'au temps n . Pour tout temps $k \in \{1, \dots, n\}$, on note l'ensemble des particules au temps k par \mathbb{D}_k . Chaque particule possède un unique descendant et un unique chemin relie chacune des particules à son descendant respectif. De plus, chaque particule au temps $k - 1$ se sépare en exactement b particules au temps k . Ainsi, au temps n , on trouve b^n particules dans l'ensemble \mathbb{D}_n .

Pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, on note par v_k ($k \in \{0, \dots, n\}$) l'unique point dans \mathbb{D}_k qui intersecte la géodésique reliant la particule v à la particule o . On nomme cette particule le *représentant de v au temps k* . La figure 1.2 illustre cette description, les points dans les zones grises appartiennent à l'ensemble \mathbb{D}_k correspondant. Notons de plus $u \wedge v$ le représentant commun à u et v au temps le plus élevé (autrement dit le descendant commun le plus proche) et $\rho(u, v) \in \{0, \dots, n\}$ le *temps de branchement* qui est tel que $u \wedge v \in \mathbb{D}_{\rho(u,v)}$, c'est-à-dire le

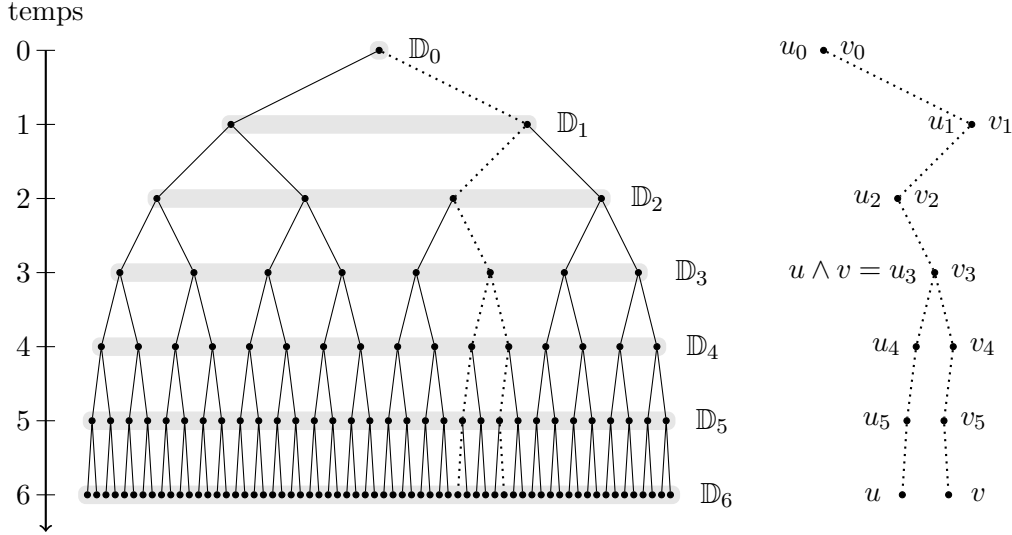


FIGURE 1.2. Un arbre binaire à 6 niveaux et les représentants de deux points $u, v \in \mathbb{D}_6$.

temps où les descendants de u et v se sont séparés ($\rho(u, v) = n$ si $u = v$). À titre d'exemple, $u \wedge v = u_3 = v_3$ et $\rho(u, v) = 3$ dans la figure 1.2.

Nous sommes maintenant prêts à définir le processus MAB. Nous restreignons la définition au cas de la marche aléatoire branchante quaternaire (ou 4-aire), c'est-à-dire où le champ contient $N^2 = 2^{2n}$ variables au temps n , afin de pouvoir comparer les résultats aux questions posées dans l'introduction avec les autres modèles. La généralisation au cas où il y a b^n ($b \in \mathbb{N}$) particules au temps n est triviale.

Définition 1.2.4 (Marche aléatoire branchante (MAB)). *Une marche aléatoire branchante de longueur n est une collection de $N^2 = 2^{2n}$ marches aléatoires $\{\{S_v(t)\}_{t=1}^n\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ de la forme*

$$S_v(t) = \sum_{k=1}^{n \wedge t} \sigma Z_{v_k}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad v \in \mathbb{D}_n$$

où toutes les variables aléatoires $\{Z_{v_k}\}_{k \in \{1, \dots, n\}; v \in \mathbb{D}_n}$ sont i.i.d de loi normale standard et $\sigma > 0$. Le champ gaussien associé à ce processus est $\{S_v\}_{v \in \mathbb{D}_n} \doteq \{S_v(n)\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et en particulier, $\mathbb{V}(S_v) = \frac{\sigma^2}{\log 2} \log N$ et $\mathbb{C}(S_u, S_v) = \sigma^2 \rho(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{D}_n$.

La différence avec les MAI est que deux particules $u, v \in \mathbb{D}_n$ ($u \neq v$) au temps n peuvent avoir le même représentant à un certain temps $k \in \{0, \dots, n-1\}$, c'est-à-dire $u_k = v_k$. En fait, si c'est le cas, alors elles ont automatiquement le même représentant aux temps précédents, c'est-à-dire $u_i = v_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$. C'est ce qui crée les corrélations entre les variables du champ $\{S_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$.

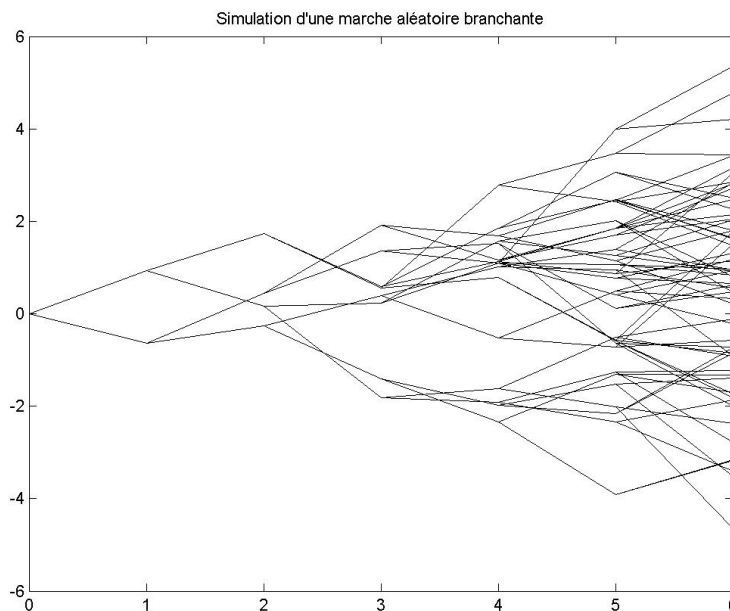


FIGURE 1.3. Simulation d'une marche aléatoire branchante binaire avec 2^6 particules et des accroissements de loi normale standard.

Même si la MAB est un cas particulier de la marche aléatoire branchante inhomogène, que nous allons traiter au chapitre 2, nous citons quand même les théorèmes qui répondent aux questions de l'introduction pour pouvoir comparer les résultats avec le CLG et les MAI.

Théorème 1.2.5 (Convergence d'ordre 1 et 2 pour la MAB). Soit $S_n^* \doteq \max_{v \in \mathbb{D}_n} S_v$ où le champ $\{S_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ suit la définition 1.2.4, alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_n^*}{\log N^2} = \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

au premier ordre et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_n^* - \frac{\sigma}{\sqrt{\log 2}} \log N^2}{\log \log N} = -\frac{3}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

au deuxième ordre.

Comme nous verrons, mis à part un ajustement de variance, les trois modèles ont le même premier ordre du maximum. La constante asymptotique de deuxième ordre pour la MAB et le CLG est différente de celle pour les MAI par un facteur multiplicatif de 3, c'est donc au deuxième ordre que les corrélations commencent à avoir un effet sur l'ordre du maximum.

Le premier article à avoir démontré l'ordre 1 du maximum pour la MAB est [6] en 1977. Cet article faisait suite aux résultats analogues de Hammersley [26], Kingman [29] et Biggins [5] sur des processus de branchement de même nature. En 2012, Kistler [30]

montrait dans ses notes personnelles comment on pouvait modifier la méthode de deuxième moment que nous avons appliquée aux MAI pour qu'elle fonctionne avec la MAB. On peut la décrire comme une méthode de deuxième moment tronquée où on demande aux accroissements des particules atteignant l'ordre du maximum qu'ils soient toujours plus hauts que certains ordres qui, lorsqu'on les additionne, suivent de près un certain chemin «optimal». Cette méthode sera appliquée pour prouver la borne inférieure de l'ordre 1 de la MABI au chapitre 2 en généralisant l'argument pour tenir compte de l'inhomogénéité de la variance dans le temps.

Notons qu'Addario-Berry et Reed [1] ont démontré la convergence d'ordre 2 et la tension avec l'ordre 2 pour la MAB en 2009 dans un contexte beaucoup plus général où les accroissements ne sont pas nécessairement gaussiens. Aïdékon [3] a prouvé la convergence en loi dans le même contexte en 2013.

Le prochain théorème est aussi un cas particulier de l'ordre du nombre de hauts points pour la MABI, que nous allons traiter au chapitre 2, alors nous faisons que le citer.

Théorème 1.2.6 (Nombre de hauts points pour la MAB). *Soit $\gamma \in]0, \sigma[$ et l'ensemble des hauts points au niveau γ , $\mathcal{H}_N^S(\gamma) \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_n \mid S_v \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N \right\}$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{H}_N^S(\gamma)|)}{\log N^2} = (1 - (\gamma/\sigma)^2) \quad \text{en probabilité.}$$

La preuve de ce théorème peut facilement être adaptée de l'article de Daviaud [17] qui prouve un résultat analogue dans le contexte du CLG. La démonstration est en fait plus simple, car nous n'avons pas besoin de nous occuper de la décroissance des variances vers 0 pour les variables dont les indices sont près de la frontière de leur domaine.

1.2.3. Champ libre gaussien (CLG)

Il existe plusieurs contextes dans lesquels on peut définir un champ libre gaussien. Le champ libre gaussien $\{\phi_v\}_{v \in V_N}$ avec lequel nous travaillons dans ce mémoire sera toujours la version discrète en dimension deux, c'est-à-dire où l'ensemble d'indices V_N est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^2 . Plus particulièrement, nous supposons que $V_N \doteq [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ est une boîte carrée discrète de largeur N dans \mathbb{Z}^2 . L'intérieur de V_N est défini comme étant $V_N^o \doteq [1, N-1]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ et la frontière de V_N comme étant $\partial V_N \doteq V_N \setminus V_N^o$. Pour tout couple de points $u, v \in V_N$, nous noterons $u \sim v$ si et seulement si $\|u - v\|_2 = 1$ où $\|\cdot\|_2$ dénote la norme euclidienne.

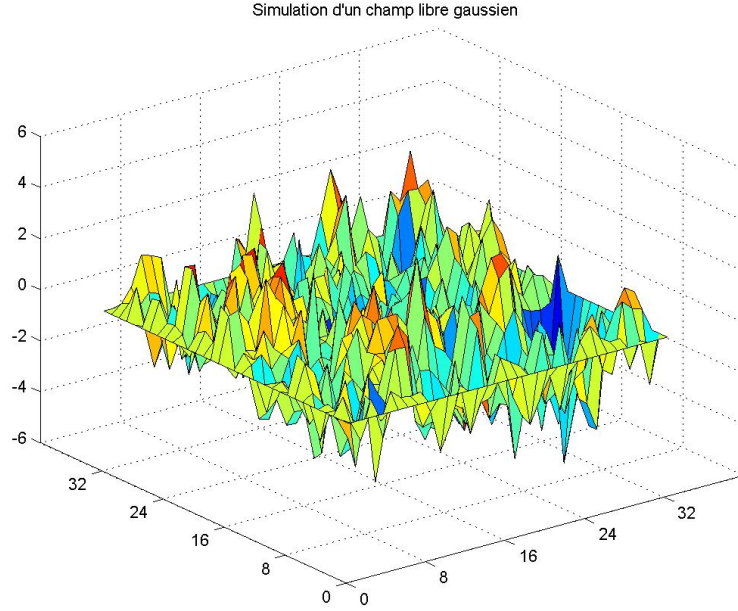


FIGURE 1.4. Simulation d'un champ libre gaussien avec $\sigma = 1$ et $N = 2^5$.

Puisque l'ensemble V_N est fini pour tout N , nous pouvons introduire un ordre sur les points (sans réelle importance) afin de représenter les ensembles de variables par des vecteurs. Pour chaque N fixé, la relation d'ordre \prec que nous choisissons est la suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 (0,0) & \prec & (1,0) & \prec \dots \prec & (N,0) & \prec & \\
 \prec & (0,1) & \prec & (1,1) & \prec \dots \prec & (N,1) & \prec \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 \prec & (0,N) & \prec & (1,N) & \prec \dots \prec & (N,N) & .
 \end{array} \tag{1.2.6}$$

La loi jointe du champ est explicite dans la prochaine définition. Nous verrons au chapitre 3 qu'il existe une manière équivalente, mais plus pratique, de définir le champ en donnant explicitement les covariances entre les variables.

Définition 1.2.7 (Champ libre gaussien (CLG)). *Un champ libre gaussien sur V_N est une collection de N^2 variables aléatoires $\phi \doteq \{\phi_v\}_{v \in V_N}$ telles que $\phi_v \equiv 0$ pour tout $v \in \partial V_N$ (condition de Dirichlet) et dont la densité marginale sur V_N^o prend la forme*

$$f(\mathbf{x}) \doteq Z^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{u,v \in V_N^o \\ u \sim v}} \frac{1}{4} (x_u - x_v)^2 \right)$$

où chaque couple n'est compté qu'une seule fois dans la somme, Z est une constante de normalisation et $\sigma > 0$.

Sous cette définition, les variables du CLG sur la frontière de V_N sont identiquement nulles, c'est ce qu'on appelle la *condition de Dirichlet*. Comme nous verrons plus loin, cette terminologie vient du fait que l'exposant de la densité peut être réécrit comme une application d'une version discrète de l'opérateur de Laplace. Par conséquent, les covariances du champ seront définies par la fonction de Green du laplacien discret (multipliée par σ^2) dont la représentation matricielle n'est nulle autre que l'inverse de la représentation matricielle de l'opérateur de Laplace discret. Ces considérations sont encore plus intuitives dans la version continue du champ libre gaussien (voir [37] ou [21] pour une introduction), car elles lient directement la définition du champ au problème classique de Dirichlet sur le carré en EDP [22].

Même si le CLG n'est qu'un cas particulier du champ libre gaussien inhomogène, que nous traiterons au chapitre 4, nous citons quand même les théorèmes qui répondent aux questions de l'introduction afin de pouvoir comparer les résultats avec ceux des MAI et de la MAB.

Théorème 1.2.8 (Convergence d'ordre 1 et 2 pour le CLG). *Soit $\phi_N^* \doteq \max_{v \in V_N} \phi_v$ où le champ $\{\phi_v\}_{v \in V_N}$ suit la définition 1.2.7 et $g \doteq \frac{2}{\pi}$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\phi_N^*}{\log N^2} = \sqrt{g}\sigma \quad \text{en probabilité}$$

au premier ordre et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\phi_N^* - \sqrt{g}\sigma \log N^2}{\log \log N} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{g}\sigma}{2} \quad \text{en probabilité}$$

au deuxième ordre.

L'ordre 1 du maximum a été montré en premier par Bolthausen, Deuschel et Giacomin [7] en 2001. En 2012, Kistler [30] suggérait dans ses notes personnelles que son adaptation de la méthode de deuxième moment pour prouver la borne inférieure de l'ordre 1 de la MAB fonctionnait aussi pour le CLG en modifiant légèrement son argument pour tenir compte des effets de bord introduits par les covariances. C'est cette méthode qui sera utilisée pour montrer la borne inférieure de l'ordre 1 du CLGI au chapitre 4 en généralisant l'argument pour tenir compte de l'inhomogénéité de la variance dans le temps. L'ordre 2 du maximum a été démontré pour le CLG en même temps que la tension du maximum par rapport à son espérance par Bramson et Zeitouni en 2011 dans [11] qui faisait suite à [8]. Un résultat encore plus fort que la tension a été démontré par Ding [20] en 2013 alors que les bornes sur la probabilité que le maximum dévie de sa moyenne ont été améliorées. Enfin, la convergence en loi du maximum a été démontrée en 2013 par Bramson, Ding et Zeitouni [10].

Un autre résultat intéressant concerne le nombre de points du CLG dépassant certains ordres allant de 0 à l'ordre 1 du maximum, c'est-à-dire le nombre de hauts points.

Théorème 1.2.9 (Nombre de hauts points pour le CLG). *Soit $\gamma \in]0, \sigma[$ et l'ensemble des hauts points au niveau γ , $\mathcal{H}_N^\phi(\gamma) \doteq \{v \in V_N \mid \phi_v \geq 2\sqrt{g}\gamma \log N\}$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{H}_N^\phi(\gamma)|)}{\log N^2} = (1 - (\gamma/\sigma)^2) \quad \text{en probabilité.}$$

Le premier à avoir montré ce résultat pour le CLG est Daviaud [17] en 2006 qui utilisait la même technique que Bolthausen, Deuschel et Giacomin avait introduite en 2001 pour prouver l'ordre 1 du maximum. Nous montrerons un résultat analogue pour le CLGI au chapitre 4 en adaptant plutôt la méthode de Kistler.

Pour tout $\delta \in]0, 1/2]$ et $v \in V_N^\delta \doteq \{v \in V_N \mid \min_{z \in \partial V_N} \|v - z\|_2 \geq \delta N\}$, la variance de ϕ_v est, à une constante près qui dépend de δ , égale à $g\sigma^2 \log N$ (voir le chapitre 3). Ainsi, si nous fixons $\sigma = 1$ dans la définition du CLG et posons $\sigma = \sqrt{g \log 2}$ dans la définition des MAI et de la MAB pour «égaliser» les variances des trois modèles, nous voyons que l'ordre 1 du maximum pour les trois modèles est le même. Ce résultat n'est pas intuitif a priori, car les corrélations pour la MAB et le CLG sont relativement fortes alors que les variables des MAI sont non-corrélées. De la même façon, nous verrons aux chapitres 2 et 4 que la MABI et le CLGI ont le même premier ordre du maximum lorsque nous «égalisons» la variance de leurs accroissements.

1.3. CONTRIBUTION ET PRÉSENTATION DU MÉMOIRE

1.3.1. Contribution

Les résultats obtenus dans ce mémoire seront énoncés de façon informelle dans cette section parce qu'une formulation complète des énoncés demanderait trop d'explications et nous voulons éviter de nous répéter avec le contenu des prochains chapitres.

Les premiers résultats concernent la marche aléatoire branchante inhomogène, qui est simplement une MAB dont la variance des accroissements de longueur 1 change un nombre fini de fois, entre les temps $0 \doteq \lambda_0 n < \lambda_1 n < \dots < \lambda_M n \doteq n$, dans l'intervalle $[0, n]$. Le processus de branchement possède $N^2 = 2^{2n}$ particules au temps n et prend la forme :

$$\bar{S}_v(t) \doteq \sum_{i=1}^M \sum_{k=\lambda_{i-1}n+1}^{(\lambda_i n) \wedge t} \sigma_i Z_{v_k}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad v \in \mathbb{D}_n$$

où les variables aléatoires Z_{v_k} sont i.i.d. de loi normale standard et σ_i^2 est la variance des accroissements de longueur 1 sur l'intervalle $[\lambda_{i-1}n, \lambda_i n]$. Nous supposons sans perdre de généralité (nous expliquerons au chapitre 2 pourquoi c'est possible) que $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. Les trois points suivants font partie de la contribution du mémoire :

(I) Soit $\bar{S}_n^* \doteq \max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v(n)$, alors nous prouverons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n^*}{\log N^2} = \frac{\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

où γ^* sera explicite et dépendra des échelles de temps $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Ce résultat répond à la question (A) de l'introduction pour la MABI.

(II) Soit $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et l'ensemble des hauts points au niveau γ :

$$\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma) \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_n \mid \bar{S}_v(n) \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N \right\}$$

alors nous prouverons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)|)}{\log N^2} = \mathcal{E}_\gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où \mathcal{E}_γ^* sera explicite et dépendra des échelles de temps $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Ce résultat répond à la question (C).

(III) Nous prouverons que la suite

$$\left\{ \bar{S}_n^* - \frac{\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \log N^2 + \omega^* \log \log N \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

est tendue où ω^* sera explicite et dépendra des échelles de temps $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Ce résultat montre en particulier que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_n^* - \frac{\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \log N^2}{\log \log N} = \omega^* \quad \text{en probabilité}$$

et répond à la question (B) de l'introduction pour la MABI.

Notons que la convergence d'ordre 2 du maximum ainsi que la tension du maximum avec son deuxième ordre ont été prouvées par Fang et Zeitouni [25] en 2012 pour le cas particulier $M = 2$ et $\lambda_1 = 1/2$. Les preuves respectives des bornes supérieures pour les points (I), (II) et (III) et de la borne inférieure pour le point (III) sont inspirées de cet article. La démonstration des bornes inférieures des points (I) et (II) adapte plutôt la méthode de Kistler [30].

Le reste des résultats concerne le champ libre gaussien inhomogène. Pour des temps $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$, le champ est défini :

$$\psi_v \doteq \sum_{i=1}^M \sigma_i \left(\mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_i}} \right] - \mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_{i-1}}} \right] \right), \quad v \in V_N$$

où $[v]_{\lambda_i}$ est une boîte carrée discrète de largeur $N^{1-\lambda_i}$, centrée en v et intersectée avec V_N . La σ -algèbre $\mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_i}}$ est engendrée par les variables du champ ϕ sur la frontière de la boîte $[v]_{\lambda_i}$. Cette définition, a priori rébarbative, est l'analogie naturel de la MABI dans le contexte du CLG. D'ailleurs, nous verrons que le *niveau du maximum*, noté γ^* , et l'*ordre du nombre de hauts points au niveau γ* , noté \mathcal{E}_γ^* , seront les mêmes pour les deux champs inhomogènes. Nous supposons sans perdre de généralité (nous expliquerons au chapitre 4 pourquoi c'est possible) que $N = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$.

Une partie de la contribution vient des propriétés du CLGI et des lemmes sur la variance de ses accroissements, démontrés au chapitre 4. Le reste de la contribution découle des deux points suivants :

(IV) Soit $\delta \in]0, 1/2[$ et $\psi_N^* \doteq \max_{v \in V_N^\delta} \psi_v$, alors nous prouverons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\psi_N^*}{\log N^2} = \sqrt{g} \gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où γ^* sera explicite et dépendra des échelles de temps $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Ce résultat répond à la question (A) de l'introduction pour le CLGI.

(V) Soit $\gamma \in]0, \gamma^*[$, $\delta \in]0, 1/2[$ et l'ensemble des hauts points au niveau γ :

$$\mathcal{H}_N^\psi(\gamma) \doteq \left\{ v \in V_N^\delta \mid \psi_v \geq 2\sqrt{g}\gamma \log N \right\}$$

alors nous prouverons que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)|)}{\log N^2} = \mathcal{E}_\gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où \mathcal{E}_γ^* sera explicite et dépendra des échelles de temps $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et des paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Ce résultat répond à la question (C).

La borne inférieure des points (IV) et (V) a été prouvée par Arguin et Zindy [4] en 2013 pour le cas particulier $M = 3$ en s'appuyant sur le théorème 1.3 de Daviaud [17]. Notre approche adapte plutôt la méthode de Kistler. Les démonstrations pour le CLGI seront

analogues à celles de la MABI, nous devons toutefois prendre quelques précautions pour traiter les *effets de bord* qu'amènent les covariances du champ. La tension avec le deuxième ordre du maximum pour le CLGI fait l'objet d'une conjecture au chapitre 5.

1.3.2. Présentation

Voici maintenant comment sera présenté le reste du mémoire. Au chapitre 2, nous définirons de nouveau la marche aléatoire branchante inhomogène, nous présenterons quelques propriétés et notions nécessaires à la formulation complète des théorèmes que nous voulons prouver et puis nous démontrerons les points (I), (II) et (III) ci-haut.

Au chapitre 3, nous donnerons une seconde définition du CLG, nous présenterons quelques propriétés importantes et puis nous prouverons quelques lemmes liés à la variance des accroissements du champ.

Au chapitre 4, nous définirons de nouveau le champ libre gaussien inhomogène, nous présenterons quelques propriétés importantes analogues à celles du CLG et puis nous prouverons certains lemmes liés à la variance des accroissements que nous utiliserons pour ensuite prouver les points (IV) et (V) ci-haut.

La conclusion s'en suivra au chapitre 5. Nous énoncerons sans preuve un résultat sur l'*énergie libre* de la MABI et du CLGI, analogue au théorème 2.1 de [4], et nous conjecturerons un ordre 2 du maximum pour le CLGI tout à fait analogue à celui de la MABI. Nous énumérerons aussi quelques questions ouvertes pouvant faire suite à l'analyse des champs inhomogènes exposée dans les chapitres 2 et 4.

L'annexe A présente la résolution de deux problèmes d'optimisation qui serviront à donner de l'intuition et les chemins «optimaux» pour les preuves de l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points des deux champs inhomogènes. L'annexe B présente quelques inégalités utiles qui reviendront dans les preuves importantes du mémoire.

Chapitre 2

LA MARCHÉ ALÉATOIRE BRANCHANTE INHOMOGÈNE (MABI)

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Nous utiliserons dans cette section la même notation qu'introduite pour définir la MAB. Une marche aléatoire branchante inhomogène est simplement une MAB dont la variance des accroissements de longueur 1 change un nombre fini de fois dans l'intervalle de temps $[0, n]$. Par contraste, la variance des accroissements de longueur 1 pour la MAB est toujours égale à une certaine constante $\sigma^2 > 0$. On peut facilement généraliser la prochaine définition au cas où il y a b^n ($b \in \mathbb{N}$) particules au temps n .

Définition 2.1.1 (Marche aléatoire branchante inhomogène (MABI)). *Une marche aléatoire branchante inhomogène de longueur n à M niveaux est une collection de $N^2 = 2^{2n}$ marches aléatoires $\{\{\bar{S}_v(t)\}_{t=1}^n\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ de la forme*

$$\bar{S}_v(t) \stackrel{\circ}{=} \sum_{i=1}^M \sum_{k=\lambda_{i-1}n+1}^{(\lambda_i n) \wedge t} \sigma_i Z_{v_k}, \quad 0 \leq t \leq n, \quad v \in \mathbb{D}_n$$

où $\boldsymbol{\sigma} \stackrel{\circ}{=} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in (\mathbb{R}_+^*)^M$, $\boldsymbol{\lambda} \stackrel{\circ}{=} (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M) \in]0, 1]^M$ sont des échelles telles que $0 \stackrel{\circ}{=} \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \stackrel{\circ}{=} 1$ et les variables $\{Z_{v_k}\}_{k \in \{1, \dots, n\}; v \in \mathbb{D}_n}$ sont i.i.d. de loi normale standard. Le champ gaussien associé à ce processus est $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n} \stackrel{\circ}{=} \{\bar{S}_v(n)\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et en particulier, $\mathbb{V}(\bar{S}_v) = \frac{\sum_{i=1}^M \sigma_i^2 (\lambda_i - \lambda_{i-1})}{\log 2} \log N$ et $\mathbb{C}(\bar{S}_u, \bar{S}_v) = \sum_{i=1}^M \sum_{k=\lambda_{i-1}n+1}^{(\lambda_i n) \wedge \rho(u,v)} \sigma_i^2 \quad \forall u, v \in \mathbb{D}_n$.

Nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. En effet, pour une définition plus générale de la forme

$$\bar{S}_v^a \stackrel{\circ}{=} \sum_{i=1}^M \sum_{k=a(\lambda_{i-1}n)+1}^{a(\lambda_i n)} \sigma_i Z_{v_k}, \quad v \in \mathbb{D}_n$$

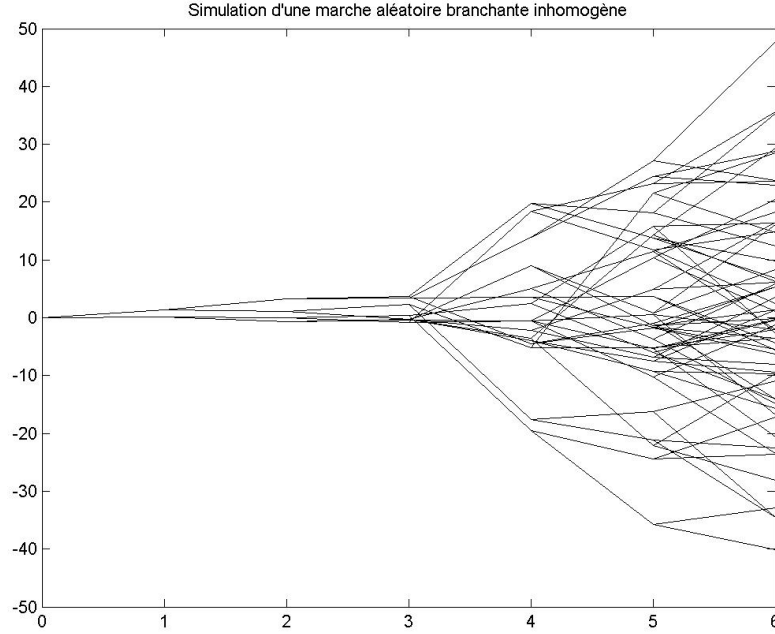


FIGURE 2.1. Simulation d'une marche aléatoire branchante inhomogène binaire avec $M = 2$, $\lambda_1 = 1/2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$ et 2^6 particules.

où $a(\lambda_i n) \in \{[\lambda_i n], \lceil \lambda_i n \rceil\}$, nous aurions toujours que $\mathbb{V}(\bar{S}_v^{a_1} - \bar{S}_v^{a_2}) \leq C$ pour n'importe quel choix de fonctions a_1 et a_2 qui respectent la condition précédente (C ne dépend de rien). Cela vient du fait que $\bar{S}_v^{a_1}$ et $\bar{S}_v^{a_2}$ ne peuvent différer que par un nombre fini de variables gaussiennes de variance finie. Or, une telle constante au niveau de la variance n'affecte pas l'ordre 1 ou 2 de convergence du maximum ou l'ordre du nombre de hauts points à cause de leur nature logarithmique en N . Par exemple, partout où les estimés gaussiens seraient utilisés, la constante n'aurait pas d'impact sur les bornes exponentielles. Nous supposons ainsi que $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ sans en faire de nouveau mention pour éviter de commenter des corrections triviales dans le texte.

Le vecteur de paramètres de variance $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M)$ dans la définition 2.1.1 peut être représenté par une fonction de volatilité $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de la forme

$$\sigma(s) \doteq \sigma_1 1_{\{0\}}(s) + \sum_{i=1}^M \sigma_i 1_{] \lambda_{i-1}, \lambda_i]}(s), \quad s \in [0, 1].$$

Par conséquent, si $\mathcal{J} : (\mathbb{R}_+^*)^{[0,1]} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{[0,1]}$ dénote l'opérateur $\mathcal{J}_\theta(s) \doteq \int_0^s \theta(r) dr$ et ∇_i l'opérateur de différence arrière par rapport à la variable i , alors nous pouvons noter

$$\nu_{k,l} \doteq \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda_l) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda_{k-1}) = \sum_{i=k}^l \sigma_i^2 \nabla \lambda_i \quad \text{et} \quad \nu_l \doteq \nu_{1,l}, \quad 1 \leq k \leq l \leq M. \quad (2.1.1)$$

Lorsque la variable par rapport à laquelle la différence est appliquée est évidente, nous omettons de l'écrire et notons simplement ∇ .

Dans la suite, les temps $\lambda_i n$ seront notés t_i , $0 \leq i \leq M$ et les temps $\lambda^{(j)} n$ seront notés $t^{(j)}$, $0 \leq j \leq m$ afin de simplifier la notation. Il est alors facile de calculer la variance des accroissements $\bar{S}_v(t_l) - \bar{S}_v(t_{k-1})$. Par (2.1.1), nous avons

$$\mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t_l) - \bar{S}_v(t_{k-1}) \right) = \frac{\nu_{k,l}}{\log 2} \log N, \quad v \in \mathbb{D}_n, \quad 1 \leq k \leq l \leq M. \quad (2.1.2)$$

Par exemple, lorsque $M = 2$ et $\lambda_1 = 1/2$ comme dans [25], alors

$$\mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t_1) \right) = \frac{\sigma_1^2/2}{\log 2} \log N \quad \text{et} \quad \mathbb{V} \left(\bar{S}_v - \bar{S}_v(t_1) \right) = \frac{\sigma_2^2/2}{\log 2} \log N.$$

Avant de passer à la preuve de l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points, nous devons introduire quelques notions pour bien comprendre l'intuition derrière la preuve et en particulier l'idée de chemin «optimal» qui sera récurrente. Nous notons par $\hat{\cdot} : (\mathbb{R}_+^*)^{[0,1]} \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^{[0,1]}$ ce que nous appelons l'*opérateur de concavification*. Cet opérateur prend en argument une fonction positive sur $[0, 1]$ et retourne la fonction définie par l'enveloppe convexe du graphe de la fonction prise en argument. En particulier, la fonction retournée est concave, d'où le nom de l'opérateur. La figure 2.2 illustre un exemple de fonction \mathcal{J}_{σ^2} où $\sigma(\cdot)$ prend 7 valeurs différentes (les valeurs précises ne sont pas importantes) et l'application de l'opérateur $\hat{\cdot}$ à \mathcal{J}_{σ^2} . Puisque σ^2 est une fonction par paliers, la fonction $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ est concave et a la forme d'une ligne polygonale. Les endroits dans l'intervalle $[0, 1]$ où la pente de cette ligne polygonale change sont notés par

$$0 \doteq \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(m)} \doteq 1.$$

Nous avons bien sûr que $m \leq M$. Les segments de droite $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \Big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)} [}$, $1 \leq j \leq m$ sont appelés les *composantes convexes* du modèle.

Notons $\pi_j \in \{0, \dots, M\}$ l'indice tel que $\lambda_{\pi_j} = \lambda^{(j)}$ (en particulier $\pi_0 = 0$ et $\pi_m = M$). La pente de la fonction $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ sur le segment $] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)} [$, c'est-à-dire la pente de la composante convexe sur l'intervalle en question, est donnée par

$$\frac{d}{ds} \hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \Big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)} [} = \frac{\nu_{\pi_{j-1}+1, \pi_j}}{\nabla \lambda_{\pi_j}} \doteq \overline{\nu_{\pi_{j-1}+1, \pi_j}}.$$

La barre au dessus de $\nu_{\pi_{j-1}+1, \pi_j}$ veut simplement dire qu'on normalise la composante de la variance d'un accroissement en (2.1.2) par la longueur de l'intervalle sur lequel

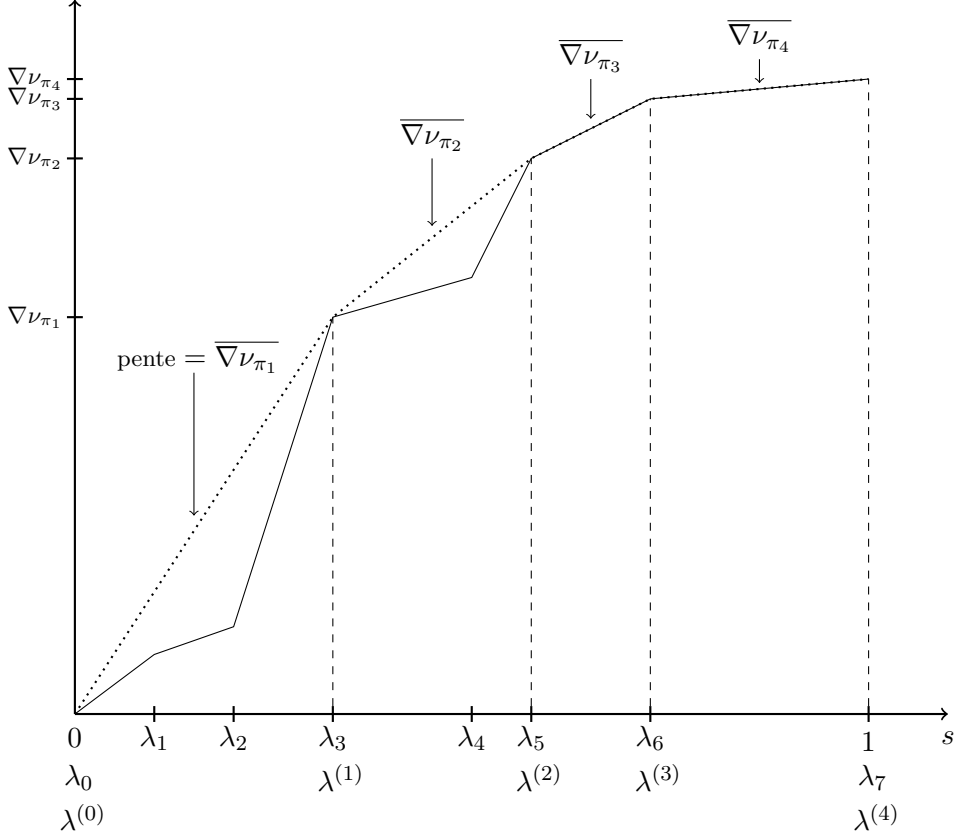


FIGURE 2.2. Exemple de \mathcal{J}_{σ^2} (ligne fermée) et son concavifié $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.

l'accroissement est pris (en terme d'échelles), ici cette longueur est $\nabla\lambda^{(j)} = \lambda^{(j)} - \lambda^{(j-1)}$. La pente donnée par cette dérivée est appelée la *pente effective* du modèle sur l'intervalle $]\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$. De plus, remarquons que

$$\nabla\nu_{\pi_j} = \nu_{\pi_j} - \nu_{\pi_{j-1}} = \nu_{\pi_{j-1}+1, \pi_j}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, alors la pente effective sur l'intervalle $]\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$ peut aussi s'écrire comme $\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}$. Remarquons finalement que la concavité de la fonction $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ fait en sorte que

$$\overline{\nabla\nu_{\pi_j}} > \overline{\nabla\nu_{\pi_{j+1}}} \quad (2.1.3)$$

pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$. La figure 2.2 illustre cette propriété absolument cruciale pour la suite. De même, si $j_i \in \{1, \dots, m\}$ désigne l'indice tel que $\lambda^{(j_i-1)} < \lambda_i \leq \lambda^{(j_i)}$, alors nous avons aussi que

$$\overline{\nu_{\pi_{j_i-1}+1, \pi_{j_i}}} \geq \overline{\nu_{\pi_{j_i-1}+1, k}} \quad (2.1.4)$$

pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$ et pour tout $k \in \{\pi_{j_i-1}+1, \dots, M\}$. La figure 2.3 illustre cette propriété

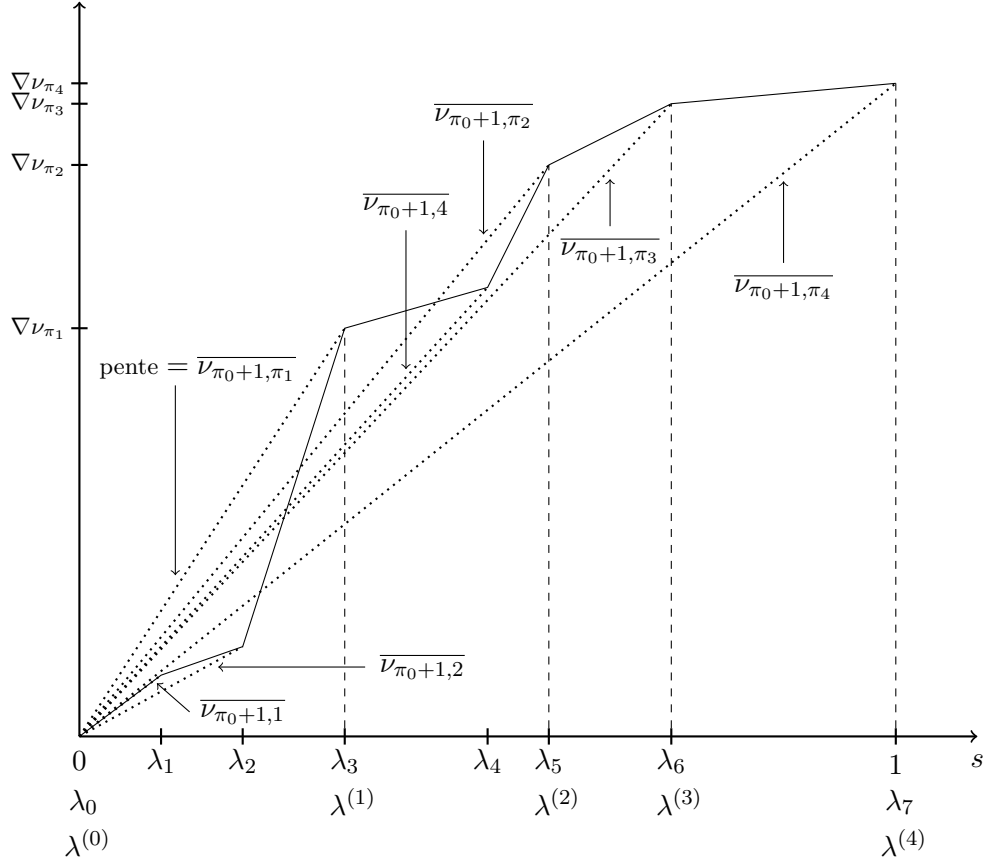


FIGURE 2.3. Comparaison entre la pente effective sur l'intervalle $]λ^{(0)}, λ^{(1)}[$ et les pentes $\overline{\nu_{\pi_0+1, k}}$ avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.

tout aussi cruciale pour le cas $j_i = 1$. En fait, l'inégalité est toujours stricte pour les indices $k \in \{\pi_{j_i} + 1, \dots, M\}$, mais il peut arriver que \mathcal{J}_{σ^2} touche à $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$ sur l'intervalle $]λ^{(j_i-1)}, λ^{(j_i)}[$, alors l'inégalité n'est pas toujours stricte pour les indices $k \in \{\pi_{j_i-1} + 1, \dots, \pi_{j_i} - 1\}$ comme pourrait le laisser croire l'exemple de la figure 2.3.

2.2. PREMIER ORDRE DE CONVERGENCE DU MAXIMUM (NIVEAU γ^*)

À chaque instant du temps dans le processus de branchement, il existe une compétition entre le nombre de particules et la hauteur probable du maximum. Puisque la variance des accroissements de longueur 1 est constante dans les intervalles de temps $[t_{i-1}, t_i]$ ($i \in \{1, \dots, M\}$), on s'attend à ce que le maximum du processus sur ces intervalles augmentent de façon linéaire comme pour les MAI. En fait, nous verrons dans la preuve du prochain théorème que nous avons davantage ; le maximum atteint les mêmes ordres aux temps $t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(m)}$ qu'atteindrait un processus de MAI dont la variance des accroissements de longueur 1 dans les intervalles $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ ($j \in \{1, \dots, m\}$) serait égale à la pente

effective correspondante $\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}$. Ainsi, les pentes effectives jouent une sorte de rôle de variances dominantes des accroissements dans le processus. Ce sont elles et les échelles $\lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(m)}$ qui déterminent l'ordre de grandeur du maximum au temps n .

Théorème 2.2.1 (Convergence d'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres (σ, λ) sous la définition 2.1.1, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v}{\log N^2} = \frac{\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \quad \text{en probabilité}$$

où $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \lambda) \doteq \sum_{j=1}^m \sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}} \nabla\lambda^{(j)}$.

Avant de prouver le théorème, nous donnons un argument heuristique puis nous définissons la notion de chemin optimal dans ce contexte pour aider la compréhension du lecteur. La preuve du théorème suivra directement des lemmes 2.2.2 et 2.2.3, un pour chacune des deux bornes.

Supposons que nous voulons connaître le nombre de particules en moyenne au temps t_1 qui atteignent l'ordre $\frac{2\gamma_1}{\sqrt{\log 2}} \log N$ pour un certain $\gamma_1 > 0$, c'est-à-dire l'espérance du nombre de particules dans l'ensemble $\Lambda_{N,1} \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_{t_1} \mid \nabla \bar{S}_v(t_1) \geq \frac{2\gamma_1}{\sqrt{\log 2}} \log N \right\}$ où $\gamma_0 \doteq 0$. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance suivi d'estimés gaussiens, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(t_1)) = \frac{\sigma_1^2 \nabla \lambda_1}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{t_1}$, pour obtenir les deux bornes suivantes :

$$\mathbb{E} [|\Lambda_{N,1}|] = N^{2\lambda_1} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_v(t_1) \geq \frac{2\gamma_1}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \asymp \frac{1}{(\log N)^{1/2}} N^{2\lambda_1} N^{-2 \frac{(\gamma_1)^2}{\sigma_1^2 \nabla \lambda_1}}$$

car nous avons $|\mathbb{D}_{t_1}| = N^{2\lambda_1}$. Ici, \asymp veut dire que l'espérance est bornée des deux côtés par la quantité de droite multipliée par une constante qui dépend du côté, mais pas de N . Parmi les particules dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, t_1]$ atteint l'ordre $\frac{2\gamma_1}{\sqrt{\log 2}} \log N$ (s'il y en a), on peut se demander combien en moyenne auront un accroissement sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ qui atteint l'ordre $\frac{2\gamma_2}{\sqrt{\log 2}} \log N$ pour un certain $\gamma_2 > 0$ de sorte que les accroissements en question, lorsqu'on les additionne, atteignent au moins l'ordre $\frac{2\gamma_2}{\sqrt{\log 2}} \log N$ sur l'intervalle de temps $[0, t_2]$. Encore une fois, si on note $\Lambda_{N,2} \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_{t_2} \mid \nabla \bar{S}_v(t_i) \geq \frac{2\gamma_i}{\sqrt{\log 2}} \log N \quad \forall i \in \{1, 2\} \right\}$, alors en utilisant la linéarité de l'espérance et l'indépendance des accroissements dans le temps suivi d'estimés gaussiens, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(t_i)) = \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\log 2} \log N$ ($i = 1, 2$) pour tout $v \in \mathbb{D}_{t_2}$, nous obtenons

$$\mathbb{E} [|\Lambda_{N,2}|] = N^{2\lambda_2} \prod_{i=1}^2 \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_v(t_i) \geq \frac{2\gamma_i}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \asymp \frac{1}{(\log N)} N^{2\lambda_2} N^{-2 \sum_{i=1}^2 \frac{(\gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}}$$

car nous avons $|\mathbb{D}_{t_2}| = N^{2\lambda_2}$ candidats potentiels. En itérant ce raisonnement, nous aurons

$$\mathbb{E} [|\Lambda_{N,M}|] \asymp \frac{1}{(\log N)^{M/2}} N^2 N^{-2 \sum_{i=1}^M \frac{(\nabla \gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}}$$

où $\Lambda_{N,M} \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_n \mid \nabla \bar{S}_v(t_i) \geq \frac{2\nabla \gamma_i}{\sqrt{\log 2}} \log N \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \right\}$. En particulier,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\mathbb{E} [|\Lambda_{N,M}|])}{\log N^2} = \sum_{i=1}^M \left(\nabla \lambda_i - \frac{(\nabla \gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) \doteq \mathcal{E}_M(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M).$$

Notons que les points dans l'ensemble $\Lambda_{N,M}$ atteignent au moins l'ordre $\frac{2\gamma_M}{\sqrt{\log 2}} \log N$. Ainsi, $\mathcal{E}_M(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)$ est une borne inférieure sur l'ordre du nombre de points (en moyenne) atteignant l'ordre $\frac{2\gamma_M}{\sqrt{\log 2}} \log N$ à la limite. Pour chercher l'ordre 1 du maximum, il serait donc intuitif de maximiser γ_M sous les contraintes

$$\mathcal{E}_k(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \doteq \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{(\nabla \gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq M \quad (2.2.1)$$

afin qu'il y ait des particules disponibles à toutes les étapes du processus itératif décrit plus haut et d'espérer que cette borne inférieure soit aussi une borne supérieure. Nous verrons dans la preuve du théorème 2.2.1 que la quantité $\gamma^* \doteq \gamma_M^*$ qui maximise γ_M sous les contraintes (2.2.1) est la bonne pour obtenir les deux bornes.

Nous appelons *chemin optimal normalisé pour l'ordre 1* la ligne polygonale qui lie les points $(0, 0), (\lambda_1, \gamma_1^*), (\lambda_2, \gamma_2^*), \dots, (1, \gamma_M^*)$ où le vecteur $(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_M^*)$ maximise la fonction $\gamma_M = \sum_{i=1}^M \nabla \gamma_i$ sous les contraintes (2.2.1). La résolution de ce système est l'objet du problème d'optimisation #1 de l'annexe A. La valeur du chemin optimal normalisé aux échelles $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ est donnée par :

$$\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l)}) \doteq \gamma_{\pi_l}^* = \sum_{j=1}^l \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} = \sum_{j=1}^l \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)}, \quad 0 \leq l \leq m, \quad (2.2.2)$$

$$\zeta_{\gamma^*}(\lambda_{\pi_l+k}) \doteq \gamma_{\pi_l+k}^* = \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l)}) + \sum_{i=\pi_l+1}^{\pi_l+k} \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_{l+1}}}}, \quad 0 \leq l \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq \nabla \pi_{l+1},$$

et $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$ progresse linéairement entre ces échelles. En général, nous pouvons écrire le chemin optimal normalisé sous forme continue de la façon suivante :

$$\zeta_{\gamma^*}(s) = \int_0^s \frac{\sigma^2(r)}{\sqrt{\frac{d}{dr} \hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}(r)}} dr = \sum_{j=1}^m \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}((s \wedge \lambda^{(j)}) \vee \lambda^{(j-1)}) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(j-1)})}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}, \quad s \in [0, 1]. \quad (2.2.3)$$

La figure 2.4 illustre un exemple d'un tel chemin lorsque le processus de MABI possède 7

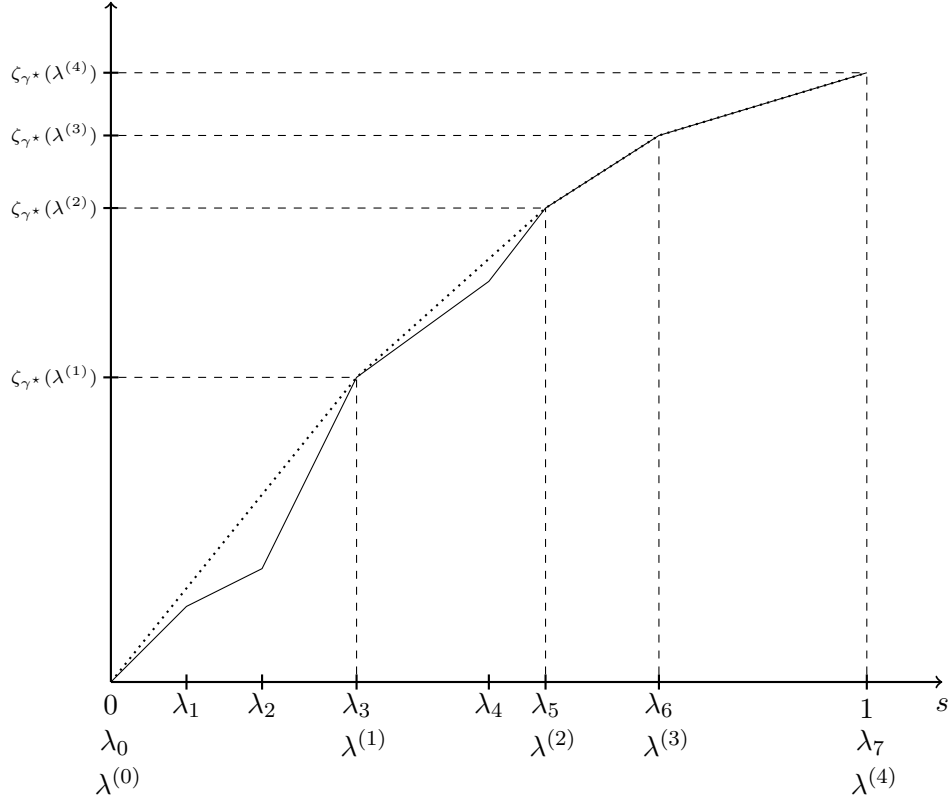


FIGURE 2.4. Exemple de $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne foncée) et de son concavifié $\hat{\zeta}_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.

paramètres de variance et 4 composantes convexes. Nous appelons *chemin optimal pour l'ordre 1 de la MABI* le chemin

$$L_N^*(s) \doteq \frac{2\zeta_{\gamma^*}(s)}{\sqrt{\log 2}} \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Notons en particulier que ce chemin, évalué à la dernière échelle, donne l'ordre du maximum de l'énoncé du théorème 2.2.1, c'est-à-dire que $L_N^*(1) = \frac{2\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \log N$. La description du chemin optimal sera cruciale pour la preuve des deux bornes du théorème. Notamment, les particules de la MABI doivent être près de ce chemin à toutes les échelles du temps avec très grande probabilité pour espérer atteindre l'ordre du maximum.

Même si les expressions semblent compliquées, elles ont une interprétation assez simple. En effet, les valeurs du chemin optimal aux échelles $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \dots < \lambda^{(m)}$ correspondent aux ordres du maximum aux temps correspondants $t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(m)}$ pour un processus de MAI dont les accroissements de longueur 1 ont une variance de $\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}$ sur les intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $1 \leq j \leq m$. Les valeurs du chemin optimal entre ces échelles de temps progressent exactement comme le maximum de MABI sur les intervalles de

temps respectifs $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ avec paramètres de variances $\sigma_{\pi_{j-1}+1}, \dots, \sigma_{\pi_j}$ et dont l'unique composante convexe a une pente effective de $\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}$.

Lemme 2.2.2 (Borne supérieure pour l'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, alors*

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \geq \frac{2\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}}$$

où $C > 0$ dépend seulement des paramètres du modèle.

Comme mentionné plus tôt, les constantes c et C désignent respectivement des petites et grandes constantes pouvant changer d'une ligne à l'autre. Elles peuvent dépendre des paramètres du modèle, $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, mais ne dépendront pas d'autres variables sauf si indiqué.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2.2. Notons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma^*) \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_{t^{(j)}} \mid \bar{S}_v(t^{(j)}) \geq L_N^*(\lambda^{(j)}) \right\}, \quad 1 \leq j \leq m$$

qui représentent les particules dans $\mathbb{D}_{t^{(j)}}$ dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, t^{(j)}]$ dépasse l'ordre du chemin optimal à l'échelle correspondante. L'idée est de décomposer la probabilité qu'au moins un point du processus au temps n dépasse l'ordre optimal en regardant quel était le premier temps $t^{(j)}$, $1 \leq j \leq m$ où l'ensemble $\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma^*)$ était non-vide. Nous avons la borne supérieure suivante sur la probabilité de l'énoncé :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,m}^{\bar{S}}(\gamma^*)| \geq 1 \right) \\ & \leq \sum_{l=1}^m \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^{\bar{S}}(\gamma^*)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^{\bar{S}}(\gamma^*)| = 0, |\mathcal{H}_{N,l}^{\bar{S}}(\gamma^*)| \geq 1 \right) \\ & \leq \sum_{l=1}^m N^{2\lambda^{(l)}} \max_{v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v(t^{(l)}) \geq L_N^*(\lambda^{(l)}), \bar{S}_v(t^{(j)}) < L_N^*(\lambda^{(j)}) \quad \forall j \in \{1, \dots, l-1\} \right) \quad (2.2.4) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la sous-additivité pour les deux inégalités. Par un estimé gaussien, où $\mathbb{V} \left(\nabla \bar{S}_v(t^{(1)}) \right) = \frac{\nabla \nu_{\pi_1}}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{t^{(1)}}$, le maximum en (2.2.4) est borné par

$$\frac{\sqrt{\frac{\nabla \nu_{\pi_1}}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi} L_N^*(\lambda^{(1)})} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(L_N^*(\lambda^{(1)}))^2}{\frac{\nabla \nu_{\pi_1}}{\log 2} \log N} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\lambda^{(1)}}$$

lorsque $l = 1$, car $L_N^*(\lambda^{(1)}) = \frac{2\sqrt{\lambda^{(1)}} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}}{\sqrt{\log 2}} \log N$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que les probabilités en (2.2.4) sont bornées (uniformément en v) par $\frac{CN^{-2\lambda^{(l)}}}{\sqrt{\log N}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$. Nous traitons les cas $l \geq 2$ dans la suite. Pour simplifier les expressions,

notons $(X_v^1, \dots, X_v^l) \stackrel{\circ}{=} (\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l)}))$, $2 \leq l \leq m$. En conditionnant sur la valeur que prend le vecteur $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$, $v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}$, la probabilité en (2.2.4) donne (pour tout l fixé) :

$$\int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^l \geq L_N^*(\lambda^{(l)}) \mid X_v^{l-1} = x_{l-1}, \dots, X_v^1 = x_1 \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1$$

où f_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$. En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps, nous pouvons réécrire la dernière intégrale comme

$$\int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(\nabla X_v^l \geq L_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1} \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1. \quad (2.2.5)$$

Par un estimé gaussien, où $\mathbb{V} \left(\nabla X_v^l \right) = \frac{\nabla \nu_{\pi_l}}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}$, la probabilité dans l'intégrale est bornée (uniformément en v) par

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\frac{\nabla \nu_{\pi_l}}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi} (L_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1})} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(L_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1})^2}{\frac{\nabla \nu_{\pi_l}}{\log 2} \log N} \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\nabla L_N^*(\lambda^{(l)}) + L_N^*(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1})^2}{\frac{\nabla \nu_{\pi_l}}{\log 2} \log N} \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\nabla \lambda^{(l)}} \exp \left(-2 \frac{L_N^*(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} \right). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

La première inégalité vient du fait que $L_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1} \geq \nabla L_N^*(\lambda^{(l)}) = \frac{2\sqrt{\nabla \lambda^{(l)}} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}{\sqrt{\log 2}} \log N$ par les bornes d'intégration de la variable x_{l-1} en (2.2.5). La seconde inégalité vient du fait que nous bornons par 1 la troisième exponentielle après décomposition du carré sur la deuxième ligne et le terme $N^{-2\nabla \lambda^{(l)}}$ vient de la première exponentielle dans la décomposition et du fait que $(\nabla L_N^*(\lambda^{(l)}))^2 = 4\nabla \lambda^{(l)} \frac{\nabla \nu_{\pi_l}}{\log 2} (\log N)^2$. En regroupant l'estimé gaussien (2.2.6) avec l'intégrale en (2.2.5) et l'inégalité (2.2.4), il suffit de montrer que

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}} \int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^*(\lambda^{(l-1)})} e^{\frac{x_{l-1} - L_N^*(\lambda^{(l-1)})}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}} f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1 \quad (2.2.7)$$

est plus petit qu'une constante C pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$ afin de conclure.

Or, en effectuant le changement de variable $Y_{v,j} \stackrel{\circ}{=} \nabla X_v^j - \nabla L_N^*(\lambda^{(j)})$, $1 \leq j \leq l-1$, nous pouvons réécrire (2.2.7) comme

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-y_1} \dots \int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} e^{\frac{\sum_{j=1}^{l-1} y_j}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}} g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) dy_{l-1} \dots dy_1 \quad (2.2.8)$$

où g_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1})$. Par l'indépendance des variables

aléatoires $Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1}$ (qui vient du fait que les accroissements ∇X_v^j sont indépendants en j pour chaque v fixé), la densité g_v se sépare en $l-1$ densités normales, c'est-à-dire

$$g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) = g_{Y_{v,1}}(y_1) \cdot \dots \cdot g_{Y_{v,l-1}}(y_{l-1})$$

où $\mathbb{V}(Y_{v,j}) = \mathbb{V}(\nabla X_v^j) = \frac{\nabla \nu_{\pi_j}}{\log 2} \log N$, $1 \leq j \leq l-1$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{t^{(l)}}$. Ainsi, nous pouvons borner chaque densité $g_{Y_{v,j}}$ (uniformément en v) :

$$\begin{aligned} g_{Y_{v,j}}(y_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\nabla \nu_{\pi_j}}{\log 2} \log N}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j + \nabla L_N^*(\lambda^{(j)}))^2}{\frac{\nabla \nu_{\pi_j}}{\log 2} \log N} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\nabla \lambda^{(j)}} \exp \left(-2 \frac{y_j}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}} \right) \end{aligned}$$

où nous avons borné la première exponentielle par 1 dans le développement du carré de la première ligne, le reste étant comme pour l'estimé gaussien en (2.2.6). En regroupant toutes les bornes sur les densités, (2.2.8) est borné par

$$\frac{C}{(\log N)^{\frac{l-1}{2}}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-y_1} \dots \int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} \prod_{j=1}^{l-1} e^{2y_j \left(\frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} - \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}} \right)} dy_{l-1} \dots dy_1. \quad (2.2.9)$$

Le point crucial ici est de remarquer que les grandes parenthèses dans les exponentielles sont toujours strictement positives, car $\overline{\nabla \nu_{\pi_1}} > \overline{\nabla \nu_{\pi_2}} > \dots > \overline{\nabla \nu_{\pi_l}}$ par la propriété (2.1.3) du modèle. Dénotons ces grandes parenthèses par $\beta_{j,l}$, $1 \leq j \leq l-1$. La première intégrale (à partir de l'intérieur) donne donc

$$\int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} e^{2\beta_{l-1,l} y_{l-1}} dy_{l-1} = \frac{1}{2\beta_{l-1,l}} e^{-2\beta_{l-1,l} \sum_{j=1}^{l-2} y_j}.$$

Par suite,

$$\frac{1}{2\beta_{l-1,l}} e^{-2\beta_{l-1,l} \sum_{j=1}^{l-3} y_j} \int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-3} y_j} e^{2(\beta_{l-2,l} - \beta_{l-1,l}) y_{l-2}} dy_{l-2} = \frac{1}{2\beta_{l-1,l}} \frac{1}{2\beta_{l-2,l-1}} e^{-2\beta_{l-2,l} \sum_{j=1}^{l-3} y_j},$$

⋮

$$\left(\prod_{j=3}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right) e^{-2\beta_{3,l} y_1} \int_{-\infty}^{-y_1} e^{2(\beta_{2,l} - \beta_{3,l}) y_2} dy_2 = \left(\prod_{j=2}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right) e^{-2\beta_{2,l} y_1},$$

$$\left(\prod_{j=2}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right) \int_{-\infty}^0 e^{2(\beta_{1,l} - \beta_{2,l}) y_1} dy_1 = \left(\prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right).$$

Ainsi, toutes les intégrales ensemble en (2.2.9) donnent

$$\left(\prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right) \leq \max_{1 \leq l \leq m} \left(\prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{2\beta_{j,j+1}} \right) < \infty$$

qui est uniformément borné en l , car $m < \infty$ et tous les $\beta_{j,j+1}$ sont strictement positifs par définition. En somme, (2.2.9), et par suite (2.2.7), est borné par $C(\log N)^{\frac{1-l}{2}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$, ce qui est plus fort que ce que nous voulions. La borne dans l'énoncé vient du cas $l = 1$. Ceci termine la preuve. \blacksquare

Il est facile de voir qu'en introduisant un facteur ϵ dans la probabilité de l'énoncé de la borne supérieure, nous aurions eu une décroissance exponentielle de la probabilité $\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \geq \frac{2\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} (1 + \epsilon) \log N \right)$, car nous aurions eu des facteurs ϵ supplémentaires dans les estimés gaussiens de la preuve. La démonstration de la borne inférieure, quant à elle, ne peut pas fonctionner sans ce facteur. Elle est donc plus délicate en ce sens et aussi parce qu'elle fait intervenir les covariances du champ.

Lemme 2.2.3 (Borne inférieure pour l'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe une constante $c(\epsilon) > 0$ (qui dépend des paramètres du modèle) telle que*

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \leq \frac{2\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} (1 - \epsilon) \log N \right) \leq N^{-c(\epsilon)}.$$

Introduisons d'abord quelques notations. Posons $\alpha_k \doteq \frac{k}{K}$, $0 \leq k \leq K$ des échelles de l'intervalle de $[0, 1]$ où $K \in \mathbb{N}$ devra être choisi assez grand dans la preuve. Notons de plus $r_K \doteq \alpha_1 = 1/K$ et $\theta_k \doteq \alpha_k n$, $0 \leq k \leq K$ pour simplifier l'expression de certains temps. Notons aussi $\mu_j \in \{1, \dots, m\}$ l'indice qui est tel que $\lambda^{(\mu_j-1)} < \alpha_j \leq \lambda^{(\mu_j)}$. Nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $\theta_k \in \mathbb{N}_0$ pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$ comme nous pouvons supposer que $t_i \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ (voir la discussion suivant la définition 2.1.1 de la MABI pour un rappel). Nous choisissons K assez grand dans la preuve pour au moins avoir que la partition des α_k est plus fine que celle des λ_i , c'est-à-dire que $2r_K \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. En particulier, $\alpha_1 < \lambda_1 \leq \lambda^{(1)}$ et $\mu_1 = 1$ sous cette hypothèse.

L'idée de la preuve est d'appliquer la méthode de deuxième moment tronquée introduite à la section 2.1 de [30]. Notez que des variations de cette méthode ont été utilisées par le passé dans [19], [33] et [1] notamment. Nous voulons appliquer l'inégalité de Paley-Zygmund

pour borner inférieurement la probabilité qu'il y ait au moins un point dans \mathbb{D}_n dont les accroissements de longueur $r_K n$ dans l'intervalle de temps $[\theta_1, n]$ soient tous plus grands que certains ordres qui, lorsqu'on les additionne, suivent le chemin sous-optimal suivant :

$$L_{N,\epsilon}^*(s) \doteq (1 - \epsilon)L_N^*(s) = \frac{2\zeta_{\gamma^*}(s)}{\sqrt{\log 2}}(1 - \epsilon) \log N, \quad s \in [0, 1], \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Nous voulons ensuite borner inférieurement le premier moment de la variable aléatoire qui compte le nombre de tels points et supérieurement le deuxième moment de la même quantité pour montrer que le ratio d'espérance qui intervient dans l'inégalité de Paley-Zygmund tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$. Il restera ensuite simplement à borner une probabilité résiduelle en rapport avec l'accroissement des points sur l'intervalle de temps $[0, \theta_1]$.

Les variables α_k servent à diviser très finement l'intervalle de temps $[0, n]$ afin de pouvoir choisir la longueur de l'intervalle $[0, \theta_1]$ assez petite pour que la probabilité résiduelle tende vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$ et aussi afin d'avoir un contrôle similaire pour d'autres technicalités de la preuve. Nous choisissons de restreindre ϵ à l'intervalle $]0, 1[$ pour une technicalité à la fin de la démonstration et aussi afin d'avoir que $L_{N,\epsilon}^*(s_2) - L_{N,\epsilon}^*(s_1) > 0$ pour tout $0 \leq s_1 < s_2 \leq 1$ et ainsi pouvoir appliquer les estimés gaussiens.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2.3. Définissons d'abord les variables aléatoires suivantes :

$$\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \doteq \sum_{v \in \mathbb{D}_n} \mathbf{1}_{\{\nabla \bar{S}_v(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{2, \dots, K\}\}}$$

qui comptent le nombre de points dans \mathbb{D}_n dont les accroissements, lorsqu'on les additionne, dépassent les ordres sous-optimaux dans l'intervalle de temps $[\theta_1, n]$. En considérant $\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K)$, nous ne perdons pas grande précision en laissant tomber le premier accroissement $\nabla \bar{S}_v(\theta_1)$, car nous avons un contrôle sur la longueur de l'intervalle $[0, \theta_1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \leq L_{N,2\epsilon}^*(1) \right) &\leq \mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \sum_{j=2}^K \nabla \bar{S}_v(\theta_j) < L_{N,\epsilon}^*(1) - L_{N,\epsilon}^*(\alpha_1) \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \leq L_{N,2\epsilon}^*(1), \max_{v \in \mathbb{D}_n} \sum_{j=2}^K \nabla \bar{S}_v(\theta_j) \geq L_{N,\epsilon}^*(1) - L_{N,\epsilon}^*(\alpha_1) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) = 0 \right) + \mathbb{P} \left(\min_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \leq -(L_{N,\epsilon}^*(1) - L_{N,\epsilon}^*(\alpha_1) - L_{N,2\epsilon}^*(1)) \right). \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Pour obtenir la dernière probabilité en (2.2.10), nous avons utilisé le fait que

$$L_{N,\epsilon}^*(1) - L_{N,\epsilon}^*(\alpha_1) - L_{N,2\epsilon}^*(1) = \frac{2 \left(\gamma^* \epsilon - \frac{1}{K} \frac{\sigma^2(\alpha_1)}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}} (1 - \epsilon) \right)}{\sqrt{\log 2}} \log N \geq \frac{\gamma^* \epsilon}{\sqrt{\log 2}} \log N > 0$$

pour $K = K(\epsilon)$ assez grand. En utilisant la symétrie des variables gaussiennes, la sous-additivité et un estimé gaussien, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(\theta_1)) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{\theta_1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\min_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \leq -\frac{\gamma^* \epsilon}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) &= \mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \geq \frac{\gamma^* \epsilon}{\sqrt{\log 2}} \log N \right) \\ &\leq N^{2r_K} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\gamma^* \epsilon}{\sqrt{\log 2}} \log N \right)^2}{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\log 2} \log N} \right) \quad \text{car } |\mathbb{D}_{\theta_1}| = N^{2r_K} \\ &\leq N^{\frac{2}{K} - \frac{K}{2} \frac{(\gamma^* \epsilon)^2}{\sigma^2(\alpha_1)}} \leq N^{-c_1(\epsilon)} \end{aligned}$$

pour $K = K(\epsilon)$ assez grand où $c_1(\epsilon) > 0$ est une constante appropriée. Par conséquent, la dernière probabilité en (2.2.10) est bornée par $N^{-c_1(\epsilon)}$.

Pour conclure, nous voulons montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) = 0) \leq N^{-c_2(\epsilon)}$ pour une constante $c_2(\epsilon) > 0$ que nous déterminerons plus loin. Par l'inégalité de Paley-Zygmund (avec $\theta = 0$), la probabilité complémentaire est bornée inférieurement par un ratio d'espérances :

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) > 0) \geq \frac{\left(\mathbb{E}[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K)] \right)^2}{\mathbb{E}[(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K))^2]}. \quad (2.2.11)$$

L'idée est de borner inférieurement le premier moment et supérieurement le deuxième moment afin de montrer que le ratio tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Par linéarité de l'espérance, l'indépendance des accroissements dans le temps et des estimés gaussiens, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(\theta_j)) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N$, $1 \leq j \leq K$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, nous pouvons borner le premier moment de $\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K)] &\geq N^2 \prod_{j=2}^K \frac{c \sqrt{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{2r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla_{\mu_j} \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla_{\mu_j} \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N}} \\ &\geq \frac{c(K, \epsilon)}{(\log N)^{\frac{1}{2}(K-1)}} \underbrace{N^{2(1-(1-\epsilon)^2)} N^{2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\epsilon)^2}}_{\doteq N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Avant de borner le deuxième moment de $\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K)$, introduisons quelques notations pour raccourcir les prochaines expressions :

$$\begin{aligned} p_{u,j}^\epsilon &\doteq \mathbb{P}(\nabla \bar{S}_u(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j)), \quad u \in \mathbb{D}_n, \quad 1 \leq j \leq K, \\ p_{u,v,j}^\epsilon &\doteq \mathbb{P}(\nabla \bar{S}_u(\theta_j), \nabla \bar{S}_v(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j)), \quad u, v \in \mathbb{D}_n, \quad 1 \leq j \leq K. \end{aligned}$$

Maintenant, pour le deuxième moment, nous avons

$$\mathbb{E} \left[(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K))^2 \right] = \sum_{u,v \in \mathbb{D}_n} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_j), \nabla \bar{S}_v(\theta_j) \geq L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{2, \dots, K\} \right). \quad (2.2.13)$$

Nous pouvons décomposer cette somme en fonction du temps de branchement $\rho(u, v)$ de chaque couple de points $u, v \in \mathbb{D}_n$. En particulier, les temps de branchement déterminent les corrélations en u et v des accroissements $\nabla \bar{S}_u(\theta_j)$ et $\nabla \bar{S}_v(\theta_j)$, et nous permettent de réécrire chacune des probabilités de la somme de manière appropriée. Soit $r \in \{0, \dots, K-2\}$ et $u, v \in \mathbb{D}_n$ tels que $\theta_r \leq \rho(u, v) < \theta_{r+1}$, alors les accroissements dans l'intervalle $[0, \theta_{r+1}]$ ne sont pas tous indépendants (pour chaque j fixé) et ils le sont ensuite dans l'intervalle $[\theta_{r+1}, n]$. En effet, si $\beta_j \in \{1, \dots, M\}$ dénote l'indice tel que $\lambda_{\beta_j-1} < \alpha_j \leq \lambda_{\beta_j}$, alors

$$\mathbb{C} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_j), \nabla \bar{S}_v(\theta_j) \right) = \begin{cases} \sigma_{\beta_j}^2 \nabla \theta_j & \text{si } 1 \leq j \leq r \\ \sigma_{\beta_j}^2 (\rho(u, v) - \theta_r) & \text{si } j = r+1 \\ 0 & \text{si } r+2 \leq j \leq K \end{cases}$$

pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$. En particulier, $\nabla \bar{S}_u(\theta_{r+1})$ et $\nabla \bar{S}_v(\theta_{r+1})$ ne sont pas indépendants sauf lorsque $\rho(u, v) = \theta_r$. Ces propriétés de dépendance nous permettent de réécrire la somme de l'équation (2.2.13) comme

$$\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u,v) < \theta_1}} \prod_{j=2}^K p_{u,j}^\epsilon p_{v,j}^\epsilon + \sum_{r=1}^{K-1} \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_r \leq \rho(u,v) < \theta_{r+1}}} \prod_{j=2}^{r+1} p_{u,v,j}^\epsilon \prod_{j=r+2}^K p_{u,j}^\epsilon p_{v,j}^\epsilon + \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \rho(u,v) = \theta_K}} \prod_{j=2}^K p_{u,v,j}^\epsilon$$

où un produit sans indice est toujours égal à 1. Notons que $u = v$ lorsque $\rho(u, v) = \theta_K$, alors $p_{u,v,j}^\epsilon = p_{u,j}^\epsilon$ pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$ dans ce cas. De plus, l'inégalité $p_{u,v,j}^\epsilon \leq p_{u,j}^\epsilon$ pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$ est triviale, alors la dernière expression est bornée par

$$\underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u,v) < \theta_1}} \prod_{j=2}^K p_{u,j}^\epsilon p_{v,j}^\epsilon}_{(1)} + \underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_r \leq \rho(u,v) < \theta_{r+1}}} \prod_{j=2}^{r+1} p_{u,j}^\epsilon \prod_{j=r+2}^K p_{u,j}^\epsilon p_{v,j}^\epsilon}_{(2)_r} + \underbrace{\sum_{u \in \mathbb{D}_n} \prod_{j=2}^K p_{u,j}^\epsilon}_{(3)}. \quad (2.2.14)$$

En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps et en ajoutant les termes manquants dans la sommation de (1), nous avons la borne suivante :

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u,v) < \theta_1}} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j), 2 \leq j \leq K \right) \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_v(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j), 2 \leq j \leq K \right) \\ &\leq \left(\sum_{u \in \mathbb{D}_n} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_j) \geq \nabla L_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{2, \dots, K\} \right) \right)^2 = \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons borner supérieurement (3) par des estimés gaussiens comme nous avons fait pour la borne inférieure du premier moment en (2.2.12) et nous trouvons

$$(3) \leq N^{2(1-(1-\epsilon)^2)} N^{2\frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\epsilon)^2} \doteq N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}. \quad (2.2.15)$$

Maintenant, pour tout $r \in \{1, \dots, K-1\}$, notons que la sommation en $(2)_r$ possède au plus

$$N^2(N^{2r_K})^{(K-r)} \quad (2.2.16)$$

couples de points. En effet, soit $u, v \in \mathbb{D}_n$ tels que $\theta_r \leq \rho(u, v) < \theta_{r+1}$, alors il y a N^2 possibilités pour u et au plus $(N^{2r_K})^{(K-r)}$ possibilités pour v , car il resterait $(N^{2r_K})^{(K-r)}$ choix pour v si nous demandions seulement que $\rho(u, v) \geq \theta_r$. En utilisant des estimés gaussiens, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(\theta_j)) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N$, $1 \leq j \leq K$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, nous avons la borne suivante (uniformément en v) :

$$(2)_r \leq N^2(N^{2r_K})^{(K-r)} \prod_{j=2}^{r+1} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N}} \prod_{j=r+2}^K e^{-\frac{\left(\frac{2r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\log 2} \log N}}$$

$$\leq \underbrace{N^{2(1-(1-\epsilon)^2)} N^{2\frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\epsilon)^2}}_{\doteq N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}} \underbrace{N^{2r_K(K-r)} N^{-2 \left(\sum_{j=r+2}^K \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j} \right) (1-\epsilon)^2}}_{\doteq N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(r)}}. \quad (2.2.17)$$

Posons $\kappa_{N,K,\epsilon}^* \doteq \max_{1 \leq r \leq K-1} \kappa_{N,K,\epsilon}(r)$ et remarquons que la borne sur $(2)_{K-1}$ en (2.2.17) est plus grande que la borne sur (3) en (2.2.15) par un facteur de $\kappa_{N,K,\epsilon}(K-1) = N^{2r_K}$. Ceci nous mène à borner l'équation (2.2.14) et, par suite, le deuxième moment :

$$\mathbb{E} \left[(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K))^2 \right] \leq \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2 + K \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}^*}. \quad (2.2.18)$$

Maintenant que nous avons les bornes voulues sur les deux premiers moments (voir la borne (2.2.12) pour le premier moment et la borne (2.2.18) pour le deuxième moment), nous pouvons borner inférieurement le ratio d'espérances de l'inégalité (2.2.11) :

$$\frac{\left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2}{\mathbb{E} \left[(\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K))^2 \right]} \geq \frac{1}{1 + \frac{K \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}^*}}{\left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2}} \geq 1 - \frac{K \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\kappa_{N,K,\epsilon}^*}}{\left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2}$$

$$\geq 1 - C(K, \epsilon) \cdot (\log N)^{K-1} \cdot \frac{N^{\kappa_{N,K,\epsilon}^*}}{N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}} \quad (2.2.19)$$

où nous avons utilisé l'estimé élémentaire $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$, $x \geq 0$ pour obtenir la deuxième inégalité. À la vue de (2.2.19), il suffit de montrer que $\kappa_{N,K,\epsilon}(K) \geq \kappa_{N,K,\epsilon}^* + 2c_2(\epsilon)$ pour avoir que le ratio d'espérances en (2.2.11) est borné inférieurement par $1 - N^{-c_2(\epsilon)}$. C'est-à-dire, nous voulons que

$$(1 - (1 - \epsilon)^2) + \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \epsilon)^2 \geq r_K(K - r) - \left(\sum_{j=r+2}^K \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 + 2c_2(\epsilon)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K - 1\}$. Après quelques simplifications, nous voulons montrer que

$$\alpha_r \geq \left(\sum_{j=2}^{r+1} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 + 2c_2(\epsilon) \quad (2.2.20)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K - 1\}$. Le facteur $(1 - \epsilon)^2$ nous permet d'obtenir l'inégalité (2.2.20) pour $K = K(\epsilon)$ assez grand. En effet,

$$\begin{aligned} & \alpha_r - \left(\sum_{j=2}^{r+1} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 \\ &= \alpha_r - \left(\sum_{j=1}^r \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 + \left(\frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} \right) (1 - \epsilon)^2 - \left(\frac{r_K \sigma^2(\alpha_{r+1})}{\nabla \mu_{r+1} \nu_{\pi_{\mu_{r+1}}}} \right) (1 - \epsilon)^2 \\ &\geq \underbrace{\left[\alpha_r - \left(\sum_{j=1}^r \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) \right]}_{\geq 0} (1 - \epsilon)^2 + \alpha_r (1 - (1 - \epsilon)^2) - \frac{1}{K} \left| \frac{\sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} - \frac{\sigma^2(\alpha_{r+1})}{\nabla \mu_{r+1} \nu_{\pi_{\mu_{r+1}}}} \right| (1 - \epsilon)^2 \\ &\geq \alpha_r (1 - (1 - \epsilon)^2) - \frac{1}{K} \left| \frac{\sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} - \frac{\sigma^2(\alpha_{r+1})}{\nabla \mu_{r+1} \nu_{\pi_{\mu_{r+1}}}} \right| (1 - \epsilon)^2 \doteq (\spadesuit)_r. \end{aligned}$$

La première inégalité vient simplement de l'introduction de la valeur absolue et la seconde inégalité découle du fait que la quantité entre crochets sur la troisième ligne est toujours positive par notre choix du chemin optimal (voir problème #1 de l'annexe A). Lorsque $\alpha_r < \alpha_{r+1} \leq \lambda_1$, la quantité en valeur absolue dans $(\spadesuit)_r$ est nulle, car $\sigma^2(\alpha_{r+1}) = \sigma^2(\alpha_1) = \sigma_1^2$ et $\mu_{r+1} = 1$. Par conséquent, $(\spadesuit)_r \geq r_K(1 - (1 - \epsilon)^2)$ dans ce cas. De plus, lorsque $\alpha_r \geq \lambda_1$,

$$(\spadesuit)_r \geq \lambda_1(1 - (1 - \epsilon)^2) - \frac{C}{K}(1 - \epsilon)^2 \geq \frac{\lambda_1}{2}(1 - (1 - \epsilon)^2) \geq r_K(1 - (1 - \epsilon)^2)$$

en choisissant $K = K(\epsilon)$ suffisamment grand, car nous avons supposé que $2r_K \leq \lambda_1$ avant la preuve. L'inégalité (2.2.20) découle directement en posant $2c_2(\epsilon) \doteq r_K(1 - (1 - \epsilon)^2)$. Ceci termine la démonstration. \blacksquare

2.3. NOMBRE DE HAUTS POINTS ATTEIGNANT LE NIVEAU $\gamma \in]0, \gamma^*[$

Dans cette section, nous voulons obtenir l'ordre du nombre de points dans \mathbb{D}_n qui atteignent un certain ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ où $\gamma \in]0, \gamma^*[$. Il s'agit des hauts points au niveau γ et ils sont dénotés par l'ensemble $\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma) \doteq \left\{v \in \mathbb{D}_n \mid \bar{S}_v \geq \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N\right\}$.

Théorème 2.3.1 (Ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| \right)}{\log N^2} = \mathcal{E}_\gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) \doteq (\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) \doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(j)}) + \frac{\nu_{\pi_j+1, M}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $\gamma^{(0)} \doteq 0$.

La preuve du théorème suivra directement des lemmes 2.3.2 et 2.3.3, un pour chacune des deux bornes. Par le même heuristique qu'à la section précédente, l'espérance du nombre de points dans $\Lambda_{N, M}$ borne inférieurement le nombre de points (en moyenne) atteignant l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ à la limite si on demande que $\gamma_M = \gamma$. En particulier,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\mathbb{E} [|\Lambda_{N, M}|])}{\log N^2} = \sum_{i=1}^{M-1} \left(\nabla \lambda_i - \frac{(\nabla \gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) + \left(\nabla \lambda_M - \frac{(\gamma - \gamma_{M-1})^2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} \right) \quad (2.3.1)$$

est noté $\mathcal{E}_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{M-1})$ et borne inférieurement l'ordre du nombre de points (en moyenne) atteignant l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$. Ainsi, il est sensé (comme précédemment) de maximiser la fonction $\mathcal{E}_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{M-1})$ sous les contraintes

$$\mathcal{E}_k(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \doteq \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{(\nabla \gamma_i)^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq M-1 \quad (2.3.2)$$

afin qu'il y ait des particules disponibles à chaque étape du processus itératif décrit à la section précédente et d'espérer que cette borne inférieure soit aussi une borne supérieure. Nous verrons dans la preuve du théorème 2.3.1 que la quantité $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{M-1}^*)$ qui maximise $\mathcal{E}_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_{M-1})$ sous les contraintes (2.3.2) est la bonne pour obtenir les deux bornes.

Nous appelons *chemin optimal normalisé pour les hauts points* la ligne polygonale qui lie les points $(0, 0), (\lambda_1, \gamma_1^*), (\lambda_2, \gamma_2^*), \dots, (\lambda_{M-1}, \gamma_{M-1}^*), (1, \gamma)$ où le vecteur $(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{M-1}^*)$ maximise la fonction (2.3.1) sous les contraintes (2.3.2). La résolution de ce système est

l'objet du problème d'optimisation #2 de l'annexe A. Nous voyons d'abord que le chemin optimal normalisé se comporte différemment selon la hauteur de γ dans l'intervalle $]0, \gamma^*[$. Lorsque le modèle possède m composantes convexes, alors l'intervalle $[0, \gamma^*[$ est divisé en m sous-intervalles de la forme $[\gamma^{(l-1)}, \gamma^{(l)}[$ où les points

$$0 \doteq \gamma^{(0)} < \gamma^{(1)} < \gamma^{(2)} < \dots < \gamma^{(m-1)} < \gamma^{(m)} = \gamma^*$$

sont appelés les *niveaux critiques* du modèle et leur expression générale est la suivante :

$$\gamma^{(l)} \doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} = \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l)}) + \frac{\nu_{\pi_l+1, M}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}, \quad 1 \leq l \leq m. \quad (2.3.3)$$

Si $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$, alors la valeur du chemin optimal normalisé aux échelles $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ est donnée par :

$$\zeta_{\gamma}(\lambda_{\pi_j+k}) \doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda_{\pi_j+k}), \quad 0 \leq j \leq l-2, \quad 0 \leq k \leq \nabla \pi_{j+1}, \quad (2.3.4)$$

$$\zeta_{\gamma}(\lambda_{\pi_j+k}) \doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, \pi_j+k}}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})), \quad l-1 \leq j \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq \nabla \pi_{j+1}.$$

et $\zeta_{\gamma}(\cdot)$ progresse linéairement entre ces échelles. Pour un rappel de la définition de $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$, voir (2.2.2). En général, nous pouvons écrire le chemin optimal normalisé sous forme continue. Si $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$, alors

$$\zeta_{\gamma}(s) = \zeta_{\gamma^*}(s \wedge \lambda^{(l-1)}) + \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}(s \vee \lambda^{(l-1)}) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(l-1)})}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})), \quad s \in [0, 1]. \quad (2.3.5)$$

Nous appelons *chemin optimal pour les hauts points de la MABI* le chemin

$$L_N^{\gamma}(s) \doteq \frac{2\zeta_{\gamma}(s)}{\sqrt{\log 2}} \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Notons en particulier que ce chemin, évalué à la dernière échelle, donne l'ordre de l'énoncé du théorème 2.3.1, c'est-à-dire que $L_N^{\gamma}(1) = \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$. La description du chemin optimal sera cruciale pour la preuve des deux bornes du théorème. Notamment, les particules de la MABI doivent être au-dessus ou près de ce chemin à toutes les échelles du temps (avec très grande probabilité) pour espérer atteindre l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$.

Même si les valeurs du chemin optimal semblent compliquées, leur interprétation est relativement simple. En effet, les valeurs aux échelles $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \dots < \lambda^{(l-1)}$ correspondent aux ordres du maximum aux temps correspondants $t^{(1)} < t^{(2)} < \dots < t^{(l-1)}$ pour un processus de MAI dont les accroissements de longueur 1 ont une variance de $\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}$ sur les intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $1 \leq j \leq l-1$. Les valeurs du chemin optimal entre ces échelles progressent

exactement comme le maximum de MABI sur les intervalles de temps respectifs $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ avec paramètres de variance $\sigma_{\pi_{j-1}+1}, \dots, \sigma_{\pi_j}$ et dont l'unique composante convexe a une pente effective de $\sqrt{\nu_{\pi_j}}$. Le reste du chemin est sous-optimal (par rapport à $L_N^*(\cdot)$) jusqu'à l'ordre final $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$.

Afin de comprendre pourquoi le chemin se comporte ainsi, il faut revenir à l'heuristique de la section 2.2 et réfléchir en termes d'estimés gaussiens. La façon de maximiser la borne inférieure sur le nombre de points qui atteignent l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ est de demander aux accroissements $\nabla \bar{S}_v(\lambda^{(1)}), \dots, \nabla \bar{S}_v(\lambda^{(l-1)})$ d'atteindre respectivement les ordres optimaux $\nabla L_N^*(\lambda^{(1)}), \dots, \nabla L_N^*(\lambda^{(l-1)})$ et de combler le manque sur l'intervalle de temps $[t^{(l-1)}, n]$ jusqu'à l'ordre final désiré. C'est la façon optimale de procéder à cause de la propriété (2.1.3) du modèle qui montre que les pentes effectives (qu'on peut voir comme des variances effectives ou dominantes des accroissements) sont strictement décroissantes dans le temps. En effet, puisque les pentes effectives sont plus petites vers la fin du processus, nous voulons minimiser les ordres demandés vers la fin pour maximiser le nombre de points qui dépassent ces ordres (tout en demandant un ordre final $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$). Pour arriver à faire ceci, on doit donc maximiser les ordres demandés au début du processus et la hauteur du reste dépendra du niveau $\gamma \in]0, \gamma^*[$.

Par exemple, si $0 < \gamma < \gamma^{(1)}$, alors les ordres demandés aux accroissements via le chemin optimal seront toujours sous-optimaux (par rapport à $L_N^*(\cdot)$), car autrement, les ordres additionnés dépasseraient l'ordre final $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ et le nombre de points qui atteignent l'ordre final en étant toujours au-dessus du chemin optimal ne serait pas maximal. De façon similaire, si $\gamma^{(1)} \leq \gamma < \gamma^{(2)}$, alors le chemin optimal sera tel que seul le premier accroissement $\nabla \bar{S}_v(t^{(1)})$ devra atteindre l'ordre optimal $\nabla L_N^*(\lambda_1)$ (car la variance du premier accroissement est la plus grande et donc c'est à ce moment que le «coût» est le moins cher pour demander aux particules d'atteindre un ordre élevé) et le reste du chemin sera sous-optimal (toujours par rapport à $L_N^*(\cdot)$) jusqu'à l'ordre final $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$. La figure 2.5 illustre un exemple de chemin optimal normalisé pour les hauts points où $\gamma^{(1)} \leq \gamma < \gamma^{(2)}$.

L'exposant d'un niveau critique $\gamma^{(l)}$ où $l \in \{0, \dots, m\}$ nous indique le nombre d'intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ sur lesquels les accroissements, lorsqu'on les additionne, devront atteindre les ordres optimaux de $L_N^*(\cdot)$ pour qu'un nombre maximal de points du processus (au-dessus du chemin optimal $L_N^\gamma(\cdot)$ en tout temps) atteignent un ordre final plus grand ou égal au niveau critique. Par exemple, si $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma < \gamma^{(l)}$, alors les accroissements des

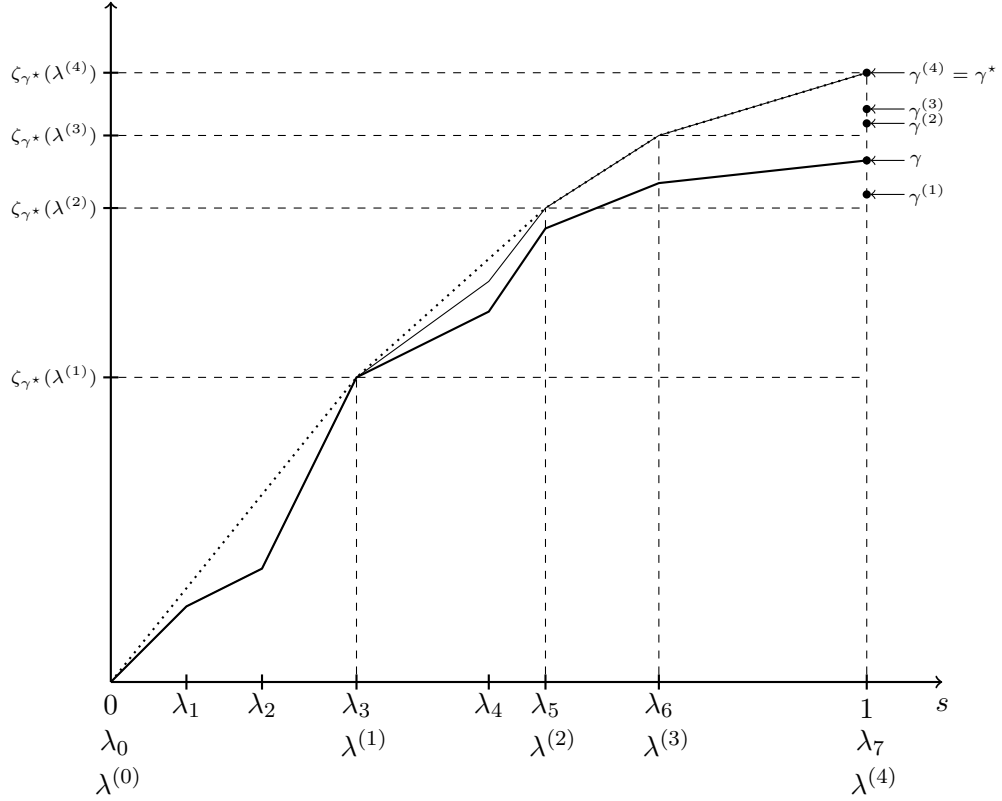


FIGURE 2.5. Exemple de $\zeta_\gamma(\cdot)$ (ligne foncée), $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne fermée) et $\hat{\zeta}_{\gamma^*}(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.

points atteignant un ordre final de $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ atteindront (avec très grande probabilité) les $l-1$ premiers ordres optimaux de $L_N^*(\cdot)$ et seront sous optimaux le reste du temps. Si $\gamma = \gamma^*$, alors tous les ordres optimaux de $L_N^*(\cdot)$ sont atteints comme nous avons vu à la section précédente.

Enfin, l'ordre du nombre de points au niveau γ , c'est-à-dire l'ordre du nombre de points atteignant l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ (qui se trouve à être la même chose si on demande en plus qu'ils soient au-dessus du chemin optimal $L_N^\gamma(\cdot)$ en tout temps) est donné par

$$\mathcal{E}_\gamma^* = (\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}. \quad (2.3.6)$$

Cette quantité est aussi relativement facile à comprendre. En effet, les points atteignant l'ordre $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ atteignent (presque toujours) l'ordre optimal au temps $t^{(l-1)}$ et ceux qui ne l'atteignent pas n'ont presque aucune chance d'atteindre l'ordre final désiré. Ainsi, au temps $t^{(l-1)}$, nous avons un nombre espéré de candidats égal à $C(\log N)^{-\pi_{l-1}/2}$, car $\mathcal{E}_{\pi_{l-1}}(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{\pi_{l-1}}^*) = 0$ (voir les estimés gaussiens en page 26). À partir de ce point, il y a donc un nombre espéré de $C(\log N)^{-\pi_{l-1}/2} N^{2(\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)})}$ candidats pouvant atteindre l'ordre

final désiré. Ces candidats ont déjà atteint l'ordre $\frac{2\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})}{\sqrt{\log 2}} \log N$, alors ils leur restent une hauteur d'au plus $\frac{2(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N$ à franchir. La façon optimale de franchir cette hauteur (c'est-à-dire en perdant le moins de candidats) est de demander aux accroissements $\nabla \bar{S}_v(t_{\pi_{l-1}+1}), \dots, \nabla \bar{S}_v(t_M)$ de dépasser les ordres respectifs

$$\frac{\nabla \nu_{\pi_{l-1}+1}}{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}} \frac{2(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N, \dots, \frac{\nabla \nu_M}{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}} \frac{2(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N.$$

Par exemple, une MABI sur l'intervalle $[t^{(l-1)}, t^{(m)}]$ avec une seule composante convexe et débutant à hauteur $\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})$ aurait le même comportement. Ces accroissements ont respectivement une variance de

$$\frac{\nabla \nu_{\pi_{l-1}+1}}{\log 2} \log N, \dots, \frac{\nabla \nu_M}{\log 2} \log N$$

alors l'application successive d'estimés gaussiens nous donnerait une borne inférieure sur le nombre espéré de points, atteignant l'ordre final $\frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$, asymptotiquement égale à

$$\frac{CN^{2(\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)})}}{(\log N)^{M/2}} \prod_{i=\pi_{l-1}+1}^M \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\nabla \nu_i}{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}} \frac{2(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N \right)^2}{\frac{\nabla \nu_i}{\log 2} \log N} \right) = \frac{CN^{2\mathcal{E}_\gamma^*}}{(\log N)^{M/2}}.$$

Lemme 2.3.2 (Borne supérieure pour l'ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} < \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$, alors*

$$\mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \leq \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\gamma^{(0)} \doteq 0$ et $C(\gamma) > 0$ dépend des paramètres du modèle.

DÉMONSTRATION. Notons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma) \doteq \left\{ v \in \mathbb{D}_{t^{(j)}} \mid \bar{S}_v(t^{(j)}) \geq L_N^\gamma(\lambda^{(j)}) \right\}, \quad 1 \leq j \leq m$$

qui représentent les particules dans $\mathbb{D}_{t^{(j)}}$ dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, t^{(j)}]$ dépasse l'ordre du chemin optimal (pour les hauts points) à l'échelle correspondante. L'idée est de décomposer la probabilité qu'au moins $N^{2\mathcal{E}_\gamma^*}$ points du processus au temps n dépassent l'ordre optimal en regardant quel était le premier temps $t^{(j)}$, $1 \leq j \leq l-1$ où l'ensemble $\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma)$ était non-vide. Nous avons la borne supérieure suivante sur la probabilité de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,m}^{\bar{S}}(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^{\bar{S}}(\gamma)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^{\bar{S}}(\gamma)| = 0, |\mathcal{H}_{N,m}^{\bar{S}}(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) + \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{l-1} \{|\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma)| \geq 1\} \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^{\bar{S}}(\gamma)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^{\bar{S}}(\gamma)| = 0, |\mathcal{H}_{N,m}^{\bar{S}}(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) + \sum_{j=1}^{l-1} \mathbb{P} \left(\{|\mathcal{H}_{N,j}^{\bar{S}}(\gamma)| \geq 1\} \right).
\end{aligned}$$

Les probabilités dans la sommation sont bornées par $\frac{C}{\sqrt{\log N}}$ exactement comme les termes en (2.2.4) dans la preuve du lemme 2.2.2, car $L_N^*(\cdot)$ et $L_N^\gamma(\cdot)$ coïncident sur l'intervalle $[0, \lambda^{(l-1)}]$. La probabilité à gauche, quant à elle, est bornée par

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \left\{ v \in \mathbb{D}_n \mid \bar{S}_v(t^{(1)}) < L_N^\gamma(\lambda^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)}) < L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}), \bar{S}_v \geq L_N^\gamma(1) \right\} \right| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \\
& \leq N^{-2\mathcal{E}_\gamma^*} N^2 \max_{v \in \mathbb{D}_n} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v \geq L_N^\gamma(1), \bar{S}_v(t^{(j)}) < L_N^\gamma(\lambda^{(j)}) \quad \forall j \in \{1, \dots, l-1\} \right) \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Markov suivie de la linéarité de l'espérance.

Par un estimé gaussien, où $\mathbb{V}(\bar{S}_v) = \frac{\nu_{1,M}}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, le maximum en (2.3.7) est borné supérieurement par

$$\frac{\sqrt{\frac{\nu_{1,M}}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi} L_N^\gamma(1)} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(L_N^\gamma(1))^2}{\frac{\nu_{1,M}}{\log 2} \log N} \right) \leq \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}} N^{-2\frac{\gamma^2}{\nu_{1,M}}} = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}} N^{-2} N^{2\mathcal{E}_\gamma^*}$$

lorsque $l = 1$, car $L_N^\gamma(1) = \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N$ et $\mathcal{E}_\gamma^* = 1 - \frac{\gamma^2}{\nu_{1,M}}$ dans ce cas. Pour conclure, il suffit donc de montrer que les probabilités en (2.3.7) sont bornées (uniformément en v) par $\frac{C(\gamma)N^{-2(1-\mathcal{E}_\gamma^*)}}{\sqrt{\log N}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$. Nous traitons les cas $l \geq 2$ dans la suite. Pour simplifier les expressions, notons $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1}, X_v^m) \doteq (\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)}), \bar{S}_v)$, $2 \leq l \leq m$. En conditionnant sur la valeur que prend le vecteur $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$, la probabilité en (2.3.7) donne (l est fixé dans l'énoncé du lemme) :

$$\int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^m \geq L_N^\gamma(1) \mid X_v^{l-1} = x_{l-1}, \dots, X_v^1 = x_1 \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1$$

où f_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$. En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps, on peut réécrire la dernière intégrale comme

$$\int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^m - X_v^{l-1} \geq L_N^\gamma(1) - x_{l-1} \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1. \quad (2.3.8)$$

Par un estimé gaussien, où $\mathbb{V}(X_v^m - X_v^{l-1}) = \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, la probabilité dans l'intégrale est bornée (uniformément en v) par

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{\frac{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}{\log 2} \log N}}{\sqrt{2\pi}(L_N^\gamma(1) - x_{l-1})} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(L_N^\gamma(1) - x_{l-1})^2}{\frac{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}{\log 2} \log N}\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(L_N^\gamma(1) - L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) + L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1})^2}{\frac{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}{\log 2} \log N}\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \varepsilon_\gamma^*)} \exp\left(-2 \frac{L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{(\log 2)^{-1/2} \nu_{\pi_{l-1}+1,M}} (\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \varepsilon_\gamma^*)} \exp\left(-2c_\gamma \frac{L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}}\right) \quad \text{où } c_\gamma > 1. \quad (2.3.9)
\end{aligned}$$

La borne sur le ratio devant l'exponentielle de la première ligne vient du fait que

$$\begin{aligned}
L_N^\gamma(1) - x_{l-1} & \geq L_N^\gamma(1) - L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) = \frac{2(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N \\
& > \frac{2(\gamma^{(l-1)} - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}{\sqrt{\log 2}} \log N = \frac{2\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}{\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}} \log N \quad (2.3.10)
\end{aligned}$$

où la première inégalité en (2.3.10) découle des bornes d'intégration de la variable x_{l-1} en (2.3.8) et la seconde inégalité du fait que $\gamma > \gamma^{(l-1)}$ par hypothèse de l'énoncé. On utilise aussi cette hypothèse pour obtenir la troisième inégalité en (2.3.9). La deuxième inégalité en (2.3.9) vient du fait que nous avons borné la troisième exponentielle par 1 dans le développement du carré de la deuxième ligne. Le terme $N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \varepsilon_\gamma^*)}$, quant à lui, vient de la première exponentielle dans la décomposition du carré et du fait que $(L_N^\gamma(1) - L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}))^2 = 4 \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\log 2} (\log N)^2$ et $(\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \varepsilon_\gamma^* = \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}$. En regroupant l'estimé gaussien (2.3.9) avec l'intégrale en (2.3.8) et l'inégalité (2.3.7), il suffit de montrer que

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in \mathbb{D}_n} \int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} e^{\frac{x_{l-1} - L_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})}{(\log 2)^{-1/2} c_\gamma^{-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}} f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1 \leq C(\gamma)$$

pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$ afin d'obtenir le résultat du lemme. Or, le terme $c_\gamma^{-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}$, $c_\gamma > 1$ joue le même rôle dans cette intégrale que le terme $\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}$ dans l'intégrale en (2.2.7) et $L_N^\gamma(\cdot) = L_N^*(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, \lambda^{(l-1)}]$, alors l'inégalité est satisfaite par le même argument. ■

Encore une fois, il est facile de voir qu'en introduisant un facteur ϵ dans la probabilité de l'énoncé de la borne supérieure, nous aurions eu une décroissance exponentielle de la probabilité $\mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| \geq N^{2\varepsilon_\gamma^* + \epsilon}\right)$, car nous aurions eu un facteur ϵ supplémentaire dans la borne (2.3.7) où nous avons utilisé l'inégalité de Markov. La preuve de la borne inférieure,

quant à elle, ne peut pas fonctionner sans ce facteur. Elle est donc plus délicate en ce sens et aussi parce qu'elle fait intervenir les covariances du champ.

Lemme 2.3.3 (Borne inférieure pour l'ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma < \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$. Pour tout $0 < \epsilon < 2\mathcal{E}_\gamma^*$, il existe une constante $c(\gamma, \epsilon) > 0$ (qui dépend des paramètres du modèle) telle que*

$$\mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon} \right) \leq N^{-c(\gamma, \epsilon)}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $\gamma^{(0)} \doteq 0$.

Nous utilisons les mêmes notations que dans la preuve du lemme 2.2.3. Nous supposons sans perdre de généralité que $\theta_k \in \mathbb{N}_0$ pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$ et nous choisissons K assez grand pour au moins avoir que la partition des α_k est plus fine que celle des λ_i , c'est-à-dire que $2r_K \leq \min_{i \in \{1, \dots, M\}} \nabla \lambda_i$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $\{0, \dots, M\}$. En particulier, $\alpha_1 < \lambda_1 \leq \lambda^{(1)}$ et $\mu_1 = 1$ sous cette hypothèse.

Nous commençons par définir un chemin sous-optimal liant les points $(0, 0)$ et $(1, \gamma(1+2\eta))$ où le paramètre η contrôle aussi la proximité avec le chemin optimal $L_N^{\gamma(1+2\eta)}(\cdot)$:

$$L_N^{\gamma, \eta}(s) \doteq (1 - \eta)L_N^{\gamma(1+2\eta)}(s) = \frac{2\zeta_{\gamma(1+2\eta)}(s)}{\sqrt{\log 2}}(1 - \eta) \log N, \quad s \in [0, 1], \quad 0 < \eta < 1.$$

La forme du chemin sous-optimal n'a pas beaucoup d'importance. Néanmoins, pour que le raisonnement de la preuve du lemme 2.3.3 fonctionne, il doit être près (en fonction de η) de $L_N^\gamma(\cdot)$ uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$ et doit posséder les deux propriétés cruciales suivantes :

$$(1) \quad L_N^{\gamma, \eta}(s) < L_N^*(s) \quad \forall s \in [0, 1],$$

$$(2) \quad L_N^{\gamma, \eta}(1) > L_N^\gamma(1).$$

La propriété (1) est satisfaite si nous supposons que η est assez petit pour que $(1+2\eta) < \frac{\gamma^{(l)}}{\gamma}$. En effet, sous cette hypothèse, $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma(1+2\eta) < \gamma^{(l)}$, alors $L_N^{\gamma(1+2\eta)}(\cdot)$, $L_N^\gamma(\cdot)$ et $L_N^*(\cdot)$ coïncident sur l'intervalle $[0, \lambda^{(l-1)}]$. En particulier, $L_N^{\gamma, \eta}(s) = (1 - \eta)L_N^*(s) < L_N^*(s)$ pour tout $s \in [0, \lambda^{(l-1)}]$. De plus, en utilisant le fait que

$$\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) \leq \gamma^{(l-1)} \leq \gamma(1+2\eta) < \gamma^{(l)} = \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}$$

suivi de la propriété (2.1.3) du modèle, nous avons pour tout $s \in [\lambda^{(l-1)}, 1]$:

$$\begin{aligned}
\zeta_{\gamma(1+2\eta)}(s) &\doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}(s) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(l-1)})}{\nu_{\pi_{l-1+1},M}} (\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})) \quad \text{par (2.3.5)} \\
&< \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}(s) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(l-1)})}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} \\
&\leq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \sum_{j=l}^m \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}((s \wedge \lambda^{(j)}) \vee \lambda^{(j-1)}) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(j-1)})}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}} \doteq \zeta_{\gamma^*}(s) \quad \text{par (2.2.3)}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, $L_N^{\gamma;\eta}(s) = (1-\eta)L_N^{\gamma(1+2\eta)}(s) < (1-\eta)L_N^*(s) < L_N^*(s)$ pour tout $s \in [\lambda^{(l-1)}, 1]$. La propriété (2) est satisfaite si nous supposons que $\eta < 1/2$. En effet, sous cette hypothèse, $(1+2\eta)(1-\eta) > 1$, alors $L_N^{\gamma;\eta}(1) = \frac{2\gamma(1+2\eta)}{\sqrt{\log 2}}(1-\eta) \log N > \frac{2\gamma}{\sqrt{\log 2}} \log N = L_N^{\gamma}(1)$. Nous supposons dans la suite que $(1+2\eta) < \frac{\gamma^{(l)}}{\gamma}$ et $\eta < 1/2$ afin que les propriétés (1) et (2) plus haut soient satisfaites. Nous imposerons d'autres restrictions sur notre choix de η dans la démonstration du lemme 2.3.3.

Notons $\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(k, K)$ ($k \in \{1, 2\}$) le nombre de points dans \mathbb{D}_n dont les accroissements de longueur $r_K n$ dans l'intervalle de temps $[\theta_{k-1}, n]$ dépassent, lorsqu'on les additionne, les ordres de $L_N^{\gamma;\eta}(\cdot)$. L'idée de la preuve est de montrer que la probabilité que $\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(2, K)$ soit asymptotiquement plus petit que $\mathbb{E}[\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(1, K)]$ tend exponentiellement vite vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$. À cette fin, nous devons appliquer l'inégalité de Paley-Zygmund et borner inférieurement le premier moment, $\mathbb{E}[\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(2, K)]$, et supérieurement deuxième moment, $\mathbb{E}[(\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(2, K))^2]$, intervenant dans l'inégalité. Il restera ensuite à traiter une probabilité résiduelle en rapport avec les accroissements sur l'intervalle $[0, \theta_1]$. La sous-optimalité du chemin $L_N^{\gamma;\eta}(\cdot)$ par rapport à $L_N^{\gamma(1+2\eta)}(\cdot)$ joue un rôle analogue à la sous-optimalité du chemin $L_{N,\epsilon}^*(\cdot)$ par rapport à $L_N^*(\cdot)$ dans la preuve du lemme 2.2.3. L'introduction du paramètre η comble l'absence du paramètre ϵ dans l'ordre que doivent atteindre les points de l'ensemble $\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)$ de l'énoncé. La propriété (2) ci-haut, quant à elle, nous permet de montrer que la probabilité résiduelle tend vers 0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.3.3. Définissons d'abord les variables aléatoires suivantes :

$$\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(K) \doteq \mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(2, K) \doteq \sum_{v \in \mathbb{D}_n} 1_{\{\nabla \bar{S}_v(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma;\eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, K\}\}}$$

qui comptent le nombre de points dans \mathbb{D}_n dont les accroissements, lorsqu'on les additionne, dépassent les ordres sous-optimaux dans l'intervalle de temps $[\theta_1, n]$. Dans la suite, nous traitons les cas $l \geq 2$. Le cas $l = 1$ est plus facile, alors nous l'omettons. Avant de borner la probabilité de l'énoncé, nous devons estimer l'espérance de $\mathcal{N}_N^{\gamma;\eta}(K)$. Notons $i^* \in \{1, \dots, K\}$ l'indice tel

que $\alpha_{i^*} = \lambda^{(l-1)}$. En utilisant la linéarité de l'espérance, l'indépendance des accroissements dans le temps et des estimés gaussiens, où $\mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(\theta_i)) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\log 2} \log N$, $1 \leq i \leq K$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, nous avons les deux bornes suivantes sur le premier moment de $\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)$:

$$\mathbb{E}[\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)] = \sum_{v \in \mathbb{D}_n} \prod_{i=2}^K \mathbb{P}(\nabla \bar{S}_v(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i)) \asymp \frac{C(K, \eta)}{(\log N)^{\frac{K-1}{2}}} N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K)} \quad (2.3.11)$$

où $\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K)$ regroupent l'exposant des N^2 points de \mathbb{D}_n et les exposants de N dans les estimés gaussiens :

$$\begin{aligned} \kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) &\doteq 2 - 2 \sum_{i=2}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\nabla_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}} (1 - \eta)^2 - 2 \frac{(\gamma(1 + 2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}} (1 - \eta)^2 \\ &= 2(1 - \eta)^2 \mathcal{E}_\gamma^* + 2(1 - (1 - \eta)^2) + 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \eta)^2 \\ &\quad - 2 \frac{(1 - \eta)^2}{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}} \underbrace{\left[(\gamma(1 + 2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2 - (\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2 \right]}_{= 4\gamma^2 \eta^2 + 4\gamma \eta (\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Notons que $1 - (1 - \eta)^2 = \eta(2 - \eta)$, alors en utilisant l'inégalité du triangle, (2.3.12) donne

$$\begin{aligned} &\left| \kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \eta)^2 - 2 \mathcal{E}_\gamma^* \right| \\ &\leq 2\eta \left\{ (2 - \eta) \mathcal{E}_\gamma^* + (2 - \eta) + \frac{(1 - \eta)^2}{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}} \left[4\gamma^2 \eta + 4\gamma |\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})| \right] \right\} \\ &< 2\eta \left\{ 2 + 2 + \left[\frac{4(\gamma^*)^2}{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}} + \frac{4\gamma^*}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} \right] \right\} < \epsilon \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

pour $\eta = \eta(\epsilon)$ assez petit qui dépend aussi des paramètres du modèle. Pour obtenir l'avant dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que $|\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})| < \gamma^{(l)} - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) = \frac{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}}$, car $\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) \leq \gamma^{(l-1)} \leq \gamma < \gamma^{(l)}$ par hypothèse de l'énoncé, le fait que $(2 - \eta) < 2$ et $(1 - \eta)^2 < 1$, car $0 < \eta < 1$, et le fait que $\mathcal{E}_\gamma^* < 1$ et $\gamma < \gamma^*$.

En considérant $\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)$, nous ne perdons pas grande précision en laissant tomber le premier accroissement $\nabla \bar{S}_v(\theta_1)$, car nous avons un contrôle sur la longueur de l'intervalle $[0, \theta_1]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K) < N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \eta)^2}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(|\mathcal{H}_N^{\bar{S}}(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon}, \mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K) \geq N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \eta)^2}\right). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Par (2.3.13), $N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \eta)^2} - N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon} \geq 1$, alors la dernière probabilité en (2.3.14)

est bornée par $\mathbb{P}\left(\min_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \leq -(L_N^{\gamma, \eta}(1) - L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_1) - L_N^\gamma(1))\right)$ si nous choisissons $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand. En effet,

$$\begin{aligned} L_N^{\gamma, \eta}(1) - L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_1) - L_N^\gamma(1) &= \frac{2\left(\gamma[(1+2\eta)(1-\eta) - 1] - \frac{1}{K} \frac{\sigma^2(\alpha_1)}{\sqrt{\nabla \nu \pi_1}}(1-\eta)\right)}{\sqrt{\log 2}} \log N \\ &\geq \frac{\gamma\eta(1-2\eta)}{\sqrt{\log 2}} \log N > 0 \end{aligned}$$

pour $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand, car nous avons supposé $\eta < 1/2$ dans la discussion précédent la démonstration. En utilisant la symétrie des variables gaussiennes, la sous-additivité et un estimé gaussien, où $\mathbb{V}\left(\nabla \bar{S}_v(\theta_1)\right) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\log 2} \log N$ pour tout $v \in \mathbb{D}_{\theta_1}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\min_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \leq -\frac{\gamma\eta(1-2\eta)}{\sqrt{\log 2}} \log N\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\theta_1}} \nabla \bar{S}_v(\theta_1) \geq \frac{\gamma\eta(1-2\eta)}{\sqrt{\log 2}} \log N\right) \\ &\leq N^{2r_K} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\gamma\eta(1-2\eta)}{\sqrt{\log 2}} \log N\right)^2}{\frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\log 2} \log N}\right) \\ &\leq N^{\frac{2}{K} - \frac{K}{2} \frac{\gamma^2 \eta^2 (1-2\eta)^2}{\sigma^2(\alpha_1)}} \leq N^{-c_1(\gamma, \eta)} \end{aligned}$$

pour $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand où $c_1(\gamma, \eta) > 0$ est une constante appropriée. Par conséquent, la dernière probabilité en (2.3.14) est bornée par $N^{-c_1(\gamma, \eta)}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K) < N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta} - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\eta)^2}\right) \leq N^{-c_2(\gamma, \eta)}$$

pour une constante $c_2(\gamma, \eta) > 0$ appropriée qui dépend des paramètres du modèle. En appliquant l'inégalité de Paley-Zygmund, nous pouvons borner la probabilité complémentaire :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K) \geq N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta} - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\eta)^2}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{N^{\kappa_{N, K}^{\gamma, \eta} - 2 \frac{r_K \sigma^2(\alpha_1)}{\nabla \nu \pi_1} (1-\eta)^2}}{\mathbb{E}[\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)]}\right)^2 \frac{(\mathbb{E}[\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)])^2}{\mathbb{E}[(\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K))^2]}. \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Notons que l'inégalité de Paley-Zygmund est applicable ici, car le ratio de la grande parenthèse est inclus entre 0 et 1 à cause des bornes sur le premier moment en (2.3.11). En fait, la grande parenthèse tend exponentiellement vite vers 1 (en fonction de γ et η) lorsque $N \rightarrow \infty$ en raison de ces bornes. Il suffit donc de montrer que le ratio d'espérance

en (2.3.15) est borné inférieurement par $1 - N^{-c_3(\gamma, \eta)}$ pour conclure, où $c_3(\gamma, \eta) > 0$ est une constante appropriée qui dépend des paramètres du modèle.

Avant de borner supérieurement le deuxième moment, introduisons quelques notations pour raccourcir les prochaines expressions :

$$q_{u,i}^\eta \doteq \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \right), \quad u \in \mathbb{D}_n, \quad 1 \leq i \leq K,$$

$$q_{u,v,i}^\eta \doteq \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_i), \nabla \bar{S}_v(\theta_i) \geq L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \right), \quad u, v \in \mathbb{D}_n, \quad 1 \leq i \leq K.$$

Maintenant, pour le deuxième moment, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K))^2 \right] &= \sum_{u, v \in \mathbb{D}_n} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_i), \nabla \bar{S}_v(\theta_i) \geq L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, K\} \right) \\ &= \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u, v) < \theta_1}} \prod_{i=2}^K q_{u,i}^\eta q_{v,i}^\eta + \sum_{r=1}^{K-1} \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_r \leq \rho(u, v) < \theta_{r+1}}} \prod_{i=2}^{r+1} q_{u,v,i}^\eta \prod_{i=r+2}^K q_{u,i}^\eta q_{v,i}^\eta + \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \rho(u, v) = \theta_K}} \prod_{i=2}^K q_{u,v,i}^\eta \end{aligned}$$

en décomposant la sommation de la première ligne selon les temps de branchement de chaque couple de points $u, v \in \mathbb{D}_n$ exactement comme nous l'avons fait pour l'équation (2.2.13) dans la preuve du lemme 2.2.3 (un produit sans indice est toujours égal à 1). Notons que $u = v$ lorsque $\rho(u, v) = \theta_K$, alors $q_{u,v,j}^\eta = q_{u,j}^\eta$ pour tout $j \in \{1, \dots, K\}$ dans ce cas. De plus, l'inégalité $q_{u,v,i}^\eta \leq q_{u,i}^\eta$ pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$ est triviale, alors la dernière expression est bornée par

$$\underbrace{\sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u, v) < \theta_1}} \prod_{i=2}^K q_{u,i}^\eta q_{v,i}^\eta}_{(1)} + \underbrace{\sum_{r=1}^{K-1} \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_r \leq \rho(u, v) < \theta_{r+1}}} \prod_{i=2}^{r+1} q_{u,v,i}^\eta \prod_{i=r+2}^K q_{u,i}^\eta q_{v,i}^\eta}_{(2)_r} + \underbrace{\sum_{u \in \mathbb{D}_n} \prod_{i=2}^K q_{u,i}^\eta}_{(3)}. \quad (2.3.16)$$

En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps et en ajoutant les termes manquants dans la sommation de (1), nous avons la borne suivante :

$$\begin{aligned} (1) &= \sum_{\substack{u, v \in \mathbb{D}_n \\ \theta_0 \leq \rho(u, v) < \theta_1}} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i), 2 \leq i \leq K \right) \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_v(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i), 2 \leq i \leq K \right) \\ &\leq \left(\sum_{u \in \mathbb{D}_n} \mathbb{P} \left(\nabla \bar{S}_u(\theta_i) \geq \nabla L_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{2, \dots, K\} \right) \right)^2 = (\mathbb{E} [\mathcal{N}_N^{\gamma, \eta}(K)])^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons borner supérieurement (3) par des estimés gaussiens comme nous avons fait pour la borne supérieure du premier moment en (2.3.11) et nous trouvons

$$(3) \leq N^{\kappa_{N,K}^{\gamma, \eta}}.$$

Maintenant, pour tout $r \in \{1, \dots, K-1\}$, notons que la sommation en $(2)_r$ possède au plus $N^2 N^{2(1-\alpha_r)}$ couples de points comme nous avons vu à l'équation (2.2.16) de la preuve du lemme 2.2.3. En utilisant des estimés gaussiens, où $\mathbb{V} \left(\nabla \bar{S}_v(\theta_i) \right) = \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\log 2} \log N$, $1 \leq i \leq K$ pour tout $v \in \mathbb{D}_n$, $(2)_r$ est borné par

$$\begin{cases} N^{\kappa_{N,K}^{\gamma,\eta}} \cdot N^{2(1-\alpha_r)} N^{-2 \sum_{i=r+2}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2} N^{-2 \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1+1,M}}} (1-\eta)^2} & \text{si } r+1 \leq i^*, \\ N^{\kappa_{N,K}^{\gamma,\eta}} \cdot N^{2(1-\alpha_r)} N^{-2 \left(\sum_{i=r+2}^K r_K \sigma^2(\alpha_i) \right) \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{(\nu_{\pi_{l-1+1,M}})^2} (1-\eta)^2} & \text{si } r+1 > i^*, \end{cases}$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-1\}$.

Par exactement le même raisonnement que nous avons utilisé entre les équations (2.2.17) et (2.2.20) lors de la preuve du lemme 2.2.3, il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} \alpha_r \geq \sum_{i=2}^{r+1} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + 2c_3(\gamma, \eta) & \text{si } r+1 \leq i^*, \\ \alpha_r \geq \sum_{i=2}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + \sum_{i=i^*+1}^{r+1} r_K \sigma^2(\alpha_i) \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{(\nu_{\pi_{l-1+1,M}})^2} (1-\eta)^2 + 2c_3(\gamma, \eta) & \text{si } r+1 > i^*, \end{cases}$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-1\}$ afin de montrer que le ratio d'espérances en (2.3.15) est borné inférieurement par $1 - N^{-c_3(\gamma, \eta)}$. Or, la seconde sommation sur la deuxième ligne de la dernière accolade est bornée supérieurement par $\sum_{i=i^*+1}^{r+1} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2$ en utilisant le fait que $\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) \leq \gamma^{(l-1)} \leq \gamma(1+2\eta) < \gamma^{(l)} = \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\nu_{\pi_{l-1+1,M}}}{\sqrt{\nu_{\pi_l}}}$ et la propriété (2.1.3) du modèle (voir la discussion précédent la démonstration). Par conséquent, les conditions de la dernière accolade sont satisfaites si

$$\alpha_r \geq \sum_{i=2}^{r+1} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + 2c_3(\gamma, \eta) \quad (2.3.17)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-1\}$. Ceci correspond exactement à l'inégalité (2.2.20) (avec $\eta = \epsilon$) qui a été montrée lors de la preuve du lemme 2.2.3. Ainsi, pour tout $\eta > 0$, il existe $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand tel que (2.3.17) est toujours satisfait avec $2c_3(\gamma, \eta) \doteq r_K(1 - (1-\eta)^2)$. Ceci termine la démonstration. \blacksquare

2.4. DEUXIÈME ORDRE DE CONVERGENCE DU MAXIMUM ET TENSION

Dans cette section, nous calculons le deuxième ordre du maximum pour la MABI et prouvons la tension entre le maximum et ce deuxième ordre. Nous disons qu'une suite de variables aléatoires $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue avec une suite réelle $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(|\xi_n - a_n| \geq K_\epsilon) < \epsilon, \quad n \geq n_0$$

où n_0 ne dépend pas de ϵ . Nous écrivons $\xi_n = a_n + O_{\mathbb{P}}(1)$ lorsque la propriété de tension est satisfaite. Notons que le cas $M = 2, \lambda_1 = 1/2$ a été traité dans [25], nous généralisons simplement l'argument.

Théorème 2.4.1 (Deuxième ordre de convergence du maximum et tension). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres (σ, λ) sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* = \gamma^*(\sigma, \lambda)$, alors*

$$\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v = \frac{\gamma^*}{\sqrt{\log 2}} \log N^2 - \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}{2\sqrt{\log 2}} \log \log N + O_{\mathbb{P}}(1)$$

où $\omega_j = 3$ si $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2} \big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[}$ et $\omega_j = 1$ sinon.

Le lecteur est référé à la section 2.1 pour un rappel de la définition de \mathcal{J}_{σ^2} et de son concavifié $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}$. Le résultat du théorème est en fait très intuitif. Entre les échelles $\lambda^{(j-1)}$ et $\lambda^{(j)}$ où la pente effective $\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}$ ne coïncide pas partout avec la pente de \mathcal{J}_{σ^2} (ou de façon équivalente lorsque $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \not\equiv \mathcal{J}_{\sigma^2}$ sur $] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$), le chemin optimal pour l'ordre 1 sera sous l'ordre du maximum sur au moins une partie de l'intervalle $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$. Par conséquent, la correction à l'ordre 2 sera de la même forme que si les paramètres de variance $\sigma_{\pi_{j-1+1}}, \dots, \sigma_{\pi_j}$ étaient strictement croissants, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}{2\sqrt{\log 2}} \log \log N$$

comme l'avait remarqué Fang et Zeitouni dans [25]. À l'opposé, lorsque $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2}$ sur $] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$, alors le chemin optimal pour l'ordre 1 progresse en tout temps à l'ordre du maximum sur l'intervalle $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$. Par notre construction des composantes convexes, cela ne peut se produire que lorsque $\lambda^{(j-1)} = \lambda_{\pi_{j-1}}$ et il y a un seul paramètre de variance $\sigma_{\pi_j} = \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}$. Ce cas correspond à la MAB homogène sur l'intervalle $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ où la variance des accroissements de longueur 1 est égale à $\sigma_{\pi_j}^2$. L'article d'Addario-Berry et Reed [1] montre que la correction sera de la forme

$$-\frac{3}{2} \frac{\sigma_{\pi_j}}{2\sqrt{\log 2}} \log \log N$$

dans cette situation. Comme nous verrons dans la preuve de la borne supérieure du théorème 2.4.1, la dernière correction est supérieure à la précédente par un facteur $\log \log N$ en raison du comportement de la particule, atteignant le maximum au temps n , sur l'intervalle de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$. En effet, cette particule se comporte comme un pont

brownien discret autour du chemin optimal pour l'ordre 1 du maximum sur les intervalles $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ où la condition $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \Big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2} \Big|_{] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[}$ est satisfaite. Cette propriété nécessite des estimés supplémentaires sur les intervalles concernés qui balanceront pour les plus grandes corrections.

Pour tout $l \in \{1, \dots, m\}$, notons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_l &\doteq \{j \in \{1, \dots, l\} \mid \hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2} \text{ sur }]\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[\}, \\ \mathcal{K}_l &\doteq \{t^{(1)}, \dots, t^{(l)}\} \cup \bigcup_{j \in \mathcal{A}_l} \{t^{(j-1)} + 1, \dots, t^{(j)} - 1\}. \end{aligned}$$

Les indices $j \in \mathcal{A}_m$ indiquent les intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$ où ne devront appliquer les estimés de ponts browniens et l'ensemble \mathcal{K}_m comprend les temps $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)}$ ainsi qu'une discrétisation des intervalles $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $j \in \mathcal{A}_m$ afin de pouvoir les mettre en oeuvre. Si $\vartheta_k \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(\vartheta_k-1)} < \frac{k}{n} \leq \lambda^{(\vartheta_k)}$ et $r_n \doteq \frac{1}{n}$, alors le *chemin optimal pour l'ordre 2 du maximum de la MABI* est donné par

$$M_n^*(k/n) \doteq \sum_{j=1}^{\vartheta_k} \frac{(k \wedge t^{(j)} - t^{(j-1)})}{\nabla t^{(j)}} \left[2\sqrt{\log 2} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)} - \frac{\omega_j}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(\nabla t^{(j)}) \right], \quad k \in \mathcal{K}_m$$

où $M_n^*(0) \doteq 0$, $M_n^* \doteq M_n^*(1)$ et $M_n^*(\cdot)$ progresse de façon linéaire sur les intervalles $[\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}]$, $j \in \mathcal{A}_m$. Nous définissons aussi un chemin sur-optimal en additionnant au chemin optimal une barrière de la forme

$$b_{n,x}(k/n) \doteq \begin{cases} x & \text{si } k \in \{t^{(0)}, t^{(1)}, \dots, t^{(m)}\} \\ x + \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \vartheta_k \nu_{\pi_{\vartheta_k}}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(k - t^{(\vartheta_k-1)}) & \text{si } \vartheta_k \in \mathcal{A}_m \text{ et } t^{(\vartheta_k-1)} < k \leq \frac{t^{(\vartheta_k-1)} + t^{(\vartheta_k)}}{2} \\ x + \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \vartheta_k \nu_{\pi_{\vartheta_k}}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(t^{(\vartheta_k)} - k) & \text{si } \vartheta_k \in \mathcal{A}_m \text{ et } \frac{t^{(\vartheta_k-1)} + t^{(\vartheta_k)}}{2} \leq k < t^{(\vartheta_k)} \end{cases}$$

pour tout $k \in \mathcal{K}_m$ et pour tout $x > 0$. En particulier, la barrière est logarithmique et symétrique par rapport à chaque point milieu sur les intervalles $] \lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$, $j \in \mathcal{A}_m$. Notons $b_n(\cdot) \doteq b_{n,x}(\cdot) - x$. Le chemin sur-optimal est donné par

$$M_{n,x}^*(k/n) = M_n^*(k/n) + b_{n,x}(k/n), \quad k \in \mathcal{K}_m, \quad x > 0$$

où $M_{n,x}^*(0) \doteq x$, $M_{n,x}^* \doteq M_{n,x}^*(1)$ et $b_{n,x} \doteq b_{n,x}(1)$. La figure 2.6 illustre le chemin sur-optimal pour l'ordre 2 du maximum sur \mathcal{K}_m .

Comme précédemment, le théorème 2.4.1 découle directement des lemmes 2.4.4 et 2.4.6, un pour chacune des deux bornes. La borne supérieure se prouve comme le lemme 2.2.2 sur

l'ordre 1 du maximum où nous devons incorporer des estimés de ponts brownien discrets sur les intervalles $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $j \in \mathcal{A}_m$ pour améliorer les bornes sur la probabilité de l'énoncé. Nous donnons d'abord la définition d'un pont brownien discret.

Définition 2.4.2 (Pont brownien discret). *Soit $0 \leq \lambda < \lambda' \leq 1$ tel que $\lambda n, \lambda' n \in \mathbb{N}_0$ et $\sigma > 0$. Un σ -pont brownien discret sur l'intervalle de temps $[\lambda n, \lambda' n]$ est une suite de variables aléatoires conjointement gaussiennes, $\{B_k\}_{k=\lambda n}^{\lambda' n}$, telle que*

$$(i) \quad B_{\lambda n} = B_{\lambda' n} = 0,$$

$$(ii) \quad \mathbb{C}(B_k, B_{k'}) = \frac{(k \wedge k' - \lambda n)(\lambda' n - k \vee k')}{(\lambda' - \lambda)n} \sigma^2, \quad \lambda n \leq k, k' \leq \lambda' n.$$

Le lemme donnant les estimés est analogue à la proposition 1' de Bramson [12]. À l'origine, le résultat est démontré dans le cas continue, mais il s'étend sans difficulté au cas discret. La preuve est omise.

Lemme 2.4.3 (Estimés de ponts browniens discrets [12]). *Soit $0 \leq \lambda < \lambda' \leq 1$ tel que $\lambda n, \lambda' n \in \mathbb{N}_0$, $\sigma > 0$ et*

$$L(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \{\lambda n, \lambda' n\} \\ D \log(k - \lambda n) & \text{si } \lambda n < k \leq \frac{\lambda n + \lambda' n}{2} \\ D \log(\lambda' n - k) & \text{si } \frac{\lambda n + \lambda' n}{2} \leq k < \lambda' n \end{cases}$$

pour une certaine constante $D = D(\sigma) > 0$, alors il existe une constante $C = C_D(\sigma) > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(B_k \leq L(k) + z, \quad \lambda n < k < \lambda' n) \leq \frac{C(1+z)^2}{(\lambda' - \lambda)n}$$

pour tout $z > 0$ et pour n assez grand où $\{B_k\}_{k=\lambda n}^{\lambda' n}$ est un σ -pont brownien discret sur l'intervalle de temps $[\lambda n, \lambda' n]$.

Afin d'alléger la notation et aussi parce que la convergence d'ordre 2 du maximum pour le CLGI n'est pas prouvée dans ce mémoire, les ordres seront toujours écrits en terme de n et $\log n$ dans le reste du chapitre, et non plus en terme de $\log N$ et $\log \log N$.

Lemme 2.4.4 (Borne supérieure pour l'ordre 2 et la tension). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres $(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \boldsymbol{\lambda})$, alors pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ assez grand, nous avons*

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \geq 2\sqrt{\log 2} \gamma^* n - \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu \pi_j}}{2\sqrt{\log 2}} \log(\nabla t^{(j)}) + x \right) \leq C(1+x)^{2|\mathcal{A}_m|} e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu \pi_1}}}$$

où $C > 0$ dépend seulement des paramètres du modèle, $\omega_j = 3$ si $j \in \mathcal{A}_m$ et $\omega_j = 1$ sinon.

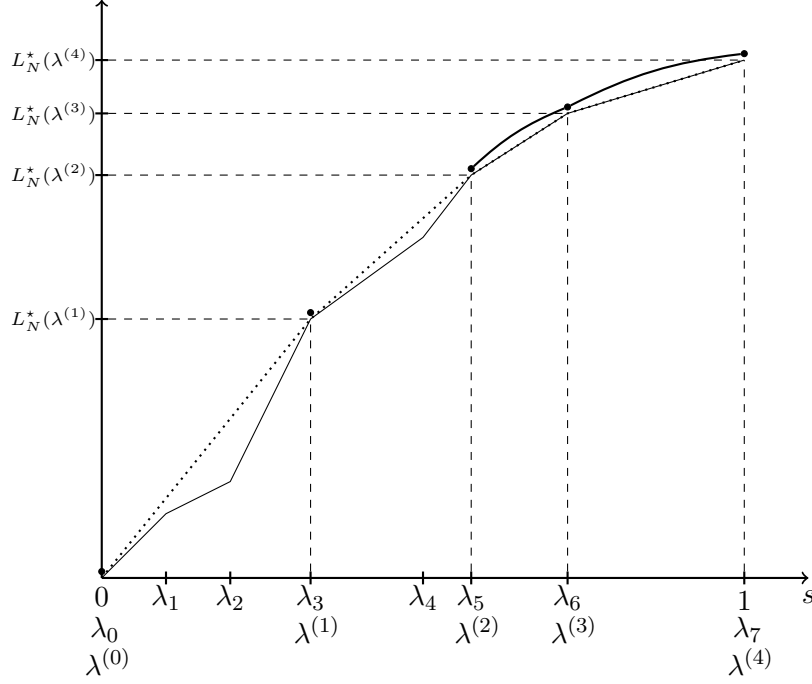


FIGURE 2.6. Exemple de $M_{n,x}^*(\cdot)$ (partie foncée), $L_N^*(\cdot)$ (ligne fermée) et de $\hat{L}_N^*(\cdot)$ (ligne pointillée) avec 7 valeurs pour $\sigma^2(\cdot)$ et 4 composantes convexes.

DÉMONSTRATION. Notons les ensembles suivants :

$$\mathcal{G}_{n,k,x} \doteq \{v \in \mathbb{D}_k \mid \bar{S}_v(k) \geq M_{n,x}^*(k/n)\}, \quad k \in \mathcal{K}_m$$

qui représentent les particules dans \mathbb{D}_k , $k \in \mathcal{K}_m$ dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, k]$ dépasse l'ordre du chemin sur-optimal $M_{n,x}^*(\cdot)$ à l'échelle correspondante. L'idée est de décomposer la probabilité qu'au moins un point du processus au temps n dépasse l'ordre sur-optimal $M_{n,x}^*(1)$ en regardant quel était le premier temps $k \in \mathcal{K}_m$ où l'ensemble $\mathcal{G}_{n,k,x}$ était non-vide. Nous avons la borne supérieure suivante sur la probabilité de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{G}_{n,m,x}| \geq 1) &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}_m} \mathbb{P}(|\mathcal{G}_{n,k,x}| \geq 1, |\mathcal{G}_{n,i,x}| = 0 \quad \forall i \in \mathcal{K}_m \text{ tel que } i < k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}_m} 2^{2k} \max_{v \in \mathbb{D}_k} \mathbb{P}\left(\bar{S}_v(k) \geq M_{n,x}^*(k/n), \bar{S}_v(i) < M_{n,x}^*(i/n) \quad \forall i \in \mathcal{K}_m \text{ tel que } i < k\right) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

par sous-additivité. Nous traitons les cas $k > t^{(1)}$ dans la suite, les cas $k \leq t^{(1)}$ se traitent plus facilement. Pour tout $t^{(l-1)} < k \leq t^{(l)}$ (c'est-à-dire que $\vartheta_k = l$), alors il y a trois cas possibles : (1) $k = t^{(l)}$ et $l \notin \mathcal{A}_m$,

$$(2) \quad t^{(l-1)} < k \leq \frac{t^{(l-1)} + t^{(l)}}{2} \text{ et } l \in \mathcal{A}_m,$$

$$(3) \quad \frac{t^{(l-1)} + t^{(l)}}{2} < k \leq t^{(l)} \text{ et } l \in \mathcal{A}_m.$$

Le cas (1) s'occupe des intervalles $[t^{(l-1)}, t^{(l)}]$ où le maximum progresse sous la MAB à variance effective correspondante. Dans les cas (2) et (3), le maximum progresse au même niveau que la MAB à variance effective, mais les estimés de ponts browniens sur l'intervalle $[t^{(l-1)}, k]$ ne seront nécessaires que pour le cas (3).

$$\boxed{\text{Cas 1 : } k = t^{(l)} \text{ et } l \notin \mathcal{A}_m}$$

En conditionnant sur la valeur que prend le vecteur $(\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)}))$ et en négligeant ce qui se passe aux temps discrets dans l'intervalle $]t^{(l-1)}, k[$, la probabilité en (2.4.1) est bornée (pour tout k fixé) par :

$$\int_{-\infty}^{M_{n,x}^*(\lambda^{(1)})} \int_{-\infty}^{M_{n,x}^*(\lambda^{(2)})} \dots \int_{-\infty}^{M_{n,x}^*(\lambda^{(l-1)})} (\clubsuit) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1 \quad (2.4.2)$$

où (\clubsuit) désigne l'expression suivante :

$$\mathbb{P} \left(\bar{S}_v(k) \geq M_{n,x}^*(k/n), \bar{S}_v(i) < M_{n,x}^*(i/n) \quad \forall i \in \mathcal{K}_{l-1} \setminus \{t^{(1)}, \dots, t^{(l-1)}\} \mid \bar{S}_v(t^{(l-1)}) = x_{l-1}, \dots, \bar{S}_v(t^{(1)}) = x_1 \right)$$

où f_v dénote la densité du vecteur $(\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)}))$.

Remarquons que par construction des composantes convexes, les accroissements de longueur 1 sur l'intervalle $[\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}]$ sont toujours de variance $\sigma_{\pi_j}^2$ lorsque $j \in \mathcal{A}_{l-1}$. Par conséquent, pour chaque $v \in \mathbb{D}_k$ et pour chaque $j \in \mathcal{A}_{l-1}$, les variables

$$B_{v,i}^{(j)} \doteq \bar{S}_v(i) - \bar{S}_v(t^{(j-1)}) - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \nabla \bar{S}_v(t^{(j)}), \quad t^{(j-1)} \leq i \leq t^{(j)} \quad (2.4.3)$$

commencent et terminent en 0, sont indépendantes de $\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)})$ et le processus $\{B_{v,i}^{(j)}\}_{i=t^{(j-1)}}^{t^{(j)}}$ a la loi d'un σ_{π_j} -pont brownien discret sur l'intervalle $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, sous la définition 2.4.2. En effet, $B_{v,t^{(j-1)}}^{(j)} = B_{v,t^{(j)}}^{(j)} = 0$ est évident par (2.4.3) et

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \left(B_{v,i}^{(j)}, \bar{S}_v(k') \right) &= \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(i \wedge k') \right) - \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t^{(j-1)} \wedge k') \right) - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \nabla_j \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t^{(j)} \wedge k') \right) \\ &= \begin{cases} \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(i) \right) - \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t^{(j-1)}) \right) - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \nabla \mathbb{V} \left(\bar{S}_v(t^{(j)}) \right) & \text{si } t^{(j)} \leq k' \leq n \\ 0 - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} 0 & \text{si } 1 \leq k' \leq t^{(j-1)} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_{\pi_j}^2 (i - t^{(j-1)}) - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \sigma_{\pi_j}^2 \nabla t^{(j)} & \text{si } t^{(j)} \leq k' \leq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq k' \leq t^{(j-1)} \end{cases} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

pour tout $i \in \{t^{(j-1)}, \dots, t^{(j)}\}$ et pour tout $k' \in \{1, \dots, t^{(j-1)}\} \cup \{t^{(j)}, \dots, n\}$, ce qui donne en

particulier l'indépendance entre $\{B_{v,i}^{(j)}\}_{i=t^{(j-1)}}^{t^{(j)}}$ et les variables $\bar{S}_v(t^{(1)}), \dots, \bar{S}_v(t^{(l-1)})$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\left(B_{v,i}^{(j)}, B_{v,i'}^{(j)}\right) &= \mathbb{C}\left(\bar{S}_v(i) - \bar{S}_v(t^{(j-1)}), \bar{S}_v(i') - \bar{S}_v(t^{(j-1)})\right) + \frac{(i - t^{(j-1)})(i' - t^{(j-1)})}{(\nabla t^{(j)})^2} \mathbb{V}\left(\nabla \bar{S}_v(t^{(j)})\right) \\ &\quad - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \mathbb{C}\left(\bar{S}_v(i') - \bar{S}_v(t^{(j-1)}), \nabla \bar{S}_v(t^{(j)})\right) - \frac{i' - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \mathbb{C}\left(\bar{S}_v(i) - \bar{S}_v(t^{(j-1)}), \nabla \bar{S}_v(t^{(j)})\right) \\ &= (i \wedge i' - t^{(j-1)}) \sigma_{\pi_j}^2 + \frac{(i - t^{(j-1)})(i' - t^{(j-1)})}{(\nabla t^{(j)})^2} \sigma_{\pi_j}^2 \nabla t^{(j)} - 2 \frac{(i - t^{(j-1)})(i' - t^{(j-1)})}{\nabla t^{(j)}} \sigma_{\pi_j}^2 \\ &= \left[(i \wedge i' - t^{(j-1)}) \nabla t^{(j)} - (i - t^{(j-1)})(i' - t^{(j-1)}) \right] \frac{\sigma_{\pi_j}^2}{\nabla t^{(j)}} \\ &= \frac{(i \wedge i' - t^{(j-1)})(t^{(j)} - i \vee i')}{\nabla t^{(j)}} \sigma_{\pi_j}^2, \quad t^{(j-1)} \leq i, i' \leq t^{(j)} \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance en (2.4.4), nous pouvons borner (\clubsuit) par

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\bar{S}_v(k) - \bar{S}_v(t^{(l-1)}) \geq M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1}\right) \\ &\quad \cdot \prod_{j \in \mathcal{A}_{l-1}} \mathbb{P}\left(B_{v,i}^{(j)} < M_{n,x}^*(i/n) - x_{j-1} - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \nabla x_j, \quad t^{(j-1)} < i < t^{(j)}\right). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Si nous notons $z_{i,j} \stackrel{\circ}{=} M_{n,x}^*(i/n) - x_{j-1} - \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \nabla x_j$, alors remarquons que

$$\begin{aligned} z_{i,j} &= M_n^*(i/n) + b_{n,x}(i/n) + \left\{ \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} x_{j-1} + \frac{t^{(j)} - i}{\nabla t^{(j)}} x_j \right\} - x_{j-1} - x_j \\ &= b_{n,x}(i/n) + \left[M_n^*(i/n) - \left\{ \frac{t^{(j)} - i}{\nabla t^{(j)}} M_n^*(\lambda^{(j-1)}) + \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} M_n^*(\lambda^{(j)}) \right\} \right] - (x_j - M_n^*(\lambda^{(j)})) \\ &\quad + \left\{ \frac{i - t^{(j-1)}}{\nabla t^{(j)}} \underbrace{(x_{j-1} - M_n^*(\lambda^{(j-1)}))}_{\leq x} + \frac{t^{(j)} - i}{\nabla t^{(j)}} \underbrace{(x_j - M_n^*(\lambda^{(j)}))}_{\leq x} \right\} - (x_{j-1} - M_n^*(\lambda^{(j-1)})) \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathcal{A}_{l-1}$ où $\max_{1 \leq j \leq l-1} (x_j - M_n^*(\lambda^{(j)})) \leq x$ sur la dernière ligne en raison des bornes d'intégration de x_{j-1} et x_j en (2.4.2). La quantité entre crochets, quant à elle, est nulle, car nous savons que $M_n^*(\cdot)$ progresse linéairement sur l'intervalle $[\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}]$ lorsque $j \in \mathcal{A}_{l-1} \subseteq \mathcal{A}_m$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} z_{i,j} &\leq b_{n,x}(i/n) + x - (x_{j-1} - M_n^*(\lambda^{(j-1)})) - (x_j - M_n^*(\lambda^{(j)})) \\ &= b_n(i/n) + 2x - (x_{j-1} - M_n^*(\lambda^{(j-1)})) - (x_j - M_n^*(\lambda^{(j)})) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

par définition de $b_n(\cdot)$. Pour borner la première probabilité en (2.4.5), nous pouvons appliquer un estimé gaussien. En effet, $\mathbb{V}\left(\bar{S}_v(k) - \bar{S}_v(t^{(l-1)})\right) = (k - t^{(l-1)}) \overline{\nabla \nu_{\pi_l}}$ pour tout $v \in \mathbb{D}_k$, alors $\mathbb{P}\left(\bar{S}_v(k) - \bar{S}_v(t^{(l-1)}) \geq M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1}\right)$ est borné supérieurement (uniformément en v) par

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{(k-t^{(l-1)})\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}{\sqrt{2\pi}(M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1})} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1})^2}{(k-t^{(l-1)})\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{k-t^{(l-1)}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(M_{n,x}^*(k/n) - M_{n,x}^*(t^{(l-1)}) + M_{n,x}^*(t^{(l-1)}) - x_{l-1})^2}{(k-t^{(l-1)})\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}\right) \\
& \leq \frac{C2^{-2(k-t^{(l-1)})}}{\sqrt{k-t^{(l-1)}}} \exp\left(\frac{\omega_l(k-t^{(l-1)})}{2} \frac{\log(\nabla t^{(l)})}{\nabla t^{(l)}}\right) \exp\left(-2 \frac{M_{n,x}^*(t^{(l-1)}) - x_{l-1}}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}\right) \\
& \leq C2^{-2(k-t^{(l-1)})} \underbrace{(k-t^{(l-1)})^{\frac{(\omega_l-1)}{2}}}_{=1 \text{ dans le Cas 1}} \exp\left(-2 \frac{M_{n,x}^*(t^{(l-1)}) - x_{l-1}}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}\right) \tag{2.4.7}
\end{aligned}$$

où $\omega_l = 1$, car $l \notin \mathcal{A}_m$ dans le Cas 1. La première inégalité vient du fait que $x_{l-1} \leq M_{n,x}^*(\lambda^{(l-1)})$ en (2.4.2) et

$$\begin{aligned}
M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1} & \geq M_{n,x}^*(k/n) - M_{n,x}^*(\lambda^{(l-1)}) \\
& = 2\sqrt{\log 2}(k-t^{(l-1)})\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}} - \frac{\omega_l(k-t^{(l-1)})}{2} \frac{\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}{\nabla t^{(l)}} \log(\nabla t^{(l)}) + \underbrace{b_{n,x}(k/n) - x}_{=0 \text{ dans le Cas 1}} \tag{2.4.8}
\end{aligned}$$

dans le ratio devant l'exponentielle de la première ligne en (2.4.7). De plus, si nous posons l'expression (2.4.8) dans l'exponentielle de la deuxième ligne en (2.4.7), nous avons la seconde inégalité en développant le carré et en bornant par une constante les exponentielles n'ayant pas le premier terme de (2.4.8) en facteur. La troisième inégalité vient du fait que $\frac{(k-t^{(l-1)})}{\nabla t^{(l)}} \log(\nabla t^{(l)}) \leq \log(k-t^{(l-1)})$, car la fonction $x \mapsto \frac{\log x}{x}$, $x \geq 1$ est décroissante.

En effectuant le changement de variable $Y_{v,j} \doteq \nabla \bar{S}_v(t^{(j)}) - \nabla M_n^*(\lambda^{(j)})$, $1 \leq j \leq l-1$ et en regroupant les expressions (2.4.7) et (2.4.6) pour borner (\clubsuit) en (2.4.5), nous pouvons borner l'intégrale en (2.4.2) par

$$\begin{aligned}
& C2^{-2(k-t^{(l-1)})} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x-y_1} \dots \int_{-\infty}^{x-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} e^{-2 \frac{x-\sum_{j=1}^{l-1} y_j}{(\log 2)^{-1/2} \sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}} g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) \\
& \cdot \prod_{j \in \mathcal{A}_{l-1}} \mathbb{P}\left(B_{v,i}^{(j)} < b_n(i/n) + 2x - 2 \sum_{j'=1}^{j-1} y_{j'-1} - y_j, \quad t^{(j-1)} < i < t^{(j)}\right) dy_{l-1} \dots dy_1 \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

où g_v est la densité du vecteur aléatoire $(Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1})$. Par l'indépendance des variables aléatoires $Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1}$ (qui vient du fait que les accroissements $\nabla \bar{S}_v(t^{(j)})$ sont indépendants en j pour chaque v fixé), la densité g_v se sépare en $l-1$ densités normales, c'est-à-dire

$$g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) = g_{Y_{v,1}}(y_1) \cdot \dots \cdot g_{Y_{v,l-1}}(y_{l-1})$$

où $\mathbb{V}(Y_{v,j}) = \mathbb{V}(\nabla \bar{S}_v(t^{(j)})) = \overline{\nabla\nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}$, $1 \leq j \leq l-1$ pour tout $v \in \mathbb{D}_k$. Ainsi, nous pouvons

borner chaque densité $g_{Y_{v,j}}$ (uniformément en v) :

$$\begin{aligned}
g_{Y_{v,j}}(y_j) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}}\sqrt{\nabla t^{(j)}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y_j + \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}))^2}{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}\sqrt{\nabla t^{(j)}}}\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\nabla t^{(j)}}} 2^{-2\nabla t^{(j)}} \exp\left(\frac{\omega_j}{2}\log(\nabla t^{(j)})\right) \exp\left(-2\frac{y_j}{(\log 2)^{-1/2}\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}}}\right) \\
&= C 2^{-2\nabla t^{(j)}} \underbrace{(\nabla t^{(j)})^{\frac{\omega_j-1}{2}}}_{=1 \ \forall j \notin \mathcal{A}_{l-1}} \exp\left(-2\frac{y_j}{(\log 2)^{-1/2}\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}}}\right) \tag{2.4.10}
\end{aligned}$$

où nous avons borné par une constante les exponentielles ne contenant pas le premier terme de $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})$ en facteur dans le développement du carré de la première ligne. Par le lemme 2.4.3 sur les estimés de ponts browniens discrets, nous avons

$$\mathbb{P}\left(B_{v,i}^{(j)} < b_n(i/n) + 2x - 2\sum_{j'=1}^{j-1} y_{j'-1} - y_j, \ t^{(j-1)} < i < t^{(j)}\right) \leq C \frac{(1 + 2x - 2\sum_{j'=1}^{j-1} y_{j'-1} - y_j)^2}{\nabla t^{(j)}} \tag{2.4.11}$$

pour tout $j \in \mathcal{A}_{l-1}$ où la constante $C > 0$ ne dépend que des paramètres du modèle. Ces estimés et les bornes sur les densités en (2.4.10) nous permettent de borner (2.4.9) par

$$\begin{aligned}
&C 2^{-2k} e^{-2x\frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{x-y_1} \dots \int_{-\infty}^{x-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} \\
&\cdot \left[\prod_{j \in \mathcal{A}_{l-1}} (1 + 2x - 2\sum_{j'=1}^{j-1} y_{j'-1} - y_j)^2 \right] \prod_{j=1}^{l-1} e^{2y_j \left(\frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_l}}}} - \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\overline{\nabla\nu_{\pi_j}}}} \right)} dy_{l-1} \dots dy_1 \tag{2.4.12}
\end{aligned}$$

où les termes $(\nabla t^{(j)})^{\frac{\omega_j-1}{2}}$, $j \in \mathcal{A}_{l-1}$ en (2.4.10) ce sont annulés avec les facteurs $\frac{1}{\nabla t^{(j)}}$ des estimés de ponts browniens en (2.4.11), car $\omega_j = 3$ lorsque $j \in \mathcal{A}_{l-1}$. Notons que les grandes parenthèses dans les exponentielles de l'intégrale sont toujours strictement positives, car $\overline{\nabla\nu_{\pi_1}} > \overline{\nabla\nu_{\pi_2}} > \dots > \overline{\nabla\nu_{\pi_l}}$ par la propriété (2.1.3) du modèle. Dénotons ces grandes parenthèses par $\beta_{j,l}$, $1 \leq j \leq l-1$. En intégrant par parties, la première intégrale en (2.4.12) (à partir de l'intérieur) donne lorsque $l-1 \in \mathcal{A}_{l-1}$:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} (1 + 2x - 2\sum_{j'=1}^{l-2} y_{j'-1} - y_{l-1})^2 e^{2\beta_{l-1,l} y_{l-1}} dy_{l-1} \\
&= \left[\frac{(1 + x - \sum_{j=1}^{l-2} y_j)^2}{2\beta_{l-1,l}} + \frac{(1 + x - \sum_{j=1}^{l-2} y_j)}{2\beta_{l-1,l}^2} + \frac{1}{4\beta_{l-1,l}^3} \right] e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2} y_j)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_{\beta_{l-1,l}}(1+x-\sum_{j=1}^{l-3}y_j-y_{l-2})^2e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j)} \\
&\leq C_{\beta_{l-1,l}}(1+2x-2\sum_{j=1}^{l-3}y_j-y_{l-2})^2e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j)}
\end{aligned}$$

pour une constante $C_{\beta_{l-1,l}} \geq \frac{1}{2\beta_{l-1,l}} > 0$ appropriée. Les deux inégalités découlent respectivement du fait que $\sum_{j=1}^{l-2}y_j \leq x$ et $\sum_{j=1}^{l-3}y_j \leq x$ par les bornes d'intégration de y_{l-2} et y_{l-3} en (2.4.12). Lorsque $l-1 \notin \mathcal{A}_{l-1}$, la première intégrale en (2.4.12) (à partir de l'intérieur) donne

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j} e^{2\beta_{l-1,l}y_{l-1}} dy_{l-1} &= \frac{1}{2\beta_{l-1,l}} e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j)} \\
&\leq C_{\beta_{l-1,l}} e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j)}
\end{aligned}$$

En somme, la première intégrale en (2.4.12) (à partir de l'intérieur) est toujours bornée par

$$C_{\beta_{l-1,l}}(1+2x-2\sum_{j=1}^{l-3}y_j-y_{l-2})^{2 \cdot 1_{\{l-1 \in \mathcal{A}_{l-1}\}}} e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-2}y_j)}.$$

Par suite, si $\delta_j \stackrel{\text{def}}{=} 1_{\{j \in \mathcal{A}_{l-1}\}}$, $1 \leq j \leq l-1$, alors

$$\begin{aligned}
&C_{\beta_{l-1,l}} e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-3}y_j)} \int_{-\infty}^{x-\sum_{j=1}^{l-3}y_j} (1+2x-2\sum_{j'=1}^{l-3}y_{j'}-y_{l-2})^{2(\delta_{l-1}+\delta_{l-2})} e^{2(\beta_{l-2,l}-\beta_{l-1,l})y_{l-2}} dy_{l-2} \\
&\leq C_{\beta_{l-1,l}} e^{2\beta_{l-1,l}(x-\sum_{j=1}^{l-3}y_j)} C_{\beta_{l-2,l-1}} (1+2x-2\sum_{j=1}^{l-4}y_j-y_{l-3})^{2(\delta_{l-1}+\delta_{l-2})} e^{2\beta_{l-2,l-1}(x-\sum_{j=1}^{l-3}y_j)},
\end{aligned}$$

⋮

$$\left(\prod_{j=3}^{l-1} C_{j,j+1}\right) e^{2\beta_{3,l}(x-y_1)} \int_{-\infty}^{x-y_1} (1+2x-2y_1-y_2)^{2\sum_{j=2}^{l-1}\delta_j} e^{2(\beta_{2,l}-\beta_{3,l})y_2} dy_2$$

$$\leq \left(\prod_{j=3}^{l-1} C_{j,j+1}\right) e^{2\beta_{3,l}(x-y_1)} C_{2,3} (1+2x-y_1)^{2\sum_{j=2}^{l-1}\delta_j} e^{2\beta_{2,3}(x-y_1)},$$

$$\left(\prod_{j=2}^{l-1} C_{j,j+1}\right) e^{2\beta_{2,l}x} \int_{-\infty}^x (1+2x-y_1)^{2\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j} e^{2(\beta_{1,l}-\beta_{2,l})y_1} dy_1$$

$$\leq \left(\prod_{j=2}^{l-1} C_{j,j+1}\right) e^{2\beta_{2,l}x} C_{1,2} (1+x)^{2\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j} e^{2\beta_{1,2}x}$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{l-1} C_{j,j+1}\right) (1+x)^{2\sum_{j=1}^{l-1}\delta_j} e^{2\beta_{1,l}x}$$

où $C_{j,j+1} \geq \frac{1}{\beta_{j,j+1}} > 0$, $1 \leq j \leq l-1$ sont des constantes appropriées. Par conséquent, (2.4.12), et par suite la probabilité en (2.4.1), est bornée supérieurement (uniformément en v) par

$$C_1 2^{-2k} (1+x)^2 \sum_{j=1}^{l-1} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} e^{2\beta_{1,l} x}} = C_1 2^{-2k} (1+x)^2 \sum_{j=1}^{l-1} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}}} \quad (2.4.13)$$

où $C_1 > 0$ dépend des paramètres du modèle.

$$\boxed{\text{Cas 2 : } t^{(l-1)} < k \leq \frac{t^{(l-1)} + t^{(l)}}{2} \text{ et } l \in \mathcal{A}_m}$$

La preuve est exactement la même qu'au Cas 1 à l'exception de l'estimé gaussien en (2.4.7). Dans le cas Cas 2, $\omega_l = 3$, alors le deuxième terme en (2.4.7) donne $(k - t^{(l-1)})$. Toutefois, nous avons une exponentielle supplémentaire de la forme $e^{-\frac{5}{2} \log(k - t^{(l-1)})}$ qui vient du fait que $b_{n,x}(k/n) - x = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(k - t^{(l-1)})$ au lieu d'être égal à 0 comme dans le Cas 1. Par conséquent, la probabilité en (2.4.1) est bornée supérieurement (uniformément en v) par

$$C_2 2^{-2k} (k - t^{(l-1)})^{-3/2} (1+x)^2 \sum_{j=1}^{l-1} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}}} \quad (2.4.14)$$

dans ce cas où $C_2 > 0$ dépend des paramètres du modèle.

$$\boxed{\text{Cas 3 : } \frac{t^{(l-1)} + t^{(l)}}{2} < k \leq t^{(l)} \text{ et } l \in \mathcal{A}_m}$$

Le Cas 3 ressemble au Cas 2. Dans le Cas 3, $\omega_l = 3$, alors le deuxième terme en (2.4.7) donne aussi $(k - t^{(l-1)})$. L'exponentielle supplémentaire (par rapport au Cas 1) en (2.4.7) est toujours présente, mais sous la forme $1 \wedge e^{-\frac{5}{2} \log(t^{(l)} - k)}$, du fait que $b_{n,x}(k/n) - x = 0 \vee \left(\frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(t^{(l)} - k) \right)$ lorsque $\frac{t^{(l)} + t^{(l-1)}}{2} < k \leq t^{(l)}$. Nous devons aussi tenir compte de la condition $\bar{S}_v(i) < M_{n,x}^*(i/n) \forall i \in \{t^{(l-1)} + 1, \dots, k-1\}$ dans (♣) en (2.4.2) pour obtenir un estimé de pont brownien supplémentaire dans l'intervalle $[t^{(l-1)}, k]$. En utilisant l'indépendance comme en (2.4.4) et la condition dans la première probabilité en (2.4.5), nous avons une probabilité supplémentaire en (2.4.5) de la forme

$$\mathbb{P} \left(\bar{S}_v(i) - \bar{S}_v(t^{(l-1)}) - \frac{i - t^{(l-1)}}{k - t^{(l-1)}} (\bar{S}_v(k) - \bar{S}_v(t^{(l-1)})) < \right. \\ \left. (M_{n,x}^*(i/n) - x_{l-1}) - \frac{i - t^{(l-1)}}{k - t^{(l-1)}} (M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1}), \quad t^{(l-1)} < i < k \right)$$

où $\{B_i\}_{i=t^{(l-1)}}^k \stackrel{\circ}{=} \{\bar{S}_v(i) - \bar{S}_v(t^{(l-1)}) - \frac{i - t^{(l-1)}}{k - t^{(l-1)}} (\bar{S}_v(k) - \bar{S}_v(t^{(l-1)}))\}_{i=t^{(l-1)}}^k$ est un σ_{π_l} -pont

brownien discret sur l'intervalle de temps $[t^{(l-1)}, k]$, sous la définition 2.4.2. Notons $z_i \doteq (M_{n,x}^*(i/n) - x_{l-1}) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}(M_{n,x}^*(k/n) - x_{l-1})$ et remarquons que

$$\begin{aligned}
z_i &= M_{n,x}^*(i/n) - \frac{k-i}{k-t^{(l-1)}}x_{l-1} - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}M_{n,x}^*(k/n) \\
&= b_{n,x}(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_{n,x}(k/n) - \frac{k-i}{k-t^{(l-1)}}(x_{l-1} - M_n^*(\lambda^{(l-1)})) \\
&\quad + \left[M_n^*(i/n) - \frac{k-i}{k-t^{(l-1)}}M_n^*(\lambda^{(l-1)}) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}M_n^*(k/n) \right] \\
&= b_n(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_n(k/n) + \frac{k-i}{k-t^{(l-1)}}x + \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}(x_{l-1} - M_n^*(\lambda^{(l-1)})) - (x_{l-1} - M_n^*(\lambda^{(l-1)})) \\
&\leq b_n(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_n(k/n) + x - \sum_{j=1}^{l-1} y_j \tag{2.4.15}
\end{aligned}$$

où la quantité entre crochets sur la troisième ligne s'annule en raison de la linéarité de $M_n^*(\cdot)$ sur l'intervalle $[t^{(l-1)}, k]$, $l \in \mathcal{A}_m$. L'inégalité sur la dernière ligne vient du fait que $\sum_{j=1}^{l-1} y_j = x_{l-1} - M_n^*(\lambda^{(l-1)}) \leq x$ par la borne d'intégration en (2.4.2). Nous voulons maintenant montrer que les quantités $b_n(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_n(k/n)$, $t^{(l-1)} < i < k$ sont bornées par une barrière logarithmique afin d'obtenir un estimé de pont brownien via le lemme 2.4.3. Supposons d'abord que $k \neq t^{(l)}$, alors pour tout i tel que $t^{(l-1)} < i \leq \frac{k+t^{(l-1)}}{2} < \frac{t^{(l-1)}+t^{(l)}}{2} < k < t^{(l)}$:

$$\begin{aligned}
b_n(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_n(k/n) &= \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \left(\log(i-t^{(l-1)}) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}} \log(t^{(l)}-k) \right) \\
&\leq \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(i-t^{(l-1)}) \tag{2.4.16}
\end{aligned}$$

en laissant tomber le deuxième logarithme sur la première ligne. Pour tout i tel que $t^{(l-1)} < \frac{k+t^{(l-1)}}{2} < i \leq \frac{t^{(l-1)}+t^{(l)}}{2} < k < t^{(l)}$, nous avons

$$\begin{aligned}
b_n(i/n) - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}}b_n(k/n) &= \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \left(\underbrace{\log(i-t^{(l-1)})}_{\leq \log(t^{(l)}-i)} - \frac{i-t^{(l-1)}}{k-t^{(l-1)}} \log(t^{(l)}-k) \right) \\
&\leq \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} \left(\underbrace{\log(t^{(l)}-i) - \log(t^{(l)}-k)}_{\leq \log(2(k-i)) \leq 1 + \log(k-i)} + \underbrace{\frac{k-i}{k-t^{(l-1)}} \log(t^{(l)}-k)}_{\leq \log(k-t^{(l-1)})} \right) \\
&\leq \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}}{2\sqrt{\log 2}} (1 + \log(k-i) + \log(k-i)). \tag{2.4.17}
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé sur la deuxième ligne le fait que $(t^{(l)} - i) = (t^{(l)} - k) + (k - i) \leq 2(t^{(l)} - k)(k - i)$ (car $t^{(l)} - k, k - i \geq 1$) pour obtenir $\log(t^{(l)} - i) - \log(t^{(l)} - k) \leq \log(2(k - i))$ et la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\log x}{x}$, $x \geq 1$ pour obtenir $\frac{k-i}{k-t^{(l-1)}} \log(k - t^{(l-1)}) \leq \log(k - i)$. Pour tout i tel que $t^{(l-1)} < \frac{k-t^{(l-1)}}{2} < \frac{t^{(l-1)}+t^{(l)}}{2} < i < k < t^{(l)}$, nous avons

$$\begin{aligned} b_n(i/n) - \frac{i - t^{(l-1)}}{k - t^{(l-1)}} b_n(k/n) &= \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu \pi_1}}{2\sqrt{\log 2}} \left(\log(t^{(l)} - i) - \frac{i - t^{(l-1)}}{k - t^{(l-1)}} \log(t^{(l)} - k) \right) \\ &\leq \frac{5}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu \pi_1}}{2\sqrt{\log 2}} (1 + \log(k - i) + \log(k - i)) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

en procédant comme en (2.4.17). Lorsque $k = t^{(l)}$, nous avons trivialement ces bornes logarithmiques, car $b_n(\lambda^{(l)}) = 0$. En appliquant les estimés (2.4.16), (2.4.17) et (2.4.18) à l'inégalité (2.4.15), nous obtenons donc

$$z_i \leq \begin{cases} D \log(i - t^{(l-1)}) + D + x - \sum_{j=1}^{l-1} y_j & \text{si } t^{(l-1)} < i \leq \frac{k+t^{(l-1)}}{2} \\ D \log(k - i) + D + x - \sum_{j=1}^{l-1} y_j & \text{si } \frac{k+t^{(l-1)}}{2} < i < k \end{cases}$$

pour une certaine constante $D > 0$ qui dépend des paramètres du modèle et pour tout k qui respecte les conditions du Cas 3. En somme, en utilisant le lemme 2.4.3 :

$$\mathbb{P} \left(B_i \leq z_i, \quad t^{(l-1)} < i < k \right) \leq C \frac{(1 + D + x - \sum_{j=1}^{l-1} y_j)^2}{k - t^{(l-1)}} \leq \tilde{C} \frac{(1 + 2x - 2 \sum_{j=1}^{l-2} y_j - y_{l-1})^2}{k - t^{(l-1)}}$$

pour une certaine constante $\tilde{C} > 0$ qui dépend des paramètres du modèle. La seconde inégalité vient du fait que $\sum_{j=1}^{l-1} y_j \leq x$ par la borne d'intégration de y_{l-1} en (2.4.12). Le facteur $k - t^{(l-1)}$ s'annule avec le deuxième terme en (2.4.7) dans le Cas 3. Le facteur supplémentaire $(1 + 2x - 2 \sum_{j=1}^{l-2} y_j - y_{l-1})^2$ que nous aurons dans l'intégrale en (2.4.12) se traite comme précédemment dans le processus itératif pour évaluer cette intégrale. Enfin, la probabilité en (2.4.1) sera bornée supérieurement (uniformément en v) par

$$C_3 2^{-2k} (1 \wedge (t^{(l)} - k)^{-5/2}) (1 + x)^{2+2 \sum_{j=1}^{l-1} \delta_j} e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla \nu \pi_1}}} \quad (2.4.19)$$

dans ce cas où $C_3 > 0$ dépend des paramètres du modèle.

Dernière étape de la preuve

En appliquant les bornes (2.4.13), (2.4.14) et (2.4.19) sur la probabilité en (2.4.1), $\mathbb{P}(|\mathcal{G}_{n,m,x}| \geq 1)$ est borné supérieurement par

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k \in \{t^{(1)}, \dots, t^{(m)}\} \\ \vartheta_k \notin \mathcal{A}_m}} C_1 (1+x)^2 \sum_{j=1}^{\vartheta_k-1} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla^{\nu \pi_1}}}} + \sum_{\substack{t^{(\vartheta_{k-1})} < k \leq \frac{t^{(\vartheta_{k-1})} + t^{(\vartheta_k)}}{2} \\ \vartheta_k \in \mathcal{A}_m}} C_2 (k - t^{(\vartheta_{k-1})})^{-3/2} (1+x)^2 \sum_{j=1}^{\vartheta_k-1} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla^{\nu \pi_1}}}} \\
& + \sum_{\substack{\frac{t^{(\vartheta_{k-1})} + t^{(\vartheta_k)}}{2} < k \leq t^{(\vartheta_k)} \\ \vartheta_k \in \mathcal{A}_m}} C_3 (1 \wedge (t^{(\vartheta_k)} - k)^{-5/2}) (1+x)^2 \sum_{j=1}^{\vartheta_k} \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla^{\nu \pi_1}}}} \\
& \leq \tilde{C} (1+x)^2 \sum_{j=1}^m \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla^{\nu \pi_1}}}} \cdot \left[m + m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} + m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/2}} \right] \\
& \leq C (1+x)^2 \sum_{j=1}^m \delta_j e^{-2x \frac{\sqrt{\log 2}}{\sqrt{\nabla^{\nu \pi_1}}}}
\end{aligned}$$

où $C, \tilde{C} > 0$ dépendent des paramètres du modèle et $\sum_{j=1}^m \delta_j = |\mathcal{A}_m|$. Nous avons transféré les termes de la troisième sommation, correspondants aux cas $k = t^{(\vartheta_k)}$, $\vartheta_k \in \mathcal{A}_m$, à la première sommation sur la première ligne et utilisé le fait qu'il y a au plus m ϑ_k différents dans chaque sommation (après le changement) pour obtenir la première inégalité. La seconde inégalité découle de la convergence des séries. Ceci termine la preuve. ■

Pour la borne inférieure, nous utiliserons un résultat important de Fang [24] qui dit que le maximum de la MABI est tendu avec sa médiane. Il restera ensuite à montrer que les maxima de MABI à une seule composante convexe sur les intervalles respectifs $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $1 \leq j \leq m$ sont plus grands (à une constante près) que l'ordre du maximum correspondant, $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})$, avec une probabilité strictement positive qui ne dépend pas de n . Pour les intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $j \in \mathcal{A}_m$, nous utiliserons le résultat d'Addario-Berry et Reed [1] sur la tension du maximum de la MAB avec son deuxième ordre, dont nous donnons maintenant l'énoncé.

Lemme 2.4.5 (Tension du maximum de la MAB avec son deuxième ordre [1]). *Soit $\lambda \in]0, 1]$ tel que $\lambda n \in \mathbb{N}$ et $\{S_v\}_{v \in \mathbb{D}_{\lambda n}}$ une MAB de paramètre $\sigma > 0$ sur l'intervalle de temps $[0, \lambda n]$, sous la définition 1.2.4, alors*

$$\max_{v \in \mathbb{D}_{\lambda n}} S_v = 2\sqrt{\log 2} \sigma \lambda n - \frac{3}{2} \frac{\sigma}{2\sqrt{\log 2}} \log(\lambda n) + O_{\mathbb{P}}(1).$$

Pour les intervalles de temps $[t^{(j-1)}, t^{(j)}]$, $j \notin \mathcal{A}_m$, nous généraliserons les calculs de la borne inférieure du théorème 1.1 de Fang et Zeitouni [25]. En combinant ces arguments, nous obtiendrons la borne inférieure sur la tension du maximum de la MABI.

Lemme 2.4.6 (Borne inférieure pour l'ordre 2 et la tension). *Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ le champ d'une MABI de paramètres (σ, λ) sous la définition 2.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \lambda)$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $K_\epsilon > 0$ (qui dépend des paramètres du modèle) tel que*

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_n} \bar{S}_v \leq 2\sqrt{\log 2} \gamma^* n - \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{2} \frac{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}{2\sqrt{\log 2}} \log(\nabla t^{(j)}) - K_\epsilon \right) < \epsilon, \quad n \geq n_0$$

où n_0 ne dépend pas de ϵ , $\omega_j = 3$ si $j \in \mathcal{A}_m$ et $\omega_j = 1$ sinon.

DÉMONSTRATION. Par le théorème 1 de [24], nous savons que la suite $\{\bar{S}_n^* - \text{Med}(\bar{S}_n^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\widetilde{K}_\epsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{P} \left(|\bar{S}_n^* - \text{Med}(\bar{S}_n^*)| \geq \widetilde{K}_\epsilon \right) < \epsilon \quad (2.4.20)$$

pour tout $n \geq n_0$ où n_0 ne dépend pas de ϵ . Si nous montrons qu'il existe des constantes $C \geq 0$ et $D > 0$, indépendantes de n , telles que

$$\mathbb{P} \left(\bar{S}_n^* \geq M_n^* - C \right) \geq D, \quad n \geq n_0 \quad (2.4.21)$$

alors nous aurons

$$\text{Med}(\bar{S}_n^*) \geq M_n^* - C - \widetilde{K}_D, \quad n \geq n_0. \quad (2.4.22)$$

Autrement, $D \leq \mathbb{P} \left(\bar{S}_n^* \geq M_n^* - C \right) \leq \mathbb{P} \left(\bar{S}_n^* > \text{Med}(\bar{S}_n^*) + \widetilde{K}_D \right) < D$ pour tout $n \geq n_0$ par (2.4.20) et nous aurions une contradiction. Posons $K_\epsilon \doteq \widetilde{K}_\epsilon + C + \widetilde{K}_D$. Si (2.4.21) était satisfait, alors l'inégalité (2.4.22) et la tension en (2.4.20) nous donnerait

$$\mathbb{P} \left(\bar{S}_n^* \leq M_n^* - K_\epsilon \right) \leq \mathbb{P} \left(\bar{S}_n^* \leq \text{Med}(\bar{S}_n^*) - \widetilde{K}_\epsilon \right) < \epsilon, \quad n \geq n_0$$

et la preuve serait terminée. Or, par l'indépendance des accroissements de la MABI dans le temps, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}} \bar{S}_v^{(j)} \geq \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - \bar{C}^{(j)} \right) \geq D^{\frac{1}{m}}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2.4.23)$$

pour certaines constantes $\bar{C}^{(j)} \geq 0$, $1 \leq j \leq m$, où les champs $\{\bar{S}_v^{(j)}\}_{v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}}$, $1 \leq j \leq m$ sont les particules finales de MABI sur l'intervalle de temps $[0, \nabla t^{(j)}]$ avec paramètres de variance $\sigma_{\pi_{j-1}+1}, \dots, \sigma_{\pi_j}$, correspondant aux échelles de temps $\lambda_{\pi_{j-1}+1} - \lambda^{(j-1)} < \lambda_{\pi_{j-1}+2} - \lambda^{(j-1)} < \dots < \lambda_{\pi_j} - \lambda^{(j-1)}$, pour que l'inégalité (2.4.21) soit satisfaite. Notons $\bar{S}_v^{(j)}(t)$ la marche aléatoire aux temps intermédiaires $0 \leq t \leq \nabla t^{(j)}$.

Lorsque $j \in \mathcal{A}_m$, il y a un seul paramètre de variance σ_{π_j} , alors (2.4.23) découle directement du lemme 2.4.5 en choisissant $D > 0$ suffisamment petit en (2.4.21). Lorsque $j \notin \mathcal{A}_m$, nous pouvons supposer sans perdre de généralité que l'hypothèse \mathcal{H} suivante est vérifiée :

$$\mathcal{H} : \forall j \notin \mathcal{A}_m, \exists i \in \{\pi_{j-1} + 1, \pi_{j-1} + 2, \dots, \pi_j - 1\} \text{ tel que } \hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}(\lambda_i) = \mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda_i).$$

Autrement, si nous avons $p^{(j)} - 1 \in \mathbb{N}$ tels points λ_i sur chaque intervalle $]\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}[$, $j \notin \mathcal{A}_m$, disons $\lambda^{(j-1)} \doteq \lambda_{i_0} < \lambda_{i_1} < \lambda_{i_2} < \dots < \lambda_{i_{p^{(j)}-1}} < \lambda_{i_{p^{(j)}}} \doteq \lambda^{(j)}$, alors nous considérerions des processus de MABI, $\{\{\bar{S}_{v,p}^{(j)}(t)\}_{t=0}^{\nabla_p t_{i_p}}\}_{v \in \mathbb{D}_{\nabla_p t_{i_p}}}$, $1 \leq p \leq p^{(j)}$, avec paramètres de variance correspondants sur l'intervalle $]\lambda_{i_{p-1}}, \lambda_{i_p}]$ et nous demanderions comme en (2.4.23) que

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\nabla_p t_{i_p}}} \bar{S}_{v,p}^{(j)} \geq \frac{\nabla_p \lambda_{i_p}}{\nabla \lambda^{(j)}} \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - \bar{C}_p^{(j)} \right) \geq D^{\frac{1}{m \cdot p^{(j)}}}, \quad 1 \leq p \leq p^{(j)}, \quad j \notin \mathcal{A}_m$$

où $\bar{S}_{v,p}^{(j)} \doteq \bar{S}_{v,p}^{(j)}(\nabla_p t_{i_p})$. Cette inégalité serait satisfaite par le lemme 2.4.5 lorsque $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2}$ sur $]\lambda_{i_{p-1}}, \lambda_{i_p}[$ et par le raisonnement qui suit dans l'autre cas.

Nous suivons maintenant les étapes de la borne inférieure du théorème 1.1 de [25]. Fixons $j \notin \mathcal{A}_m$ et supposons que \mathcal{H} est vrai pour le reste de la démonstration. Posons,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{(j)} &\doteq \#\{v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}} \mid \bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)}\}, \\ I_n^{(j)} &\doteq [\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}), \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) + 1], \\ I_{k,n}^{(j)}(x) &\doteq [s_{k,n}^{(j)}(x) - f_{k,n}^{(j)}, s_{k,n}^{(j)}(x) + f_{k,n}^{(j)}], \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

où $s_{k,n}^{(j)}(x)$ est un chemin menant au point x et $f_{k,n}^{(j)}$ une barrière de la forme :

$$\begin{aligned} s_{k,n}^{(j)}(x) &\doteq \frac{\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k + t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n} x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ f_{k,n}^{(j)} &= \begin{cases} C_f^{(j)} (k \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2)^{2/3} & \text{si } 0 \leq k \leq t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} \\ C_f^{(j)} (\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k + t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{2/3} & \text{si } t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} < k \leq \nabla t^{(j)} \end{cases}. \end{aligned}$$

La constante $C_f^{(j)} > 0$ sera choisie plus loin et $\varpi_{k,j} \in \{1, \dots, M\}$ dénote l'indice qui est tel que $t_{\varpi_{k-1,j}} < k + t^{(j-1)} \leq t_{\varpi_{k,j}}$. Par l'inégalité de Paley-Zygmund (avec $\theta = 0$) :

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}} \bar{S}_v^{(j)} \geq \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) \right) \geq \mathbb{P}(\mathcal{N}^{(j)} \geq 1) \geq \frac{(\mathbb{E}[\mathcal{N}^{(j)}])^2}{\mathbb{E}[(\mathcal{N}^{(j)})^2]}. \quad (2.4.24)$$

Si nous bornons le ratio d'espérances par une constante strictement positive et indépendante de n , l'inégalité (2.4.23) sera satisfaite avec $\bar{C}^{(j)} = 0$ et $D > 0$ assez petit en (2.4.21), et nous aurons terminé.

Borne inférieure sur le premier moment

Par la linéarité de l'espérance, nous aurons la borne inférieure sur le premier moment

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] &= 2^{2\nabla t^{(j)}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)} \right) \\ &= 2^{2\nabla t^{(j)}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)} \right) \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)} \right) \geq c^{(j)} > 0\end{aligned}\quad (2.4.25)$$

si nous montrons que

- (i) $\bar{S}_v^{(j)}$ est indépendant de $\{\bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)})\}_{k=0}^{\nabla t^{(j)}}$,
- (ii) $2^{2\nabla t^{(j)}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)} \right) \geq c_1^{(j)}$,
- (iii) $\mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)} \right) \geq c_2^{(j)}$,

pour des constantes $c_1^{(j)}, c_2^{(j)} > 0$ appropriées qui ne dépendent que de j et des paramètres du modèle ($c^{(j)} \doteq c_1^{(j)} \cdot c_2^{(j)}$). Or, pour tout $v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \left(\bar{S}_v^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \right) &= \mathbb{C} \left(\bar{S}_v^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)}(k) \right) - \frac{\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n} \mathbb{V} \left(\bar{S}_v^{(j)} \right) \\ &= \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 - \frac{\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n} \nabla \nu_{\pi_j} n \\ &= 0\end{aligned}\quad (2.4.26)$$

ce qui montre le point (i). Pour le point (ii), $\mathbb{V} \left(\bar{S}_v^{(j)} \right) = \overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}$, alors

$$\mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)} \right) = \int_{\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})}^{\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}}} dz \geq 1 \cdot \frac{c}{\sqrt{\nabla t^{(j)}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})+1)^2}{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}}} \geq c_1^{(j)} 2^{-2\nabla t^{(j)}}$$

car $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) = 2\sqrt{\log 2} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}}{2\sqrt{\log 2}}} \log(\nabla t^{(j)})$ et en bornant inférieurement par une constante les exponentielles n'ayant pas le premier terme de $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})$ en facteur dans le développement du carré à droite de la première inégalité. Pour le point (iii), nous avons par l'indépendance en (2.4.26) que $\mathbb{C} \left(s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}), \bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \right) = 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{V} \left(\bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \right) &= \mathbb{C} \left(\bar{S}_v^{(j)}(k), \bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \right) \\ &= \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 - \frac{\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n} \mathbb{C} \left(\bar{S}_v^{(j)}(k), \bar{S}_v^{(j)} \right) \\ &= \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 \left[\frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{k,j}} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n} \right].\end{aligned}$$

Par conséquent, la sous-additivité suivie d'estimés gaussiens nous donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\nabla t^{(j)}-1} \left\{|\bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)})| > f_{k,n}^{(j)}\right\}\right) \\
&\geq 1 - 2 \sum_{k=1}^{\nabla t^{(j)}-1} \mathbb{P}\left(\bar{S}_v^{(j)}(k) - s_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) > f_{k,n}^{(j)}\right) \\
&\geq 1 - 2 \sum_{k=1}^{\nabla t^{(j)}-1} C \exp\left(-\underbrace{\frac{1}{2} \frac{(f_{k,n}^{(j)})^2}{\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\infty} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 \left[\frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\infty} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n}\right]}}_{\doteq (\blacktriangle)_k}\right).
\end{aligned}$$

Lorsque $1 \leq k \leq t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)}$, nous avons

$$(\blacktriangle)_k \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(C_f^{(j)})^2 k^{4/3} \sigma_{\pi_{j-1}+1}^{8/3}}{k \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2 \cdot [1]}\right) = e^{-\tilde{C}_{f,1}^{(j)} k^{1/3}}$$

en posant $\tilde{C}_{f,1}^{(j)} \doteq \frac{(C_f^{(j)})^2 (\sigma_{\pi_{j-1}+1}^2)^{1/3}}{2} > 0$. Lorsque $t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} < k \leq \nabla t^{(j)} - 1$, nous avons

$$(\blacktriangle)_k \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(C_f^{(j)})^2 (\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\infty} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{4/3}}{(1) \cdot [\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\infty} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2]}\right) \leq e^{-\tilde{C}_{f,2}^{(j)} (\nabla t^{(j)} - k)^{1/3}}$$

en posant $\tilde{C}_{f,2}^{(j)} \doteq \frac{(C_f^{(j)})^2 (\overline{\nabla \nu_{\pi_j}})^{1/3}}{2} > 0$, car $\nabla \nu_{\pi_j} n = \overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}$ et $\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\pi_j} ((k+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 \leq k \overline{\nabla \nu_{\pi_j}}$ par la propriété (2.1.4) du modèle. En somme, les bornes sur $(\blacktriangle)_k$, $1 \leq k \leq \nabla t^{(j)} - 1$ nous donnent

$$\mathbb{P}\left(\bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}^{(j)}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)}\right) \geq 1 - 2C \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-\tilde{C}_{f,1}^{(j)} k^{1/3}} + e^{-\tilde{C}_{f,2}^{(j)} k^{1/3}}\right) \geq c_2^{(j)}$$

en choisissant $C_f^{(j)} > 0$ suffisamment grande. Ceci montre le point (iii).

Borne supérieure sur le deuxième moment

En utilisant la linéarité de l'espérance et en décomposant la somme du deuxième moment en fonction des temps de branchement $\rho(u, v)$ de toutes les paires $u, v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$, nous avons

$$\mathbb{E}\left[(\mathcal{N}^{(j)})^2\right] = \sum_{u,v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}} \mathbb{P}\left(\bar{S}_u^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)}, \bar{S}_u^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_u^{(j)}), \bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\nabla t^{(j)}} \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}} \\ \rho(u,v)=r}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_u^{(j)}, \bar{S}_v^{(j)} \in I_n^{(j)}, \bar{S}_u^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_u^{(j)}), \bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_v^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)} \right) \\
&\leq \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] \right)^2 + \mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] \\
&\quad + \sum_{r=1}^{\nabla t^{(j)}-1} \sum_{\substack{u,v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}} \\ \rho(u,v)=r}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_u^{(j)} \in I_n^{(j)}, \bar{S}_u^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_u^{(j)}) \quad \forall 0 < k < \nabla t^{(j)} \right) \\
&\quad \cdot \max_{x \in I_n^{(j)}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} - \bar{S}_v^{(j)}(r) \in [x - s_{r,n}^{(j)}(x) - f_{r,n}^{(j)}, x - s_{r,n}^{(j)}(x) + f_{r,n}^{(j)}] \right) \tag{2.4.27}
\end{aligned}$$

L'espérance au carré à droite de l'inégalité vient du cas $\rho(u,v) = 0$, c'est-à-dire où $\bar{S}_u^{(j)}$ est indépendant de $\bar{S}_v^{(j)}$ pour tout couple $u, v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$. L'espérance (sans carré) vient du cas $\rho(u,v) = \nabla t^{(j)}$, c'est-à-dire lorsque $u = v$. L'autre partie à droite de l'inégalité vient du fait que les accroissements $\bar{S}_v^{(j)} - \bar{S}_v^{(j)}(r)$ sont indépendants de $\bar{S}_u^{(j)}(k)$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, \nabla t^{(j)}\}$ lorsque $\rho(u,v) = r$ et du fait que nous avons laissé tomber les conditions $\bar{S}_v^{(j)}(k) \in I_{k,n}(\bar{S}_v^{(j)})$, $r < k < \nabla t^{(j)}$ dans la probabilité de la deuxième ligne. Pour tout $r \in \{1, 2, \dots, \nabla t^{(j)} - 1\}$, il y a $2^{2\nabla t^{(j)}} 2^{2(\nabla t^{(j)}-r)}$ paires $u, v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$ telles que $\rho(u,v) = r$, alors la double somme en (2.4.27) est bornée supérieurement par

$$\mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] \underbrace{\sum_{r=1}^{\nabla t^{(j)}-1} 2^{2(\nabla t^{(j)}-r)} \max_{\substack{x \in I_n^{(j)} \\ v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}}} \mathbb{P} \left(\bar{S}_v^{(j)} - \bar{S}_v^{(j)}(r) \in [x - s_{r,n}^{(j)}(x) - f_{r,n}^{(j)}, x - s_{r,n}^{(j)}(x) + f_{r,n}^{(j)}] \right)}_{\doteq (\heartsuit)_r} \doteq (\spadesuit)^{(j)}$$

Notons que $\mathbb{V} \left(\bar{S}_v^{(j)} - \bar{S}_v^{(j)}(r) \right) = \nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\bar{\omega}_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2$, $0 \leq r \leq \nabla t^{(j)}$.

Lorsque $1 \leq r \leq t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)}$, $\sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\bar{\omega}_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2 = r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2$, alors, dans ce cas, nous avons pour tout $x \in I_n^{(j)}$ et pour tout $v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$:

$$\begin{aligned}
(\heartsuit)_r &= \int_{x-s_{r,n}^{(j)}(x)-f_{r,n}^{(j)}}^{x-s_{r,n}^{(j)}(x)+f_{r,n}^{(j)}} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2} \right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}} dz \\
&\leq 2f_{r,n}^{(j)} \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - s_{r,n}^{(j)}(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})) - f_{r,n}^{(j)})^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2} \right)}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}} \quad \text{car } x \geq \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) \text{ et } f_{r,n}^{(j)} \geq 0 \\
&\leq 2 \cdot C_f^{(j)} r^{2/3} \sigma_{\pi_{j-1}+1}^{4/3} \cdot \frac{2^{-\frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}{\nabla \nu_{\pi_j}}}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}} e^{\frac{1}{2} \frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}{\nabla \nu_{\pi_j} \nabla t^{(j)}} \log(\nabla t^{(j)})} \frac{2\sqrt{\log 2} C_f^{(j)} r^{2/3} \sigma_{\pi_{j-1}+1}^{4/3}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}
\end{aligned}$$

$$\leq C_1 \cdot C_f^{(j)} \cdot r^{2/3} 2^{-2(\nabla t^{(j)} - \eta_1^{(j)} r)} e^{C_2 \cdot C_f^{(j)} r^{2/3}} \quad \text{où } \eta_1^{(j)} \doteq \frac{\sigma_{\pi_{j-1}+1}^2}{\nabla \nu_{\pi_j}} < 1 \quad (2.4.28)$$

et $C_1, C_2 > 0$ dépendent des paramètres du modèle. Pour obtenir la deuxième inégalité en (2.4.28), nous avons borné par 1 les exponentielles ne contenant pas le premier terme de $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - s_{r,n}^{(j)}(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}))$ en facteur dans la décomposition du carré sur la deuxième ligne. La première exponentielle à droite de la deuxième inégalité en (2.4.28) est bornée par une constante multipliée par

$$e^{\frac{1}{2} \log(\nabla \nu_{\pi_j} n - r \sigma_{\pi_{j-1}+1}^2)}$$

en utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\log x}{x}$, $x \geq 1$ et ce dernier terme s'annule avec la racine carrée au dénominateur de la même ligne. L'exposant du 2 sur la dernière ligne en (2.4.28) s'obtient en remarquant que $\nabla \nu_{\pi_j} n = \overline{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla t^{(j)}$ et $\sigma_{\pi_{j-1}+1}^2 < \overline{\nabla \nu_{\pi_j}}$ sous l'hypothèse \mathcal{H} lorsque $j \notin \mathcal{A}_m$. Similairement, lorsque $(t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} + 1) \leq r \leq \nabla t^{(j)} - 1$, nous avons pour tout $x \in I_n^{(j)}$ et pour tout $v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}$:

$$\begin{aligned} (\blacktriangledown)_r &= \int_{x-s_{r,n}^{(j)}(x)-f_{r,n}^{(j)}}^{x-s_{r,n}^{(j)}(x)+f_{r,n}^{(j)}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}\right)}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}} dz \\ &\leq 2f_{r,n}^{(j)} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - s_{r,n}^{(j)}(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)})) - f_{r,n}^{(j)})^2}{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}\right)}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}} \quad \text{car } x \geq \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) \text{ et } f_{r,n}^{(j)} \geq 0 \\ &\leq 2 \cdot C_f^{(j)} \cdot \frac{2^{-2 \frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j}}}}{(\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{-1/6}} \\ &\cdot e^{\frac{1}{2} \frac{\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2}{\nabla \nu_{\pi_j} \nabla t^{(j)}}} \frac{\log(\nabla t^{(j)})}{e} \frac{2\sqrt{\log 2} \frac{C_f^{(j)} (\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{2/3}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}}{e} \\ &\leq C_3 \cdot C_f^{(j)} \cdot \frac{2^{-2\eta_2^{(j)} (\nabla t^{(j)} - r)} e^{2\sqrt{\log 2} \frac{C_f^{(j)} (\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{2/3}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}}}{(\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\varpi_{r,j}} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)^{-2/3}} \quad (2.4.29) \end{aligned}$$

où $C_3 > 0$ dépend des paramètres du modèle et

$$\eta_2^{(j)} \doteq \min_{(t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} + 1) \leq r \leq \nabla t^{(j)} - 1} \frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(j)}) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(r/n)}{(\nabla \lambda^{(j)} - (r/n)) \nabla \nu_{\pi_j}} > 1.$$

Ce minimum est strictement plus grand que 1 indépendamment de n . En effet, le ratio est strictement plus grand que 1, sous l'hypothèse \mathcal{H} , pour les points $r \in \{t_{\pi_{j-1}+1} -$

$t^{(j-1)} + 1, t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} + 2, \dots, t_{\pi_j-1} - t^{(j-1)}\}$ par la propriété symétrique à la propriété (2.1.4) du modèle et le ratio est égal à $\frac{\sigma_{\pi_j}^2}{\nabla \nu_{\pi_j}} > 1$, sous l'hypothèse \mathcal{H} , pour les points $r \in \{t_{\pi_{j-1}} - t^{(j-1)} + 1, t_{\pi_{j-1}} - t^{(j-1)} + 2, \dots, \nabla t^{(j)}\}$. Pour obtenir la deuxième inégalité en (2.4.29), nous avons borné par 1 les exponentielles ne contenant pas le premier terme de $\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) - s_{r,n}^{(j)}(\nabla M_n^*(\lambda^{(j)}))$ en facteur dans la décomposition du carré sur la deuxième ligne. La première exponentielle à droite de la deuxième inégalité en (2.4.29) est bornée par une constante multipliée par

$$e^{\frac{1}{2} \log(\nabla \nu_{\pi_j} n - \sum_{i=\pi_{j-1}+1}^{\pi_j} ((r+t^{(j-1)}) \wedge t_i - t_{i-1}) \sigma_i^2)}$$

en utilisant la décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{\log x}{x}$, $x \geq 1$ et ce dernier terme s'ajoute à la racine sixième au dénominateur de la ligne au-dessus. Le facteur $\eta_2^{(j)} > 1$ sur la dernière ligne en (2.4.29) s'obtient en remarquant que le ratio à l'exposant du 2 sur la troisième ligne s'écrit comme

$$\frac{\mathcal{J}_{\sigma^2}(\lambda^{(j)}) - \mathcal{J}_{\sigma^2}(r/n)}{(\nabla \lambda^{(j)} - (r/n)) \nabla \nu_{\pi_j}} (\nabla t^{(j)} - r).$$

En combinant les bornes sur $(\blacktriangledown)_r$, $1 \leq r \leq \nabla t^{(j)} - 1$ en (2.4.28) et en (2.4.29) :

$$\begin{aligned} (\boxtimes)^{(j)} &\leq C_f^{(j)} \left[\sum_{r=1}^{t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)}} 2^{-2(1-\eta_1^{(j)})r + o(r)} + \sum_{r=t_{\pi_{j-1}+1} - t^{(j-1)} + 1}^{\nabla t^{(j)} - 1} 2^{2(1-\eta_2^{(j)})(\nabla t^{(j)} - r) + o(\nabla t^{(j)} - r)} \right] \\ &\leq C_f^{(j)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[2^{-2(1-\eta_1^{(j)})k + o(k)} + 2^{2(1-\eta_2^{(j)})k + o(k)} \right] \\ &\leq C^{(j)} \end{aligned} \tag{2.4.30}$$

car $\eta_1^{(j)} < 1$ et $\eta_2^{(j)} > 1$ indépendamment de n où $C^{(j)} > 0$ ne dépend que de j et des paramètres du modèle. En appliquant la borne (2.4.30) en (2.4.27), nous avons

$$\mathbb{E} \left[(\mathcal{N}^{(j)})^2 \right] \leq \left(\mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] \right)^2 + \mathbb{E} \left[\mathcal{N}^{(j)} \right] (1 + C^{(j)}). \tag{2.4.31}$$

Dernière étape de la preuve

En combinant les inégalités (2.4.25) et (2.4.31) en (2.4.24), nous obtenons

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in \mathbb{D}_{\nabla t^{(j)}}} \bar{S}_v^{(j)} \geq \nabla M_n^*(\lambda^{(j)}) \right) \geq \frac{1}{1 + \frac{1+C^{(j)}}{\mathbb{E}[\mathcal{N}^{(j)}]}} \geq \frac{1}{1 + \frac{1+C^{(j)}}{c^{(j)}}} > 0.$$

C'est ce que nous voulions en (2.4.24). Ceci termine la démonstration. ■

Chapitre 3

LE CHAMP LIBRE GAUSSIEN (CLG)

Maintenant que nous avons prouvé les théorèmes sur le premier ordre de convergence du maximum et l'ordre du nombre de hauts points pour la MABI, nous voulons faire de même avec une version analogue, inhomogène dans le temps, du champ libre gaussien. Les démonstrations pour le CLGI seront semblables en raison de la structure branchante inhérente à la définition du CLG.

Ce qui distingue les processus associés au CLGI et à la MABI est, entre autres, la variance de leurs accroissements. Les variables du champ associé à la MABI ont tous la même variance, ce qui n'est pas le cas du CLGI (et du CLG) pour lequel les variances décroissent vers 0 lorsqu'on s'approche de la frontière de V_N . Cette propriété, qui découle de la condition de Dirichlet (voir la définition 3.1.3), crée des problèmes de bord similaires pour les accroissements pris à toutes les échelles du temps. Nous devons ainsi reprendre les preuves pour la MABI et s'assurer qu'à toutes les étapes où la variance d'accroissements intervient, nous modifions le raisonnement pour tenir compte de ces effets de bord.

Avant de pouvoir démontrer les théorèmes pour le CLGI, nous avons besoin de certains lemmes sur la variance des accroissements et ces lemmes découlent de lemmes analogues pour le CLG. Pour prouver ces lemmes, il est utile d'introduire une représentation en termes de marches aléatoires pour la matrice de covariance du CLG. Certaines propriétés comme la propriété de Markov et la décomposition des espérances conditionnelles sont aussi nécessaires. Nous présenterons donc une seconde définition du CLG puis montrerons l'équivalence avec l'ancienne définition à la section 3.1. Nous prouverons les propriétés importantes du champ à la section 3.2 et puis nous traiterons la variance des accroissements à la section 3.3.

3.1. DÉFINITIONS

Pour tout sous-ensemble $B \subseteq V_N$, nous notons $\mathcal{F}_B \doteq \sigma(\{\phi_v \mid v \in B\})$. Si B est une boîte discrète, alors \mathbb{P}_B dénote la mesure induite par la loi d'un CLG sur B et les opérateurs $\mathbb{E}_B[\cdot]$, $\mathbb{V}_B(\cdot)$ et $\mathbb{C}_B(\cdot, \cdot)$ dénotent respectivement les opérateurs d'espérance, de variance et de covariance pris sous la mesure \mathbb{P}_B . S'il n'y a pas d'indice, alors $B = V_N$ comme précédemment. Attention, le mot «boîte» ne désigne pas nécessairement une boîte carrée. Une boîte $B \subseteq V_N$ est simplement un rectangle discret contenant son intérieur. On définit l'intérieur de B comme $B^\circ \doteq \{z \in B \mid \nexists v \in \mathbb{Z}^2 \setminus B \text{ tel que } v \sim z\}$ et sa frontière comme $\partial B \doteq B \setminus B^\circ$.

De façon similaire, \mathcal{P}_u dénote la mesure induite (sur un autre espace de probabilité générique) du processus de la marche aléatoire simple (MAS) dans \mathbb{Z}^2 débutant au point $u \in \mathbb{Z}^2$. Nous notons ce processus par $\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ où $W_0 \doteq u$. Les opérateurs d'espérance, de variance et de covariance, respectivement notés $\mathcal{E}_u[\cdot]$, $\mathcal{V}_u(\cdot)$ et $\mathcal{C}_u(\cdot, \cdot)$, sont pris sous la mesure \mathcal{P}_u . À titre de rappel, la MAS possède la *propriété de Markov forte*, à savoir que pour un temps d'arrêt $\tau < \infty$ (p.s.) sur les entiers positifs (\mathbb{N}_0), nous avons

$$\mathcal{P}_u(W_{\tau+k} = v \mid W_\tau = w) = \mathcal{P}_w(W_k = v)$$

pour tout $u, v, w \in \mathbb{Z}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}_0$ (voir le théorème 1.3.2 de [32]).

Avant de poursuivre, le lecteur devrait prendre le temps de revoir la définition 1.2.7. Le champ libre gaussien a été défini à l'aide de sa densité marginale sur la boîte V_N° ainsi que la condition de Dirichlet sur la frontière de V_N . Nous avons mentionné que la représentation matricielle des covariances correspondait à l'inverse du laplacien discret (multiplié par σ^2), dont nous donnons maintenant la définition.

Définition 3.1.1 (Laplacien discret). *Soit une fonction $h : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, alors l'opérateur $\Delta : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelé le laplacien discret et est défini comme suit :*

$$\Delta h(u) \doteq h(u) - \frac{1}{4} \sum_{v \sim u} h(v), \quad u \in \mathbb{Z}^2.$$

De plus, on note Δ_B sa restriction à $B \subseteq \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire $\Delta_B h \doteq \Delta h|_B$, et $[\Delta_B]$ dénote sa représentation matricielle sous l'ordre \prec en (1.2.6) lorsque l'ensemble B est fini.

Sous cette définition, la densité marginale du CLG sur V_N° peut être réécrite comme

$$f(\mathbf{x}) \doteq Z^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{x}' [\Delta_{V_N^\circ}] \mathbf{x}\right). \quad (3.1.1)$$

Plus précisément, la matrice $[\Delta_{V_N^\circ}]$ est de taille $(N-1)^2 \times (N-1)^2$, tridiagonale par blocs

de tailles respectives $(N - 1) \times (N - 1)$, et elle prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{T} & \mathbf{D} & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{T} & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{D} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

où $\mathbf{T} \doteq \text{tridiag}_{N-1}(-1/4, 1, -1/4)$, $\mathbf{D} \doteq \text{diag}_{N-1}(-1/4)$ et $\mathbf{0}$ est la matrice nulle. Nous verrons plus loin que l'inverse de cette matrice correspond à la représentation matricielle de la fonction de Green sur V_N , dont nous donnons maintenant la définition.

Définition 3.1.2 (Fonction de Green). *Pour toute boîte finie $B \subseteq \mathbb{Z}^2$, la fonction de Green (du laplacien discret) sur B est définie comme suit :*

$$G_B(u, v) \doteq \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial B}-1} 1_{\{W_k=v\}} \right], \quad u, v \in B.$$

où $\tau_{\partial B} \doteq \inf\{k \geq 0 \mid W_k \in \partial B\}$ est le temps de premier passage sur la frontière de B de la MAS débutant au point u .

Nous pouvons maintenant comparer la définition précédente du CLG sur V_N avec sa seconde définition, qui spécifie les covariances du champ plutôt que sa densité jointe.

Définition 3.1.3 (Champ libre gaussien (CLG)). *Soit une boîte finie $B \subseteq \mathbb{Z}^2$, alors un champ gaussien $\{\phi_v\}_{v \in B}$ est appelé champ libre gaussien sur B si*

$$\mathbb{C}_B(\phi_u, \phi_v) = \sigma^2 G_B(u, v), \quad u, v \in B.$$

Notez que la condition de Dirichlet est satisfaite, c'est-à-dire que $\phi_v \equiv 0$ pour tout $v \in \partial B$, car $G_B(v, v) = 0$ pour tout $v \in \partial B$.

Comme nous l'avons motivé au début de ce chapitre, nous aimerions montrer que les deux définitions du CLG sur V_N , 1.2.7 et 3.1.3, sont équivalentes. Toutefois, il semble plus approprié de vérifier d'abord que la définition 1.2.7 définit bien un champ gaussien. À la vue de l'équation (3.1.1), il suffit de vérifier que $[\Delta_{V_N^c}]^{-1}$ est symétrique définie positive.

La symétrie découle directement de la symétrie de la matrice $[\Delta_{V_N^c}]$ (voir (3.1.2)), car les opérations de transposition et d'inverse commutent. Si nous montrons que $[\Delta_{V_N^c}]$ est définie positive, alors toutes ses valeurs propres seront strictement positives et par conséquent,

$[\Delta_{V_N^o}]^{-1}$ sera définie positive, car ses valeurs propres sont simplement l'inverse des valeurs propres de $[\Delta_{V_N^o}]$. En raison de la symétrie, nous savons que les valeurs propres de $[\Delta_{V_N^o}]$ sont réelles. Si on note $[\Delta_{V_N^o}] = I - [Q_{V_N^o}]$, où I est la matrice identité de taille $(N-1)^2 \times (N-1)^2$, alors nous voulons montrer que $[Q_{V_N^o}]$ ne possède pas de valeurs propres plus grandes ou égales à 1 en valeur absolue. La matrice $[Q_{V_N^o}]$ est en fait la matrice de transition de la MAS sur V_N où nous avons enlevé les états sur la frontière de V_N . Plus spécifiquement, pour tout $u, v \in V_N^o$ tel que u est i -ième et v est j -ième par rapport à l'ordre \prec (voir (1.2.6) pour un rappel), alors

$$([Q_{V_N^o}]^k)_{ij} = \mathcal{P}_u(W_k = v, \tau_{\partial V_N} > k). \quad (3.1.3)$$

C'est-à-dire que le k -ième produit de la matrice de transition tronquée $[Q_{V_N^o}]$ représente les probabilités d'aller d'un point à un autre, en k pas, avant de toucher à la frontière de V_N . Nous avons clairement que

$$\min_{z \in V_N^o} \mathcal{P}_z(\tau_{\partial V_N} \leq N) \geq 4^{-N} > 0 \quad (3.1.4)$$

car d'un point donné dans V_N^o , il existe toujours un chemin de longueur N , dont le point final se trouve à l'extérieur de V_N^o , et la probabilité que la MAS suive ce chemin est 4^{-N} . En particulier, pour $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, (N-1)^2\}$, où $u \in V_N^o$ est i -ième sous l'ordre complet \prec , nous avons par (3.1.3) que

$$([Q_{V_N^o}]^{pN})_{ij} \leq \mathcal{P}_u(\tau_{\partial V_N} > pN). \quad (3.1.5)$$

En conditionnant sur le point $z_{p-1} \in V_N^o$ où sera la MAS au temps $(p-1)N$ et sur le fait qu'elle ne sortira pas de V_N^o avant ce temps, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_u(\tau_{\partial V_N} > pN) &= \sum_{z_{p-1} \in V_N^o} \mathcal{P}_u(\tau_{\partial V_N} > pN \mid W_{(p-1)N} = z_{p-1}, \tau_{\partial V_N} > (p-1)N) \\ &\quad \cdot \mathcal{P}_u(W_{(p-1)N} = z_{p-1}, \tau_{\partial V_N} > (p-1)N). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

En utilisant la propriété de Markov de la MAS, cette dernière équation est égale à

$$\begin{aligned} &\sum_{z_{p-1} \in V_N^o} \mathcal{P}_{z_{p-1}}(\tau_{\partial V_N} > N) \mathcal{P}_u(W_{(p-1)N} = z_{p-1}, \tau_{\partial V_N} > (p-1)N) \\ &\leq \max_{z \in V_N^o} \mathcal{P}_z(\tau_{\partial V_N} > N) \underbrace{\sum_{z_{p-1} \in V_N^o} \mathcal{P}_u(W_{(p-1)N} = z_{p-1}, \tau_{\partial V_N} > (p-1)N)}_{\mathcal{P}_u(\tau_{\partial V_N} > (p-1)N)} \\ &\leq (1 - 4^{-N}) \mathcal{P}_u(\tau_{\partial V_N} > (p-1)N) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité (3.1.4) pour obtenir la dernière borne. En regroupant cette borne avec l'équation (3.1.6) et l'inégalité (3.1.5), et en itérant le raisonnement que nous venons de faire, nous trouvons

$$([Q_{V_N^o}]^{pN})_{ij} \leq (1 - 4^{-N})^p$$

qui tend vers 0 (uniformément en i et j) lorsque $p \rightarrow \infty$. En particulier, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|[Q_{V_N^o}]^{pN}\|_\infty = 0$, alors $[Q_{V_N^o}]$ ne peut pas avoir une valeur propre $|\lambda| \geq 1$, car autrement

$$0 \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|[Q_{V_N^o}]^k\|_\infty \|\mathbf{x}\|_\infty \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|[Q_{V_N^o}]^k \mathbf{x}\|_\infty = \liminf_{k \rightarrow \infty} |\lambda|^k \|\mathbf{x}\|_\infty > 0$$

pour le vecteur propre $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ correspondant, ce qui serait une contradiction. Ceci montre que toutes les valeurs propres de $[Q_{V_N^o}]$ sont strictement plus petites que 1 en valeur absolue, c'est-à-dire

$$|\rho_2([Q_{V_N^o}])| < 1 \tag{3.1.7}$$

où ρ_2 dénote le rayon spectral. Puisque toutes les valeurs propres de la matrice identité I sont 1, cela montre que toutes les valeurs propres de $[\Delta_{V_N^o}]$ sont strictement positives. Par conséquent, $[\Delta_{V_N^o}]^{-1}$ est symétrique définie positive et définit bien une matrice de covariance pour un champ gaussien. Nous pouvons maintenant montrer l'équivalence entre les deux définitions du CLG.

Proposition 3.1.4 (Équivalence entre les deux définitions du CLG). *Le champ gaussien $\phi \doteq \{\phi\}_{v \in V_N}$ est un CLG sur V_N sous la définition 1.2.7 si et seulement si c'est un CLG sur V_N sous la définition 3.1.3.*

Nous donnons deux preuves de cette proposition. La première preuve est extrêmement simple à cause du travail que nous avons fait plus haut et la seconde (tirée de [14]) est donnée à titre de référence, car elle utilise des idées probabilistes intéressantes et nous aurons aussi besoin d'un résultat de la démonstration pour expliciter les espérances conditionnelles du champ à la section 3.2.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1.4.

- (1) Puisque les covariances du CLG déterminent sa loi (voir (3.1.1) et (1.1.1)) et que la condition de Dirichlet est satisfaite sous les deux définitions, il suffit de montrer que l'inverse de $[\Delta_{V_N^o}]$ correspond à la représentation matricielle de la fonction de Green sur V_N restreinte au domaine $V_N^o \times V_N^o$. Or, pour tout $u, v \in V_N^o$ tel que u est i -ième et v est j -ième par rapport à l'ordre complet \prec , nous avons

$$\begin{aligned}
([\Delta_{V_N^o}]^{-1})_{ij} &= ((I - [Q_{V_N^o}])^{-1})_{ij} = I_{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} ([Q_{V_N^o}]^k)_{ij} \quad \text{par (3.1.7)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_u(W_k = v, \tau_{\partial V_N} - 1 \geq k) \quad \text{par (3.1.3)} \\
&= \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} 1_{\{W_k = v\}} \right] = G_{V_N}(u, v)
\end{aligned}$$

ce qui termine la première preuve. Le lecteur peut regarder le Théorème 5 page 222 de [31] pour vérifier la deuxième égalité.

- (2) Comme pour le point (1), nous savons que la condition de Dirichlet est satisfaite sous les deux définitions. Pour tout $v \in V_N^o$ fixé, nous voulons ainsi montrer que

$$g(u) \doteq \mathbb{C}(\phi_u, \phi_v) = \sigma^2 G_{V_N}(u, v) \doteq h(u) \quad \forall u \in V_N^o \quad (3.1.8)$$

où l'opérateur de covariance, $\mathbb{C}(\cdot, \cdot)$, est celui sous la définition 1.2.7. L'idée de la preuve est de montrer les deux points suivants :

- (a) $\Delta g(u) = 0 \quad \forall u \in V_N^o \setminus \{v\}$ et $\Delta g(v) = \sigma^2$,
- (b) $\Delta h(u) = 0 \quad \forall u \in V_N^o \setminus \{v\}$ et $\Delta h(v) = \sigma^2$.

Si (a) et (b) étaient vérifiés, alors nous aurions $\Delta(g-h)(u) = 0$ pour tout $u \in V_N^o$, que nous résumons en disant que la fonction $g-h$ est harmonique discrète sur V_N^o , et nous pourrions conclure en appliquant le principe du maximum. L'argument probabiliste suivant explicite cette idée. La proposition 1.4.1 de [32] (le lecteur peut facilement la vérifier) montre que $f(W_{k \wedge \tau})$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle de la MAS débutant au point u lorsque f est une fonction harmonique bornée (là où le processus $\{W_{k \wedge \tau}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ peut se promener) et $\tau < \infty$ (p.s.) est un temps d'arrêt. Si (a) et (b) étaient vérifiés, ceci montrerait que $\{(g-h)(W_{k \wedge \tau_{\partial V_N}})\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ (avec $W_0 \doteq u \in V_N^o$) est une martingale et par le «Optional Sampling Theorem» (voir le théorème 1.86 de [34] par exemple), nous aurions

$$(g-h)(u) = \mathcal{E}_u[(g-h)(W_0)] = \mathcal{E}_u[(g-h)(W_{\tau_{\partial V_N}})] = \mathcal{E}_u[0] = 0, \quad u \in V_N^o$$

car $W_{\tau_{\partial V_N}} \in \partial V_N$ et $g(w) = h(w) = 0$ pour tout $w \in \partial V_N$. Puisque notre choix de $v \in V_N^o$ est arbitraire au départ, l'égalité des covariances en (3.1.8) serait satisfaite et nous aurions fini. Il suffit donc de montrer que (a) et (b) sont satisfaits pour conclure. En prenant $v \in V_N^o$ fixé comme plus haut, nous avons d'abord que $\mathbb{E}[\phi_u \mid (\phi_w)_{w \neq u}]$

est égal à

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x_u \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \frac{1}{4}(x_u - \phi_w)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{w, z \in V_N \setminus \{u\} \\ w \sim z}} \frac{1}{4}(\phi_w - \phi_z)^2\right) dx_u}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \frac{1}{4}(x_u - \phi_w)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\substack{w, z \in V_N \setminus \{u\} \\ w \sim z}} \frac{1}{4}(\phi_w - \phi_z)^2\right) dx_u}. \quad (3.1.9)$$

Pour simplifier la notation, posons $\bar{\phi}_z \doteq \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim z}} \phi_w$ pour tout $z \in V_N^o$. En développant la somme des exponentielles à gauche dans le ratio de la dernière équation, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \frac{1}{4}(x_u - \phi_w)^2 &= x_u^2 - 2x_u \bar{\phi}_u + \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \phi_w^2 \\ &= (x_u - \bar{\phi}_u)^2 + \left[\frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \phi_w^2 - (\bar{\phi}_u)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Ceci nous permet de réécrire (3.1.9) comme

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x_u \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_u - \bar{\phi}_u)^2\right) dx_u}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_u - \bar{\phi}_u)^2\right) dx_u}. \quad (3.1.11)$$

car les exponentielles avec le terme résiduel en (3.1.10) (et les exponentielles à droite en (3.1.9)) s'annulent toutes entre elles, car elles ne dépendent pas de la variable d'intégration x_u . En normalisant les deux intégrales en (3.1.11) et en regroupant avec l'équation (3.1.9) plus haut, nous trouvons

$$\mathbb{E}[\phi_u \mid (\phi_w)_{w \neq u}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{x_u}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_u - \bar{\phi}_u)^2\right) dx_u = \bar{\phi}_u. \quad (3.1.12)$$

Ainsi, nous avons par la dernière équation que

$$\Delta g(u) = \mathbb{E}[\phi_u \phi_v] - \mathbb{E}[\bar{\phi}_u \phi_v] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_u \mid (\phi_w)_{w \neq u}] \phi_v] - \mathbb{E}[\bar{\phi}_u \phi_v] = 0$$

pour tout $u \in V_N^o \setminus \{v\}$ en conditionnant par rapport à $\sigma(\phi_w \mid w \neq u)$. Il reste à montrer que $\Delta g(v) = \sigma^2$ pour que (a) soit vérifié. Or, nous avons

$$\Delta g(v) = \mathbb{E}[(\phi_v - \bar{\phi}_v)\phi_v] = \mathbb{E}[(\phi_v - \bar{\phi}_v)^2] + \mathbb{E}[(\phi_v - \bar{\phi}_v)\bar{\phi}_v]. \quad (3.1.13)$$

La deuxième espérance à droite est 0 en conditionnant par rapport à $\sigma(\phi_z \mid z \neq v)$, car $\mathbb{E}[\phi_v \mid (\phi_z)_{z \neq v}] = \bar{\phi}_v$ par (3.1.12). La première espérance à droite, quant à elle, est égale à $\mathbb{E}[\mathbb{V}(\phi_v \mid (\phi_z)_{z \neq v})]$ en conditionnant par rapport à $\sigma(\phi_z \mid z \neq v)$ et par un calcul tout à fait analogue à celui pour l'espérance conditionnelle entre les

équations (3.1.9) et (3.1.12), nous avons

$$\mathbb{V}(\phi_v \mid (\phi_z)_{z \neq v}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(x_v - \bar{\phi}_v)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_v - \bar{\phi}_v)^2\right) dx_v = \sigma^2.$$

En regroupant l'expression de la variance conditionnelle avec l'équation (3.1.13), nous avons $\Delta g(v) = \sigma^2$. Le point (a) est démontré.

Le point (b) est plus simple et utilise simplement la propriété de Markov de la MAS.

Pour tout $v \in V_N^o$ fixé, nous avons

$$h(u) \doteq \sigma^2 \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} 1_{\{W_k=v\}} \right] = \sigma^2 \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} 1_{\{W_k=v\}} \mid W_1 = w \right]$$

en conditionnant sur le premier pas de la MAS débutant au point u . Le premier terme de la somme à l'intérieur de l'espérance est 1 si $u = v$ et 0 sinon. Ainsi, en séparant ce premier terme et en utilisant ensuite la propriété de Markov de la MAS, nous pouvons réécrire la dernière équation :

$$\begin{aligned} h(u) &= \sigma^2 \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} 1_{\{u=v\}} + \sigma^2 \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=1}^{\tau_{\partial V_N} - 1} 1_{\{W_k=v\}} \mid W_1 = w \right] \\ &= \sigma^2 1_{\{u=v\}} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} \sigma^2 \mathcal{E}_w \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} 1_{\{W_k=v\}} \right] \\ &\doteq \sigma^2 1_{\{u=v\}} + \frac{1}{4} \sum_{\substack{w \in V_N \\ w \sim u}} h(w). \end{aligned}$$

Ceci montre que $\Delta h(u) = \sigma^2 1_{\{u=v\}}$ et termine la preuve. ■

3.2. PROPRIÉTÉS

Dans cette section, nous prouverons les propriétés les plus importantes du champ libre gaussien. Nous traiterons d'abord la propriété de Markov pour les champs de variables aléatoires, qui est un analogue en dimension deux de la propriété de Markov usuelle pour les processus stochastiques en dimension un. Nous montrerons que les espérances conditionnelles sont des combinaisons convexes des variables du champ, par rapport auxquelles on conditionne, dont les poids sont des fonctions harmoniques qui dépendent de la MAS et possèdent une expression simple. Nous montrerons aussi que les accroissements de la forme $\phi_v - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]$, $v \in B$ ont la loi jointe d'un CLG sur B . Enfin, nous discuterons de la structure branchante inhérente à la définition du CLG via le conditionnement.

Proposition 3.2.1 (Propriété de Markov). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$ et $C \subseteq V_N \setminus B$, alors nous avons que*

$$\mathbb{P}(F \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}) = \mathbb{P}(F \mid \mathcal{F}_{\partial B}), \quad F \in \mathcal{F}_{B^o}.$$

DÉMONSTRATION. Si on note $E \doteq \{\phi_v\}_{v \in B^o}(F) \subseteq \mathbb{R}^{B^o}$ l'image de l'ensemble $F \subseteq \Omega$ par le champ $\{\phi_v\}_{v \in B^o}$, $D \doteq \partial B \cup C$ et $\mathbf{x}^o \doteq \{x_v\}_{v \in B^o}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}) &= \mathbb{E}[1_F \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}] \\ &= \frac{\int_E \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{\substack{u,v \in B^o \\ u \sim v}} (x_u - x_v)^2 + \sum_{\substack{u \in B^o \\ v \in \partial B \\ u \sim v}} (x_u - \phi_v)^2 + \sum_{\substack{u,v \in D \\ u \sim v}} (\phi_u - \phi_v)^2 \right)\right) d\mathbf{x}^o}{\int_{\mathbb{R}^{B^o}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{\substack{u,v \in B^o \\ u \sim v}} (x_u - x_v)^2 + \sum_{\substack{u \in B^o \\ v \in \partial B \\ u \sim v}} (x_u - \phi_v)^2 + \sum_{\substack{u,v \in D \\ u \sim v}} (\phi_u - \phi_v)^2 \right)\right) d\mathbf{x}^o} \\ &= \frac{\int_E \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{\substack{u,v \in B^o \\ u \sim v}} (x_u - x_v)^2 + \sum_{\substack{u \in B^o \\ v \in \partial B \\ u \sim v}} (x_u - \phi_v)^2 \right)\right) d\mathbf{x}^o}{\int_{\mathbb{R}^{B^o}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{\substack{u,v \in B^o \\ u \sim v}} (x_u - x_v)^2 + \sum_{\substack{u \in B^o \\ v \in \partial B \\ u \sim v}} (x_u - \phi_v)^2 \right)\right) d\mathbf{x}^o} \\ &= \mathbb{E}[1_F \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \mathbb{P}(F \mid \mathcal{F}_{\partial B}) \end{aligned}$$

où la troisième égalité découle de l'annulation des exponentielles sur la deuxième ligne, dont les couples à l'exposant ne contiennent pas de variables d'intégration. \blacksquare

La propriété de Markov pour les champs de variables aléatoires est une propriété extrêmement forte. En général, elle dit que deux sous-champs d'un même champ sont conditionnellement indépendants lorsque la σ -algèbre, par rapport à laquelle on conditionne, est engendrée par un troisième sous-champ qui sépare les deux premiers par rapport aux indices. Dans le reste du mémoire, nous utiliserons cette propriété sous une forme plus faible. Celle-ci est l'objet du prochain corollaire.

Puisque notre champ prend des valeurs dans l'espace mesurable $(\mathbb{R}^{V_N}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{V_N}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{V_N})$ dénote la σ -algèbre de Borel sur \mathbb{R}^{V_N} , et que la mesure \mathbb{P}_N est induite par la loi du champ sur V_N , le théorème 5 page 229 de [38] nous dit qu'il existe une famille de mesures de probabilité, $\{\tilde{\mathbb{P}}_N(\omega, \cdot)\}_{\omega \in \Omega}$, telle que

$$\tilde{\mathbb{P}}_N(\cdot, F) = \mathbb{P}_N(F \mid \mathcal{F}_{\partial B})(\cdot), \quad \mathbb{P}_N - p.s.$$

pour tout $F \in \mathcal{F}$ et pour tout $B \subseteq V_N$. Ce théorème fondamental nous permet d'interpréter les probabilités conditionnelles comme des mesures de probabilité et en particulier d'écrire les espérances conditionnelles et les covariances conditionnelles sous \mathbb{P}_N comme des opérateurs

d'espérance et de covariance sous la mesure $\tilde{\mathbb{P}}_N$ (voir théorème 3 page 226 de [38]). À la vue de cette discussion et de la proposition 3.2.1, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 3.2.2 (Propriété de Markov faible). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$ et $C \subseteq V_N \setminus B$, alors nous avons que*

- (i) $\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}] = \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}], \quad v \in B,$
- (ii) $\mathbb{C}(\phi_u, \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}) = \mathbb{C}(\phi_u, \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}), \quad u, v \in B.$

La prochaine propriété importante du champ libre gaussien concerne la décomposition explicite des espérances conditionnelles. L'espace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dont les variables du CLG font partie, forme un espace de Hilbert et les projections orthogonales sur cet espace coïncident avec les espérances conditionnelles. Le lecteur intéressé peut consulter le chapitre 2 de [13] pour un traitement du théorème de projection et son lien avec la meilleure prédiction linéaire dans un espace gaussien.

Proposition 3.2.3 (Décomposition des espérances conditionnelles [39]). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$, alors nous avons que*

$$\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \sum_{z \in \partial B} \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z) \phi_z, \quad v \in B$$

DÉMONSTRATION. La démonstration utilise les idées de [39] et les adapte à notre contexte. Nous complétons aussi les détails manquants. Si on note $\mathbf{P}_v = \{P_{v,z}\}_{z \in \partial B}$ le vecteur de probabilités dans la somme de l'énoncé et $\boldsymbol{\xi} \doteq \{\phi_z\}_{z \in \partial B}$, alors nous cherchons un vecteur $\mathbf{L}_v \doteq \{L_{v,z}\}_{z \in \partial B}$ tel que

$$\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \mathbf{L}'_v \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_v = \mathbf{P}_v, \quad v \in B \quad (3.2.1)$$

où $'$ dénote l'opérateur de transposition. Notons que $\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \phi_v$ pour tout $v \in \partial B$, alors nous avons nécessairement que $L_{v,z} = 1_{\{v=z\}}$ pour tout $v, z \in \partial B$. La condition (3.2.1) est trivialement satisfaite dans ce cas, car nous avons aussi $P_{v,z} = 1_{\{v=z\}}$ pour tout $v, z \in \partial B$. De plus, notons que seuls les points $z \in \partial B \cap V_N^o$ contribuent à la somme dans l'énoncé et aussi que $\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cap V_N^o}]$, car les variables sur la frontière de V_N sont identiquement nulles et ne contribuent pas à $\mathcal{F}_{\partial B}$. En particulier, nous pouvons choisir

$$L_{v,z} \doteq P_{v,z}, \quad v \in B^o, \quad z \in \partial B \cap \partial V_N \quad (3.2.2)$$

car cela n'affecte pas l'espérance conditionnelle en (3.2.1).

Si on note $\tilde{\xi}$, \tilde{L}_v et \tilde{P}_v la restriction des vecteurs ξ , L_v et P_v aux indices $z \in \partial B \cap V_N^o$, alors nous cherchons dans un premier temps un vecteur \tilde{L}_v tel que $\mathbb{E}[\phi_v | \mathcal{F}_{\partial B \cap V_N^o}] = \tilde{L}_v' \tilde{\xi}$ pour tout $v \in B^o$ et nous voulons montrer que $\tilde{L}_v = \tilde{P}_v$ pour tout $v \in B^o$ dans un second temps. Regardons le candidat $\tilde{L}_v = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}^{-1} R_{\phi_v, \tilde{\xi}}$, où $R_{\phi_v, \tilde{\xi}}$ est le vecteur de covariance entre ϕ_v et les variables de $\tilde{\xi}$, et $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}$ est la matrice de covariance entre les variables de $\tilde{\xi}$. Nous avons

$$\mathbb{E}[(\phi_v - \tilde{L}_v' \tilde{\xi}) \tilde{\xi}'] = R_{\phi_v, \tilde{\xi}}' - R_{\phi_v, \tilde{\xi}}' R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}^{-1} \mathbb{E}[\tilde{\xi} \tilde{\xi}'] = \mathbf{0}, \quad v \in B^o$$

par linéarité de l'espérance et le fait que la matrice $R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}$ est symétrique. Les variables aléatoires $\phi_v - \tilde{L}_v' \tilde{\xi}$ et $\tilde{\xi}$ sont conjointement gaussiennes et non-corrélées, alors elles sont indépendantes. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[\phi_v - \tilde{L}_v' \tilde{\xi} | \mathcal{F}_{\partial B \cap V_N^o}] = \mathbb{E}[\phi_v - \tilde{L}_v' \tilde{\xi}] = 0, \quad v \in B^o$$

car les variables du champ sont centrées. Par définition, la σ -algèbre $\mathcal{F}_{\partial B \cap V_N^o}$ est engendrée par les variables de $\tilde{\xi}$, alors la linéarité de l'espérance conditionnelle montre que $\mathbb{E}[\phi_v | \mathcal{F}_{\partial B \cap V_N^o}] = \tilde{L}_v' \tilde{\xi}$ pour tout $v \in B^o$ comme nous voulions.

Maintenant, l'idée est de montrer que pour tout $z \in \partial B \cap V_N^o$ fixé :

- (a) $\Delta_v L_{v,z} = 0 \quad \forall v \in B^o$,
- (b) $\Delta_v P_{v,z} = 0 \quad \forall v \in B^o$.

où Δ_v veut simplement dire que le laplacien discret opère par rapport à la variable v . Si (a) et (b) étaient vérifiés, nous aurions, en utilisant la proposition 1.4.1 de [32] suivie de l'«Optional Sampling Theorem», exactement comme dans la seconde preuve de la proposition 3.1.4, que

$$L_{v,z} - P_{v,z} = \mathcal{E}_v [L_{W_{0,z}} - P_{W_{0,z}}] = \mathcal{E}_v [L_{W_{\tau_{\partial B}, z}} - P_{W_{\tau_{\partial B}, z}}] = \mathcal{E}_v [0] = 0, \quad v \in B^o$$

car $L_{v,z} = P_{v,z} = 1_{\{v=z\}}$ pour tout $v, z \in \partial B$. Il suffit donc de montrer que les points (a) et (b) sont satisfaits pour tout $z \in \partial B \cap V_N^o$ afin de conclure.

En appliquant terme à terme le laplacien discret aux composantes du candidat $\tilde{L}_v = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}^{-1} R_{\phi_v, \tilde{\xi}}$, nous avons par linéarité que

$$\Delta_v \tilde{L}_v = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}^{-1} \Delta_v R_{\phi_v, \tilde{\xi}} = R_{\tilde{\xi}, \tilde{\xi}}^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad v \in B^o$$

où la deuxième égalité suit du point (a) dans la seconde preuve de la proposition 3.1.4. Ceci montre vectoriellement le point (a) ci-haut. Le point (b), quant à lui, découle facilement de la propriété de Markov pour la MAS. En effet, pour tout $z \in \partial B \cap V_N^o$ et pour tout $v \in B^o$,

nous avons, en conditionnant sur le premier pas de la MAS débutant au point v , que

$$P_{v,z} \doteq \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{u \in B \\ u \sim v}} \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z \mid W_1 = u) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{u \in B \\ u \sim v}} P_{u,z}.$$

C'est-à-dire que $\Delta_v \tilde{\mathcal{P}}_v = 0$, $v \in B^o$. Ceci termine la démonstration. \blacksquare

Avant d'énoncer la prochaine proposition, nous devons introduire quelques notations et discuter de certaines hypothèses. Sans perdre de généralité, nous supposons dans la suite que $N = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. Comme dans la discussion suivant la définition 2.1.1 de la MABI, nous pouvons faire de telles hypothèses en raison de la nature logarithmique de l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points.

Pour tout $i \doteq (i_1, i_2)$, $1 \leq i_1, i_2 \leq N^\lambda$ et $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\lambda n \in \mathbb{N}_0$, nous appelons λ -boîtes fixes dans V_N les carrés discrets de largeur $N^{1-\lambda}$ de la forme suivante :

$$B_i^\lambda \doteq \left([(i_1 - 1)N^{1-\lambda}, i_1 N^{1-\lambda}] \times [(i_2 - 1)N^{1-\lambda}, i_2 N^{1-\lambda}] \right) \cap V_N.$$

Pour tout $v \in V_N$, B_v^λ dénote la λ -boîte fixe la plus en bas à gauche qui contient le point v (ce choix est arbitraire et sans réelle importance) et v_λ son point central, que nous appelons le *représentant de v à l'échelle λ* . Nous notons $R_\lambda \doteq \bigcup_{v \in V_N} \{v_\lambda\}$ l'ensemble des représentants à l'échelle λ dans V_N . La figure 3.1 illustre l'ensemble des λ -boîtes fixes dans V_N .

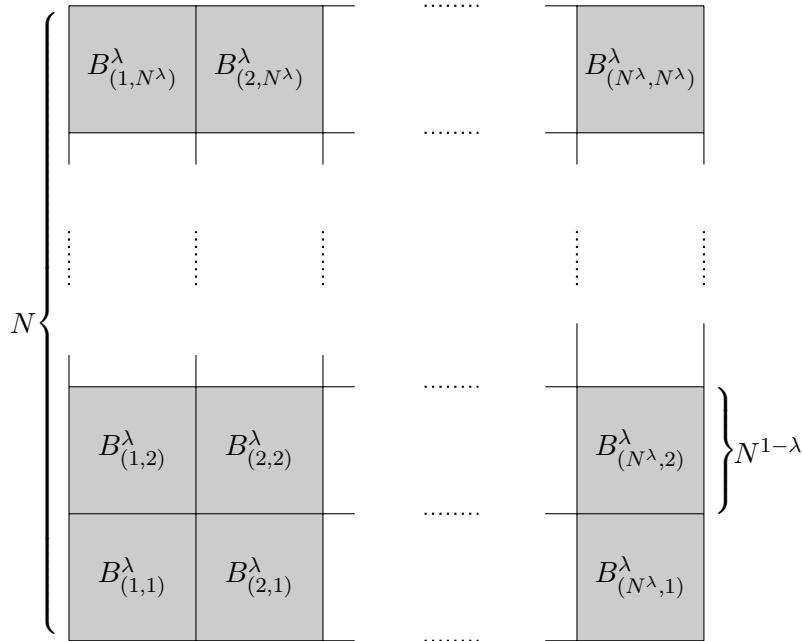


FIGURE 3.1. Représentation des λ -boîtes fixes dans V_N .

Une autre notion de λ -boîtes sont les λ -boîtes mobiles dans V_N illustrées à la figure 3.2. Pour tout $v = (v_1, v_2) \in V_N$ et $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\lambda n \in \mathbb{N}_0$, nous notons

$$[v]_\lambda \doteq \begin{cases} \partial V_N & \text{si } \lambda = 0 \\ \left(\left[v_1 - \frac{1}{2}N^{1-\lambda}, v_1 + \frac{1}{2}N^{1-\lambda} \right] \times \left[v_2 - \frac{1}{2}N^{1-\lambda}, v_2 + \frac{1}{2}N^{1-\lambda} \right] \right) \cap V_N & \text{si } \lambda \in]0, 1[\\ v & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$$

les carrés discrets de largeur $N^{1-\lambda}$ centrés en v et intersectés avec V_N .

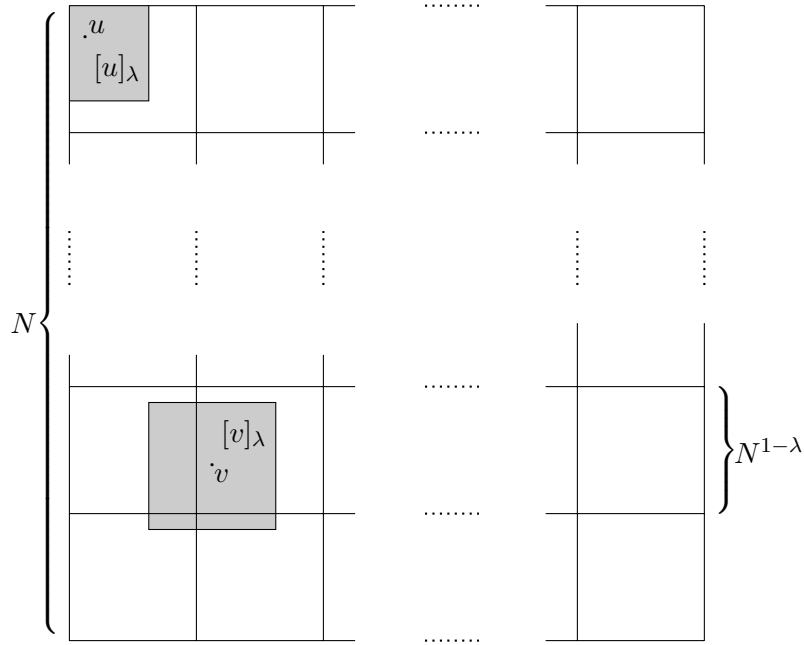


FIGURE 3.2. Représentation des λ -boîtes mobiles autour de deux points u et v dans V_N .

Pour conditionner par rapport à la frontière d'une boîte $B \subseteq V_N$ et d'une λ -boîte mobile, nous notons respectivement

$$\phi_v(B) \doteq \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] \quad \text{et} \quad \phi_v(\lambda) \doteq \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_\lambda}], \quad v \in V_N, \lambda \in [0, 1] (\lambda n \in \mathbb{N}_0).$$

Si la boîte B est carrée, alors $v_B \in V_N$ dénote son centre.

Proposition 3.2.4 (Loi des accroissements). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$, alors le champ $\{\phi_v - \phi_v(B)\}_{v \in B}$ possède la loi d'un CLG sur B . De plus, soit $A, B \subseteq V_N$ des boîtes telles que $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$, alors $\{\phi_u - \phi_u(A)\}_{u \in A}$ est indépendant de $\{\phi_v - \phi_v(B)\}_{v \in B}$.*

DÉMONSTRATION. Soit une boîte $B \subseteq V_N$, le champ $\{\phi_v - \phi_v(B)\}_{v \in B}$ est un champ gaussien centré, car $\phi(B)$ est une combinaison linéaire de variables du CLG par la proposition 3.2.3 et

les variables du CLG sont conjointement gaussiennes et centrées. La loi de $\{\phi_v - \phi_v(B)\}_{v \in B}$ est donc déterminée par ses covariances. Si nous montrons que

$$\mathbb{E}[(\phi_u - \phi_u(B))(\phi_v - \phi_v(B))] = \sigma^2 G_B(u, v), \quad u, v \in B \quad (3.2.3)$$

alors nous aurons que la loi du nouveau champ est un CLG sur B sous la définition 3.1.3.

Or, pour $u, v \in B$, nous avons

$$\begin{aligned} G_{V_N}(u, v) &\stackrel{\circ}{=} \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N}-1} 1_{\{W_k=v\}} \right] = \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial B}-1} 1_{\{W_k=v\}} \right] + \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\tau_{\partial V_N}-1} 1_{\{W_k=v\}} \right] \\ &= G_B(u, v) + \sum_{w \in \partial B} \mathcal{P}_u(W_{\tau_{\partial B}} = w) \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\tau_{\partial V_N}-1} 1_{\{W_k=v\}} \mid W_{\tau_{\partial B}} = w \right] \\ &= G_B(u, v) + \sum_{w \in \partial B} \mathcal{P}_u(W_{\tau_{\partial B}} = w) G_{V_N}(w, v). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

où $\tau_{\partial B}$ dénote le premier temps de passage sur la frontière de B . Nous avons conditionné sur le point qu'atteindrait la MAS débutant au point u au temps $\tau_{\partial B}$ pour obtenir la deuxième égalité. La troisième égalité découle de la propriété de Markov forte de la MAS et la définition de la fonction de Green sur V_N . Par symétrie, $G_{V_N}(w, v) = G_{V_N}(v, w)$, alors en appliquant le même raisonnement :

$$G_{V_N}(w, v) = \underbrace{G_B(v, w)}_{=0} + \sum_{z \in \partial B} \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z) G_{V_N}(z, w) \quad (3.2.5)$$

où $G_B(v, w) = 0$, car $w \in \partial B$ en (3.2.4). En regroupant (3.2.5) avec l'équation (3.2.4) et puisque $G_{V_N}(z, w) = G_{V_N}(w, z) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{C}(\phi_w, \phi_z)$, nous pouvons réécrire $G_{V_N}(u, v)$:

$$\begin{aligned} G_{V_N}(u, v) &= G_B(u, v) + \sum_{w \in \partial B} \sum_{z \in \partial B} \mathcal{P}_u(W_{\tau_{\partial B}} = w) \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z) \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{C}(\phi_w, \phi_z) \\ &= G_B(u, v) + \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E}[\phi_u(B)\phi_v(B)] \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

où nous avons utilisé la décomposition des espérances conditionnelles de la proposition 3.2.3 pour obtenir la seconde égalité. À la vue de l'équation (3.2.6), il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[(\phi_u - \phi_u(B))(\phi_v - \phi_v(B))] = \mathbb{E}[\phi_u \phi_v] - \mathbb{E}[\phi_u(B)\phi_v(B)] \quad (3.2.7)$$

pour obtenir (3.2.3), car $\mathbb{E}[\phi_u \phi_v] = \sigma^2 G_{V_N}(u, v)$. Or, en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{\partial B}$, nous pouvons réécrire les termes croisés à gauche de l'égalité en (3.2.7) :

$$\mathbb{E}[\phi_u \phi_v(B)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_u \mid \mathcal{F}_{\partial B}] \phi_v(B)] \stackrel{\circ}{=} \mathbb{E}[\phi_u(B)\phi_v(B)].$$

Par symétrie, nous avons aussi $\mathbb{E}[\phi_u(B)\phi_v] = \mathbb{E}[\phi_u(B)\phi_v(B)]$. Ceci montre la première partie de l'énoncé. Pour la seconde partie, supposons que $u \in A$, $v \in B$ où $A, B \subseteq V_N$ sont des boîtes telles que $A^o \cap B^o = \emptyset$. Puisque $v \in B \subseteq \partial A \cup A^c$, alors en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{\partial A \cup A^c}$, nous obtenons

$$\mathbb{E}[(\phi_u - \phi_u(A))(\phi_v - \phi_v(B))] = \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_u - \phi_u(A) \mid \mathcal{F}_{\partial A \cup A^c}]}_{=0}(\phi_v - \phi_v(B)) = 0$$

où le terme dans l'espérance s'annule par la propriété de Markov (faible) du CLG (voir le corollaire 3.2.2). Ceci termine la preuve. ■

Une conséquence intéressante de la proposition précédente concerne les covariances conditionnelles. La covariance conditionnelle de n'importe quel point du champ par rapport à une σ -algèbre $\mathcal{F}_{\partial B}$, où $B \subseteq V_N$ est une boîte, est une constante qui dépend seulement de l'ensemble B au lieu d'être une variable aléatoire. En général, c'est aussi vrai lorsque B est quelconque. En fait, les énoncés des propositions ci-dessus sont aussi vrais lorsque les ensembles $B \subseteq V_N$ sont quelconques. Nous avons choisi de nous restreindre au cas particulier des boîtes pour faciliter l'utilisation des résultats.

Corollaire 3.2.5 (Covariance conditionnelle). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$, alors*

$$\mathbb{C}(\phi_u, \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}) = \mathbb{C}_B(\phi_u, \phi_v), \quad u, v \in B$$

où $\mathbb{C}_B(\cdot, \cdot)$ dénote la covariance d'un CLG sur B et $\mathbb{C}_B(\phi_u, \phi_v)$ n'est pas aléatoire.

DÉMONSTRATION. Soit une boîte $B \subseteq V_N$ et $v \in B$, alors pour tout $z \in \partial B$:

$$\mathbb{E}[(\phi_v - \phi_v(B))\phi_z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi_v - \phi_v(B) \mid \mathcal{F}_{\partial B}]\phi_z] = 0. \quad (3.2.8)$$

Ceci montre que $\phi_v - \phi_v(B)$ et $\mathcal{F}_{\partial B}$ sont indépendants pour tout $v \in B$. Par conséquent, pour tout $F \in \mathcal{F}_{\partial B}$ et pour tout $u, v \in B$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\phi_u - \phi_u(B))(\phi_v - \phi_v(B))1_F] &= \mathbb{E}[(\phi_u - \phi_u(B))(\phi_v - \phi_v(B))]\mathbb{E}[1_F] \\ &= \mathbb{C}_B(\phi_u, \phi_v)\mathbb{E}[1_F] = \mathbb{E}[\mathbb{C}_B(\phi_u, \phi_v)1_F] \end{aligned}$$

où la première égalité vient de l'indépendance en (3.2.8) et la deuxième égalité vient de la proposition précédente. La conclusion suit de la définition de la covariance conditionnelle. ■

Parlons maintenant de la structure branchante du CLG. Tout d'abord, nous avons choisi de prendre $V_N \doteq [0, N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$, alors contrairement à la MAB (ou la MABI), le CLG possède

$(N + 1)^2$ variables. Toutefois, un tel choix ne change rien aux questions qui nous intéressent à cause de leur nature logarithmique en N . La description des représentants aux différentes échelles de temps s'en trouve aussi simplifiée. Il est important pour le lecteur de comprendre que, mis à part les différences au niveau de la variance des accroissements créées par les effets de bord de la fonction de Green, le processus de MAB et le processus sous-jacent au CLG se comportent de façon très semblable. En effet, les variables du CLG peuvent être décomposées sous la forme suivante :

$$\phi_v = \phi_{v_1}(1) = \sum_{k=1}^n \left(\phi_{v_{\frac{k}{n}}} \left(\frac{k}{n} \right) - \phi_{v_{\frac{k-1}{n}}} \left(\frac{k-1}{n} \right) \right), \quad v \in V_N \quad (3.2.9)$$

car $\phi_{v_0}(0) = \sum_{z \in \partial V_N} \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial V_N}} = z \right) \phi_z = 0$ par la décomposition des espérances conditionnelles et la condition de Dirichlet. Le lecteur est invité à comparer cette décomposition avec la définition 1.2.4 de la MAB. Pour deux points $u, v \in V_N$, nous notons $\rho(u, v) \in [0, 1]$ leur *temps de branchement*, c'est-à-dire le temps le plus élevé tel que u et v ont le même représentant. Comme pour la MAB, $u_{k/n} = v_{k/n}$, $1 \leq k/n \leq \rho(u, v)$, c'est ce qui crée, en partie, les corrélations entre les variables du CLG. Plus les points u, v sont près de la frontière de V_N , plus la variance des accroissements en (3.2.9) est atténuée en commençant par les échelles les plus petites.

La figure 3.3 illustre la structure branchante du CLG entre les temps 0 et 3/4. Le point au centre (R_0) est le représentant au temps 0, les points aux intersections des lignes minces fermées ($R_{1/4}$) sont les représentants au temps 1/4, les points aux intersections des lignes en tiret ($R_{1/2}$) sont les représentants au temps 1/2 et les points aux intersections des lignes pointillées ($R_{3/4}$) sont les représentants au temps 3/4. Le branchement jusqu'au temps 1 n'est pas dessiné, car il n'est pas uniforme en raison du choix arbitraire que nous avons fait pour déterminer les λ -boîtes fixes et les représentants de chaque point aux différentes échelles et aussi parce que $|V_N| = (N + 1)^2$ n'est pas une puissance de 4.

La covariance du CLG décroît de façon linéaire lorsque le logarithme de la distance euclidienne entre deux points augmente et ces deux points ne sont pas trop près de la frontière de V_N . La proposition 3.2.6 précise cette affirmation. En particulier, la quantité $\log_2(\|u - v\|_2)$ joue le même rôle dans la covariance du CLG que $n - \rho^{(S)}(u, v)$ dans la covariance de la MAB (voir la définition 1.2.4). En fait, nous avons $\|u - v\|_2 = cN^{1-\rho^{(\phi)}(u,v)} = c2^{(n-\rho^{(\phi)}(u,v)n)}$ et donc $\log_2(\|u - v\|_2) = (n - \rho^{(\phi)}(u, v)n) + \tilde{c}$, alors le résultat de la proposition 3.2.6 n'est pas surprenant. La démonstration est laissée au lecteur, car c'est un résultat bien connu

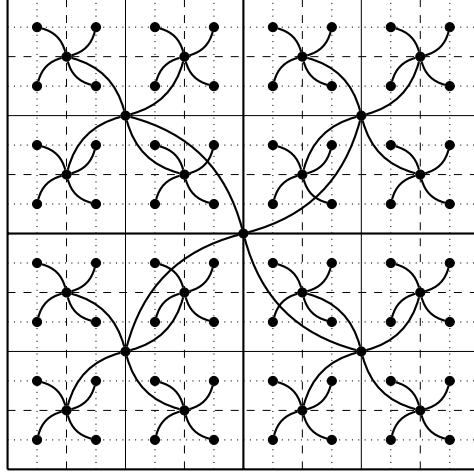


FIGURE 3.3. Structure branchante du champ libre gaussien entre les temps 0 et $3/4$ où $N = 2^4$.

et parce que nous prouverons plusieurs lemmes dans la même veine aux deux prochaines sections. Pour tout $\delta \in [0, 1/2]$, rappelons que

$$V_N^\delta \doteq \left\{ v \in V_N \mid \min_{z \in \partial V_N} \|v - z\|_2 \geq \delta N \right\}. \quad (3.2.10)$$

Proposition 3.2.6 (Covariances du CLG [17]). *Pour tout $u, v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2]$) :*

$$-C_1(\sigma, \delta) \leq \mathbb{C}(\phi_u, \phi_v) - g\sigma^2(\log N - 0 \vee \log(\|u - v\|_2)) \leq C_2(\sigma).$$

En particulier, pour tout $v \in V_N^\delta$, nous avons

$$-C_1(\sigma, \delta) \leq \mathbb{V}(\phi_v) - g\sigma^2 \log N \leq C_2(\sigma)$$

où $C_1, C_2 > 0$ ne dépendent pas de N ni de v .

3.3. ESTIMÉS SUR LA VARIANCE DES ACCROISSEMENTS

Dans cette section, nous utiliserons les outils que nous nous sommes donnés à la section précédente afin de prouver, entre autres, le lemme 3.3.4. Ce lemme important donne des estimés sur la variance de certains accroissements du CLG. Les estimés sur $\mathbb{V}(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1}))$ ne seront pas utilisés explicitement, mais leurs analogues pour le CLGI (voir le lemme 4.2.2) seront cruciaux pour démontrer l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points au chapitre 4. Les estimés sur $\mathbb{V}(\phi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \phi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1}))$, quant à eux, appuieront notre constat de la section précédente, à savoir que les accroissements sur les représentants en (3.2.9) se comportent similairement aux accroissements correspondants de la MAB.

Nous commençons par prouver une version légèrement modifiée du lemme 12 de [7]. À l'origine, ce lemme servait dans la première preuve de l'ordre 1 du maximum pour le CLG.

Lemme 3.3.1. *Soit $B \subseteq V_N$ une boîte dans V_N et $u, v \in B$ tel que $L \doteq \min_{w \in \partial B} \|u - w\|_2 \geq \min_{z \in \partial B} \|v - z\|_2$. Pour tout $0 \leq \eta < 1$ tel que $\|u - v\|_2 \leq \eta L$, nous avons*

$$\mathbb{V}(\phi_u(B) - \phi_v(B)) \leq C$$

où $C = C(\sigma, \eta) > 0$ ne dépend de rien d'autre que $\sigma > 0$ et η .

DÉMONSTRATION. Le lemme est trivial lorsque $L = 0$, car $u = v$ pour tout $0 \leq \eta < 1$ dans ce cas. Supposons donc que $L \geq 1$ et notons que $\mathbb{V}(\phi_u(B) - \phi_v(B)) = \mathbb{V}(\mathbb{E}[\phi_u - \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}])$. En utilisant la formule de variance conditionnelle suivie du corollaire 3.2.5 et en développant les variances avec des fonctions de Green (voir la définition 3.1.3), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\mathbb{E}[\phi_u - \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) &= \mathbb{V}(\phi_u - \phi_v) - \mathbb{E}[\mathbb{V}(\phi_u - \phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B})] \\ &= \mathbb{V}(\phi_u - \phi_v) - \mathbb{V}_B(\phi_u - \phi_v) \\ &= \sigma^2(G_{V_N}(u, u) - G_{V_N}(u, v) + G_{V_N}(v, v) - G_{V_N}(v, u)) \\ &\quad - \sigma^2(G_B(u, u) - G_B(u, v) + G_B(v, v) - G_B(v, u)). \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la définition 3.1.2 pour les fonctions de Green dans la dernière équation, nous pouvons réécrire la variance de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\phi_u(B) - \phi_v(B)) &= \sigma^2 \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} (1_{\{u\}}(W_k) - 1_{\{v\}}(W_k)) \right] + \sigma^2 \mathcal{E}_v \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial V_N} - 1} (1_{\{v\}}(W_k) - 1_{\{u\}}(W_k)) \right] \\ &\quad - \sigma^2 \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial B} - 1} (1_{\{u\}}(W_k) - 1_{\{v\}}(W_k)) \right] - \sigma^2 \mathcal{E}_v \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial B} - 1} (1_{\{v\}}(W_k) - 1_{\{u\}}(W_k)) \right] \\ &= \sigma^2 \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\tau_{\partial V_N} - 1} (1_{\{u\}}(W_k) - 1_{\{v\}}(W_k)) \right] + \sigma^2 \mathcal{E}_v \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\tau_{\partial V_N} - 1} (1_{\{v\}}(W_k) - 1_{\{u\}}(W_k)) \right]. \end{aligned}$$

Puisque les deux espérances sur la dernière ligne sont positives, elles ne peuvent qu'augmenter si nous remplaçons $\tau_{\partial V_N}$ par $\tau_{\partial V_{2N}}$, $\tau_{\partial V_{2N}}$ par $\tau_{\partial V_{4N}}$, etc., dans la borne supérieure de leur sommation. Or $\liminf_{k \rightarrow \infty} \tau_{\partial V_{2^k N}} = \infty$ peu importe si la MAS associée à ces temps d'arrêt commence en u ou v . Par conséquent,

$$\mathbb{V}(\phi_u(B) - \phi_v(B)) \leq \sigma^2 \mathcal{E}_u \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\infty} (1_{\{u\}}(W_k) - 1_{\{v\}}(W_k)) \right] + \sigma^2 \mathcal{E}_v \left[\sum_{k=\tau_{\partial B}}^{\infty} (1_{\{v\}}(W_k) - 1_{\{u\}}(W_k)) \right].$$

En conditionnant sur le point qu'atteindra la MAS à son premier passage sur la frontière de B et en utilisant la propriété de Markov forte de la MAS, la dernière expression est égale à

$$\sigma^2 \sum_{x \in \partial B} (\mathcal{P}_u(W_{\tau_{\partial B}} = x) - \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = x)) \mathcal{E}_x \left[\sum_{k=0}^{\infty} (1_{\{u\}}(W_k) - 1_{\{v\}}(W_k)) \right]. \quad (3.3.1)$$

Notons par $a(w) \doteq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{P}_{\mathbf{0}}(W_k = \mathbf{0}) - \mathcal{P}_{\mathbf{0}}(W_k = w))$, $\mathbf{0}, w \in \mathbb{Z}^2$ la fonction *noyau de potentiel*. Pour tout $x \in \partial B$, nous pouvons réécrire l'espérance en (3.3.1) comme

$$\mathcal{E}_{\mathbf{0}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (1_{\{u-x\}}(W_k) - 1_{\{v-x\}}(W_k)) \right] = a(v-x) - a(u-x). \quad (3.3.2)$$

Or, le théorème 1.6.2 page 38 de [32] montre que

$$a(w) = g \log(\|w\|_2) + \text{const.} + O(\|w\|_2^{-2}), \quad w \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (3.3.3)$$

et $a(0) = 0$ où $O(\|w\|_2^{-2}) \geq 0$. Par conséquent, (3.3.2) s'écrit comme suit :

$$a(v-x) - a(u-x) = g \log \left(\frac{\|v-x\|_2}{\|u-x\|_2} \right) + O(\|v-x\|_2^{-2}) - O(\|u-x\|_2^{-2}). \quad (3.3.4)$$

Par l'inégalité du triangle, $\|u-x\|_2 - \|u-v\|_2 \leq \|v-x\|_2 \leq \|v-u\|_2 + \|u-x\|_2$, alors

$$\log(1-\eta) \leq \log \left(1 - \frac{\|u-v\|_2}{\|u-x\|_2} \right) \leq \log \left(\frac{\|v-x\|_2}{\|u-x\|_2} \right) \leq \log \left(1 + \frac{\|v-u\|_2}{\|u-x\|_2} \right) \leq \log(1+\eta)$$

car $\|u-v\|_2 \leq \eta L$ et $\|u-x\|_2 \geq \min_{w \in \partial B} \|u-w\|_2 \doteq L$ pour tout $x \in \partial B$ par hypothèse.

De même, $\|v-x\|_2 \geq (1-\eta)L$ et $O(\|u-x\|_2^{-2})$, $O(\|v-x\|_2^{-2}) \geq 0$ pour tout $x \in \partial B$, alors

$$g \log(1-\eta) - \frac{C_1}{L^2} \leq (3.3.4) \leq g \log(1+\eta) + \frac{C_2}{(1-\eta)^2 L^2} \quad (3.3.5)$$

pour des constantes $C_1, C_2 > 0$ appropriées qui ne dépendent de rien. En regroupant (3.3.1), (3.3.2), (3.3.4) et (3.3.5), nous avons la borne suivante sur la variance de l'énoncé :

$$\mathbb{V}(\phi_u(B) - \phi_v(B)) \leq \sigma^2 \left(\underbrace{g \log(1+\eta) - g \log(1-\eta)}_{\leq 2g\eta(1-\eta)^{-1}} + \frac{C_1}{L^2} + \frac{C_2}{(1-\eta)^2 L^2} \right).$$

Puisque $L \geq 1$ et $0 \leq \eta < 1$, la conclusion suit directement. ■

Avant de passer au lemme principal sur la variance des accroissements, nous avons besoin de deux autres lemmes. Le premier compare l'espérance conditionnelle d'un point par rapport à sa λ -boîte mobile et l'espérance conditionnelle de ce même point par rapport à une boîte plus grande qui contient la première.

Lemme 3.3.2. Soit $\lambda \in [0, 1[$ ($\lambda n \in \mathbb{N}_0$), $v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2[$) et $B \supseteq [v]_\lambda$ une boîte carrée de largeur $dN^{1-\lambda}$ où $d \geq 1$, alors nous avons

$$\mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) \leq C$$

où $C = C(\sigma, d) > 0$ ne dépend de rien d'autre que $\sigma > 0$ et d .

DÉMONSTRATION. Le lemme est trivial lorsque $\lambda = 0$, car $\phi_v(\lambda) = \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = 0$ du fait que $B = [v]_\lambda = V_N$. Maintenant, supposons que $\lambda \in]0, 1[$, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\phi_v(\lambda)) &= \mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] + \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) \\ &= \mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) + 2\mathbb{E}[(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}])\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]] + \mathbb{V}(\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]). \end{aligned}$$

où la covariance au centre s'annule en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}_{\partial B}$. En effet, la propriété de Markov (faible) du CLG nous permet d'avoir que

$$\mathbb{E}[\phi_v(\lambda) \mid \mathcal{F}_{\partial B}] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_\lambda \cup [v]_\lambda^\xi}\right] \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup B^c}\right] = \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup B^c}] = \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}].$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathcal{F}_{\partial B \cup B^c} \subseteq \mathcal{F}_{\partial[v]_\lambda \cup [v]_\lambda^\xi}$ pour obtenir la deuxième égalité. Par conséquent,

$$\mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) = \mathbb{V}(\phi_v(\lambda)) - \mathbb{V}(\mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]). \quad (3.3.6)$$

En utilisant la formule de variance conditionnelle pour chaque terme à droite de l'égalité en (3.3.6) suivie du corollaire 3.2.5, la variance de l'énoncé s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \mathbb{E}[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]) &= \left(\mathbb{V}(\phi_v) - \mathbb{E}\left[\mathbb{V}(\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_\lambda})\right]\right) - (\mathbb{V}(\phi_v) - \mathbb{E}[\mathbb{V}(\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B})]) \\ &= \sigma^2(G_B(v, v) - G_{[v]_\lambda}(v, v)). \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Or, pour toute boîte finie $A \subseteq \mathbb{Z}^2$, la proposition 1.6.3 page 39 de [32] montre que

$$G_A(x, y) = \left[\sum_{z \in \partial A} \mathcal{P}_x(W_{\tau_{\partial A}} = z) a(z - y) \right] - a(y - x), \quad x, y \in A \quad (3.3.8)$$

où $a(w) = g \log(\|w\|_2) + \text{const.} + O(\|w\|_2^{-2})$ pour tout $w \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ et $a(0) = 0$ par (3.3.3).

En utilisant cette proposition, nous pouvons réécrire (3.3.7) comme

$$\sigma^2 \sum_{z \in \partial B} \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial B}} = z) a(z - v) - \sigma^2 \sum_{z \in \partial[v]_\lambda} \mathcal{P}_v(W_{\tau_{\partial[v]_\lambda}} = z) a(z - v). \quad (3.3.9)$$

En notant que $\|v - z\|_2 \leq \frac{d}{\sqrt{2}}N^{1-\lambda}$ pour $z \in \partial B$ et $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2}N^{1-\lambda}$ pour $z \in \partial[v]_\lambda$, la conclusion suit directement en appliquant l'estimé sur $a(\cdot)$ en (3.3.9). \blacksquare

Le prochain lemme est une conséquence directe des deux lemmes précédents. Il permet de comparer l'espérance conditionnelle d'un point et de son représentant par rapport à leur λ -boîte mobile respective.

Lemme 3.3.3. *Soit $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda n \in \mathbb{N}_0$) et $v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2]$), alors*

$$\mathbb{V}(\phi_v(\lambda) - \phi_{v_\lambda}(\lambda)) \leq C.$$

où $C = C(\sigma) > 0$ ne dépend de rien d'autre que $\sigma > 0$.

DÉMONSTRATION. Le lemme est trivial lorsque $\lambda \in \{0, 1\}$, car $\phi_v(\lambda) = \phi_{v_\lambda}(\lambda)$ dans les deux cas. Supposons donc que $\lambda \in]0, 1[$. Par définition, la λ -boîte mobile de v_λ coïncide avec la λ -boîte fixe de v , c'est-à-dire que $[v_\lambda]_\lambda = B_v^\lambda$. Notons par $B \subseteq V_N$ la boîte carrée centrée en v de largeur $2N^{1-\lambda}$ et remarquons que pour $N = N(\delta)$ assez grand :

- (1) B contient $[v]_\lambda$ et $[v_\lambda]_\lambda$,
- (2) $L \doteq N^{1-\lambda} = \min_{z \in \partial B} \|v - z\|_2 \geq \min_{z \in \partial B} \|v_\lambda - z\|_2$,
- (3) $\|v - v_\lambda\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}L$.

En utilisant l'inégalité de Jensen, nous pouvons borner la variance de l'énoncé par

$$3 \left\{ \mathbb{E} \left[(\phi_v(\lambda) - \phi_v(B))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(\phi_v(B) - \phi_{v_\lambda}(B))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(\phi_{v_\lambda}(B) - \phi_{v_\lambda}(\lambda))^2 \right] \right\}$$

car il y a trois termes dans l'accolade. Le point (1) ci-haut et le lemme 3.3.2 (avec $d = 2$) nous permettent de borner la première et la troisième espérance par une constante. Les points (2) et (3) ci-haut et le lemme 3.3.1 (avec $\eta = 1/\sqrt{2}$) nous permettent de borner la deuxième espérance par une constante. ■

Lemme 3.3.4 (Estimés sur la variance des accroissements). *Soit $v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2]$) et $1 \leq k \leq l \leq M$, alors nous avons*

- (i) $-C_1(\sigma, \delta) \leq \mathbb{V}(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1})) - g(\lambda_l - \lambda_{k-1}) \log N \leq C_2(\sigma)$,
- (ii) $-C_3(\sigma) \sqrt{\log N} \leq \mathbb{V}(\phi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \phi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1})) - g(\lambda_l - \lambda_{k-1}) \log N \leq C_4(\sigma)$,

où $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ ne dépendent pas de N, v, k ou l .

DÉMONSTRATION. Soit $1 \leq k \leq l \leq M$, alors par la propriété de Markov (faible) du CLG :

$$\mathbb{E} \left[\phi_v(\lambda_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_l}} \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_{k-1}} \cup ([v]_{\lambda_{k-1}})^c} \right] \mid \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_l} \cup ([v]_{\lambda_l})^c} \right] = \phi_v(\lambda_{k-1}) \quad (3.3.10)$$

car $\mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_{k-1}} \cup ([v]_{\lambda_{k-1}})^c} \subseteq \mathcal{F}_{\partial[v]_{\lambda_l} \cup ([v]_{\lambda_l})^c}$. Ainsi, en utilisant l'équation (3.3.10) et la formule de variance conditionnelle, nous pouvons réécrire la variance du point (i) de l'énoncé :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1})) &= \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left[\phi_v - \phi_v(\lambda_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\lambda_l}\right]\right) \\ &= \mathbb{V}(\phi_v - \phi_v(\lambda_{k-1})) - \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(\phi_v - \phi_v(\lambda_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\lambda_l}\right)\right].\end{aligned}$$

Par l'équation (3.3.10), nous pouvons laisser tomber le terme $\phi_v(\lambda_{k-1})$ dans la variance conditionnelle de la dernière ligne. En utilisant la proposition 3.2.4 sur la loi des accroissements et le corollaire 3.2.5, la variance du point (i) de l'énoncé donne

$$\mathbb{V}(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1})) = \mathbb{V}_{[v]\lambda_{k-1}}(\phi_v) - \mathbb{V}_{[v]\lambda_l}(\phi_v) = \sigma^2(G_{[v]\lambda_{k-1}}(v, v) - G_{[v]\lambda_l}(v, v)).$$

Maintenant, en utilisant la proposition 1.6.3 page 39 de [32] (voir l'équation (3.3.8)), la dernière équation est égale à

$$\sum_{z \in \partial[v]\lambda_{k-1}} \mathcal{P}_v\left(W_{\tau_{\partial[v]\lambda_{k-1}}} = z\right) \sigma^2 a(z - v) - \sum_{z \in \partial[v]\lambda_l} \mathcal{P}_v\left(W_{\tau_{\partial[v]\lambda_l}} = z\right) \sigma^2 a(z - v)$$

où $a(w) = g \log(\|w\|_2) + \text{const.} + O(\|w\|_2^{-2})$ pour tout $w \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par (3.3.3). En notant que $\|v - z\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{1-\lambda_{k-1}} \vee \sqrt{2}N$ pour $z \in \partial[v]\lambda_{k-1}$ et $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\lambda_l}$ pour $z \in \partial[v]\lambda_l$, nous avons la borne supérieure du point (i). De plus, $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\lambda_{k-1}} \wedge \delta N$ pour $z \in \partial[v]\lambda_{k-1}$ et $\|v - z\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{1-\lambda_l}$ pour $z \in \partial[v]\lambda_l$, alors nous avons aussi la borne inférieure du point (i). En fait, $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\lambda_{k-1}}$ pour tout $k \in \{2, \dots, M\}$ et pour tout $z \in \partial[v]\lambda_{k-1}$, alors la dépendance en δ dans la borne inférieure du point (i) ne se produit que lorsque $k = 1$.

L'inégalité de Jensen nous permet de borner la variance du point (ii) de l'énoncé par $3 \left\{ \mathbb{E}\left[(\phi_{v\lambda_l}(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_l))^2\right] + \mathbb{E}\left[(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1}))^2\right] + \mathbb{E}\left[(\phi_v(\lambda_{k-1}) - \phi_{v\lambda_{k-1}}(\lambda_{k-1}))^2\right] \right\}$. car il y a trois termes dans l'accolade. Le lemme 3.3.3 nous permet de borner la première et troisième espérance par une constante et le point (i) nous permet de borner la deuxième espérance par $g(\lambda_l - \lambda_{k-1}) \log N + C(\sigma)$, alors nous avons la borne supérieure du point (ii). Pour la borne inférieure, $\mathbb{V}\left(\phi_{v\lambda_l}(\lambda_l) - \phi_{v\lambda_{k-1}}(\lambda_{k-1})\right)$ est bornée inférieurement par

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left((\phi_{v\lambda_l}(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_l)), (\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1}))\right) &+ \mathbb{C}\left((\phi_{v\lambda_l}(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_l)), (\phi_v(\lambda_{k-1}) - \phi_{v\lambda_{k-1}}(\lambda_{k-1}))\right) \\ &+ \mathbb{V}(\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1})) + \mathbb{C}\left((\phi_v(\lambda_l) - \phi_v(\lambda_{k-1})), (\phi_v(\lambda_{k-1}) - \phi_{v\lambda_{k-1}}(\lambda_{k-1}))\right)\end{aligned}$$

en négligeant deux termes de variance. Par Cauchy-Schwarz, le lemme 3.3.3 et la borne supérieure du point (i), le premier et le troisième terme de covariance sont bornés inférieurement par $-C(\sigma)\sqrt{\log N}$. Par Cauchy-Schwarz et le lemme 3.3.3, le deuxième terme de covariance est borné inférieurement par $-\tilde{C}(\sigma)$. Par la borne inférieure du point (i), le terme de variance est borné inférieurement par $g(\lambda_l - \lambda_{k-1}) \log N - C_1(\sigma, \delta)$. En regroupant ces bornes, nous avons la borne inférieure du point (ii) pour $N = N(\delta)$ assez grand. ■

Chapitre 4

LE CHAMP LIBRE GAUSSIEN INHOMOGÈNE (CLGI)

4.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

Dans cette section, nous utiliserons la même notation qu'utilisée pour définir le CLG et aussi la notation du chapitre 2 pour tout ce qui a trait aux échelles $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M$ et aux paramètres de variance $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M$. Un champ libre gaussien inhomogène est simplement un CLG dont la variance des accroissements dans la décomposition (3.2.9) change un nombre fini de fois lorsqu'on néglige les effets de bord. Par contraste, la variance des accroissements dans la décomposition (3.2.9) est toujours égale à $g\sigma^2 \log 2$ lorsqu'on néglige les effets de bords. Notre définition du CLGI dépend du CLG, contrairement à la MABI, dont la définition est une extension de la MAB sans dépendre directement du cas homogène. La variance des accroissements reste tout de même complètement analogue à celle de la MABI, comme nous allons voir plus loin.

Définition 4.1.1 (Champ libre gaussien inhomogène (CLGI)). *Un champ libre gaussien inhomogène à M niveaux sur V_N est un champ gaussien $\psi \doteq \{\psi_v\}_{v \in V_N}$ défini comme suit :*

$$\psi_v \doteq \sum_{i=1}^M \sigma_i \nabla \phi_v(\lambda_i), \quad v \in V_N$$

où $\sigma \doteq (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in (\mathbb{R}_+^)^M$ et $\lambda \doteq (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M) \in]0, 1]^M$ sont des temps tels que $0 \doteq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M \doteq 1$ et ϕ est un CLG avec $\sigma = 1$. En particulier, la condition de Dirichlet est satisfaite, car $\psi_v \equiv 0$ pour tout $v \in \partial V_N$ du fait que $\phi_v \equiv 0$ pour tout $v \in \partial V_N$.*

Comme mentionné dans la discussion suivant la proposition 3.2.3 sur la décomposition des espérances conditionnelles du CLG au chapitre 3 ou encore lors de la discussion suivant la définition 2.1.1 de la MABI, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que $\lambda_i n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ et $N = 2^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En général, les λ_i -boîtes

du CLGI ($i \in \{1, \dots, M-1\}$) ne découperaient pas parfaitement V_N , mais elles seraient quand même assez près d'être carrées pour que cela n'affecte que par une constante les estimés sur la variance des accroissements et, par suite, les estimées gaussiennes dans les preuves de l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points.

Parmi les propriétés de la section 3.2 sur le CLG, seules la propriété de Markov faible et la propriété sur la loi des accroissements se généralisent bien. Notons que le CLGI ne possède pas la propriété de Markov en général. Par contre, si l'ensemble F , dans l'énoncé de la proposition 3.2.1, est inclus dans une sous- σ -algèbre $\sigma(\psi_v \mid v \in J) \subseteq \mathcal{F}_{B^o}$ et l'ensemble B^o contient tous les points des ensembles $[v]_{\lambda_1}$, $v \in J$, alors l'énoncé analogue pour ψ est vrai. Autrement dit, la frontière de l'ensemble B , qui sépare les variables ψ_v , $v \in J$ des variables à l'extérieure de B , doit être assez grande pour contenir le «champ d'action» des espérances conditionnelles $\phi_v(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq M$, $v \in J$ dans la définition du CLGI pour que la propriété de Markov soit respectée. Ce champ d'action est le plus grand pour la plus petite échelle λ dans la définition 4.1.1, c'est-à-dire λ_1 .

Même si le CLGI ne possède pas la propriété de Markov, il possède néanmoins la propriété de Markov faible au même sens que le CLG au corollaire 3.2.2, en raison de la linéarité des opérateurs d'espérance et de covariance conditionnelle.

Proposition 4.1.2 (Propriété de Markov faible). *Soit une boîte $B \subseteq V_N$ et $C \subseteq V_N \setminus B$, alors nous avons que*

- (i) $\mathbb{E}[\psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}] = \mathbb{E}[\psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}]$, $v \in B$,
- (ii) $\mathbb{C}(\psi_u, \psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}) = \mathbb{C}(\psi_u, \psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B})$, $u, v \in B$.

DÉMONSTRATION. Soit $v \in B$, par la définition 4.1.1 du CLGI et la linéarité de l'espérance conditionnelle, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}[\nabla \phi_v(\lambda_i) \mid \mathcal{F}_{\partial B \cup C}] = \mathbb{E}[\nabla \phi_v(\lambda_i) \mid \mathcal{F}_{\partial B}], \quad 1 \leq i \leq M \quad (4.1.1)$$

pour que la propriété (i) soit satisfaite. Or, les accroissements $\nabla \phi_v(\lambda_i)$ sont des combinaisons linéaires des variables du CLG par la proposition 3.2.3, alors il suffit d'utiliser la linéarité de l'espérance conditionnelle et d'appliquer la propriété de Markov faible du CLG (point (i) du corollaire 3.2.2) à chaque terme de la combinaison linéaire pour conclure. Le point (ii) est similaire. Soit $u, v \in B$, par la définition 4.1.1 du CLGI et la bilinéarité de la covariance conditionnelle, il suffit de montrer

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\nabla \phi_u(\lambda_i) \nabla \phi_v(\lambda_j) \mid \mathcal{F}_{\partial BUC}] - \mathbb{E} [\nabla \phi_u(\lambda_i) \mid \mathcal{F}_{\partial BUC}] \mathbb{E} [\nabla \phi_v(\lambda_j) \mid \mathcal{F}_{\partial BUC}] \\ &= \mathbb{E} [\nabla \phi_u(\lambda_i) \nabla \phi_v(\lambda_j) \mid \mathcal{F}_{\partial B}] - \mathbb{E} [\nabla \phi_u(\lambda_i) \mid \mathcal{F}_{\partial B}] \mathbb{E} [\nabla \phi_v(\lambda_j) \mid \mathcal{F}_{\partial B}] \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

pour tout $i, j \in \{1, \dots, M\}$. L'équation (4.1.1) nous permet d'égaliser le produit d'espérances à gauche de l'égalité en (4.1.2) avec le produit d'espérances à droite de l'égalité. Pour montrer l'égalité entre les deux termes restants en (4.1.2), nous pouvons décomposer le produit $\nabla \phi_u(\lambda_i) \nabla \phi_v(\lambda_j)$ en une somme de produits de variables du CLG en utilisant la proposition 3.2.3 et appliquer terme à terme la propriété de Markov faible du CLG (point (ii) du corollaire 3.2.2). ■

Le prochain lemme généralise en partie la proposition 3.2.4. Nous pourrions facilement traiter le cas des boîtes quelconques, mais choisissons de nous restreindre aux cas des λ -boîtes mobiles pour simplifier l'énoncé et pour faciliter l'utilisation du lemme plus tard. La décomposition des accroissements du champ ψ en une somme d'accroissements du champ ϕ sera utilisée régulièrement dans la suite.

Pour toute boîte $B \subseteq V_N$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda n \in \mathbb{N}_0$), nous notons

$$\psi_v(B) \doteq \mathbb{E} [\psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial B}] \quad \text{et} \quad \psi_v(\lambda) \doteq \mathbb{E} [\psi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\lambda}]$$

dans le reste du mémoire. Pour être clair, les σ -algèbres \mathcal{F}_B , $B \subseteq V_N$ sont engendrées par le champ ϕ et non par le champ ψ .

Proposition 4.1.3 (Loi des accroissements). *Soit $v \in V_N$, alors pour tout $1 \leq k \leq l \leq M$:*

$$(i) \quad \psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1}) = \sum_{i=k}^l \sigma_i \nabla \phi_v(\lambda_i),$$

$$(ii) \quad \mathbb{V}(\psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1})) = \sum_{i=k}^l \sigma_i^2 \left(G_{[v]\lambda_{i-1}}(v, v) - G_{[v]\lambda_i}(v, v) \right).$$

Soit $\alpha_j \doteq \frac{j}{K}$, $0 \leq j \leq K$ ($K \in \mathbb{N}$), $2r_K \doteq \frac{2}{K} \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$, $\alpha_j n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $j \in \{0, \dots, K\}$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ de sorte que les α_j forment une partition plus fine de $[0, 1]$ que les λ_i . Pour tout $1 \leq k \leq l \leq K$:

$$(iii) \quad \psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1}) = \sum_{j=k}^l \sigma(\alpha_j) \nabla \phi_v(\alpha_j),$$

$$(iv) \quad \mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) = \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \left(G_{[v]\alpha_{j-1}}(v, v) - G_{[v]\alpha_j}(v, v) \right).$$

Pour un rappel de la fonction de Green G , voir la définition 3.1.2.

DÉMONSTRATION. Les points (i) et (ii) découlent respectivement des points (iii) et (iv), car la partition des α_j , $0 \leq j \leq K$ est plus fine que la partition des λ_i , $0 \leq i \leq M$ par

hypothèse de l'énoncé. Soit $v \in V_N$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$, nous avons

$$\psi_v(\alpha_i) = \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^K \sigma(\alpha_j) \nabla \phi_v(\alpha_j) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_i} \right]$$

par définition. Or, par la propriété de Markov (faible) du CLG, il est facile de voir que

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_j} \right] \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_i} \right] = \begin{cases} \mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_j} \right] & \text{si } j \leq i \\ \mathbb{E} \left[\phi_v \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_i} \right] & \text{si } j \geq i \end{cases} \quad (4.1.3)$$

car $\mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_j \cup ([v]\alpha_j)^c} \subseteq \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_i \cup ([v]\alpha_i)^c}$ si $j \leq i$ et l'inverse sinon. Ceci montre que $\psi_v(\alpha_i) = \sum_{j=1}^i \sigma(\alpha_j) \nabla \phi_v(\alpha_j)$. Le point (iii) suit en prenant $i = l$ et $i = k - 1$, et en soustrayant les résultats. Maintenant, pour le point (iv), nous avons avec l'indépendance des accroissements dans le temps et la décomposition du point (iii) :

$$\mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) = \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \mathbb{V}(\nabla \phi_v(\alpha_j)), \quad 1 \leq k \leq l \leq K. \quad (4.1.4)$$

Par (4.1.3), les termes de variance à droite de l'égalité en (4.1.4) s'écrivent comme $\mathbb{V}(\mathbb{E}[\phi_v - \phi_v(\alpha_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_j}])$. En utilisant la formule de variance conditionnelle suivie de la proposition 3.2.4 sur la loi des accroissements du CLG et le corollaire 3.2.5, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) &= \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \left(\mathbb{V}(\phi_v - \phi_v(\alpha_{j-1})) - \mathbb{E} \left[\mathbb{V}(\phi_v - \phi_v(\alpha_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{\partial[v]\alpha_j}) \right] \right) \\ &= \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \left(G_{[v]\alpha_{j-1}}(v, v) - G_{[v]\alpha_j}(v, v) \right). \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

4.2. ESTIMÉS SUR LA VARIANCE DES ACCROISSEMENTS

Dans cette section, nous prouvons l'analogie, pour le CLGI, des lemmes 3.3.3 et 3.3.4 sur la variance des accroissements en partitionnant plus finement le temps.

Lemme 4.2.1. *Soit $\alpha_j \doteq \frac{j}{K}$, $0 \leq j \leq K$ ($K \in \mathbb{N}$), $2r_K \doteq \frac{2}{K} \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$, $\alpha_j n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $j \in \{0, \dots, K\}$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ de sorte que les α_j forment une partition plus fine de $[0, 1]$ que les λ_i . Pour tout $v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2[$) et pour tout $0 \leq l \leq K$:*

$$\mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_{v_{\alpha_l}}(\alpha_l)) \leq C$$

où $C = C(\sigma) > 0$ ne dépend de rien d'autre que $\sigma > 0$ (c.-à-d. $\sigma_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}$).

DÉMONSTRATION. La proposition est triviale lorsque $l = 0$, car $\psi_v(\alpha_l) = \psi_{v_{\alpha_l}}(\alpha_l) = 0$. En utilisant le point (iii) de la proposition 4.1.3 suivi de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \mathbb{V} \left(\psi_v(\alpha_l) - \psi_{v_{\alpha_l}}(\alpha_l) \right) &= \mathbb{V} \left(\sum_{j=1}^l \sigma(\alpha_j) (\nabla \phi_v(\alpha_j) - \nabla \phi_{v_{\alpha_j}}(\alpha_j)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \mathbb{C} \left(\sigma(\alpha_i) (\nabla \phi_v(\alpha_i) - \nabla \phi_{v_{\alpha_i}}(\alpha_i)), \sigma(\alpha_j) (\nabla \phi_v(\alpha_j) - \nabla \phi_{v_{\alpha_j}}(\alpha_j)) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l \sigma(\alpha_i) \sigma(\alpha_j) \sqrt{\mathbb{V} \left(\nabla \phi_v(\alpha_i) - \nabla \phi_{v_{\alpha_i}}(\alpha_i) \right)} \sqrt{\mathbb{V} \left(\nabla \phi_v(\alpha_j) - \nabla \phi_{v_{\alpha_j}}(\alpha_j) \right)} \end{aligned}$$

pour tout $l \in \{1, \dots, K\}$. L'inégalité de Jensen nous permet de borner les termes de variance dans la dernière double somme. Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$:

$$\mathbb{V} \left(\nabla \phi_v(\alpha_j) - \nabla \phi_{v_{\alpha_j}}(\alpha_j) \right) \leq 2 \left\{ \mathbb{V} \left(\phi_v(\alpha_j) - \phi_{v_{\alpha_j}}(\alpha_j) \right) + \mathbb{V} \left(\phi_v(\alpha_{j-1}) - \phi_{v_{\alpha_{j-1}}}(\alpha_{j-1}) \right) \right\}.$$

La conclusion suit en appliquant le lemme 3.3.3 à chaque terme de l'accolade. \blacksquare

Voici maintenant les estimés sur la variance des accroissements du CLGI. Le lecteur remarquera que ces estimés sont tout à fait analogues à la variance des accroissements que nous avons trouvée pour la MABI à l'équation (2.1.2) au chapitre 2. En ce sens, la structure branchante du CLGI est très semblable à celle de la MABI. Pour cette raison, il n'est pas déraisonnable de s'attendre, à variances «égales», à ce que l'ordre 1 du maximum et l'ordre du nombre de hauts points pour ces deux champs inhomogènes soient égaux.

Lemme 4.2.2 (Estimés sur la variance des accroissements). *Soit $v \in V_N^\delta$ ($\delta \in]0, 1/2]$), alors pour tout $1 \leq k \leq l \leq M$:*

$$(i) \quad -C_1(\boldsymbol{\sigma}, \delta) \leq \mathbb{V}(\psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1})) - g\nu_{k,l} \log N \leq C_2(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$(ii) \quad -C_3(\boldsymbol{\sigma}) \sqrt{\log N} \leq \mathbb{V}(\psi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1})) - g\nu_{k,l} \log N \leq C_3(\boldsymbol{\sigma}),$$

où $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ ne dépendent pas de N, v, k ou l .

De plus, soit $\alpha_j \doteq \frac{j}{K}$, $0 \leq j \leq K$ ($K \in \mathbb{N}$), $2r_K \doteq \frac{2}{K} \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$, $\alpha_j n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $j \in \{0, \dots, K\}$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ de sorte que les α_j forment une partition plus fine de $[0, 1]$ que les λ_i . Pour tout $1 \leq k \leq l \leq K$:

$$(iii) \quad -C_5(\boldsymbol{\sigma}, \delta) \leq \mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) - g \left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j) \right) \log N \leq C_6(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$(iv) \quad -C_7(\boldsymbol{\sigma}) \sqrt{\log N} \leq \mathbb{V}(\psi_{v_{\alpha_l}}(\alpha_l) - \psi_{v_{\alpha_{k-1}}}(\alpha_{k-1})) - g \left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j) \right) \log N \leq C_8(\boldsymbol{\sigma}),$$

où $C_5, C_6, C_7, C_8 > 0$ ne dépendent pas de N, v, k ou l . Pour un rappel de la définition de $\nu_{k,l}$ et V_N^δ , le lecteur est référé à (2.1.1) et (3.2.10) respectivement.

DÉMONSTRATION. Les points (i) et (ii) découlent respectivement des points (iii) et (iv), car la partition des α_j , $0 \leq j \leq K$ est plus fine que la partition des λ_i , $0 \leq i \leq M$ par hypothèse de l'énoncé. En utilisant le point (iv) de la proposition 4.1.3, nous avons

$$\mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) = \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \left(G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(v, v) - G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v) \right). \quad (4.2.1)$$

La proposition 1.6.3 page 39 de [32] (voir l'équation (3.3.8)) nous permet de réécrire la différence des fonctions de Green en (4.2.1) comme

$$\sum_{z \in \partial[v]_{\alpha_{j-1}}} \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_{j-1}}}} = z \right) a(z - v) - \sum_{z \in \partial[v]_{\alpha_j}} \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}}} = z \right) a(z - v) \quad (4.2.2)$$

où $a(w) = g \log(\|w\|_2) + \text{const.} + O(\|w\|_2^{-2})$ pour tout $w \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ par (3.3.3). En notant que $\|v - z\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{1-\alpha_{j-1}} \vee \sqrt{2} N$ pour $z \in \partial[v]_{\alpha_{j-1}}$ et $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\alpha_j}$ pour $z \in \partial[v]_{\alpha_j}$ dans la dernière équation, nous pouvons borner supérieurement la variance en (4.2.1) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) &\leq g \left(\sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) \nabla \alpha_j \right) \log N + \sum_{j=k}^l \sigma^2(\alpha_j) C \\ &\doteq g \left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j) \right) \log N + C_5(\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

De plus, $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\alpha_{j-1}} \wedge \delta N$ pour $z \in \partial[v]_{\alpha_{j-1}}$ et $\|v - z\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} N^{1-\alpha_j}$ pour $z \in \partial[v]_{\alpha_j}$, alors nous pouvons borner inférieurement (4.2.2), et par suite (4.2.1), similairement. En fait, $\|v - z\|_2 \geq \frac{1}{2} N^{1-\alpha_{j-1}}$ pour tout $j \in \{2, \dots, K\}$ et pour tout $z \in \partial[v]_{\alpha_{j-1}}$, alors la dépendance en δ dans la borne inférieure du point (iii) ne se produit que lorsque $k = 1$.

L'inégalité de Jensen nous permet de borner la variance du point (iv) de l'énoncé par

$$3 \left\{ \mathbb{E} \left[(\psi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_l))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(\psi_v(\lambda_l) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1}))^2 \right] + \mathbb{E} \left[(\psi_v(\lambda_{k-1}) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1}))^2 \right] \right\}.$$

car il y a trois termes dans l'accolade. Le lemme 4.2.1 nous permet de borner la première et troisième variance par une constante et le point (iii) nous permet de borner la deuxième variance par $g \left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j) \right) \log N + C(\boldsymbol{\sigma})$, alors nous avons la borne supérieure du point (iv). Pour la borne inférieure, $\mathbb{V}(\psi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1}))$ est bornée inférieurement par

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \left((\psi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_l)), (\psi_v(\lambda_l) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1})) \right) &+ \mathbb{C} \left((\psi_{v_{\lambda_l}}(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_l)), (\psi_v(\lambda_{k-1}) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1})) \right) \\ &+ \mathbb{V}(\psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1})) + \mathbb{C} \left((\psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1})), (\psi_v(\lambda_{k-1}) - \psi_{v_{\lambda_{k-1}}}(\lambda_{k-1})) \right) \end{aligned}$$

en négligeant deux termes de variance. Par Cauchy-Schwarz, le lemme 4.2.1 et la borne

supérieure du point (iii), le premier et le troisième terme de covariance sont bornés inférieurement par $-C(\boldsymbol{\sigma})\sqrt{\log N}$. Par Cauchy-Schwarz et le lemme 4.2.1, le deuxième terme de covariance est borné inférieurement par $-\tilde{C}(\boldsymbol{\sigma})$. Par la borne inférieure du point (iii), le terme de variance est borné inférieurement par $g\left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j)\right) \log N - C(\boldsymbol{\sigma}, \delta)$. En regroupant ces bornes, nous avons la borne inférieure du point (iv) pour $N = N(\delta)$ assez grand. ■

Les bornes supérieures des points (i) et (iii) du lemme précédent sont valides pour tout $v \in V_N$. C'est l'objet du prochain corollaire.

Corollaire 4.2.3. Soit $\alpha_j \doteq \frac{j}{K}$, $0 \leq j \leq K$ ($K \in \mathbb{N}$), $2r_K \doteq \frac{2}{K} \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$, $\alpha_j n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $j \in \{0, \dots, K\}$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$ de sorte que les α_j forment une partition plus fine de $[0, 1]$ que les λ_i . Pour tout $v \in V_N$ et pour tout $1 \leq k \leq l \leq K$:

$$(i) \quad \mathbb{V}(\psi_v(\lambda_l) - \psi_v(\lambda_{k-1})) \leq g\nu_{k,l} \log N + C_1(\boldsymbol{\sigma}),$$

$$(ii) \quad \mathbb{V}(\psi_v(\alpha_l) - \psi_v(\alpha_{k-1})) \leq g\left(\sum_{j=k}^l r_K \sigma^2(\alpha_j)\right) \log N + C_2(\boldsymbol{\sigma}),$$

où $C_1, C_2 > 0$ ne dépendent de rien d'autre que $\boldsymbol{\sigma} > 0$.

DÉMONSTRATION. Le point (i) découle du point (ii), car la partition des α_j , $0 \leq j \leq K$ est plus fine que la partition des λ_i , $0 \leq i \leq M$ par hypothèse de l'énoncé. Notons de plus que l'énoncé est trivial pour les points $v \in \partial V_N$, car $\psi_v(\alpha_{k-1}) = \psi_v(\alpha_l) = 0$ pour tout $1 \leq k \leq l \leq K$ dans ce cas. Pour obtenir les bornes supérieures sur les différences des fonctions de Green en (4.2.1), nous avons seulement utilisé le fait que $[v]_{\alpha_j}$ n'était pas tronqué par la frontière de V_N pour chaque $j \in \{k, \dots, l\}$. Il suffit donc de montrer que pour chaque $j \in \{k, \dots, l\}$ et $v \in V_N^o$ tel que $[v]_{\alpha_j}$ est tronqué, nous avons

$$G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(v, v) - G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v) \leq G_{[u]_{\alpha_{j-1}}}(u, u) - G_{[u]_{\alpha_j}}(u, u) \quad (4.2.4)$$

où $u \in V_N^o$ est tel que $[u]_{\alpha_j}$ n'est pas tronqué. Fixons $j \in \{k, \dots, l\}$ et $v \in V_N^o$ tel que $\min_{z \in \partial V_N} \|v - z\|_2 < \frac{1}{2}N^{1-\alpha_j}$ de sorte que $[v]_{\alpha_j}$ est tronqué par la frontière de V_N . En conditionnant sur le point où sera rendue la MAS débutant en v lorsqu'elle frappe la frontière de $[v]_{\alpha_j}$ et en utilisant la propriété de Markov forte, nous avons

$$-\nabla G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v) = \mathcal{E}_v \left[\sum_{k=\tau_{[v]_{\alpha_j}}}^{\tau_{[v]_{\alpha_{j-1}}} - 1} 1_{\{W_k=v\}} \right] = \sum_{z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap V_N^o} \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}}} = z \right) G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(z, v) \quad (4.2.5)$$

car $G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(z, v) = 0$ pour tout $z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap \partial V_N$. Maintenant, fixons $u \doteq v_{V_N}$ le centre de V_N de sorte que $[u]_{\alpha_j}$ ne soit pas tronqué par la frontière de V_N . Pour chaque $z \in \partial[v]_{\alpha_j}$, associons le point $w_z \in [u]_{\alpha_j}$ qui possède la même position relative par rapport à u que z par rapport à v . Pour conclure, il suffit de montrer que

- (1) $\mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}}} = z \right) \leq \mathcal{P}_u \left(W_{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}}} = w_z \right),$
- (2) $G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(z, v) \leq G_{[u]_{\alpha_{j-1}}}(w_z, u),$

pour tout $z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap V_N^o$, car (4.2.5) et les points (1) et (2) ci-haut nous donnerons ce que nous demandions en (4.2.4) :

$$\begin{aligned} G_{[v]_{\alpha_{j-1}}}(v, v) - G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v) &\leq \sum_{z \in \partial[v]_{\alpha_j}} \mathcal{P}_u \left(W_{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}}} = w_z \right) G_{[u]_{\alpha_{j-1}}}(w_z, u) \\ &\leq \sum_{w \in \partial[u]_{\alpha_j}} \mathcal{P}_u \left(W_{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}}} = w \right) G_{[u]_{\alpha_{j-1}}}(w, u) \\ &= G_{[u]_{\alpha_{j-1}}}(u, u) - G_{[u]_{\alpha_j}}(u, u). \end{aligned}$$

Notons par $\mathbb{B}_j \doteq \{w_z \in [u]_{\alpha_j} \mid z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap \partial V_N\}$ la barrière de points dans $[u]_{\alpha_j}$ correspondant au(x) côté(s) de $\partial[v]_{\alpha_j}$ qui touche(nt) à la frontière de V_N . La figure 4.1 illustre cette situation.

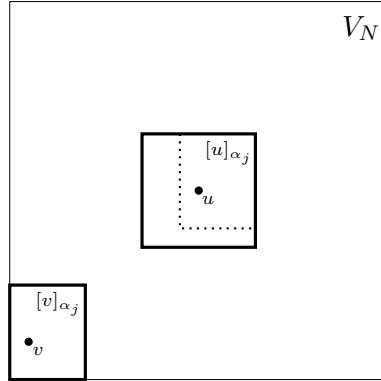


FIGURE 4.1. La barrière \mathbb{B}_j (en pointillé) près du point $u = v_{V_N}$.

Fixons $z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap V_N^o$ pour la suite. En conditionnant sur le fait que la MAS, débutant en u , touche ou pas à \mathbb{B}_j avant de toucher à $\partial[u]_{\alpha_j}$, le point (1) découle facilement. En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_u \left(W_{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}}} = w_z \right) &\geq \mathcal{P}_u \left(W_{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}}} = w_z \mid \tau_{\mathbb{B}_j} \geq \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right) \mathcal{P}_u \left(\tau_{\mathbb{B}_j} \geq \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right) \\ &= \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}}} = z \mid \tau_{\partial[v]_{\alpha_j} \cap \partial V_N} \geq \tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} \right) \mathcal{P}_v \left(\tau_{\partial[v]_{\alpha_j} \cap \partial V_N} \geq \tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} \right) \\ &= \mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}}} = z \right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\mathcal{P}_v \left(W_{\tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} = z} \mid \tau_{\partial[v]_{\alpha_j} \cap \partial V_N} < \tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} \right) = 0$ (car $z \in \partial[v]_{\alpha_j} \cap V_N^c$) pour obtenir la dernière égalité. Le point (2) se prouve similairement. Par un argument tout à fait analogue au point (1), nous avons

$$\mathcal{P}_{w_z} \left(\tau_{\{u\}} < \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right) \geq \mathcal{P}_z \left(\tau_{\{v\}} < \tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} \right) \quad \text{et} \quad G_{[u]_{\alpha_j}}(u, u) \geq G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v). \quad (4.2.6)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G_{[u]_{\alpha_j}}(w_z, u) &= \mathcal{E}_{w_z} \left[\sum_{k=0}^{\tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} - 1} \mathbf{1}_{\{W_k = u\}} \mid \tau_{\{u\}} < \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right] \mathcal{P}_{w_z} \left(\tau_{\{u\}} < \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right) \\ &= G_{[u]_{\alpha_j}}(u, u) \mathcal{P}_{w_z} \left(\tau_{\{u\}} < \tau_{\partial[u]_{\alpha_j}} \right) \quad \text{par Markov fort} \\ &\geq G_{[v]_{\alpha_j}}(v, v) \mathcal{P}_z \left(\tau_{\{v\}} < \tau_{\partial[v]_{\alpha_j}} \right) \quad \text{par (4.2.6)} \\ &= G_{[v]_{\alpha_j}}(z, v) \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

4.3. PREMIER ORDRE DE CONVERGENCE DU MAXIMUM (NIVEAU γ^*)

Dans cette section, nous prouvons la convergence d'ordre 1 du maximum pour le CLGI. Étant donné que les covariances des accroissements du champ sont très similaires à celles de la MABI et que le processus sous-jacent au champ ψ possède une structure branchante analogue à la MABI, la preuve du théorème sera semblable à celle du théorème 2.2.1. En raison des variances et des corrélations faibles du champ près de la frontière de V_N et du corollaire 4.2.3, nous devrions normalement pouvoir étendre les indices du maximum de l'énoncé du prochain théorème à l'ensemble V_N au lieu de V_N^δ , comme c'est le cas pour le CLG. Cette question reste toutefois ouverte.

Théorème 4.3.1 (Convergence d'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 4.1.1 et $\delta \in]0, 1/2[$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{v \in V_N^\delta} \psi_v}{\log N^2} = \sqrt{g} \gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) \doteq \sum_{j=1}^m \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)}$ et V_N^δ est défini en (3.2.10).

Comme précédemment, le théorème est divisé en deux : une borne supérieure et une inférieure. La conclusion du théorème suit directement des lemmes 4.3.2 et 4.3.3. Le lecteur est encouragé à revisiter la section 2.2 afin de voir l'heuristique des deux prochaines

démonstrations. Pour tout $\lambda \in [0, 1]$ ($\lambda n \in \mathbb{N}_0$), R_λ^δ dénote l'ensemble des représentants à l'échelle λ dans V_N^δ . Pour un rappel de la définition de $\zeta_{\gamma^*}(\cdot)$, voir (2.2.2). Le *chemin optimal pour l'ordre 1 du CLGI* est donné par

$$\tilde{L}_N^*(s) = 2\sqrt{g}\zeta_{\gamma^*}(s) \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Lemme 4.3.2 (Borne supérieure pour l'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres (σ, λ) sous la définition 4.1.1, $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \lambda)$ et $\delta \in]0, 1/2[$, alors*

$$\mathbb{P} \left(\max_{v \in V_N^\delta} \psi_v \geq 2\sqrt{g}\gamma^* \log N \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}}$$

où $C > 0$ dépend seulement des paramètres du modèle.

DÉMONSTRATION. Le paramètre $\delta \in]0, 1/2[$ reste fixe durant la preuve. Notons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma^*) \doteq \left\{ v \in R_{\lambda^{(j)}}^\delta \mid \psi_v(\lambda^{(j)}) \geq \tilde{L}_N^*(\lambda^{(j)}) \right\}, \quad 1 \leq j \leq m$$

qui représentent les points dans $R_{\lambda^{(j)}}^\delta$ dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, \lambda^{(j)}]$ dépasse l'ordre du chemin optimal à l'échelle correspondante. L'idée est de décomposer la probabilité qu'au moins un point dans V_N^δ dépasse l'ordre optimal en regardant quel était le premier temps $\lambda^{(j)}$, $1 \leq j \leq m$, où l'ensemble $\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma^*)$ était non-vide. Nous avons la borne suivante sur la probabilité de l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,m}^\psi(\gamma^*)| \geq 1 \right) &\leq \sum_{l=1}^m \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^\psi(\gamma^*)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^\psi(\gamma^*)| = 0, |\mathcal{H}_{N,l}^\psi(\gamma^*)| \geq 1 \right) \\ &\leq \sum_{l=1}^m (N+1)^{2\lambda^{(l)}} \max_{v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta} \mathbb{P} \left(\psi_v(\lambda^{(l)}) \geq \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}), \psi_v(\lambda^{(j)}) < \tilde{L}_N^*(\lambda^{(j)}) \quad \forall j \in \{1, \dots, l-1\} \right) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

où nous avons utilisé la sous-additivité pour obtenir les deux inégalités et le fait que $|R_{\lambda^{(l)}}^\delta| \leq |R_{\lambda^{(l)}}| \leq (N+1)^{2\lambda^{(l)}}$, $1 \leq l \leq m$. Par le point (i) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V} \left(\nabla \psi_v(\lambda^{(1)}) \right) \leq g\nabla\nu_{\pi_1} \log N + C$ pour tout $v \in R_{\lambda^{(1)}}^\delta$, alors un estimé gaussien borne le maximum en (4.3.1) par

$$\frac{\sqrt{g\nabla\nu_{\pi_1} \log N + C}}{\sqrt{2\pi\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)})}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)}))^2}{g\nu_{\pi_1} \log N + C} \right) \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\lambda^{(1)}}$$

lorsque $l = 1$, car $\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)}) = 2\sqrt{g}\sqrt{\lambda^{(1)}}\sqrt{\nabla\nu_{\pi_1}} \log N$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que les probabilités en (4.3.1) sont bornées (uniformément en v) par $\frac{CN^{-2\lambda^{(l)}}}{\sqrt{\log N}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$. Nous traitons les cas $l \geq 2$ dans la suite. Pour simplifier les expressions, notons

$(X_v^1, \dots, X_v^l) \stackrel{\circ}{=} (\psi_v(\lambda^{(1)}), \dots, \psi_v(\lambda^{(l)}))$, $2 \leq l \leq m$. En conditionnant sur la valeur que prend le vecteur $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$, $v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta$, la probabilité en (4.3.1) donne (pour tout l fixé) :

$$\int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^l \geq \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) \mid X_v^{l-1} = x_{l-1}, \dots, X_v^1 = x_1 \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1$$

où f_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$. En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps, nous pouvons réécrire la dernière intégrale comme

$$\int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(\nabla X_v^l \geq \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1} \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1. \quad (4.3.2)$$

Par le point (i) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V} \left(\nabla X_v^l \right) \leq g \nabla \nu_{\pi_l} \log N + C$ pour tout $v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta$, alors un estimé gaussien borne la probabilité dans la dernière intégrale (uniformément en v) par

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{g \nabla \nu_{\pi_l} \log N + C}}{\sqrt{2\pi} (\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1})} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1})^2}{g \nabla \nu_{\pi_l} \log N + C} \right) \\ & \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\log N}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\nabla \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) + L_N^*(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1})^2}{g \nabla \nu_{\pi_l} \log N + C} \right) \\ & \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\nabla \lambda^{(l)}} \exp \left(-2 \frac{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{\sqrt{g} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}} \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

La première inégalité vient du fait que $\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) - x_{l-1} \geq \nabla \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}) = 2\sqrt{g} \sqrt{\nabla \lambda^{(l)}} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}} \log N$ par les bornes d'intégration de la variable x_{l-1} en (4.3.2). La seconde inégalité vient du fait que nous bornons par 1 la troisième exponentielle après décomposition du carré sur la deuxième ligne et le terme $N^{-2\nabla \lambda^{(l)}}$ vient de la première exponentielle dans la décomposition et du fait que $(\nabla \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l)}))^2 = 4g \nabla \lambda^{(l)} \nabla \nu_{\pi_l} (\log N)^2$. En regroupant l'estimé gaussien (4.3.3) avec l'intégrale (4.3.2) et l'inégalité (4.3.1), il suffit de montrer que

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta} \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^*(\lambda^{(l-1)})} e^{\frac{x_{l-1} - \tilde{L}_N^*(\lambda^{(l-1)})}{\sqrt{g} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}} f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1 \quad (4.3.4)$$

est plus petit qu'une constante C pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$ afin de conclure.

Or, en effectuant le changement de variable $Y_{v,j} \stackrel{\circ}{=} \nabla X_v^j - \nabla \tilde{L}_N^*(\lambda^{(j)})$, $1 \leq j \leq l-1$, nous pouvons réécrire (4.3.4) comme

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-y_1} \dots \int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} e^{\frac{\sum_{j=1}^{l-1} y_j}{\sqrt{g} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_l}}}} g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) dy_{l-1} \dots dy_1 \quad (4.3.5)$$

où g_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1})$. Par l'indépendance des variables aléatoires $Y_{v,1}, \dots, Y_{v,l-1}$ (qui vient du fait que les accroissements ∇X_v^j sont indépendants en

j pour chaque v fixé), la densité g_v se sépare en $l - 1$ densités normales, c'est-à-dire

$$g_v(y_1, \dots, y_{l-1}) = g_{Y_{v,1}}(y_1) \cdot \dots \cdot g_{Y_{v,l-1}}(y_{l-1}).$$

Par le point (i) du lemme 4.2.2, $-C_1(\delta) \leq \mathbb{V}(Y_{v,j}) - g\nabla\nu_{\pi_j} \log N \leq C_2$, $1 \leq j \leq l - 1$ pour tout $v \in R_{\lambda^{(l)}}^\delta$ où $C_1, C_2 > 0$ dépendent des paramètres du modèle. Ainsi, nous pouvons borner chaque densité $g_{Y_{v,j}}$ (uniformément en v) :

$$\begin{aligned} g_{Y_{v,j}}(y_j) &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{g\nabla\nu_{\pi_j} \log N - C_1(\delta)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_j + \nabla\tilde{L}_N^*(\lambda^{(j)}))^2}{g\nabla\nu_{\pi_j} \log N + C_2}\right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2\nabla\lambda^{(j)}} \exp\left(-2 \frac{y_j}{\sqrt{g\nabla\nu_{\pi_j}}}\right) \end{aligned}$$

La première inégalité découle des bornes sur la variance des accroissements. Pour obtenir la seconde inégalité, nous avons borné la première exponentielle par 1 dans le développement du carré de la première ligne, le reste étant comme pour l'estimé gaussien en (4.3.3).

En regroupant toutes les bornes sur les densités, (4.3.5) est borné par

$$\frac{C}{(\log N)^{\frac{l-1}{2}}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-y_1} \dots \int_{-\infty}^{-\sum_{j=1}^{l-2} y_j} \prod_{j=1}^{l-1} e^{2y_j \left(\frac{g^{-1/2}}{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}} - \frac{g^{-1/2}}{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_j}}} \right)} dy_{l-1} \dots dy_1. \quad (4.3.6)$$

Mis à part la constante $g^{-1/2}$ à l'exposant qui est différente de $\sqrt{\log 2}$, cette intégrale est la même qu'en (2.2.9), alors nous savons qu'elle est finie. Par conséquent, (4.3.6), et par suite (4.3.4), est borné supérieurement par $C(\log N)^{\frac{l-1}{2}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$, ce qui est plus fort que ce que nous voulions. Ceci termine la preuve. ■

Pour la borne inférieure, nous reprenons la notation introduite à la section 2.2 et nous notons le chemin sous-optimal analogue à $L_{N,\epsilon}^*(\cdot)$ par

$$\tilde{L}_{N,\epsilon}^*(s) = 2\sqrt{g}\zeta_{\gamma^*}(s)(1 - \epsilon) \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Lemme 4.3.3 (Borne inférieure pour l'ordre 1 du maximum). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres (σ, λ) sous la définition 4.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \lambda)$. Pour tout $0 < \epsilon < 1$, il existe une constante $c = c(\epsilon) > 0$ (qui dépend des paramètres du modèle) telle que*

$$\mathbb{P}\left(\max_{v \in V_N} \psi_v \leq 2\sqrt{g}\gamma^*(1 - \epsilon) \log N\right) \leq N^{-c(\epsilon)}.$$

Rappelons que $\alpha_k \doteq \frac{k}{K}$, $0 \leq k \leq K$ et $K \in \mathbb{N}$ devra être choisi assez grand dans la

preuve. Nous supposons, sans perdre de généralité, que $\alpha_k n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$. Nous supposons de plus que la partition des α_k est plus fine que celle des λ_i , c'est-à-dire que $2r_K \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. En particulier, $\alpha_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda^{(1)}$ et $\mu_2 = 1$ sous cette hypothèse. Soit $\delta \in]0, 1/2[$, définissons récursivement les ensembles

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha_0}^\delta &\doteq V_N^\delta, \\ \Gamma_{\alpha_k}^\delta &\doteq \left\{ v \in \Gamma_{\alpha_{k-1}}^\delta \mid \min\{\|v - z\|_2 \mid z \in \partial[v_{\alpha_k}]_{\alpha_k}\} \geq \delta N^{1-\alpha_k} \right\}, \quad 1 \leq k \leq K-1, \\ \Gamma_{\alpha_K}^\delta &\doteq \Gamma_{\alpha_{K-1}}^\delta. \end{aligned}$$

Les ensembles $\Gamma_{\alpha_k}^\delta$ dénotent, à chaque échelle α_k , les points qui ne sont pas trop près de la frontière de la λ -boîte fixe de leur représentant à toutes les échelles $\lambda \in \{0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k\}$. Or, il y a $\frac{(1-2\delta)^{K-1}N}{N^{r_K}}$ boîtes carrées de largeur $(1-2\delta)N^{r_K}$ dans $\Gamma_{\alpha_{K-1}}^\delta$, alors $|\Gamma_{\alpha_K}^\delta| = \left((1-2\delta)^K N + \frac{(1-2\delta)^{K-1}N}{N^{r_K}} \right)^2 \doteq \bar{\delta}_{N,K} N^2$. En particulier, $\bar{\delta}_{N,K} = \left((1-2\delta)^K + \frac{(1-2\delta)^{K-1}}{N^{r_K}} \right)^2 \leq 2$. Le paramètre $\delta \in]0, 1/2[$ reste fixe durant la démonstration.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.3.3. Définissons d'abord les variables aléatoires suivantes :

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \doteq \sum_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} 1_{\{\nabla \psi_v(\alpha_j) \geq \nabla \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{3, \dots, K\}\}}$$

qui compte le nombre de points dans $\Gamma_{\alpha_K}^\delta$ dont les accroissements, lorsqu'on les additionne, dépassent les ordres sous-optimaux dans l'intervalle de temps $[\alpha_2, 1]$. En considérant $\widetilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)$, nous ne perdons pas grande précision en laissant tomber l'accroissement $\psi_v(\alpha_2) = \psi_v(\alpha_2) - \psi_v(\alpha_0)$, car nous avons un contrôle sur la longueur de l'intervalle $[0, \alpha_2]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{v \in V_N} \psi_v \leq \widetilde{L}_{N,2\epsilon}^*(1) \right) &\leq \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v \leq \widetilde{L}_{N,2\epsilon}^*(1) \right) \quad \text{car } \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \sum_{j=3}^K \nabla \psi_v(\alpha_j) < \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(1) - \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_2) \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v \leq \widetilde{L}_{N,2\epsilon}^*(1), \max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \sum_{j=3}^K \nabla \psi_v(\alpha_j) \geq \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(1) - \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_2) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\widetilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) = 0 \right) + \mathbb{P} \left(\min_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \leq -(\widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(1) - \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_2) - \widetilde{L}_{N,2\epsilon}^*(1)) \right). \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière probabilité en (4.3.7), nous avons utilisé le fait que

$$\widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(1) - \widetilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_2) - \widetilde{L}_{N,2\epsilon}^*(1) = 2\sqrt{g} \left(\gamma^* \epsilon - \frac{2}{K} \frac{\sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_1}}} (1-\epsilon) \right) \log N \geq \sqrt{g} \gamma^* \epsilon \log N > 0$$

pour $K = K(\epsilon)$ assez grand. En utilisant la symétrie des variables gaussiennes :

$$\mathbb{P} \left(\min_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \leq -\sqrt{g}\gamma^* \epsilon \log N \right) = \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \geq \sqrt{g}\gamma^* \epsilon \log N \right).$$

Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\psi_v(\alpha_2)) \leq 2gr_K\sigma^2(\alpha_2) \log N + C$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N^\delta$, alors la sous-additivité et un estimé gaussien nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \geq \sqrt{g}\gamma^* \epsilon \log N \right) &\leq \bar{\delta}_{N,K} N^2 \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{g}\gamma^* \epsilon \log N)^2}{2gr_K\sigma^2(\alpha_2) \log N + C} \right) \\ &\leq CN^{2-\frac{K}{4} \frac{(\gamma^* \epsilon)^2}{\sigma^2(\alpha_2)}} \leq N^{-\tilde{c}_1(\epsilon)} \end{aligned}$$

pour $K = K(\epsilon)$ assez grand où $\tilde{c}_1(\epsilon) > 0$ est une constante appropriée. Par conséquent, la dernière probabilité en (4.3.7) est bornée par $N^{-\tilde{c}_1(\epsilon)}$.

Pour conclure, nous voulons montrer que $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) = 0) \leq N^{-\tilde{c}_2(\epsilon)}$ pour une constante $\tilde{c}_2(\epsilon) > 0$ que nous déterminerons plus loin. Par l'inégalité de Paley-Zygmund (avec $\theta = 0$), la probabilité complémentaire est bornée inférieurement par un ratio d'espérances :

$$\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)])^2}{\mathbb{E}[(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K))^2]}. \quad (4.3.8)$$

L'idée est de borner inférieurement le premier moment et supérieurement le deuxième moment afin de montrer que le ratio tend vers 1 lorsque $N \rightarrow \infty$.

Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\nabla\psi_v(\alpha_j)) \geq gr_K\sigma^2(\alpha_j) \log N - C(\delta)$, $1 \leq j \leq K$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N^\delta$, alors en utilisant la linéarité de l'espérance, l'indépendance des accroissements dans le temps et des estimés gaussiens, nous pouvons borner le premier moment de $\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)] &\geq \bar{\delta}_{N,K} N^2 \prod_{j=3}^K \frac{c\sqrt{gr_K\sigma^2(\alpha_j) \log N - C(\delta)}}{\sqrt{2\pi} \left(2\sqrt{g} \frac{r_K\sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\nabla_{\mu_j} \nu_{\pi\mu_j}}} (1-\epsilon) \log N \right)} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(2\sqrt{g} \frac{r_K\sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\nabla_{\mu_j} \nu_{\pi\mu_j}}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{gr_K\sigma^2(\alpha_j) \log N - C(\delta)}} \\ &\geq \frac{c(K, \epsilon, \delta)}{(\log N)^{\frac{1}{2}(K-2)}} \underbrace{N^{2(1-(1-\epsilon)^2)} N^{2\frac{2r_K\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla_{\nu\pi_1}}(1-\epsilon)^2}}_{\cong N^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Avant de borner le deuxième moment de $\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)$, introduisons quelques notations pour raccourcir les prochaines expressions :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{u,j}^\epsilon &\doteq \mathbb{P}\left(\nabla\psi_v(\alpha_j) \geq \nabla\tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j)\right), \quad u \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta, \quad 1 \leq j \leq K, \\ \tilde{p}_{u,v,j}^\epsilon &\doteq \mathbb{P}\left(\nabla\psi_u(\alpha_j), \nabla\psi_v(\alpha_j) \geq \nabla\tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j)\right), \quad u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta, \quad 1 \leq j \leq K.\end{aligned}$$

Maintenant, pour le deuxième moment, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K)\right)^2\right] = \sum_{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \mathbb{P}\left(\nabla\psi_u(\alpha_j), \nabla\psi_v(\alpha_j) \geq \tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{3, \dots, K\}\right). \quad (4.3.10)$$

Nous pouvons décomposer cette somme en fonction du temps de branchement $\rho(u, v)$ de chaque couple de points $u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$. En particulier, les temps de branchement aident à déterminer les corrélations en u et v des accroissements $\nabla\psi_u(\alpha_j)$ et $\nabla\psi_v(\alpha_j)$, et nous permettent de réécrire chacune des probabilités de la somme de manière appropriée. Soit $r \in \{0, \dots, K-3\}$ et $u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$ tels que $\alpha_r \leq \rho(u, v) < \alpha_{r+1}$, alors les accroissements dans l'intervalle $[\alpha_{r+2}, 1]$ sont indépendants (pour chaque j fixé). En effet, par définition de $\Gamma_{\alpha_{r+1}}^\delta$, u et v sont au moins à distance $2\delta N^{1-\alpha_{r+1}}$ l'un de l'autre, car ils n'ont pas le même représentant à l'échelle α_{r+1} . Par conséquent, les boîtes $[u]_{\alpha_{r+2}}$ et $[v]_{\alpha_{r+2}}$, qui n'ont qu'une largeur de $N^{1-\alpha_{r+2}}$, ne peuvent pas s'intersecter. En utilisant le point (iii) de la proposition 4.1.3 sur la loi des accroissements du CLGI, nous avons

$$\mathbb{C}(\nabla\psi_u(\alpha_{r+3}), \nabla\psi_v(\alpha_{r+3})) = \sigma^2(\alpha_{r+3})\mathbb{C}(\nabla\phi_u(\alpha_{r+3}), \nabla\phi_v(\alpha_{r+3})) = 0.$$

Nous avons conditionné par rapport à $\mathcal{F}_{\partial[v]_{\alpha_{r+2}}}$ et utilisé la propriété de Markov (faible) du CLG pour obtenir la dernière égalité. De la même façon, les accroissements $\nabla\psi_u(\alpha_j)$ et $\nabla\psi_v(\alpha_j)$ sont indépendants pour tout $j \in \{r+3, \dots, K\}$. Ces propriétés d'indépendance nous permettent de réécrire la somme de l'équation (4.3.10) comme

$$\sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \prod_{j=3}^K \tilde{p}_{u,j}^\epsilon \tilde{p}_{v,j}^\epsilon + \sum_{r=1}^{K-2} \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_r \leq \rho(u,v) < \alpha_{r+1}}} \prod_{j=3}^{r+2} \tilde{p}_{u,v,j}^\epsilon \prod_{j=r+3}^K \tilde{p}_{u,j}^\epsilon \tilde{p}_{v,j}^\epsilon + \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \rho(u,v) \geq \alpha_{K-1}}} \prod_{j=3}^K \tilde{p}_{u,v,j}^\epsilon$$

où un produit sans indice est toujours égal à 1. L'inégalité $p_{u,v,j}^\epsilon \leq p_{u,j}^\epsilon$, $1 \leq j \leq K$ est triviale, alors la dernière expression est bornée par

$$\underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \prod_{j=3}^K \tilde{p}_{u,j}^\epsilon \tilde{p}_{v,j}^\epsilon}_{(1)} + \underbrace{\sum_{r=1}^{K-2} \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_r \leq \rho(u,v) < \alpha_{r+1}}} \prod_{j=3}^{r+2} \tilde{p}_{u,v,j}^\epsilon \prod_{j=r+3}^K \tilde{p}_{u,j}^\epsilon \tilde{p}_{v,j}^\epsilon}_{(2)_r} + \underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \rho(u,v) \geq \alpha_{K-1}}} \prod_{j=3}^K \tilde{p}_{u,v,j}^\epsilon}_{(3)}. \quad (4.3.11)$$

En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps et en ajoutant les termes manquants dans la sommation de (1), nous avons la borne suivante :

$$\begin{aligned}
(1) &= \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \mathbb{P} \left(\nabla \psi_u(\alpha_j) \geq \nabla \tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j), 3 \leq j \leq K \right) \mathbb{P} \left(\nabla \psi_v(\alpha_j) \geq \nabla \tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j), 3 \leq j \leq K \right) \\
&\leq \left(\sum_{u \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \mathbb{P} \left(\nabla \psi_u(\alpha_j) \geq \nabla \tilde{L}_{N,\epsilon}^*(\alpha_j) \quad \forall j \in \{3, \dots, K\} \right) \right)^2 = \left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2.
\end{aligned}$$

Dans la sommation en (3), il y a $|\Gamma_{\alpha_K}^\delta| = \bar{\delta}_{N,K} N^2$ possibilités pour u et $((1-2\delta)N^{rK} + 1)^2$ possibilités pour v , car v doit être dans un carré discret de largeur $(1-2\delta)N^{1-\alpha_{K-1}} = (1-2\delta)N^{rK}$ centré en $u_{\alpha_{K-1}}$ du fait que $\rho(u,v) \geq \alpha_{K-1}$. Par conséquent, nous pouvons borner supérieurement (3) comme nous avons fait pour la borne inférieure du premier moment en (4.3.9) et nous trouvons

$$(3) \leq N^{2(1+rK-(1-\epsilon)^2)} N^{2\frac{2rK\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla\nu\pi_1}(1-\epsilon)^2} \doteq N^{2rK} \tilde{N}^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}. \quad (4.3.12)$$

Maintenant, pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$, notons que la sommation en $(2)_r$ possède au plus

$$\bar{\delta}_{N,K} N^2 \left((1-2\delta)^{K-r} N^{1-\alpha_r} + \frac{(1-2\delta)^{K-r-1} N^{1-\alpha_r}}{N^{rK}} \right)^2 \quad (4.3.13)$$

couples de points. En effet, soit $u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$ tels que $\alpha_r \leq \rho(u, v) < \alpha_{r+1}$, alors il y a $|\Gamma_{\alpha_K}^\delta| = \bar{\delta}_{N,K} N^2$ possibilités pour u et il y aurait $\left((1-2\delta)^{K-r} N^{1-\alpha_r} + \frac{(1-2\delta)^{K-r-1} N^{1-\alpha_r}}{N^{rK}} \right)^2$ possibilités pour v si nous demandions seulement que $\rho(u, v) \geq \alpha_r$. En effet, lorsque $\rho(u, v) \geq \alpha_r$, v doit être dans la même λ -boîte fixe que u à l'échelle α_r , c'est-à-dire $v \in B_u^{\alpha_r}$. À l'échelle α_{K-1} , v serait dans l'une des $\frac{(1-2\delta)^{K-r-1} N^{1-\alpha_r}}{N^{rK}}$ sous-boîtes carrées disponibles de $B_u^{\alpha_r}$, chacune de largeur $(1-2\delta)N^{1-\alpha_r}$, après application du processus itératif définissant les ensembles $\Gamma_{\alpha_k}^\delta$. Les points disponibles pour v seraient les mêmes à l'échelle α_K tout comme $\Gamma_{\alpha_K}^\delta = \Gamma_{\alpha_{K-1}}^\delta$, alors (4.3.13) est justifié. Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\nabla \psi_v(\alpha_j)) \leq gr_K \sigma^2(\alpha_j) \log N + C$, $1 \leq j \leq K$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N^\delta$, alors un estimé gaussien borne $(2)_r$ (uniformément en v) :

$$\begin{aligned}
(2)_r &\leq N^2 N^{2(1-\alpha_r)} \prod_{j=3}^{r+2} e^{-\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2\sqrt{g}}{r_K \sigma^2(\alpha_j)} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{gr_K \sigma^2(\alpha_j) \log N + C}} \prod_{j=r+3}^K e^{-\frac{\left(\frac{2\sqrt{g}}{r_K \sigma^2(\alpha_j)} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\sqrt{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j}} (1-\epsilon) \log N \right)^2}{gr_K \sigma^2(\alpha_j) \log N + C}} \\
&\leq \underbrace{N^{2(1-(1-\epsilon)^2)} N^{2\frac{2rK\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla\nu\pi_1}(1-\epsilon)^2}}_{\doteq \tilde{N}^{\kappa_{N,K,\epsilon}(K)}} \underbrace{N^{2(1-\alpha_r)} N^{-2 \left(\sum_{j=r+3}^K \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu \pi \mu_j} \right) (1-\epsilon)^2}}_{\doteq \tilde{N}^{\kappa_{N,K,\epsilon}(r)}}. \quad (4.3.14)
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^* \doteq \max_{1 \leq r \leq K-2} \tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(r)$ et remarquons que la borne sur (2) $_{K-2}$ en (4.3.14) est plus grande que la borne sur (3) en (4.3.12) par un facteur de N^{2rK} . Ceci nous mène à borner l'équation (4.3.11) et, par suite, le deuxième moment :

$$\mathbb{E} \left[\left(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right)^2 \right] \leq \left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2 + K \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^*}. \quad (4.3.15)$$

Maintenant que nous avons les bornes voulues sur les deux premiers moments (voir la borne (4.3.9) pour le premier moment et la borne (4.3.15) pour le deuxième moment), nous pouvons borner inférieurement le ratio d'espérances de l'inégalité (4.3.8) :

$$\begin{aligned} \frac{\left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2}{\mathbb{E} \left[\left(\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right)^2 \right]} &\geq \frac{1}{1 + \frac{K \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^*}}{\left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2}} \geq 1 - \frac{K \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(K)} \cdot N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^*}}{\left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_{N,\epsilon}^*(K) \right] \right)^2} \\ &\geq 1 - C(K, \epsilon, \delta) \cdot (\log N)^{K-2} \cdot \frac{N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^*}}{N^{\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(K)}} \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

où nous avons utilisé l'estimé élémentaire $\frac{1}{1+x} \geq 1 - x$, $x \geq 0$ pour obtenir la deuxième inégalité. À la vue de (4.3.16), il suffit de montrer que $\tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}(K) \geq \tilde{\kappa}_{N,K,\epsilon}^* + 2\tilde{c}_2(\epsilon)$ pour avoir que le ratio d'espérances en (4.3.8) est borné inférieurement par $1 - N^{-\tilde{c}_2(\epsilon)}$. C'est-à-dire, nous voulons que

$$(1 - (1 - \epsilon)^2) + \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\nabla \nu_{\pi_1}} (1 - \epsilon)^2 \geq (1 - \alpha_r) - \left(\sum_{j=r+3}^K \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 + 2\tilde{c}_2(\epsilon)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$. Après simplifications, nous voulons montrer que

$$\alpha_r \geq \left(\sum_{j=3}^{r+2} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_j)}{\nabla \mu_j \nu_{\pi_{\mu_j}}} \right) (1 - \epsilon)^2 + 2\tilde{c}_2(\epsilon) \quad (4.3.17)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$. Cette inégalité est complètement analogue à l'inégalité (2.2.20). Il est facile de vérifier (en utilisant le même argument) qu'elle est toujours satisfaite pour $K = K(\epsilon)$ assez grand en posant $2\tilde{c}_2(\epsilon) \doteq r_K(1 - (1 - \epsilon)^2)$. Ceci termine la preuve. ■

4.4. NOMBRE DE HAUTS POINTS ATTEIGNANT LE NIVEAU $\gamma \in]0, \gamma^*[$

Dans cette section, nous voulons obtenir l'ordre du nombre de points dans V_N^δ ($\delta \in]0, 1/2[$) qui atteignent un certain ordre $2\sqrt{g}\gamma \log N$ où $\gamma \in]0, \gamma^*[$, c'est-à-dire les points dans l'ensemble

$$\mathcal{H}_N^\psi(\gamma) \doteq \left\{ v \in V_N^\delta \mid \psi_v \geq 2\sqrt{g}\gamma \log N \right\}.$$

Comme pour l'ordre 1 du maximum, nous nous attendons à ce que l'énoncé du prochain théorème soit aussi vrai lorsque les points de l'ensemble $\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)$ sont pris dans V_N .

Théorème 4.4.1 (Ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 4.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$ et $\delta \in]0, 1/2[$, alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \left(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)| \right)}{\log N^2} = \mathcal{E}_\gamma^* \quad \text{en probabilité}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) \doteq (\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda}) \doteq \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(j)}) + \frac{\nu_{\pi_j+1, M}}{\sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $\gamma^{(0)} \doteq 0$.

Comme précédemment, la conclusion du théorème suit directement des lemmes 4.4.2 et 4.4.3. Le lecteur est encouragé à revisiter la section 2.3 pour voir l'heuristique des deux prochaines démonstrations. Le *chemin optimal pour les hauts points du CLGI* est donné par

$$\tilde{L}_N^\gamma(s) = 2\sqrt{g}\zeta_\gamma(s) \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Pour un rappel de la définition de $\zeta_\gamma(\cdot)$, voir (2.3.4).

Lemme 4.4.2 (Borne supérieure pour l'ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ sous la définition 4.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} < \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$ et $\delta \in]0, 1/2[$, alors*

$$\mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \leq \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\lambda})$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, $\gamma^{(0)} \doteq 0$ et $C(\gamma) > 0$ dépend des paramètres du modèle.

DÉMONSTRATION. Le paramètre $\delta \in]0, 1/2[$ reste fixe durant la preuve. Notons les ensembles suivants :

$$\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma) \doteq \left\{ v \in R_{\lambda^{(j)}}^\delta \mid \psi_v(\lambda^{(j)}) \geq \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(j)}) \right\}, \quad 1 \leq j \leq m$$

qui représentent les points dans $R_{\lambda^{(j)}}^\delta$ dont l'accroissement sur l'intervalle de temps $[0, \lambda^{(j)}]$ dépasse l'ordre du chemin optimal (pour les hauts points) à l'échelle correspondante. L'idée est de décomposer la probabilité qu'au moins $N^{2\mathcal{E}_\gamma^*}$ points dans V_N^δ dépassent l'ordre optimal en regardant quel était le premier temps $\lambda^{(j)}$, $1 \leq j \leq l-1$ où l'ensemble $\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma)$ était non-vide. Nous avons la borne supérieure suivante sur la probabilité de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,m}^\psi(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^\psi(\gamma)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^\psi(\gamma)| = 0, |\mathcal{H}_{N,m}^\psi(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) + \mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{l-1} \{|\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma)| \geq 1\} \right) \\
& \leq \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,1}^\psi(\gamma)| = \dots = |\mathcal{H}_{N,l-1}^\psi(\gamma)| = 0, |\mathcal{H}_{N,m}^\psi(\gamma)| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) + \sum_{j=1}^{l-1} \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_{N,j}^\psi(\gamma)| \geq 1 \right).
\end{aligned}$$

Les probabilités dans la sommation sont bornées par $\frac{C}{\sqrt{\log N}}$ exactement comme les termes en (4.3.1) dans la preuve du lemme 4.3.2, car $\tilde{L}_N^\gamma(\cdot)$ et $L_N^\gamma(\cdot)$ coïncident sur l'intervalle $[0, \lambda^{(l-1)}]$. La probabilité à gauche, quant à elle, est bornée par

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(\left| \left\{ v \in V_N^\delta \mid \psi_v(\lambda^{(1)}) < \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(1)}), \dots, \psi_v(\lambda^{(l-1)}) < \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}), \psi_v \geq \tilde{L}_N^\gamma(1) \right\} \right| \geq N^{2\mathcal{E}_\gamma^*} \right) \\
& \leq N^{-2\mathcal{E}_\gamma^*} (N+1)^2 \max_{v \in V_N^\delta} \mathbb{P} \left(\psi_v \geq \tilde{L}_N^\gamma(1), \psi_v(\lambda^{(j)}) < \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(j)}) \quad \forall j \in \{1, \dots, l-1\} \right) \quad (4.4.1)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Markov et le fait que $|V_N^\delta| \leq |V_N| = (N+1)^2$.

Par le point (i) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\psi_v) \leq g\nu_{1,M} \log N + C$ pour tout $v \in V_N^\delta$, alors un estimé gaussien borne le maximum en (4.4.1) par

$$\frac{\sqrt{g\nu_{1,M} \log N + C}}{\sqrt{2\pi} \tilde{L}_N^\gamma(1)} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(\tilde{L}_N^\gamma(1))^2}{g\nu_{1,M} \log N + C} \right) \leq \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}} N^{-2\frac{\gamma^2}{\nu_{1,M}}} = \frac{C(\gamma)}{\sqrt{\log N}} N^{-2} N^{2\mathcal{E}_\gamma^*}$$

lorsque $l = 1$, car $\tilde{L}_N^\gamma(1) = 2\sqrt{g}\gamma \log N$ et $\mathcal{E}_\gamma^* = 1 - \frac{\gamma^2}{\nu_{1,M}}$ dans ce cas. Pour conclure, il suffit donc de montrer que les probabilités en (4.4.1) sont bornées (uniformément en v) par $\frac{C(\gamma)N^{-2(1-\mathcal{E}_\gamma^*)}}{\sqrt{\log N}}$ pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$ où $C(\gamma) > 0$ est une constante appropriée pouvant dépendre des paramètres du modèle. Nous traitons les cas $l \geq 2$ dans la suite. Pour simplifier les expressions, notons $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1}, X_v^m) \doteq (\psi_v(\lambda^{(1)}), \dots, \psi_v(\lambda^{(l-1)}), \psi_v)$, $2 \leq l \leq m$. En conditionnant sur la valeur que prend le vecteur $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$, $v \in V_N^\delta$, la probabilité en (4.4.1) donne (l est fixé dans l'énoncé) :

$$\int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^m \geq \tilde{L}_N^\gamma(1) \mid X_v^{l-1} = x_{l-1}, \dots, X_v^1 = x_1 \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1$$

où f_v dénote la densité du vecteur aléatoire $(X_v^1, \dots, X_v^{l-1})$. En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps, on peut réécrire la dernière intégrale comme

$$\int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} \mathbb{P} \left(X_v^m - X_v^{l-1} \geq \tilde{L}_N^\gamma(1) - x_{l-1} \right) f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1. \quad (4.4.2)$$

Par le point (i) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V} \left(X_v^m - X_v^{l-1} \right) \leq g\nu_{\pi_{l-1}+1, M} \log N + C$ pour tout $v \in V_N^\delta$,

alors un estimé gaussien borne la probabilité en (4.4.2) (uniformément en v) par

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{g\nu_{\pi_{l-1}+1,M} \log N + C}}{\sqrt{2\pi}(\tilde{L}_N^\gamma(1) - x_{l-1})} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\tilde{L}_N^\gamma(1) - x_{l-1})^2}{g\nu_{\pi_{l-1}+1,M} \log N + C}\right) \\
& \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{\log N}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\tilde{L}_N^\gamma(1) - \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) + \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1})^2}{g\nu_{\pi_{l-1}+1,M} \log N + C}\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \mathcal{E}_\gamma^*)} \exp\left(-2 \frac{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{\sqrt{g\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}} (\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))\right) \\
& \leq \frac{C}{\sqrt{\log N}} N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \mathcal{E}_\gamma^*)} \exp\left(-2\tilde{c}_\gamma \frac{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) - x_{l-1}}{\sqrt{g}\sqrt{\nabla\nu_{\pi_{l-1}}}}\right) \quad \text{où } \tilde{c}_\gamma > 1. \quad (4.4.3)
\end{aligned}$$

La borne sur le ratio devant l'exponentielle de la première ligne vient du fait que

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_N^\gamma(1) - x_{l-1} & \geq \tilde{L}_N^\gamma(1) - \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}) = 2\sqrt{g}(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})) \log N \\
& > 2\sqrt{g}(\gamma^{(l-1)} - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})) \log N = 2\sqrt{g} \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}{\sqrt{\nabla\nu_{\pi_{l-1}}}} \log N \quad (4.4.4)
\end{aligned}$$

où la première inégalité en (4.4.4) découle des bornes d'intégration de la variable x_{l-1} en (4.4.2) et la seconde inégalité du fait que $\gamma > \gamma^{(l-1)}$ par hypothèse de l'énoncé. On utilise aussi cette hypothèse pour obtenir la troisième inégalité en (4.4.3). La seconde inégalité en (4.4.3) vient du fait que nous avons borné la troisième exponentielle par 1 dans le développement du carré de la deuxième ligne. Le terme $N^{-2((\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \mathcal{E}_\gamma^*)}$, quant à lui, vient de la première exponentielle dans la décomposition du carré et du fait que $(\tilde{L}_N^\gamma(1) - \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)}))^2 = 4g(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2(\log N)^2$ et $(\lambda^{(m)} - \lambda^{(l-1)}) - \mathcal{E}_\gamma^* = \frac{(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1,M}}$. En regroupant l'estimé gaussien (4.4.3) avec l'intégrale en (4.4.2) et l'inégalité (4.4.1), il suffit de montrer que

$$N^{2\lambda^{(l-1)}} \max_{v \in V_N^\delta} \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(1)})} \dots \int_{-\infty}^{\tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})} e^{\frac{x_{l-1} - \tilde{L}_N^\gamma(\lambda^{(l-1)})}{\sqrt{g\tilde{c}_\gamma^{-1}}\sqrt{\nabla\nu_{\pi_{l-1}}}}} f_v(x_1, \dots, x_{l-1}) dx_{l-1} \dots dx_1 \leq C(\gamma)$$

pour tout $l \in \{2, \dots, m\}$ afin d'obtenir le résultat du lemme. Or, le terme $\tilde{c}_\gamma^{-1}\sqrt{\nabla\nu_{\pi_{l-1}}}$, $\tilde{c}_\gamma > 1$ joue le même rôle dans cette intégrale que le terme $\sqrt{\nabla\nu_{\pi_l}}$ dans l'intégrale en (4.3.4) et $\tilde{L}_N^\gamma(\cdot) = \tilde{L}_N^*(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, \lambda^{(l-1)}]$, alors l'inégalité est satisfaite par le même argument. ■

Pour la borne inférieure, nous reprenons la notation introduite à la section 2.3 et nous notons le chemin sous-optimal analogue à $L_N^{\gamma,\eta}(\cdot)$ par

$$\tilde{L}_N^{\gamma,\eta}(s) \doteq (1 - \eta)\tilde{L}_N^{\gamma(1+2\eta)}(s) = 2\sqrt{g}\zeta_{\gamma(1+2\eta)}(s)(1 - \eta) \log N, \quad s \in [0, 1].$$

Lemme 4.4.3 (Borne inférieure pour l'ordre du nombre de hauts points). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres (σ, λ) sous la définition 4.1.1 et $\gamma^* \doteq \gamma^*(\sigma, \lambda)$. Supposons de plus que $\gamma \in]0, \gamma^*[$ et $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma < \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$. Pour tout $0 < \epsilon < 2\mathcal{E}_\gamma^*$, il existe une constante $c = c(\gamma, \epsilon) > 0$ (qui dépend des paramètres du modèle) telle que*

$$\mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon} \right) \leq N^{-c(\gamma, \epsilon)}$$

où $\mathcal{E}_\gamma^* \doteq \mathcal{E}_\gamma^*(\sigma, \lambda)$, $\gamma^{(j)} \doteq \gamma^{(j)}(\sigma, \lambda)$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $\gamma^{(0)} \doteq 0$.

Nous utilisons les mêmes notations que la preuve du lemme 4.3.3. Nous supposons, sans perdre de généralité, que $\alpha_k n \in \mathbb{N}_0$ pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$. De plus, nous supposons que la partition des α_k est plus fine que celle des λ_i , c'est-à-dire que $2r_K \leq \min_{1 \leq i \leq M} \nabla \lambda_i$ et $\lambda_i K \in \mathbb{N}_0$ pour tout $i \in \{0, \dots, M\}$. En particulier, $\alpha_2 \leq \lambda_1 \leq \lambda^{(1)}$ et $\mu_2 = 1$ sous cette hypothèse. Comme précédemment, nous supposons que $\gamma(1 + 2\eta) < \frac{\gamma^{(l)}}{\gamma}$ et $\eta < 1/2$ afin d'avoir que $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma(1 + 2\eta) < \gamma^{(l)}$ et $(1 + 2\eta)(1 - \eta) > 1$. Le paramètre $\delta \in]0, 1/2[$ reste fixe durant la démonstration.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.4.3. Définissons d'abord les variables aléatoires suivantes :

$$\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K) \doteq \sum_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} 1_{\{\nabla \psi_v(\alpha_i) \geq \nabla \widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{3, \dots, K\}\}}$$

qui comptent le nombre de points dans $\Gamma_{\alpha_K}^\delta$ dont les accroissements, lorsqu'on les additionne, dépassent les ordres sous-optimaux dans l'intervalle de temps $[\alpha_2, 1]$. Dans la suite, nous traitons les cas $l \geq 2$. Le cas $l = 1$ est plus facile, alors nous l'omettons.

Avant de borner la probabilité de l'énoncé, nous devons estimer l'espérance de $\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K)$. Notons $i^* \in \{1, \dots, K\}$ l'indice tel que $\alpha_{i^*} = \lambda^{(l-1)}$. Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $-C(\delta) \leq \mathbb{V}(\nabla \psi_v(\alpha_i)) - 2\sqrt{g}r_K \sigma^2(\alpha_i) \log N \leq C$, $1 \leq i \leq K$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$, alors en utilisant la linéarité de l'espérance, l'indépendance des accroissements dans le temps et des estimés gaussiens, nous pouvons borner le premier moment de $\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K)$:

$$\mathbb{E} \left[\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K) \right] = \sum_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \prod_{i=3}^K \mathbb{P} \left(\nabla \psi_v(\alpha_i) \geq \nabla \widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(\alpha_i) \right) \asymp \frac{C(K, \gamma, \eta, \delta)}{(\log N)^{\frac{K-2}{2}}} N^{\widetilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma, \eta}(K)} \quad (4.4.5)$$

où $\widetilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma, \eta}(K)$ regroupe l'exposant du facteur N^2 de $|\Gamma_{\alpha_K}^\delta| = \bar{\delta}_{N,K} N^2$ et les exposants de N dans les estimés gaussiens :

$$\widetilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma, \eta}(K) \doteq 2 - 2 \sum_{i=3}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\bar{\nabla} \mu_i \nu_{\pi \mu_i}} (1 - \eta)^2 - 2 \frac{(\gamma(1 + 2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} (1 - \eta)^2$$

$$\begin{aligned}
&= 2(1-\eta)^2 \mathcal{E}_\gamma^* + 2(1-(1-\eta)^2) + 2 \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta)^2 \\
&\quad - 2 \frac{(1-\eta)^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} \underbrace{\left[(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2 - (\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2 \right]}_{= 4\gamma^2 \eta^2 + 4\gamma\eta(\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))}. \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

Notons que $1 - (1 - \eta)^2 = \eta(2 - \eta)$, alors en utilisant l'inégalité du triangle, (4.4.6) donne

$$\begin{aligned}
&\left| \widetilde{\kappa}_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta)^2 - 2\mathcal{E}_\gamma^* \right| \\
&\leq 2\eta \left\{ (2-\eta)\mathcal{E}_\gamma^* + (2-\eta) + \frac{(1-\eta)^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} \left[4\gamma^2 \eta + 4\gamma|\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})| \right] \right\} \\
&< 2\eta \left\{ 2 + 2 + \left[\frac{4(\gamma^*)^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} + \frac{4\gamma^*}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} \right] \right\} < \epsilon \quad (4.4.7)
\end{aligned}$$

pour $\eta = \eta(\epsilon)$ assez petit qui dépend aussi des paramètres du modèle. Pour obtenir l'avant dernière inégalité, nous avons utilisé le fait que $|\gamma - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)})| < \gamma^{(l)} - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) = \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}}$, car $\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) \leq \gamma^{(l-1)} \leq \gamma < \gamma^{(l)}$ par hypothèse de l'énoncé, le fait que $(2 - \eta) < 2$ et $(1 - \eta)^2 < 1$, car $0 < \eta < 1$, et le fait que $\mathcal{E}_\gamma^* < 1$ et $\gamma < \gamma^*$.

En considérant $\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K)$, nous ne perdons pas grande précision en laissant tomber le premier accroissement $\psi_v(\alpha_2)$, car nous avons un contrôle sur la longueur de l'intervalle $[0, \alpha_2]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon} \right) &\leq \mathbb{P} \left(\widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K) < N^{\widetilde{\kappa}_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta)^2} \right) \\
&\quad + \mathbb{P} \left(|\mathcal{H}_N^\psi(\gamma)| < N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon}, \widetilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma, \eta}(K) \geq N^{\widetilde{\kappa}_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta)^2} \right). \quad (4.4.8)
\end{aligned}$$

Par (4.4.7), $N^{\widetilde{\kappa}_{N, K}^{\gamma, \eta}(K) - 2 \frac{2r_K \sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta)^2} - N^{2\mathcal{E}_\gamma^* - \epsilon} \geq 1$, alors la dernière probabilité en (4.4.8) est bornée par $\mathbb{P} \left(\min_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \leq -(\widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(1) - \widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(\alpha_2) - \widetilde{L}_N^\gamma(1)) \right)$ si nous choisissons $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand. En effet,

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(1) - \widetilde{L}_N^{\gamma, \eta}(\alpha_2) - \widetilde{L}_N^\gamma(1) &= 2\sqrt{g} \left(\gamma[(1+2\eta)(1-\eta) - 1] - \frac{2}{K} \frac{\sigma^2(\alpha_2)}{\sqrt{\nu_{\pi_1}}} (1-\eta) \right) \log N \\
&\geq \sqrt{g}\gamma\eta(1-2\eta) \log N > 0
\end{aligned}$$

pour $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand, car nous avons supposé $\eta < 1/2$ dans la discussion précédant la démonstration. En utilisant la symétrie des variables gaussiennes :

$$\mathbb{P} \left(\min_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \leq -\sqrt{g}\gamma\eta(1-2\eta) \log N \right) = \mathbb{P} \left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \geq \sqrt{g}\gamma\eta(1-2\eta) \log N \right)$$

Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\psi_v(\alpha_2)) \leq 2gr_K\sigma^2(\alpha_2)\log N + C$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N^\delta$, alors la sous-additivité et un estimé gaussien nous donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \psi_v(\alpha_2) \geq \sqrt{g}\gamma\eta(1-2\eta)\log N\right) &\leq \bar{\delta}_{N,K}N^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(\sqrt{g}\gamma\eta(1-2\eta)\log N)^2}{2gr_K\sigma^2(\alpha_2)\log N + C}\right) \\ &\leq CN^{2-\frac{K}{4}\frac{\gamma^2\eta^2(1-2\eta)^2}{\sigma^2(\alpha_2)}} \leq N^{-\tilde{c}_1(\gamma,\eta)} \end{aligned}$$

pour $K = K(\gamma, \eta)$ assez grand où $\tilde{c}_1(\gamma, \eta) > 0$ est une constante appropriée. Par conséquent, la dernière probabilité en (4.4.8) est bornée par $N^{-\tilde{c}_1(\gamma,\eta)}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K) < N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma,\eta}(K) - 2\frac{2r_K\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla\nu\pi_1}(1-\eta)^2}\right) \leq N^{-\tilde{c}_2(\gamma,\eta)}$$

pour une constante $\tilde{c}_2(\gamma, \eta) > 0$ appropriée qui dépend des paramètres du modèle. En appliquant l'inégalité de Paley-Zygmund, nous pouvons borner la probabilité complémentaire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K) \geq N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma,\eta}(K) - 2\frac{2r_K\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla\nu\pi_1}(1-\eta)^2}\right) \\ \geq \left(1 - \frac{N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma,\eta}(K) - 2\frac{2r_K\sigma^2(\alpha_2)}{\nabla\nu\pi_1}(1-\eta)^2}}{\mathbb{E}\left[\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K)\right]}\right)^2 \frac{\left(\mathbb{E}\left[\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K)\right]\right)^2}{\mathbb{E}\left[\left(\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K)\right)^2\right]}. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Notons que l'inégalité de Paley-Zygmund est applicable ici, car le ratio de la grande parenthèse est inclus entre 0 et 1 à cause des bornes sur le premier moment en (4.4.5). En fait, la grande parenthèse tend exponentiellement vite vers 1 (en fonction de γ et η) lorsque $N \rightarrow \infty$ en raison de ces bornes. Il suffit donc de montrer que le ratio d'espérances en (4.4.9) est borné inférieurement par $1 - N^{-\tilde{c}_3(\gamma,\eta)}$ pour conclure, où $\tilde{c}_3(\gamma, \eta) > 0$ est une constante appropriée qui dépend des paramètres du modèle.

Avant de borner supérieurement le deuxième moment, introduisons quelques notations pour raccourcir les prochaines expressions :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{u,i}^\eta &\doteq \mathbb{P}\left(\nabla\psi_u(\alpha_i) \geq \tilde{L}_N^{\gamma,\eta}(\alpha_i)\right), \quad u \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta, \quad 1 \leq i \leq K, \\ \tilde{q}_{u,v,i}^\eta &\doteq \mathbb{P}\left(\nabla\psi_u(\alpha_i), \nabla\psi_v(\alpha_i) \geq \tilde{L}_N^{\gamma,\eta}(\alpha_i)\right), \quad u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta, \quad 1 \leq i \leq K. \end{aligned}$$

Maintenant, pour le deuxième moment, nous avons

$$\mathbb{E}\left[\left(\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma,\eta}(K)\right)^2\right] = \sum_{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \mathbb{P}\left(\nabla\psi_u(\alpha_i), \nabla\psi_v(\alpha_i) \geq \tilde{L}_N^{\gamma,\eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{3, \dots, K\}\right)$$

$$= \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \prod_{i=3}^K \tilde{q}_{u,i}^\eta \tilde{q}_{v,i}^\eta + \sum_{r=1}^{K-2} \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_r \leq \rho(u,v) < \alpha_{r+1}}} \prod_{i=3}^{r+2} \tilde{q}_{u,v,i}^\eta \prod_{i=r+3}^K \tilde{q}_{u,i}^\eta \tilde{q}_{v,i}^\eta + \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \rho(u,v) \geq \alpha_{K-1}}} \prod_{i=3}^K \tilde{q}_{u,v,i}^\eta$$

en décomposant la sommation de la première ligne selon les temps de branchement de chaque couple de points $u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$ exactement comme nous l'avons fait pour l'équation (4.3.10) dans la preuve du lemme 4.3.3 (un produit sans indice est toujours égal à 1). L'inégalité $\tilde{q}_{u,v,i}^\eta \leq \tilde{q}_{u,i}^\eta$ pour tout $i \in \{1, \dots, K\}$ est triviale, alors la dernière expression est bornée par

$$\underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \prod_{i=2}^K \tilde{q}_{u,i}^\eta \tilde{q}_{v,i}^\eta}_{(1)} + \underbrace{\sum_{r=1}^{K-2} \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_r \leq \rho(u,v) < \alpha_{r+1}}} \prod_{i=3}^{r+2} \tilde{q}_{u,i}^\eta \prod_{i=r+3}^K \tilde{q}_{u,i}^\eta \tilde{q}_{v,i}^\eta}_{(2)_r} + \underbrace{\sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \rho(u,v) \geq \alpha_{K-1}}} \prod_{i=3}^K \tilde{q}_{u,i}^\eta}_{(3)}. \quad (4.4.10)$$

En utilisant l'indépendance des accroissements dans le temps et en ajoutant les termes manquants dans la sommation de (1), nous avons la borne suivante :

$$(1) = \sum_{\substack{u,v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \\ \alpha_0 \leq \rho(u,v) < \alpha_1}} \mathbb{P}(\nabla \psi_u(\alpha_i) \geq \nabla L_N^{\gamma;\eta}(\alpha_i), 3 \leq i \leq K) \mathbb{P}(\nabla \psi_v(\alpha_i) \geq \nabla L_N^{\gamma;\eta}(\alpha_i), 3 \leq i \leq K) \\ \leq \left(\sum_{u \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta} \mathbb{P}(\nabla \psi_u(\alpha_i) \geq \nabla L_N^{\gamma;\eta}(\alpha_i) \quad \forall i \in \{3, \dots, K\}) \right)^2 = \left(\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{N}}_N^{\gamma;\eta}(K) \right] \right)^2.$$

Comme en (4.3.12), il y a $\bar{\delta}_{N,K} N^2 ((1-2\delta)N^{rK} + 1)^2$ couple de points $u, v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta$ tels que $\rho(u, v) \geq \alpha_{K-1}$, alors en bornant supérieurement (3) par des estimés gaussiens comme nous avons fait pour la borne supérieure du premier moment en (4.4.5), nous trouvons

$$(3) \leq N^{2rK} N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma;\eta}(K)}.$$

Maintenant, pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$, la sommation en $(2)_r$ possède au plus

$$\bar{\delta}_{N,K} N^2 \left((1-2\delta)^{K-r} N^{1-\alpha_r} + \frac{(1-2\delta)^{K-r-1} N^{1-\alpha_r}}{N^{rK}} \right)^2$$

couples de points comme en (4.3.13). Par le point (iii) du lemme 4.2.2, $\mathbb{V}(\nabla \psi_v(\alpha_i)) \leq gr_K \sigma^2(\alpha_i) \log N + C$, $1 \leq i \leq K$ pour tout $v \in \Gamma_{\alpha_K}^\delta \subseteq V_N^\delta$, alors des estimés gaussiens bornent $(2)_r$ pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$ (uniformément en v) par

$$\begin{cases} N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma;\eta}(K)} \cdot N^{2(1-\alpha_r)} N^{-2 \sum_{i=r+3}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_i} \nu_{\pi \mu_i}} (1-\eta)^2} N^{-2 \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} (1-\eta)^2} & \text{si } r+2 \leq i^*, \\ N^{\tilde{\kappa}_{N,K}^{\gamma;\eta}(K)} \cdot N^{2(1-\alpha_r)} N^{-2 \left(\sum_{i=r+3}^K r_K \sigma^2(\alpha_i) \right) \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{(\nu_{\pi_{l-1}+1, M})^2} (1-\eta)^2} & \text{si } r+2 > i^*. \end{cases}$$

Par exactement le même raisonnement que nous avons utilisé entre les équations (4.3.14) et (4.3.17) lors de la preuve du lemme 4.3.3, il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} \alpha_r \geq \sum_{i=3}^{r+2} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + 2\tilde{c}_3(\gamma, \eta) & \text{si } r+2 \leq i^*, \\ \alpha_r \geq \sum_{i=3}^{i^*} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + \sum_{i=i^*+1}^{r+2} r_K \sigma^2(\alpha_i) \frac{(\gamma(1+2\eta) - \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}))^2}{(\nu_{\pi_{l-1+1, M}})^2} (1-\eta)^2 + 2\tilde{c}_3(\gamma, \eta) & \text{si } r+2 > i^*, \end{cases}$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$ afin de montrer que le ratio d'espérances en (4.4.9) est borné inférieurement par $1 - N^{-\tilde{c}_3(\gamma, \eta)}$. Or, la seconde sommation sur la deuxième ligne de la dernière accolade est bornée supérieurement par $\sum_{i=i^*+1}^{r+2} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2$ en utilisant le fait que $\zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) \leq \gamma^{(l-1)} \leq \gamma(1+2\eta) < \gamma^{(l)} = \zeta_{\gamma^*}(\lambda^{(l-1)}) + \frac{\nu_{\pi_{l-1+1, M}}}{\sqrt{\nu_{\pi_l}}}$ et la propriété (2.1.3) du modèle (voir la discussion précédant la démonstration). Par conséquent, les conditions de la dernière accolade sont satisfaites si

$$\alpha_r \geq \sum_{i=3}^{r+2} \frac{r_K \sigma^2(\alpha_i)}{\sqrt{\nu_{\mu_i} \nu_{\pi_{\mu_i}}}} (1-\eta)^2 + 2\tilde{c}_3(\gamma, \eta) \quad (4.4.11)$$

pour tout $r \in \{1, \dots, K-2\}$. Ceci correspond exactement à l'inégalité (4.3.17) (avec $\eta = \epsilon$) qui, à son tour, se prouve comme l'inégalité (2.2.20) dans la preuve du lemme 2.2.3. Il est facile de vérifier qu'elle est toujours satisfaite pour $K = K(\gamma, \eta)$ en posant $2\tilde{c}_3(\gamma, \eta) \doteq r_K(1 - (1-\eta)^2)$. Ceci termine la démonstration. ■

Chapitre 5

CONCLUSION

5.1. AUTRES RÉSULTATS ET CONJECTURE SUR L'ORDRE 2 DU MAXIMUM DU CLGI

Dans cette section, nous citons sans démonstration un théorème sur l'énergie libre que nous aurions pu prouver à partir des résultats obtenus dans ce mémoire et nous conjecturons la convergence d'ordre 2 du maximum pour le CLGI. Soit $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ un champ associé à une MABI de paramètres (σ, λ) sous la définition 2.1.1 et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres (σ, λ) sous la définition 4.1.1, alors leur *énergie libre* est définie comme suit :

$$f_N^{\bar{S}}(\beta) \doteq \frac{\sum_{v \in \mathbb{D}_n} e^{\beta \bar{S}_v}}{\log N^2} \quad \text{et} \quad f_N^\psi(\beta) \doteq \frac{\sum_{v \in V_N^\delta} e^{\beta \psi_v}}{\log N^2}, \quad \beta > 0, \delta \in]0, 1/2[.$$

L'énergie libre pour un modèle de $N^2 = 2^{2n}$ variables gaussiennes i.i.d. de variance $g\sigma^2 \log N$ est définie de façon analogue et sa limite presque sûre (voir théorème 8.1 de [9]) est donnée par

$$f(\beta; \sigma^2) \doteq \begin{cases} 1 + \frac{\sigma^2 \beta^2}{2\pi} & \text{si } \beta \leq \beta_c(\sigma^2) \doteq \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \\ \sqrt{g}\sigma\beta & \text{si } \beta \geq \beta_c(\sigma^2) \end{cases}$$

où $\beta_c(\sigma^2)$ est une valeur critique. En utilisant les théorèmes 2.3.1 et 4.4.1 du mémoire sur l'ordre du nombre de hauts points respectifs des champs $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$, et en généralisant l'argument présenté au théorème 2.1 de [4], nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.1.1. *Pour les champs $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ ci-haut, nous avons*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N^\psi(\beta) = \sum_{j=1}^m f(\beta; \overline{\nabla \nu_{\pi_j}}) \nabla \lambda^{(j)} \quad \text{p.s. et dans } L^1,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{\bar{S}}(\beta) = \sum_{j=1}^m f\left(\beta; \frac{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}}{g \log 2}\right) \nabla \lambda^{(j)} \quad \text{p.s. et dans } L^1,$$

et les valeurs critiques $\beta^{(j)} \doteq \beta_c(\overline{\nabla \nu_{\pi_j}})$ sont telles que $\beta^{(1)} < \beta^{(2)} < \dots < \beta^{(m)}$.

Étant donné les grandes similarités entre les champs $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ que nous avons vues tout au long du mémoire, nous pensons que les résultats sur la convergence d'ordre 2 du maximum et la tension du maximum avec son deuxième ordre, obtenus au théorème 2.4.1, s'étendent au CLGI. La tension du maximum avec son deuxième ordre pour le CLG (voir [11]) est aussi un argument en faveur de la prochaine conjecture.

Conjecture 5.1.2 (Deuxième ordre de convergence du maximum et tension). *Soit $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ un CLGI de paramètres (σ, λ) sous la définition 4.1.1, $\gamma^* = \gamma^*(\sigma, \lambda)$ et $\delta \in]0, 1/2[$, alors*

$$\max_{v \in V_N^\delta} \psi_v = 2\sqrt{g}\gamma^* \log N - \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j}{2} \frac{\sqrt{g}\sqrt{\nabla\nu_{\pi_j}}}{2} \log \log N + O_{\mathbb{P}}(1)$$

où $\omega_j = 3$ si $\hat{\mathcal{J}}_{\sigma^2}|_{]_{\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}}[} \equiv \mathcal{J}_{\sigma^2}|_{]_{\lambda^{(j-1)}, \lambda^{(j)}}[}$ et $\omega_j = 1$ sinon.

Pour espérer montrer une telle proposition, nous croyons qu'il est nécessaire d'obtenir des estimés plus précis sur la variance des accroissements que ceux présentés au lemme 4.2.2. Le cas où le pas des accroissements est de longueur $\frac{1}{n}$ devra être traité.

5.2. QUESTIONS OUVERTES

Pour le lecteur intéressé, nous énumérons dans cette section quelques questions d'intérêt encore ouvertes pouvant éventuellement faire suite à l'analyse présentée dans ce mémoire :

- (1) Vérifier la conjecture 5.1.2.
- (2) Vérifier s'il y a un deuxième ordre de convergence pour le nombre de hauts points de $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$, et si oui, le calculer.
- (3) Démontrer la convergence en loi du maximum de $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ en généralisant [3].
- (4) Démontrer la convergence en loi du maximum de $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ en généralisant [10].
- (5) Regarder le premier ordre de convergence du maximum pour $\{\bar{S}_v\}_{v \in \mathbb{D}_n}$ et $\{\psi_v\}_{v \in V_N}$ lorsque la fonction de volatilité $\sigma(\cdot)$ est continue.
- (6) Généraliser la définition du CLGI au cas continue (voir [37] et [21] pour la version continue du CLG) et prouver l'analogie du théorème 1.2 de [28] sur les «*thick points*». Les «*thick points*» correspondent à la version continue des hauts points.
- (7) Trouver un algorithme efficace pour simuler un CLGI.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Louigi ADDARIO-BERRY et Bruce REED : Minima in branching random walks. *Ann. Probab.*, 37(3):1044–1079, 2009.
- [2] Robert J. ADLER et Jonathan E. TAYLOR : *Random Fields and Geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [3] Elie AÏDÉKON : Convergence in law of the minimum of a branching random walk. *Ann. Probab.*, 41(3A):1362–1426, 2013.
- [4] Louis-Pierre ARGUIN et Olivier ZINDY : Poisson-Dirichlet statistics for the extremes of the two-dimensional Gaussian free field. <http://arxiv.org/abs/1310.2159>, 2013. Preprint.
- [5] J. D. BIGGINS : The first- and last-birth problems for a multitype age-dependent branching process. *Advances in Appl. Probability*, 8(3):446–459, 1976.
- [6] J. D. BIGGINS : Chernoff’s theorem in the branching random walk. *J. Appl. Probab.*, 14(3):630–636, 1977.
- [7] Erwin BOLTHAUSEN, Jean-Dominique DEUSCHEL et Giambattista GIACOMIN : Entropic repulsion and the maximum of the two-dimensional harmonic crystal. *Ann. Probab.*, 29(4):1670–1692, 2001.
- [8] Erwin BOLTHAUSEN, Jean Dominique DEUSCHEL et Ofer ZEITOUNI : Recursions and tightness for the maximum of the discrete, two dimensional Gaussian free field. *Electron. Commun. Probab.*, 16:114–119, 2011.
- [9] Erwin BOLTHAUSEN et Alain-Sol SZNITMAN : *Ten Lectures on Random Media*, volume 32 de *DMV Seminar*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
- [10] Maury BRAMSON, Jian DING et Ofer ZEITOUNI : Convergence in law of the maximum of the two-dimensional discrete Gaussian free field. <http://arxiv.org/abs/1301.6669>, 2013. Preprint.
- [11] Maury BRAMSON et Ofer ZEITOUNI : Tightness of the recentered maximum of the two-dimensional discrete Gaussian free field. *Comm. Pure Appl. Math.*, 65(1):1–20, 2012.

- [12] Maury D. BRAMSON : Maximal displacement of branching Brownian motion. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5):531–581, 1978.
- [13] Peter J. BROCKWELL et Richard A. DAVIS : *Time Series : Theory and Methods*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2006. Reprint of the second (1991) edition.
- [14] Sourav CHATTERJEE : Chaos, concentration, and multiple valleys. <http://arxiv.org/abs/0810.4221>, 2008.
- [15] Pierre CIZEAU, Parameswaran GOPIKRISHNAN, Yanhui LIU, Martin MEYER, Chung-Kang PENG et H. Eugene STANLEY : Statistical properties of the volatility of price fluctuations. *Physical Review E*, 60(2):1390–1400, 1999.
- [16] Rama CONT : Empirical properties of asset returns : stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2):223–236, 2001.
- [17] Olivier DAVIAUD : Extremes of the discrete two-dimensional Gaussian free field. *Ann. Probab.*, 34(3):962–986, 2006.
- [18] Michel DELFOUR : *Introduction à l'optimisation et au calcul semi-différentiel*. Mathématiques appliquées pour le Master. Dunod, 2012. Cours et exercices corrigés.
- [19] Luc DEVROYE et Bruce REED : On the variance of the height of random binary search trees. *SIAM J. Comput.*, 24(6):1157–1162, 1995.
- [20] Jian DING : Exponential and double exponential tails for maximum of two-dimensional discrete Gaussian free field. *Probab. Theory Related Fields*, 157(1-2):285–299, 2013.
- [21] Bertrand DUPLANTIER et Scott SHEFFIELD : Liouville quantum gravity and KPZ. *Invent. Math.*, 185(2):333–393, 2011.
- [22] Lawrence C. EVANS : *Partial Differential Equations*, volume 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2010.
- [23] Ming FANG : *Studies in One Dimensional Branching Random Walks*. Thèse de doctorat, University of Minnesota, 2011.
- [24] Ming FANG : Tightness for maxima of generalized branching random walks. *J. Appl. Probab.*, 49(3):652–670, 2012.
- [25] Ming FANG et Ofer ZEITOUNI : Branching random walks in time inhomogeneous environments. *Electron. J. Probab.*, 17(67):18, 2012.
- [26] J. M. HAMMERSLEY : Postulates for subadditive processes. *Ann. Probability*, 2:652–680, 1974.
- [27] Morgan A. HANSON : On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, 80(2):545–550, 1981.

- [28] Xiaoyu HU, Jason MILLER et Yuval PERES : Thick points of the Gaussian free field. *Ann. Probab.*, 38(2):896–926, 2010.
- [29] J. F. C. KINGMAN : The first birth problem for an age-dependent branching process. *Ann. Probability*, 3(5):790–801, 1975.
- [30] Nicola KISTLER : *Derrida's Random Energy Models, Beyond Spin Glasses*. À paraître dans Lecture notes in Mathematics. Springer, 2014.
- [31] A. KOLMOGOROV, S. FOMINE et V. M. TIHOMIROV : *Éléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Éditions Mir, Moscow, 1974. Avec un complément sur les algèbres de Banach, par V. M. Tikhomirov, Traduit du russe par Michel Dragnev.
- [32] Gregory F. LAWLER : *Intersections of Random Walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1991.
- [33] Colin MCDIARMID : Minimal positions in a branching random walk. *Ann. Appl. Probab.*, 5(1):128–139, 1995.
- [34] Péter MEDVEGYEV : *Stochastic Integration Theory*, volume 14 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [35] R.E.A.C. PALEY et A. ZYGMUND : A note on analytic functions in the unit circle. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 28(3):pp 266–272, 1932.
- [36] Sidney I. RESNICK : *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2008. Reprint of the 1987 original.
- [37] Scott SHEFFIELD : Gaussian free fields for mathematicians. *Probab. Theory Related Fields*, 139(3-4):521–541, 2007.
- [38] A. N. SHIRYAYEV : *Probability*, volume 95 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second édition, 1995. Translated from the Russian by R. P. Boas.
- [39] Ofer ZEITOUNI : Gaussian fields. <http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~zeitouni/notesGauss.pdf>, 2013. Online Lecture Notes.

Annexe A

APPLICATION DU THÉORÈME DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Dans ce chapitre, nous solvons deux problèmes d'optimisation via le théorème de Karush-Kuhn-Tucker. La solution au premier problème nous permet d'obtenir le chemin optimal normalisé pour l'ordre 1 du maximum de la MABI et du CLGI. La solution au second problème nous donne, pour les deux champs inhomogènes, le chemin optimal normalisé pour les hauts points. Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker donne des conditions nécessaires à l'optimalité locale. Les conditions sont en fait suffisantes pour l'optimalité globale d'un maximum lorsque la fonction objectif f et les fonctions contraintes g_k sont continûment différentiables et concaves [27]. Nous utiliserons les notations introduites à la section 2.1.

Théorème A.0.1 (Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [18]). *Soit un ouvert $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$, une fonction objectif $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ et un ensemble de contraintes $\mathcal{U} \doteq \{\mathbf{x} \in \mathcal{D} \mid g_k(\mathbf{x}) \geq 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n_2\}\}$ spécifié par des fonctions $g_k : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n_2$. On suppose que*

- (a) *f possède un maximum local au point $\mathbf{x}^* \in \mathcal{U}$ par rapport à \mathcal{U} ,*
- (b) *f est Fréchet différentiable au point \mathbf{x}^* ,*
- (c) *les g_k sont Fréchet différentiables en \mathbf{x}^* .*

S'il y a qualification des contraintes (c'est le cas par exemple lorsque la condition de Slater [18] est vérifiée), alors il existe $(\mu_1, \dots, \mu_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$ tel que les points suivants sont satisfaits pour tout $k \in \{1, \dots, n_2\}$ (∇ dénote le gradient ici) :

- (i) $\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^{n_2} \mu_k \nabla g_k(\mathbf{x}^*) = 0$,
- (ii) $g_k(\mathbf{x}^*) \geq 0$,
- (iii) $\mu_k \geq 0$,
- (iv) $\mu_k g_k(\mathbf{x}^*) = 0$.

A.1. PROBLÈME D'OPTIMISATION # 1

Lemme A.1.1. *Soit la fonction objectif*

$$f(x_1, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^M x_i$$

à maximiser sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^M$ et sous les contraintes

$$g_k(x_1, \dots, x_M) = \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq M$$

alors il existe un unique maximum global. Si $j_i \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(j_{i-1})} < \lambda_i \leq \lambda^{(j_i)}$, alors les composantes du point maximisant s'écrivent :

$$x_i^* = \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\sqrt{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}}, \quad 1 \leq i \leq M$$

et le maximum global est donné par

$$\gamma^* \doteq f(x_1^*, \dots, x_M^*) = \sum_{j=1}^m \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)}.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, remarquons que la fonction objectif f et les fonctions contraintes g_k sont continûment différentiables et concaves (c'est évident). De plus, la condition de Slater est satisfaite, car $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^M$ et $g_k(\mathbf{0}) = \lambda_k > 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, M\}$. Par conséquent, les conditions du théorème de KKT sont nécessaires et suffisantes pour l'optimalité globale d'un maximum.

Si un maximum existe, alors il est unique. En effet, supposons que $\bar{\mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{y}}$ ($\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{y}}$) sont deux points maximisants du problème, alors $\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{y}}$ l'est aussi, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, car f est linéaire et l'ensemble des contraintes $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^M \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M \mid g_k(\mathbf{x}) \geq 0\}$ est convexe étant une intersection de convexes. Si $g_M(\mathbf{x}) > 0$, alors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M$ ne maximise pas f par rapport à \mathcal{U} , car il suffit de choisir un point $\mathbf{x}^+ \in \mathbb{R}^M$ avec les mêmes $M - 1$ premières composantes et $x_M^+ > x_M$ pour avoir que $g_M(\mathbf{x}^+) = 0$ et $f(\mathbf{x}^+) > f(\mathbf{x})$ sans affecter les autres contraintes. Par conséquent, $g_M(\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{y}}) = 0$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$, mais g_M est strictement concave, alors $g_M(\lambda \bar{\mathbf{x}} + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{y}}) > \lambda g_M(\bar{\mathbf{x}}) + (1 - \lambda) g_M(\bar{\mathbf{y}}) = 0$ pour tout $\lambda \in]0, 1[$. C'est une contradiction.

Il suffit donc de vérifier que le candidat (x_1^*, \dots, x_M^*) décrit dans l'énoncé satisfait les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) du théorème de KKT pour conclure.

Calculons d'abord les dérivées partielles de la fonction objectif et des fonctions contraintes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_M) &= 1, \quad 1 \leq i \leq M, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x_1, \dots, x_M) &= \begin{cases} -\frac{2x_i}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}, \quad 1 \leq i, k \leq M. \end{aligned}$$

Pour que la condition (i) du théorème de KKT soit satisfaite, nous devons avoir que

$$1 - \left(\sum_{k=i}^M \mu_k \right) \frac{2x_i^*}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq M. \quad (\text{A.1.1})$$

Par la définition des candidats x_i^* , on peut facilement résoudre le système linéaire en (A.1.1). En effet, si $j_i \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(j_i-1)} < \lambda_i \leq \lambda^{(j_i)}$ et $s_i \doteq \sum_{k=i}^M \mu_k$ ($s_{M+1} \doteq 0$), alors

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}}, \\ \mu_i = s_i - s_{i+1} &= \begin{cases} 0 & \text{si } \pi_{j_i-1} < i < \pi_{j_i} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}} - \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i+1}}}} & \text{si } i = \pi_{j_i} < \pi_{j_M} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}} & \text{si } i = \pi_{j_i} = \pi_{j_M} \end{cases}, \end{aligned}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$. Notons que $\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} > \overline{\nabla \nu_{\pi_{j+1}}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$ par la propriété (2.1.3) du modèle, alors la condition (iii) du théorème de KKT est satisfaite.

Pour les candidats x_i^* de l'énoncé, les contraintes du problème sont aussi satisfaites. En effet, si $j_k \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(j_k-1)} < \lambda_k \leq \lambda^{(j_k)}$, alors

$$\begin{aligned} g_k(x_1^*, \dots, x_M^*) &= \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\nu_{\pi_{j_i-1}+1, \pi_{j_i}}} \right) \\ &= \begin{cases} (\lambda_k - \lambda^{(j_k-1)}) - \frac{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}}{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, \pi_{j_k}}} & \text{si } \pi_{j_k-1} < k < \pi_{j_k} \\ 0 & \text{si } k = \pi_{j_k} \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, M\}$. Nous avons utilisé le fait que $\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}} = \overline{\nu_{\pi_{j_i-1}+1, \pi_{j_i}}}$ pour obtenir la première égalité. La première quantité dans l'accolade est toujours positive, car $\overline{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, \pi_{j_k}}} \geq \overline{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}}$ pour tout $k \in \{\pi_{j_k-1} + 1, \dots, M\}$ par la propriété (2.1.4) du modèle. La condition (ii) du théorème de KKT est donc satisfaite.

Enfin, la condition (iv) est immédiatement satisfaite par les expressions que nous avons trouvées pour les μ_k et les $g_k(x_1^*, \dots, x_M^*)$, c'est-à-dire que leur produit est toujours 0. ■

A.2. PROBLÈME D'OPTIMISATION # 2

Lemme A.2.1. Soit $\gamma \in]0, \gamma^*[$ tel que $\gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)}$ pour un certain $l \in \{1, \dots, m\}$ (voir (2.3.3) pour la définition des niveaux critiques $\gamma^{(l-1)}$ et $\gamma^{(l)}$). De plus, soit la fonction objectif

$$f_\gamma(x_1, \dots, x_{M-1}) = \sum_{i=1}^{M-1} \left(\nabla \lambda_i - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) + \left(\nabla \lambda_M - \frac{(\gamma - \sum_{i'=1}^{M-1} x_{i'})^2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} \right)$$

à maximiser sur le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{M-1}$ et sous les contraintes

$$g_k(x_1, \dots, x_{M-1}) = \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{x_i^2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right) \geq 0, \quad 1 \leq k \leq M-1$$

alors il existe un unique maximum global. Si $j_i \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(j_i-1)} < \lambda_i \leq \lambda^{(j_i)}$, alors les composantes du point maximisant s'écrivent :

$$x_i^* = \begin{cases} \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\sqrt{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}} & \text{si } i \leq \pi_{l-1} \\ \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} \right) & \text{si } i > \pi_{l-1} \end{cases}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, M-1\}$ et le maximum global est donné par

$$\mathcal{E}_\gamma^* \doteq f_\gamma(x_1^*, \dots, x_{M-1}^*) = (\lambda_M - \lambda^{(l-1)}) - \frac{(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)})^2}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}.$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, remarquons que la fonction objectif f_γ est continûment différentiable et strictement concave, car sa matrice hessienne est définie négative (voir plus bas), et les fonctions contraintes g_k sont continûment différentiables et concaves (c'est évident). De plus, la condition de Slater est satisfaite comme au problème #1. Ainsi, nous savons que les conditions du théorème de KKT sont nécessaires et suffisantes pour l'optimalité globale d'un maximum et la concavité stricte de f_γ nous garantit l'unicité du maximum s'il existe. Il suffit donc de vérifier que le candidat $(x_1^*, \dots, x_{M-1}^*)$ décrit dans l'énoncé satisfait les conditions (i), (ii), (iii) et (iv) du théorème de KKT pour conclure.

Calculons d'abord les dérivées partielles premières et secondes de la fonction objectif :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f_\gamma(x_1, \dots, x_{M-1}) &= -\frac{2x_i}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} + \frac{2(\gamma - \sum_{i'=1}^{M-1} x_{i'})}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M}, \quad 1 \leq i \leq M-1, \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_\gamma(x_1, \dots, x_{M-1}) &= -\frac{2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} 1_{\{i=j\}} - \frac{2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M}, \quad 1 \leq i, j \leq M-1. \end{aligned}$$

Soit la matrice diagonale \mathbf{D} , de taille $M - 1 \times M - 1$, avec les entrées $\frac{2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}$ et la matrice \mathbf{I} , de même taille, qui ne comporte que des 1. La matrice hessienne de f_γ s'écrit comme $\mathbf{H}_{f_\gamma} = -\mathbf{D} - \frac{2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} \mathbf{I}$. Or, les valeurs propres de \mathbf{D} sont données par ses éléments diagonaux et les valeurs propres de \mathbf{I} sont 0 (avec vecteurs propres $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_{M-1}$) et $M - 1$ (avec vecteur propre $(1, 1, \dots, 1)'$) où les \mathbf{e}_i dénotent les vecteurs de base usuels dans \mathbb{R}^{M-1} . Si $\lambda^*(\cdot)$ donne la plus grande valeur propre d'une matrice, alors

$$\begin{aligned} \lambda^*(\mathbf{H}_{f_\gamma}) &= \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}'(\mathbf{H}_{f_\gamma})\mathbf{x} \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}'(-\mathbf{D})\mathbf{x} + \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \mathbf{x}'\left(-\frac{2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} \mathbf{I}\right)\mathbf{x} \\ &= \lambda^*(-\mathbf{D}) + \frac{2}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} \lambda^*(-\mathbf{I}) = \max_{1 \leq i \leq M-1} \left\{ -\frac{2}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} \right\} + 0 < 0 \end{aligned}$$

ce qui veut dire que toutes les valeurs propres de \mathbf{H}_{f_γ} sont strictement négatives et par conséquent, f_γ est bien strictement concave.

Calculons maintenant les dérivées partielles des fonctions contraintes :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_k(x_1, \dots, x_{M-1}) = \begin{cases} -\frac{2x_i}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i > k \end{cases}, \quad 1 \leq i, k \leq M - 1.$$

Pour que la condition (i) du théorème de KKT soit satisfaite, nous devons avoir que

$$\frac{2(\gamma - \sum_{i'=1}^{M-1} x_{i'}^*)}{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M} - \left(1 + \sum_{k=i}^{M-1} \mu_k\right) \frac{2x_i^*}{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq M - 1. \quad (\text{A.2.1})$$

Par définition des candidats x_i^* , nous pouvons réécrire l'expression $\gamma - \sum_{i'=1}^{M-1} x_{i'}^*$ comme

$$\begin{aligned} \gamma - \sum_{i'=1}^{M-1} x_{i'}^* &= \gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} - \sum_{i'=\pi_{l-1}+1}^{M-1} x_{i'}^* \\ &= \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} \right) - \left(1 - \frac{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} \right) \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} \right) \\ &= \frac{\sigma_M^2 \nabla \lambda_M}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant facilement résoudre le système linéaire en (A.2.1). En effet, si $j_i \in \{1, \dots, m\}$ dénote l'indice tel que $\lambda^{(j_i-1)} < \lambda_i \leq \lambda^{(j_i)}$ et $s_i \doteq \sum_{k=i}^{M-1} \mu_k$ ($s_M \doteq 0$), alors

$$s_i = \begin{cases} \sqrt{\nabla \nu_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}} \frac{\left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\nabla \nu_{\pi_j}} \nabla \lambda^{(j)} \right)}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} - 1 & \text{si } i \leq \pi_{l-1} \\ 0 & \text{si } i > \pi_{l-1} \end{cases},$$

$$\mu_i = s_i - s_{i+1} = \begin{cases} \left(\sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i}}}} - \sqrt{\overline{\nabla_{j_i} \nu_{\pi_{j_i+1}}}} \right) \frac{\left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} \right)}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} & \text{si } i = \pi_{j_i} < \pi_{l-1} \\ \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}} \frac{\left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} \right)}{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}} - 1 & \text{si } i = \pi_{j_i} = \pi_{l-1} \\ 0 & \text{si } \pi_{j_i-1} < i < \pi_{j_i} \leq \pi_{l-1} \\ 0 & \text{si } \pi_{l-1} \leq \pi_{j_i-1} < i < \pi_{j_i} \end{cases}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, M-1\}$. Notons que $\overline{\nabla \nu_{\pi_j}} > \overline{\nabla \nu_{\pi_{j+1}}}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$ par la propriété (2.1.3) du modèle et

$$\gamma \geq \gamma^{(l-1)} \doteq \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} + \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}}}$$

par hypothèse de l'énoncé, alors la condition (iii) du théorème de KKT est satisfaite.

Pour les candidats x_i^* de l'énoncé, les contraintes du problème sont aussi satisfaites. En effet, si on note $j_k \in \{1, \dots, m\}$ l'indice qui est tel que $\lambda^{(j_k-1)} < \lambda_k \leq \lambda^{(j_k)}$, alors

$$g_k(x_1^*, \dots, x_{M-1}^*) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{\nu_{\pi_{j_i-1}+1, \pi_{j_i}}} \right) & \text{si } k \leq \pi_{l-1} \\ \sum_{i=\pi_{l-1}+1}^k \left(\nabla \lambda_i - \frac{\sigma_i^2 \nabla \lambda_i}{(\nu_{\pi_{l-1}+1, M})^2} \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} \right)^2 \right) & \text{si } k > \pi_{l-1} \\ 0 & \text{si } k = \pi_{j_k} < \pi_{l-1} \\ 0 & \text{si } k = \pi_{j_k} = \pi_{l-1} \\ (\lambda_k - \lambda^{(j_k-1)}) - \frac{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}}{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, \pi_{j_k}}} & \text{si } \pi_{j_k-1} < k < \pi_{j_k} \leq \pi_{l-1} \\ (\lambda_k - \lambda^{(l-1)}) - \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, k}}{(\nu_{\pi_{l-1}+1, M})^2} \left(\gamma - \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} \right)^2 & \text{si } \pi_{l-1} \leq \pi_{j_k-1} < k < \pi_{j_k} \end{cases}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, M-1\}$. Or, la troisième quantité dans l'accolade est toujours positive, car $\frac{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, \pi_{j_k}}}{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}} \geq \frac{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}}{\nu_{\pi_{j_k-1}+1, k}}$ pour tout $k \in \{\pi_{j_k-1}+1, \dots, M\}$ par la propriété (2.1.4) du modèle. De plus,

$$\sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} < \gamma^{(l-1)} \leq \gamma \leq \gamma^{(l)} \doteq \sum_{j=1}^{l-1} \sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_j}}} \nabla \lambda^{(j)} + \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, M}}{\sqrt{\overline{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}}}$$

par hypothèse de l'énoncé, alors la quatrième quantité de l'accolade est bornée inférieurement par $(\lambda_k - \lambda^{(l-1)}) - \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, k}}{\overline{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}}}$ qui est positif, car $\overline{\nabla \nu_{\pi_{l-1}}} \geq \frac{\nu_{\pi_{l-1}+1, k}}{\nu_{\pi_{l-1}+1, k}}$ pour tout $k \in \{\pi_{l-1}+1, \dots, M\}$ par la propriété (2.1.4) du modèle. La condition (iv) du théorème de KKT est donc satisfaite.

Enfin, la condition (v) est immédiatement satisfaite par les expressions que nous avons trouvées pour les μ_k et les $g_k(x_1^*, \dots, x_{M-1}^*)$, c'est-à-dire que leur produit est toujours 0. ■

Annexe B

DEUX LEMMES UTILES

Nous regroupons ici quelques inégalités bien connues qui sont utilisées à plusieurs reprises dans le mémoire. Nous travaillons sur un espace de probabilité générique $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

B.1. ESTIMÉS GAUSSIENS ET L'INÉGALITÉ DE PALEY-ZYGMUND

Le premier lemme permet de borner inférieurement et supérieurement la probabilité qu'une variable gaussienne soit plus grande qu'une certaine valeur $t > 0$. Son utilité vient du fait que les estimés sont très précis lorsque t est grand.

Lemme B.1.1 (Estimés gaussiens [2]). *Supposons que $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où $\sigma > 0$, alors*

$$\frac{\sigma}{t} \left(1 - \frac{\sigma^2}{t^2}\right) \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right) \leq \mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\sigma}{t} \varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

pour tout $t > 0$ où φ dénote la densité d'une loi normale standard.

DÉMONSTRATION. En effectuant le changement de variable $x = \frac{t}{\sigma}$, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \varphi(x) \leq \Psi(x) \leq \frac{1}{x} \varphi(x) \quad (\text{B.1.1})$$

pour tout $x > 0$ où $Z \stackrel{\circ}{=} \frac{\xi}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\Psi(x) \stackrel{\circ}{=} \mathbb{P}(Z \geq x)$. En intégrant par parties,

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{1}{y^2} \varphi(y) dy = \frac{1}{x} \varphi(x) + \int_x^\infty \frac{1}{y} \varphi'(y) dy = \frac{1}{x} \varphi(x) - \Psi(x) \quad (\text{B.1.2})$$

car $\frac{1}{y} \varphi'(y) = -\varphi(y)$, alors la borne supérieure est satisfaite en (B.1.1). De façon similaire,

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{3}{y^4} \varphi(y) dy = \frac{1}{x^3} \varphi(x) + \int_x^\infty \frac{1}{y^3} \varphi'(y) dy = \frac{1}{x^3} \varphi(x) - \frac{1}{x} \varphi(x) + \Psi(x) \quad (\text{B.1.3})$$

en utilisant (B.1.2) et le fait que $\frac{1}{y^3} \varphi'(y) = -\frac{1}{y^2} \varphi(y)$, alors la borne inférieure est satisfaite en (B.1.1). Ceci termine la preuve. ■

B-ii

Le second lemme est dérivé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il sert à borner inférieurement la probabilité qu'une variable aléatoire positive dépasse un certain multiple $0 \leq \theta \leq 1$ de son espérance. Cette inégalité est importante dans l'application des méthodes de deuxième moment et complète l'inégalité de Tchebychev.

Lemme B.1.2 (Inégalité de Paley-Zygmund [35]). *Soit une variable aléatoire $X \geq 0$ non identiquement nulle telle que $X \in L_{\mathbb{R}}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors*

$$\mathbb{P}(X \geq \theta \mathbb{E}[X]) \geq (1 - \theta)^2 \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}$$

pour tout $0 \leq \theta \leq 1$.

DÉMONSTRATION. Puisque $\mathbb{E}[X1_{\{X < \theta \mathbb{E}[X]\}}] \leq \theta \mathbb{E}[X]$, alors

$$(1 - \theta)\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X1_{\{X < \theta \mathbb{E}[X]\}}] = \mathbb{E}[X1_{\{X \geq \theta \mathbb{E}[X]\}}].$$

En prenant le carré de chaque côté de l'inégalité et en appliquant Cauchy-Schwarz,

$$(1 - \theta)^2 (\mathbb{E}[X])^2 \leq \left(\mathbb{E}[X1_{\{X \geq \theta \mathbb{E}[X]\}}] \right)^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X \geq \theta \mathbb{E}[X])$$

ce qui termine la preuve. ■