UNIVERSITE DE MONTREAL

VERS UNE THEORIE DE L'OPTIMUM TEMPORAIRE

PAR

MARIE ALLARD

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

THESE PRESENTEE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)

MARS 1985

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

Comme son titre l'indique, le sujet de notre thèse est la théorie de l'optimum temporaire, c'est-à-dire comment on peut poser le problème de l'optimum de Pareto dans un cadre temporaire. Cette thèse s'inscrit donc dans un vaste courant de la littérature économique, celui de "l'approche de l'équilibre temporaire". Selon cette approche, les agents doivent prendre des décisions en fonction de leurs anticipations sur leur environnement futur, ces anticipations dépendant de leur information sur l'état de l'économie dans les périodes courantes et passées.

Le problème de l'optimum temporaire se pose naturellement dans l'espace dual, c'est-à-dire dans l'espace des prix et des revenus. Or, ceci est non seulement contraire à la tradition de l'optimum de Pareto mais, de plus, cela suppose et exige la connaissance de certains résultats (par exemple, les identités de Roy "temporaires") qui, apparemment, n'existent nulle part dans la littérature. C'est pour cette raison qu'avant même d'arriver au problème de l'optimum, nous avons dû refaire un cadre de référence en réétudiant la théorie du consommateur et du producteur dans un contexte temporaire.

En gros, cette thèse se compose de deux parties, l'une consacrée à la mise sur pied d'une instrumentation (les chapitres 1 et 2) et l'autre (chapitre 3) à des applications et extensions qui utilisent cette instrumentation.

Le premier chapitre comporte deux sections. Dans la section 1, nous abordons la version temporaire de la théorie du consommateur. D'abord, nous montrons comment se fait le passage d'un modèle intertemporel à un modèle temporaire (section 1.1). Nous considérons ensuite certaines possibilités quant aux hypothèses sur les anticipations (section 1.2). Nous terminons cette première section en exposant le problème du consommateur (section 1.3) et les propriétés empiriques des fonctions de demande temporaires et planifiées (section 1.4). La section 2 concerne la théorie de l'optimum temporaire dans le cadre d'une économie d'échanges. Dans cette section, nous avons travaillé principalement avec deux hypothèses concernant les anticipations. D'abord, il semblait naturel d'étudier, au niveau de l'optimum, l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes sous sa forme la plus simple puisque cette même hypothèse avait été retenue pour l'étude du comportement individuel du consommateur et puisque, pendant longtemps, ce fut l'hypothèse principale en micro et en macro (section 2.2). Ce n'est que par la suite que nous nous sommes intéressés à la caractérisation optimale des anticipations comme telle (section 2.4). Les anticipations ont alors été considérées comme endogènes au niveau de la société et nous avons retenu une hypothèse affaiblie d'anticipations rationnelles traduite par l'équation (2.4.1).

Le deuxième chapitre reprend essentiellement le même schéma et les mêmes hypothèses de travail que le chapitre 1, sauf que nous introduisons ici le secteur de la production. La section 3, dans le même esprit que la section 1, présente une théorie du producteur temporaire et établit les propriétés essentielles à l'élaboration de la théorie de l'optimum temporaire dans une économie avec production (section 4).

Avec ces deux premiers chapitres, nous disposons d'une instrumentation assez générale pour nous permettre de traiter différents problèmes d'optimums plus spécifiques. C'est précisément ce que nous faisons dans la deuxième partie de la thèse, soit le chapitre 3. Dans un premier temps, nous appliquons notre instrumentation à un problème de second rang (P5-1) de type Boiteux (section 5). Pour ce faire, nous considérons une économie astreinte à réaliser un déficit ou un surplus public tant pour la période courante (contrainte (5.2.4)) que pour la période future (5.2.5). De plus, nous supposons que les anticipations sont endogènes et conformes à l'hypothèse des anticipations rationnelles (équation (5.2.6)). Dans un second temps, nous examinons comment la théorie de l'optimum présentée dans la première partie peut être étendue lorsque les anticipations des agents sont représentées par des fonctions arbitraires.

Quelques remarques sur la méthodologie. Premièrement, les modèles temporaires déjà existants ne découlent pas, en général, directement du modèle traditionnel néo-classique. Personnellement, nous avons préféré adopter une méthodologie qui fasse en sorte qu'à tout moment si nous le désirons, nous puissions retrouver le cadre traditionnel et comparer avec ce qui existe déjà sur le plan formel. Deuxièmement, la majeure partie de cette thèse a été rédigée au sein d'une équipe de recherche dont faisaient partie des économètres. C'est ce qui explique sans doute le caractère opérationnel (ou facilement transformable comme tel) de certains de nos modèles. Finalement, les différents modèles d'optimums élaborés dans cette thèse, l'ont toujours été en fonction d'un certain type d'équilibre temporaire. Par conséquent, les résultats que l'on tire de ces modèles, sont étroitement liés à la nature même de ces équilibres temporaires et, partant, à la façon de poser les problèmes.

L'un des principaux résultats de cette thèse est que nous savons mieux maintenant comment poser le problème de l'optimum temporaire. Cela constituait l'un des principaux objectifs de cette thèse et nous croyons l'avoir atteint en bonne partie.

D'une façon générale, la théorie élaborée n'a pas le caractère robuste et général que nous aurions espéré obtenir, comme c'est souvent le cas pour les concepts nouveaux. Il semble, en effet, qu'elle dépende beaucoup des hypothèses que l'on fait et de la forme que prenne les anticipations. Par conséquent, la réponse au problème de la caractérisation générale de l'optimum temporaire reste encore à explorer. D'une façon plus précise, nous avons les résultats suivants.

Dans la première partie de la thèse (chapitres 1 et 2) qui consistait à mettre en place l'instrumentation, les résultats obtenus, surtout concernant l'optimum temporaire, étaient pour la plupart "attendus". Aussi bien dans le cas des anticipations ponctuelles exogènes que dans le cas des anticipations endogènes (hypothèse affaiblie d'anticipations rationnelles), les caractérisations obtenues coïncident ou sont cohérentes avec ce que nous connaissions déjà sur l'optimum intertemporel. Pour le chapitre 1, cette caractérisation consiste en la proportionnalité des prix courants (2.2.15) et l'égalité des facteurs d'escompte réels (2.2.18) pour l'hypothèse des anticipations exogènes, auxquelles s'ajoute la proportionnalité des anticipations de prix futurs (2.4.15) pour le cas des anticipations endogènes. Notons que dans le deuxième cas, l'égalité des facteurs d'escompte réels est obtenue grâce au fait qu'à l'optimum, le multiplicateur ϕ_t associé à la conservation des flux financiers est nul. Dans le chapitre 2, nous retrouvons essentiellement la même caractérisation qu'au chapitre 1 sauf qu'elle se généralise aux prix à la production. Ainsi, par exemple, lorsque les anticipations sont endogènes, nous obtenons que les prix courants à la consommation doivent être proportionnels à la fois aux prix courants des inputs physiques et aux prix courants des outputs. Toutefois, nos résultats tendent à montrer qu'il faut être très prudent quant au choix de l'instrumentation à utiliser lorsqu'on traite du problème de l'optimum avec production.

Dans la deuxième partie (chapitre 3) qui se voulait surtout des applications et extensions de l'instrumentation mise en place, les résultats sont plus nouveaux et diversifiés (surtout pour la section 6). Le modèle de second rang posé dans un contexte temporaire nous a permis de trouver une "formule de Boiteux généralisée" (5.3.8) ou encore une "formule de Ramsey-Boiteux généralisée" (5.3.9). Ces formules sont plus générales que celles fournies par les modèles traditionnels de type Boiteux car, en plus de fournir des indications sur ce que devrait être l'écart optimal entre les prix courants payés par sa clientèle et les prix courants "fictifs" sur la base desquels l'entreprise publique maximise son profit, elles montrent ce que devrait être l'écart optimal entre les facteurs d'actualisation réels et l'écart optimal entre les anticipations de prix futurs des consommateurs et celles de l'entreprise. Dans la section 6, l'étude du problème du consommateur, lorsque ses anticipations sont représentées par des fonctions arbitraires, nous a conduit à une propriété d'additivité (5.2.33) de la matrice S* (matrice d'effets de substitution-complémentarité). Sous ces hypothèses, cette dernière propriété résume les implications empiriques des fonctions de demande. Quant à l'étude de l'optimum, elle mène dans ce cas à des caractérisations des plus diverses qu'il serait trop long d'énumérer ici. A titre d'exemple, mentionnons que nous avons montré sous certaines hypothèses que l'équilibre temporaire concurrentiel ne serait jamais un optimum temporaire, un résultat plutôt surprenant. Notons finalement que les diverses interprétations de ce modèle ont été analysées à partir d'une équation centrale, soit l'équation (6.3.18) ou (6.4.1).

INTRODUCTION

Le sujet de notre thèse est la théorie de l'optimum temporaire, c'est-à-dire comment on peut poser le problème de l'optimum de Pareto dans un cadre temporaire. Ce sujet nous semble important et intéressant principalement pour les raisons suivantes. D'une part, la pensée normative est actuellement dichotomique : le même économiste peut conseiller la tarification au coût marginal (supposant donc le plein emploi) et une augmentation (une diminution!) des dépenses gouvernementales pour restaurer le plein emploi. Nous espérons qu'à terme, l'étude de l'optimum temporaire conduira à une unification de la pensée normative. D'autre part, nous vivons dans un monde temporaire et pourtant, le cadre de référence qui nous sert tous les jours à faire notre travail (en tant qu'économistes), est tout à fait statique ou tout à fait atemporel. Ce cadre de référence (nous pensons surtout ici au modèle de Arrow et Debreu), bien qu'il reste un outil utile, est peu adapté à la description du monde dans lequel nous vivons. Il s'imposait donc de le changer, ce besoin étant aussi bien commandé par un souci d'ordre opérationnel que par un souci d'ordre purement théorique.

C'est en grande partie ce même besoin qui, il y a une dizaine d'années, a poussé les théoriciens de l'équilibre général à chercher une représentation qui colle un peu mieux à la réalité. Leur effort s'est traduit par ce que nous appelons dans la littérature "l'approche de l'équilibre temporaire". Selon cette approche, les agents doivent prendre des décisions en fonction de leurs anticipations sur leur environnement futur, ces anticipations dépendant de leur information sur l'état de l'économie dans les périodes courantes et passées. Notons que cette idée, essentielle à ces travaux, se trouvait déjà dans les écrits de J. Hicks (entre autres, dans Valeur et capital) sous le nom d'Equilibre temporaire[1]. Il y a donc eu et il y a encore beaucoup de recherches sur l'équilibre temporaire (à ce sujet, voir la remarquable revue de la littérature de Grandmont [15] et aussi son récent volume Money and Value [17]) mais, à notre connaissance, très peu de gens travaillent directement sur l'optimum temporaire.

Toutefois, il serait erroné de croire que personne ne s'est jamais intéressé au sujet. D'un côté, des auteurs comme Malinvaud [26], [27] ou Koopmans [24] qui ont beaucoup travaillé sur l'optimum intertemporel, ont eu tendance par la suite à projeter leurs résultats au temps t. D'autres se contentaient d'étendre des résultats obtenus à l'aide de modèles atemporels. Mais, en général, ces derniers modèles ont le défaut suivant : ils ne font pas intervenir les anticipations et, partant, ils ne font aucun lien entre les périodes courantes et futures.

[1] Il semble usuel pour les économistes de la génération qui succède à Debreu, de considérer Hicks comme étant le précurseur de "l'équilibre temporaire" (par exemple, voir Grandmont [16], dans son introduction). Toutefois, il ne faudrait pas perdre de vue que la conception de l'équilibre général, tant chez Walras [41], Pareto [29] ou Barone [3], se situait également dans un cadre temporaire.

D'un autre côté, sans jamais avoir posé le problème de l'optimum temporaire comme tel, les principaux auteurs sur l'équilibre temporaire Radner [32], Green [18], Grandmont [14], Sondermann [36], Hart [20], Svensson [40], ...) se sont tous plus ou moins interrogés sur l'efficacité de ces équilibres. Cela étant dit, il n'est pas surprenant que plusieurs idées de notre thèse (surtout dans la première partie) n'apparaissent pas aujourd'hui comme étant nouvelles. Plusieurs d'entre elles se trouvaient déjà dans ces travaux antérieurs soit sous forme d'intuitions ou même sous forme de conjectures. A cet égard, l'article de Malinvaud "Interest Rates in the Allocation of Resources", bien qu'il date maintenant d'une vingtaine d'années, nous a toujours semblé très stimulant car il propose des conjectures toujours actuelles. D'un autre point de vue, dix ans plus tard, Drèze concluait l'introduction de son livre sur l'incertitude [11] en affirmant que les modèles d'équilibres temporaires semblaient les plus prometteurs et qu'il fallait donc, dans l'avenir, en étudier les propriétés d'optimalité.

Le problème de l'optimum temporaire se pose naturellement dans l'espace dual, c'est-à-dire dans l'espace des prix et des revenus. Nous verrons pourquoi lorsque nous aborderons le problème de l'optimum comme tel. Or, ceci est non seulement contraire à la tradition de l'optimum de Pareto, mais de plus, cela suppose et exige la connaissance de certains résultats (par exemple, les identités de Roy "temporaires") qui, apparemment, n'existent nulle part dans la littérature. En effet, bien que la littérature sur l'équilibre temporaire jouisse d'un essor considérable depuis plus de dix ans, il existe encore très peu de résultats sur les équilibres individuels sous-jacents. C'est pour cette raison qu'avant même d'arriver au problème de l'optimum, nous avons dû nous refaire un cadre de référence en réétudiant la théorie du consommateur et la théorie du producteur dans un contexte temporaire. Ces modèles nous ont permis, en gros, de dériver des propriétés très semblables (quoique plus complètes) aux propriétés atemporelles usuelles. Malgré le caractère plutôt ordinaire a priori de ces résultats, il reste néanmoins que l'élaboration d'une théorie de l'optimum temporaire eut été impensable sans eux (à moins, bien sûr, de croire qu'on peut fonder une théorie sur des bases purement intuitives). En conséquence, la mise en place d'une telle instrumentation nous semble tout à fait justifiée et occupe une part importante dans cette thèse.

Enfin, quelques remarques concernant la méthodologie. Premièrement, les modèles temporaires déjà existants ne découlent pas, en général, directement du modèle traditionnel néo-classique[1]. Personnellement, nous avons préféré adopter une méthodologie qui fasse en sorte que, à tout moment si nous le désirons, nous puissions retrouver le cadre traditionnel. Cette méthode comporte certainement des inconvénients (en

[1]Trois principales raisons expliquent ce fait : 1) dans le modèle de Arrow et Debreu, toute l'épargne rapporte de l'intérêt. Or, dans les modèles où la monnaie a été introduite (un des actifs financiers pouvant être considéré comme tel), cette épargne ne rapporte pas d'intérêt; 2) le fait d'introduire des fonctions d'anticipation rend ces modèles d'une toute autre nature; 3) le lien avec le modèle de Arrow et Debreu ne fait pas nécessairement partie de leurs préoccupations.

particulier, il serait surprenant qu'elle mène à des résultats exceptionnels) mais elle a le grand avantage de garantir à notre modèle une base très cohérente et de nous permettre de comparer avec ce qui existe déjà sur le plan formel. Deuxièmment, la majeure partie de cette thèse a été rédigée au sein d'une équipe de recherche dont faisaient partie des économètres. C'est ce qui explique sans doute le caractère opérationnel (ou facilement transformable comme tel) de certains de nos modèles. En plus de fournir l'instrumentation nécessaire à l'élaboration d'une théorie de l'optimum temporaire, les problèmes du consommateur et du producteur développés dans ce contexte, procurent des implications empiriques temporaires intéressantes; ces implications constituent autant de restrictions a priori pour l'économètre qui chercherait à tester les nouvelles formes structurelles engendrées par ces modèles. Finalement, la dernière remarque portera sur la théorie de l'optimum. Les différents modèles d'optimums élaborés dans cette thèse (soit dans une économie d'échanges, soit dans une économie avec production, soit en considérant les anticipations des agents exogènes ou en les considérant endogènes), l'ont toujours été en fonction d'un certain type d'équilibre temporaire. Par conséquent, les résultats que l'on tire de ces modèles, tant sur la caractérisation des prix et des facteurs d'escompte courants que sur la structure optimale des anticipations, sont étroitement liés à la nature même de ces équilibres temporaires et, partant, à la façon de poser les problèmes. Autrement dit, il n'est pas du tout clair qu'en considérant d'autres types d'équilibres temporaires, les caractérisations optimales obtenues resteraient inchangées.

D'une façon générale, cette thèse se compose de deux parties, l'une consacrée à la mise sur pied d'une instrumentation (les chapitres 1 et 2) et l'autre (le chapitre 3) à des applications et extensions qui utilisent cette instrumentation.

Le premier chapitre comporte deux sections. Dans la section 1, nous abordons la version temporaire de la théorie du consommateur. D'abord, nous montrons comment se fait le passage d'un modèle intertemporel à un modèle temporaire (section 1.1). Nous considérons ensuite certaines possibilités quant aux hypothèses sur les anticipations (section 1.2). Nous terminons cette première section en exposant le problème du consommateur (section 1.3) et les propriétés empiriques des fonctions de demande temporaires (section 1.4). La section 2 concerne la théorie de l'optimum temporaire dans le cadre d'une économie d'échanges. Ainsi, après avoir étudié l'optimum dans le cas le plus simple, c'est-à-dire lorsque les anticipations des agents sont exogènes (section 2.2), on s'intéresse à savoir si une suite d'optimums temporaires peut engendrer un optimum intertemporel (section 2.3). Finalement, on examine la caractérisation optimale de l'optimum dans le cas des anticipations endogènes.

Le deuxième chapitre reprend essentiellement le même schéma que le chapitre 1, sauf qu'on introduit ici le secteur de la production. La section 3, dans le même esprit que la section 1, présente une théorie du producteur temporaire et établit les propriétés essentielles à l'élaboration de la théorie de l'optimum temporaire dans une économie avec production (section 4).

Avec ces deux premiers chapitres, nous disposons d'une instrumentation ou d'une théorie de l'optimum temporaire assez générale pour nous permettre de traiter différents problèmes d'optimums plus spécifiques. C'est précisément ce que nous faisons dans la deuxième partie de la thèse, c'est-à-dire dans le chapitre 3. Dans un premier temps, nous appliquons notre instrumentation à un problème de second rang, en particulier, à un modèle de type Boiteux (4), (section 5). Dans un second temps, nous examinons comment la théorie de l'optimum présentée dans la première partie, peut être étendue lorsque les anticipations des agents sont représentées par des fonctions arbitraires.

En guise de conclusion, nous reprenons les résultats les plus pertinents de cette thèse et nous proposons quelques avenues de recherche. Notons, finalement, qu'afin de faciliter la lecture du texte, les preuves mathématiques ont été regroupées dans l'appendice 1.

CHAPITRE I

SECTION I : LA THEORIE DU CONSOMMATEUR DANS UN CADRE TEMPORAIRE

1.1. De l'intertemporel au temporaire

Considérons le modèle intertemporel du consommateur néo-classique :

(P1-1) $$\text{Max } u(x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_T)$$

$$\text{sujet à } \sum_{t=1}^{T} \beta_t \, p_t \, x_t = \sum_{t=1}^{T} \beta_t \, R_t$$

où x_t, p_t et R_t sont respectivement le vecteur de biens, le vecteur de prix et le revenu au temps t et β_t le facteur d'escompte qui actualise du temps t au temps 1.

Ce modèle comporte un certain nombre d'interprétations dont l'une des plus connues est celle de Arrow et Debreu [7]. Pour la retrouver, il suffit de poser :

$$\bar{p}_t = \beta_t \, p_t \qquad \text{et} \qquad \sum_{t=1}^{T} \beta_t \, R_t = W_t$$

où $\bar{p}_t$ est le vecteur des prix à la période t, actualisés au temps 1 et W_t est la richesse du consommateur pour l'ensemble des périodes, actualisée au temps 1.

Le problème s'écrit alors

(P1-2) $$\text{Max } u(x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_T)$$

$$\text{sujet à } \sum_{t=1}^{T} \bar{p}_t\, x_t = W_t.$$

Pour qu'une telle économie fonctionne, nous devons supposer qu'il existe des marchés à terme. Par exemple, nous pouvons supposer que les marchés se sont tenus dans le passé, une fois pour toutes. De plus, il n'y a aucune incitation à réouvrir les marchés puisque, au moment où ils se sont tenus, tous les prix étaient parfaitement connus. Ceci revient à dire que, dans un tel contexte, les individus n'ont rien à prévoir. Or, il suffit de jeter un coup d'oeil au monde dans lequel nous vivons pour nous rendre compte que ceci est bien peu réaliste. D'une part, quoique certains marchés à terme existent effectivement, ils sont assez rares et correspondent, en général, à des marchés très spécifiques. D'autre part, il devient de plus en plus clair que les individus ne prennent plus de décisions sans tenir compte de leurs anticipations. C'est pourquoi le modèle de Arrow et Debreu reste un outil utile mais peu adapté à la réalité.

Toutefois, il est possible de retrouver une autre interprétation en réexaminant la contrainte de budget de notre problème initial (P1-1). Pour simplifier les choses, nous allons la considérer uniquement sur deux périodes. Nous avons alors

$$p_1 x_1 + \beta_2\, p_2 x_2 = R_1 + \beta_2\, R_2$$

que nous pouvons réécrire

(1.1.1) $$p_1x_1 + \beta_2(p_2x_2 - R_2) = R_1$$

Définissons

$$R_1 - p_1x_1 = \beta_2(p_2x_2 - R_2) = \beta_2 A$$

où β_2 A est l'épargne au temps 1. Nous pouvons considérer A comme étant un actif financier achetable au temps 1 et livrable au temps 2; $\beta_2 = \frac{1}{1+\rho_1}$ (avec ρ_1 le taux d'intérêt prévalant du temps 1 au temps 2) serait le prix de l'actif financier. Notre contrainte (1.1.1) s'écrit alors

$$p_1x_1 + \beta_2 A = R_1$$

$$p_2x_2 - A = R_2$$

et le problème du consommateur devient

(P1-3) $$\text{Max } u(x_1, x_2)$$

$$\text{sujet à } \begin{aligned} &p_1x_1 + \beta_2 A = R_1 \\ &p_2x_2 - A = R_2 \end{aligned}$$

D'un point de vue purement mathématique, il est clair que les deux derniers problèmes (P1-2) et P1-3) sont équivalents (mis à part le fait que (P1-3) soit posé uniquement sur deux périodes). Toute la différence réside au niveau de l'interprétation. Alors que dans le modèle précédent (P1-2) nous devions supposer l'existence de marchés à terme, nous pouvons, dans celui-ci, laisser tomber cette hypothèse. En effet, le modèle (P1-3) peut représenter une économie au comptant dans laquelle seuls les marchés des biens courants (les marchés pour les biens x_1) existent, en plus d'un marché pour l'actif financier. Ce dernier marché va ici jouer, en quelque sorte, le même rôle que les marchés à terme jouaient dans le modèle précédent. C'est en choisissant son épargne (ou l'actif financier) de façon optimale que l'agent se donne les moyens financiers pour pouvoir réaliser ses achats en biens futurs lorsque les marchés pour ces biens s'ouvriront.

C'est cette interprétation que nous appellerons par la suite "problème temporaire" (ici, en l'occurrence, il s'agit du problème temporaire du consommateur), en ce sens que ce problème concerne avant tout les décisions prises à une période donnée tout en tenant compte du fait que ces dernières auront des conséquences importantes sur les décisions à venir.

Notons que cette méthode pour engendrer un équilibre temporaire peut être attribuée à Arrow [1]. Ce dernier, en étudiant la répartition optimale des risques en avenir incertain, montre que la répartition peut être réalisée avec seulement S+C marchés plutôt que SC (où S et C représentent respectivement le nombre d'états possibles et le nombre de biens). Une transposition directe de son raisonnement à un cadre temporel permet le passage d'une économie à terme constituée de nT marchés (en supposant qu'il existe T périodes et n biens à chaque période) à une économie au comptant avec seulement n+1 marchés (nous supposons qu'il existe un seul marché financier).

Sans être parfaite, l'interprétation "temporaire" en termes d'économie au comptant colle beaucoup mieux à la réalité que celle qui exige l'existence de marchés à terme. Toutefois, puisque les marchés futurs (ici représentés par les marchés pour les biens x_2) n'existent pas au moment où les décisions se prennent, il n'y a rien pour déterminer p_2 et R_2. La nature séquentielle des économies au comptant a donc pour conséquence d'introduire de l'incertitude dans notre modèle. Ce dernier point mérite d'être examiné de plus près.

Notons d'abord qu'à l'instar de certains auteurs (voir Radner [32], Kurz [25] et Svensson [40]),nous distinguerons ici ce qu'il est convenu d'appeler l'incertitude exogène de l'incertitude endogène. L'incertitude exogène concerne les connaissances ou l'information sur l'environnement ou l'état du monde. Cette information porte habituellement sur les ressources disponibles dans l'économie, les préférences des agents, leurs possibilités de production et leurs possibilités de consommation. Il s'agit en quelque sorte d'identifier tous les éléments qui affectent les données de l'équilibre ou de l'optimum et les différentes valeurs que ces éléments peuvent prendre. Ainsi, on définit e "l'état de la nature" comme un ensemble particulier de valeurs données à chacun des éléments incertains et Ω l'ensemble des e possibles a priori. L'incertitude est représentée par Ω; elle disparaîtrait si on savait quel e de Ω doit se réaliser. C'est cette forme d'incertitude qui apparaît dans les premiers modèles qui ont tenté d'incorporer l'incertitude à la théorie de l'équilibre général et dont on tient compte en introduisant des marchés pour les biens contingents, c'est-à-dire des biens dont l'existence est liée à la réalisation de certains événements (voir Debreu [7], chap. 7 ou Malinvaud [28], chap. 11). Bref, l'incertitude exogène en est une qui échappe aux agents en ce sens qu'ils n'ont aucune emprise sur elle, leurs actions n'ayant aucune influence sur l'état du monde qui sera retenu. Au contraire, l'incertitude endogène est soit créée par le système, soit le reflet du fonctionnement interne de l'économie. De façon plus spécifique, cette forme d'incertitude consiste chez Kurz [25] en la diversité d'informations entre les agents, le phénomène de hasard moral, les coûts de transaction, ..., chacun ayant pour effet de contribuer au mal fonctionnement des marchés contingents et donnant lieu à des risques et des incertitudes contre lesquels l'agent ne peut s'assurer. Pour Radner, elle correspond à l'incertitude quant à l'information sur le comportement des autres agents alors que chez Svensson, elle concerne essentiellement les prix futurs.

Quelle est l'importance relative de chacune de ces formes d'incertitude? Kurz prétend qu'on peut toujours défendre que l'incertitude sur l'environnement est la seule pertinente pour l'étude des économies planifiées et centralisées mais que, dans le cas des économies décentralisées, il n'est pas du tout clair que l'incertitude vienne de la nature aléatoire de l'environnement (Kurz [25]) :

> In fact, I suspect that in the competitive economies the random nature of the environment which gives rise to "exogenous uncertainty" is probably small compared to the all-important endogenous uncertainty. (p. 392).

En ce qui nous concerne, l'incertitude dans notre modèle provient essentiellement de la nature séquentielle de l'activité économique. D'une part, au moment où les décisions se prennent, les agents doivent agir en tenant compte de certains éléments qu'ils ne connaissent pas (ici les prix et les revenus futurs). D'autre part, ces mêmes éléments inconnus ou incertains vont dépendre des actions des agents. D'où le caractère endogène de notre incertitude. Nous supposons, de plus, que les agents ont un environnement certain (absence d'incertitude exogène) non pas que nous croyons cette forme d'incertitude sans importance mais afin d'alléger l'exposé et, surtout, afin que l'accent soit mis sur l'incertitude endogène. C'est en partie cette démarche qui a été retenue par Svensson [40]. D'ailleurs, la généralisation de nos résultats à un environnement incertain ne devrait poser aucun problème.

Nous venons de voir que la nature séquentielle des économies au comptant fait en sorte que les agents doivent prendre des décisions en tenant compte de quelques éléments incertains. Pour ce faire, ils doivent essayer de prévoir les valeurs prises par ces différentes variables dans le futur. D'où la nécessité d'introduire les prévisions ou les anticipations dans notre modèle.

1.2. Hypothèses pour les anticipations

Il s'agit dans cette section de considérer quelques possibilités pour formaliser les anticipations.

H1 : Hypothèse de prévisions parfaites

Bien que ce soit là une hypothèse très critiquable puisque, en pratique, les agents ont une connaissance limitée des lois qui régissent le système économique et que leurs capacités de calcul ne leur permettent pas de prévoir correctement les prix et les taux d'intérêt futurs, elle vaut quand même la peine d'être étudiée, ne serait-ce que pour nous permettre de mieux saisir les différences fondamentales entre les deux sortes d'économie (à terme et au comptant) et pour nous aider à mieux définir ce qu'est un équilibre temporaire.

Pour ce faire, nous devons revoir brièvement le fonctionnement de ces deux économies (sur deux périodes). Dans une économie à terme (P1-2), les agents ont une connaissance parfaite de tous les prix, toutes les décisions sont prises à un moment donné dans le temps et, par conséquent, l'équilibre qui en découle en est un sur l'ensemble des périodes, qu'on pourrait qualifier d'équilibre permanent. Dans une économie au comptant, les décisions se prennent de façon séquentielle. A la période 1, seuls les marchés pour les biens x_1 et l'actif financier A existent. Ainsi, dans un premier temps, à partir des connaissances qu'ils ont sur p_1, β_2 et R_1 et des anticipations qu'ils se font sur p_2

et R_2, les agents choisissent x_1 et A et planifient x_2. Dans un second temps, les marchés pour les biens x_2 vont s'ouvrir et les décisions porteront sur le choix d'un vecteur x_2 optimal. Or, dans la mesure où les prévisions pour p_2 et R_2 étaient parfaites et qu'elles se réalisent effectivement à la période 2, le vecteur x_2 qu'ils avaient planifié au temps 1 correspondra exactement au vecteur x_2 qu'ils vont choisir au temps 2. Dans ce cas, les deux modèles sont parfaitement équivalents et mènent aux mêmes solutions.

Il est évident que toute autre hypothèse concernant les anticipations ne nous assure en rien l'équivalence entre les deux sortes d'économie. C'est pourquoi, dans la mesure où nous acceptons de nous détacher du cadre traditionnel, l'approche de l'équilibre temporaire nous offre la possibilité de décrire une économie au comptant et de considérer des anticipations imparfaites de la part des agents. Ces deux faits nous font croire que cette approche va nous permettre de franchir une étape essentielle dans toute tentative de représenter le monde dans lequel nous vivons de la façon la plus réaliste qui soit.

H2 : Hypothèse des anticipations ponctuelles

Nous entendons par anticipations ponctuelles, des anticipations auxquelles n'est associée aucune distribution de probabilité. Ce sont donc des anticipations qui sont tenues pour certaines par les agents économiques. Elles se divisent en deux grandes catégories : les anticipations exogènes et les endogènes.

En ce qui concerne les anticipations ponctuelles exogènes, il y a principalement deux façons de les formaliser. Nous allons considérer ces deux façons dans le cas bien précis du problème P1-3, duquel nous pouvons tirer les fonctions de demande courantes :

(1.2.1) $$x_1 = x_1(p_1, \beta_2, R_1, p_2, R_2)$$

(1.2.2) $$A = A(p_1, \beta_2, R_1, p_2, R_2)$$

où p_2 et R_2 sont les variables à anticiper.

Premièrement, nous pouvons supposer qu'il existe un ensemble de valeurs possibles pour les variables anticipées et qu'une valeur est choisie dans cet ensemble. Plus formellement, ceci se traduirait par : il existe

$$\{(\tilde{p}_2, \tilde{R}_2) \mid \tilde{p}_2 \in \mathbb{R}^{n_2} \text{ et } \tilde{R}_2 \in \mathbb{R}\}$$

tel que $(p_2, R_2) = (\tilde{p}_2, \tilde{R}_2)$ et cette relation tient avec certitude. C'est cette hypothèse qui a été retenue par Svensson [40]. Dans ce cas, les fonctions de demande deviennent

$$x_1 = x_1(p_1, \beta_2, R_1, \tilde{p}_2, \tilde{R}_2)$$

$$A = A(p_1, \beta_2, R_1, \tilde{p}_2, \tilde{R}_2)$$

c'est-à-dire les anticipations demeurent des variables explicatives. La deuxième façon consiste à supposer que le consommateur est doté d'une fonction d'anticipation qu'il tient pour certaine. Cette fonction dépend, en général, des prix et des revenus courants, par exemple,

$$(p_2, R_2) = f(p_1, \beta_2, R_1) \tag{1.2.3}$$

Ce genre de fonction est couramment utilisée dans la littérature sur l'équilibre temporaire (voir, par exemple, Hool [22] ou Grandmont [17]). Toutefois, puisque cette fonction est tout à fait arbitraire, les nouvelles fonctions de demande que nous obtenons en remplaçant (1.2.3) dans les fonctions de demande initiales ((1.2.1) et (1.2.2)), sont également arbitraires (pour la preuve de cet énoncé, voir Polemarchakis [31]).

Dans le cas des anticipations ponctuelles endogènes, il existe dans le modèle un processus pour former les anticipations. Ce processus est décrit par une fonction de production d'information

$$F(x_1, p_2, R_2) = 0 \tag{1.2.4}$$

Ainsi, à partir de certaines ressources ou certains biens qu'il consomme (par exemple, les journaux), l'individu produit l'information qui lui permet de former ses anticipations. Alors que l'approche de l'équilibre temporaire suppose que (1.2.3) est donnée à l'agent, on peut montrer que sous certaines conditions, les fonctions d'anticipation peuvent résulter du problème d'optimisation du consommateur. Si le consommateur est doté de la technologie (1.2.4), il sera en mesure de produire les prévisions

$$(p_2, R_2) = g(x_1) \tag{1.2.5}$$

Pour plus de détails, voir Bronsard et Lafrance [6].

Cette hypothèse est sans doute l'une des plus prometteuses. En particulier, il est à noter qu'elle nous permet de conserver la structure locale de Slutsky pour les fonctions de demande. Toutefois, elle semble assez difficile à formaliser et, par conséquent, peu d'auteurs l'utilisent.

H3 : Hypothèse des anticipations avec probabilité subjective

Nous n'allons pas étudier cette hypothèse en détail. Notons toutefois que ces anticipations, tout comme les anticipations ponctuelles, se divisent en deux catégories : exogènes et endogènes. Pour les anticipations exogènes, nous retrouvons une première formalisation dans Drèze et Modigliani [12] et une seconde dans Grandmont [15].

Avant de terminer cette section, nous aimerions mentionner l'hypothèse que nous avons retenue dans notre modèle pour les anticipations du consommateur et justifier ce choix. Soulignons d'abord que les anticipations, à ce stade-ci, peuvent être à peu près n'importe quoi, en ce sens que nous ne leur imposons aucune restriction a priori si ce n'est qu'elles restent présentes dans le modèle. Elles pourraient, par exemple, être conformes à l'hypothèse d'anticipations rationnelles. Nous tenons, toutefois, à ce qu'elles apparaissent comme variables explicatives des fonctions de demande car lorsque nous aborderons le problème de l'optimum temporaire, nous aimerions trouver sous quelles conditions (concernant les anticipations), l'optimum peut se réaliser.

Comme nous n'avons pas de choix arrêté, nous allons procéder par élimination parmi les différentes formalisations présentées plus haut (H2 et H3), tout en respectant la seule restriction que nous avons imposée. Premièrement, la formalisation retenue sera-t-elle celle des anticipations ponctuelles ou celle avec distribution de probabilité? A priori, la seconde semble beaucoup plus générale que la première. Néanmoins, nous retiendrons les anticipations ponctuelles, ne serait-ce que par souci de simplicité. C'est d'ailleurs ce que fait Grandmont dans son récent volume sur la monnaie (Grandmont [17]) :

> The other simplifying assumption concerns the formulation of expectations. Portraying a trader who uses statistical techniques like Bayesian procedures to forecast his future environment should lead one to describe expectations as probability distributions. (...). We choose to work nonetheless whith point expectations in order to ease the exposition. This is again inessential for most results which are going to be presented can be transposed easily to the case of probabilistic expectations by anybody who knows the mathematics involved without altering the economic argument. (p. 10).

Tout comme cet auteur, nous croyons que nos résultats pourraient facilement se généraliser au cas des anticipations avec probabilité subjective. Deuxièmement, parmi les anticipations ponctuelles, nous devons décider entre les exogènes et les endogènes. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'hypothèse des anticipations endogènes semble la plus prometteuse mais, pour l'instant, sa formalisation reste peu satisfaisante. Nous choisissons donc les anticipations exogènes. Troisièmement, les anticipations ponctuelles exogènes se présentent principalement sous deux formes. Or, nous ne pouvons exclure ni l'une ni l'autre de ces formalisations. En effet, les fonctions d'anticipations ne peuvent être éliminées puisqu'elles contiennent le cas des anticipations rationnelles. On représenterait alors le comportement du consommateur à la fois par ses fonctions de demande et sa fonction d'anticipations, c'est-à-dire, dans le cas présent

$$x_1 = x_1(p_1, \beta_2, R_1, p_2, R_2)$$

$$A = A(p_1, \beta_2, R_1, p_2, R_2)$$

et

$$(p_2, R_2) = f(p_1, \beta_2, R_1)$$

Ceci ne serait évidemment pas contradictoire avec les résultats de Polemarchakis puisque la fonction d'anticipations f ne serait pas alors arbitraire[1]. Par contre, si f était arbitraire, nous retrouverions le théorème de Polemarchakis tel que mentionné plus haut. Nous reviendrons sur le cas des fonctions d'anticipations arbitraires dans le chapitre III.

Pour l'étude du comportement du consommateur, nous retiendrons l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes sous sa forme la plus

[1]Comme nous le verrons lorsque nous étudierons l'hypothèse des anticipations rationnelles dans la section sur l'optimum temporaire.

simple, c'est-à-dire parmi un ensemble de valeurs possibles pour les anticipations, une valeur est choisie et le consommateur la tient pour certaine[1]. Toutefois, il ne faudrait pas perdre de vue que l'hypothèse des anticipations exogènes au niveau de la théorie du consommateur n'empêche en rien que ces mêmes anticipations deviennent des variables endogènes au niveau de la société (comme c'est d'ailleurs le cas pour les variables prix dans la théorie traditionnelle). Notons finalement que l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes a l'avantage non négligeable de préserver la structure locale de Slutsky pour les fonctions de demande (lorsque f n'est pas arbitraire).

1.3. Le problème temporaire du consommateur

Nous allons maintenant supposer que la vie du consommateur consiste en une suite de périodes qui s'étendent de la date t=1 à la date t=T et, de plus, que le problème du consommateur se pose à la date t. Le consommateur doit donc choisir une allocation optimale des biens courants de la date t (x_t) et des biens futurs des dates t+1 jusqu'à T ($\tilde{x}$). Pour ce faire, il connaît les prix courants (p_t) et son revenu courant (R_t) de même que son épargne cumulée (e_t). Toutefois, il ne peut connaître avec certitude ni les prix futurs ($\tilde{p}$) ni ses revenus futurs ($\tilde{k}$) (puisque les marchés qui déterminent ces valeurs n'existent pas encore à la période t). C'est ici que les anticipations du consommateur interviennent. Comme nous l'avons déjà dit, il existe plusieurs façons

[1]Cette hypothèse peut aussi être considérée comme un cas spécial des fonctions d'anticipations exogènes où

$$(p_2, R_2) = f(p_1^0, \beta_2^0, R_1^0) = (p_2^0, R_2^0)$$

de formaliser ces anticipations. En ce qui nous concerne, nous avons retenu l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes, pour les diverses raisons mentionnées plus haut.

Le problème du consommateur se pose de la façon suivante :

$$\text{Max } u(x_t, \tilde{x})$$

sujet à

(1.3.1) $$p_t x_t + \gamma_t e_{t+1} - e_t = R_t$$

(1.3.2) $$\tilde{p}\,\tilde{x} - e_{t+1} = \tilde{k}$$

où e_{t+1} est la valeur qu'aura l'actif financier lorsqu'il nous sera livré à la date t+1 (cet actif financier pouvant se concevoir comme un dépôt à la banque ou une obligation); $\gamma_t = \beta_{t+1}/\beta_t = 1/1+\rho_t$ avec β_t le facteur d'escompte qui actualise de la date t à la date 1, β_{t+1} le facteur d'escompte qui actualise de la date t+1 à la date 1, ρ_t le taux d'intérêt nominal qui prévaut de la date t à la date t+1. Ainsi, γ_t est le facteur d'escompte de la date t+1 à la date t ou le prix unitaire de l'actif financier. Par conséquent, $\gamma_t\, e_{t+1}$ est la valeur de l'actif financier à la date t (c'est-à-dire le montant qu'on doit débourser, à la date t, à l'achat de cet actif financier) et $\gamma_t\, e_{t+1} - e_t$ peut être considérée comme l'épargne courante de la période t.

Une fois résolu, le problème du consommateur nous donne les fonctions de demande suivantes :

$$\left.\begin{aligned} x_t &= x_t(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k}) \\ e_{t+1} &= e_{t+1}(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k}) \end{aligned}\right\} \text{fonctions de demande "temporaires" ou courantes}$$

$$\left.\tilde{x} = \tilde{x}(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k})\right\} \text{fonctions de demande "planifiées" ou futures}$$

Autrement dit, le problème du consommateur s'interprète comme suit : à partir des connaissances qu'il a sur les prix et son revenu courants, des attentes qu'il a sur les prix et les revenus futurs, le consommateur choisit son panier optimal de biens courants (y compris les services de travail qui apparaissent avec un signe négatif), décide du montant de son épargne (emprunt) optimale et planifie sa consommation future.

1.4. Les fonctions de demande et leurs propriétés empiriques

Pour étudier les propriétés empiriques des fonctions de demande, nous allons considérer leurs différentielles :

$$(1.4.1) \qquad \begin{bmatrix} dx_t \\ de_{t+1} \\ d\tilde{x} \end{bmatrix} = K_t^{**} \begin{bmatrix} dp_t \\ d\gamma_t \\ d\tilde{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t} \\ \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} \\ \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} \end{bmatrix} [p_t' \, dx_t + \gamma_t \, de_{t+1}] + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \\ \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \\ \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \end{bmatrix} [\tilde{p}' d\tilde{x} - de_{t+1}]$$

où

$$
K_t^{**} = \left[\begin{array}{cc:c}
\left[\frac{\partial x_t}{\partial p_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial x_t}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] \\
\left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] \\
\hdashline
\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right]
\end{array}\right]
$$

est la matrice de Slutsky "complète"[1];

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial R_t} \\ \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} \end{bmatrix}
$$

est le vecteur d'effets-revenu "complet";

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \end{bmatrix}
$$

est le vecteur d'effets-anticipation "complet".

L'équation (1.4.1) décrit le comportement du consommateur face à des changements dans les prix courants p_t, γ_t et dans les prix futurs qu'il

---

[1]Le terme "complet" signifie que le vecteur ou la matrice concerne à la fois les demandes courantes et futures. Il est utilisé par opposition à "temporaire" qui se rapporte uniquement aux demandes courantes. Par exemple, la matrice de Slutsky temporaire $\hat{K}_t$ est la sous-matrice encadrée en pointillé dans l'expression de K_t^{**}.

anticipe $\tilde{p}$, dans son revenu réel courant $(p_t' \, dx_t + \gamma_t \, de_{t+1})$ et dans son revenu réel futur $(\tilde{p}' \, d\tilde{x} - de_{t+1})$.

Définissons maintenant la matrice K_t^* de la façon suivante :

$$K_t^* = \left[\begin{array}{cc|c} \left[\frac{\partial x_t}{\partial p_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\frac{\partial x_t}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] \\ \left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] \\ \hline \left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} x_t'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] \end{array}\right]$$

c'est-à-dire une matrice de Slutsky complète légèrement transformée. Il est clair que cette nouvelle matrice n'est pas directement observable. Toutefois, on peut facilement la retrouver en appliquant une simple transformation linéaire à la matrice observable K_t^{**} (la matrice de Slutsky "complète"). En ce qui concerne la matrice K_t^*, nous pouvons montrer[1] que nous retrouvons des propriétés empiriques très semblables à celles dérivées à partir du problème traditionnel[2] :

(1.4.2) $$K_t^* \equiv K_t^{*\prime}$$

(1.4.3a) $$K_t^* \, p_t^* \equiv 0 \qquad \text{avec} \qquad p_t^* = \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix}$$

[1]Les preuves des énoncés du chapitre I ont été regroupées dans l'appendice 1.

[2]Ces propriétés s'avéreront des instruments essentiels pour l'étude de l'optimum temporaire.

(1.4.3b) $$K_t^* \tilde{p}^* \equiv 0 \qquad \text{avec } \tilde{p}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix}$$

(1.4.4) $$\xi^{*\prime} K_t^* \xi^* < 0 \text{ pour tout } \xi^* \neq \theta_1 p_t^* + \theta_2 \tilde{p}^*, \text{ avec } \xi^* \in \mathbb{R}^n, \theta_1 \text{ et } \theta_2 \in \mathbb{R}.$$ [1]

Les équations (1.4.3a) et (1.4.3b) impliquent principalement deux propriétés. D'une part, les fonctions de demande courantes et futures sont homogènes de degré 0 dans les prix courants (p_t et γ_t) et la richesse courante ($R_t + e_t$). D'autre part, les fonctions de demande pour les biens courants (x_t) et les biens futurs ($\tilde{x}$) sont homogènes de degré 0 dans les prix des biens (p_t, $\tilde{p}$), la richesse courante ($R_t + e_t$) et le revenu futur ($\tilde{k}$) alors que la demande pour l'actif financier (e_{t+1}) est homogène de degré 1 dans les mêmes variables[2].

Nous avons également la propriété usuelle sur le vecteur d'effets-revenu :

---

[1]Notons que la matrice de Slutsky temporaire jouit également de ces propriétés :

$$\hat{K}_t \equiv \hat{K}_t'$$

$$\hat{K}_t \hat{p}_t \equiv 0 \qquad \text{avec} \quad \hat{p}_t = \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}$$

$$\hat{\xi}' \hat{K}_t \hat{\xi} < 0 \quad \text{pour tout} \quad \hat{\xi} \neq \theta \hat{p}_t, \quad \text{avec} \quad \hat{\xi}_t \in \mathbb{R}^{n_1+1}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Les preuves de ces résultats se trouvent dans l'appendice 1.

[2]Ces propriétés se vérifient facilement par inspection des contraintes budgétaires courante et future.

$$(1.4.5) \qquad p_t^{*\prime} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t} \\[2ex] \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} \end{bmatrix} \equiv 1$$

ou bien $p_t' \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t} + \gamma_t \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} \equiv 1$, qui peut s'interpréter comme étant : la somme de la propension marginale à consommer (dans la période courante) plus la propension marginale à épargner (dans la période courante) est égale à 1. A cette propriété s'ajoute une propriété semblable concernant le vecteur d'effets-anticipation :

$$\tilde{p}^{*\prime} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \\[2ex] \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial k} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \end{bmatrix} \equiv 1$$

ou bien $- \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} + \tilde{p}' \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \equiv 1.$

SECTION 2 : LA THEORIE DE L'OPTIMUM DANS UN CADRE TEMPORAIRE

2.1. Introduction

Le problème auquel le planificateur fait face lorsqu'il s'intéresse à l'optimum dans un cadre temporel[1] comporte deux volets. D'une part, il peut être intéressé à implanter un optimum à une période donnée, disons à la période t : c'est le problème de l'optimum temporaire. D'autre part, il peut également vouloir réaliser un optimum intertemporel, c'est-à-dire un optimum sur un ensemble de périodes données. Ce sont ces deux problèmes différents, mais évidemment très reliés, que nous aborderons dans cette section. Nous verrons, en particulier, qu'une suite d'optimums temporaires peut être équivalente à un optimum intertemporel.

Le problème de l'optimum temporaire devra être posé dans l'espace dual, c'est-à-dire l'espace des valeurs. Ceci est dû essentiellement à la présence de l'actif financier (e_{t+1}) et des anticipations ($\tilde{p}$, $\tilde{k}$) dans le modèle. Dans le premier cas, il serait assez difficile de concevoir cet actif financier en termes de biens physiques à moins, bien sûr, de se situer dans une économie aussi simple que celle de Robinson Crusoë. Dans une telle économie, il serait possible de concevoir l'épargne (égale à l'investissement) comme étant les graines que

[1]Le terme "temporel" est utilisé dans un sens large et fait référence à tout contexte où le temps intervient. Il englobe simultanément des termes plus spécifiques comme "temporaire" ou "intertemporel".

Robinson ne consomme pas mais qu'il conserve plutôt pour faire des semences. Dans le second cas, on voit mal comment les conditions portant sur les anticipations pour la réalisation de l'optimum pourraient être étudiées dans l'espace primal (espace des biens).

C'est peut-être cet écart à la tradition de Pareto [29] qui expliquerait le fait que le problème de l'optimum temporaire n'ait pas encore été posé comme tel et ceci, bien que le nouvel intérêt pour l'équilibre temporaire date maintenant d'une dizaine d'années.

2.2. L'optimum temporaire

Comme nous traitons du problème de l'optimum temporaire dans le cadre d'une économie d'échanges, nous allons considérer une économie comprenant ℓ consommateurs (indicés par $i = 1, 2, \ldots, \ell$) dans laquelle la production est supposée exogène.

Examinons d'abord les contraintes que nos valeurs (prix et revenus courants, prix et revenus futurs anticipés) doivent respecter afin que les états optimaux qu'elles vont définir soient avant tout des états réalisables, c'est-à-dire des états qui respectent l'égalité entre ressources et emplois pour chacun des biens. Ces contraintes s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = W_t \tag{2.2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = 0 \tag{2.2.2}$$

La première contrainte, (2.2.1), décrit l'équilibre sur le marché des biens, à la date t : la somme des demandes en biens courants est égale au vecteur de ressources initiales disponibles à cette date. De la même façon, à la date t, on doit conserver l'équilibre des flux financiers. Ceci se traduit par la contrainte (2.2.2), c'est-à-dire la somme des valeurs des titres financiers doit être nulle. Remarquons que du simple fait que e^i_{t+1} soit positif ou négatif, nous ne pouvons conclure directement que le consommateur i a réalisé une épargne ou un emprunt à la période t. Il faut plutôt considérer le signe de $(\gamma^i_t\ e^i_{t+1} - e^i_t)$. Les conclusions sont également différentes suivant que e^i_t est positif ou négatif.

Puisque le problème de l'optimum temporaire doit être posé dans l'espace dual, nous allons définir une fonction d'utilité indirecte :

$$v(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k}) = u(x_t(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k}),\ \tilde{x}(p_t,\ \gamma_t,\ R_t,\ e_t,\ \tilde{p},\ \tilde{k}))$$

A partir de cette fonction d'utilité, nous pouvons déduire les identités de Roy "temporaires" :

(2.2.3) $$v_{p_t} + v_{R_t}\ x'_t \equiv 0$$

(2.2.4) $$v_{\gamma_t} + v_{R_t}\ e_{t+1} \equiv 0$$

où v_{p_t} est la dérivée partielle de la fonction v par rapport au vecteur p_t;

v_{γ_t} est la dérivée partielle de la fonction v par rapport à γ_t;

v_{R_t} est la dérivée partielle de la fonction v par rapport à R_t;

et les identités de Roy "futures" :

(2.2.5) $$v_{\tilde{p}} + v_{\tilde{k}}\,\tilde{x}' \equiv 0$$

Le problème de l'optimum temporaire peut s'écrire :

(P2-1) $$\text{Min } v^1(p_t^1, \gamma_t^1, R_t^1, e_t^1, \tilde{p}^1, \tilde{k}^1)$$ [1]

sujet à $$v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \bar{v}^i \qquad (i = 2, \ldots, \ell)$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = W_t$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = 0$$

Autrement dit, nous cherchons à caractériser les prix p_t^i et γ_t^i et les revenus R_t^i qui, tout en satisfaisant les conditions d'équilibre sur les marchés des biens et de l'actif financier, seront les "meilleurs", en ce sens qu'ils nous permettront de réaliser un optimum de Pareto temporaire. Quant aux anticipations, les ayant supposées exogènes, nous ne chercherons pas à les caractériser pour l'instant.

Ceci revient à minimiser le lagrangien suivant :

[1] Le lecteur qui ne serait pas familier avec la formulation du minimum dans l'espace dual, trouvera une explication graphique dans l'appendice 2.

$$\text{Min } £(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, e_t^1, \ldots, e_t^\ell, \lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \pi_t'[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - W_t]$$

$$- \phi_t[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i)]$$

où λ^i $(i = 1, \ldots, \ell)$ avec $\lambda^1 = 1$, π_t et ϕ_t sont les multiplicateurs de Lagrange associés à chacune des contraintes du problème. Les conditions de premier ordre de ce problème sont :

(2.2.6) $$£_{p_t^i} : \lambda^i v_{p_t^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial p_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial p_t^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

(2.2.7) $$£_{\gamma_t^i} : \lambda^i v_{\gamma_t^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial \gamma_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \gamma_t^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

(2.2.8) $$£_{R_t^i} : \lambda^i v_{R_t^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial R_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

(2.2.9) $$£_{e_t^i} : \lambda^i v_{e_t^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial e_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial e_t^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

en plus des dérivées par rapport aux multiplicateurs $\lambda^2, \ldots, \lambda^\ell$, π_t et ϕ_t qui redonnent les contraintes du problème et qui ne seront pas répétées ici.

Considérons $£_{p_t^i} + (£_{R_t^i} \times x_t^{i'})$, c'est-à-dire l'opération qui consiste à additionner chacune des équations (2.2.6) à l'équation

(2.2.8) correspondante (chacune des équations (2.2.8) ayant d'abord été postmultipliée par le vecteur $x_t^{i'}$ adéquat). Nous trouvons alors

$$(2.2.10) \qquad \lambda^i (v^i_{p^i_t} + v^i_{R^i_t} x_t^{i'}) - \pi_t' [\partial x_t^i/\partial p_t^i + \partial x_t^i/\partial R_t^i \; x_t^{i'}]$$

$$- \phi_t [\partial e^i_{t+1}/\partial p^i_t + \partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t \; x^{i'}_t] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

qui, en tenant compte des identités de Roy temporaires (2.2.3), deviennent :

$$(2.2.11) \quad \pi_t' [\partial x_t^i/\partial p_t^i + \partial x_t^i/\partial R_t^i \; x_t^{i'}] + \phi_t [\partial e^i_{t+1}/\partial p^i_t + \partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t \; x^{i'}_t] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Des opérations semblables utilisant les équations (2.2.7) et (2.2.8) et tenant compte des identités de Roy temporaires (2.2.4) nous donnent

$$(2.2.12) \quad \pi_t' [\partial x_t^i/\partial \gamma_t^i + \partial x_t^i/\partial R_t^i \; e^i_{t+1}] + \phi_t [\partial e^i_{t+1}/\partial \gamma^i_t + \partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t \; e^i_{t+1}] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Les équations (2.2.11) et (2.2.12) s'écrivent sous forme matricielle

$$(2.2.13) \qquad [\pi_t' \quad \phi_t] \; \hat{K}_t^i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

où la matrice $\hat{K}_t^i$, rappelons-le, est la matrice de Slutsky temporaire associée au consommateur i. Or, par la théorie du consommateur dans un cadre temporaire (voir section 1.4), nous savons que

i) $\hat{K}_t^i \begin{bmatrix} p_t^i \\ \gamma_t^i \end{bmatrix} \equiv 0$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$

ii) $\begin{bmatrix} p_t^i \\ \gamma_t^i \end{bmatrix}$ est le seul vecteur appartenant au noyau de $\hat{K}_t^i$ $\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$

Ces propriétés nous permettent ainsi de tirer le résultat suivant de l'équation (2.2.13) :

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \end{bmatrix} = \theta^i \begin{bmatrix} p_t^i \\ \gamma_t^i \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell; \quad \theta^i \in \mathbb{R} \tag{2.2.14}$$

Les conditions qui caractérisent l'optimum temporaire sont donc :

$$\frac{p_t^i}{s_t^i} = \frac{p_t^j}{s_t^j} \tag{2.2.15}$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\frac{\gamma_t^i}{s_t^i} = \frac{\gamma_t^j}{s_t^j} \tag{2.2.16}$$

où $s_t^i = w'p_t^i$ représente le niveau de prix courants (les prix étant normalisés par un vecteur de poids w).

Ce qui signifie que pour réaliser l'optimum, les systèmes de prix sur les marchés des biens courants doivent être proportionnels d'un individu à l'autre (ou les prix relatifs doivent être égaux), les facteurs d'escompte nominaux doivent être proportionnels et ce, avec le même facteur de proportionnalité que pour les prix des biens.

Examinons ces conditions de plus près. Autant le résultat concernant les prix des biens courants ne cause aucune surprise (en fait, il correspond au résultat usuel), autant la proportionnalité des facteurs d'escompte nominaux (par le même facteur que pour les prix des biens) choque ou, à tout le moins, se conçoit assez difficilement. De fait, il est très facile d'imaginer des exemples où une telle politique mènerait à des situations assez bizarres pour ne pas dire impossibles[1]. D'ailleurs, ce résultat étonne d'autant plus que, comme nous le verrons dans la section suivante, il n'est pas exigé par l'optimum intertemporel et pourrait même nous en éloigner. On ne peut que se demander alors ce qu'il adviendrait du planificateur qui chercherait à implanter un optimum en suivant de telles indications.

Avant de chercher des solutions à ce problème, il serait bon de remarquer que l'optimum temporaire (P2-1) se caractérise également par les conditions suivantes :

(2.2.15) $$\frac{p_t^i}{s_t^i} = \frac{p_t^j}{s_t^j}$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \ell$$

(2.2.17) $$\frac{\phi_t}{w'\pi_t}(\tilde{s}^i - \tilde{s}^j) = \frac{\tilde{s}^i}{s_t^i}\gamma_t^i - \frac{\tilde{s}^j}{s_t^j}\gamma_t^j$$

où $\tilde{s}^i = \tilde{w}'\tilde{p}^i$ représente le niveau des prix futurs anticipés (les prix futurs étant normalisés par un vecteur de poids $\tilde{w}$).

[1]Supposons que $p_t^i = 1{,}15\ p_t^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \ell)$. Ceci implique que $\gamma_t^i = 1{,}15\ \gamma_t^j$ ou $1/1 + \rho_t^i = 1{,}15\ 1/1+\rho_t^j$. Prenons $\rho_t^j = 10\%$. Pour respecter l'égalité, il faudrait que ρ_t^i soit négatif (ce qui est assez surprenant pour un taux d'intérêt nominal).

Un bref examen de ces conditions nous montre que si nous imposons aux niveaux de prix futurs d'être les mêmes d'un individu à l'autre, nous aurons

$$\tilde{s}^i = \tilde{s} \quad {}^1 \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Par conséquent, les équations (2.2.17) deviendront

$$\frac{\tilde{s}}{s_t^i}\,\gamma_t^i = \frac{\tilde{s}}{s_t^j}\,\gamma_t^j \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

c'est-à-dire

(2.2.18) $$\gamma_t^{*i} = \gamma_t^{*j} \qquad\qquad i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

l'égalité des facteurs d'escompte réels pour tous les individus, un résultat qui semble beaucoup moins contraignant que celui concernant les facteurs d'escompte nominaux.

Le planificateur aurait ainsi de meilleures indications pour l'aider à réaliser l'optimum. Pour obtenir les conditions précédentes, il s'agirait pour lui d'amener les agents à anticiper le même prix futur pour un bien ayant été choisi comme numéraire et ce, en utilisant les moyens dont il dispose. A la limite, nous pourrions imaginer qu'il a le pouvoir de fixer ce prix par décret. Il reste à voir si une telle politique serait crédible auprès des agents.

[1] Ceci peut être obtenu, par exemple, en fixant le prix futur du numéraire.

2.3. Optimum temporaire et optimum intertemporel

Nous ne dériverons pas ici tout le problème de l'optimum intertemporel. Nous nous contenterons de rappeler qu'il se caractérise dans l'espace dual par la proportionnalité des prix actualisés à chaque période t, c'est-à-dire

$$\mu_t = \nu^i \bar{p}_t^i \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell; \quad \nu^i \in \mathbb{R}$$
$$t = 1, 2, \ldots, T$$

où $\bar{p}_t^i$ représente le vecteur de prix actualisés de la période t et μ_t le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de marché de la période t dans ce problème. Ces conditions impliquent

$$\frac{p_t^i}{s_t^i} = \frac{p_t^j}{s_t^j}$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$
$$\gamma_t^{*i} = \gamma_t^{*j} \qquad t = 1, 2, \ldots, T$$

Remarquons immédiatement que l'optimum temporaire de la section précédente respecte cette caractérisation en autant qu'on lui impose l'hypothèse des niveaux de prix futurs égaux pour tous les agents (telle que rencontrée plus haut). Cet optimum temporaire est donc tel que, s'il se répète à chaque période t, il engendre un optimum intertemporel. Le planificateur pourrait ainsi imaginer implanter l'optimum intertemporel comme une suite d'optimums temporaires.

2.4. L'optimum temporaire et les anticipations

Nous avons déjà mentionné à la fin de la section 1.2 que même si nous retenions l'hypothèse des anticipations exogènes pour étudier le comportement individuel du consommateur, rien ne nous empêchait par la suite de supposer ces anticipations endogènes au niveau de la société. Dans ce cas, il va de soi que le planificateur puisse s'interroger à savoir quelles seraient les anticipations optimales. C'est à cette question que nous allons maintenant tenter de répondre. Pour ce faire, nous supposerons qu'a priori, les anticipations sont différentes d'un individu à l'autre et qu'elles incorporent une certaine rationalité. Qu'entendons-nous par une "certaine rationalité"? Malinvaud [28] définit ses anticipations rationnelles dans un contexte où les anticipations sont les mêmes pour tous les agents et où les prix courants donnent toute l'information sur les marchés futurs[1]. C'est, en partie, cette définition que nous retiendrons ici. En effet, nous pouvons imaginer qu'au niveau de la société il existe une contrainte sur la circulation de l'information de manière à assurer un certain consensus quant à ces anticipations. Cette contrainte serait représentable par :

$$(2.4.1) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{t}' \, \tilde{x}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \tilde{t}' \, \tilde{W}$$

où $\tilde{t}$ représente le vecteur des prix anticipés par le planificateur et $\tilde{W}$ le vecteur de ressources disponibles dans le futur.

Imposer cette contrainte revient donc à imposer une hypothèse "affaiblie" d'anticipations rationnelles. Il s'agit alors de reprendre

[1]A ce sujet, voir aussi Radner [33].

le problème (P2-1) en considérant une contrainte supplémentaire donnée par (2.4.1) et en dérivant par rapport aux variables $\tilde{p}^i$ et $\tilde{k}^i$. Ceci conduit à la résolution du lagrangien suivant :

$$(P2\text{-}2)\quad \text{Min } \pounds^*(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, e_t^1, \ldots, e_t^\ell, \tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^\ell, \tilde{k}^1, \ldots, \tilde{k}^\ell, \lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t, \psi)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i\, v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i)$$

$$- \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - W_t\right]$$

$$- \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i)\right]$$

$$- \psi \left[\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{t}'\, \tilde{x}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \tilde{t}'\, \tilde{W}\right]$$

Les conditions de premier ordre de ce problème s'écrivent :

$$(2.4.2)\quad \pounds^*_{p_t^i} : \lambda^i\, v^i_{p_t^i} - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial p_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial p_t^i] - \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial p_t^i] = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, \ell$

$$(2.4.3)\quad \pounds^*_{\gamma_t^i} : \lambda^i\, v^i_{\gamma_t^i} - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial \gamma_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \gamma_t^i] - \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial \gamma_t^i] = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, \ell$

$$(2.4.4)\quad \pounds^*_{R_t^i} : \lambda^i\, v^i_{R_t^i} - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial R_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i] - \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial R_t^i] = 0$$

$i = 1, 2, \ldots, \ell$

$$(2.4.5)\quad \pounds^*_{e^i_t} : \lambda^i v^i_{e^i_t} - \pi'_t[\partial x^i_t/\partial e^i_t] - \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial e^i_t] - \psi\tilde{t}'[\partial\tilde{x}^i/\partial e^i_t] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(2.4.6)\quad \pounds^*_{\tilde{p}^i} : \lambda^i v^i_{\tilde{p}^i} - \pi'_t[\partial x^i_t/\partial\tilde{p}^i] - \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial\tilde{p}^i] - \psi\tilde{t}'[\partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{p}^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(2.4.7)\quad \pounds^*_{\tilde{k}^i} : \lambda^i v^i_{\tilde{k}^i} - \pi'_t[\partial x^i_t/\partial\tilde{k}^i] - \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial\tilde{k}^i] - \psi\tilde{t}'[\partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{k}^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

en plus des dérivées par rapport à chacun des multiplicateurs du problème.

Considérons $\pounds^*_{p^i_t} + (\pounds^*_{R^i_t} \times x^{i'}_t)$, c'est-à-dire l'opération qui consiste à additionner chacune des équations (2.4.2) à l'équation (2.4.4) correspondante (les équations (2.4.4) ayant déjà été multipliées par le vecteur $x^{i'}_t$ adéquat). Ceci nous donne

$$\lambda^i(v^i_{p^i_t} + v^i_{R^i_t} x^{i'}_t) - \pi'[\partial x^i_t/\partial p^i_t + \partial x^i_t/\partial R^i_t\, x^{i'}_t] - \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial p^i_t + \partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t\, x^{i'}_t]$$

$$- \psi\,\tilde{t}'[\partial\tilde{x}^i/\partial p^i_t + \partial\tilde{x}^i/\partial R^i_t\, x^{i'}_t] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

qui, en tenant compte des identités de Roy temporaires (2.2.3), deviennent

$$(2.4.8)\quad \pi'_t[\partial x^i_t/\partial p^i_t + \partial x^i_t/\partial R^i_t\, x^{i'}_t] + \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial p^i_t + \partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t\, x^{i'}_t]$$

$$+ \psi\,\tilde{t}'[\partial\tilde{x}^i/\partial p^i_t + \partial\tilde{x}^i/\partial R^i_t\, x^{i'}_t] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Des opérations semblables qui, d'une part, utilisent les équations (2.4.3) et (2.4.4) et tiennent compte des identités de Roy temporaires (2.2.4) et, d'autre part, se servent des équations (2.4.6) et (2.4.7) en tenant compte des identités de Roy futures (2.2.5), nous permettent d'obtenir

$$(2.4.9)\quad \pi_t'[\partial x_t^i/\partial \gamma_t^i + \partial x_t^i/\partial R_t^i\, e_{t+1}^i] + \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \gamma_t^i + \partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i\, e_{t+1}^i]$$
$$+ \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial \gamma_t^i + \partial \tilde{x}^i/\partial R_t^i\, e_{t+1}^i] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(2.4.10)\quad \pi_t'[\partial x_t^i/\partial \tilde{p}^i + \partial x_t^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}] + \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{p}^i + \partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}]$$
$$+ \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{p}^i + \partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Les équations (2.4.10) peuvent être multipliées par un scalaire $1/\gamma_t^i$ sans que leur validité ne soit affectée. Elles deviennent alors

$$(2.4.11)\quad 1/\gamma_t^i\{\pi_t'[\partial x_t^i/\partial \tilde{p}^i + \partial x_t^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}] + \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{p}^i + \partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}]$$
$$+ \psi\, \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{p}^i + \partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{k}^i\, \tilde{x}^{i'}]\} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Les équations (2.4.8), (2.4.9) et (2.4.11) s'écrivent sous forme matricielle

$$[\pi_t' \quad \phi_t \quad \psi\, \tilde{t}']\, K_t^{*i} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

où K_t^{*i} est la matrice de Slutsky complète légèrement transformée que nous avons déjà rencontrée dans la section 1.4. Les propriétés de ces matrices K_t^{*i}

i) $K^{*i}_t \, p^{*i}_t \equiv 0$ avec $p^{*i}_t = \begin{bmatrix} p^i_t \\ \gamma^i_t \\ 0 \end{bmatrix}$

ii) $K^{*i}_t \, \tilde{p}^{*i} \equiv 0$ avec $\tilde{p}^{*i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p}^i \end{bmatrix}$

iii) p^{*i}_t et $\tilde{p}^{*i}$ sont les deux seuls vecteurs linéairement indépendants qui appartiennent au noyau K^{*i}_t;

vont nous permettre de déduire les résultats suivants :

$$\begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \\ \psi \, \tilde{t} \end{bmatrix} = \theta^i_1 \begin{bmatrix} p^i_t \\ \gamma^i_t \\ 0 \end{bmatrix} + \theta^i_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p}^i \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell; \ \theta^i_1 \text{ et } \theta^i_2 \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

(2.4.13) $$\frac{p^i_t}{s^i_t} = \frac{p^j_t}{s^j_t}$$

(2.4.14) $$\frac{\phi_t}{w'\pi_t} [\tilde{s}^i - \tilde{s}^j] = [\gamma^{*i}_t - \gamma^{*j}_t] \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

(2.4.15) $$\frac{\tilde{p}^i}{\tilde{s}^i} = \frac{\tilde{p}^j}{\tilde{s}^j}$$

A première vue, ces résultats nous montrent 1) que la condition sur les prix courants reste inchangée; 2) que les anticipations optimales quant au vecteur de prix futurs devraient être proportionnelles (avec un facteur de proportionnalité différent de celui qui s'applique aux prix courants); 3) que, d'une part, la condition surprenante sur les facteurs d'escompte nominaux a disparu mais que, d'autre part, la condition actuelle (2.4.14) qui porte sur les facteurs d'escompte réels (la différence entre les facteurs d'escompte réels est proportionnelle à la différence entre les niveaux de prix futurs anticipés) n'est guère plus encourageante. Toutefois, en examinant ces conditions plus soigneusement, on s'aperçoit que l'ajout de la troisième contrainte (2.4.1) nous permet non seulement d'étudier la caractérisation des anticipations optimales mais aussi de montrer qu'à l'optimum, le multiplicateur ϕ_t est nul. En effet, considérons les équations (2.4.4), c'est-à-dire $\mathcal{L}^*_{R^i_t}$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$. Nous avons

$$\lambda^i v^i_{R^i_t} - \pi'_t[\partial x^i_t/\partial R^i_t] - \phi_t[\partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t] - \psi \tilde{t}'[\partial \tilde{x}^i/\partial R^i_t] = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Remplaçons les multiplicateurs π_t, ϕ_t et $\psi \tilde{t}$ par leurs valeurs trouvées à l'optimum, soit

$$\pi_t = \theta^i_1 \, p^i_t$$

$$\phi_t = \theta^i_1 \, \gamma^i_t - \theta^i_2$$

$$\psi \tilde{t} = \theta^i_2 \, \tilde{p}^i$$

Les équations (2.4.4) deviennent alors

$$\lambda^i v^i_{R^i_t} - \theta^i_1 p^{i'}_t [\partial x^i_t/\partial R^i_t] - (\theta^i_1 \gamma^i_t - \theta^i_2) [\partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t] - \theta^i_2 \tilde{p}^{i'} [\partial \tilde{x}^i/\partial R^i_t] = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

c'est-à-dire

$$\lambda^i v^i_{R^i_t} - \theta^i_1 \{p^{i'}_t [\partial x^i_t/\partial R^i_t] + \gamma^i_t [\partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t]\} - \theta^i_2 \{[-\partial e^i_{t+1}/\partial R^i_t] + \tilde{p}^{i'} [\partial \tilde{x}^i/\partial R^i_t]\} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Ce qui implique, en tenant compte des propriétés des vecteurs d'effets-revenu complets

$$\lambda^i v^i_{R^i_t} - \theta^i_1 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

De la même façon, en utilisant les équations (2.4.7), nous pouvons montrer que

$$\lambda^i v^i_{\tilde{k}^i} - \theta^i_2 = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Or, $\phi_t = \theta^i_1 \gamma^i_t - \theta^i_2$, $v^i_{R^i_t} = \alpha^i$ (le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire courante dans le problème du consommateur i) et $v^i_{\tilde{k}^i} = \alpha^i \gamma^i_t$ ($i = 1, 2, \ldots, \ell$). Ainsi,

$$\begin{aligned}
\phi_t &= \theta^i_1 \gamma^i_t - \theta^i_2 \\
&= \lambda^i v^i_{R^i_t} \gamma^i_t - \lambda^i v_{\tilde{k}^i} \\
&= \lambda^i \alpha^i \gamma^i_t - \lambda^i \alpha^i \gamma^i_t \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le multiplicateur ϕ_t étant nul, les conditions (2.4.14) nécessaires à l'optimum deviennent

$$\gamma_t^{*i} = \gamma_t^{*j} \qquad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \ell$$

et nous retrouvons l'égalité des facteurs d'escompte réels.

Autrement dit, dans la mesure où les anticipations des agents sont proportionnelles et qu'elles dénotent un minimum de rationalité, le planificateur pourrait, du moins théoriquement, envisager de réaliser l'optimum intertemporel comme une suite d'optimums temporaires. Dans la pratique, il reste à voir comment le planificateur pourrait s'y prendre pour réaliser de telles conditions. Intuitivement, l'idée générale semble assez simple : il s'agit de fournir aux agents l'information nécessaire pour les amener à converger dans la formation de leurs anticipations. Sans entrer dans les détails, nous croyons que différentes solutions pourraient être envisagées. Nous pourrions, par exemple, imaginer que des marchés à terme spécifiques sont mis en place pour certains biens typiques ou même certains paniers de biens typiques. Evidemment, nous ne pouvons savoir avec certitude comment les individus réagiraient à l'information fournie par de tels marchés et si, comme nous le souhaiterions, leurs anticipations seraient proportionnelles aux prix à terme (hypothèse qui a déjà été étudiée par Svensson [40]).

CHAPITRE 2

SECTION 3 : LA THEORIE DU PRODUCTEUR DANS UN CADRE TEMPORAIRE

3.1. De l'intertemporel au temporaire

Considérons le problème intertemporel du producteur néo-classique :

$$\text{(P3-1)} \qquad \text{Max} \sum_{t=1}^{T} \bar{q}_t' \, y_t$$

$$\text{sujet à } f(y_1, \ldots, y_t, \ldots, y_T) \leq 0$$

où y_t est le vecteur de production nette de la période t et $\bar{q}_t$ le vecteur des prix de la période t, actualisés au temps 1. Le problème du producteur est donc de maximiser le profit total actualisé, sujet à une contrainte technologique représentée par une fonction de production intertemporelle. Comme pour l'étude du consommateur, pour que l'économie implicitement décrite par (P3-1) fonctionne, nous devons supposer l'existence de marchés à terme et, partant, la connaissance de tous les prix actualisés par le producteur. Nous avons ici l'interprétation d'Arrow et Debreu. Nous avons déjà critiqué cette interprétation dans le cas du consommateur et souligné son manque de réalisme et son inaptitude à représenter les marchés au comptant. Les critiques que nous avons faites alors tiennent également pour le problème du producteur.

Afin de rendre le modèle un peu plus opérationnel et, en particulier, de permettre l'analyse des opérations au comptant, Malinvaud (voir Malinvaud [27], [28]) suggère les transformations suivantes. D'abord, tout comme Debreu, il suggère que le temps soit conçu comme une suite de dates t = 1 à t = T, la période t étant l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux dates successives t et t+1; par contre, dans son modèle, les décisions du producteur ne seront pas prises à un moment donné et une fois pour toutes (comme dans l'analyse intertemporelle) mais plutôt de façon séquentielle, à chaque période t. C'est pourquoi, au lieu de décrire le processus de production par une seule fonction de production portant sur l'ensemble des T-1 périodes, il suggère de le représenter par T-1 fonctions de production propres à chacune des périodes. Définissant le vecteur de production nette de la période t par :

$$(3.1.1) \qquad y_t = b_t - a_t \qquad \text{avec} \quad b_1 = 0 \text{ et } a_T = 0$$

où b_t est un vecteur d'outputs et a_t un vecteur d'inputs, les opérations de production de la période t peuvent être décrites par la fonction

$$(3.1.2) \qquad g_t(-a_t;\ b_{t+1}) \leq 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

Ainsi, dans cette théorie, on introduit un délai de production d'une période. L'entreprise immobilise à la date t des inputs a_t et obtient comme résultat de sa production des outputs b_{t+1} qui seront disponibles à la date t+1. Il est à noter que dans cette représentation, le vecteur d'inputs a_t comprend aussi bien les matières premières, les biens d'équipement anciens et nouveaux, les services de travail que les articles en cours de fabrication à la date t. Autrement dit, le vecteur a_t représente le capital de l'entreprise à la date t (capital au sens de Marx), cette définition de capital étant évidemment plus extensive que l'usage courant. Le vecteur des outputs b_{t+1}, quant à lui, représente les productions proprement dites de l'entreprise, y compris les équipements dans l'état dans lequel ils se trouvent à la fin de la période t (date t+1).

En tenant compte de ces modifications, le problème du producteur devient :

(P3-2) $$\text{Max} \sum_{t=1}^{T} \bar{q}_t' \, y_t$$

$$\text{sujet à } g_t(-a_t; b_{t+1}) \leq 0 \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1$$

L'équilibre porte encore sur l'ensemble des périodes mais l'activité de production est considérée période par période.

Malinvaud fait également remarquer qu'en tenant compte de (3.1.1), le profit total actualisé peut s'écrire comme une somme de profits actualisés $\bar{\pi}_t$ propres à chaque période t (t = 1, 2, ..., T-1). En effet,

(3.1.3) $$\sum_{t=1}^{T} \bar{q}_t' \, y_t = \sum_{t=1}^{T} (\bar{q}_t' \, b_t - \bar{q}_t' \, a_t) = \sum_{t=1}^{T-1} \bar{\pi}_t$$

où $\bar{\pi}_t = \bar{q}_{t+1}' \, b_{t+1} - \bar{q}_t' \, a_t$ par définition.

de la date t+1 à la date t (avec i le taux d'intérêt nominal qui prévaut de la date t à la date t+1).

Le producteur disposerait ainsi d'un montant Q_t provenant d'une part, de ses placements ou emprunts cumulés jusqu'à la date t (f_t) et, d'autre part, de l'autofinancement α_t fourni (peut-être involontairement) par les actionnaires. Ce montant pourrait soit être investi dans l'achat d'inputs physiques, soit être placé dans un actif financier f_{t+1} livrable à la date t+1 dont le prix unitaire serait δ_t. $\delta_t\ f_{t+1}$ serait la valeur du placement financier à la date t, c'est-à-dire le montant que le producteur devrait débourser à l'achat de cet actif financier. De la même façon qu'il doit faire face à une contrainte financière courante (3.2.1), le producteur doit, à la date t, anticiper une contrainte analogue pour chacune des périodes de l'avenir. En supposant que l'on actualise le futur à la date t+1, ces contraintes peuvent s'écrire sous forme condensée :

$$\tilde{r}'\ \tilde{a} - f_{t+1} = \tilde{\alpha} \tag{3.2.2}$$

où $\tilde{\alpha} = \alpha_{t+1} + \sum_{\tau=t+2}^{T} \frac{\eta_\tau}{\eta_{t+1}} \alpha_\tau$ représente l'ensemble des budgets de capitaux futurs actualisés à la date t+1. Finalement, en conséquence des deux changements précédents, la troisième modification sera de remplacer la fonction de production f* par une fonction plus générale

$$g(-a_t, -\tilde{a};\ b_t, \tilde{b}) \leq 0 \tag{3.2.3}$$

En tenant compte des modifications précédentes, le problème du producteur peut se poser comme suit :

(P3-4) $$\text{Max } q_t' \, b_t + \tilde{q}' \, \tilde{b}$$

sujet à

$$g(-a_t, -\tilde{a}; b_t, \tilde{b}) \leq 0$$

$$r_t' \, a_t + \delta_t \, f_{t+1} = f_t + \alpha_t = Q_t$$

$$\tilde{r}' \, \tilde{a} - f_{t+1} = \tilde{\alpha}$$

Ce problème, une fois résolu, nous donne les fonctions d'offre et de demande suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} a_t = a_t(r_t, \delta_t, q_t, \tilde{r}, \tilde{q}, Q_t, \tilde{\alpha}) \\ f_{t+1} = f_{t+1}(r_t, \delta_t, q_t, \tilde{r}, \tilde{q}, Q_t, \tilde{\alpha}) \end{array}\right\} \text{fonctions de demande "temporaires" ou courantes}$$

$$\left.b_t = b_t(r_t, \delta_t, q_t, \tilde{r}, \tilde{q}, Q_t, \tilde{\alpha})\right\} \text{fonctions d'offre "temporaires" ou courantes}$$

$$\left.\tilde{a} = \tilde{a}(r_t, \delta_t, q_t, \tilde{r}, \tilde{q}, Q_t, \tilde{\alpha})\right\} \text{fonctions de demande "planifiées" ou futures}$$

$$\left.\tilde{b} = \tilde{b}(r_t, \delta_t, q_t, \tilde{r}, \tilde{q}, Q_t, \tilde{\alpha})\right\} \text{fonctions d'offre "planifiées" ou futures}$$

Le problème (P3-4), posé à la date t, peut s'interpréter de la façon suivante : à partir des connaissances qu'il a sur les prix courants et son budget de capital courant, des attentes qu'il a sur les prix futurs et son budget de capital futur, le producteur <u>choisit</u> son ensemble optimal d'inputs physiques courants et son vecteur optimal d'outputs courants, décide du montant optimal de son placement financier (ou emprunt) et planifie ses activités futures (c'est-à-dire ses inputs et ses outputs futurs) de manière à maximiser la valeur de ses ventes courantes et la valeur anticipée de ses ventes futures.

Il est à noter que dans ce modèle, le producteur ne peut connaître avec certitude ni les prix futurs $\tilde{r}$ et $\tilde{q}$, ni son budget de capital futur $\tilde{\alpha}$ (puisque les marchés qui déterminent ces valeurs n'existent pas encore à la date t). Il doit donc anticiper ces valeurs. C'est ce qui nous amène à dire quelques mots sur les anticipations du producteur et sur la façon de les formaliser. D'une manière générale, tout ce que nous avons dit à la section 1.2 sur les prévisions du consommateur tient également pour le producteur. Les différentes hypothèses pour la formalisation des anticipations restent les mêmes. De plus, tout comme pour le modèle du consommateur, nous avons choisi pour les anticipations du producteur l'une des hypothèses les plus simples : les anticipations ponctuelles exogènes. Nous avons déjà justifié ce choix pour le consommateur. Les raisons demeurent ici inchangées.

Nous avons donc en main une théorie générale du producteur qui, tout comme celle de Malinvaud, permet d'analyser les activités du producteur sur des marchés au comptant. Notre modèle nous semble toutefois moins restrictif que celui de Malinvaud. D'une part, il permet beaucoup plus de structures de délais et, d'autre part, il ne suppose pas de marché parfait pour les biens d'équipements usagés (le capital peut n'être pas librement transférable). Par contre, dans le cas où le capital deviendrait librement transférable et que les prévisions des producteurs seraient parfaites, notre modèle coïnciderait avec le problème de maximisation intertemporelle (P3-1). Pour retrouver celui de Malinvaud (P3-3), il faudrait, en plus, supposer un délai de production, c'est-à-dire supposer qu'à la période t, la production b_t est exogène. (On peut toujours faire cette opération après coup, c'est-à-dire en postulant directement sur les fonctions de demande et d'offre).

3.3. Les fonctions d'offre et de demande et leurs propriétés empiriques

Afin d'étudier les propriétés empiriques des fonctions d'offre et de demande, nous allons examiner leurs différentielles :

$$(3.3.1) \quad \begin{bmatrix} da_t \\ df_{t+1} \\ db_t \\ d\tilde{a} \\ d\tilde{b} \end{bmatrix} = A_t^{**} \begin{bmatrix} dr_t \\ d\delta_t \\ dq_t \\ d\tilde{r} \\ d\tilde{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t} \end{bmatrix} (r'_t\ da_t + \delta_t\ df_{t+1}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}} \end{bmatrix} (\tilde{r}'\ d\tilde{a} - df_{t+1})$$

où

$$
A_t^{**} = \left[\begin{array}{ccc:cc}
\left[\frac{\partial a_t}{\partial r_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t}\, a'_t\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t}\, f_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial q_t}\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}}\, \tilde{a}'\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial \tilde{q}}\right] \\
\left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial r_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t}\, a'_t\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t}\, f_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial q_t}\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}}\, \tilde{a}'\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{q}}\right] \\
\left[\frac{\partial b_t}{\partial r_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t}\, a'_t\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t}\, f_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial q_t}\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}}\, \tilde{a}'\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial \tilde{q}}\right] \\
\hdashline
\left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r_t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t}\, a'_t\right] & \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t}\, f_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial q_t}\right] & \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}}\, \tilde{a}'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{q}}\right] \\
\left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial r_t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t}\, a'_t\right] & \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t}\, f_{t+1}\right] & \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial q_t}\right] & \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}}\, \tilde{a}'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{q}}\right]
\end{array}\right]
$$

est la matrice des effets de substitution "complète"[1];

$$
\begin{bmatrix}
\frac{\partial a_t}{\partial Q_t} \\[2ex]
\frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} \\[2ex]
\frac{\partial b_t}{\partial Q_t} \\[2ex]
\frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} \\[2ex]
\frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t}
\end{bmatrix}
$$
est le vecteur d'effets-richesse courante "complet";

[1]Dans ce chapitre, le terme "complet" signifie que le vecteur ou la matrice concerne à la fois les demandes de facteurs courantes et futures et les offres d'output courantes et futures. Par contre, le terme "temporaire" désigne uniquement les demandes et les offres courantes. Par exemple, la matrice de substitution temporaire" $\overset{*}{A}_t$ est la sous-matrice encadrée en pointillé dans l'expression de A_t^{**}.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \\ \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}} \end{bmatrix}$$ est le vecteur d'effets-richesse anticipée "complet".

Notons que seuls les effets de prix des facteurs courants et planifiés (r_t, δ_t et $\tilde{r}$) se décomposent en un effet de substitution et un effet-revenu comme on peut le voir dans la matrice A_t^{**}. L'équation (3.3.1) décrit le comportement du producteur suite à des changements dans les prix courants des facteurs r_t et δ_t, dans les prix courants des outputs q_t, dans les prix anticipés des facteurs et des outputs, respectivement $\tilde{r}$ et $\tilde{q}$, dans sa richesse réelle courante ($r_t'\ da_t + \delta_t\ df_{t+1}$) et dans sa richesse réelle anticipée ($\tilde{r}'\ d\tilde{a} - df_{t+1}$).

Définissons la matrice A_t^* de la façon suivante :

$$A_t^* = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial a_t}{\partial r_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu\left[\frac{\partial a_t}{\partial q_t}\right] & \frac{1}{\delta_t}\left[\frac{\partial a_t}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} \tilde{a}'\right] & -\mu\left[\frac{\partial a_t}{\partial \tilde{q}}\right] \\ \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial r_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu\left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial q_t}\right] & \frac{1}{\delta_t}\left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \tilde{a}'\right] & -\mu\left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{q}}\right] \\ \left[\frac{\partial b_t}{\partial r_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu\left[\frac{\partial b_t}{\partial q_t}\right] & \frac{1}{\delta_t}\left[\frac{\partial b_t}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}} \tilde{a}'\right] & -\mu\left[\frac{\partial b_t}{\partial \tilde{q}}\right] \\ \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial r_t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu\left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial q_t}\right] & \frac{1}{\delta_t}\left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}} \tilde{a}'\right] & -\mu\left[\frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{q}}\right] \\ \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial r_t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu\left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial q_t}\right] & \frac{1}{\delta_t}\left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}} \tilde{a}'\right] & -\mu\left[\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{q}}\right] \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire une matrice d'effets de substitution légèrement transformée. On trouve cette nouvelle matrice en appliquant une simple transformation linéaire à la matrice A_t^{**}. Concernant la matrice A_t^*, nous pouvons montrer[1] qu'elle jouit des propriétés suivantes :

(3.3.2) $$A_t^* \equiv A_t^{*\prime}$$

(3.3.3a) $$A_t^* \, r_t^* \equiv 0 \qquad \text{avec } r_t^{*\prime} = [r_t' \quad \delta_t \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

(3.3.3b) $$A_t^* \, \tilde{r}^* \equiv 0 \qquad \text{avec } \tilde{r}^{*\prime} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad \tilde{r}' \quad 0]$$

(3.3.3c) $$A_t^* \, \tilde{q}^* \equiv 0 \qquad \text{avec } \tilde{q}^{*\prime} = \left[-\frac{\mu\, r_t'}{\lambda} \quad 0 \quad \frac{q_t'}{\lambda} \quad -\frac{\mu\, \delta_t\, \tilde{r}'}{\lambda} \quad \frac{\tilde{q}'}{\lambda}\right]$$

(3.3.4) $$\xi^{*\prime} A_t^* \xi^* < 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi^* \neq \theta_1 r_t^* + \theta_2 \tilde{r}^{*\prime} + \theta_3 \tilde{q}^*$$

$$\text{avec } \xi^* \in \mathbb{R}^M,\ \theta_1,\ \theta_2 \text{ et } \theta_3 \in \mathbb{R}\ .$$

---

[1]Les preuves des énoncés sont très semblables à celles qui s'appliquent aux propriétés de la théorie du consommateur (voir Appendice 1).

Les équations (3.3.3a), (3.3.3b) et (3.3.3c) impliquent des propriétés d'homogénéité sur les fonctions. Premièrement, l'équation (3.3.3a) implique que toutes les fonctions (demande de facteurs et offre d'outputs) sont homogènes de degré 0 dans les prix des facteurs (r_t et δ_t) et la richesse courante (Q_t). Le producteur est donc insensible à une modification dans le choix ou la grandeur de l'unité de compte en autant que la variation dans les prix des facteurs physiques au cours de la période courante soit compensée par une variation du taux d'escompte. Deuxièmement, de l'équation (3.3.3b), nous pouvons déduire que les demandes de facteurs physiques courantes et planifiées (a_t et $\tilde{a}$) et les offres d'outputs courantes et planifiées (b_t et $\tilde{b}$) sont homogènes de degré 0 dans les prix des facteurs physiques courants et futurs (r_t et $\tilde{r}$) et dans la richesse courante et future (Q_t et $\tilde{\alpha}$) alors que la demande nette d'actifs financiers f_{t+1} est homogène de degré 1 dans ces mêmes variables. Troisièmement, l'équation (3.3.3c) nous renseigne sur l'homogénéité des fonctions par rapport aux variables r_t, q_t, $\tilde{r}$, $\tilde{q}$, Q_t et $\tilde{\alpha}$: a_t, b_t, $\tilde{a}$, et $\tilde{b}$ sont des fonctions homogènes de degré 0 par rapport à ces variables tandis que f_{t+1} est homogène de degré 1. Ce qui signifie que le producteur sera insensible à un changement dans le choix ou la grandeur de l'unité de compte dans la mesure où les modifications dans les prix des biens (inputs physiques et outputs) est uniforme sur toutes les périodes.

Nous avons également quelques propriétés portant sur les vecteurs d'effets-richesse courante et d'effets-richesse anticipée :

$$(3.3.5a)\quad [r'_t \quad \delta_t \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t} \end{bmatrix} \equiv 1; \qquad (3.3.5b)\quad [r'_t \quad \delta_t \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}} \end{bmatrix} \equiv 0;$$

$$(3.3.6a)\quad [0 \quad -1 \quad 0 \quad \tilde{r}' \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial Q_t} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial Q_t} \end{bmatrix} \equiv 0; \qquad (3.3.6b)\quad [0 \quad -1 \quad 0 \quad \tilde{r}' \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial b_t}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{a}}{\partial \tilde{\alpha}} \\ \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{\alpha}} \end{bmatrix} \equiv 1$$

L'équation (3.3.5a) peut s'écrire :

$$r'_t \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} + \delta_t \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} \equiv 1$$

et s'interpréter comme étant la somme de la propension marginale à investir (dans la période courante) plus la propension marginale à placer (dans la période courante) est identique à 1. L'équation (3.3.5b)

$$r_t' \frac{\partial a_t}{\partial \tilde{\alpha}} + \delta_t \frac{\partial f_{t+1}}{\partial \tilde{\alpha}} \equiv 0$$

signifie qu'un changement dans les anticipations du producteur peut affecter à la marge la composition de son budget de capital entre l'investissement et le placement mais pas le montant total de ces composantes. Quant aux équations (3.3.6a) et (3.3.6b), elles représentent des propriétés analogues pour le futur.

Avant de terminer cette section, nous allons examiner brièvement la matrice des effets de substitution "temporaire", c'est-à-dire la matrice que l'on obtient lorsqu'on considère uniquement les demandes et les offres courantes. Définissons la matrice $\hat{A}_t$ de la façon suivante :

$$\hat{A}_t = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial a_t}{\partial r_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial a_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial a_t}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu \left[\frac{\partial a_t}{\partial q_t}\right] \\ \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial r_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial \delta_t} + \frac{\partial f_{t+1}}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu \left[\frac{\partial f_{t+1}}{\partial q_t}\right] \\ \left[\frac{\partial b_t}{\partial r_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} a_t'\right] & \left[\frac{\partial b_t}{\partial \delta_t} + \frac{\partial b_t}{\partial Q_t} f_{t+1}\right] & -\mu \left[\frac{\partial b_t}{\partial q_t}\right] \end{bmatrix}$$

Cette matrice peut être obtenue à partir de la matrice des effets de substitution temporaire $\hat{\hat{A}}_t$ par une simple transformation linéaire.

Nous allons voir que cette matrice $\hat{A}_t$ a des propriétés très semblables à celles de la matrice "complète" A_t^*[1]. Ces propriétés sont :

(3.3.7) $\qquad \hat{A}_t \equiv \hat{A}_t'$

(3.3.8) $\qquad \hat{A}_t \; \hat{r}_t \equiv 0 \qquad$ avec $\hat{r}_t' = [r_t' \quad \delta_t \quad 0]$

(3.3.9) $\qquad \hat{\xi}' \; \hat{A}_t \; \hat{\xi} < 0 \quad$ pour tout $\hat{\xi} \neq \theta \hat{r}_t$, $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{2n_1+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

[1]Les propriétés de la matrice $\hat{A}_t$ tout comme celles de la matrice A_t^* s'avèreront des propriétés essentielles lorsque nous aborderons le problème de l'optimum temporaire dans une économie avec production.

SECTION 4 : LA THEORIE DE L'OPTIMUM AVEC PRODUCTION DANS UN CADRE TEMPORAIRE

4.1. Introduction

Cette section fait pendant à la section 2 du chapitre I. En effet, dans ces deux sections, nous posons d'abord le problème de l'optimum temporaire sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire en supposant que les anticipations des agents sont exogènes. Ensuite, nous généralisons notre approche pour étudier à la fois le problème de l'optimum temporaire et celui de la caractérisation optimale des anticipations. Alors que dans la section II les problèmes étaient abordés dans le cadre d'une économie d'échanges, ils seront ici étudiés dans le cadre d'une économie avec production. C'est pourquoi, tout au long de cette section, nous considérerons une économie comprenant ℓ consommateurs (indicés par $i = 1, 2, \ldots, \ell$) et ℓ' producteurs (indicés par $j = 1, 2, \ldots, \ell'$).

4.2. L'optimum temporaire avec production

Tout comme dans la section 2.2, nous nous questionnerons d'abord à savoir quelles contraintes nos valeurs doivent respecter afin que les états qu'elles définissent soient des états réalisables. Les valeurs que nous chercherons à caractériser de façon optimale seront ici les prix à la consommation courants et anticipés (p_t, γ_t et $\tilde{p}$), le revenu courant et anticipé des consommateurs (R_t et $\tilde{k}$), les prix d'achat à la production (prix des inputs) courants et anticipés (r_t, δ_t et $\tilde{r}$), les prix de vente à la production (prix des outputs) courants et anticipés (q_t et $\tilde{q}$) et la richesse courante et anticipée des producteurs (Q_t et $\tilde{\alpha}$). Ces contraintes de conservation s'écrivent comme suit :

$$(4.2.1) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \sum_{j=1}^{\ell'} y_t^j(r_t^j, \delta_t^j, \tilde{r}^j, q_t^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) + W_t$$

$$(4.2.2) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) + \sum_{j=1}^{\ell'} f_{t+1}^j(r_t^j, \delta_t^j, \tilde{r}^j, q_t^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) = 0$$

Mis à part le fait que nous tenons maintenant compte de la production, ce sont les mêmes contraintes que nous avions rencontrées lorsque nous avons étudié l'optimum temporaire dans une économie d'échanges. La première contrainte (4.2.1) concerne l'équilibre sur le marché des biens à la date t : la somme des demandes en biens courants est égale à la somme des offres nettes en biens courants en plus des ressources qui sont disponibles à cette même date. La seconde contrainte (4.2.2) traduit la conservation des flux financiers à la date t, c'est-à-dire la somme des valeurs des titres financiers doit être nulle. Nous avions déjà remarqué que, du simple fait que e_{t+1}^i soit positif ou négatif, nous ne pouvions conclure que le consommateur i avait réalisé une épargne ou un emprunt. La même remarque s'applique pour chacun des producteurs j. Pour savoir si le producteur j a fait un placement ou un emprunt, il faut plutôt considérer le signe de ($\delta_t^j f_{t+1}^j - f_t^j$).

Comme nous l'avons vu à la section 3.2, la théorie du producteur que nous avons présentée dans un cadre temporaire en est une très générale et pouvant contenir plusieurs cas particuliers. Il serait peut-être opportun à ce stade-ci, de se demander si une théorie du producteur aussi générale est nécessaire ou même adéquate pour étudier le problème de l'optimum temporaire dans une économie avec production. Pour le voir, nous essayerons de poser le problème de l'optimum dans deux cas différents. Dans un premier temps, nous considérerons un cas particulier dans lequel la production courante est supposée exogène. Faire cette hypothèse revient à supposer qu'il existe un délai dans le processus de production. Nous retrouvons ainsi une théorie du producteur très semblable à celle de Malinvaud (voir section 3.1). Dans un second temps, nous étudierons le cas plus général correspondant à la théorie du producteur de la section 3.2.

<u>Premier cas</u> : Cas particulier (b_t est exogène)

Dans ce cas particulier, le problème de l'optimum temporaire s'écrit comme suit :

(P4-1) $$\text{Min } v^1(p_t^1, \gamma_t^1, R_t^1, \tilde{p}^1, \tilde{k}^1)$$

$$\text{sujet à} \quad v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \bar{v}^i \qquad (i = 2, \ldots, \ell)$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \sum_{j=1}^{\ell} y_t^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) + W_t$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) + \sum_{j=1}^{\ell} f_{t+1}^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) = 0$$

Nous cherchons ainsi la caractérisation optimale pour les prix courants à la consommation p_t^i et γ_t^i, les revenus courants des consommateurs R_t^i, les prix d'achat courants à la production r_t^j et δ_t^j et les richesses courantes des producteurs Q_t^j. Autrement dit, nous cherchons à savoir quelles sont celles, parmi toutes ces valeurs qui satisfont aux équations de conservation, qui nous permettront de réaliser l'optimum temporaire tout en supposant que la production courante est exogène. Les b_t^j ayant été fixés de façon exogène, nous ne chercherons pas à caractériser les q_t^j optimales. De même, nous n'avons pas pour l'instant à trouver la caractérisation optimale des valeurs anticipées puisque nous les avons supposées exogènes.

Il s'agit donc de minimiser le lagrangien :

$$\text{Min } \pounds(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, e_t^1, \ldots, e_t^\ell, r_t^1, \ldots, r_t^{\ell'},$$
$$\delta_t^1, \ldots, \delta_t^{\ell'}, Q_t^1, \ldots, Q_t^{\ell'}, \lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i \, v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i)$$

$$- \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \sum_{j=1}^{\ell'} y_t^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j)\right]$$

$$- \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) + \sum_{j=1}^{\ell'} f_{t+1}^j(r_t^j, \delta_j^t, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j)\right]$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont[1] :

[1]Nous ne répéterons pas les dérivées par rapport aux variables concernant les consommateurs, c'est-à-dire p_t^i, γ_t^i, R_t^i et e_t^i. Ces dérivées sont identiques à celles obtenues à la section 2.2 (voir équations (2.2.6) à (2.2.9)).

$$(4.2.3) \quad \pounds_{r_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial r_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial r_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.2.4) \quad \pounds_{\delta_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial \delta_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \delta_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.2.5) \quad \pounds_{Q_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial Q_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

en plus des dérivées par rapport à chacun des multiplicateurs du problème ($\lambda^2, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t$ et ϕ_t).

Considérons $\pounds_{r_t^j} + (\pounds_{Q_t^j} \times a_t^{j'})$, c'est-à-dire l'opération qui consiste à additionner chacune des équations (4.2.3) à l'équation (4.2.5) correspondante (chacune des équations (4.2.5) ayant déjà été postmultipliée par le vecteur $a_t^{j'}$ adéquat). Ces opérations nous permettent d'obtenir :

$$(4.2.6) \quad \pi_t'[\partial y_t^j/\partial r_t^j + \partial y_t^j/\partial Q_t^j \; a_t^{j'}] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial r_t^j + \partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j \; a_t^{j'}] = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Des opérations semblables utilisant les équations (4.2.4) et (4.2.5) nous conduisent à

$$(4.2.7) \quad \pi_t'[\partial y_t^j/\partial \delta_t^j + \partial y_t^j/\partial Q_t^j \; f_{t+1}^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \delta_t^j + \partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j \; f_{t+1}^j] = 0$$

$$j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

En tenant compte du fait que b_t est exogène et que $y_t = b_t - a_t$ (ce qui implique $dy_t = -da_t$), les équations (4.2.6) et (4.2.7) s'écrivent sous forme matricielle :

$$(4.2.8) \qquad [\pi_t' \quad \phi_t] \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial a_t^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial a_t^j}{\partial Q_t^j} a_t^{j'}\right] & \left[\dfrac{\partial a_t^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial a_t^j}{\partial Q_t^j} f_{t+1}^j\right] \\ \left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j} a_t^{j'}\right] & \left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j} f_{t+1}^j\right] \end{bmatrix} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

ou bien

$$[\pi_t' \quad \phi_t]\, \check{A}_t^j = 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

où $\check{A}_t^j$ est une matrice d'effets de substitution concernant uniquement les demandes courantes de facteurs. L'équation (4.2.8) et les propriétés des matrices $\check{A}_t^j$:

i) $\check{A}_t^j \check{r}_t^j \equiv 0$ avec $\check{r}^{j'} = [r_t^{j'} \quad \delta_t^j]$;

ii) $\check{r}_t^j$ est le seul vecteur appartenant au noyau de $\check{A}_t^j$;

vont nous permettre de déduire :

$$(4.2.9) \qquad \begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \end{bmatrix} = \theta^j \begin{bmatrix} r_t^j \\ \delta_t^j \end{bmatrix} \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell';\ \theta^j \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$(4.2.10) \qquad \frac{r_t^j}{w' r_t^j} = \frac{r_t^{j+1}}{w' r_t^{j+1}}$$

$$(4.2.11) \qquad \frac{\delta_t^j}{w' r_t^j} = \frac{\delta_t^{j+1}}{w' r_t^j}$$

Examinons ces conditions de plus près. Tout comme dans le cas du problème (P2-1) (l'optimum temporaire dans une économie d'échanges), la première condition ne cause aucune surprise puisqu'elle correspond au résultat usuel : les systèmes de prix sur les marchés des facteurs physiques courants doivent être proportionnels d'un producteur à l'autre (ou les prix relatifs doivent être égaux). Par contre, la seconde condition, la proportionnalité des facteurs d'escompte nominaux (par le même facteur que pour les prix des inputs physiques) ne peut que surprendre pour les mêmes raisons que celles évoquées à la section 2.2. Néanmoins, en remarquant (comme nous l'avions fait alors) que l'optimum temporaire (P4-1) se caractérise également par les conditions :

$$(4.2.10) \qquad \frac{r_t^j}{w'r_t^j} = \frac{r_t^{j+1}}{w'r_t^{j+1}} \qquad j,\ j+1 = 1,\ 2,\ \ldots,\ \ell'$$

$$(4.2.12) \qquad \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{w}'\tilde{r}^j - \tilde{w}'\tilde{r}^{j+1}] = \frac{\tilde{w}'\tilde{r}^j}{w'r_t^j}\,\delta_t^j - \frac{\tilde{w}'\tilde{r}^{j+1}}{w'r_t^{j+1}}\,\delta_t^{j+1}$$

et en imposant aux niveaux de prix futurs d'être égaux pour tous les producteurs ($\tilde{w}'\tilde{r}^j = \tilde{w}'\tilde{r}$ pour $j = 1, 2, \ldots, \ell'$), nous retrouvons un résultat moins contraignant, soit l'égalité des facteurs d'escompte réels.

Nous devons maintenant comparer ces résultats avec ceux obtenus pour le secteur de la consommation,

$$(4.2.13) \qquad \begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \end{bmatrix} = \theta^i \begin{bmatrix} p_t^i \\ \gamma_t^i \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{p_t^{i+1}}{w'p_t^{i+1}} \tag{4.2.14}$$

$$\frac{\phi_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{w}'\tilde{p}^i - \tilde{w}'\tilde{p}^{i+1}] = [\gamma_t^{*i} - \gamma_t^{*i+1}] \tag{4.2.15}$$

En comparant les équations (4.2.13) et (4.2.9), nous pouvons tirer :

$$\pi_t = \theta^i\ p_t^i$$

$$\pi_t = \theta^j\ r_t^j$$

ce qui implique

$$\theta^i\ p_t^i = \theta^j\ r_t^j \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell' \tag{4.2.16}$$

Or, il est facile de montrer qu'à l'optimum, les facteurs θ^i (i = 1, 2, ..., ℓ) prennent les valeurs suivantes :

$$\theta^i = \frac{w'\pi_t}{w'p_t^i}$$

En effet,

$$\pi_t = \theta^i\ p_t^i$$

$$\Rightarrow\quad w'\pi_t = \theta^i\ w'p_t^i \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\Rightarrow\quad \theta^i = \frac{w'\pi_t}{w'p_t^i}$$

De la même façon, nous avons

$$\theta^j = \frac{w'\pi_t}{w'r_t^j} \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

En tenant compte des valeurs de θ^i et θ^j, les équations (4.2.16) deviennent

$$(4.2.17) \qquad \frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{r_t^j}{w'r_t^j} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Ce qui signifie qu'à l'optimum, les prix à la consommation doivent être proportionnels d'un consommateur à l'autre, les prix des inputs physiques doivent être proportionnels d'un producteur à l'autre et, de plus, ces différents systèmes de prix doivent être proportionnels entre eux.

Par un procédé analogue, nous pouvons montrer que

$$(4.2.18) \qquad \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{w}'\tilde{p}^i - \tilde{w}'\tilde{r}^j] = [\gamma_j^{*i} - \delta_t^{*j}] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

ce qui, de façon triviale, se traduit par : la différence entre les facteurs d'escompte réels qui s'appliquent aux consommateurs et ceux qui s'appliquent aux producteurs doit être proportionnelle à la différence entre les niveaux de prix futurs anticipés par les consommateurs $\tilde{w}'\tilde{p}^i$ et ceux anticipés par les producteurs $\tilde{w}'\tilde{r}^j$. Il n'est pas aisé, du moins intuitivement, d'interpréter cette condition sous sa forme actuelle. Toutefois, il est clair que dans le cas où les agents anticiperaient tous les mêmes niveaux de prix futurs[1], la condition deviendrait que

[1]Ou plus simplement, le même prix futur pour un seul bien désigné comme numéraire.

les facteurs d'escompte réels soient égaux pour tous les agents, ce qui constitue une meilleure indication (ou, du moins, plus précise) pour le planificateur qui chercherait les moyens pour réaliser cet optimum. Nous allons résumer ce qui vient d'être dit dans la proposition 1.

PROPOSITION 1 : Dans le cas où la production courante s'effectue avec un délai de production, l'optimum temporaire se caractérise 1) par des prix courants proportionnels d'un individu à l'autre; 2) par des facteurs d'escompte réels dont la différence d'un secteur à l'autre doit être proportionnelle à la différence entre les niveaux de prix futurs relatifs à ces secteurs.

De plus, si nous imposons aux niveaux de prix futurs d'être les mêmes pour tous les agents, la condition 2) se ramène à l'égalité des facteurs d'escompte réels.

Deuxième cas : Cas général (b_t n'est plus exogène)

Le problème de l'optimum dans ce cas-ci est identique au problème (P4-1) sauf qu'en plus de chercher à caractériser les mêmes valeurs qui étaient mises en cause dans ce problème (p_t^i, γ_t^i, R_t^i, e_t^i, r_t^j, δ_t^j, Q_t^j), nous étudions ici les conditions optimales qui caractérisent les prix de vente courants à la production (prix des outputs) q_t^j. Il s'agit donc essentiellement de reprendre le problème (P4-1) en dérivant en plus par rapport aux variables q_t^j et en laissant tomber, évidemment, l'hypothèse des b_t^j exogènes. Ceci revient à minimiser le lagrangien suivant :

$$(\text{P4-2}) \quad \text{Min } \mathcal{L}(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, e_t^1, \ldots, e_t^\ell,$$

$$r_t^1, \ldots, r_t^{\ell'}, \delta_t^1, \ldots, \delta_t^{\ell'}, q_t^1, \ldots, q_t^{\ell'}, Q_t^1, \ldots, Q_t^{\ell'},$$

$$\lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t)$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i)$$

$$- \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \sum_{j=1}^{\ell'} y_t^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) \right]$$

$$- \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) + \sum_{j=1}^{\ell'} f_{t+1}(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) \right]$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont les équations (4.2.3) à (4.2.5) auxquelles viennent s'ajouter les dérivées du lagrangien par rapport à q_t^j [1]

$$(4.2.19) \quad \mathcal{L}_{q_t^j} : -\pi_t' [-\partial y_t^j/\partial q_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial q_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Après quelques transformations simples, les équations (4.2.3) à (4.2.5) et (4.2.19) se ramènent à l'équation matricielle

$$(4.2.20) \qquad [\pi_t' \quad \phi_t] \, \hat{\hat{Y}}_t^j = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

où

---

[1] Il y a aussi, bien sûr, les dérivées par rapport aux variables p_t^i, γ_t^i, R_t^i, e_t^i (les équations (2.2.6) à (2.2.9)) ainsi que les dérivées par rapport à chacun des multiplicateurs.

$$\hat{\hat{Y}}_t^j = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial y_t^j}{\partial Q_t^j}\, a_t^{j\,'}\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial y_t^j}{\partial Q_t^j}\, f_{t+1}^j\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial q_t^j}\right] \\ -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j}\, a_t^{j\,'}\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j}\, f_{t+1}^j\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial q_t^j}\right] \end{bmatrix}$$

est la matrice des effets de substitution temporaire exprimée en termes des offres nettes courantes. Nous ne connaissons pas les propriétés de la matrice $\hat{\hat{Y}}_t^j$. Par contre, nous pouvons facilement l'obtenir à partir de la matrice $\hat{A}_t^j$ dont nous connaissons les propriétés. En effet,

$$\hat{\hat{Y}}_t^j = \hat{\Phi}'\, \hat{A}_t^j\, \hat{P}_t^{-1} \tag{4.2.21}$$

avec

$$\hat{\Phi}' = \begin{bmatrix} -I_{n_1} & 0 & I_{n_1} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_t^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/\mu\, I_{n_1} \end{bmatrix}$$

En tenant compte de (4.2.21), l'équation matricielle (4.2.20) devient

$$[\pi_t' \quad \phi_t]^{*}\hat{\Phi}'\, \hat{A}_t^j\, \hat{P}_t^{-1} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

ou

$$(4.2.22) \qquad [-\pi_t' \quad -\phi_t \quad \pi_t'] \, \hat{A}_t^j = 0$$

Or, par la théorie du producteur dans un cadre temporaire (voir section 3.3), nous savons que

i) $\hat{r}_t^{j'} \hat{A}_t^j \equiv 0$ avec $\hat{r}_t^{j'} = [r_t^{j'} \quad \delta_t^j \quad 0]$ $j = 1, 2, \ldots, \ell'$

ii) $\hat{r}_t^j$ est le seul vecteur appartenant au noyau de $\hat{A}_t^j$.

Ces propriétés, jointes aux équations (4.2.22) vont nous permettre de déduire

$$(4.2.23) \qquad \begin{bmatrix} -\pi_t \\ -\phi_t \\ \pi_t \end{bmatrix} = \theta^j \begin{bmatrix} r_t^j \\ \delta_t^j \\ 0 \end{bmatrix} \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Ces conditions impliquent entre autres

$$-\pi_t = \theta^j \, r_t^j$$

$$\pi_t = 0$$

Ainsi, dans la mesure où au moins un prix du vecteur r_t^j est non nul (ce qu'on peut obtenir par normalisation), le facteur θ^j sera toujours nul. Ceci entraîne que ϕ_t est également nul. De plus, en considérant des dérivées du lagrangien qui font intervenir les multiplicateurs λ^i,

$$\mathcal{L}_{p_t^i} : \lambda^i \, v^i_{p_t^i} - \pi_t'[\partial x_t^i / \partial p_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i / \partial p_t^i] = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

nous pouvons conclure que $\lambda^i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$, les $v^i_{p^i_t}$ étant $\neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ par hypothèse. Or, ceci contredit nos hypothèses de départ puisque nous avions posé $\lambda^1 = 1$. Bref, il y a quelque chose qui ne va pas et cela pourraît être, par exemple, notre façon de poser le problème. Toutefois, nous ne chercherons pas à expliquer en détail les causes de cette faille, du moins pas d'un point de vue mathématique. Nous avancerons plutôt un raisonnement économique pour tenter d'expliquer ce qui se passe intuitivement. Afin de simplifier les choses le plus possible, nous laisserons tomber l'indice j dans ce raisonnement.

Dans le cas où les prix courants des outputs q_t sont fixés et que les anticipations des agents sont fixées (ce qui est le cas présent car nous les avons supposées exogènes), une baisse homogène des prix courants des facteurs r_t et δ_t et des revenus courants des producteurs Q_t, aussi grande soit-elle, n'impliquerait pas de changement dans la demande courante de facteurs physiques a_t ni dans l'offre courante d'output b_t puisque ces fonctions sont homogènes de degré 0 dans ces variables. Toutefois, si cette baisse était accompagnée d'une hausse des prix courants des outputs q_t, ces changements pourraient avoir des répercussions sur les offres et les demandes (ces fonctions n'étant pas homogènes de degré 0 par rapport à la variable q_t). On peut penser que les producteurs seraient incités à augmenter leur production courante (b_t) étant donné la hausse des prix courants des outputs et aussi, étant donné la baisse des prix présents des facteurs. En effet, cette baisse aurait pour conséquence de rendre les prix courants des inputs plus avantageux que leurs prix futurs[1]. A la limite, on pourrait même imaginer que les producteurs chercheraient à se procurer des ressources futures dans le but de produire aujourd'hui (ce qui n'est pas "formellement" impossible, vu les hypothèses sur notre fonction de production $g(-a_t, -\tilde{a}; b_t, \tilde{b})$). Tout cela mis ensemble pourrait faire en sorte que b_t devienne très grand, sinon l'infini. Remarquons que ce raisonnement ne pourrait évidemment pas tenir si b_t était fixé de façon exogène. Ceci explique peut-être pourquoi nous n'avons pas rencontré de contradiction dans ce cas particulier.

A notre avis, ce qu'il faut surtout retenir de tout cela, c'est qu'il faut être excessivement prudent lorsqu'on traite du problème de l'optimum temporaire dans le cadre d'une économie avec production si on pose les anticipations comme exogènes. On peut le faire sans problème (nous l'avons vu dans le cas particulier où b_t est exogène). Toutefois, considérer simultanément la variable q_t endogène (ce qui est le cas lorsque b_t est endogène) et les anticipations exogènes, semble causer certains problèmes. Comme nous ne pouvons borner la variable b_t directement puisque nous travaillons dans l'espace dual, une solution à envisager serait peut-être de borner la variable q_t[2]. Tel que mentionné plus haut, tout ceci reste évidemment très intuitif et ne représente qu'une ébauche de solution.

---

[1]Cette variation relative des prix courants par rapport aux prix futurs anticipés donnant lieu à un effet de substitution intertemporel (pour plus de détails sur ce concept, voir Grandmont (17)). Ainsi, le producteur devancerait ses achats d'inputs et sa production à la période courante.

[2]Par exemple, en rajoutant une contrainte du type $\underline{q}_t \leq q_t \leq \overline{q}_t$.

4.3. L'optimum temporaire avec production et les anticipations

Bien que nous ayons retenu l'hypothèse des anticipations exogènes tant au niveau du comportement individuel du consommateur que du producteur, nous supposerons maintenant que ces anticipations sont endogènes au niveau de la société. Nous allons donc nous interroger à savoir quelle serait la caractérisation optimale des anticipations au niveau de l'optimum. Comme nous l'avons fait à la section 2.4, nous supposerons qu'a priori les anticipations sont différentes d'un agent à l'autre et qu'elles incorporent un minimum de rationalité. Nous retiendrons ici une hypothèse "affaiblie" d'anticipations rationnelles qui se traduira par le respect de la contrainte suivante :

$$\text{(4.3.1)} \quad \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{t}'\tilde{x}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \sum_{j=1}^{\ell'} \tilde{t}'\tilde{y}^j(r_t^i, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) + \tilde{t}'\tilde{W}$$

L'hypothèse "affaiblie" des anticipations rationnelles revient au fait que les demandes et les offres nettes planifiées des divers agents doivent respecter une certaine cohérence des marchés futurs. Autrement dit, une forme d'anticipations rationnelles, dans notre cas, serait celle qui proviendrait de l'explicitation de l'équation (4.3.1). Pour trouver la caractérisation optimale des anticipations, il s'agit de reprendre le problème (P4-1) en considérant un troisième type de contrainte donnée par l'équation (4.3.1) et en dérivant par rapport aux variables anticipées $\tilde{p}^i$ et $\tilde{k}^i$ pour les consommateurs et $\tilde{r}^j$, $\tilde{q}^j$ et $\tilde{\alpha}^j$ pour les producteurs. Ceci nous conduit à la résolution du lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}
\text{(P4-3)} \quad & \text{Min } \pounds^*(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, e_t^1, \ldots, e_t^\ell, \\
& \tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^\ell, \tilde{k}^1, \ldots, \tilde{k}^\ell, r_t^1, \ldots, r_t^{\ell'}, \delta_t^1, \ldots, \delta_t^{\ell'}, \\
& q_t^1, \ldots, q_t^{\ell'}, \tilde{r}^1, \ldots, \tilde{r}^{\ell'}, \tilde{q}^1, \ldots, \tilde{q}^{\ell'}, Q_t^1, \ldots, Q_t^{\ell'}, \\
& \tilde{\alpha}^1, \ldots, \tilde{\alpha}^{\ell'}, \lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t, \psi) \\
= & \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) \\
& - \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \sum_{j=1}^{\ell'} y_t^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) - W_t \right] \\
& - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) + \sum_{j=1}^{\ell'} f_{t+1}^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) \right] \\
& - \psi \left[\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{t}'\tilde{x}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) - \sum_{j=1}^{\ell'} \tilde{t}'\tilde{y}^j(r_t^j, \delta_t^j, q_t^j, \tilde{r}^j, \tilde{q}^j, Q_t^j, \tilde{\alpha}^j) - \tilde{W} \right]
\end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont[1] :

---

[1]Nous ne répéterons pas les conditions concernant les variables qui se rapportent aux consommateurs, p_t^i, γ_t^i, R_t^i, e_t^i, $\tilde{p}^i$ et $\tilde{k}^i$. Ces conditions sont identiques à celles obtenues à la section 2.4 (voir les équations (2.4.2) à (2.4.7).

$$(4.3.2)\quad \pounds^*_{r_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial r_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial r_t^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial r_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.3)\quad \pounds^*_{\delta_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial \delta_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \delta_t^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial \delta_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.4)\quad \pounds^*_{q_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial q_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial q_t^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial q_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.5)\quad \pounds^*_{\tilde{r}^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial \tilde{r}^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \tilde{r}^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial \tilde{r}^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.6)\quad \pounds_{\tilde{q}^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial \tilde{q}^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \tilde{q}^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial \tilde{q}^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.7)\quad \pounds^*_{Q_t^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial Q_t^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial Q_t^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.8)\quad \pounds^*_{\tilde{\alpha}^j} : -\pi_t'[-\partial y_t^j/\partial \tilde{\alpha}_j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \tilde{\alpha}^j] - \psi\,\tilde{t}'[-\partial\tilde{y}^j/\partial \tilde{\alpha}^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

en plus des dérivées par rapport aux multiplicateurs du problème.

Considérons $\pounds^*_{r_t^j} + (\pounds^*_{Q_t^j} \times a_t^{j'})$, l'opération qui consiste à additionner chacune des équations (4.3.2) à l'équation (4.3.7) correspondante (les équations (4.3.7) ayant d'abord été multipliées par le vecteur $a_t^{j'}$ adéquat). Ceci nous donne

$$(4.3.9)\quad \pi_t'[\partial y_t^j/\partial r_t^j + \partial y_t^j/\partial Q_t^j\ a_t^{j'}] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial r_t^j + \partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j\ a_t^{j'}]$$
$$+ \psi\,\tilde{t}'[\partial\tilde{y}^j/\partial r_t^j + \partial\tilde{y}^j/\partial Q_t^j\ a_t^{j'}] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Des opérations semblables qui, d'une part, se servent des équations (4.3.3) et (4.3.7) et, d'autre part, utilisent les équations (4.3.5) et (4.3.8), nous permettent d'obtenir

$$(4.3.10)\quad \pi_t'[\partial y_t^j/\partial \delta_t^j + \partial y_t^j/\partial Q_t^j \; f_{t+1}^j] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \delta_t^j + \partial f_{t+1}^j/\partial Q_t^j \; f_{t+1}^j]$$

$$+ \psi\,\tilde{t}'[\partial \tilde{y}^j/\partial \delta_t^j + \partial \tilde{y}^j/\partial Q_t^j \; f_{t+1}^j] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.11)\quad \pi_t'[\partial y_t^j/\partial \tilde{r}^j + \partial y_t^j/\partial \tilde{\alpha}^j \; \tilde{a}^{j\prime}] - \phi_t[\partial f_{t+1}^j/\partial \tilde{r}^j + \partial f_{t+1}^j/\partial \tilde{\alpha}^j \; \tilde{a}^{j\prime}]$$

$$+ \psi\,\tilde{t}'[\partial \tilde{y}^j/\partial \tilde{r}^j + \partial \tilde{y}^j/\partial \tilde{\alpha}^j \; \tilde{a}^{j\prime}] = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Les équations (4.3.9), (4.3.10), (4.3.4), (4.3.11) et (4.3.6) s'écrivent sous forme matricielle

$$(4.3.12)\qquad [\pi_t' \quad \phi_t \quad \psi\,\tilde{t}'] \; Y_t^{**j} = 0 \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

où

$$Y_t^{**j} = \begin{bmatrix}
\left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial y_t^j}{\partial Q_t^j} a_t^{j\prime}\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial y_t^j}{\partial Q_t^j} f_{t+1}^j\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial q_t^j}\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial \tilde{r}^j} + \dfrac{\partial y_t^j}{\partial \tilde{\alpha}^j} \tilde{a}^{j\prime}\right] & \left[\dfrac{\partial y_t^j}{\partial \tilde{q}^j}\right] \\[2ex]
-\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j} a_t^{j\prime}\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial Q_t^j} f_{t+1}^j\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial q_t^j}\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \tilde{r}^j} + \dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \tilde{\alpha}^j} \tilde{a}^{j\prime}\right] & -\left[\dfrac{\partial f_{t+1}^j}{\partial \tilde{q}^j}\right] \\[2ex]
\left[\dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial r_t^j} + \dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial Q_t^j} a_t^{j\prime}\right] & \left[\dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \delta_t^j} + \dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial Q_t^j} f_{t+1}^j\right] & \left[\dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial q_t^j}\right] & \left[\dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \tilde{r}^j} + \dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \tilde{\alpha}^j} \tilde{a}^{j\prime}\right] & \left[\dfrac{\partial \tilde{y}^j}{\partial \tilde{q}^j}\right]
\end{bmatrix}$$

représente la matrice des effets de substitution complète exprimée en termes des offres nettes courantes et futures.

L'équation (4.3.12) en tant que telle ne nous permet de déduire aucun résultat puisque nous ne connaissons ni le rang des matrices Y_t^{**j} ni les vecteurs qui constituent leurs noyaux. Toutefois, la section 3.3 nous a renseignés sur les propriétés des matrices A_t^{*j}. Or, la matrice Y_t^{**j} s'obtient facilement en appliquant quelques transformations linéaires simples à la matrice A_t^{*j}. Ainsi,

$$Y_t^{**j} = \Phi' \; A_t^{*j} \; P_t^{-1} \tag{4.3.13}$$

où

$$\Phi' = \begin{bmatrix} -I_{n_1} & 0 & I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{n_2} & I_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$P_t^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_t I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu} I_{n_2} \end{bmatrix}$$

Tenant compte de cela, l'équation matricielle (4.3.12) devient

$$[\pi_t' \quad \phi_t \quad \psi \tilde{t}'] \, \Phi' \, A_t^{*j} \, P_t^{-1} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

c'est-à-dire

$$(4.3.14) \qquad [-\pi_t' \quad -\phi_t \quad \pi_t' \quad -\psi \tilde{t}' \quad \psi \tilde{t}'] \, A_t^{*j} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Par la théorie du producteur dans un cadre temporaire, nous savons que la matrice A_t^{*j} jouit, en particulier, des propriétés suivantes :

i) $r_t^{*j'} \, A^{*j}_t \equiv 0$ avec $r_t^{*j'} = [r_t^{j'} \quad \delta_t^j \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

ii) $\tilde{r}^{*j'} \, A_t^{*j} \equiv 0$ avec $\tilde{r}^{*j'} = [0 \quad -1 \quad 0 \quad \tilde{r}^{j'} \quad 0]$

iii) $\tilde{q}^{*j'} \, A_t^{*j} \equiv 0$ avec $\tilde{q}^{*j'} = \left[-\dfrac{\mu^j r_t^{j'}}{\lambda^j} \quad 0 \quad \dfrac{q_t^{j'}}{\lambda^j} \quad -\dfrac{\mu^j \delta_t^j \tilde{r}^{j'}}{\lambda^j} \quad \dfrac{\tilde{q}^{j'}}{\lambda^j}\right]$

iv) r_t^{*j}, $\tilde{r}^{*j}$ et $\tilde{q}^{*j}$ sont les trois seuls vecteurs linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de A_t^{*j}.

Les équations (4.3.14) jointes à ces propriétés nous conduisent aux résultats suivants :

$$(4.3.15) \quad \begin{bmatrix} -\pi_t \\ -\phi_t \\ \pi_t \\ -\psi\tilde{t} \\ \psi\tilde{t} \end{bmatrix} = \theta_1^j \begin{bmatrix} r_t^j \\ \delta_t^j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2^j \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \tilde{r}^j \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_3^j \begin{bmatrix} -\dfrac{\mu^j r_t^j}{\lambda^j} \\ 0 \\ \dfrac{q_t^j}{\lambda^j} \\ -\dfrac{\mu^j \delta_t^j \tilde{r}^j}{\lambda^j} \\ \dfrac{\tilde{q}^j}{\lambda^j} \end{bmatrix}^{1} \qquad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, \ell'; \\ \theta_1^j,\ \theta_2^j \text{ et } \theta_3^j \in \mathbb{R} \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{ll}
(4.3.16) & \dfrac{r_t^j}{w' r_t^j} = \dfrac{r_t^{j+1}}{w' r_t^{j+1}} \\[2ex]
(4.3.17) & \dfrac{\phi_t}{w'\pi_t} [\tilde{w}'\tilde{r}^j - \tilde{w}'\tilde{r}^{j+1}] = [\delta_t^{*j} - \delta_t^{*j+1}] \\[2ex]
(4.3.18) & \dfrac{q_t^j}{w' q_t^j} = \dfrac{q_t^{j+1}}{w' q_t^{j+1}} \\[2ex]
(4.3.19) & \dfrac{\tilde{r}^j}{\tilde{w}'\tilde{r}^j} = \dfrac{\tilde{r}^{j+1}}{\tilde{w}'\tilde{r}^{j+1}} \\[2ex]
(4.3.20) & \dfrac{\tilde{q}^j}{\tilde{w}'\tilde{q}^j} = \dfrac{\tilde{q}^{j+1}}{\tilde{w}'\tilde{q}^{j+1}}
\end{array}\right\} \quad j,\ j+1 = 1, 2, \ldots, \ell'$$

---

[1]Dans ces équations, λ^j et μ^j représentent respectivement les multiplicateurs associés à la contrainte de production et à la contrainte financière courante dans le problème du producteur j.

Examinons la signification de ces conditions. Premièrement, les prix courants aussi bien des inputs physiques que des outputs doivent être proportionnels d'un producteur à l'autre, une condition qui ne surprend guère puisqu'elle correspond au résultat usuel. Deuxièmement, d'une façon un peu moins évidente, on s'aperçoit que la même conclusion tient également pour les prix futurs anticipés de ces biens (les facteurs de proportionnalité étant différents de ceux qui s'appliquent aux prix courants). Troisièmement, dans sa forme actuelle, l'interprétation triviale de la condition portant sur les facteurs d'escompte réels est que la différence entre ces facteurs doit être proportionnelle à la différence entre les niveaux de prix futurs des facteurs physiques. Toutefois, tout comme dans le cas d'une économie d'échanges, nous pouvons ici montrer que l'ajout de la troisième contrainte (4.3.1), en plus de rendre possible la caractérisation optimale des anticipations, implique qu'à l'optimum, le multiplicateur ϕ_t est nul[1]. La condition (4.3.17) devient alors que les facteurs d'escompte réels doivent être égaux pour tous les producteurs.

Il nous reste maintenant à comparer ces résultats (concernant le secteur de la production) avec ceux que nous avons déjà obtenus pour le secteur de la consommation. Avant de le faire, rappelons d'abord ces résultats :

---

[1]La preuve que nous avons présentée à la section 2.4 reste encore valide dans ce cas-ci.

$$(4.3.21) \qquad \begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \\ \psi\tilde{t} \end{bmatrix} = \theta_1^i \begin{bmatrix} p_t^i \\ \gamma_t^i \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2^i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p}^i \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, \ell; \\ \theta_1^i, \theta_2^i \in \mathbb{R} \end{array}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(4.3.22) \qquad \frac{p_t^i}{w' p_t^i} = \frac{p_t^{i+1}}{w' p_t^{i+1}}$$

$$(4.3.23) \qquad \frac{\phi_t}{w' \pi_t} [\tilde{w}' \tilde{p}^i - \tilde{w}' \tilde{p}^{i+1}] = [\gamma_t^{*i} - \gamma_t^{*i+1}] \quad i, i+1 = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(4.3.24) \qquad \frac{\tilde{p}^i}{\tilde{w}' \tilde{p}^i} = \frac{\tilde{p}^{i+1}}{\tilde{w}' \tilde{p}^{i+1}}$$

Comparons les équations (4.3.21) avec les équations (4.3.15). Elles impliquent, entre autres,

$$\pi_t = \theta_1^i \, p_t^i$$

$$-\pi_t = \theta_1^j \, r_t^j - \theta_3^j \, \frac{\mu^j r_t^j}{\lambda^j}$$

$$\pi_t = \theta_3^j \, \frac{q_t^j}{\lambda^j}$$

c'est-à-dire

$$(4.3.25) \qquad \theta_1^i \, p_t^i = -\theta_1^j \, r_t^j + \theta_3^j \, \frac{\mu^j r_t^j}{\lambda^j} = \theta_3^j \, \frac{q_t^j}{\lambda^j} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell; \; j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Or, il est facile de montrer qu'à l'optimum, les facteurs θ_1^i (i = 1, 2, ..., ℓ), θ_2^j et θ_3^j (j = 1, 2, ..., ℓ') prennent les valeurs suivantes[1] :

$$\theta_1^i = \frac{w'\pi_t}{w'p_t^i}$$

$$\theta_2^j = -\frac{w'\pi_t}{w'r_t^j} + \mu^j \frac{w'\pi_t}{w'q_t^j}$$

$$\theta_3^j = \lambda^j \frac{w'\pi_t}{w'q_t^j}$$

En remplaçant ces valeurs dans les équations (4.3.25), nous trouvons

$$(4.3.26) \qquad \frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{r_t^j}{w'r_t^j} = \frac{q_t^j}{w'q_t^j} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

Ainsi, à l'optimum, les prix à la consommation doivent être proportionnels aux prix à la production et ce, tant pour les prix d'achat r_t^j que pour les prix de vente q_t^j.

En utilisant la même méthode, nous pouvons dériver les conditions suivantes :

$$(4.3.27) \qquad \frac{\tilde{p}^i}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \frac{\tilde{r}^j}{\tilde{w}'\tilde{r}^j} = \frac{\tilde{q}^j}{\tilde{w}'\tilde{r}^j} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

$$(4.3.28) \qquad \frac{\phi_t}{w'\pi_t}[\tilde{w}'\tilde{p}^i - \tilde{w}'\tilde{r}^j] = [\gamma_t^{*i} - \delta_t^{*j}]$$

[1]Dans le cas de θ_1^i, ceci a déjà été montré à la section 4.2.

Les équations (4.3.27) sont identiques aux conditions (4.3.26) sauf qu'elles concernent les prix futurs. Non seulement les anticipations des producteurs quant aux prix futurs des inputs physiques doivent être proportionnelles à leurs anticipations pour les prix futurs des outputs mais, de plus, elles doivent correspondre à un facteur de proportionnalité près, aux anticipations des consommateurs sur les prix des biens. Les équations (4.3.28) concernent les facteurs d'escompte réels : la différence entre les facteurs d'escompte réels qui s'appliquent aux consommateurs et ceux utilisés par les producteurs est proportionnelle à la différence entre les niveaux de prix futurs anticipés par les consommateurs et ceux anticipés par les producteurs. Mais, encore une fois, en tenant compte du fait que le multiplicateur ϕ_t est nul à l'optimum, cette condition se traduit finalement par l'égalité des facteurs d'escompte réels pour tous les consommateurs et tous les producteurs. Nous allons résumer la discussion précédente dans la proposition 2.

PROPOSITION 2 : Sous une hypothèse "affaiblie" d'anticipations rationnelles, l'optimum temporaire se caractérise 1) par des prix courants proportionnels d'un individu à l'autre; 2) par des anticipations proportionnelles quant aux vecteurs de prix futurs; 3) par des facteurs d'escompte réels égaux pour tous les agents.

Formellement,

$$(4.3.29) \qquad \frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{r_t^j}{w'r_t^j} = \frac{q_t^j}{w'q_t^j}$$

(4.3.30) $$\frac{\tilde{p}^i}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \frac{\tilde{r}^j}{\tilde{w}'\tilde{r}^j} = \frac{\tilde{q}^j}{\tilde{w}'\tilde{q}^j} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell;\ j = 1, 2, \ldots, \ell'$$

(4.3.31) $$\gamma_t^{*i} = \delta_t^{*j}$$

Nous avons laissé tomber dans ce chapitre la section du chapitre 1 qui traitait des liens entre l'optimum temporaire et l'optimum intertemporel. Notre dernière remarque portera sur ce point. Nous savons que l'optimum intertemporel avec production se caractérise par des prix à la consommation proportionnels aux prix à la production, par des facteurs d'escompte réels égaux et ce, pour toutes les périodes t et pour tous les agents. Or, en examinant la proposition 2, on s'aperçoit que toutes ces exigences sont remplies. C'est donc dire qu'une suite d'optimums temporaires paramétrés sur des anticipations rationnelles "affaiblies" pourrait permettre la réalisation d'un optimum intertemporel.

CHAPITRE 3

SECTION 5 : UN MODELE DE SECOND RANG DANS UN CADRE TEMPORAIRE

5.1. Introduction

Que le problème de second rang se pose en termes de tarification optimale des entreprises publiques ou en termes de système de taxation optimale (autre que les taxes neutres généralement admises par le premier rang mais qui constituent une assiette fiscale trop limitée), le problème peut toujours se ramener à rechercher un optimum dans lequel, en plus de considérer les contraintes usuelles physiques ou technologiques, on introduit une ou des contraintes socio-politiques, c'est-à-dire des contraintes qui restreignent a priori la nature des institutions qui pourraient réaliser l'optimum économique[1]. Suivant la spécificité de ces contraintes socio-politiques (certaines portant sur les valeurs, d'autres sur les biens), nous retrouvons les modèles de Diamond et Mirrlees [10], Samuelson [35], Ramsey [34], Hotelling [23] ou Boiteux [4], pour ne nommer que ceux-là.

Or, à notre connaissance, aucun de ces modèles n'a encore été posé dans un cadre temporaire. C'est pourquoi, dans cette section, nous nous proposons de choisir l'un d'eux et de l'étudier dans un cadre temporaire. Pour ce faire, nous avons retenu l'un des plus connus dans la littérature sur le second rang, soit un modèle de type Boiteux. Le modèle de Boiteux a été élaboré pour répondre à la question suivante à savoir (Boiteux [4]) :

---

[1]Pour plus de détails, voir Bronsard [5].

> "Comment doit être infléchie la règle de vente au coût marginal lorsque l'entreprise est soumise par ailleurs à une condition budgétaire incompatible avec cette règle de gestion".

En plus de s'attaquer à un problème fort intéressant, et d'ailleurs toujours actuel, Boiteux innove dans la méthode même qu'il propose pour aborder ce problème. Il s'agit en quelque sorte d'utiliser le critère de Pareto (ce qui mènera à la caractérisation de péages optimaux) lorsque l'on tient compte de certaines contraintes supplémentaires (ici, des conditions d'équilibre budgétaire). Mais puisque les nouvelles contraintes introduites portent sur les valeurs, le problème est posé dans l'espace dual et les quantités consommées ou produites qui apparaissent dans les contraintes physiques habituelles sont remplacées par les fonctions de comportement des divers agents[1]. C'est,en gros, ce même problème que nous reprendrons dans cette section; de petites différences apparaîtront par rapport au modèle original, soit à cause de certaines hypothèses que nous utilisons ou soit à cause de la nature même du cadre temporaire.

[1]Cette technique a été largement utilisée dans les chapitres 1 et 2 de cette thèse.

5.2. Le modèle

Dans ce modèle, nous considérons une économie qui consiste en ℓ consommateurs (indicés par $i = 1, 2, \ldots, \ell$) et en un producteur public. De plus, tout comme pour l'étude des optimums de premier rang, notre problème sera posé dans l'espace dual sauf pour le comportement du producteur public. En effet, l'activité de ce dernier sera représentée par une fonction de production

$$(5.2.1) \qquad g(z_t;\, \tilde{z}) \leq 0 \;[1]$$

où z_t représente le vecteur de production nette courante et $\tilde{z}$ le vecteur de production nette future, de sorte que la maximation portera directement sur ses variables de décisions, soit z_t, $\tilde{z}$ et l'actif financier c_{t+1}.

Examinons maintenant les contraintes qui devront être respectées dans notre modèle. Premièrement, l'économie sera astreinte à réaliser la comptabilité des actions courantes de ses agents. Ceci se traduira, d'une part, par un équilibre sur le marché des biens courants

$$(5.2.2) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t,\, \gamma_t,\, R_t^i,\, \tilde{p},\, \tilde{k}^i) = z_t + W_t$$

c'est-à-dire la somme des demandes pour les biens courants doit être égale à la production nette courante plus le vecteur de ressources initiales et, d'autre part, par la conservation des flux financiers, soit la contrainte

---

[1] La fonction g possède les propriétés usuelles.

$$(5.2.3) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} e^{i}_{t+1}(p_t, \gamma_t, R^{i}_{t}, \tilde{p}, \tilde{k}^{i}) = c_{t+1}$$

Notons que ces équilibres temporaires comportent un seul système de prix (p_t, γ_t). Deuxièmement, l'économie devra respecter la technologie du producteur public représentée par sa fonction de production (5.2.1). Troisièmement, nous aurons une contrainte de type Boiteux, c'est-à-dire lorsqu'on astreint l'économie à réaliser un déficit ou un surplus public. Il existera d'abord une telle contrainte pour la période courante

$$(5.2.4) \qquad p'_t \, z_t + \gamma_t \, c_{t+1} = \theta_t \, \omega'_t \, p_t$$

où θ_t est un multiple de l'unité de compte courante; ce qui signifie que les profits ou pertes courants du producteur public ne doivent pas dépasser un certain montant $(\theta_t \, w'_t \, p_t)$, duquel montant nous devons déduire son achat ou son emprunt d'actif financier. Le secteur public sera également astreint à respecter une contrainte semblable pour le futur

$$(5.2.5) \qquad \tilde{p}'\tilde{z} - c_{t+1} = \tilde{\theta} \, \tilde{\omega}'\tilde{p}$$

où $\tilde{\theta}$ représente un multiple de l'unité de compte future. Il nous reste encore à discuter des anticipations et de l'hypothèse retenue quant à leur formalisation. Nous supposerons qu'elles sont endogènes et conformes à l'hypothèse des anticipations rationnelles. En effet, nous supposerons que les anticipations de prix futurs sont les mêmes pour tous les agents et qu'elles sont bornées par la contrainte

$$(5.2.6) \qquad \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{x}^i(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) = \tilde{z} + \tilde{W}$$

Les prix futurs anticipés respectent ainsi la cohérence des comportements planifiés ou futurs des divers agents, c'est-à-dire l'équilibre des marchés futurs. Quant aux revenus futurs anticipés $\tilde{k}^i$, nous les supposerons exogènes et différenciés d'un individu à l'autre, tout comme pour les revenus courants R_t^i. Finalement, puisque notre problème se pose dans l'espace dual (du moins, pour le comportement des consommateurs), nous travaillerons encore ici avec une fonction d'utilité indirecte

$$(5.2.7) \quad v(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) \equiv u(x_t(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i), \tilde{x}(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i))$$

dont nous pouvons déduire les identités de Roy temporaires et futures[1].

Notre modèle de second rang se ramène donc à l'optimation du lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}
(\text{P5-1}) \quad \text{Min } \pounds(&p_t, \gamma_t, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, \tilde{p}, \tilde{k}^1, \ldots, \tilde{k}^\ell, \lambda^1, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t, \psi, \sigma, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v^i(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) \\
&- \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} x_t^i(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) - z_t\right] \\
&- \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} e_{t+1}^i(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) - c_{t+1}\right] \\
&- \psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{x}^i(p_t, \gamma_t, R_t^i, \tilde{p}, \tilde{k}^i) - \tilde{z}\right] \\
&- \sigma[g(z_t, \tilde{z})] \\
&- \varepsilon_1[p_t' z_t + \gamma_t c_{t+1} - \theta_t \omega_t' p_t] \\
&- \varepsilon_2[\tilde{p}' \tilde{z} - c_{t+1} - \tilde{\theta} \tilde{\omega}' \tilde{p}]
\end{aligned}$$

---
[1]Voir section 2.

En dérivant par rapport à p_t, γ_t, R_t^i, $\tilde{p}$, $\tilde{k}^i$, z_t, c_{t+1} et $\tilde{z}$, on trouve

$$(5.2.8)\quad \pounds_{p_t} : \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v_{p_t}^i - \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial x_t^i/\partial p_t\right] - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial e_{t+1}^i/\partial p_t\right]$$

$$- \psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial \tilde{x}^i/\partial p_t\right] - \varepsilon_1 (z_t - \theta_t\ \omega_t)' = 0$$

$$(5.2.9)\quad \pounds_{\gamma_t} : \sum_{i=1}^{\ell} \lambda^i v_{\gamma_t}^i - \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial x_t^i/\partial \gamma_t\right] - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial e_{t+1}^i/\partial \gamma_t\right]$$

$$- \psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial \tilde{x}^i/\partial \gamma_t\right] - \varepsilon_1\ c_{t+1} = 0$$

$$(5.2.10)\quad \pounds_{R_t^i} : \lambda^i v_{R_t^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial R_t^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i] - \psi'[\partial \tilde{x}^i/\partial R_t^i] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(5.2.11)\quad \pounds_{\tilde{p}} : \lambda^i v_{\tilde{p}}^i - \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial x_t^i/\partial \tilde{p}\right] - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{p}\right]$$

$$- \psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{p}\right] - \varepsilon_2 (\tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega})' = 0$$

$$(5.2.12)\quad \pounds_{\tilde{k}^i} : \lambda^i v_{\tilde{k}^i}^i - \pi_t'[\partial x_t^i/\partial \tilde{k}^i] - \phi_t[\partial e_{t+1}^i/\partial \tilde{k}^i] - \psi'[\partial \tilde{x}^i/\partial \tilde{k}^i] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(5.2.13)\quad \pounds_{z_t} : \pi_t' - \sigma \left[g_{z_t}\right]' - \varepsilon_1\ p_t' = 0$$

(5.2.14) $\mathcal{L}_{c_{t+1}}$: $\phi_t - \varepsilon_1 \gamma_t + \varepsilon_2 = 0$

(5.2.15) $\mathcal{L}_{\tilde{z}}$: $\psi' - \sigma[g_z]' - \varepsilon_2 \tilde{p}' = 0$

Considérons $\mathcal{L}_{p_t} + \sum_{i=1}^{\ell} (\mathcal{L}_{R_t^i} \times x_t^{i'})$, c'est-à-dire l'opération qui consiste à post-multiplier chacune des équations (5.2.10) par le vecteur $x_t^{i'}$ adéquat, à sommer sur l'indice i et à faire la somme avec l'équation (5.2.8). En tenant compte des identités de Roy temporaires (2.2.3), on obtient

$$(5.2.16) \quad -\pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial x_t^i/\partial p_t + \partial x_t^i/\partial R_t^i \; x_t^{i'}) \right] - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial e_{t+1}^i/\partial p_t + \partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i \; x_t^{i'}) \right]$$

$$-\psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial \tilde{x}^i/\partial p_t + \partial \tilde{x}^i/\partial R_t^i \; x_t^{i'}) \right] - \varepsilon_1 (z_t - \theta_t \, \omega_t)' = 0$$

Des opérations semblables utilisant, d'une part, les équations (5.2.9) et (5.2.10) et tenant compte des identités de Roy temporaires (2.2.4) et, d'autre part, se servant des équations (5.2.11) et (5.2.12) et tenant compte des identités de Roy futures (2.2.5), nous donnent

$$(5.2.17) \quad -\pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial x_t^i/\partial \gamma_t + \partial x_t^i/\partial R_t^i \; e_{t+1}^i) \right] - \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial e_{t+1}^i/\partial \gamma_t + \partial e_{t+1}^i/\partial R_t^i \; e_{t+1}^i) \right]$$

$$-\psi' \left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial \tilde{x}^i/\partial \gamma_t + \partial \tilde{x}^i/\partial R_t^i \; e_{t+1}^i) \right] - \varepsilon_1 \, c_{t+1} = 0$$

$$(5.2.18)\quad -\pi_t'\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial x_t^i/\partial\tilde{p} + \partial x_t^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right] - \phi_t\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial e_{t+1}^i/\partial\tilde{p} + \partial e_{t+1}^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right]$$

$$-\psi'\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{p} + \partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right] - \varepsilon_2(\tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega})' = 0$$

En multipliant l'équation (5.2.18) par un scalaire $1/\gamma_t$, nous trouvons

$$(5.2.19)\quad 1/\gamma_t \left\{\pi_t'\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial x_t^i/\partial\tilde{p} + \partial x_t^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right] - \phi_t\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial e_{t+1}^i/\partial\tilde{p} + \partial e_{t+1}^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right]\right.$$

$$\left. - \psi'\left[\sum_{i=1}^{\ell} (\partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{p} + \partial\tilde{x}^i/\partial\tilde{k}^i\ \tilde{x}^{i\,\prime})\right] - \varepsilon_2(\tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega})'\right\} = 0$$

Les équations (5.2.16), (5.2.17) et (5.2.19) s'écrivent sous forme matricielle :

$$(5.2.20)\quad [-\pi_t' \quad -\phi_t \quad -\psi'] \begin{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial x_t^i}{\partial p_t} + \frac{\partial x_t^i}{\partial R_t^i} x_t^{i\,\prime}\right)\right] & \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial x_t^i}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial x_t^i}{\partial R_t^i} e_{t+1}^i\right)\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial x_t^i}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial x_t^i}{\partial \tilde{k}^i} \tilde{x}^{i\,\prime}\right)\right] \\ \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial p_t} + \frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial R_t^i} x_t^{i\,\prime}\right)\right] & \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial R_t^i} e_{t+1}^i\right)\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial e_{t+1}^i}{\partial \tilde{k}^i} \tilde{x}^{i\,\prime}\right)\right] \\ \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial R_t^i} x_t^{i\,\prime}\right)\right] & \left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial R_t^i} e_{t+1}^i\right)\right] & \frac{1}{\gamma_t}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial \tilde{k}^i} \tilde{x}^{i\,\prime}\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$= [\varepsilon_1(z_t - \theta_t\ \omega_t)' \quad \varepsilon_1\ c_{t+1} \quad \frac{1}{\gamma_t}\varepsilon_2(\tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega})']$$

ou, plus simplement

$$(5.2.21)\qquad [-\pi_t' \quad \phi_t \quad -\psi'] \; K_t^* = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2] \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \; \omega_t)' & c_{t+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_t} (\tilde{z} - \tilde{\theta} \; \tilde{\omega})' \end{bmatrix}$$

où K_t^* est la matrice de Slutsky temporaire que nous avons déjà rencontrée à la section (1.2) et dont les propriétés sont

i) $K_t^* \equiv K_t^{*\prime}$

ii) a) $K_t^* \, p_t^* \equiv 0$ avec $p_t^{*\prime} \equiv [p_t' \quad \gamma_t \quad 0]$

b) $K_t^* \, \tilde{p}^* \equiv 0$ avec $\tilde{p}^{*\prime} \equiv [0 \quad -1 \quad \tilde{p}']$

iii) p_t^* et $\tilde{p}^*$ sont les deux seuls vecteurs linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de K_t^*.

Considérons maintenant les équations (5.2.13), (5.2.14) et (5.2.15), soit $\pounds_{z_t}$, $\pounds_{c_{t+1}}$ et $\pounds_{\tilde{z}}$. Sous forme matricielle, elles peuvent s'écrire

$$(5.2.22)\qquad \begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \\ \psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_t & 0 \\ \gamma_t & -1 \\ 0 & \tilde{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} [g_{z_t}] \\ 0 \\ [g_{\tilde{z}}] \end{bmatrix}$$

ou encore

$$(5.2.23)\qquad \begin{bmatrix} \pi_t/\sigma \\ \phi_t/\sigma \\ \psi/\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_t & 0 \\ \gamma_t & -1 \\ 0 & \tilde{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1/\sigma \\ \varepsilon_2/\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{z_t}] \\ 0 \\ [g_{\tilde{z}}] \end{bmatrix}$$

Posons

$$\begin{bmatrix} [g_{z_t}] \\ 0 \\ [g_{\tilde{z}}] \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

où r_t est un vecteur de prix courants et $\tilde{r}$ un vecteur de prix futurs. r_t et $\tilde{r}$ représentent les vecteurs de prix "fictifs" sur la base desquels l'entreprise publique va maximiser son profit. Tenant compte de cette définition, l'équation (5.2.23) devient

$$\begin{bmatrix} \pi_t/\sigma \\ \phi_t/\sigma \\ \psi/\sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_t & 0 \\ \gamma_t & -1 \\ 0 & \tilde{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1/\sigma \\ \varepsilon_2/\sigma \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$(5.2.24)\qquad \begin{bmatrix} \pi_t \\ \phi_t \\ \psi \end{bmatrix} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} + \theta^* \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix}$$

Les conditions de premier ordre du problème (P5-1) (les équations (5.2.8) à (5.2.15)) se ramènent donc aux deux équations matricielles (5.2.21) et (5.2.24). Transposons l'équation (5.2.21) et remplaçons les multiplicateurs par leurs valeurs à l'optimum données par (5.2.24).

Nous obtenons alors

$$K_t^* \left\{ -\varepsilon_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} - \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \theta^* \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \ \omega_t) & 0 \\ c_{t+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_t} (\tilde{z} - \tilde{\theta} \ \tilde{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

ce qui implique

$$K_t^* \left\{ -\theta^* \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \ \omega_t) & 0 \\ c_{t+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_t} (\tilde{z} - \tilde{\theta} \ \tilde{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

puisque $K_t^* \ p_t^* \equiv 0$ et $K_t^* \ \tilde{p}^* \equiv 0$. On peut aussi écrire

$$K_t^* \left\{ - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \ \omega_t) & 0 \\ c_{t+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_t} (\tilde{z} - \tilde{\theta} \ \tilde{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1/\theta^* \\ \varepsilon_2/\theta^* \end{bmatrix}$$

Finalement, nous obtenons la formule suivante :

$$(5.2.25) \qquad K^* \left\{ \theta_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \ \omega_t) & 0 \\ c_{t+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_t} (\tilde{z} - \tilde{\theta} \ \tilde{\omega}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1/\theta^* \\ \varepsilon_2/\theta^* \end{bmatrix}$$

Nous pouvons tester la cohérence de cette formule en la prémultipliant par $p_t^{*\prime} = [p_t' \quad \gamma_t \quad 0]$ et $\tilde{p}^{*\prime} = [0 \quad -1 \quad \tilde{p}']$ (le côté gauche de (5.2.25) ainsi transformé devant donner 0 puisque les propriétés de la matrice K_t^*, $K_t^* \, p_t^* \equiv 0$, $K_t^* \, \tilde{p}^* \equiv 0$ et $K_t^* \equiv K_t^{*\prime}$, impliquent $p_t^{*\prime} \, K_t^* \equiv 0$ et $p^{*\prime} \, K_t^* \equiv 0$). En prémultipliant par $p_t^{*\prime}$, nous trouvons

$$0 = [p_t' \quad \gamma_t \quad 0] \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \, \omega_t) \, \varepsilon_1/\theta^* \\ c_{t+1} \, \varepsilon_1/\theta^* \\ \frac{1}{\gamma_t} \, (\tilde{z} - \tilde{\theta} \, \tilde{\omega}) \, \varepsilon_2/\theta^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = p_t'(z_t - \theta_t \, w_t) \, \varepsilon_1/\theta^* + \gamma_t \, c_{t+1} \, \varepsilon_1/\theta^*$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = p_t'(z_t - \theta_t \, w_t) + \gamma_t \, c_{t+1}$$

Nous retrouvons alors la contrainte financière courante, c'est-à-dire l'équation (5.2.4). Prémultipliée par $\tilde{p}^{*\prime}$, l'équation (5.2.25) devient

$$0 = [0 \quad -1 \quad \tilde{p}'] \begin{bmatrix} (z_t - \theta_t \, \omega_t) \, \varepsilon_1/\theta^* \\ c_{t+1} \, \varepsilon_1/\theta^* \\ \frac{1}{\gamma_t} \, (\tilde{z} - \tilde{\theta} \, \tilde{\omega}) \, \varepsilon_2/\theta^* \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = -c_{t+1} \, \varepsilon_1/\theta^* + \frac{\tilde{p}'}{\gamma_t} \, (\tilde{z} - \tilde{\theta} \, \tilde{\omega}) \, \varepsilon_2/\theta^*$$

$$\Rightarrow \qquad 0 = -c_{t+1} \, \varepsilon_1/\theta^* + \frac{1}{\gamma_t} \, c_{t+1} \, \varepsilon_2/\theta^*$$

en tenant compte de la contrainte financière future (5.2.5). Dans la mesure où c_{t+1} et θ^* sont non nuls (ce qui devrait être le cas), cette dernière équation se ramène à

$$\gamma_t \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \tag{5.2.26}$$

Cette égalité implique qu'à l'optimum, le multiplicateur ϕ_t associé à la contrainte qui assure la conservation des flux financiers est nul. Notons que nous avions déjà obtenu ce résultat en étudiant l'optimum de premier rang (aussi bien dans une économie d'échange que dans une économie avec production).

Revenons maintenant à l'équation (5.2.26). Elle signifie que l'entreprise publique qui doit faire face à deux contraintes financières, l'une courante et l'autre future (qu'elle anticipe), et qui a accès au marché financier, empruntera (épargnera) à l'optimum le montant juste suffisant pour rendre le poids des deux contraintes égal. Ainsi, à l'optimum, la contrainte financière courante n'est pas plus contraignante que la contrainte future. Ce résultat n'est pas surprenant puisqu'il reste fidèle à la pensée de Boiteux. En effet, Boiteux croyait que la meilleure façon de satisfaire aux contraintes financières au moindre coût social, était de répartir sur l'ensemble des marchés, le poids social que ces contraintes représentent (par exemple, par le biais de taxes ou de péages optimaux). Remarquons enfin que, puisque $\gamma_t \varepsilon_1 = \varepsilon_2$, l'équation (5.2.25) devient

$$(5.2.27) \qquad K_t^* \left\{ \theta_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t \, \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta} \, \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

5.3. Interprétation des résultats

Nous examinerons d'abord ce qui se passe lorsque $\varepsilon_1 = 0$ et nous reviendrons ensuite sur l'interprétation de la formule (5.2.25) ou (5.2.27).

Poser $\varepsilon_1 = 0$ revient évidemment à poser également $\varepsilon_2 = 0$ puisque $\gamma_t \, \varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Autrement dit, nous nous intéressons au cas où les contraintes financières ne sont plus contraignantes, c'est-à-dire au cas où le montant des surplus ou des déficits correspond exactement aux montants qu'on obtiendrait dans une situation de premier rang. L'équation (5.2.27) se réduit alors à

$$(5.3.1) \qquad K_t^* \left\{ \theta_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = 0$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$(5.3.2) \qquad \theta_1 \, p_t = r_t$$

$$(5.3.3) \qquad \theta_1 \, \gamma_t - \theta_2 = 0$$

$$(5.3.4) \qquad \theta_2 \, \tilde{p} = \tilde{r}$$

Des équations (5.3.2) à (5.3.4), nous pouvons tirer

$$\theta_1 = \frac{w'r_t}{w'p_t}$$

$$\theta_2 = \frac{w'r}{\tilde{w}'\tilde{p}}$$

Tenant compte de cela, les équations (5.3.2) à (5.3.4) peuvent s'écrire

$$\frac{p_t}{w'p_t} = \frac{r_t}{w'r_t} \tag{5.3.5}$$

$$\frac{\tilde{w}'\tilde{p}}{w'p_t}\gamma_t = \frac{\tilde{w}'\tilde{r}}{w'r_t} \tag{5.3.6}$$

$$\frac{\tilde{p}}{\tilde{w}'\tilde{p}} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{w}'\tilde{r}} \tag{5.3.7}$$

Puisque le côté gauche de l'équation (5.3.6) définit le facteur d'escompte réel γ_t^* utilisé par les consommateurs, nous conviendrons par la suite que $\frac{\tilde{w}'\tilde{r}}{w'r_t} = \delta_t^*$ représente le facteur d'escompte réel s'appliquant à l'entreprise publique. L'optimum de second rang, dans le cas où les contraintes financières ne sont pas contraignantes, se caractérise donc par des prix courants à la consommation proportionnels aux prix fictifs courants de l'entreprise publique, par un même facteur d'escompte réel pour les consommateurs et l'entreprise publique et par des anticipations de prix futurs $\tilde{p}$ qui sont proportionnelles aux prix futurs anticipés par l'entreprise. Il est à noter que cette caractérisation correspond exactement à celles obtenues lors de l'étude des optimums de premier rang.

Revenons maintenant à la situation de second rang ($\gamma_t \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \neq 0$). Il nous reste à interpréter la caractérisation que l'on obtient dans ce cas, soit la formule donné par (5.2.25) ou (5.2.27) :

$$K_t^* \left\{ \theta_1 \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \theta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t \ \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \tag{5.2.27}$$

Puisque θ_1 et θ_2 peuvent prendre n'importe quelles valeurs, posons $\theta_1 = \dfrac{w'r_t}{w'p_t}$ et $\theta_2 = \dfrac{\tilde{w}'\tilde{r}}{\tilde{w}'\tilde{p}}$. On a alors

$$K_t^* \left\{ \frac{w'r_t}{w'p_t} \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\tilde{w}'\tilde{r}}{\tilde{w}'\tilde{p}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_t \\ 0 \\ \tilde{r} \end{bmatrix} \right\} = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t \ \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$K_t^* \begin{bmatrix} w'r_t \left[\dfrac{p_t}{w'p_t} - \dfrac{r_t}{w'r_t}\right] \\ \dfrac{w'r_t}{\tilde{w}'\tilde{p}} \left[\dfrac{\tilde{w}'\tilde{p}}{w'p_t}\gamma_t - \dfrac{\tilde{w}'\tilde{r}}{w'r_t}\right] \\ \tilde{w}'\tilde{r} \left[\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{w}'\tilde{p}} - \dfrac{\tilde{r}}{\tilde{w}\ \tilde{r}}\right] \end{bmatrix} = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t \ \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \tag{5.3.8}$$

ce que nous pourrions appeler la "formule de Boiteux généralisée". Les péages ou les écarts entre les prix payés par sa clientèle et les prix "fictifs" sur la base desquels l'entreprise publique maximise son profit, doivent être tels que l'équation (5.3.8) soit satisfaite. Malheureusement, cette formule, tout comme celle de Boiteux, ne peut servir qu'à titre d'indication et n'offre pas de méthode de calcul précise au planificateur qui chercherait à imposer ces taxes optimales. Toutefois, il est possible de trouver une interprétation un peu différente. Pour ce faire, reconsidérons l'équation (5.3.8) et convenons d'appeler τ le vecteur des écarts ou des péages, soit

$$\tau = \begin{bmatrix} w'r_t \begin{bmatrix} \dfrac{p_t}{w'p_t} - \dfrac{r_t}{w'r_t} \end{bmatrix} \\ \dfrac{w'r_t}{\tilde{w}'\tilde{p}} \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{w}'\tilde{p}}{w'p_t}\gamma_t - \dfrac{\tilde{w}'\tilde{r}}{w'r_t} \end{bmatrix} \\ \tilde{w}'\tilde{r} \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{p}}{\tilde{w}'\tilde{p}} - \dfrac{\tilde{r}}{\tilde{w}'\tilde{r}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

L'équation (5.3.8) s'écrit alors

$$K^*\tau = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t \, \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta} \, \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

Considérons, de plus, $dp = \lambda\tau^*$ une variation de prix qui soit proportionnelle au vecteur (légèrement modifié) des écarts ou des péages où

$$dp = \begin{bmatrix} dp_t \\ d\gamma_t \\ d\tilde{p} \end{bmatrix}$$

$$\tau^* = \begin{bmatrix} w'r_t \left[\dfrac{p_t}{w'p_t} - \dfrac{r_t}{w'r_t}\right] \\ \dfrac{w'r_t}{\tilde{w}'\tilde{p}} \left[\dfrac{\tilde{w}'\tilde{p}}{w'p_t}\gamma_t - \dfrac{\tilde{w}'\tilde{r}}{w'r_t}\right] \\ \dfrac{\tilde{w}'\tilde{r}}{\gamma_t} \left[\dfrac{\tilde{p}}{\tilde{w}'\tilde{p}} - \dfrac{\tilde{r}}{\tilde{w}'\tilde{r}}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \Phi^{-1}\,\tau \quad \text{avec} \quad \Phi^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\gamma_t} I_{n_2} \end{bmatrix}$$

La variation de prix considérée doit être accompagnée d'une variation des revenus courant et futur compensatrice des effets revenus, c'est-à-dire elle doit être telle que

$$p_t'\,dx_t + \gamma_t\,\tilde{p}'\,d\tilde{x} = 0$$

Tenant compte de cela, l'équation (5.3.8) devient

$$K^*\,\Phi\,\tau^* = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t\,\omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\,\tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad K^{**}\,\tau^* = \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t\,\omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\,\tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \qquad K^{**}\, dp = \lambda\, \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t\ \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}$$

Or, $dz = dx = K^{**}\, dp$ lorsque $p_t'\, dx_t + \gamma_t\, \tilde{p}'\, d\tilde{x} = 0$[1]. Ainsi,

$$dz = \begin{bmatrix} dz_t \\ dc_{t+1} \\ d\tilde{z} \end{bmatrix} = \lambda\, \varepsilon_1/\theta^* \begin{bmatrix} z_t - \theta_t\ \omega_t \\ c_{t+1} \\ \tilde{z} - \tilde{\theta}\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} \tag{5.3.9}$$

et nous obtenons la "formule de Ramsey-Boiteux généralisée". Les écarts ou péages optimaux (légèrement modifiés) τ^* doivent être proportionnels aux variations de prix dp qui, accompagnées d'une variation compensatrice des revenus, entraîneraient un accroissement proportionnel de la production dz de l'entreprise publique. Cette formule ne fournit pas non plus une méthode de calcul directe pour les péages optimaux. Toutefois, elle donne plus d'indications que la formule de Boiteux (5.3.8)[2].

---

[1]Voir l'équation (1.4.1).

[2]On pourrait, par exemple, imaginer une procédure de tâtonnement qui nous permettrait de trouver la "bonne" variation de prix dp et, par conséquent, le vecteur de taxes optimales.

SECTION 6 : L'OPTIMUM TEMPORAIRE ET LES FONCTIONS D'ANTICIPATION ARBITRAIRES

6.1. Introduction

Pour élaborer la théorie du consommateur à la section 1, nous avions retenu l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire parmi un ensemble de valeurs possibles pour les anticipations, une valeur est choisie et le consommateur la tient pour certaine. Nous avions alors mentionné que l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes pouvait également se formaliser à l'aide de fonctions d'anticipation. Il s'agissait en quelque sorte de supposer que le consommateur est doté d'une fonction d'anticipation qu'il tient pour certaine. Or, ces fonctions d'anticipation peuvent être de tous genres. Si elles ne sont pas arbitraires, comme c'est le cas, par exemple, pour les anticipations rationnelles, cela ne cause aucun problème; l'hypothèse préserve bien la structure locale de Slutsky. Par contre, si les fonctions d'anticipation sont arbitraires, les fonctions de demande deviennent elles-mêmes arbitraires et il devient impossible de faire de la statique comparée puisque l'on perd la structure locale de Slutsky (voir Polemarchakis [31]). Sans rejeter le théorème de Polemarchakis, nous allons montrer dans cette section qu'une théorie du consommateur construite en utilisant l'hypothèse des fonctions d'anticipation arbitraires, fournit des propriétés suffisantes (essentiellement, des propriétés d'additivité) pour élaborer le problème de l'optimum temporaire.

Finalement, remarquons, comme nous l'avions fait à la fin de la section 1.2, que l'hypothèse des anticipations exogènes au niveau du comportement du consommateur ne contredit pas le fait qu'elles deviennent des variables endogènes au niveau de l'optimum. C'est l'hypothèse que nous ferons respectivement dans les sections 6.2 et 6.3.

6.2. Le problème du consommateur

Le problème du consommateur que nous étudions ici est essentiellement le même que celui que nous avons présenté à la section 1.3, sauf pour la formalisation des anticipations. En effet, nous avions alors retenu l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes sous sa forme la plus simple. Nous supposerons maintenant que le consommateur dont les préférences peuvent être représentées par la fonction d'utilité $u(x_t, \tilde{x})$, est aussi doté de fonctions d'anticipation pour les prix futurs et son revenu futur

$$\tilde{p} = \tilde{\psi}(p_t, \gamma_t, R_t) \tag{6.2.1}$$

$$\tilde{k} = \tilde{\kappa}(p_t, \gamma_t, R_t) \tag{6.2.2}$$ [1]

A l'instar des fonctions couramment utilisées dans la littérature sur l'équilibre temporaire, ces fonctions arbitraires dépendent des prix courants et de la richesse courante. Nous supposerons, de plus, qu'elles sont continûment différentiables (ce qui distinguera notre approche de celle de Polemarchakis).

[1]Puisque les fonctions d'anticipation $\tilde{\psi}$ et $\tilde{\kappa}$ sont quelconques, elles sont donc différentes d'un individu à l'autre. Toutefois, dans cette section, nous laissons tomber l'indice i (qui différencie un consommateur d'un autre) pour simplifier la notation.

Tenant compte de ces hypothèses, le problème du consommateur peut s'écrire :

$$\text{Max } u(x_t, \tilde{x})$$

sujet à

$$(6.2.3) \qquad p_t' x_t + \gamma_t \, e_{t+1} = R_t$$

$$(6.2.4) \qquad \tilde{\psi}'(p_t, \gamma_t, R_t) \, \tilde{x} - e_{t+1} = \tilde{\kappa}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

ce qui revient à maximiser le lagrangien qui suit :

$$(6.2.5) \quad \mathcal{L} = u(x_t, \tilde{x}) - \lambda[p_t' x_t + \gamma_t \, e_{t+1} - R_t] - \mu[\tilde{\psi}'(\cdot)\tilde{x} - e_{t+1} - \tilde{\kappa}(\cdot)]$$ [1]

Les conditions de premier ordre de ce problème sont

$$(6.2.6) \qquad \mathcal{L}_{x_t} : u_{x_t} - \lambda p_t = 0$$

$$(6.2.7) \qquad \mathcal{L}_{e_{t+1}} : -\lambda\gamma_t + \mu = 0$$

$$(6.2.8) \qquad \mathcal{L}_{\tilde{x}} : u_{\tilde{x}} - \lambda \, \psi(\cdot) = 0$$

$$(6.2.9) \qquad \mathcal{L}_{\lambda} : -p_t' x_t - \gamma_t \, e_{t+1} + R_t = 0$$

$$(6.2.10) \qquad \mathcal{L}_{\mu} : -\psi'(\cdot) \, \tilde{x} + e_{t+1} + \tilde{\kappa}(\cdot) = 0$$

[1] $\tilde{\psi}(\cdot) = \tilde{\psi}(p_t, \gamma_t, R_t)$ et $\tilde{\kappa}(\cdot) = \tilde{\kappa}(p_t, \gamma_t, R_t)$.

A partir de ce système d'équations et en utilisant le théorème des fonctions implicites, nous pouvons tirer les fonctions suivantes[1] :

$$\left.\begin{array}{ll} (6.2.11) & x_t = \bar{x}_t(p_t, \gamma_t, R_t) \\ (6.2.12) & e_{t+1} = \bar{e}_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t) \end{array}\right\} \text{fonctions de demande "temporaires" ou courantes}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (6.2.13) & \tilde{x} = \bar{\tilde{x}}(p_t, \gamma_t, R_t) \end{array}\right\} \text{fonctions de demande "planifiées" ou futures}$$

$$(6.2.14) \qquad \lambda = \bar{\lambda}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

$$(6.2.15) \qquad \mu = \bar{\mu}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

auxquelles viennent s'ajouter les fonctions d'anticipation (6.2.1) et (6.2.2) dont le consommateur est doté. Par une application du théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire en remplaçant les fonctions de demande (6.2.11) à (6.2.15) dans les équations (6.2.6) à (6.2.10), celles-ci deviennent :

$$(6.2.16) \qquad u_{x_t}(\bar{x}_t(p_t, \gamma_t, R_t)) \equiv \bar{\lambda}(p_t, \gamma_t, R_t)\, p_t$$

$$(6.2.17) \qquad \bar{\lambda}(p_t, \gamma_t, R_t)\, \gamma_t \equiv \bar{\mu}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

---

[1]La preuve de ce résultat est identique à celle de la proposition 1.1 (voir Appendice 1). Les fonctions de comportement que nous retrouvons ici sont toutefois différentes de celles obtenues à la section 1.3. En effet, nous avions, par exemple,

$$x_t = x_t(p_t, \gamma_t, R_t, \tilde{p}, \tilde{k})$$

où les anticipations apparaissaient comme variables explicatives. Dans cette section, nous avons posé, par hypothèse, $\tilde{p} = \tilde{\psi}(p_t, \gamma_t, R_t)$ et $\tilde{k} = \tilde{\kappa}(p_t, \gamma_t, R_t)$ de sorte que les fonctions deviennent :

$$\begin{aligned} x_t &= x_t(p_t, \gamma_t, R_t, \tilde{\psi}(\cdot), \tilde{\kappa}(\cdot)) \\ &= \bar{x}_t(p_t, \gamma_t, R_t) \end{aligned}$$

$$(6.2.18) \qquad u_{\tilde{x}}(\bar{\tilde{x}}(p_t, \gamma_t, R_t)) \equiv \bar{\lambda}(p_t, \gamma_t, R_t)\, \tilde{\psi}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

$$(6.2.19) \qquad p_t'\bar{x}_t(p_t, \gamma_t, R_t) + \gamma_t\, \bar{e}_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t) \equiv R_t$$

$$(6.2.20) \qquad \tilde{\psi}'(p_t, \gamma_t, R_t)\, \bar{\tilde{x}}(p_t, \gamma_t, R_t) - e_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t) \equiv \tilde{\kappa}(p_t, \gamma_t, R_t)$$

sur tout le domaine où les fonctions de demande sont définies. Les deux dernières identités (les identités budgétaires) et leurs dérivées par rapport à p_t, γ_t et R_t vont nous permettre de déduire les propriétés empiriques relatives à la théorie du consommateur lorsque le comportement de ce dernier est représenté par les fonctions de demande (6.2.11) à (6.2.13) et les fonctions d'anticipation arbitraires (6.2.1) et (6.2.2).

Considérons la dérivée de l'identité (6.2.19) par rapport à p_t, γ_t et R_t. Ceci nous donne respectivement :

$$(6.2.21) \qquad p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \bar{x}_t + \gamma_t \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} \equiv 0$$

$$(6.2.22) \qquad p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \gamma_t} + \bar{e}_{t+1} + \gamma_t \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} \equiv 0$$

$$(6.2.23) \qquad p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t} + \gamma_t \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t} \equiv 1$$

En remplaçant l'équation (6.2.23) dans l'équation (6.2.21), nous trouvons :

$$(6.2.24) \qquad p_t' \left[\frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t}\bar{x}_t'\right] + \gamma_t \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\bar{x}_t'\right] \equiv 0$$

De la même façon, substituer l'équation (6.2.23) dans l'équation (6.2.22), nous permet d'obtenir

$$(6.2.25) \qquad p_t' \left[\frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] + \gamma_t \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] \equiv 0$$

Les équations (6.2.24) et (6.2.25) s'écrivent sous forme matricielle :

$$[p_t' \quad \gamma_t] \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] & \left[\frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] \\ \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] & \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] \end{bmatrix} \equiv 0$$

c'est-à-dire

$$(6.2.26) \qquad [p_t' \quad \gamma_t] \begin{bmatrix} S & V \\ s & v \end{bmatrix} \equiv \hat{p}_t'\,\hat{S}_t \equiv 0$$

où $\hat{S}_t$ est une matrice d'effets de substitution-complémentarité temporaire.

Dérivons maintenant l'identité (6.2.20) par rapport à p_t, γ_t et R_t. Nous trouvons respectivement

$$(6.2.27) \qquad - \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} + \tilde{\psi}'\,\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t} \equiv \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial p_t} - \bar{\tilde{x}}'\,\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial p_t}$$

$$(6.2.28) \qquad - \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \tilde{\psi}'\,\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial \gamma_t} \equiv \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \gamma_t} - \bar{\tilde{x}}'\,\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_t}$$

$$(6.2.29) \qquad - \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t} + \tilde{\psi}'\,\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t} \equiv \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t} - \bar{\tilde{x}}'\,\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t}$$

Considérons l'opération qui consiste à additionner les équations (6.2.27) et (6.2.29), l'équation (6.2.29) ayant d'abord été postmultipliée par le vecteur $\bar{x}_t'$. Ceci nous donne

$$(6.2.30)\qquad -\left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] + \tilde{\psi}'\left[\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] \equiv \left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] - \bar{\tilde{x}}'\left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right]$$

Une opération semblable utilisant les équations (6.2.28) et (6.2.29) nous permet de tirer

$$(6.2.31)\qquad -\left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] + \tilde{\psi}'\left[\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right]$$
$$\equiv \left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] - \bar{\tilde{x}}'\left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right]$$

Sous forme matricielle, les équations (6.2.30) et (6.2.31) deviennent

$$[-1 \quad \tilde{\psi}'] \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] & \left[\frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{e}_{t+1}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] \\ \left[\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] & \left[\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] \end{bmatrix}$$
$$\equiv \left[\left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right] - \bar{\tilde{x}}'\left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t}\,\bar{x}_t'\right], \left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right] - \bar{\tilde{x}}'\left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t}\,\bar{e}_{t+1}\right]\right]$$

ou, plus simplement,

$$(6.2.32)\qquad [-1 \quad \tilde{\psi}'] \begin{bmatrix} s & v \\ \tilde{S} & \tilde{V} \end{bmatrix} \equiv [\tilde{t} \qquad \tilde{\tau}]$$

Notons que les équations (6.2.26) et (6.2.32) peuvent s'exprimer sous une forme un peu différente, soit

$$[p_t' \quad \gamma_t \quad 0] \begin{bmatrix} S & V \\ s & v \\ \tilde{S} & \tilde{V} \end{bmatrix} \equiv 0$$

et

$$[0 \quad -1 \quad \tilde{\psi}'] \begin{bmatrix} S & V \\ s & v \\ \tilde{S} & \tilde{V} \end{bmatrix} \equiv [\tilde{t} \quad \tilde{\tau}]$$

c'est-à-dire, respectivement,

$$p_t^{*\prime}\ S^* \equiv 0$$

$$\tilde{p}^{*\prime}\ S^* \equiv [t \quad \tilde{\tau}]$$

Les propriétés empiriques des fonctions de demande se résument donc par la propriété d'additivité suivante :

$$(6.2.33) \qquad [\theta_1\ p_t^{*\prime} + \theta_2\ \tilde{p}^{*\prime}]\ S^* \equiv \theta_2[\tilde{t} \quad \tilde{\tau}]$$

Nous verrons dans la section suivante que cette propriété, sans être comparable à la richesse d'une structure locale de Slutsky, sera largement suffisante pour élaborer une théorie de l'optimum dans le cas où les anticipations sont représentées par des fonctions arbitraires.

6.3. L'optimum

Tout comme à la section 2, nous traiterons du problème de l'optimum temporaire dans le cadre d'une économie d'échanges (la production étant supposée exogène). Par conséquent, l'économie que nous considérons, consiste en ℓ consommateurs indicés par $i = 1, 2, \ldots, \ell$.

Rappelons brièvement les contraintes que nos valeurs doivent respecter afin que les états optimaux qu'elles vont définir, soient des états réalisables. Ces contraintes sont

$$\sum_{i=1}^{\ell} \bar{x}_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) = W_t \tag{6.3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \bar{e}_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) = 0 \tag{6.3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \bar{\tilde{x}}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) = \tilde{W} \tag{6.3.3}$$

Les deux premières contraintes (6.3.1) et (6.3.2) sont, en gros, les mêmes que nous avions considérées à la section 2.4, sauf que les fonctions de demande ne dépendent plus que des prix courants et de la richesse courante (les anticipations n'apparaissant plus comme variables explicatives). Elles traduisent respectivement l'équilibre sur le marché des biens courants et la conservation des flux financiers. La troisième contrainte, quant à elle, est tout à fait différente. En effet, nous avions alors

$$\sum_{i=1}^{\ell} \tilde{t}' \, \tilde{x}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i, e_t^i, \tilde{p}^i, \tilde{k}^i) = \tilde{t}' \, \tilde{W} \tag{2.4.1}$$

ce qui traduisait une hypothèse affaiblie d'anticipations rationnelles. Ici nous imposons aux anticipations (qui sont incorporées dans les fonctions de demande $\bar{x}_t^i$, $\bar{e}_t^i$ et $\bar{\tilde{x}}^i$) de respecter une certaine faisabilité des marchés futurs (6.3.3)[1] via les demandes planifiées $\bar{\tilde{x}}^i$, tout comme elles respectent l'équilibre des marchés courants.

Puisque nous posons le problème de l'optimum temporaire dans l'espace dual, nous allons définir la fonction d'utilité indirecte suivante :

$$v(p_t, \gamma_t, R_t) \equiv u(\bar{x}_t(p_t, \gamma_t, R_t), \bar{\tilde{x}}(p_t, \gamma_t, R_t))$$

Cette fonction va nous permettre de déduire les identités de Roy "temporaires". En effet, dérivons cette fonction par rapport à p_t, γ_t et R_t. On trouve alors

$$(6.3.4) \qquad v_{p_t} \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_t} \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \frac{\partial u}{\partial \bar{\tilde{x}}} \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t} \equiv \lambda\, p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \lambda\, \gamma_t \tilde{\psi}' \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t}$$

$$(6.3.5) \qquad v_{\gamma_t} \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_t} \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial u}{\partial \bar{\tilde{x}}} \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial \gamma_t} \equiv \lambda\, p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial \gamma_t} + \lambda\, \gamma_t \tilde{\psi}' \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial \gamma_t}$$

$$(6.3.6) \qquad v_{R_t} \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{x}_t} \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t} + \frac{\partial u}{\partial \bar{\tilde{x}}} \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{R_t} \equiv \lambda\, p_t' \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t} + \lambda\, \gamma_t \tilde{\psi}' \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t}$$

Considérons $v_{p_t} + v_{R_t}\, \bar{x}_t'$, c'est-à-dire l'opération qui consiste à additionner l'équation (6.3.4) à l'équation (6.3.6), cette dernière ayant déjà été postmultipliée par le vecteur $\bar{x}_t'$. Ceci nous donne

[1]Qui dépend évidemment de $\tilde{W}$.

$$v_{p_t} + v_{R_t} \bar{x}'_t \equiv \lambda p'_t \left[\frac{\partial \bar{x}_t}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial R_t} \bar{x}'_t\right] + \lambda \gamma_t \tilde{\psi}' \left[\frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial p_t} + \frac{\partial \bar{\tilde{x}}}{\partial R_t} \bar{x}'_t\right]$$

qui, en tenant compte des équations (6.2.30) et (6.2.24), devient

$$(6.3.7) \quad v_{p_t} + v_{R_t} \bar{x}'_t \equiv \lambda \gamma_t \left\{\left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t} \bar{x}'_t\right] - \bar{\tilde{x}}' \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t} \bar{x}'_t\right]\right\}$$

c'est-à-dire

$$(6.3.8) \quad v_{p_t} + v_{R_t} \bar{x}'_t \equiv \lambda \gamma_t \tilde{t}$$

Une opération semblable utilisant les équations (6.3.5) et (6.3.6) et tenant compte des équations (6.2.31) et (6.2.25) nous permet d'obtenir

$$(6.3.9) \quad v_{\gamma_t} + v_{R_t} \bar{e}_{t+1} \equiv \lambda \gamma_t \left\{\left[\frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\kappa}}{\partial R_t} \bar{e}_{t+1}\right] - \bar{\tilde{x}}' \left[\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial R_t} \bar{e}_{t+1}\right]\right\}$$

ou, plus simplement

$$(6.3.10) \quad v_{\gamma_t} + v_{R_t} \bar{e}_{t+1} \equiv \lambda \gamma_t \tilde{\tau}$$

Les équations (6.3.7) et (6.3.9) ou, (6.3.8) et (6.3.10), sont les identités de Roy temporaires que nous cherchions.

Le problème de l'optimum temoraire revient à minimiser le lagrangien suivant :

$$\text{Min } \mathcal{L}(p_t^1, \ldots, p_t^\ell, \gamma_t^1, \ldots, \gamma_t^\ell, R_t^1, \ldots, R_t^\ell, \alpha^1, \ldots, \alpha^\ell, \pi_t, \phi_t, \tilde{\pi})$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \alpha^i v^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) - \pi_t' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \bar{x}_t^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) - W_t\right]$$

$$- \phi_t \left[\sum_{i=1}^{\ell} \bar{e}_{t+1}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i)\right] - \tilde{\pi}' \left[\sum_{i=1}^{\ell} \bar{\tilde{x}}^i(p_t^i, \gamma_t^i, R_t^i) - \tilde{W}\right]$$

Les conditions de premier ordre de ce problème sont :

$$(6.3.11) \quad \mathcal{L}_{p_t^i} : \alpha^i v_{p_t^i}^i - \pi_t'[\partial\bar{x}_t^i/\partial p_t^i] - \phi_t[\partial\bar{e}_{t+1}^i/\partial p_t^i] - \tilde{\pi}'[\partial\bar{\tilde{x}}^i/\partial p_t^i] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(6.3.12) \quad \mathcal{L}_{\gamma_t^i} : \alpha^i v_{\gamma_t^i}^i - \pi_t'[\partial\bar{x}_t^i/\partial\gamma_t^i] - \phi_t[\partial\bar{e}_{t+1}^i/\partial\gamma_t^i] - \tilde{\pi}'[\partial\bar{\tilde{x}}^i/\partial\gamma_t^i] = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$(6.3.13) \quad \mathcal{L}_{R_t^i} : \alpha^i v_{R_t^i}^i - \pi_t'[\partial\bar{x}_t^i/\partial R_t^i] - \phi_t[\partial\bar{e}_{t+1}^i/\partial R_t^i] - \tilde{\pi}'[\partial\bar{\tilde{x}}^i/\partial R_t^i] =$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

auxquelles s'ajoutent les dérivées par rapport à chacun des multiplicateurs $\lambda^2, \ldots, \lambda^\ell, \pi_t, \phi_t$ et $\tilde{\pi}$.

Après quelques opérations élémentaires, les conditions peuvent s'écrire sous la forme

$$[\alpha^i[v^i_{p^i_t} + v^i_{R^i_t}\ \bar{x}^{i\,'}_t]\ \alpha^i[v^i_{\gamma^i_t} + v^i_{R^i_t}\ \bar{e}^i_{t+1}]]$$

(6.3.14)

$$= [\pi'_t \quad \phi_t \quad \tilde{\pi}'] \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial \bar{x}^i_t}{\partial p^i_t} + \dfrac{\partial \bar{x}^i_t}{\partial R^i_t}\,\bar{x}^{i\,'}_t\right] & \left[\dfrac{\partial \bar{x}^i_t}{\partial \gamma^i_t} + \dfrac{\partial \bar{x}^i_t}{\partial R^i_t}\,\bar{e}^i_{t+1}\right] \\ \left[\dfrac{\partial \bar{e}^i_{t+1}}{\partial p^i_t} + \dfrac{\partial \bar{e}^i_{t+1}}{\partial R^i_t}\quad \bar{x}^{i\,'}_t\right] & \left[\dfrac{\partial \bar{e}^i_{t+1}}{\partial \gamma^i_t} + \dfrac{\partial \bar{e}^i_{t+1}}{\partial R^i_t}\,\bar{e}^i_{t+1}\right] \\ \left[\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial p^i_t} + \dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial R^i_t}\,\bar{x}^{i\,'}_t\right] & \left[\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \gamma^i_t} + \dfrac{\bar{\tilde{x}}^i}{\partial R^i_t}\,\bar{e}^i_{t+1}\right] \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

ce qui, en tenant compte des identités de Roy temporaires et de la notation introduite à la section 6.2, devient

$$(6.3.15) \qquad [\pi'_t \quad \phi_t \quad \tilde{\pi}']S^{*i} = \alpha^i\ \lambda^i\ \gamma^i_t\ [\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Or, le problème du consommateur que nous avons étudié à la section précédente, nous a permis d'établir la propriété suivante (concernant la matrice S*) :

$$(6.3.16) \qquad [\theta^i_1\ p^{*i}_t + \theta^i_2\ \tilde{p}^{*i}]'\ S^{*i} = \theta^i_2\ [\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

de sorte que, en combinant les équations (6.3.15) et (6.3.16), nous obtenons

$$(6.3.17) \{[\theta^i_1\ p^{*i}_t + \theta^i_2\ \tilde{p}^{*i}]' - [\pi'_t \quad \phi_t \quad \tilde{\pi}']\}\ S^{*i} = [\theta^i_2 - \alpha^i\ \lambda^i\ \gamma^i_t]\ [\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i]$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Posons $\theta_1^i = \dfrac{w'\pi_t}{w'p_t^i}$, $\theta_2^i = \dfrac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}$ (pour i = 1, 2, ..., ℓ) et normalisons par rapport à $w'\pi_t$. Les équations (6.3.17) deviennent alors

$$\left\{\left[\frac{p_t^{*i'}}{w'p_t^i} + \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\,\frac{\tilde{p}^{*i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}\;\frac{\phi_t}{w'\pi_t}\;\frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right]\right\} S^{*i}$$

$$= \frac{1}{w'\pi_t}\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \alpha^i\,\lambda^i\,\gamma_t^i\right][\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i] \quad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

ou encore

$$(6.3.18)\quad \left\{\left[\frac{p_t^{i'}}{w'p_t^i},\ \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right),\ \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\,\frac{\tilde{p}^{i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t},\ \frac{\phi_t}{w'\pi_t},\ \frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right]\right\} S^{*i}$$

$$= \frac{1}{w'\pi_t}\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \alpha^i\,\lambda^i\,\gamma_t^i\right][\tilde{t}^i \qquad \tilde{\tau}^i]^{1} \quad i=1, 2, \ldots, \ell$$

L'optimum temporaire, dans ce cas-ci, est donc caractérisé par les équations (6.3.17) ou (6.3.18). Il est clair que sous sa forme actuelle, cette caractérisation n'est pas facilement interprétable. C'est pourquoi à la section suivante, nous l'examinerons sous diverses hypothèses particulières dans le but de trouver les différentes interprétations qui en découlent. Néanmoins, si le côté droit des équations (6.3.17) ou (6.3.18) est nul (par exemple, si $\theta_2^i = \alpha^i\,\lambda^i\,\gamma_t^i)$[2], il est relativement facile de remarquer les faits suivants. Premièrement, la matrice

[1]Les virgules qui apparaissent dans les crochets (vecteurs) ne sont là que pour faciliter la tâche du lecteur. Elles constituent un écart par rapport à la notation vectorielle usuelle.

[2]Ce qui est le cas lorsque nous retenons l'hypothèse affaiblie des anticipations rationnelles (voir chapitre 1, section 2.4).

S^{*i} étant une matrice $(\hat{n} + n_2) \times \hat{n}$, l'équation (6.3.18), ainsi transformée, peut admettre jusqu'à n_2 solutions. Puisque nous ne connaissons pas le noyau de S^{*i}, nous ne pouvons connaître ces solutions sauf la solution triviale. Deuxièmement, la solution triviale nous donne une caractérisation de l'optimum légèrement différente de celle obtenue au chapitre 1. En effet, nous avions alors

$$\frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{\pi_t}{w'\pi_t} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\frac{\tilde{p}^i}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \frac{\psi\tilde{t}}{\tilde{w}'\psi\tilde{t}} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left[\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\psi\tilde{t}}{w'\pi_t}\right] = \frac{\phi_t}{w'\pi_t} = 0 \text{ [1]} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Dans le cas présent, les deux premières conditions restent vraies (des prix présents et des anticipations de prix futurs proportionnels d'un individu à l'autre) mais la troisième condition ne tient plus. Nous avons maintenant

$$\frac{\phi_t}{w'\pi_t} = \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left[\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Le multiplicateur ϕ_t, qui apparaît comme étant l'écart optimal entre le facteur d'escompte réel privé γ_t^{*i} et le facteur d'escompte réel social $\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}$, n'est plus nul. De sorte qu'à l'optimum, les facteurs

[1] Nous avons montré qu'à l'optimum, le multiplicateur ϕ_t est nul, ce qui nous permettait d'obtenir l'égalité des facteurs d'escompte réels.

d'escompte réels privés ne sont plus égaux. Finalement, la caractérisation fournie par la solution triviale nous permet de conclure qu'un équilibre temporaire (tel que défini à la section 2 par les équations (2.2.1) et (2.2.2)) est un optimum temporaire.

6.4. Interprétation des résultats

Dans cette section, nous allons examiner les différentes interprétations que l'on peut tirer des conditions qui caractérisent l'optimum temporaire, les équations (6.3.17) ou (6.3.18), lorsque les anticipations sont représentées par des fonctions arbitraires. Pour ce faire, écrivons d'abord les équations (6.3.18) sous une forme qui soit plus facile à interpréter

$$(6.4.1) \quad \left\{ \left[\frac{p_t^{i\,\prime}}{w' p_t^i}, \frac{1}{\tilde{w}' \tilde{p}^i} \left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}' \tilde{\pi}}{w' \pi_t} \right) \right] - \left[\frac{\pi_t'}{w' \pi_t}, \frac{\phi_t}{w' \pi_t} \right] \right\} \hat{S}_t^i$$

$$= - \left[\frac{\tilde{w}' \tilde{\pi}}{w' \pi_t} \frac{\tilde{p}^{i\,\prime}}{\tilde{w}' \tilde{p}^i} - \frac{\tilde{\pi}'}{w' \pi_t} \right] \tilde{L}^i + \frac{1}{w' \pi_t} \left[\frac{\tilde{w}' \tilde{\pi}}{\tilde{w}' \tilde{p}^i} - \alpha^i \ \lambda^i \ \gamma_t^i \right] [\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i]$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

où

$$\hat{S}_t^i = \begin{bmatrix} S^i & V^i \\ s^i & v^i \end{bmatrix}$$

est la matrice d'effets de substitution-complémentarité temporaire;

$$\tilde{L}^i = [\tilde{S}^i \quad \tilde{V}^i]$$

est la matrice d'effets de substitution-complémentarité pour les demandes futures[1]. A partir de (6.4.1), nous allons étudier quatre cas différents, chacun de ces cas correspondant à des hypothèses spécifiques :

cas 1 : le côté droit de l'équation (6.4.1) est nul[2] et la matrice $\hat{S}^i_t$ est de rang $\hat{n}$-1;

cas 2 : le côté droit de l'équation (6.4.1) est nul et le rang de la matrice $\hat{S}^i_t$ est inférieur à $\hat{n}$-1;

cas 3 : le côté droit de l'équation (6.4.1) est non nul, la matrice $\hat{S}^i_t$ est de rang $\hat{n}$-1 et $\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \alpha^i \lambda^i \gamma^i_t$ $(\theta^i_2 = \alpha^i \lambda^i \gamma^i_t)$;

cas 4 : le côté droit de l'équation (6.4.1) est non nul et $\tilde{\pi}$ est nul[3].

---

[1]Autrement dit, $\hat{S}^i_t$ est une matrice $(\hat{n} \times \hat{n})$ et correspond aux $\hat{n}$ premières lignes de S^{*i}; $\tilde{L}^i$ est une matrice $(n_2 \times \hat{n})$ et correspond aux n_2 dernières lignes de S^{*i}.

[2]Ceci pouvant s'obtenir de diverses façons, par exemple, si $\frac{\tilde{p}^i}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \frac{\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{\pi}}$ et $\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} = \alpha^i \lambda^i \gamma^i_t$.

[3]Notons que $\tilde{\pi} = 0$ n'est pas une hypothèse en soi. Il s'agit plutôt ici d'étudier la caractérisation de l'optimum lorsque l'on respecte entièrement les anticipations des agents, c'est-à-dire lorsqu'on l'on ne considère pas la contrainte portant sur les marchés futurs (6.3.3.) dans le problème de l'optimum. De fait, en résolvant ce nouveau problème, on trouverait exactement l'expression (6.4.1) lorsque $\tilde{\pi} = 0$.

Cas 1 :

Sous les hypothèses du premier cas, l'équation (6.4.1) devient

$$(6.4.2)\quad \left\{\left[\frac{p_t^{i'}}{w'p_t^i}, \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right)\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}, \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\right]\right\}\hat{S}_t^i = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Puisque nous savons que

$$\hat{p}_t^{i'}\ \hat{S}_t^i \equiv 0 \text{ [1]} \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

et que nous avons supposé que $\hat{S}_t^i$ est de rang $\hat{n}$-1, seule la solution triviale sera admissible pour l'équation (6.4.2). Cela implique que l'optimum, dans ce cas-ci, est caractérisé par

$$\frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{\pi_t}{w'\pi_t}$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\frac{\phi_t}{w'\pi_t} = \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right)$$

ce qui correspond à ce que nous avions trouvé à la fin de la section précédente, mis à part le fait que l'optimum n'impose plus la proportionnalité des anticipations de prix futurs. Encore une fois, l'équilibre temporaire, tel que défini à la section 2.2, est un optimum temporaire[2].

[1]Voir l'équation (6.2.26).

[2]Nous aurions pu trouver les mêmes résultats en post-multipliant (6.4.2) par l'inverse généralisée de $\hat{S}_t^i$. Nous utiliserons cette méthode lorsque nous étudierons le cas 3.

Cas 2 :

Pour étudier ce cas, nous utilisons également l'équation (6.4.2) en supposant que le rang de $\hat{S}_t^i$ est inférieur à $\hat{n}$-1. Dans ce cas, nous savons que le vecteur $\hat{p}_t^i$ appartient toujours au noyau de $\hat{S}_t^i$ mais nous ne connaissons pas les autres vecteurs qui le composent, de sorte que l'équation (6.4.2) admet possiblement plusieurs solutions. Autrement dit, l'équilibre concurrentiel n'est plus la seule façon de réaliser l'optimum temporaire[1] et nous avons, en principe, beaucoup plus d'institutions à notre disposition pour réaliser cet optimum[2].

[1]Comme il l'était au chapitre 1. Nous avions alors montré que l'optimum temporaire se caractérise par

$$\frac{p_t^i}{w'p_t^i} = \frac{p_t^j}{w'p_t^j} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\gamma_t^{*i} = \gamma_t^{*j}$$

en supposant $\tilde{w}'\tilde{p}^i = \tilde{w}'\tilde{p}^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \ell)$. Si, de plus, nous normalisons les prix présents de la même façon pour tous, l'optimum se caractérise par un seul système de prix pour tous les agents.

[2]Toutefois, il est tout à fait légitime de s'interroger à savoir si un tel cas (rang de $\hat{S}_t^i < \hat{n}$-1) est plausible. En fait, nous croyons que, via le théorème de Sard (voir (37)), nous pourrions montrer que les allocations de biens correspondant à une telle situation, appartiennent à un ensemble de mesure nulle. D'où, à notre avis, la non pertinence d'insister plus longtemps sur un tel cas.

Cas 3 :

Le troisième cas s'étudie à l'aide de l'équation suivante :

$$(6.4.3)\quad \left\{\left[\frac{p_t^i}{w'p_t^i}, \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right)\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}, \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\right]\right\} \hat{S}_t^i$$

$$= -\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\, \frac{\tilde{p}^{i\prime}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right] \tilde{L}^i \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Un premier examen de l'équation (6.4.3) nous permet déjà de remarquer que la concurrence parfaite ou un équilibre avec un seul système de prix pour tous les individus ne sera jamais un optimum de Pareto. Mais poussons notre examen un peu plus loin.

Dans un premier temps, cherchons l'inverse généralisée de $\hat{S}_t^i$, c'est-à-dire une matrice $\hat{H}_t^i$ qui soit telle que $\hat{S}_t^i\, \hat{H}_t^i\, \hat{S}_t^i = \hat{S}_t^i$ ($i = 1, 2, \ldots, \ell$). Cette matrice $\hat{H}_t^i$ aura la propriété

$$(6.4.4)\qquad \hat{S}^i\, \hat{H}^i = I_{\hat{n}} - \frac{\hat{w}\hat{p}_t^{i\prime}}{\hat{w}'\hat{p}_t^i}$$

Ensuite, post-multiplions l'équation (6.4.3) par $\hat{H}_t^i$. En tenant compte de (6.4.4), cela nous donne

$$(6.4.5)\quad \left\{\left[\frac{p_t^{i'}}{w'p_t^i}, \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right)\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}, \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\right]\right\}\left[I_{\hat{n}} - \frac{\hat{w}\hat{p}_t^{i'}}{\hat{w}'\hat{p}_t^i}\right]$$

$$= -\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\,\frac{\tilde{p}^{i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right]\tilde{L}^i\,\hat{H}_t^i$$

$$\Longrightarrow \left\{\left[\frac{p_t^{i'}}{w'p_t^i}, \frac{1}{\tilde{w}'\tilde{p}^i}\left(\gamma_t^{*i} - \frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\right)\right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}, \frac{\phi_t}{w'\pi_t}\right]\right\}$$

$$= -\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\,\frac{\tilde{p}^{i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right]\tilde{L}^i\,\hat{H}_t^i \quad [1]$$

ou, plus simplement,

$$(6.4.6)\qquad [t_1' \quad t_2] = -\left[\frac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t}\,\frac{\tilde{p}^{i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \frac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t}\right]\tilde{L}^i\,\hat{H}_t^i \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

où $\hat{t}' = [t_1' \quad t_2]$ est un vecteur de taxes.

Pour voir dans quels cas ces taxes seront positives ou négatives, examinons d'abord la signification de $\tilde{L}^i\,\hat{H}_t^i$. $\hat{H}_t^i$ étant l'inverse généralisée de $\hat{S}_t^i$, elle aura donc l'allure suivante :

---

[1]Pour obtenir ce résultat, nous avons posé que w_{n+1} (c'est-à-dire la dernière composante du vecteur de poids $\hat{w}$) est nulle. Nous avons donc utilisé la même règle de normalisation qui nous avait permis d'établir l'expression générale (6.3.18).

$$\hat{H}_t^i = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial p_t^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial p_t^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \\ \left(\dfrac{\partial \gamma_t^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial \gamma_t^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \end{bmatrix}$$

de sorte que

$$\tilde{L}^i \, \hat{H}_t^i = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial p_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \gamma_t^i}\right)^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial p_t^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial p_t^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \\ \left(\dfrac{\partial \gamma_t^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial \gamma_t^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \end{bmatrix}$$

Ainsi, l'équation (6.4.6) devient

$$[t_1^{i'} \quad t_2^i] = - \begin{bmatrix} \dfrac{\tilde{w}'\tilde{\pi}}{w'\pi_t} \dfrac{\tilde{p}^{i'}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} - \dfrac{\tilde{\pi}'}{w'\pi_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \bar{x}_t^i}\right)^c & \left(\dfrac{\partial \bar{\tilde{x}}^i}{\partial \bar{e}_{t+1}^i}\right)^c \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

ou bien, pour faciliter l'écriture de ce qui suit,

$$(6.4.7) \quad [t_1^{i'} \quad t_2^i] = - [A^i] \, [B^i \quad C^i] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Pour connaître le signe de $t_1^{i'}$, il faut examiner simultanément le signe de A^i et B^i alors que pour déterminer le signe de t_2^i, il faut regarder le signe de A^i et C^i. Faisons cet exercice pour t_1^i en posant les conventions suivantes :

a) $A^i > 0$ signifie que les anticipations de prix futurs de l'individu i sont supérieures à celles du planificateur. Ceci définit pour nous un individu pessimiste;

b) $A^i < 0$ correspond à la situation contraire (l'individu i est optimiste);

c) $B^i > 0$ signifie que l'individu i conçoit le futur et le présent comme étant complémentaires de sorte que sa consommation future varie dans le même sens que sa consommation présente. Par exemple, une hausse de sa consommation présente entraîne une hausse de sa consommation future;

d) $B^i < 0$ correspond au cas où l'individu i conçoit le futur et le présent comme étant substituts de sorte qu'une hausse de la consommation présente sera suivie d'une baisse de la consommation future.

De plus, les cas où A^i et B^i sont de signe opposé, dénotent des comportements "extrémistes" alors que si A^i et B^i sont de même signe, les individus auront des comportements "modérés". Pour illustrer ceci, examinons le cas suivant : $A^i > 0$ et $B^i > 0$. $A^i > 0$ signifie que l'individu i est pessimiste dans ses anticipations de prix futurs de sorte qu'il aura tendance à devancer sa consommation future à la période présente. Par contre, $B^i > 0$ implique qu'une hausse de sa consommation présente entraînera une hausse de sa consommation future. Ces deux réactions contraires se complètent pour donner ce que nous convenons d'appeler un comportement "modéré". Sinon, si les réactions vont dans le même sens, nous serons en présence d'un comportement "extrémiste". Finalement, en examinant la structure de l'équation (6.4.7), on se rend compte que si A^i et B^i sont de même signe, t_1^i sera négatif alors que si A^i et B^i sont de signe contraire, t_1^i sera positif. Notre modèle nous amène donc à conclure que les individus à comportement "modéré" seront subventionnés alors que nous devrions taxer les individus à comportement extrémiste.

Cas 4 :

Suivant les hypothèses spécifiques du quatrième cas, l'équation (6.4.1) devient

$$\text{(6.4.8)} \qquad \left\{ \left[\frac{p_t^i}{w'p_t^i}, \frac{\gamma_t^{*i}}{\tilde{w}'\tilde{p}^i} \right] - \left[\frac{\pi_t'}{w'\pi_t}, \frac{\phi_t}{w'\pi_t} \right] \right\} \hat{S}_t^i$$

$$= - \frac{\alpha^i \lambda^i \gamma_t^i}{w'\pi_t} \left[\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i \right] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Déjà, à ce stade-ci, nous pouvons remarquer que dans ce cas spécifique, l'équilibre concurrentiel ou un équilibre à prix uniques ne sera jamais un optimum de Pareto (à moins, bien sûr, que le côté droit de (6.4.8) ne soit nul[1]). Afin de faciliter les manipulations qui vont suivre, écrivons (6.4.8) sous sa forme la plus simple, soit

$$\hat{t}'\,\hat{S}^i_t = -\frac{\alpha^i\,\lambda^i\,\gamma^i_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i] \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

En post-multipliant par $d\hat{p}^i_t$, nous trouvons

$$(6.4.9) \qquad \hat{t}'\,\hat{S}^i_t\,d\hat{p}^i_t = -\frac{\alpha^i\,\lambda^i\,\gamma^i_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i]\,d\hat{p}^i_t \qquad i = 1, 2, \ldots, \ell$$

Puisque $\hat{S}^i_t\,d\hat{p}^i_t = d\hat{x}^i_t$ lorsque $\hat{p}^{i\,\prime}_t d\hat{x}^i_t = 0$, c'est-à-dire lorsque le revenu réel courant est constant, (6.4.9) devient

$$\hat{t}'\,d\hat{x}^i_t = -\frac{\alpha^i\,\lambda^i\,\gamma^i_t}{w'\pi_t}\,[\tilde{t}^i \quad \tilde{\tau}^i]\,d\hat{p}^i_t$$

c'est-à-dire

$$\hat{t}'\,d\hat{x}^i_t = -\frac{\alpha^i\,\lambda^i\,\gamma^i_t}{w'\pi_t}\left\{\left[\frac{\partial\tilde{\kappa}^i}{\partial\hat{p}^i_t} + \frac{\partial\tilde{\kappa}^i}{\partial R^i_t}\,\hat{x}^{i\,\prime}_t\right] - \bar{\tilde{x}}'\left[\frac{\partial\tilde{\psi}^i}{\partial\hat{p}^i_t} + \frac{\partial\tilde{\psi}^i}{\partial R^i_t}\,\hat{x}^i_t\right]\right\} d\hat{p}^i_t$$

$$i = 1, 2, \ldots, \ell$$

[1]C'est ce que nous obtenons lorsque $\tilde{t}^i = \tilde{\tau}^i = 0$ ($\forall i$), c'est-à-dire lorsque les fonctions d'anticipation sont indépendantes des prix courants et de la richesse courante. Ceci correspond aux fonctions d'anticipation étudiées au chapitre 1.

Ainsi, le rendement fiscal marginal (lorsque le revenu réel présent est constant) est proportionnel à la variation du revenu réel futur, suite à une variation compensée des prix présents. Notons finalement que cette formule du rendement fiscal marginal est tout à fait similaire aux formules que nous obtenons dans un modèle de second rang à la Boiteux.

CONCLUSION

L'un des principaux résultats qui se dégagent de cette thèse, est que nous savons mieux maintenant comment poser le problème de l'optimum temporaire. Comme c'est souvent le cas pour les concepts nouveaux, la réponse ne mène pas à des caractérisations définitives de cet optimum temporaire et reste même au stade exploratoire. Nous disposons néanmoins des techniques et de l'instrumentation pour mieux y arriver. Cela constituait l'un des objectifs premiers de notre thèse et nous croyons l'avoir atteint en bonne partie. Que la théorie élaborée n'ait pas le caractère robuste et général que nous aurions espéré obtenir (en particulier, il semble qu'elle dépende beaucoup des hypothèses que l'on fait et de la forme que prennent les anticipations), s'explique de diverses façons. Pour le voir, le plus simple serait de faire rapidement le tour des résultats obtenus.

Dans la première partie de la thèse (chapitres 1 et 2), c'est-à-dire la partie qui consistait à mettre en place l'instrumentation qui permettrait, par la suite, de voir plus clair dans la question, les résultats obtenus, surtout concernant l'optimum temporaire, sont "attendus". La plupart du temps, ils ne font que confirmer des intuitions ou des conjectures déjà émises par certains auteurs qui s'étaient aussi intéressés au sujet mais d'une façon moins directe. Pour y arriver, nous avons travaillé principalement avec deux hypothèses concernant les anticipations. D'abord, il semblait naturel d'étudier, au niveau de l'optimum, l'hypothèse des anticipations ponctuelles exogènes sous sa forme la plus simple puisque cette même hypothèse avait été retenue pour l'étude du comportement individuel des agents (consommateur et producteur) et puisque, pendant longtemps, ce fut l'hypothèse principale en micro comme en macro. Ce n'est que par la suite que nous nous sommes intéressés à la caractérisation optimale des anticipations comme telle. Les anticipations ont alors été considérées comme endogènes au niveau de la société et nous avons retenu une hypothèse affaiblie d'anticipations rationnelles. Dans un cas comme dans l'autre, tous les résultats obtenus coïncident ou sont cohérents avec ce que nous connaissions déjà sur l'optimum intertemporel. En fait, dans la mesure où notre modèle a été élaboré en partie pour contenir le modèle traditionnel, il aurait été étonnant de trouver des résultats tout à fait différents.

Par contre, la deuxième partie (chapitre 3) qui se voulait surtout des applications ou des extensions de l'instrumentation mise en place, nous réservait des surprises, surtout la section 6 sur les fonctions d'anticipations arbitraires. Par exemple, les identités de Roy trouvées à la section 6.3 (les équations (6.3.8) et (6.3.10) sont tout à fait générales et pourraient servir à étudier d'autres hypothèses quant aux anticipations. Comme cas particulier, elles contiennent les identités dérivées au chapitre 1. Par ailleurs, nous avons montré que sous certaines hypothèses, l'équilibre temporaire concurrentiel ou l'équilibre temporaire avec un seul système de prix pour tous les agents ne serait jamais un optimum temporaire. Toutefois, ce résultat ne nous alarme pas puisque, comme il a été montré par Grandmont [17], un tel équilibre ou un équilibre semblable, a dans ces hypothèses peu de chance d'exister. Sans tous les énumérer, disons que la diversité des résultats obtenus au chapitre 3 nous a fait réaliser à quel point notre théorie n'était pas aussi robuste que nous l'aurions espéré. A cela s'ajoutait le fait que les résultats de la première partie de la thèse dépendait largement des hypothèses retenues. De sorte que, comme nous l'avons mentionné plus haut, la réponse au problème de la caractérisation générale de l'optimum temporaire reste encore à explorer. Néanmoins, à défaut d'avoir fait le tour complet de toutes les hypothèses sur les anticipations, nous disposons maintenant des techniques pour le faire.

Les résultats obtenus dans cette thèse l'ont été en étudiant des modèles assez simples. Toutefois, il est clair que ces modèles pourraient facilement être étendus. Une première généralisation pourrait consister à introduire un deuxième actif financier, l'un des deux actifs financiers pouvant être la monnaie. Nous croyons que cette généralisation permettrait de voir des liens intéressants entre notre modèle et certains modèles macroéconomiques. Une autre possibilité serait d'examiner un modèle d'optimum avec rationnements quantitatifs. En particulier, il serait sans doute très instructif de voir comment les résultats obtenus dans cette thèse seraient modifiés par l'introduction de rationnement sur le marché de l'actif financier.

D'un autre point de vue, si nous voulons dans l'avenir établir correctement les liens qui existent entre la macroéconomie et la microéconomie, il nous apparaît essentiel, au préalable, de transposer la théorie microéconomique traditionnelle dans un contexte temporaire. En un certain sens, cette thèse répond en partie à cette exigence. D'une part, nous disposons maintenant d'une théorie du consommateur dans un cadre temporaire qui soit fort convenable. De fait, le problème du consommateur, en plus de fournir les résultats nécessaires à l'élaboration de la théorie de l'optimum, est en soi très intéressant parce que cohérent avec le reste de la théorie. Il offre un modèle avec épargne qui ne soit pas ad hoc et ses implications empiriques fournissent des restrictions a priori à l'économètre. D'autre part, la théorie du producteur dans un cadre temporaire, bien qu'elle soit peut-être moins à point que celle du consommateur offre aussi des avantages très semblables. Entre autres, elle nous permet d'analyser les activités du producteur sur des marchés au comptant. De plus, elle est assez souple pour permettre plusieurs structures de délais dans les processus de production. Enfin, malgré les réticences que nous avons émises quant à la robustesse de l'optimum temporaire tel que présenté ici, il reste toujours que bien poser le problème de l'optimum dans un cadre temporaire fait aussi partie des prérequis dont nous parlions plus haut. De ce point de vue, les résultats de cette thèse qui concernent l'optimum temporaire, nous ont permis d'avancer dans ce sens.

Une dernière remarque sur les liens qui semblent exister entre l'optimum intertemporel et l'optimum temporaire. Comme nous l'avons déjà mentionné au début de la section 2, tout dépend du point de vue adopté par le planificateur. S'il cherche à implanter un optimum sur plusieurs périodes (optimum intertemporel) par équilibres temporaires, il ne peut espérer qu'un marché d'actifs nominaux soit suffisant pour le faire. Il doit alors imposer des contraintes plus sévères à l'ensemble des valeurs qui définissent les allocations accessibles ou réalisables. Par exemple, il pourrait imposer une contrainte sur la circulation de l'information de manière à s'assurer un certain consensus quant aux anticipations des agents. S'il cherche plutôt à réaliser un optimum à une période donnée (optimum temporaire), son problème sera tout à fait différent suivant qu'il s'intéresse ou non aux anticipations des agents.

S'il y a une leçon générale à tirer de l'analyse présentée dans cette thèse (et ici nous rejoignons parfaitement Grandmont dans la conclusion de son livre), c'est que l'un des aspects les plus importants de nos économies est que les agents anticipent certaines valeurs avant de prendre leurs décisions. Il ne s'agit donc pas tellement d'étudier toutes les formalisations possibles et imaginables quant aux anticipations des agents mais plutôt de comprendre comment les agents anticipent, c'est-à-dire en quoi consiste leur processus d'apprentissage si un tel processus existe. Une fois cette question résolue, nous pourrons alors espérer un caractère plus définitif pour la théorie de l'optimum temporaire.

APPENDICES

APPENDICE 1

Preuves des résultats concernant la théorie du consommateur dans un cadre temporaire

Avant d'énoncer les propositions, nous allons d'abord établir quelques conventions. Nous supposerons que les préférences du consommateur[1] sont représentables par une fonction d'utilité u définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ et ayant les propriétés suivantes :

H1.1 : $u \in C^2(A, \mathbb{R})$ où A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$

H1.2 : $u_{x_t\tilde{x}} > 0$

H1.3 : $\xi' U \xi < 0$ pour tout $\xi \in \{\xi \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \mid \xi \neq 0,\ \xi' u_{x_t\tilde{x}} = 0\}$

Conventions

i) $u'_{x_t\tilde{x}} = \left[\frac{\partial u}{\partial x_{1t}} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial u}{\partial x_{n_1 t}} \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_1} \cdots\cdots\cdots \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_{n_2}}\right]$

[1]Nous laissons tomber dans cet appendice l'indice i qui désigne habituellement de quel consommateur il s'agit.

$$\text{ii)}\quad U = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1t}^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1t}\,\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1t}\,\partial x_{n_1 t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1t}\,\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{1t}\,\partial \tilde{x}_{n_2}} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2t}\,\partial x_{1t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2t}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2t}\,\partial x_{n_1 t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2t}\,\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_{2t}\,\partial \tilde{x}_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1\,\partial x_{1t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1\,\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1\,\partial x_{n_1 t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_1\,\partial \tilde{x}_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_{n_2}\,\partial x_{1t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_{n_2}\,\partial x_{2t}} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_{n_2}\,\partial x_{n_1 t}} & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_{n_2}\,\partial \tilde{x}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial \tilde{x}_{n_2}^2} \end{bmatrix}$$

ou

$$U = \begin{bmatrix} U_{x_t x_t} & U_{x_t \tilde{x}} \\ U_{\tilde{x} x_t} & U_{\tilde{x}\tilde{x}} \end{bmatrix}$$

Avec les conventions précédentes, le problème du consommateur revient à maximiser le lagrangien

$$\text{(A1.1)}\quad L(x_t,\ e_{t+1},\ \tilde{x},\ \lambda,\ \mu) = u(x_t,\ \tilde{x}) - \lambda[p_t' x_t + \gamma_t e_{t+1} - e_t - R_t] - \mu[\tilde{p}'\tilde{x} - e_{t+1} - \tilde{k}]$$

dont les dérivées partielles sont

(A1.2) $$L_{x_t} : u_{x_t} - \lambda p_t$$

(A1.3) $$L_{e_{t+1}} : -\lambda\gamma_t + \mu$$

(A1.4) $$L_{\tilde{x}} : u_{\tilde{x}} - \mu\tilde{p}$$

(A1.5) $$L_{\lambda} : -p_t'x_t - \gamma_t e_{t+1} + e_t + R_t$$

(A1.6) $$L_{\mu} : -\tilde{p}'\tilde{x} + e_{t+1} + \tilde{k}$$

et s'annulent au point où le vecteur $(x_t\ e_{t+1}\ \tilde{x})$ est optimal (étant donné les systèmes de prix p_t, γ_t et $\tilde{p}$, les revenus R_t et $\tilde{k}$ et l'épargne cumulée e_t).

L'équilibre du consommateur se caractérise par les égalités

(A1.7) $$u_{x_t} = \lambda p_t$$

(A1.8) $$\lambda\gamma_t = \mu$$

(A1.9) $$u_{\tilde{x}} = \mu\tilde{p}$$

(A1.10) $$p_t'x_t + \gamma_t\ e_{t+1} - e_t = R_t$$

(A1.11) $$\tilde{p}'\tilde{x} - e_{t+1} = \tilde{k}$$

Les relations (A1.2) à (A1.6) forment un système de n_1+n_2+3 équations entre $2(n_1+n_2+3)+1$ variables, $(x_t, e_{t+1}, \tilde{x}, \lambda, \mu)$ d'une part et $(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})$ d'autre part.

PROPOSITION A.1 : Si la fonction d'utilité u satisfait aux hypothèses H1.1, H1.2 et H1.3 alors les fonctions de demande x_t, e_{t+1} et $\tilde{x}$ et les fonctions λ et μ existent et sont continûment dérivables.

Preuve :

Les équations du système (A1.2) à (A1.6) sont des fonctions de classe C' sur un ouvert et possèdent une solution

$$s^0 = (x_t^0,\ e_{t+1}^0,\ \tilde{x}^0,\ \lambda^0,\ \mu^0,\ p_t^0,\ \gamma_t^0,\ R_t^0,\ e_t^0,\ \tilde{p}^0,\ \tilde{k}^0)$$

caractérisée par les égalités (A1.7) à (A1.11).

Soit la matrice $\bar{U}$, la dérivée du système (A1.2) à (A1.6) par rapport aux variables x_t, e_{t+1}, $\tilde{x}$, λ et μ au point s^0

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_{x_t x_t} & 0 & U_{x_t \tilde{x}} & -p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_t & 1 \\ U_{\tilde{x} x_t} & 0 & U_{\tilde{x}\tilde{x}} & 0 & -\tilde{p} \\ -p_t' & -\gamma_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tilde{p}' & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous devons montrer que la matrice $\bar{U}$ est de rang maximal. Supposons le contraire. Alors il existe un vecteur

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \eta \end{bmatrix} \neq 0$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^{n_2}$, δ et $\eta \in \mathbb{R}$, tel que $\bar{U}\,\bar{\alpha} = 0$. Donc

(A1.12) $$U_{x_t x_t}\, \alpha + U_{x_t \tilde{x}}\, \gamma - p_t\, \delta = 0$$

(A1.13) $$-\gamma_t\, \delta + \eta = 0$$

(A1.14) $$U_{\tilde{x} x_t}\, \alpha + U_{\tilde{x}\tilde{x}}\, \gamma - \tilde{p}\, \eta = 0$$

(A1.15) $$-p_t'\, \alpha - \gamma_t\, \beta = 0$$

(A1.16) $$\beta - \tilde{p}'\, \gamma = 0$$

Ainsi, d'une part, en prémultipliant (A1.12) par α' et en utilisant (A1.13) et (A1.15), nous trouvons

(A1.17) $$\alpha'\, U_{x_t x_t}\, \alpha + \alpha'\, U_{x_t \tilde{x}}\, \gamma + \eta\beta = 0$$

et, d'autre part, en prémultipliant (A1.14) par γ' et en utilisant (A1.16), nous avons

(A1.18) $$\gamma'\, U_{\tilde{x} x_t}\, \alpha + \gamma'\, U_{\tilde{x}\tilde{x}}\, \gamma - \beta\eta = 0$$

Donc (A1.17) et (A1.18) nous donnent

$$\text{(A1.19)} \qquad \alpha' U_{x_t x_t} \alpha + \alpha' U_{x_t \tilde{x}} \gamma + \gamma' U_{\tilde{x} x_t} \alpha + \gamma' U_{\tilde{x}\tilde{x}} \gamma = 0$$

De plus, (A1.15) et (A1.16) impliquent

$$p_t' \alpha + \gamma_t \tilde{p}' \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \lambda p_t' \alpha + \lambda \gamma_t \tilde{p}' \gamma = 0$$

$$\text{(A1.20)} \qquad \Rightarrow u_{x_t}' \alpha + u_{\tilde{x}}' \gamma = 0$$

par (A1.7), (A1.8) et (A1.9).

De (A1.19) et (A1.20), nous avons nécessairement $\begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = 0$ (sinon la propriété H1.3 ne serait pas satisfaite). Mais $\begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = 0$ implique $\beta = 0$, $\delta = 0$ et $\eta = 0$. D'où la contradiction.

Puisque la matrice $\bar{U}$ est de rang maximal, le théorème des fonctions implicites nous assure l'existence des fonctions dans un voisinage N de $(p_t^0, \gamma_t^0, R_t^0, e_t^0, \tilde{p}^0, \tilde{k}^0)$. Nous pouvons donc écrire les fonctions suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\text{(A1.21)} \quad x_t = x_t(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) \\ &\text{(A1.22)} \quad e_{t+1} = e_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) \end{aligned}\right\} \text{fonctions de demande "temporaires" ou courantes}$$

$$\text{(A1.23)} \quad \tilde{x} = \tilde{x}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) \quad \Big\} \text{ fonctions demande "planifiées" ou futures}$$

$$\text{(A1.24)} \quad \lambda = \lambda(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})$$

$$\text{(A1.25)} \quad \mu = \mu(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})$$

avec x_t, e_{t+1}, $\tilde{x}$, λ et $\mu \in C'$. Nous avons ainsi les fonctions de demande recherchées.★

Par une application du théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire en remplaçant les fonctions de demande (A1.21) à (A1.25) dans les équations (A1.7) à (A1.11), celles-ci deviennent :

(A1.26) $$u_{x_t}(x_t(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})) \equiv \lambda(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})\ p_t$$

(A1.27) $$\lambda(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})\ \gamma_t \equiv \mu(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})$$

(A1.28) $$u_{\tilde{x}}(\tilde{x}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})) \equiv \mu(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k})\ \tilde{p}$$

(A1.29) $$p_t' x_t(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) + \gamma_t\ e_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) - e_t \equiv R_t$$

(A1.30) $$\tilde{p}'\tilde{x}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) - e_{t+1}(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) \equiv \tilde{k}$$

pour tout $(p_t, \gamma_t, R_t, e_t, \tilde{p}, \tilde{k}) \varepsilon N$, c'est-à-dire sur tout le domaine où les fonctions de demande sont définies. Ces identités et leurs dérivées par rapport à p_t, γ_t, R_t, e_t, $\tilde{p}$ et $\tilde{k}$ vont nous permettre de caractériser la matrice jacobienne des fonctions de demande et la matrice de Slutsky complète. En effet, dérivons les identités (A1.26) à (A1.30) par rapport à p_t, γ_t, R_t, e_t, $\tilde{p}$, $\tilde{k}$. Nous obtenons

$$\begin{bmatrix} U_{x_t x_t} & 0 & U_{x_t \tilde{x}} & -p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_t & 1 \\ U_{\tilde{x} x_t} & 0 & U_{\tilde{x}\tilde{x}} & 0 & -\tilde{p} \\ -p_t' & -\gamma_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\tilde{p}' & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_t}{\partial p_t} & \frac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} & \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial x_t}{\partial R_t} & \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial x_t}{\partial e_t} \\ \frac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} & \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} & \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} & \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial e_{t+1}}{\partial e_t} \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \gamma_t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial e_t} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial p_t} & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_t} & \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial \lambda}{\partial R_t} & \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial \lambda}{\partial e_t} \\ \frac{\partial \mu}{\partial p_t} & \frac{\partial \mu}{\partial \gamma_t} & \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{p}} & \frac{\partial \mu}{\partial R_t} & \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{k}} & \frac{\partial \mu}{\partial e_t} \end{bmatrix}$$

(A.1.31)

$$= \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu I_{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ x_t' & e_{t+1} & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \tilde{x}' & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

l'équation fondamentale de la théorie du consommateur (lorsque le problème du consommateur se pose dans un cadre temporaire). Considérons un des inverses à droite du membre droit de l'équation (A1.31) (cette matrice possède plusieurs inverses à droite car elle n'est pas carrée). En postmultipliant l'équation fondamentale par cet inverse à droite, nous trouvons

$$
\text{(A1.32)}\quad
\begin{bmatrix}
U_{x_t x_t} & 0 & U_{x_t \tilde{x}} & -p_t & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\gamma_t & 1 \\
U_{\tilde{x} x_t} & 0 & U_{\tilde{x}\tilde{x}} & 0 & -\tilde{p} \\
-p_t' & -\gamma_t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\tilde{p}' & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial x_t}{\partial p_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} x_t'\right] & \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial x_t}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\lambda\gamma_t}\left[\frac{\partial x_t}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] & -\frac{\partial x_t}{\partial R_t} & -\frac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}} \\
\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} x_t'\right] & \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\lambda\gamma_t}\left[\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] & -\frac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t} & -\frac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}} \\
\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} x_t'\right] & \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\lambda\gamma_t}\left[\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] & -\frac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t} & -\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}} \\
\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_t} + \frac{\partial \lambda}{\partial R_t} x_t'\right] & \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \lambda}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\lambda\gamma_t}\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] & -\frac{\partial \lambda}{\partial R_t} & -\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{k}} \\
\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \mu}{\partial p_t} + \frac{\partial \mu}{\partial R_t} x_t'\right] & \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial \mu}{\partial \gamma_t} + \frac{\partial \mu}{\partial R_t} e_{t+1}\right] & \frac{1}{\lambda\gamma_t}\left[\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{p}} + \frac{\partial \mu}{\partial \tilde{k}} \tilde{x}'\right] & -\frac{\partial \mu}{\partial R_t} & -\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{k}}
\end{bmatrix}
$$

$$
\equiv
\begin{bmatrix}
I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

ou plus simplement

$$\bar{U} \times \Phi \equiv I_{n_1+n_2+3}$$

Dans la matrice Φ, nous retrouvons la sous-matrice K_t^* (encadrée en pointillé ---)

$$K_t^* = \left[\begin{array}{cc:c}
\left[\dfrac{\partial x_t}{\partial p_t} + \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t}\, x_t'\right] & \left[\dfrac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} + \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t}\, e_{t+1}\right] & \dfrac{1}{\gamma_t}\left[\dfrac{\partial x_t}{\partial \tilde{p}} + \dfrac{\partial x_t}{\partial \tilde{k}}\, \tilde{x}'\right] \\
\left[\dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} + \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t}\, x_t'\right] & \left[\dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t}\, e_{t+1}\right] & \dfrac{1}{\gamma_t}\left[\dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{p}} \quad \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \tilde{k}}\, \tilde{x}'\right] \\
\hdashline
\left[\dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial p_t} + \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t}\, x_t'\right] & \left[\dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \gamma_t} + \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial R_t}\, e_{t+1}\right] & \dfrac{1}{\gamma_t}\left[\dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{p}} + \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{k}}\, \tilde{x}'\right]
\end{array}\right]$$

c'est-à-dire la matrice de Slutsky "complète" légèrement transformée (voir la section 1.4 sur les fonctions de demande et leurs propriétés empiriques). Cette matrice contient elle-même la matrice de Slutsky temporaire $\hat{K}_t$ (encadrée en pointillé —— ..)

$$\hat{K}_t = \begin{bmatrix}
\left[\dfrac{\partial x_t}{\partial p_t} + \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t}\, x_t'\right] & \left[\dfrac{\partial x_t}{\partial \gamma_t} + \dfrac{\partial x_t}{\partial R_t}\, e_{t+1}\right] \\
\left[\dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial p_t} + \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t}\, x_t'\right] & \left[\dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial \gamma_t} + \dfrac{\partial e_{t+1}}{\partial R_t}\, e_{t+1}\right]
\end{bmatrix}$$

Afin de faciliter l'écriture le plus possible, nous introduisons les notations suivantes :

$$U = \begin{bmatrix} U_{x_t x_t} & U_{x_t \tilde{x}} \\ U_{\tilde{x} x_t} & U_{\tilde{x}\tilde{x}} \end{bmatrix} \qquad U^* = \begin{bmatrix} U_{x_t x_t} & 0 & U_{x_t \tilde{x}} \\ 0 & 0 & 0 \\ U_{\tilde{x} x_t} & 0 & U_{\tilde{x}\tilde{x}} \end{bmatrix}$$

$$u_{x_t\tilde{x}} = \begin{bmatrix} u_{x_t} \\ u_{\tilde{x}} \end{bmatrix} \qquad u^*_{x_t\tilde{x}} = \begin{bmatrix} u_{x_t} \\ 0 \\ u_{\tilde{x}} \end{bmatrix}$$

$$x^*_t = \begin{bmatrix} x_t \\ e_{t+1} \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \qquad p^*_t = \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \tilde{p}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ \tilde{p} \end{bmatrix}$$

Avec cette notation, l'équation fondamentale (A1.32) devient :

$$\text{(A1.32)}' \quad \begin{bmatrix} U^* & -p^*_t & -\tilde{p}^* \\ -p^{*\prime}_t & 0 & 0 \\ -\tilde{p}^{*\prime} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & K^*_t & -\frac{\partial x^*_t}{\partial R_t} & -\frac{\partial x^*_t}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{1}{\lambda} & \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p_t}\right)^*\right]^c & -\frac{\partial \lambda}{\partial R_t} & -\frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{k}} \\ \frac{1}{\lambda} & \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial p_t}\right)^*\right]^c & -\frac{\partial \mu}{\partial R_t} & -\frac{\partial \mu}{\partial \tilde{k}} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} I_{n_1+n_2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition A.2 : Si la fonction d'utilité u satisfait aux hypothèses H1.1, H1.2 et H1.3 alors les dérivées des fonctions de demande temporaires et planifiées se caractérisent par les propriétés suivantes :

i) $\hat{K}_t \equiv \hat{K}_t'$

ii) $K_t^* \equiv K_t^{*\prime}$

iii) $\hat{K}_t \; \hat{p}_t \equiv 0$ avec $\hat{p}_t' = [p_t' \quad \gamma_t]$

iv) a) $K_t^* \; p_t^* \equiv 0$; b) $K_t^* \; \tilde{p}^* \equiv 0$

v) $\hat{p}_t' \; \partial\hat{x}_t/\partial R_t \equiv 1$ avec $\hat{x}_t' = [x_t' \quad e_{t+1}]$

vi) a) $p_t^{*\prime} \; \partial x_t^*/\partial R_t \equiv 1$; b) $\tilde{p}^{*\prime} \; \partial x_t^*/\partial\tilde{k} \equiv 1$

vii) a) $p_t^{*\prime} \; \partial x_t^*/\partial\tilde{k} \equiv 0$; b) $\tilde{p}^{*\prime} \; \partial x_t^*/\partial R_t \equiv 0$

viii) $\zeta' \; \hat{K}_t \; \hat{\zeta} < 0$ pour tout $\hat{\zeta} \neq \theta\hat{p}_t$, $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^{n_1+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

ix) $\zeta^{*\prime} \; K_t^* \; \zeta^* < 0$ pour tout $\zeta^* \neq \theta_1 p_t^* + \theta_2\tilde{p}^*$, avec $\zeta^* \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$

Preuve :

i) $\hat{K}_t \equiv \hat{K}_t'$

Comme $U_{x_t x_t}$, $U_{x_t \tilde{x}}$, $U_{\tilde{x} x_t}$ et $U_{\tilde{x}\tilde{x}}$ sont symétriques (car $u \in C^2(A, \mathbb{R})$ - propriété 1 de la fonction u), la matrice $\overline{U}$ est symétrique. Ainsi, par (A1.32), Φ est aussi symétrique et donc $\hat{K}_t \equiv \hat{K}_t$.

ii) $\underline{K_t^* \equiv K_t^{*\prime}}$

Même preuve que pour i) en utilisant la matrice U* et l'équation (A1.32)'.

iii) $\underline{\hat{K}_t \hat{p}_t \equiv 0}$

Par (A1.32), on a

$$-p_t \; 1/\lambda[\partial x_t/\partial p_t + \partial x_t/\partial R_t \; x_t'] - \gamma_t \; 1/\lambda[\partial e_{t+1}/\partial p_t + \partial e_{t+1}/\partial R_t \; x_t'] \equiv 0$$

et

$$-p_t' \; 1/\lambda[\partial x_t/\partial \gamma_t + \partial x_t/\partial R_t \; e_{t+1}] - \gamma_t \; 1/\lambda[\partial e_{t+1}/\partial \gamma_t + \partial e_{t+1}/\partial R_t \; e_{t+1}] \equiv 0$$

c'est-à-dire sous forme matricielle, $\hat{p}_t' \hat{K}_t \equiv 0$.
Or, $\hat{p}_t' \hat{K}_t \equiv 0 \Rightarrow \hat{K}_t' \hat{p}_t \equiv 0 \Rightarrow \hat{K}_t \hat{p}_t \equiv 0$ (car $\hat{K}_t \equiv \hat{K}_t'$).

iv) a) $\underline{K_t^* p_t^* \equiv 0}$

Par (A1.32)', on a directement $p_t^{*\prime} K_t^* \equiv 0$. Or, $p_t^{*\prime} K_t^* \equiv 0 \Rightarrow K_t^{*\prime} p_t^* \equiv 0 \Rightarrow K_t^* p_t^* \equiv 0$ (car $K_t^* \equiv K_t'^*$).

b) $\underline{K_t^* \tilde{p}^* \equiv 0}$

Même preuve que pour iv) a).

v) $\underline{\hat{p}_t' \partial \hat{x}_t/\partial R_t \equiv 1}$

Par (A1.32), on a

$$-p_t'(-\partial x_t/\partial R_t) - \gamma_t(-\partial e_{t+1}/\partial R_t) \equiv 1$$

c'est-à-dire $\hat{p}_t' \partial \hat{x}_t/\partial R_t \equiv 1$.

vi) a) $\underline{p_t^{*\prime}\ \partial x_t^*/\partial R_t \equiv 1}$

Directement par (A1.32)'. D'ailleurs vi) a) est identique à v).

b) $\underline{\tilde{p}^{*\prime}\ \partial x_t^*/\partial \tilde{k} \equiv 1}$

Directement par (A1.32)'.

vii) a) $\underline{p_t^{*\prime}\ \partial x_t^*/\partial \tilde{k} \equiv 0}$

Directement par (A1.32)'.

vii) b) $\underline{\tilde{p}^{*\prime}\ \partial x_t^*/\partial R_t \equiv 0}$

Directement par (A1.32)'.

Remarque : Nous allons d'abord prouver ix) car une fois connue la preuve pour ix), celle de viii) découle directement comme un cas particulier.

ix) $\underline{\zeta^{*\prime}\ K_t^*\ \zeta^* < 0}$ pour tout $\zeta^* \neq \theta_1 p_t^* + \theta_2 p^*$, avec $\zeta^* \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$, θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$

L'équation (A1.32)' implique que

$$U^* \frac{K_t^*}{\lambda} - \frac{p_t^*}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^*\right]^c - \frac{\tilde{p}^*}{\lambda} \left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)^*\right]^c \equiv I_{n_1+n_2+1}$$

En prémultipliant par la matrice $K_t^{*\prime}$, nous trouvons

$$K_t^{*\prime} \frac{U^*}{\lambda} K_t^* \equiv K_t^{*\prime} \equiv K_t^* \tag{A1.33}$$

à cause de nos propriétés d'additivité. Prémultiplions et postmultiplions l'équation (A1.33) par $\zeta^{*'}$ et ζ^*. Ceci nous donne

$$\zeta^{*'}\ K_t^{*'}\ \frac{U^*}{\lambda}\ K_t^*\ \zeta^* = \zeta^{*'}\ K_t^*\ \zeta^*$$

Posons $\psi^* = K_t^*\ \zeta^*$. On aura donc

$$\zeta^{*'}\ K_t^*\ \zeta^* \leq 0 \quad \text{si} \quad \psi^{*'}\ U^*\ \psi^* \leq 0$$

En fait, ψ^* n'est pas quelconque; il obéit aux relations

$$p_t^{*'}\ \psi^* = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{p}^{*'}\ \psi^* = 0$$

puisque $\psi^* = K_t^*\ \zeta^*$. Or, tout vecteur $\psi^* \neq 0$, obéissant à ces restrictions, donne nécessairement $\psi^{*'}\ U^*\ \psi^* < 0$. En effet, par l'hypothèse H1.3, nous savons que $\psi'\ U\ \psi < 0$ pour tout $\psi \neq 0$ obéissant aux seules restrictions $u'_{x_t\tilde{x}}\ \psi = 0$. Ceci entraîne $\psi^{*'}\ U^*\ \psi^* \leq 0$ pour tout vecteur ψ^* tel que $u^{*'}_{x_t\tilde{x}}\ \psi^* = 0$. Si on excluait le vecteur $\psi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}$, on aurait même $\psi^{*'}\ U^*\ \psi^* < 0$. C'est précisément ce que font les relations

$$p_t^{*'}\psi^* = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{p}^{*'}\ \psi^* = 0$$

Si la matrice K_t^* (de dimension $(n_1+n_2+1) \times (n_2+n_1+1)$ ou, plus simplement, de dimension nxn) est de rang n-2, il revient au même de dire que la matrice K_t^* est définie négative pour tout vecteur ζ^* qui n'est pas engendré par une combinaison linéaire de p_t^* et $\tilde{p}^*$. Or, nous savons que le rang de K_t^* est au plus égal à n-2 car $K_t^*\ p_t^* \equiv 0$ et $K_t^*\ \tilde{p}^* \equiv 0$ avec p_t^* et $\tilde{p}^*$ linéairement indépendants. Montrons maintenant qu'il est au moins égal à n-2. Pour ce faire, considérons le système (A1.32)'. De ce dernier, on a

$$\frac{U^*}{\lambda} K_t^* - \frac{p_t^*}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^*\right]^c - \frac{\tilde{p}^*}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)^*\right]^c \equiv I_{n_1+n_2+1} \equiv I_n$$

ou

$$\text{(A.1.34)} \qquad \begin{bmatrix} \frac{U^*}{\lambda} & \frac{-p_t^*}{\lambda} & \frac{-\tilde{p}^*}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} \equiv I_n$$

Ceci entraîne que la matrice de droite (de dimension $(n+2) \times n$) du côté gauche de l'équation (A.1.34) est de rang maximal, c'est-à-dire de rang n.

<u>Remarque</u> : Etant donné que la matrice n'est pas carrée, le fait qu'elle soit de rang maximal implique deux résultats différents :

a) $\exists\ \gamma, \delta$ avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}^{n+2}$ et γ, δ linéairement indépendants tels que

$$\gamma' \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \delta' \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} = 0$$

b) $\nexists\ \theta \neq 0$ avec $\theta \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} \theta = 0.$$

Supposons que K_t^* soit de rang n-3. Alors il existe trois vecteurs linéairement indépendants ϕ_1, ϕ_2 et $\phi_3 \in \mathbb{R}^n$ tels que $\phi_1' K_t^* = 0$, $\phi_2' K_t^* = 0$ et $\phi_3' K_t^* = 0$.

$$\text{Or } \phi_1' K_t^* = 0 \iff [\phi_1' \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} = 0$$

$$\phi_2' K_t^* = 0 \iff [\phi_2' \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} = 0$$

$$\phi_3 K_t^* = 0 \iff [\phi_3' \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} K_t^* \\ [(\partial\lambda/\partial p)^*]^c \\ [(\partial\mu/\partial p)^*]^c \end{bmatrix} = 0$$

D'où la contradiction. Ainsi, K_t^* est de rang n-2 et satisfait la propriété : $\zeta^{*\prime} K_t^* \zeta^* < 0$ pour $\zeta^* \neq \theta_1 p_t^* + \theta_2 p^*$ avec $\zeta^* \in \mathbb{R}^n$, θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$.

viii) $\underline{\hat{\zeta}' \hat{K}_t \hat{\zeta} < 0}$ pour $\hat{\zeta} \neq \theta \hat{p}_t$ avec $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^{n_1+1}$, $\theta \in \mathbb{R}$

Il suffit de montrer que le résultat ix) concernant K_t^* entraîne la même propriété pour $\hat{K}_t$.

Prenons $\zeta^* = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}$ où $\gamma \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\delta \in \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}^{n_2}$ avec $\gamma \neq \theta p_t$ et $\delta \neq \theta\gamma_t$. Par ix), on a

$$\zeta^{*\prime} K_t^* \zeta^* < 0 \iff [\gamma' \quad \delta \quad 0]\, K_t^* \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } \zeta^{*\prime} = [\gamma' \quad \delta \quad 0] \text{ tels que } [\gamma' \quad \delta] \neq \theta [p_t' \quad \gamma_t]$$

$$\iff [\gamma' \quad \delta]\, \hat{K}_t \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \theta \begin{bmatrix} p_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}$$

$$\iff \hat{\zeta}' \hat{K}_t \hat{\zeta} < 0 \quad \text{pour } \hat{\zeta} \neq \theta \hat{p}_t, \text{ avec } \hat{\zeta} \in \mathbb{R}^{n_1+1},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.2.★

APPENDICE 2

Preuve graphique visant à montrer pourquoi nous devons minimiser la fonction objective lorsque nous travaillons dans l'espace dual[1]

Le but de cet exercice est de montrer d'une façon simple pourquoi nous devons minimiser la fonction objective lorsque nous travaillons dans l'espace dual. Afin de respecter ce souci de simplicité, nous présenterons cette preuve pour le problème du consommateur. Toutefois, il est clair que des raisonnements semblables (quoique plus complexes) mèneraient aux mêmes conclusions pour le problème de l'optimum.

Considérons d'abord le problème du consommateur dans l'espace primal lorsqu'on se restreint à un modèle à deux biens :

$$\max u(x)$$
$$\text{sujet à} \quad p'x \leq R \quad \text{avec} \quad x = (x_1, x_2);\; p = (p_1, p_2)$$

Graphiquement, nous avons la figure bien connue où x^A représente le vecteur de biens qui rend l'utilité maximale, c'est-à-dire la demande du consommateur aux prix et au revenu annoncés.

---

[1]Nous n'avons pas inventé cette preuve graphique. Elle nous a été montrée par Jean-Michel Grandmont lors d'une conversation que nous avons eue avec lui.

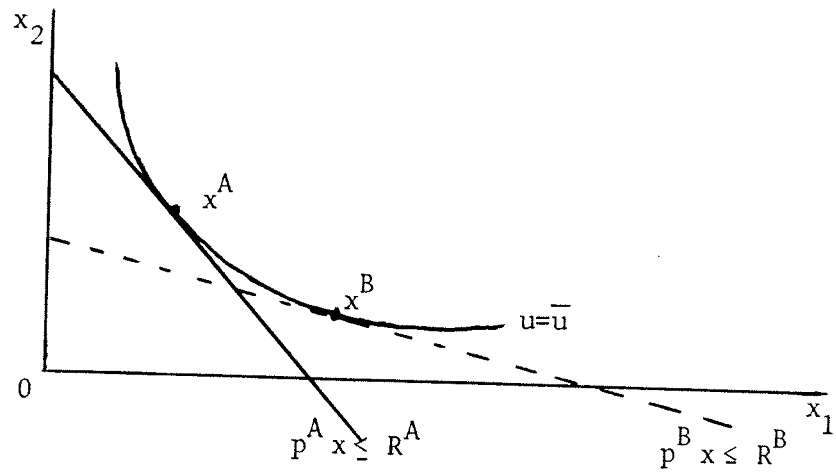

Figure 1

Définissons la fonction d'utilité indirecte

$$v(p, R) \equiv u(x(p, R))$$

Le problème du consommateur dans l'espace dual consistera à optimiser (max ou min?) la fonction v sous une contrainte de dépense, soit

$$v(p, R)$$

$$\text{sujet à} \quad p'x^0 \leq R$$

où x^0 est exogène (au même titre que p et R sont exogènes dans l'espace primal).

Si on choisit la normalisation $q_h = \frac{p_h}{R}$ (h = 1, 2), le problème revient à optimiser v(p, R) sous la contrainte $q'x^0 \leq 1$. Graphiquement, on peut représenter le problème de la façon suivante :

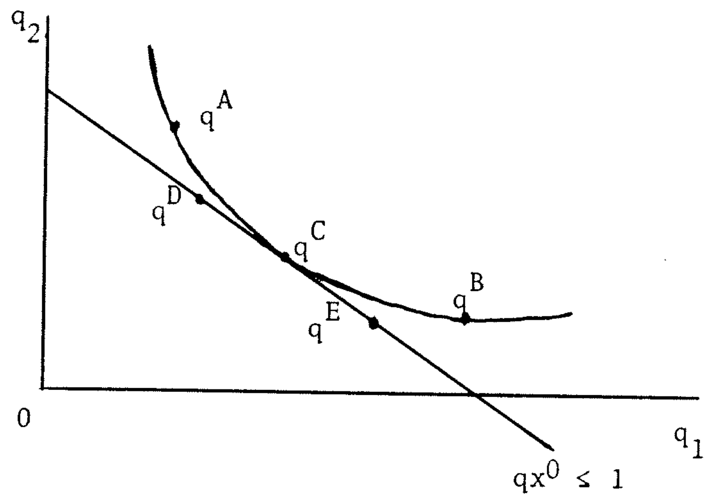

Figure 2

A ce stade-ci, nous devons remarquer les faits suivants :

1. deux points qui appartiennent à la même courbe d'indifférence ($u = \overline{u}$) sur la figure 1, par exemple x^A et x^B, fournissent le même niveau d'utilité au consommateur. A chacun de ces points, correspond un couple (p, R) différent, soit après normalisation, un couple (q_1, q_2) différent. Les deux couples correspondant à x^A et x^B sont représentés sur la figure 2 par les points q^A et q^B, c'est-à-dire deux points sur la même courbe d'indifférence ($v = \overline{v}$). Il y a donc dualité entre les courbes d'indifférence dans les deux espaces;

2. la fonction v est décroissante par rapport à p et croissante par rapport à R; elle est donc décroissante par rapport à q. Ainsi, plus on s'approche de l'origine, plus la valeur de v augmente;

3. la fonction v est quasi-convexe[1]. Ce qui signifie que l'ensemble des points (q_1, q_2) qui donnent à la fonction v une valeur moins grande que q^C (soit l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe $v = \overline{v}$), est convexe. Ainsi, v a bien la courbure qu'on lui a donnée, convexe par rapport à l'origine.

[1]Ce qu'on peut facilement montrer si u est quasi-concave.

De ces remarques, il devient évident que le problème du consommateur sera de minimiser la fonction v sous la contrainte de dépense. Autrement dit, ce problème peut s'interpréter comme suit : le consommateur auquel on offre les quantités x^0 de biens, décidera des prix qu'il est prêt à payer pour ces quantités et, partant, du revenu dont il aura besoin pour réaliser ses achats, de façon à minimiser sa "dépense réelle".

Finalement, retournons à l'espace primal pour nous convaincre que le point q^C correspond bien à un minimum de v.

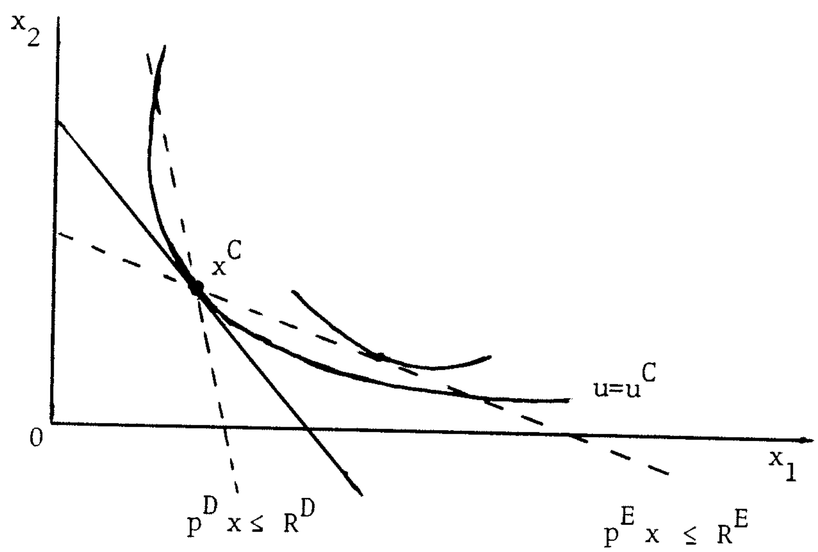

Figure 3

Supposons que le point optimal q^C trouvé dans l'espace dual correspond au point x^C dans l'espace primal (représenté sur la figure 3). Les points (q_1, q_2) qui appartiennent au même hyperplan que q^C (voir figure 2) représentent les diverses combinaisons de prix qui donnent à x^0 une valeur respectant la contrainte $q'x^0 \leq 1$. En particulier, q^D et q^E donneront la même valeur que q^C au panier de biens $x^0 = x^C$. Dans l'espace primal (figure 3), ce même phénomène est représenté par les diverses droites de budget passant par le point x^C, c'est-à-dire $p^D\, x = R^D$, $p^C\, x = R^C$ ou $p^E\, x = R^E$. Une simple observation de la figure 3 montre que toute droite de budget passant par x^C et qui n'est pas tangente à $u = u^C$ (c'est-à-dire dans l'espace dual, tout couple $(q_1, q_2) \neq q^C$ mais appartenant à $q\, x^C = 1$), permettra au consommateur d'atteindre un niveau d'utilité plus élevé. Par conséquent, q^C représente bien un minimum de la fonction v.

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je remercie d'une façon toute particulière le professeur Camille Bronsard qui a dirigé cette thèse. En plus d'apprécier ses nombreuses qualités scientifiques, j'ai toujours été frappée par son enthousiasme débordant. C'est sans doute un mélange de tout cela qui fait en sorte que, toute recherche dirigée par lui, devient fascinante. De plus, il est clair que sans ses encouragements constants, je ne me serais jamais rendue au bout de cette aventure que constitue la rédaction d'une thèse de doctorat. Par ailleurs, ces sept années de "vie commune" auront permis d'établir une amitié et une complicité sans pareille. Alors que je m'occupais de sa condition physique en jouant avec lui au racquetball, il m'enrichissait par les nombreuses discussions que nous avions ensemble. De cela aussi, j'aimerais le remercier. Je remercie chaleureusement les autres membres de mon Comité de thèse, les professeurs M. Boyer et L. Salvas. Leurs critiques et leurs suggestions m'ont été d'un grand recours. Je remercie également les participants à l'atelier de Théorie économique au dernier Congrès de l'ACFAS (mai 1984). La discussion qui a suivi mon exposé (chapitre 1 de cette thèse) a été, pour moi, des plus stimulantes.

Bien qu'il n'ait pas été mêlé directement à mes recherches, j'ai envers le professeur M. Bouchard une dette toute particulière : c'est grâce à son cours de microéconomie intermédiaire (hiver 1976) que j'ai découvert mon intérêt pour l'économique (surtout pour la micro) et que j'ai décidé de poursuivre des études supérieures dans ce domaine.

La majeure partie de cette thèse a été écrite (phase de rédaction) alors que j'étais professeur au Département d'économique à l'Université de Sherbrooke. Aussi, j'aimerais remercier mes collègues pour leurs encouragements ainsi que différents groupes d'étudiants (Micro III et Théorie économique) pour leurs questions pertinentes. Par ailleurs, j'aimerais remercier le Département de m'avoir dégagée de mon enseignement durant un mois à l'automne 1984.

Durant mes quatre années de résidence à l'Université de Montréal, j'ai bénéficié du soutien financier du Conseil de la Recherche en Sciences Humaines du Canada et du Gouvernement du Québec (DGES). Sans ce soutien financier, je n'aurais pu entreprendre mes recherches.

Enfin, madame Suzanne Larouche-Sidoti s'est chargée de la dactylographie et de la mise en page de cette thèse. Qu'elle trouve ici l'expression de mes remerciements les plus sincères pour son excellent travail et pour sa patience ...

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] ARROW, K.J. (1953), "Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques", Econométrie, Colloque International XL, CNRS, Paris, pp. 41-47.

[2] BALCH, M.S., D.L. McFADDEN et S.Y. WU (Eds.) (1974), Essays on Economic Behaviour Under Uncertainty, North Holland, Amsterdam; American Elsevier, New York.

[3] BARONE, E. (1935), "The Ministry of Production in the Collectivist State", Collectivist Economist Planning, F.A. von Hayek, Londres, Routledge and Sons.

[4] BOITEUX, M. (1956), "Sur la gestion des monopoles publics astreints à l'équilibre budgétaire", Econometrica, 24, pp. 22-40.

[5] BRONSARD, C. (1971), Dualité microéconomique et théorie du second best, Vander, Louvain.

[6] BRONSARD, C. et R. LAFRANCE (1981), "The Consumer's Optimum with the Endogenous Production of Information", Working Paper #8115, Université de Montréal.

[7] DEBREU, G. (1959), Theory of Value, New York, Wiley.

[8] DEBREU, G. (1970), "Economies with a Finite Set of Equilibria", Econometrica, Vol. 38, pp. 387-392.

[9] De MONTBRIAL, T. (1971), Economie théorique, Presses universitaires de France, Paris.

[10] DIAMOND, P.A. et J.A. MIRRLEES (1971), "Optimal Taxation and Public Production I-II", American Economic Review, 61, pp. 8-27, pp. 261-278.

[11] DREZE, J.H. (1974), Allocation Under Uncertainty : Equilibrium and Optimality, London, Macmillan.

[12] DREZE, J.H. et F. MODIGLIANI (1972), "Consumption Decision Under Uncertainty", Journal of Economic Theory, 5, pp. 308-335.

[13] FISHER, I. (1930), The Theory of Interest, Reprints of Economic Classics, Augustus M. Kelley, 1965.

[14] GRANDMONT, J.M. (1974), "On the Short-Run Equilibrium in a Monetary Economy", in [11, pp. 213-228].

[15] GRANDMONT, J.M. (1977), "Temporary General Equilibrium", Econometrica, 45, pp. 535-572.

[16] GRANDMONT, J.M. (1978), "Temporary General Equilibrium Theory", CEPREMAP, Discussion Paper.

[17] GRANDMONT, J.M. (1983), Money and Value : A Reconsideration of Classical and Neoclassical Monetary Theories, Cambridge University Press.

[18] GREEN, J.R. (1973), "Temporary General Equilibrium in a Sequentral Trading Model with Spot and Future Transactions", Econometrica, pp. 1103-1123.

[19] HAHN, F. et F.P.F. BRECHLING (Eds.) (1965), The Theory of Interest Rates, London, Macmillan.

[20] HART, O.D. (1975), "On the Optimality of Equilibrium when Markets Are Incomplete", Journal of Economic Theory, 11, pp. 418-443.

[21] HICKS, J.R. (1956), Valeur et capital, Dunod, Paris.

[22] HOOL, B. (1976), "Money, Expectations and the Existence of a Temporaty Equilibrium", The Review of Economic Studies, 43, pp. 439-445.

[23] HOTELLING, H. (1932), "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions", Journal of Political Economy, 40, pp. 577-616.

[24] KOOPMANS, T.C. (1957), Trois essais sur la science économique contemporaine, Dunod, Paris (1970).

[25] KURZ, M. (1974), "The Kesten-Stigum Model and the Treatment of Uncertainty in Equilibrium Theory", in [2, pp. 389-399].

[26] MALINVAUD, E. (1953), "Capital Accumulation and Efficient Allocations", Econometrica, 21, pp. 233-268.

[27] MALINVAUD, E. (1965), "Interest Rates in the Allocation of Resources", in [19, pp. 209-241].

[28] MALINVAUD, E. (1982), Leçons de théories microéconomiques, Dunod, Paris, 1ère édition (1969), 5e édition.

[29] PARETO, W. (1963), Manuel d'économie politique, Librairie générale de Droit et de Jurisprudence, Paris, 1ère édition (1908), 2e édition.

[30] PATINKIN, D. (1965), Money, Interest and Press, Harper and Row, 2nd Edition, New York.

[31] POLEMARCHAKIS, H.M. (1983), "Expectations, Demand and Observability", Econometrica, 51, pp. 565-574.

[32] RADNER, R. (1972), "Existence of Equilibrium Plans, Prices and Price Expectations in a Sequence of Markets", Econometrica, 40, pp. 289-303.

[33] RADNER, R. (1979), "Rational Expectation Equilibrium : Generic Existence and the Information Revealed by Prices", Econometrica, 47, pp. 655-678.

[34] RAMSEY, F. (1927), "A Contribution to the Theory of Taxation", Economic Journal, 37, pp. 47-61.

[35] SAMUELSON, P.A. (1954), "The Pure Theory of Public Expenditures", Review of Economics and Statistics, 36, pp. 387-389.

[36] SONDERMANN, D. (1974), "Temporary Competitive Equilibrium Under Uncertainty", in [11, pp. 229-253].

[37] SPIVACH, M. (1965), Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin Inc., New York.

[38] STIGUM, G. (1969), "Competitive Equilibria Under Uncertainty", Quarterly Journal of Economics, 83, pp. 533-561.

[39] STIGUM, G. (1974), "Competitive Resource Allocation Over Time Under Uncertainty", in [2].

[40] SVENSSON, L.E.O. (1976), "Sequences of Temporary Equilibria, Stationary Point Expectations, and Pareto Efficiency", Journal of Economic Theory, 13, pp. 169-183.

[41] WALRAS, L. (1926), Eléments d'économie politique pure, Lauzanne, 1ère édition (1874), 5e édition.