UNIVERSITE DE MONTREAL

L'ANALYSE DU BIEN-ETRE EN CONTEXTE DE CHOIX DISCRET

PAR

DANIEL MEILLEUR

DEPARTEMENT DE SCIENCES ECONOMIQUES

FACULTE DES ARTS ET DES SCIENCES

MEMOIRE PRESENTE A LA FACULTE DES ETUDES SUPERIEURES
EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE
MAITRISE ES SCIENCES (M.Sc)

FEVRIER 1987

TABLE DES MATIERES

Liste des tableaux

Liste des figures

Sommaire

Ce travail réunit les développements récents en ce qui concerne l'analyse du bien-être lorsque la demande individuelle est conçue comme étant un choix discret entre deux où plusieurs alternatives. Il existe deux façons de conceptualiser le choix discret dans le cadre de la maximisation de l'utilité. On montre que ces deux approches conduisent au même résultat pour l'expression de la mesure du surplus du consommateur et que cette expression est la contrefaçon de celle utilisée en contexte marginaliste, soit l'intégrale de la fonction de demande. Il existe aussi deux façons de conceptualiser la demande agrégée lorsque celle-ci est composée d'unités non-parfaitement divisibles au niveau individuel. La première, la théorie de l'utilité aléatoire, postule que les individus ont une connaissance parfaite de leur fonction d'utilité et que les erreurs proviennent de l'observation imparfaite par l'analyste, des variables entrant dans cette fonction. La seconde postule que le comportement individuel est fondamentalement aléatoire et que l'individu maximise une fonction d'espérance de l'utilité. Alors que l'opérationnalisation de la première théorie nécessite des hypothèses qui permettent de remplacer la demande probabiliste compensée par la demande probabiliste ordinaire, la seconde permet l'identification de l'utilité marginale du revenu et l'obtention de mesures hicksiennes du surplus par l'inversion numérique de la fonction d'utilité empirique. A l'aide des paramètres calibrés d'un modèle de choix modal, les méthodes décrites sont comparées numériquement. On constate que, pour les valeurs d'élasticité prix données par ces modèles, la mesure hicksienne de la variation de surplus pour un changement de prix est très près de la mesure marshallienne. En dernier lieu une mesure hicksienne du surplus basée sur la théorie de l'utilité aléatoire est suggérée.

Chapitre I

Introduction

Le calcul du surplus social suite à un projet qui modifie les coûts de transport s'effectue à l'aide d'une demande de transport dérivée à partir de demandes et d'offres de biens produits et consommés localement. Dans la mesure où les hypothèses relatives au calcul du niveau du bien-être sont respectées (distribution équitable du revenu, prix des facteurs égaux à la valeur de leur productivité marginale, goûts identiques parmi la population, quasi-séparabilité de la fonction d'utilité) et que la variation de la surface entre la courbe d'offre d'un produit et son prix représente adéquatement la rente des facteurs (compétition parfaite, absence d'externalités technologiques), on démontre que le surplus engendré par une modification des prix sur les liens d'un réseau de transport correspond à la somme des variations de surplus calculés sous les demandes marshalliennes de transport sur chaque lien [Van-dre-tak (1971), Neuberger (1971), Ranger (1973)] à condition que ces demandes satisfassent les conditions d'intégrabilité de Hotelling, i.e.: que les élasticité-revenus de chacune de ces demandes soient identiques. Ces résultats sous-entendent que le bien transport peut être défini en quantités continues.

Des développements récents dans les techniques d'estimation de la demande lorsque celle-ci comporte des unités indivisibles (donc devient incompatible avec l'analyse marginale néo-classique), s'inscrivent dans le contexte de la maximisation de l'utilité du consommateur [McFadden (1973), Harris et Tanner (1974), Domencich et McFadden (1975), Ben-Akiva (1973)]. Ces techniques tiennent compte du fait que les variations de la demande se produisent à la "marge extensive", contrairement aux techniques d'estimation de demandes continues où les variations surviennent à la "marge intensive". Par la spécification des variables et des hypothèses concernant la distribution des erreurs au niveau des fonctions d'utilité indirecte plutôt qu'au niveau des fonctions de demande, on transforme la demande individuelle en demande probabiliste et la fonction d'utilité en espérance d'utilité.

La question est maintenant de savoir comment ces nouvelles techniques d'estimation de la demande affectent le calcul du surplus du consommateur. Les travaux récents qui traitent de ce problème [Small et Rosen (1981), Hau (1985)] suggèrent qu'une mesure exacte du surplus du consommateur soit donnée par la valeur de l'intégrale de la demande probabiliste hicksienne définie entre les prix (ou indices de qualité) finae et les prix (ou indices de qualité) initiaux, peu importe le nombre de points critiques (i.e.: lorsque le consommateur augmente sa consommation d'une unité discrète) le long du chemin d'intégration [Yatchew (1984)]. La mesure du surplus en contexte de choix discret est donc de même nature que celle qui est connue pour le cas continu.

Bien que cette mesure du surplus du consommateur en contexte de choix discret, consistant en l'intégration des fonctions de choix (l'équivalent des fonctions de demande) et qu'on a nommé "valeur inclusive" ou "mesure d'accessibilité" ait déjà été connue et développée [Voir, par exemple, Williams (1977)], elle n'avait pas été, jusqu'à la contribution de Small et Rosen (1981), clairement reliée à la théorie de la maximisation de l'utilité.

La plupart des applications des modèles de choix discret ne nécesitent que la calibration d'une fonction de choix. On sera intéressé, par exemple, à prédire la fréquentation d'une nouvelle voie rapide, à étudier l'impact, sur la congestion urbaine, d'une augmentation des tarifs de stationnement, ou encore, à connaître la fraction d'une population d'insecte qui mourront suite à un dosage donné d'insecticide. Dans ces cas, la spécification des fonctions d'utilité indirecte qui sous-tendent les modèles de choix est très libre et on accorde peu d'attention à l'importance relative des paramètres estimés. L'obtention d'un indice élevé du pouvoir descriptif du modèle est l'objectif primordial. En fait, dans de tels cas, les fonctions d'utilité indirecte méritent davantage l'appellation de "fonctions d'attractivité", en ce sens qu'elles ne sont pas contraintes à respecter les propriétés des fonctions d'utilité conventionnelles.

Dans d'autres cas, particulièrement dans le cas de la mesure du surplus, la grandeur relative des coefficients des variables explicatives revêt une signification particulière.

Il existe, en fait, trois approches à l'évaluation du surplus en contexte de choix discret, qui ont leur pendant dans le choix continu. La première approche, celle de Domencich et McFadden (1975), consiste à évaluer l'espérance de l'utilité individuelle à partir d'une hypothèse sur la spécification des termes d'erreur. On peut ainsi vérifier, lorsque l'utilité marginale du revenu est constante, que l'espérance du bien-être pour une population correspond à la surface sous la demande agrégée. La seconde approche consiste à déduire, à partir des fonctions d'utilité maximisées sous des contraintes budgétaires, des fonctions de dépense dont on démontre qu'ils représentent localement l'intégration des fonctions de demande. La pratique consiste donc à évaluer ces fonctions de demande pour ensuite obtenir, par intégration, les mesures de compensation. C'est l'approche traditionnelle de la mesure du surplus que Small et Rosen (1981) traduisent dans le contexte discret.

La troisième approche consiste à évaluer les paramètres d'une fonction d'utilité dont on se servira, par inversion, pour obtenir les fonctions de dépense et de compensation. C'est l'approche de Hausman (1981) dans le cas, continu, qui reconstruit une fonction d'utilité à partir de la fonction de demande en se servant de l'identité de Roy. Le modèle de Hau (1985), en contexte de choix discret, s'inspire de cette approche. Les modèles de choix discret présentent un avantage indéniable pour une telle approche étant donné que la calibration s'effectue directement sur les fonctions d'utilité. Cependant, pour que cet avantage soit profitable, il est nécessaire d'identifier l'échelle des fonctions d'utilité empirique de telle sorte qu'une mesure unique de la compensation puisse être obtenue par inversion de ces fonctions.
Il est donc primordial, dans un tel contexte, où l'on reconnait les fonctions conditionnelles comme étant de véritables fonctions d'utilité, que ces fonctions soient spécifiées correctement en prix et en revenu, notamment que la variable revenu soit présente dans toutes les utilités conditionnelles et que les demandes probabilistes, ou fonctions de choix, soient homogènes de degré zéro en prix et en revenu. La précision

de l'estimation du surplus dépend directement de la fiabilité des paramètres de la fonction d'utilité.

Les modèles de choix discret peuvent aussi servir à évaluer monétairement des biens non-transigés sur le marché. Dans les modèles d'évaluation contingente, on cherche un indicateur, ou un "prix d'ombre", pour l'évaluation par les membres d'une population d'un bien non transigé. Cet indicateur est, dû à la connaissance incomplète de la fonction d'utilité, une variable aléatoire dont les paramètres de distribution sont issus directement des paramètres de la fonction d'utiité empirique. D'où la nécessité de spécifier correctement les variables de la fonction d'utilité. Lorsque les fonctions 'utilisés pour calibrer les modèles de choix sont vues comme des fonctions d'utilité et sont spécifiées en conséquence, il est possible d'obtenir directement les fonctions de compensation.

1.1 Présentation et plan de l'ouvrage

Le présent travail a pour but de réunir et comparer les différentes approches de la mesure du bien-être en contexte de choix discret énoncés précédemment. Bien que la plupart des exemples concernent la demande de transport, les techniques exposées peuvent être appliquées à n'importe quel autre contexte où la demande ou l'offre s'expriment en terme de choix discret.

On résume d'abord, au chapitre deux, les fondements économiques, en contexte de choix continu, des mesures de bien-être discutées dans les chapitres subséquents, soit les notions de variation compensatoire et variation équivalente.

Les chapitres trois à cinq correspondent à la description de trois théories différentes de l'utilité du consommateur en contexte de choix discret, conduisant aux trois approches pour l'évaluation du surplus mentionnées précédemment.

L'exposition des fondements théoriques des modèles d'utilité aléatoire est principalement due à Domencich et McFadden (1975) et McFadden (1974). Le chapitre trois résume la dérivation de ces modèles et leurs particularités statistiques. L'application de ces modèles conduit à l'estimation de fonctions de demande probabiliste et on peut montrer que, sous certaines conditions, notamment la constance de l'utilité marginale du revenu, le surplus du consommateur consiste en l'intégrale de cette demande probabiliste.

Le chapitre quatre discute de l'interprétation des choix discrets comme étant issus du problème de la maximisation d'une fonction d'utilité soumise à un ensemble de contraintes budgétaires. Une analyse des fonctions de dépense et de demande compensée, ainsi que la vérification des résultats de la dualité lorsque plus d'une contrainte apparaît dans le problème du consommateur, conduit à une mesure du surplus identique à celle de l'analyse néo-classique; soit l'intégrale de la demande. Il s'agit ensuite d'associer une probabilité à ces fonctions de demande et de compensation, en postulant l'existence d'un terme d'erreur, dû à des variables mal observées, dans les fonctions d'utilité sous-jacentes. On peut ainsi ancrer les mesures de bien-être dérivées des modèles de choix discret, connues sous le nom de "coût inclusif", à la théorie du consommateur.

L'application empirique du modèle décrit au chapitre quatre nécessite toujours l'hypothèse de l'absence d'effet revenu et celle de l'utilité marginale du revenu constante. Or, il est possible, sous certaines conditions, d'identifier l'utilité marginale du revenu dans les modèles de choix discret et d'obtenir une mesure hicksienne du surplus. Le chapitre cinq expose un modèle où le terme d'erreur est interprété non plus comme une variation inter-individuelle des goûts dans la population mais comme un facteur d'incertitude au niveau individuel. On obtient ainsi des fonctions d'espérance d'utilité individuelle continues en prix et en revenu, auxquelles on peut appliquer les versions stochastiques du lemme de Sheppard et de l'identité de Roy. La spécification adéquate des fonctions d'utilité empirique permet de tenir compte de l'effet revenu dans l'estimation des fonctions de compensation.

Le chapitre six aborde le problème de l'évaluation contingente. Il s'agit de trouver la valeur représentative, dans une population, d'un bien non transigé sur le marché. L'évaluation du "prix d'ombre" d'un tel bien donnée par les modèles de choix discret est une variable aléatoire. Deux mesures représentatives pour une telle évaluation sont retenues: elles correspondent à la moyenne et à la médiane de la distribution de la variable aléatoire représentant la valeur du bien.

L'application des modèles d'estimation décrits dans les chapitres trois à cinq est illustrée dans le chapitre sept à l'aide des résultats d'une étude bien connue des déterminants du choix modal en transport. Etant donné la petitesse de l'élasticité-prix propre à chacun des modes dans de tels modèles, la mesure marshallienne de la variation de surplus pour un changement de prix diffère très peu de la mesure hicksienne. Cependant, le modèle choisi comme exemple a été conçu pour estimer la demande et non pour estimer la valeur relative des paramètres. Etant donné le choix des variables dans la spécification empirique des fonctions d'utilité, on peut douter de l'exactitude des mesures d'élasticité prix et revenu. De plus, le coût des alternatives est parfois conçu comme un coût variable, alors que l'application des techniques élaborés au chapitre cinq nécessite de considérer le coût de chacune des alternatives comme un coût total. On conclura donc à la nécessité, pour l'estimation correcte des fonctions de compensation, de calibrer des modèles de choix dont la spécification des fonctions d'utilité empirique a été conçue pour un tel usage.

Finalement, le chapitre huit suggère, en s'inspirant de différents éléments tirés des modèles exposés dans les chapitres trois à six, une méthode originale, bien qu'encore incomplète, de l'analyse du surplus en contexte de choix discret qui s'accomode de l'hypothèse d'une utilité marginale variable et d'un effet revenu non nul.

Chapitre II

La mesure du bien-être en contexte de choix continu

La théorie du bien-être sert à donner des outils permettant d'ordonner, en terme d'efficacité, différents états de l'économie. Cette théorie évolue autour du concept d'"optimum de Pareto" qu'on peut résumer ainsi : une situation est optimale lorsque l'augmentation de l'utilité d'un individu ne peut se faire sans diminuer l'utilité d'un autre individu. Pour des fins pratiques, puisque les projets procurant un gain net d'utilité à tous les individus sont rares, le critère employé est celui de l'"amélioration potentielle à la Pareto", ou le critère "Hicks-Kaldor-Scitovski", qui consiste à dire qu'une situation proposée est préférable à une situation originale si les deux conditions suivantes sont réunies : les "gagnants" (c'est-à-dire les individus dont le niveau d'utilité a été augmenté par le changement de situation) peuvent compenser les perdants de façon à ce que leur utilité finale soit égale ou supérieure à leur utilité initiale; les perdants ne peuvent compenser suffisamment les gagnants éventuels de la nouvelle situation pour que ceux-ci acceptent le statu quo. L'application de ce critère implique donc la dérivation d'un équivalent monétaire du changement d'utilité. Il implique, en outre, un jugement de valeur sur la distribution des utilités. Celui qui est généralement fait consiste à affirmer qu'un dollar de biens procure la même utilité à la société, quel que soit l'individu qui le reçoit, de sorte que la somme algébrique d'une mesure d'équivalent monétaire puisse déterminer la désirabilité d'une situation par rapport à une autre. Une telle procédure ne fait pas l'unanimité au sein de la profession. On peut montrer, en outre, qu'il est impossible de construire une fonction d'utilité collective qui ne viole pas un des cinq axiomes, énoncés par Arrow, relatifs aux fonctions d'utilité collective. [Voir, par exemple, J. Quirk et R. Saposnick (1968)]. À l'intérieur même de cette procédure, l'emploi d'une mesure d'équivalent monétaire particulière est sujet à ambigüité.

Supposons que le consommateur maximise une fonction d'utilité définie sur la quantité et le niveau de qualité des biens, soit $u(\underline{x}, \underline{b})$, et soimise à une contrainte budgétaire, $\underline{p} \cdot \underline{x} = y$ et un ensemble de relations entre les quantités et les niveaux de qualité déterminés de façon exogène. (La notation soulignée signifie qu'il s'agit d'un vecteur).
La solution de ce problème détermine les niveaux de consommation $\underline{x}(\underline{p}, \underline{b}, y)$ qui, replacés dans la fonction d'utilité $u(\underline{x}, \underline{b})$, définissent une fonction d'utilité indirecte $v(\underline{p}, \underline{b}, y)$.

Il s'agit de trouver le moyen de mesurer correctement la différence, telle que perçue par le consommateur, entre l'utilité d'un système de prix, qualité et revenu proposés, soit $v(\underline{p}', \underline{b}, y')$, et d'un système de prix, qualité et revenu initiaux, $v(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y^o)$.

2.1 Mesures d'équivalent monétaire

Les trois mesures généralement retenues sont la variation compensatoire (VC), la variation équivalente (VE), et le surplus du consommateur, ou surplus marshallien (SM). La première mesure est directement liée à l'ordonnancement selon le critère de l'amélioration potentielle à la Pareto : il s'agit du montant d'argent à donner ou à retrancher au consommateur après un changement du système de façon à ce qu'il retrouve son niveau d'utilité initial.

La seconde, la VE, représente le montant d'argent à donner ou retrancher au consommateur de façon à rendre son utilité au même niveau que celui qui résulterait du changement proposé au système. La VE, contrairement à la VC, est, comme nous le verrons plus loin, une fonction strictement croissante des niveaux d'indifférence de l'individu.

Les deux premières mesures sont dérivées à partir de la fonction de dépense. C'est-à-dire :

(2.1) $$VE = e[\underline{p}^o, v(\underline{p}', \underline{b}', y')] - y^o$$

et

(2.2) $$VC = y' - e[\underline{p}', v(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y^o)]$$

où $e[\underline{p}, u]$, la fonction de dépense, est définie comme étant le revenu minimum nécessaire pour atteindre l'utilité u, étant donné un système de prix $\underline{p}$, et où $\underline{p}^o$, $\underline{b}^o$, y^o et $\underline{p}'$, $\underline{b}'$, y' représentent les prix, qualités et revenus initiaux et finaux, respectivement. La troisième mesure, le SM, correspond à la surface sous les courbes de demande des biens. La variation de SM correspond à la variation de cette surface, suite à des changements en $\underline{p}$ et en $\underline{b}$, moins la variation de la dépense totale.

De ces trois mesures, seule la variation de SM est directement accessible à partir de paramètres calculés avec les données disponibles observables, soit la variation des prix, quantités et qualités. Cependant, comme on le verra, la variation de SM ne peut servir de mesure d'équivalent monétaire que sous des hypothèses très restrictives. Puisque la fonction de dépense, comme la fonction d'utilité, n'est pas directement observable, on devra, pour calculer une mesure adéquate d'équivalent monétaire, retrouver, à partir des prix, quantités et qualités, une fonction d'utilité sous-jacente.

La dérivation de VE et VC est obtenue de la façon suivante[1]. Oublions les variations de qualités $\underline{b}$ et considérons le problème de maximisation usuel :

$$\max u(\underline{x})$$
$$\text{s.c. } \underline{p}.\underline{x} = y$$

où $\underline{x}$ est un vecteur de n biens et $u(\cdot)$ est une fonction continue, doublement différentiable et strictement quasi concave en $\underline{x}$. La fonction $v(\underline{p}, y)$ est la solution de ce problème pour différents prix et revenus. On cherche à établir une mesure cardinale de la variation d'utilité, soit

$$\Delta v = v(\underline{p}' \; y') - v(\underline{p}^o, y^o)$$

Cette mesure est donnée par

$$\Delta v = \int_{\underline{p}^o, y^o}^{\underline{p}', y'} dv(\underline{p}, y) \tag{2.3}$$

Puisque la fonction $v(\underline{p}, y)$ satisfait l'identité de Roy, la dif-

[1]Cette section est tirée de Laferrière (1984).

férentielle dv peut s'écrire :

(2.4) $$dv(\underline{p}, y) = \lambda(\underline{p}, y)\cdot(dy - \underline{x}^T(\underline{p}, y)\cdot\underline{dp})$$

où $\lambda(\underline{p}, y) = \dfrac{\partial v(\underline{p}, y)}{\partial y}$ est l'utilité marginale de la monnaie, $\underline{dp}$ est le vecteur des différentielles de prix et $\underline{x}^T(\underline{p}, y)$ est le vecteur transposé des quantités demandées.

On obtient une mesure de la variation de bien-être d'un individu, suite à un changement en $(\underline{p}, y)$, en transformant son utilité en unités monétaires, c'est-à-dire en divisant chaque incrément d'utilité par l'utilité marginale de la monnaie et en en faisant la somme, c'est-à-dire :

(2.5) $$EM = \int_{\underline{p}^o,\, y^o}^{\underline{p}',y'} \frac{dv(\underline{p}, y)}{\lambda(\underline{p}, y)}$$

$$= y' - y^o - \int_{\underline{p}^o,y^o}^{\underline{p}',y'} \underline{x}^T(\underline{p}, y)\cdot\underline{dp}$$

On sait qu'en général, la valeur de l'intégrale dépend du chemin d'intégration, c'est-à-dire de l'ordre dans lequel on change les prix et revenus de leur valeur initiale à leur valeur finale. Par exemple, la valeur de l'intégrale de ligne

$$\int_{w_1^1,\, w_2^1}^{w_1^2,\, w_1^2} W_1(w_1, w_2)\cdot dw_1 + W_2(w_1, w_2)\cdot dw_2$$

dépend de la vitesse de changement de w_1 par rapport à celle de w_2. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale soit indépendante d'un chemin d'intégration est :

$$\frac{\partial W_1}{\partial w_2} = \frac{\partial W_2}{\partial w_1}$$

La différence entre les mesures de bien-être ou d'équivalent monétaire considérées plus haut résulte de cette dépendance du chemin d'intégration. Pour le voir, posons les prix et le revenu comme fonctions d'une variable instrumentale α qui sert à définir un chemin d'intégration particulier. On pose, arbitrairement, $p_i^o = p_i(\alpha=0)$, $p_i' = p_i(\alpha=1)$, $\forall i = 1, \ldots, n$; de même, $y^o = y(\alpha=0)$ et $y' = y(\alpha=1)$. Autrement dit, la variable α décrit, locus par locus, l'ordre dans lequel chaque variable faisant partie de l'intégrant doit être incrémenté. La figure 2.1 illustre, pour un système à deux prix, deux chemins d'intégration possibles, α_a et α_b.

On peut ainsi réécrire l'équation 2.5 de la manière suivante :

(2.6) $$EM = \int_0^1 \left[\frac{dy(\alpha)}{d\alpha} - \underline{x}^T(\underline{p}(\alpha), y(\alpha)) \cdot \nabla \underline{p}(\alpha) \right] \cdot d\alpha$$

où $$\nabla \underline{p}(\alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{dp_1(\alpha)}{d\alpha} \\ \dfrac{dp_2(\alpha)}{d\alpha} \\ \vdots \\ \dfrac{dp_n(\alpha)}{d\alpha} \end{bmatrix}$$

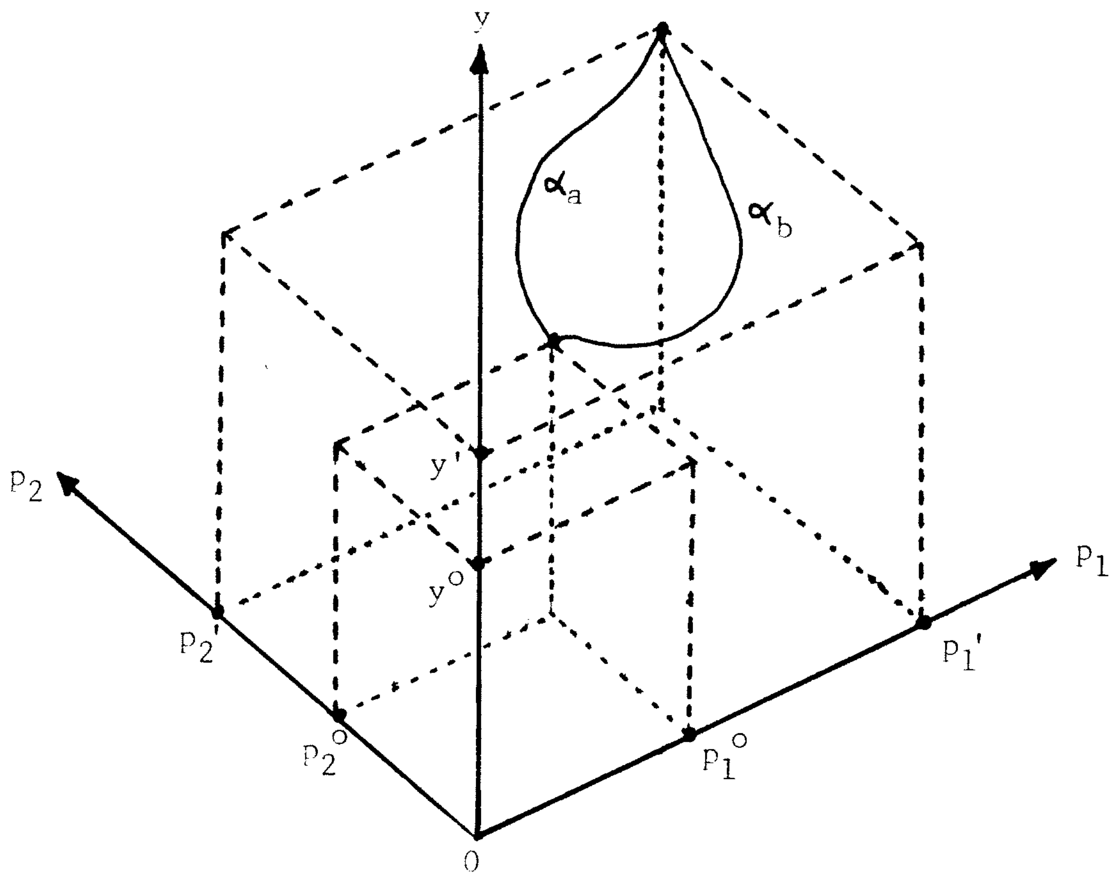


Figure 2.1 Chemins d'intégration

est le vecteur gradient.

Si on choisit ce chemin d'intégration α de telle sorte que l'égalité suivante soit respectée

(2.7) $$v[\underline{p}(\alpha),\ y(\alpha)] = v[\underline{p}^o,\ y^o]$$

alors le vecteur $\underline{x}^T[\underline{p}(\alpha),\ y(\alpha)]$ dans le terme intégrant de (2.6) est la demande en fonction des prix $\underline{p}$ lorsque le revenu est ajusté de telle sorte que le niveau d'utilité initial soit maintenu. Il s'agit donc de la demande hicksienne, ou demande compensée de $\underline{x}$. Donc, pour l'ensemble limité des chemins d'intégration qui satisfont l'égalité (2.7), la mesure d'équivalent monétaire pourra s'écrire :

$$(2.8)\quad EM = y' - y^o - \int_0^1 \underline{h}^T[\underline{p}(\alpha),\ v(\underline{p}(\alpha),\ y(\alpha))]\cdot\nabla\underline{p}(\alpha)d\alpha$$

où $\underline{h}(\underline{p}, u)$ est le vecteur des fonctions de demande compensées à la Hicks. Puisque la matrice de substitution de Slutsky est symétrique [Varian (1984), p. 134], la valeur de l'intégrale est unique pour cette classe de chemins d'intégration définie par (2.7). Par le lemme de Sheppard, la demande hicksienne est la dérivée de la fonction de dépense. Donc, on peut réécrire (2.8) par :

$$(2.9)\quad EM = y' - y^o - \int_0^1 \sum_i \frac{\partial e[\underline{p}(\alpha),\ v(\underline{p}(\alpha), y(\alpha))]}{\partial p_i} \frac{dp_i(\alpha)}{d\alpha}\, d\alpha$$

$$EM = y' - y^o - [e(\underline{p}',\ v^o) - e(\underline{p}^o,\ v^o)]$$

$$= y' - e(\underline{p}',\ v^o)$$

La valeur de l'équivalent monétaire d'une variation d'utilité Δv obtenue en choisissant un chemin d'intégration parmi ceux qui satisfont (2.7) est donc l'équivalent de la définition de la variation compensatoire en (2.2).

On pourrait, de la même manière, choisir le chemin d'intégration de telle sorte que :

$$(2.10)\qquad v[\underline{p}(\alpha),\ y(\alpha)] = v\ [\underline{p}',\ y'] = u'$$

On obtiendrait :

(2.11) $$EM = y' - y^o - \int_0^1 \underline{h}^T[\underline{p}(\alpha),\ u']\cdot\nabla\underline{p}(\alpha)\cdot d\alpha$$

$$= y' - y^o - \int_0^1 \sum_i \frac{\partial e(\underline{p},\ u')}{\partial p_i}\ \frac{dp_i}{d\alpha}\ d\alpha$$

$$= y' - y^o - [e(\underline{p}',\ u') - e(\underline{p}^o,\ u')]$$

$$= e(\underline{p}^o,\ u') - y^o$$

ce qui correspond à la définition de la variation équivalente donnée en (2.1). Cependant, puisqu'on part de l'utilité u^o, un chemin d'intégration qui satisfait (2.10) n'est possible que pour un changement infinitésimal de u, soit du. Lorsque du tend vers 0, alors α définit les courbes d'indifférence dans l'espace ($\underline{p}$, y). Un nouveau chemin d'intégration doit être défini pour chaque nouvel incrément du de l'utilité u. Donc,(2.11) peut s'exprimer par :

(2.12) $$EM = y' - y^o - \int_{u^o}^{u'} \underline{h}^T[\underline{p}(\alpha(u)),\ u]\cdot\underline{p}(\alpha(u))\frac{d\alpha}{du}\ du$$

$$= VE$$

La valeur de l'intégrale est donc indépendante d'un chemin d'intégration particulier dans l'espace ($\underline{p}$, y), ce qui fait dire à certains auteurs [par exemple : McKenzie et Pearce (1981)] que VE est le seul véritable index de bien-être. On note, en effet, que la valeur de VC dépend du niveau de l'utilité de base choisie. VC ne peut donc pas servir de fonction d'équivalent monétaire. Seule la VE a la propriété d'assigner à chaque état de prix, une et une seule valeur d'équivalent monétaire. Ceci vient du fait que $e(p^o, u)$ est une fonction strictement croissante en u aux prix de base p^o. Donc, pour $y' = y^o$, $e[p^o, v(p', y')]$ est une fonction strictement croissante en $\underline{p}$. Ainsi, si on exclut les transferts forfaitaires et si on pose à 1 l'utilité marginale de la monnaie pour l'ensemble de la population aux prix de base $\underline{p}^o$, alors VE est un index d'utilité capable d'ordonner différents états de l'économie.

Le surplus marshallien, quant à lui, est défini par :

(2.13) $$SM = \int_{\underline{p}^o}^{\underline{p}'} \underline{x}^T(\underline{p}, y) \cdot dp$$

Donc, la méthode qui consiste à prendre la surface sous la courbe de la demande observée comme indicateur de bien-être n'est valide que si on assume :

(2.14) $$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i}$$

soit la condition nécessaire à ce que la valeur de l'intégrale soit définie. Utilisant la restriction de Slutski, et multipliant chaque membre de l'équation par y, cette condition se réduit à :

(2.15) $$E_{x_i, y} = E_{x_j, y}$$

où $E_{x_i, y} = \frac{\partial x_i}{\partial y} \cdot \frac{y}{x_i}$ est l'élasticité-revenu du bien i.

L'utilisation du surplus marshallien comme mesure du bien-être nécessite donc l'égalité de l'élasticité-revenu pour tous les biens dont le prix change.

2.2 Évaluation empirique du bien-être

Puisque les variables nécessaires au calcul des mesures d'équivalent monétaire ne sont pas directement accessibles à l'analyste, celui-ci doit employer des moyens détournés pour les obtenir.

Une première méthode consiste à retrouver les fonctions de demande compensées, nécessaires à l'évaluation des mesures d'équivalent monétaire à partir des demandes marshalliennes observées en se servant des équations de Slutsky, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial h_i}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y} \tag{2.16}$$

Une seconde méthode consiste à se servir de l'identité de Roy pour intégrer les fonctions de demande estimées. On pose:

$$x_i = x_i(\underline{\hat{\theta}};\ \underline{p},\ y) = \frac{\partial v(\underline{p},\ y)/\partial p_i}{\partial v(\underline{p},\ y)/\partial y} \tag{2.17}$$

où $\underline{\hat{\theta}}$ est le vecteur des paramètres estimés dans la fonction empirique. Différenciant la fonction d'utilité :

$$dv = 0 = \frac{\partial v(\underline{p},\ y)}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\underline{p},\ y)}{\partial y} \tag{2.18}$$

on obtient, par le théorème de la fonction implicite :

$$(2.19) \qquad \frac{\partial e(\underline{p},\, u^o)}{\partial p_i} = \left.\frac{dy(\underline{p})}{p_i}\right|_{dv=0} = x_i(\hat{\underline{\theta}};\, \underline{p},\, y)$$

qui peut être intégré (en fixant une constante d'intégration c, ce qui revient à donner une valeur cardinale au niveau d'utilité initial) de façon à obtenir une fonction de dépense $e(\underline{p}, u)$ dont on se sert pour le calcul de VC ou VE [Voir Hausman (1981)]. Dans le cas où plusieurs prix changent, on peut évaluer le revenu équivalent au changement de prix du premier bien puis remplacer, dans la fonction de demande estimée, la variable revenu par ce revenu équivalent pour calculer un nouveau revenu équivalent, cette fois-ci pour le deuxième bien dont le prix change, et ainsi de suite pour tous les biens dont le prix est soumis à un changement. [Laferrière, (1984)].

Chacune de ces méthodes a ses inconvénients. Celui de la première méthode est que les équations de Slutski ne sont valides qu'au niveau individuel, alors qu'on ne possède généralement d'informations que sur la demande agrégée.
Définissons les quantités agrégées :

$$(2.20\text{ a}) \qquad \underline{X} = \sum_{i=1}^{m} \underline{x}^i$$

$$(2.20\text{ b}) \qquad Y = \sum_{i=1}^{m} y^i$$

où $\underline{x}^i$ est le vecteur des fonctions de demande de l'individu i, y^i est le revenu de l'individu i et m est la population totale.

Alors la fonction de demande $\underline{X}(\underline{p}, Y)$ n'existe que si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

a) La distribution du revenu est spécifiée de façon fixe pour chaque niveau du revenu agrégé, c'est-à-dire :

$$y^i = \emptyset^i(Y)$$

b) l'effet revenu est égal pour l'ensemble des consommateurs, c'est-à-dire :

$$\nabla_y \underline{x}^i = \nabla_y \underline{x}^j \qquad \forall\, i, j \in (1, \ldots, m)$$

où $$\nabla_y \underline{x}^i = \left[\frac{\partial x_1^i}{\partial y}, \frac{\partial x_2^i}{\partial y}, \ldots, \frac{x_n^i}{y}\right]^T$$

[Mäler, (1974), p. 119]

On peut montrer que seules les fonctions d'utilité de type Gorman satisfont la condition b). La condition a) limite l'analyse à la comparaison de situations où les prix et le revenu changent très peu pour chaque individu.

Quant à la deuxième méthode, la discussion précédente sur les sentiers d'intégration laisse douter que le revenu équivalent final dépendra de l'ordre dans lequel on a considéré les changements de prix pour le calculer.

Une troisième méthode consiste à dériver une fonction de demande à partir d'une fonction hypothétique d'utilité indirecte et d'insérer les paramètres estimés dans cette fonction d'utilité hypothétique pour comparer différentes situations, ou obtenir une fonction de dépense à partir de cette fonction d'utilité indirecte. Cette méthode est identique à la précédente sauf que la fonction de dépense ne peut, en général, s'écrire sous une forme explicite. De plus, les fonctions d'utilité indirecte doivent être choisies de telle sorte que la fonction de dépense soit indépendante des facteurs de normalisation souvent requis dans l'estimation des paramètres.

Chapitre III

La théorie de l'utilité aléatoire et la mesure du bien-être

Ce chapitre expose les fondements économiques de l'emploi de modèles de choix probabilistes[1] dans l'estimation de la demande en transport et l'implication de l'utilisation de ces modèles de choix sur la mesure du bien-être.

3.1 Modèles de demande pour le transport

L'estimation de la demande en transport a été d'abord conçue à l'aide de modèles descriptifs, notamment les modèles de "gravité". Dans ces modèles, les individus se comportent suivant des lois sociales apparentées à celles régissant le comportement des particules en physique et en thermodynamique. On a aussi utilisé des modèles de projection des tendances passées: par exemple, la demande de transport peut être expliquéé à l'aide d'une description des taux de mobilit par groupe socio-économique inférée par des données historiques. Il n'y a pas de limites à priori sur les différentes formes que peuvent prendre ces modèles. On peut, par exemple, définir les termes d'attraction dans les modèles de gravité, comme étant fonction de l'achalangage, ce qui les rend endogènes au système. Cette grande liberté dans la formulation des modèles signifie une grande probabilité d'incohé-

---

[1] Des synonymes couramment employés dans la littérature sont: "Quantal Choice", "Discrete Choice", "Disaggregated Demand".

rences et d'erreurs de spécification. De plus, en ce qui concerni l'analyse coût-bénéfice, la dépense globale en transport et les provisions en attributs ne sont pas liés à des concepts concrets, ce qui rend plutôt fragile l'explication de ces coûts pour construire une fonction de compensation globale exprimée en unités monétaires.

La tréorie du consommateur impose un cadre à l'intérieur duquel la formulation empirique des fonctions de demande doit s'inscrire. Ainsi, en postulant un modèle de comportement individuel dans lequel le consommateur maximise une fonction d'utilité strictement croissante dans les biens —et définissant un ensemble convexe —tout en étant sujet à une contrainte de revenu et un ensemble de prix déterminés par le marché, on impose à toute fonction ou tout système de fonctions de demande individuelle l'exigence de satisfaire des conditions d'intégrabilité qui permettront de retrouver la fonction d'utilité sous-jacente.[2]

---

[2]Cependant, le cadre imposé aux modèles de demande demeure toujours très large. D'une part, à cause de la nature discrète de la demande pour le transport, on est forcé d'utiliser des données agrégées afin d'obtenir des fonctions de demande continues. Or, les conditions d'intégrabilité des fonctions de

Les systèmes d'équations de demande ainsi dérivés donneront des estimés de paramètres statistiquement non-biaisés à condition que l'on puisse considérer les prix comme indépendants des quantités. Dans le cas des demandes de transport, cette condition se traduit par la nécessité de supposer une absence complète de congestion dans le réseau.

---

demande impliquent qu'elles satisfassent les équations de Slutsky. Mais les équations de Slutsky ne sont valides qu'au niveau individuel. Ainsi, on peut montrer, dans le cas où les fonctions d'utilité diffèrent d'un individu à l'autre, que n'importe quelle fonction de demande qui satisfait la loi de Walras peut être générée par un ensemble d'individus ayant des fonctions d'utilité et des caractéristiques socio-économiques différents [Debreu (1974)]. D'autre part, même si on peut supposer une fonction d'utilité à peu près commune pour l'ensemble des individus, on observe rarement le niveau des différentes variables socio-économiques pour chaque individu, de sorte qu'on doive spécifier une fonction de distribution de ces variables, avec ses différents moments, dans la population. Finalement, n'importe quelle spécification pour une fonction d'utilité indirecte qui n'est pas nécessairement, de façon globale, une fonction continue, non-croissante et quasi-convexe en prix peut servir à spécifier un système d'équation de demande dans la mesure où elle peut constituer une approximation locale d'une fonction d'utilité quelconque. [Varian (1984), chap. 4].

3.2 Demande discrète et demande continue

La demande de transport fait partie d'un ensemble de biens qui peuvent être adéquatement conçus comme un choix discret entre deux ou plusieurs alternatives. L'individu choisit de faire ou de ne pas faire un déplacement, d'aller en i ou d'aller en j, d'y aller en automobile ou en autobus, d'emprunter l'itinéraire k ou l'itinéraire m, de voyager en période de pointe ou hors pointe, etc. Or, on peut montrer que pour le modèles d'estimation par moindre carrés ordinaires l'aggrégation des données avant l'estimation résulte en une perte d'information, donc une perte de précision des paramètres estimés, dans la mesure où les unités dans chaque groupe ne sont pas homogènes pour toutes les caractéristiques [Kmenta (1971), section 9.2]. Bien qu'on ait montré que, dans certains cas, l'estimation au niveau agrégé soit préférable à celle effectuée au niveau désagrégé [Grunfeld et Griliches (1960), Aigner et Goldfeld(1974)], ces résultats ne sont pas établis d'une façon claire dans le cas où les demandes individuelles sont des quantités discrètes.

Soit un bien x entrant dans une fonction d'utilité typique représentée par $\bar{\rho}$, que l'individu maximise tout en étant sujet à une contrainte de budget représentée par B. Ordinairement, on observe x et B. Le modèle stochastique se représente par:

$$(3.1) \qquad x = h(B, \bar{\rho}) + \varepsilon$$

où h est la fonction de demande dérivée du modèle de maximisation et ε est un terme d'erreur représentant tous les éléments non-observés, notamment les écarts des utilités individuelles par rapport à l'utilité représentative, (i.e.: les variations de goût), les erreurs de spécification, les erreurs de mesure, etc. Lorsque x peut être ajusté de façon continue au niveau individuel, les erreurs provenant d'idiosyncrasies sont peu importantes relativement à l'ensemble des autres erreurs. Cependant, lorsque l'ensemble des choix possibles en x est fini, l'erreur introduite par la variation des goûts individuels peut dominer largement l'ensemble des autres erreurs. On peut le visualiser facilement dans la figure 3.1, où $\bar{\rho}$ est le système des courbes d'indifférence de l'individu représentatif et ρ_i est le système de courbes d'indifférence d'un individu i quelconque. Lorsque les biens x et y sont disponibles en quantités continues, l'ensemble de choix est défini par la surface OAD. L'erreur effectuée en spécifiant une fonction d'utilité $\bar{\rho}$ est ε_1. Lorsque x n'est disponible qu en quantités 0, x_1, x_2 ou x_3, l'ensemble de choix est défini par [OA, x_1B, x_2C] et le

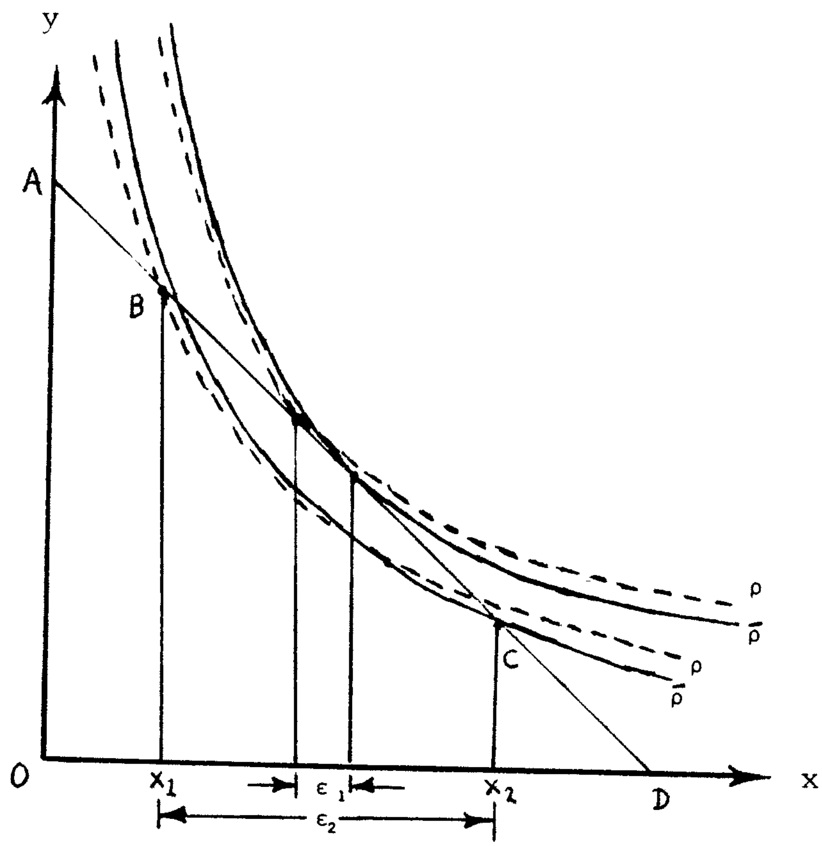


Figure 3.1 Variations à la marge intensive et à la marge extensive

point D. L'erreur effectuée en spécifiant une fonction d'utilité $\bar{\rho}$ est $\varepsilon_2 = x_2 - x_1$. Donc, lorsque la demande individuelle est de nature discrète, on préférera un cadre d'analyse qui tienne compte explicitement de la variation des goûts individuels.

3.3 Dérivation d'un modèle de choix discret de la théorie du consommateur

Il existe deux approches possibles pour la dérivation des modèles de choix discrets à partir de la théorie du consommateur. Dans l'approche dite de l'utilité aléatoire, on postule que l'individu a une connaissance complète de sa fonction d d'utilité et des attributs de tous les biens de son ensemble de choix. Les écarts possibles de comportement observés entre deux individus identiques proviennent du fait que l'analyste, contrairement à l'individu, a une connaissance imparfaite de cette fonction d'utilité. Les fonctions d'utilité spécifiées ne sont toujours qu'une représentation approximative de la "vraie" fonction d'utilité. Dans l'approche dite de l'utilité constante, le choix d'un panier de consommation ou d'une alternative par-t ticulière représente pour l'individu une "lotterie" sur les niveaux d'utilité possibles. La fonction d'utilité à laquelle se réfère l'individu pour déterminer son choix est donc une "espérance d'utilité" dans le sens entendu par Von-Neuman-Morgenstein.

Nous exposons ici la dérivation d'un modèle de choix à partir du concept de l'utilité aléatoire. La discussion de l'approche de l'utilité constante sera abordée au chapitre cinq.

3.3.1 Théorie des choix rationels

Une théorie des choix rationels impliqùe qu'un consommateur choisira toujours, parmi un ensemble d'alternatives $\underline{x}$, celle qui lui est la plus désirable. Chaque alternative consiste en la consommation d'un certain nombre de biens qui présentent un ensemble d'attributs $\underline{b}$. Le problème du consommateur selon la théorie de l'utilité aléatoire se présente donc sous la forme:

$$\max \quad u(\underline{x}, \underline{b}, \underline{s})$$
$$\text{s.c.} \quad (\underline{x}, \underline{b}) \in A_{\underline{s}}$$

où $A_{\underline{s}}$ est l'ensemble de choix qui s'offre au consommateur ayant les caractéristiques socio-économiques $\underline{s}$.

3.3.2 Séparabilité de la fonction d'utilité

En pratique, le nombre d'alternatives incluses dans le vecteur $\underline{x}$ peut être infini. Même en ne considérant que des biens discrets, l'ensemble de choix peut être suffisamment grand pour rendre impossible toute forme d'analyse. Nous supposerons donc que l'individu suit une règle de décision séquentielle, myope des choix antécédents et postérieurs. Ainsi, un individu peut décider d'avance du montant de dépense alloué au transport.

Ou encore, lors du choix modal, on suppose que l'individu a déjà fait la décision de se déplacer et que sa destination a été déterminée.

Considérons deux ensembles de biens ou d'attributs, $\underline{x}$ et $\underline{z}$. On exige que

$$u(\underline{x}^a, \underline{z}, \underline{s}) \succsim u(\underline{x}^b, \underline{z}, \underline{s})$$

si, et seulement si

$$u(\underline{x}^a, \underline{z}'\ \underline{s}) \succsim u(\underline{x}^b, \underline{z}', \underline{s})$$

où $\underline{x}^a$ et $\underline{x}^b$ représentent deux choix possibles de consommation de $\underline{x}$. Ceci signifie que la préférence de $\underline{x}^a$ sur $\underline{x}^b$ est indépendante du niveau de consommation de l'ensemble des biens et attributs représentés par $\underline{z}$. Une condition suffisante pour assurer cette indépendance est la séparabilité stricte de la fonction d'utilité. Celle-ci s'exprime par:

$$u(\underline{x}, \underline{z}, \underline{s}) = \Psi\,[\,\phi_1(\underline{x}, \underline{s}) + \phi_2(\underline{z}, \underline{s})\,] \tag{3.3}$$

où Ψ est une fonction monotone croissante. Cette condition nécessite des hypothèses très fortes sur le comportement, aussi préférons nous l'éviter. Une condition nécessaire est donnée par la séparabilité faible de la fonction d'utilité. Si les préférences sont localement non-saturées et qu'il est possible de consommer $\underline{z}$ en quantités continues, alors l' utilité u peut être exprimée par:

$$u(\underline{x}, \underline{z}, \underline{s}) = \Psi[\, \Phi(\underline{x}, \underline{s}), \underline{z}, \underline{s} \,] \tag{3.4}$$

où Ψ est une fonction monotone croissante en Φ . La maximisation de la sous-utilité Φ conduit à une fonction de demande de $\underline{x}$ donnée par

$$x_i = x_i(\underline{p}, y^x) \tag{3.5}$$

où x_i est l'élément i du groupe $\underline{x}$, $\underline{p}$ est le vecteur prix (normalisé) du vecteur $\underline{x}$ et y^x est la dépense globale sur $\underline{x}$ [Voir Varian (1984) section 3.14 et Yatchew (1984)].

3.3.3 Modèle de choix d'une population

Soit un ensemble d'alternatives $j = [1, \ldots, J]$ ayant chacune un vecteur d'attributs $\underline{b}_j$, et soit un vecteur $\underline{s}$ résumant l'ensemble des caractéristiques socio-économiques d'un individu. On postule l'existence d'une fonction d'utilité $u(\underline{b}, \underline{s})$ à l'aide de laquelle l'individu peut exercer son choix à l'intérieur de l'ensemble A déterminé par les attributs $\underline{b}_j$ des différents choix et le vecteur $\underline{s}$.

On postule aussi que les variations de niveau des attributs associés à une alternative n'influent sur l'utilité du consommateur que lorsque l'alternative en question est choisie.[3] On peut donc écrire une utilité conditionnelle au choix d'une alternative j par:

$$\tilde{u}_j = \tilde{u}_j(\underline{b}_j, \underline{s}) \tag{3.6}$$

Cependant, cette fonction d'utilité comprend des éléments qui ne peuvent être observés par l'analyste, de sorte que de son point de vue, l'utilité se présente sous la forme

$$\tilde{u}_j = \tilde{u}_j(\underline{b}_j, \underline{s}, \varepsilon) \tag{3.7}$$

---

[3]Cette restriction est nécessaire dans le but de présenter des modèles simples. Elle peut être relâchée dans les modèles de type "valeurs extrêmes généralisées" dont le logit emboité, résumé en annexe , en est un cas spécial.

où ε est un terme aléatoire résumant les particularités de chaque consommateur et les attributs non-observés. On obtient donc une probabilité de choisir l'alternative j:

$$(3.8) \qquad P(j) \equiv \pi_j = \Pr[u_j(\underline{b}_j, \underline{s}, \varepsilon) \geqslant u_k(\underline{b}_k, \underline{s}, \varepsilon), \quad \forall k \in A]^4$$

Il est à noter que même si les arguments de la fonction u, soit les vecteurs $(\underline{b}, \underline{s})$, comportent des prix et un revenu, la fonction d'utilité $\tilde{u}_j(\underline{b}_j, \underline{s})$ n'est pas une fonction d'utilité indirecte au sens de la théorie néo-classique dualiste et n'est donc pas contrainte à respecter les propriétés de quasi-convexité et d'homogénité de degré 0 en $(\underline{p}, y)$.

Pour fin d'estimation empirique, l'idée est de séparer l'utilité en une partie systématique, $V_j(\underline{b}_j, \underline{s})$, et une partie aléatoire, $\varepsilon_j(\underline{b}_j, \underline{s})$. Suivant l'hypothèse de l'additivité des termes d'erreur (la seule hypothèse considérée ici), l'équation (3.8) se réécrit:

$$(3.9) \qquad \pi_j = \Pr[V_j(\underline{b}_j, \underline{s}) + \varepsilon_j(\underline{b}_j, \underline{s}) \geqslant V_k(\underline{b}_k, \underline{s}) + \varepsilon_k(\underline{b}_k, \underline{s}), \quad \forall k \in A]$$

---

4 La probabilité $\Pr[\tilde{u}_j(b_j,z,s,\varepsilon) = \tilde{u}_k(b_k,z,s,\varepsilon)]$ peut être ignorée dans la mesure où on suppose une fonction de densité continue pour $\tilde{u}_j$ et $\tilde{u}_k$. Dans ce cas, $\Pr[\tilde{u}_j = \tilde{u}_k] = 0$

Supposons que le choix se pose entre deux alternatives seulement. Pour alléger la notation, on laisse tomber les arguments des u, v et ε, qui doivent être sous-entendus.

(3.10) $$\Pi_j = Pr[V_j - V_k \geqslant \varepsilon_k - \varepsilon_j] = 1 - \Pi_k$$
$$= Pr[\Delta V \geqslant \varepsilon]$$

Il est de pratique courante de spécifier V comme une fonction linéaire de ses arguments, i.e.:

(3.11) $$V_j = \underline{\theta} \cdot \underline{q}_j$$

où $\underline{\theta}$ est un vecteur de paramètres, et $\underline{q}_j = [\underline{b}_j, \underline{s}]$

On doit maintenant élaborer un modèle d'estimation empirique pour $\underline{\theta}$. La section suivante décrit les particularités d'un tel modèle.

3.4 Modèles économétriques avec variable dépendante discrète

On cherche à évaluer les paramètres d'une fonction de choix $\underline{\Pi}(\underline{\theta}; \underline{q})$. Comme la variable dépendante est de nature discrète et que la fonction Π_j doit être interprétée comme une probabilité et ainsi pouvoir satisfaire les contraintes

(3.12) $$0 \leqslant \Pi_j(\underline{\theta}; \underline{q}) \leqslant 1$$

(3.13) $$\sum_j \Pi_j(\underline{\theta}; \underline{q}) = 1,$$

les techniques usuelles de régression linéaire ne peuvent être utilisées.

Le problème peut être posé de la façon suivante. On s'intéresse à la variable $\Delta V = V_j(\underline{q}_j) - V_k(\underline{q}_k)$. On peut observer $\underline{q}_j$ et $\underline{q}_k$ mais V_j et V_k sont inaccessibles à l'analyste. Seule l'nformation sur la fréquence des observations qui, étant donné $\underline{q}_j$ et $\underline{q}_k$, dépassent le seuil $\Delta^o V = 0$, nous est accessible.

Ce problème se réduit à postuler une fonction de distribution pour $\varepsilon = \varepsilon_k - \varepsilon_j$. Suivant l'équation (3.10), on aura:

(3.14) $\quad \Pi_j = F_\varepsilon(\Delta V)$

où $F_\varepsilon(\varepsilon)$ est la fonction de distribution cumulative de la différence des erreurs.

Il est important de noter que $\underline{\Pi}$ est indépendant d'une transformation linéaire de l'échelle d'utilité. Soit :

(3.15) $\quad u_j' = A \cdot u_j + B.$

Alors :

$$u_j'(\underline{\theta};\ \underline{q}_j) = A \cdot V_j(\underline{\theta};\ \underline{q}_j) + A \cdot \varepsilon_j + B$$

$$u_j' - u_k' = A\,[V_j(\underline{\theta};\ \underline{q}_j) - V_k(\underline{\theta};\ \underline{q}_k)] + A\,(\varepsilon_j - \varepsilon_k)$$

$$= A\,[\Delta V(\underline{\theta};\ \underline{q}) + \varepsilon\,]$$

Si V est spécifié linéairement en $\underline{q}$, i.e. :

$$V_j = \underline{\theta}_j \cdot \underline{q}_j,$$

alors $V_j' = A \cdot \underline{\theta} \cdot \underline{q}_j$ et V' est distribué selon une variance $A^2 \mathrm{var}(\Delta V)$. La variance des termes d'erreur influence donc l'échelle des fonctions d'utilité. Comme cette variance n'est pas identifiable, la valeur des paramètres estimés de la fonction d'utilité n'a pas de signification. Seule la valeur relative de ces paramètres est significative. Par convenance, on fixe la variance de ε à $\sigma^2_\varepsilon = 1$.

On s'intéressera particulièrement à deux fonctions de distribution de erreurs, soit la distribution normale et la distribution Gumbell. La première conduit au modèle probit, la seconde au modèle logit.

3.4.1 Modèle probit

Il est raisonnable de croire que les termes d'erreur ε_j et ε_k résultent de la combinaison d'un grand nombre de composantes indépendantes non-observées. De par le théorème centrale-limite, on supposera donc que les distributions des termes d'erreur ε_j et ε_k sont normales et indépendantes des termes en $\underline{q}_j$ et $\underline{q}_k$, avec:

$$E(\varepsilon_j) = E(\varepsilon_k) = 0 \tag{3.16}$$

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_j) = \sigma^2_j, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_k) = \sigma^2_k, \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = \sigma_{jk}$$

Donc, $\varepsilon = (\varepsilon_k - \varepsilon_j) \sim N(0,\sigma^2)$, où $\sigma^2 = \sigma^2_j + \sigma^2_k - 2\sigma_{jk}$ et où σ^2_j, σ^2_k et σ_{jk} sont les variances et covariance de ε_j et ε_k, respectivement. Alors, la probabilité (3.10) s'exprime par:

$$\Pi_j = \phi(\Delta V/\sigma) = \phi(\underline{\theta}\cdot\Delta\underline{q}/\sigma) \tag{3.17}$$

où $\phi(\cdot)$ est la fonction cumulative standard :

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\tfrac{1}{2}x^2)\,dx$$

Comme mentionné précédemment, le terme de variance des erreurs, σ , sert à fixer l'échelle de la fonction de l'écart des utilités et n'est pas identifiable du vecteur de paramètre $\underline{\theta}$.

3.4.2 Modèle logit

Le modèle logit nécessite l'hypothèse que les termes d'erreur $\varepsilon = \varepsilon_k - \varepsilon_j$ soient distribués selon une fonction logistique, ou Gumbell, donnée par:

(3.18) $$f(\varepsilon) = \frac{\exp(-\mu\,\varepsilon)}{[1 + \exp(-\mu\varepsilon)]^2}$$

où μ est un paramètre de dispersion. La fonction cumulative est :

(3.19) $$F(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp(-\mu\varepsilon)}$$

Cette distribution suit de très près la distribution normale. La figure 3.2, tirée de Domencich et McFadden (1975), illustre la comparaison entre la distrinution normale et la distribution logistique.

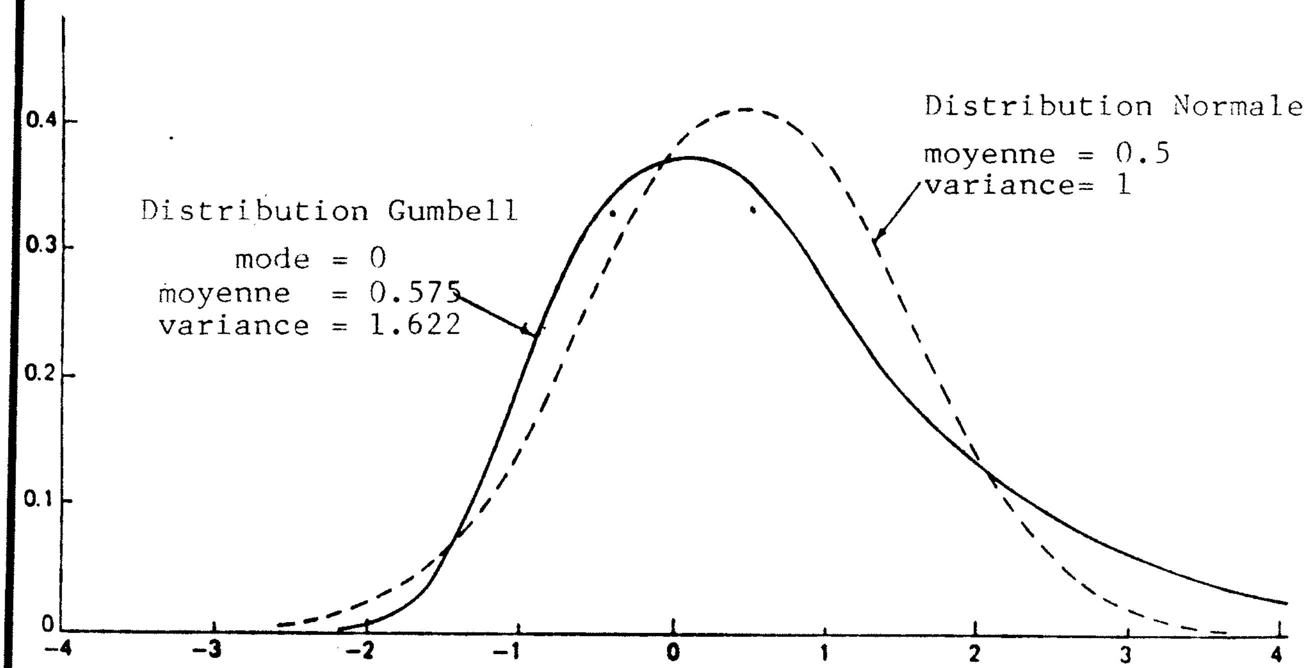


Figure 3.2: Distribution normale et gumbell.

Les propriétés de la fonction gumbell et la dérivation du logit sont exposés en annexe A. La probabilité (3.10), lorsque les termes d'erreur ε sont distribués selon la fonction logistique, est donnée par :

$$\Pi_j = \frac{1}{1 + \exp(-\mu(\Delta V_j))} \tag{3.20}$$

$$= \frac{1}{1 + \exp(-\mu \cdot \underline{\theta} \cdot \Delta \underline{q})}$$

$$= \frac{\exp(\mu \cdot \theta_j \cdot \underline{q}_j)}{\exp(\mu \cdot \theta_j \cdot \underline{q}_j) + \exp(\mu \cdot \theta_k \cdot \underline{q}_k)}$$

Comme mentionné précédemment, le fait de multiplier l'utilité par un facteur constant ne change pas l'ordonnancement des choix. Lorsque l'utilité est exprimée sous forme linéaire, le paramètre μ ne peut être distingué de l'échelle des paramètres $\underline{\theta}$. On pose donc $\mu = 1$. La figure 3.3 [tirée de Ben-Akiva et Lerman (1985)] illustre le rôle des paramètres de distribution dans les modèles de choix logit et probit. On peut voir que, lorsque le μ du logit tend vers l'infini ou que le σ du probit tend vers 0, le modèle de choix devient déterministe, i.e. :

$$\Pi_j = \begin{cases} 1 \text{ si } V_j \geqslant V_k \\ 0 \text{ si } V_j < V_k \end{cases}$$

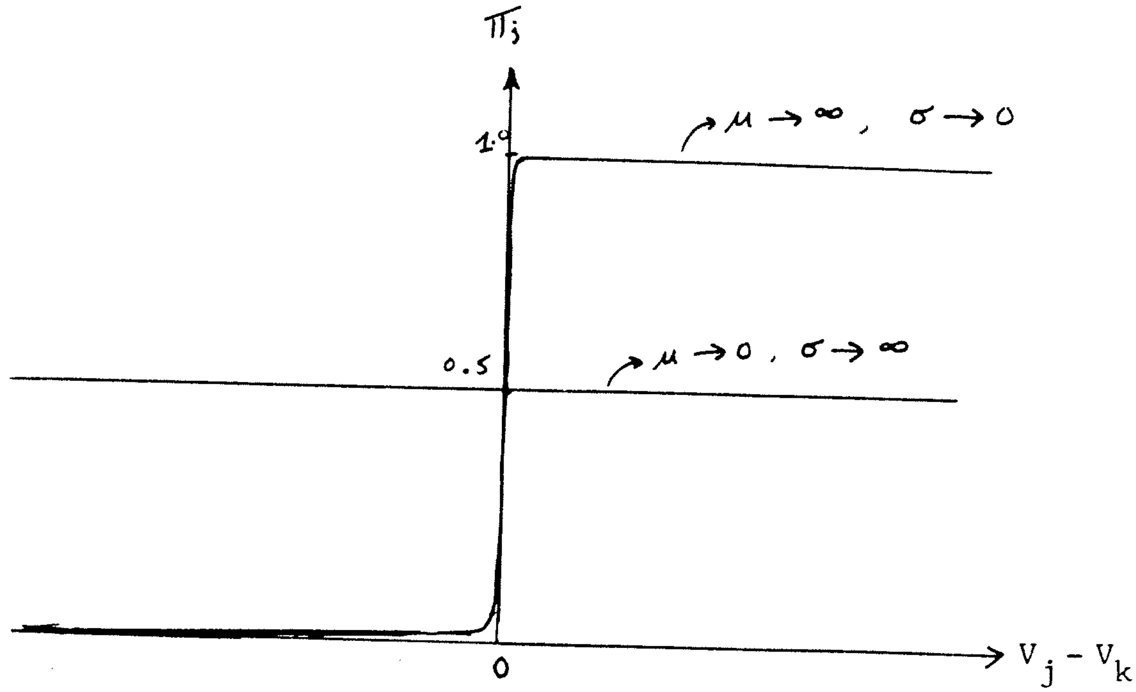


Figure 3.3 Cas limites: logit et probit.

A l'opposé, lorsque μ tend vers zéro ou que σ tend vers l'infini, l'information apportée par la variation de q est "noyée" dans la variation des termes d'erreur et les probabilités de l'une ou l'autre des alternatives s'égalent à $\Pi_j = \Pi_k = 1/2$.

Les modèles logit et probit binaires examinés dans cette section sont généralisables à l'analyse de situations où on retrouve J alternatives différentes. Les modèles de choix multinominaux et leurs propriétés sont présentés en annexe A.

3.5 Modèle d'utilité aléatoire et mesure du bien-être

L'analyse du bien-être exposée dans le chapître précédent implique le postulat selon lequel tous les biens sont disponibles en quantités infiniment divisibles. C'est à partir de ce postulat qu'on peut appliquer l'analyse marginale et les mathématiques de différenciation et d'intégration pour dériver les fonctions de compensation à partir des variables observées.

En outre, si on travaille avec une utilité marginale du revenu constante, résultant de l'hypothèse d'une forme additive séparable pour la fonction d'utilité individuelle représentative, l'intégrale de la demande marshallienne donne une mesure correcte de la variation du bien-être.

Pour les raisons mentionnées dans la section 3.2, il est parfois préférable de tenir compte explicitement de la nature indivisible de certains biens dans l'analyse de la demande. On veut examiner la validité de ces résultats lorsque le choix s'effectue à la marge extensive, c'est-à-dire lorsque certains biens ne sont disponibles qu'en quantités discrètes.

Supposons que l'alternative 1 consiste en la consommation d'un bien discret, par exemple le service d'autobus pour se rendre au travail, et que l'alternative 2 consiste en la consommation d'un autre mode. Domencich et McFadden font l'hypothèse que la fonction d'utilité individuelle est additivement séparable en un bien numéraire. Cette hypothèse assure qu'un même montant d'argent procurera la même utilité à la société peu importe l'individu qui en sera bénéficiaire, à condition de supposer que le bien numéraire est consommé en quantité positive par tous les membres de la population.

Plus spécifiquement, on postule des fonctions d'utilité conditionnelle de la forme

$$\tilde{u}_j = z + W(\underline{b}_j) + \varepsilon_j \qquad j = [1, 2]$$

où $\tilde{u}_j$ est le niveau d'utilité atteint en choisissant l'alternative j et $\underline{b}_j$ est le vecteur de caractéristiques associés à l'alternative j, z représentant la quantité consommée d'un bien numéraire. Soit p_1 et p_2 les prix des alternatives 1 et 2 respectivement, et y le revenu personnel. La quantité de numéraire consommée par les individus qui choisissent l'alternative 1 sera $(y - p_1)$ et sera $(y - p_2)$ pour les autres. Considérons un changement de prix de l'alternative 1 de p_1^o à

p_1', le prix de l'alternative 2 étant fixé à $\bar{p}_2$. Puisqu'on a postulé une fonction d'utilité de forme additive, le niveau de bien-être social, qu'on définit comme étant la somme des utilités de chaque individu, ne dépend pas de la distribution de y dans la population . Il est donc possible de poser, pour un individu type, un revenu initial y^o et un revenu final y' tels que :

$$(3.22) \qquad y' - y^o = k\{[p_1' \cdot X_1(p_1') - p_1^o \cdot x_1(p_1^o)] - C(p_1 1, \ p_1^o)\}$$

où $X_1(p_1)$ est la demande agrégée pour l'alternative 1, $C(p_1 1, p_1^o)$ est le coût total du projet qui entraine le passage du prix de l'alternative 1 de p_1^o à p_1' et k est un facteur de proportion tel que $0 \leqslant k \leqslant 1$. La quantité entre crochets est la dépense globale sur le bien 1.

Le consommateur i choisira entre l'alternative 1 et l'alternative 2 selon que son utilité conditionnelle au choix de 1, $\tilde{u}_1$, soit inférieure ou supérieure à son utilité conditionnelle au choix de l'alternative 2, $\tilde{u}_2$. Ainsi, aux prix p_1, $\bar{p}_2$, l'alternative 1 est choisie lorsque :

$$(3.23) \qquad (y - p_1) + W_1 + \varepsilon_1 > (y - \bar{p}_2) + W_2 + \varepsilon_2$$

où $W_j = W(\underline{b}_j)$ est la partie commune de la fonction d'utilité, et où ε_1 et ε_2 reflètent la variation des goûts dans la population. Le niveau d'utilité du consommateur type est donné par :

$$(3.24) \qquad u(p_1, \bar{p}_2) = \max\{\tilde{u}_1(p_1), \tilde{u}_2(\bar{p}_2)\}$$

$$= \max\{y - p_1 + W_1 + \varepsilon_1, \quad y - \bar{p}_2 + W_2 + \varepsilon_2\}$$

$$= y + (W_2 + \varepsilon_1 - \bar{p}_2) + \max\{\varepsilon, \Delta V(p_1, \bar{p}_2)\}$$

où $\Delta V(p_1, \bar{p}_2) = V_1(p_1) - V_2(\bar{p}_2) = (W_1 - p_1) - (W_2 - \bar{p}_2)$ et $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Puisque le terme entre parenthèse dans le membre de droite de l'équation (3.24) ne dépend pas de p_1, on peut définir un index de bien-être en fonction de p_1 en se servant de $u' = u - (W_2 + \varepsilon_1 - \bar{p}_2)$. On considère l'espérance mathématique de u', soit:

$$(3.25) \qquad E[u'(p_1, \bar{p}_2)] = y + \int_{-\infty}^{+\infty} \max[\varepsilon, \Delta V(p_1, \bar{p}_2) \cdot f_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

où

$$f_\varepsilon(\varepsilon) = \partial F_\varepsilon(\varepsilon)/\partial\varepsilon$$

est la fonction de distribution des erreurs. L'équation (3.25) peut être réécrite par :

$$(3.26) \qquad E[u'(p_1, \overline{p}_2)] = y + \int_{-\infty}^{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)} \Delta V(p_1, \overline{p}_2) \cdot f_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon + \int_{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)}^{\infty} \varepsilon \cdot f_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

$$= y + \Delta V(p_1, \overline{p}_2) \cdot F_\varepsilon(\Delta V(p_1, \overline{p}_2) + \int_{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)}^{\infty} \varepsilon \cdot f_\varepsilon(\varepsilon) d\varepsilon$$

Puisqu'on postule $E(\varepsilon) = 0$ et que les modèles probit et logit satisfont

$$\int_{-\infty}^{0} F_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon < \infty$$

on peut transformer (3.26) et écrire:

$$(3.27) \qquad E[u'(p_1, \overline{p}_2)] = y + \Delta V(p_1, \overline{p}_2) \cdot F_\varepsilon(\Delta V(p_1, \overline{p}_2)) + E(\varepsilon) - \int_{-\infty}^{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)} \varepsilon . f_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

$$= y + \Delta V(p_1, \overline{p}_2) \cdot F_\varepsilon(\Delta V(p_1, \overline{p}_2)) - \varepsilon \cdot F_\varepsilon(\varepsilon) \Big|_{-\infty}^{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)} + \int_{-\infty}^{\Delta V(p_1, \overline{p}_2)} F_\varepsilon(\varepsilon) \cdot d\varepsilon$$

$$E[u'(p_1, \bar{p}_2)] = y + \int_{-\infty}^{\Delta V(p_1, \bar{p}_2)} F_\varepsilon(\varepsilon)\cdot d\varepsilon$$

Le passage du prix de l'alternative 1 de p_1^o à p_1' entraine un changement dans l'espérance d'utilité donné par :

$$E[u'(p_1', \bar{p}_2)] - E[u'(p_1^o, \bar{p}_2)] = y' - y^o + \int_{\Delta V(p_1^o, \bar{p}_2)}^{\Delta V(p_1', \bar{p}_2)} F_\varepsilon(\varepsilon)d\varepsilon \tag{3.28}$$

Le dernier terme de (3.28) est la probabilité de consommer l'alternative 1. En effet, on peut effectuer un changement de variable pour obtenir :

$$\Delta E = y' - y^o + \int_{p_1^o}^{p_1'} F_\varepsilon[\Delta V(p_1, \bar{p}_2)]\cdot dp_1 \tag{3.29}$$

$$= y' - y^o + \int_{p_1^o}^{p_1'} \Pi_1(p_1, \bar{p}_2)\cdot dp_1$$

La mesure du surplus en contexte de choix discret est donc l'intégrale de la demande probabiliste. Ce résultat est identique à celui qu'on obtient, sous les mêmes hypothèses, dans le contexte continu. En effet, lorsque le problème du consommateur est

$$(3.30) \qquad \max U(\underline{x}, z) = u(\underline{x}) + z$$
$$\text{s.c. } \underline{p}\cdot\underline{x} + z = y$$

la fonction d'utilité indirecte est de la forme

$$(3.31) \qquad v(\underline{p}, y) = u(\underline{x}(\underline{p}, y^*)) + y - y^*$$

où y^* est le niveau de revenu qui assure une consommation positive du bien z. Par l'identité de Roy, la demande pour un bien x_i est

$$- \partial u(\underline{x}(\underline{p}, y^*)/\partial p_i .$$

Donc, l'intégrale de la fonction de demande x_i mesure la variation de l'utilité. On note donc l'adéquation entre l'intégrale de la demande probabiliste dans le cas discret et l'intégrale de la demande ordinaire dans le cas continu.

Dans le cas où l'estimation de Π_1 est faite par le logit, nommément :

$$(3.32) \qquad \Pi_1(V_1, V_2) = \frac{\exp(V_1)}{\exp(V_1) + \exp(V_2)}$$

la valeur de l'intégrale dans (3.29) peut être exprimée explicitement. On obtient donc une expression pour la variation de bien-être d'un individu typique i qui est:

$$(3.33) \qquad \Delta E^i = \ln\left\{\exp[V_1(p_1', \underline{b}_1')] + \exp[V_2(p_2, \underline{b}_2)]\right\} - \ln\left\{\exp[V_1(p_1^o, \underline{b}_1^o)] + \exp[V_2(p_2, \underline{b}_2)]\right\}$$

$$= \left[\frac{\exp[V_1(p_1', \underline{b}_1')] + \exp[V_2(p_2, \underline{b}_2)]}{\exp[V_1(p_1^o, \underline{b}_1^o)] + \exp[V_2(p_2, \underline{b}_2)]}\right]$$

L'expression $\ln\{\exp(V_1) + \exp(V_2)\}$ dans l'équation (3.33) est aussi appelée "valeur inclusive". Elle est ainsi appelée parce qu'elle sert, dans les modèles logit emboités (voir annexe) à représenter la valeur utilitaire globale d'un ensemble de choix dans une dimension à l'intérieur d'une autre dimension.

3.6 Résumé du chapitre trois

Nous avons élaboré une théorie des choix rationels à partir de laquelle on a pu construire un modèle d'estimation de la demande lorsque celle-ci est de nature discrète au niveau individuel. Ce modèle se limite à l'analyse des choix effectués en une seule dimension, c'est-à-dire que les alternatives faisant partie de l'ensemble de choix sont vues comme étant toutes indépendantes les unes des autres. Parce que l'ensemble de choix est discontinu, il est impossible de faire appel aux techniques usuelles de calcul différentiel pour caractériser les fonctions de dépense. Cependant, il est possible, sous des hypothèses relativement restrictives, nommément celles de l'additivité du bien numéraire dans la fonction d'utilité et de la constance de l'utilité marginale du revenu, d'obtenir une mesure de la variation de bien-être à partir du modèle de l'utilité aléatoire. Cette mesure consiste en l'intégrale de la demande probabiliste, présentant ainsi une analogie avec le cas continu où, sous les mêmes hypothèses, la mesure du surplus correspond à l'intégrale de la demande ordinaire.

Chapitre quatre

Modèles de choix à contraintes multiples: approche de Small et Rosen

Nous abordons dans ce chapitre une façon différente d'analyser le bien-être en contexte de choix discret. Plutôt que de supposer, comme dans le chapitre précédent, que la contrainte budgétaire est toujours satisfaite et de considérer le revenu comme une variable socio-économique, on peut analyser explicitement le rôle du revenu dans les fonctions de demande discrète et dériver des fonctions de dépense à l'aide desquelles on caractérisera le surplus du consommateur.

4.1 Modèle néo-classique et choix discret

Il existe trois façons de concevoir les modèles de choix discret en restant cohérent avec la théorie néo-classique du consommateur.

Supposons qu'on puisse écrire une fonction d'utilité individuelle de la forme $u(\underline{x}, \underline{b}, z)$, où $\underline{x}$ est le niveau de consommation d'un ensemble fini de biens, $\underline{b}$ est un ensemble de niveaux de qualité relatifs à ces biens et z est un bien numéraire représentant l'ensemble des autres biens non inclus dans $\underline{x}$. Le problème classique du consommateur consiste à maximiser $u(\underline{x}, \underline{b}, z)$ sous une contrainte budgétaire $\underline{p} \cdot \underline{x} + p_z \cdot z = y$, où $\underline{p}$ est le vecteur des prix des biens $\underline{x}$, p_z est le prix normalisé de l'ensemble des autres biens et y est le revenu.

Un premier élément de non-continuité survient lorsque, pour des raisons techniques ou institutionnelles, la consommation de deux biens, x_i et x_j, ne peut être faite simultanément. Par exemple, si le consommateur n'a qu'une demeure principale et qu'il choisit de s'établir en a, il ne peut aussi, en même temps, s'établir en b. Une fois le choix de la localisation effectué, il est possible de consommer n'importe quelle quantité de bien logement. Afin de tenir compte de cet élément de non-continuité, on peut ajouter, à la contrainte budgétaire dans le problème du consommateur, une nouvelle contrainte de la forme $x_i \cdot x_j = 0$.

Un second élément de non-continuité est introduit par le fait qu'il existe des biens non parfaitement divisibles, de sorte que la plupart des consommateurs n'en consomment qu'un ou deux, ou pas du tout. Il s'agit, pour représenter ce fait, de poser une nouvelle contrainte de forme $x_k = [0, 1]$ ou $x_k = [\text{nombre entier}]$, où x_k est le bien non parfaitement divisible. Ce cas est typique de la très grande majorité des problèmes de choix discret traités dans la littérature.
Par exemple, si on définit x_k comme étant la consommation du service de transport en commun pour un déplacement donné, alors x_k ne peut prendre que la valeur 0 ou 1. Similairement, si x_k représente le niveau d'éducation et que toute dureé de scolarité n'a de valeur que dans la mesure où elle est sanctionnée

par un diplôme, alors x_k ne pourra prendre que certaines valeurs $[x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots]$ correspondant au diplôme d'études secondaires, de CEGEP, au baccalauréat, à la maîtrise, etc.

Enfin, un troisième aspect de la discontinuité dans la demande survient lorsque, pour des prix et un revenu donnés, la structure de la fonction d'utilité est telle qu'elle conduise à des solutions en coin. Une demande de nature discrète peut aussi être due à l'existence de régions de non-concavité dans la fonction d'utilité. Par exemple, lorsque deux programmes sont télédiffusés en même temps, la plupart des consommateurs préfèrent consommer tout l'un ou tout l'autre. Hanneman (1984 b) traite de l'estimation de la demande issue de fonctions d'utilité ayant une telle forme.

Nous analyserons ici la dérivation des fonctions de dépense pour le premier cas mentionné précédemment. L'analyse est essentiellement la même pour le second cas et sera reprise au chapitre huit.

4.2 Fonctions de compensation en contexte discret

Oublions pour l'instant l'aspect qualité des biens et posons une fonction d'utilité de la forme:

(4.1) $u = u(x_1,\ x_2,\ z)$

qu'on maximise sous les contraintes

(4.1 a) $p_1 x_1 + p_2 x_2 + z = y$

(4.1 b) $x_1 \cdot x_2 = 0$

(4.1 c) $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad z > 0$

où z est un bien numéraire dont le prix a été normalisé à 1 et y est le revenu.

Définissons les fonctions d'utilité conditionnelle

(4.2 a) $\tilde{u}_1 = u(x_1,\ 0,\ z) = \tilde{u}_1(x_1,\ z)$

(4.2 b) $\tilde{u}_2 = u(0,\ x_2,\ z) = \tilde{u}_2(x_2,\ z)$

On postule que:

a) la valeur de $\tilde{u}_i(x_i, z)$ est finie, pour tout $(x_i,\ z) > 0$, $i = [1,\ 2]$

b) $0 < \partial \tilde{u}_i / \partial z < \infty$, $0 \leqslant \partial \tilde{u}_i / \partial x_i < \infty$ $i = [1,\ 2]$

c) $u(x_1,\ x_2,\ z)$ est strictement quasi-concave en $(x_1,\ x_2,\ z)$

Supposons qu'on ait choisi de consommer le bien 1. Le problème se réduit alors à maximiser $\tilde{u}_1(x_1, z)$ sous la contrainte $p_1 \cdot x_1 + z = y$. Etant donné la condition b), on peut déduire les fonctions de demande hicksienne conditionnelle $\tilde{h}_1(p_1, u)$, de dépense conditionnelle $\tilde{e}_1(p_1, u)$, d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_1(p_1, y)$, toutes conditionnelles à $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$. Similairement, en posant $x_1 = 0$, on peut obtenir $\tilde{h}_2(p_2, u)$, $\tilde{e}_2(p_2, u)$ et $\tilde{v}_2(p_2, y)$.

Par le lemme de Sheppard, on a:

$$\frac{\partial \tilde{e}_i(p_i, u)}{\partial p_i} = \tilde{h}_i(p_i, u) \tag{4.3}$$

Pour tout revenu $\bar{y}$, l'individu fera le choix d'une alternative qu'on dénotera par j. Ainsi:

$$\bar{y} = \tilde{e}_j(p_j, u) = e(p_1, p_2, u). \tag{4.4}$$

On a aussi:

$$\bar{u} \equiv v(p_1, p_2, \bar{y}) = \tilde{v}_j(p_j, \bar{y}) \equiv \max\{\tilde{v}_1(p_1, \bar{y}), \tilde{v}_2(p_2, \bar{y})\} \tag{4.5}$$

Puisque

$$\tilde{v}_i(p_i, \bar{y}) \leqslant \bar{u}, \quad i = [1, 2] \tag{4.6}$$

alors

(4.7) $\qquad \tilde{e}_i(p_i, \bar{u}) \geq \bar{y}, \qquad i = [1, 2]$

ce qui implique que:

(4.8) $\qquad e(p_1, p_2, \bar{u}) \equiv \min_i \{\tilde{e}_i(p_i, \bar{u})\}$

Puisque chacune des fonctions de dépense conditionnelle est continuellement différenciable en prix, alors $e(p_1, p_2, u)$ l'est aussi, sauf aux points où $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_2$. Cependant, on peut montrer[1] qu'au voisinage de ces points, la dérivée existe.

Donc, la fonction $\dfrac{\partial\, e(p_1, p_2, u)}{\partial\, p_1}$ existe et est:

(4.9)
$$\frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_1} = \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{e}_1(p_1, u)}{\partial p_1} \equiv \tilde{h}_1 & , \text{ si } j = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{e}_2(p_2, u)}{\partial p_2} \equiv 0 & , \text{ si } j = 2. \end{cases}$$

On peut donc définir une fonction de demande hicksienne $h_1(p_1, p_2, u)$ telle que:

(4.10)
$$h_1(p_1, p_2, u) = \begin{cases} \tilde{h}_1(p_1, u) & , \text{ si } j = 1 \\ 0 & , \text{ si } j = 2. \end{cases}$$

---

[1] La preuve est élaborée au chapitre huit.

Puisque $e(p_1, p_2, u)$ est dérivable en $\underline{p}$, par segments, elle est intégrable et on peut écrire la variation compensatoire pour un changement de prix de p_1 par :

$$(4.11) \qquad e(p_1', p_2, u^o) - e(p_1^o, p_2, u^o) = \int_{p_1^o}^{p_1'} \tilde{h}_1(p_1, p_2, u) \cdot dp_1$$

4.3 Demande agrégée

Supposons qu'on puisse définir une fonction de demande agrégée compensée pour un bien, par exemple, le bien 1:

$$(4.12) \qquad H_1(p_1, p_2. \{\underline{u}\}) = \sum_{n=1}^{N} h_1(p_1, p_2, u^n)$$

où u^n est le niveau de l'utilité du n ième individu parmi une population de taille N, $\{\underline{u}\}$ représente l'ensemble de ces utilités et $h_1(\cdot)$ est la fonction de demande individuelle (discrète) compensée pour le bien 1. La fonction $H_1(\cdot)$ dépend donc, en plus des prix, des niveaux d'utilité de tous les consommateurs. On peut alors concevoir une mesure de compensation arg agrégée pour un changement de prix p_1, en faisant la sommation sur l'ensemble des individus de l'équation (4.11), c'est-à-dire :

(4.13)
$$\Delta E = E(p_1', p_2, \{\underline{u}\}) - E(p_1^o, p_2, \{\underline{u}\})$$
$$= \int_{p_1^o}^{p_1'} H_1(p_1, p_2, \{\underline{u}\})\cdot dp_1$$
$$= \int_{p_1^o}^{p_1'} \sum_{n=1}^{n} h_1(p_1, p_2, u^n)\cdot dp_1$$

Ainsi, la variation compensatoire est la variation de la surface à gauche de la courbe de demande compensée évaluée au niveau $\{\underline{u}^o\}$, où $\{\underline{u}^o\}$ est le vecteur de l'utilité initiale des N individus.

La demande $h_1(p_1, p_2, u)$ est composée d'un élément continu, soit $\tilde{h}_1(p_1, u)$, et d'un élément discret, soit le choix de consommer le bien 1 ou un autre bien. Pour représenter ce fait, Small et Rosen choisissent de séparer la demande $h_1(p_1, p_2, u)$ en deux éléments, soit:

(4.14)
$$h_1(p_1, p_2, u) = \delta_1(p_1, p_2, u)\cdot\tilde{h}_1(p_1, u).$$

où δ_1 est un indice de choix prenant la valeur 0 ou 1 selon que l'alternative consistant à consommer le bien 1 est choisie ou non.

Etant donné que l'analyste n'a pas une connaissance complète de la fonction d'utilité individuelle, la décision, à la marge extensive, de consommer le bien 1, ne peut être inférée qu'à une probabilité près, et la décision, à la marge intensive, concernant la quantité x_1 consommée du bien 1, advenant que cette alternative soit choisie, n'est estimée qu'à une erreur près. On pourrait donc remplacer l'indice de choix $\delta_1(p_1, p_2, u)$ par une fonction de choix Π_1, comme vue dans le chapitre trois, pour estimer les fonctions de compensation à l'aide de l'équation (4.11). Cependant, deux remarques s'imposent. D'une part, l'indice $\delta_1(p_1, p_2, u)$ et la demande conditionnelle $\tilde{h}_1(p_1, u)$ sont des fonctions <u>compensées</u>, en ce sens que, pour la mesure de surplus suite à un changement de prix par l'application de (4.11), les revenus individuels sont ajustés de telle sorte que u demeure constant à u^o. Remplacer ces fonctions par une demande marshallienne et une fonction de choix probabiliste définie sur $\underline{p}$ et y nécessite de poser des hypothèses supplémentaires. D'autre part, on suppose que l'estimation de Π_1 et de x_1 peut être faite conjointement, ou, du moins, par des méthodes récursives comme celle de Heckman (1979).

4.4 Application économétrique

La plupart des modèles économétriques de choix discret dans la littérature ont des fonctions d'utilité spécifiées suivant la forme:

$$\tilde{v}_j^i(p_j,\ b_j,\ y^i) = V^i(y^i) + W_j(p_j,\ b_j,\ y^i;\ \underline{s}^i) + \epsilon_j^i \tag{4.15}$$

où $v_j^i(\cdot)$ représente l'utilité pour un individu i de l'alternative j et où $W_j(\cdot)$ représente une fonction d'utilité conditionnelle dont la forme est commune à l'ensemble des individus. Le terme d'erreur ϵ_j^i est considéré indépendant des arguments de $W_j(\cdot)$. Le vecteur $\underline{s}^i$ représente un vecteur de caractéristiques observables qui varient d'un consommateur à l'autre. Puisque le premier terme de l'équation (4.15), $V^i(y^i)$, ne varie pas d'une alternative à l'autre, il est généralement omis des spécifications empiriques.

La spécification d'une forme de distribution des termes d'erreur ϵ_j^i conduit à l'estimation d'une probabilité $\Pi_1^i(p_1,\ p_2,\ y^i;\ \underline{s}^i)$ qu'un consommateur ayant les caractéristiques $\underline{s}^i$ et le revenu y^i choisisse l'alternative 1. Supposons que $\Pi_1(p_1,\ p_2,\ y;\ \underline{s})$ ait été estimé par un échantillon tiré d'une population de taille N dont les individus varient entre exu quant au niveau de leurs caractéristiques et des prix auquels ils font face. Alors l'espérance du nombre total d'individus choisissant l'alternative 1 sera:

$$(4.16) \qquad N(1) = \sum_{i=1}^{N} {}_{1}(p_1^i, p_2^i, y^i, \underline{s}^i)$$

Alternativement, l'espérance de la <u>part</u> de l'alternative 1 dans la population est:

$$(4.17) \qquad P(1) = (1/N) \sum_{i=1}^{N} \Pi_1(p_1^i, p_2^i, y^i, \underline{s}^i)$$

$$= E_N[\Pi_1(p_1, p_2, y, \underline{s})]$$

Parce que la connaissance du niveau des attributs p_1, p_2, y et $\underline{s}$ pour l'ensemble de la population exigerait la collecte d'un nombre irréaliste de données, on doit utiliser une méthode d' agrégation pour estimer la part de l'alternative 1, P(1). Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer P(1). [Voir Ben-Akiva et Lerman (1985), p. 134, Koppelman (1975), Bouthelier (1978)]. Une de ces méthodes consiste à utiliser un échantillon représentatif de la population pour estimer P(1). Cet estimé est :

(4.18) $$P(1) = (1/N_s) \sum_{i=1}^{N_s} \Pi_1(p_1^i,\ p_2^i,\ y^i,\ \underline{s}^i)$$

où N_s est la taille de l'échantillon. En supposant que chaque individu de l'échantillon N_s dont les caractéristiques observées entrent dans la classe y^i et $\underline{s}^i$ soient représentatifs de l'ensemble de la population ayant ces caractéristiques et revenus, on peut interpréter $\hat{\Pi}_1(p_1,\ p_2,\ y^i,\ \underline{s}^i) = E(\Pi_1(\cdot))$ comme étant la prédiction de la fraction de cette classe particulière de consommateurs qui choisira l'alternative 1.[2] (Dans le reste du texte l'accent circonflexe sera omis mais la probabilité estimée doit être entendue comme l'espérance de la probabilité.)

La demande agrégée de x_1 pour les individus appartenant à la classe i, soit X_1^i, sera donc:

(4.19) $$X_1^i(p_1,\ p_2,\ b_1,\ b_2,\ y^i,\ \underline{s}^i) = N^i \cdot \pi_1^i(\cdot) . \tilde{x}_1^i(\cdot)$$

---

[2]Cette méthode, dite de l'énumération échantillonnale, peut aussi être utilisée lorsque l'échantillon est tiré de façon non-aléatoire dans la population. Par exemple, lorsque l'échantillon est stratifié pour différentes classes, on peut estimer les probabilités pour ces différentes classes et calculer la part de l'alternative dans l'ensemble de la population par la somme pondérée de ces différentes classes [Ben-Akiva et Lerman (1985), p. 146].

La demande de x_1 peut être exprimée en terme du rapport des dérivées de la fonction d'utilité indirecte par rapport à p_1 et à y par l'application de l'identité de Roy. Notamment, l'utilité v(.) de l'équation (4.5) est égale à $\tilde{v}_1(\cdot)$ pour la fraction de la population N^i qui consomme l'alternative 1, et à $\tilde{v}_2(\cdot)$ pour les autres. Etant donné que $\partial v_i/\partial p_j = 0 \quad i \neq j$, on peut remplacer, dans (4.19), la valeur de $\mathbf{x}_1$ en se servant de l'identité de Roy pour obtenir :

$$(4.20) \qquad X_1^i(p_1, p_2, \mathbf{b}_1, b_2, y^i, \underline{s}^i) = N^i \pi_1^i \frac{\partial W_1^i/\partial p_1}{\lambda^i}$$

où

$$\lambda^i = \frac{\partial V^i}{\partial y^i} + \frac{\partial W_1^i}{\partial y^i}$$

Si l'effet revenu est négligeable, on peut poser l'équivalence entre la demande ordinaire $x_1^i(p_1, p_2, y^i, \underline{s}^i)$ et la demande compensée $h_1^i(p_1, p_2, u^i, \underline{s}^i)$, d'où :

$$(4.21) \qquad \frac{\partial e(p_1, p_2, u^i)}{\partial p_1} = x_1^i(\cdot)$$

En agrégeant l'équation (4.21) sur l'ensemble des individus appartenant à la classe i et en utilisant (4.20), on obtient:

$$(4.22) \qquad \frac{\partial E}{\partial p_1} = - N^i \cdot \pi_1^i \cdot \frac{\partial W_1^i / \partial p_1}{\lambda^i}$$

On a vu, dans la section précédente, que les fonctions d'utilité et de dépense sont définies, continues et différenciables à droite et à gauche en tout points ($\underline{p}$, $\underline{b}$). On peut modifier les fonctions d'utilité en ajoutant des termes de qualité sans modifier la nature de ces conclusions. Ces fonctions satisfont donc l'identité :

$$(4.23) \qquad u \equiv v(p_1, p_2, b_1, b_2, e(p_1, p_2, b_1, b_2, u))$$

Or, l'équation (4.21) est obtenue par le lemme de Sheppard en différenciant (4.23) par rapport au prix et en se servant de l'identité de Roy. On pourrait aussi différencier (4.23) par rapport aux niveaux de qualité, $\underline{b}$, pour obtenir, de façon similaire à (4.22) :

$$(4.24) \qquad \frac{\partial E}{\partial b_1} = -N^i \cdot \pi_1^i \cdot \frac{\partial W_1^i / \partial b_1}{\lambda^i}$$

La variable revenu qui apparaît comme argument des fonctions $W_1^i(\cdot)$ et $\;^i(\cdot)$ est le revenu compensé, c'est-à-dire le revenu tel que le niveau original d'utilité soit maintenu. Grâce au fait qu'on considère l'effet revenu négligeable et l'utilité marginale du revenu constante, on peut intégrer l'équation (4.22) sur p_1, ou l'équation (4.24) sur b_1, pour obtenir :

$$(4.25) \qquad \Delta E^i = \frac{N^i}{\lambda^i} \int_{W_1^o}^{W_1'} \Pi_1(W_1, W_2) \cdot dW_1$$

Pour des formes fonctionnelles empirique de $W_i(:)$ où le prix et les niveaux de qualité sont inclus, on peut obtenir un estimé de $\partial W_1/\partial p_1$ et de $\partial W_1/\partial b_1$. La valeur de λ^i peut être obtenue d'expériences indépendantes.[3]

Ce résultat est généralisable au cas où on a plusieurs alternatives et où les changements s'effectuent sur plusieurs prix et qualités, par :

---

[3]Small et Rosen laissent entendre qu'on peut obtenir λ^i par les coefficients estimés de la fonction d'utilité. Par exemple, si la variable prix est spécifiée linéairement dans les fonctions d'utilité empirique et que α_p est le coefficient estimé de cette variable, alors, selon Small et Rosen, l'utilité marginale de la monnaie serait $\lambda^i = -\alpha_p/x_1$. Or, nous avons vu, dans le chapitre précédent, que la valeur de α_p n'a aucune signification en elle même et dépend du facteur de normalisation employé pour la va-

$$\Delta E^i = \frac{N^i}{\lambda^i} \int_{\underline{W}^o}^{\underline{W}'} \sum_{j=1}^{J} \pi_j(\underline{W}) \cdot dW_j \tag{4.26}$$

où

$$\underline{W}(\underline{p},\ \underline{b}) = [W_1(\underline{p},\ \underline{b}),\ \ldots\ ,\ W_J(\underline{p},\ \underline{b})]$$

et

$$\underline{W}^o = \underline{W}(\underline{p}^o,\ \underline{b}^o),\quad \underline{W}' = W(\underline{p}',\ \underline{b}')$$

et J est le nombre total d'alternatives, à condition de postuler que la matrice jacobienne $[\partial\pi_i/\partial W_j]$ soit symétrique. Dans un tel cas, comme nous l'avons mentionné au chapitre deux, l'intégrale linéaire (4.26) est unique, i.e. ; ne dépend pas de l'ordre d'incrémentation de $\underline{p}$ et de $\underline{b}$.

L'expression (4.25) est aussi le résultat obtenu par Domencich et McFadden, exposé dans le chapitre précédent, lorsque l'utilité marginale de la monnaie est constante et unitaire et lorsque la demande conditionnelle pour le bien 1 est identique à 1. Dans le cas où la demande conditionnelle est de nature continue, l'analyse de Small et Rosen implique que l'estimation de la demande de x_1 et du choix de l'alternative 1 soit faite conjointement pour obtenir le résultat (4.25).

---

riance des erreurs. L'estimé de l'utilité marginale de la monnaie selon le rapport $-\alpha_p/x_1$ implique donc que la méthode d'estimation jointe de x_1 et de π_1 calibre les paramètres de la fonction d'utilité de telle sorte que ce rapport exprime correctement l'utilité marginale de la monnaie.

4.5 Résumé du chapitre quatre

Il est possible, en considérant la demande discrète comme étant issue d'un problème de maximisation d'une fonction d'utilité soumise à un ensemble de contraintes, de caractériser les fonctions de dépense dans le contexte discret. On a vu que celles-ci sont continuellement dérivables par segments et, donc, intégrables. L'application du lemme de Sheppard conduit à une mesure du surplus qui consiste en l'intégrale d'une fonction de demande hicksienne. Il s'agit de remplacer la composante discrète de cette demande compensée par une fonction probabiliste compensée. Sous les hypotyèses de la constance de l'utilité marginale du revenu et d'un effet revenu négligeable, on peut remplacer la demande probabiliste compensée par une demande probabiliste ordinaire pour mesurer empiriquement la variation compensatoire.

Small et Rosen obtiennent ainsi, avec des fonctions de demande "discrètes-continues" , un résultat identique à celui de Domencich et McFadden utilisant des alternatives discrètes. Dans l'interprétation de Small et Rosen, le revenu n'est plus simplement une caractéristique socio-économique; il est partie intégrante du modèle de choix et du problème du consommateur.

Un pas supplémentaire est donc franchi vers la dérivation d'une mesure hicksienne du surplus en contexte de choix discret.

Chapitre V

Mesure hicksienne du surplus: approche de Hau

Alors que la démarche de Small et Rosen (1981) consiste à dériver une version du Lemme de Sheppard et de l'identité de Roy en contexte de choix discret en ajoutant une contrainte discrète au problème conventionnel de maximisation d'utilité puis à associer ultérieurement une probabilité aux demandes déterministes ainsi obtenues, la démarche de Hau (1984) revient à intégrer l'élément probabiliste dans la fonction d'utilité individuelle pour ensuite dériver des versions stochastiques du lemme de Sheppard et de l'identité de Roy. Ainsi, dans les modèles précédents de Small et Rosen et de McFadden, on dérive une fonction de compensation pour un individu étant donné un choix effectué "ex-ante", tandis que le modèle de Hau suppose qu'un individu ne connait l'utilité de son choix qu'à une probabilité près.

5.1 Modèle d'utilité constante

Dans ce modèle, le comportement individuel est fondamentalement aléatoire. On l'appelle "modèle d'utilité constante" dans la mesure où l'utilité individuelle est définie par l'"espérance d'utilité". Pour chaque individu, l'espérance d'utilité est définie par:

(5.1) $$EU = E[\max_j \{v_j\}] \equiv E[\max_j \{V_j(p_j, b_j, y) + \varepsilon_j\}]$$
$$\equiv EU(\underline{p}, \underline{b}, y)$$

où E est l'opérateur d'espérance mathématique, et où V_j est défini ici comme l'utilité moyenne associée à l'alternative j ; ε_j représentant les écarts possibles autour de cette moyenne. $v_j(\cdot)$ est donc une quantité aléatoire qui varie selon les états d'âme de l'individu.

On peut ainsi définir la notion d' "espérance de l'utilité marginale du revenu" par :

(5.2) $$E[\lambda] = E\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial EU}{\partial y}$$

et celles d' "espérance de l'utilité marginale du prix" ou de la "qualité" d'une alternative par :

(5.3) $$E\left(\frac{\partial U}{\partial p_j}\right) = \frac{\partial EU}{\partial p_j}$$

(5.4) $$E\left(\frac{\partial U}{\partial b_j}\right) = \frac{\partial EU}{\partial b_j}$$

Etant donné que le prix p_j et, par l'hypothèse faite dans la section 3.3.3, le niveau de qualité b_j n'influe que sur le niveau moyen de l'utilité associée à l'alternative j, les expressions (5.3) et (5.4) peuvent être réécrites par:

$$E \frac{\partial U}{\partial p_j} = \frac{\partial EU}{\partial V_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial p_j} \tag{5.5}$$

et

$$E \frac{\partial U}{\partial b_j} = \frac{\partial EU}{\partial V_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial b_j} \tag{5.6}$$

On démontre [Daganzo (1979), p. 131, exposé dans l'appendice] que la dérivée de EU par rapport à l'utilité conditionnelle V_j, pour tous les modèles avec une forme additive des termes d'erreur, est la probabilité Π_j de choisir l'alternative j ; c'est-à-dire :

$$\frac{\partial EU}{\partial V_j} = \frac{\partial}{\partial V_j} E[\max_j \{(V_j + \varepsilon_j)\}] = \Pi_j \tag{5.7}$$

La variation de l'espérance de l'utilité suite à une variation infinitésimale du prix p_j correspond donc à la probabilité de choisir l'alternative j multipliée par la dérivée de l'utilité conditionnelle V_j par rapport à p_j, soit :

$$(5.8) \qquad \frac{\partial EU}{\partial V_j} = \Pi_j \frac{\partial V_j}{\partial p_j}$$

On peut aussi décrire l'espérance de l'utilité marginale du revenu par :

$$(5.9) \qquad E[\lambda] = \frac{\partial EU}{\partial V_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial EU}{\partial V_2} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial EU}{\partial V_J} \cdot \frac{\partial V_J}{\partial y}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial y}$$

L'espérance du taux marginal de substitution entre le prix d'une alternative et le revenu est donné par le rapport de (5.8) à (5.9), i.e. :

$$(5.10) \qquad E[TMS_{p_j,y}] = \frac{\partial EU}{\partial p_j} \Big/ \frac{\partial EU}{\partial y} = \Pi_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial p_j} \Big/ \sum_{k=1}^{J} \Pi_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial y}$$

Similairement, l'espérance du taux marginal de substitution entre un niveau de qualité b_j de l'alternative j et le revenu est :

(5.11) $$E[TMS_{b_j,y}] = \pi_j \frac{\partial V_j}{\partial b_j} \Big/ \sum_{k=1}^{J} \pi_k \frac{\partial V_k}{\partial y}$$

On a donc une expression donnant la compensation à donner à un individu typique pour garder son utilité constante suite à une variation marginale du prix ou de la qualité d'une alternative. Dans la même veine que l'exposé du chapitre deux, la mesure d'équivalent monétaire pour une variation finie des prix ou des qualités sera :

(5.12) $$EM = \int_{EU(\underline{p}^o,\ \underline{b}^o,\ y)}^{EU(\underline{p}',\ \underline{b}',\ y)} \frac{d\,EU}{\partial EU/\partial y}$$

Effectuant la différentielle de EU, soit:

$$dEU = \sum_{j=1}^{J} \frac{\partial EU}{\partial V_j}\, dV_j = \sum_j \pi_j \left[\frac{\partial V_j}{p_j} dp_j + \frac{\partial V_j}{b_j} db_j + \frac{\partial V_j}{y} dy \right]$$

on obtient :

$$(5.13) \qquad EM = \int_{EU^{o}}^{EU'} \sum_{j} \left[\frac{\pi_j \frac{\partial V_j}{\partial p_j}}{\sum_{k=1}^{J} \pi_k \frac{\partial V_k}{\partial y}} \right] dp_j + \sum_{j} \left[\frac{\pi_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial b_j}}{\sum_{k} \pi_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial y}} \right] db_j + dy$$

Supposons un changement de prix d'une alternative j et une espérance de l'utilité marginale du revenu constante, i.e. : $E[\lambda(\underline{p}, \underline{b}, y)] = \lambda$.
On obtient alors:

$$(5.14) \qquad EM = y' - y^{o} + \int_{EU^{o}}^{EU'} \frac{\pi_j}{\lambda} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial p_j} \, dp_j$$

$$= y' - y^{o} + \frac{1}{\lambda} \int_{EU(V_j^{o})}^{EU(V_j')} \pi_j \, dV_j$$

On retrouve donc, faisant abstraction des transferts forfaitaires, l'équivalent de la formule proposée par Small et Rosen précédemment en (4.25) et celle de Domencich et McFadden en (3.29).

5.2 Version stochastique de la dualité

Afin d'adapter les résultats de la dualité de la théorie néo-classique au contexte stochastique, Hau propose d'interpréter la probabilité de consommer un bien (une alternative) comme étant une consommation fractionnelle. On peut, par exemple, poser la demande pour un bien indivisible comme étant une demande définie sur un très long terme, ce qui permet de rendre cette demande à peu près continue. On peut ainsi remplacer la demande pour un bien discret par une demande probabiliste continue qui serait issue du problème de la maximisation d'une fonction d'utilité d'une quantité probabiliste de transport et d'un bien numéraire (par exemple lorsque le bien discret est un mode de transport), sous les contraintes de ressources totales et les contraintes propres aux probabilités, soit :

$$(5.15) \qquad U(m\,\Pi_1, \;\ldots\;, m\,\Pi_J, \; z)$$

$$\text{s.c.} \quad m \sum_{j=1}^{J} \Pi_j p_j + z \cdot p_z \leqslant y$$

$$m \sum_{j=1}^{J} \Pi_j b_{ij} + z \cdot b_{ij} \leqslant B_i \qquad \forall i = [1, \;\ldots\; I]$$

$$0 \leqslant \Pi_j \leqslant 1 \qquad \forall j = [1, \;\ldots\; J]$$

$$\sum_{j=1}^{J} \pi_j = 1$$

où m représente la consommation totale de transport, z est un bien numéraire, y est le revenu et b_{ij} est le niveau de la i ième qualité de la j ième alternative. La qualité b_i pourrait être, par exemple, le temps nécessaire à la consommation d'un bien ou d'une alternative; la quantité B_i représentera alors le temps total disponible.

La caractérisation de la solution d'un tel problème où il existe plusieurs contraintes linéaires est encore peu connue.[1] Supposons qu'une solution unique existe. L'article de Hau demeure toutefois obscur en ce qui concerne le lien entre le problème de la maximisation d'une fonction d'utilité dont les argument sont des quantités probabilistes et l'interprétation de la fonction d'utilité telle que décrite en (5.1)

Supposons donc qu'on puisse concevoir une fonction de dépense $e(\underline{p}, \underline{b}, EU)$ comme le revenu qui, pour les niveaux de prix $\underline{p}$ et de qualité $\underline{b}$, assure une espérance d'utilité de niveau EU. Par définition, on a l'identité suivante:

$$EU \equiv EU(\underline{p}, \underline{b}, y) \equiv EU[\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, EU)] \quad (5.16)$$

[1]Voir, par exemple, Bruzelius (1979).

Si la fonction EU rencontre les propriétés usuelles des fonctions d'utilité indirectes[2], on peut appliquer le théorème de l'enveloppe pour obtenir:

(5.17) $$\frac{\partial e}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial y}{\partial p_j} = \pi_j^c$$ = probabilité compensée de choisir l'alternative j.

En différenciant l'identité (5.16) par rapport à p_j au niveau $EU = EU^o$, on obtient, à l'aide de (5.17), l'équivalent stochastique de l'identité de Roy, soit :

(5.18) $$\frac{\partial e}{\partial p_j} = - \left. \frac{\partial EU}{\partial p_j} \Big/ \frac{\partial EU}{\partial y} \right|_{EU=EU^o} = \pi_j[\underline{p},\ \underline{b},\ e(\underline{p},\ \underline{b}\ EU^o)]$$

Cette relation permet d'identifier l'espérance du taux marginal de substitution entre le prix d'une alternative et le revenu, dérivée en (5.10), par la probabilité de choisir cette alternative. Par la combinaison de (5.10) et (5.18), on peut poser la relation suivante:

(5.19) $$\frac{\partial V_j}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{J} \pi_j \cdot \frac{\partial V_j}{\partial y}$$

---

[2]Une condition nécessaire serait que les V_j possèdent ces propriétés.

qui est basée sur l'identité de Roy en contexte stochastique, et dont on se servira pour construire les équations empiriques.

5.3 Application empirique

Pour montrer l'utilisation de la restriction (5.19) dans la spécification des fonctions d'utilité, on considère l'exemple d'une forme fonctionnelle couramment employée dans les modèles de choix modal en transport, [Ben-Akiva et al. (1976), McFadden et al. (1977), Train et McFadden (1978)] soit :

$$v_j = \alpha \frac{p_j}{w} + \gamma b_j + \delta(j) \cdot y + \varepsilon_j \tag{5.20}$$

où w est le taux de salaire, b_j le temps de voyage par le mode de transport j et y est une variable revenu spécifique à un mode particulier (généralement l'automobile), i.e.:
$\delta(j) \neq 0$, j = auto; $\delta(j) = 0$, $j \neq$ auto.

Dans cette spécification, la variable y agit comme variable instrumentale servant d'approximation à l'explication de la préférence à-priori d'un mode particulier. Pour pouvoir dériver des fonctions de dépense, il est nécessaire d'interpréter les fonctions d'utilité conditionnelles comme des fonctions d'utilité indirectes. Celles-ci doivent donc avoir les propriétés de continuité, décroissance en $\underline{p} > 0$ et homogénité de degré zéro en $(\underline{p}, y)$ des fonctions de choix sous-tendues. On doit donc spécifier correctement dans chacune d'elles les variables de prix et revenu. En laissant tomber la variable spécifique de l'équation (5.20) et en remplaçant le taux de salaire par le revenu, on obtient :

$$v_j = \alpha \frac{p_j}{y} + \gamma b_j + \varepsilon_j \tag{5.21}$$

Cependant, on peut vérifier que, pour cette spécification, la restriction apportée par l'équivalent stochastique de l'identité de Roy n'est satisfaite que lorsque tout le revenu est dépensé en transport. En effet :

$$\frac{\partial V_j}{\partial p_j} = \frac{\alpha}{y} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \frac{\partial V_j}{\partial y} = \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \left(- \frac{p_j}{y^2}\right) = - \frac{\alpha}{y} \left(\frac{\sum_j \Pi_j p_j}{y} \right)$$

Pour que cette restriction soit satisfaite lorsque la consommation des autres biens est positive, on peut ajouter à la spécification (5.21) un coefficient $\hat{\beta}$ linéaire en y tel que :

$$-\frac{\partial V_j}{\partial p_j} = \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \frac{\partial V_j}{\partial y} = \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \left[-\left(\frac{\alpha}{y^2} + \hat{\beta}\right)\right]$$

$$-\frac{\alpha}{y} = -\frac{\alpha}{y^2} \cdot \sum_{j=1}^{J} \Pi_j p_j + \hat{\beta}$$

(5.22) $$\hat{\beta} = \frac{\alpha}{y} \cdot \left[\frac{\Sigma\, \Pi_j p_j}{y} - 1\right]$$

Ainsi, la spécification (5.21) devient:

(5.23) $$v_j = \alpha \frac{p_j}{y} + \hat{\beta} \cdot y + \gamma\, b_j + \epsilon_j$$

Le terme $\hat{\beta} \cdot y = (-\alpha/y).[y - \sum_j \Pi_j p_j]$ peut ainsi être interprété comme l'effet de la consommation des biens autres que le transport sur la fonction d'utilité.

Soit $y^* = [y - \sum_j \Pi_j p_j]$. Le terme y^* représente le revenu résiduel après la dépense en transport. Si la contrainte budgétaire est satisfaite, on peut interpréter y^* comme la quantité d'un bien composite dont le prix est normalisé à 1. Le coefficient de y^*, soit $(-\alpha/y)$, est le même que celui du prix de l'alternative, affecté du signe moins.

Hau fait l'hypothèse que le prix du bien composite y^* n'affecte pas l'utilité relative de chacun des modes, i.e. : $\hat{\beta}$ est une quantité constante et $\partial \Pi / \partial y^* = 0$.

Parce que la variable générique y ne varie pas d'une alternative à l'autre, le coefficient β est absent de la spécification. En ajoutant l'élément $\hat{\beta} \cdot y$ après l'estimation, on fixe la position relative de chaque fonction d'utilité conditionnelle. Alors que dans une estimation à l'aide du logit ou du probit les coefficients sont constants dans la population, le coefficient $\hat{\beta}$ varie avec les caractéristiques socio-économiques individuelles.

Appelons EU^T l'espérance d'utilité sous la spécification (5.21), i.e.; si l'estimation est faite par le logit:

(5.24) $$EU^T = \ln \sum_{j=1}^{J} \exp[\alpha(p_j/y) + \gamma b_j].$$

Comme on l'a vu précédemment, EU^T représente l'utilité espérée de la dépense en transport. L'espérance de l'utilité sous (5.23) s'écrivant:

(5.25) $$EU = EU^T + \hat{\beta} \cdot y,$$

on interprète $\hat{\beta} \cdot y$ comme l'utilité espérée de la dépense sur les autres biens que le transport. On vérifie facilement que EU est homogène de degré zéro en prix et revenu, rencontrant ainsi la qualification des fonctions d'utilité indirecte conditionnelle nécessaire à la dérivation des desures d'équivalents monétaire. Suivant cette interprétation, l'espérance de l'utilité marginale du revenu calculée selon la spécification (5.21), c'est-à-dire :

(5.26) $$\frac{\partial EU^T}{\partial y} = - \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \frac{\alpha p_j}{y^2}$$

doit être entendue comme l'espérance de l'utilité marginale de la dépense en transport. L'espérance de l'utilité marginale de la dépense sur les autres biens est simplement $\hat{\beta}$.

L'espérance de l'utilité marginale du revenu (i.e. : de la dépense sur tous les biens) est donc la somme de ces deux quantités,ssoit :

$$(5.27) \qquad \frac{\partial EU}{\partial y} = - \sum_{j=1}^{J} \Pi_j \frac{\alpha\, p_j}{y^2} + \hat{\beta}$$

$$= -\alpha/y > 0$$

Par l'inversion de (5.25) on obtient une fonction de dépense $e(\underline{p}, \underline{b}, EU^o)$. Bien qu'il soit impossible d'obtenir une forme fermée pour cette fonction, on peut solutionner y' dans l'expression:

$$(5.28) \qquad EU(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y^o) = EU(\underline{p}', \underline{b}', y')$$

$$\ln \sum_j \exp[(\alpha/y^o)\, p_j^o + \gamma b_j^o + c_j] + \hat{\beta}\, y^o$$

$$= \ln \sum_j \exp[(\alpha/y')\, p_j' + \gamma\, b_j' + c_j] + \hat{\beta} y'$$

pour des nouveaux prix $\underline{p}'$ et/ou qualités $\underline{b}'$, par l'application de techniques numériques. Etant donné que EU est monotone croissante en y, on a pu dériver la version stochastique du lemme de Sheppard en (5.17). Ceci nous a permis d'écrire une demande probabiliste compensée. La mesure du surplus est ainsi équivalente à la surface à gauche de la demande hicksienne, soi l'expression traditionnelle :

$$(5.29) \qquad VC = - \int_{p_j^o}^{p_j'} \frac{\partial e}{\partial p_j}(\underline{p}, \underline{b}, EU^o) \cdot dp_j + y' - y^0$$

ce qui rend le résultat de Hau comparable aux résultats précédents.de Small et Rosen et Domencich et McFadden.

5.4 Résumé du chapitre cinq

Nous avons vu une interprétation différente de la théorie de l'utilité en contexte de choix discret. Dans ce modèle, l'erreur provient non plus de la connaissance imparfaite qu'a l'observateur des variables entrant dans la fonction d'utilité individuelle mais de l'incertitude de chaque individu quant à l'utilité d'un choix "ex-post". Pour des modèles d'estimation avec une forme additive des termes d'erreur, ceci permet d'exprimer les utilités marginales et les taux marginaux de substitution en termes de demande probabiliste. Dans un second temps, on interprète la demande probabiliste comme tant issue du problème de la maximisation d'une fonction d'utilité définie sur des demandes probabilistes et soumise à une contrainte budgétaire et à des contraintes sur le niveau des caractéristiques. En utilisant les résultats dualistes de la théorie néo-classique, on peut poser des restrictions sur la spécification des utilités conditionnelle empiriques qui permettent d'interpréter la fonction d'espérance d'utilité comme une vraie fonction d'utilité et de l'inverser pour obtenir les fonctions de dépense. Ces restrictions sont que la demande probabiliste doit être homogène de degré zéro en prix et en revenu et que la variable revenu soit spécifiée dans toutes les fonctions d'utilité conditionnelle empirique de façon à ce qu'une version stochastique de l'identité de Roy soit respectée.

Lorsque l'utilité marginale du revenu est constante, on retrouve le même résultat que celui de McFadden et de Small et Rosen exposés dans les chapitres précédents. Lorsque l'utilité marginale peut varier, la mesure théorique du bien-être équivaut à celle dérivée par Small et Rosen.

Chapitre VI

Evaluation contingente: approche de Hanneman

Nous suggérons ici d'établir un parallèle entre l'approche de l'utilité aléatoire telle que décrite dans les chapitres trois et quatre et les méthodes d'évaluation contingente. Dans le contexte de l'évaluation contingente, il s'agit d'évaluer un montant de compensation nécessaire pour un passage d'une situation 0 à une situation 1. Par exemple, on cherchera à évaluer le bénéfice engendré par une usine de filtration en cherchant la valeur de l'eau pure pour un individu représentatif.

On considère le montant d'argent à donner (retrancher) à cet individu représentatif de façon à ce que, après l'implantation du projet, il retrouve son niveau d'utilité initial (VC), et le montant d'argent à lui donner (retrancher) de façon à ce que son niveau d'utilité en l'absence d'une usine de filtration soit identique à celui qui serait atteint si le projet était implanté (VE).

Un autre exemple, celui considéré par Hanneman (1984 a), consiste à mesurer la valeur de la possibilité de chasser en offrant aux détenteurs d'un permis de chasse différents montants spécifiques destinés à leur acheter ce permis, et, inversement, en offrant en vente, à des prix spécifiques, le permis de chasse aux non détenteurs. La réponse à ces différentes offres d'achat ou de vente est de nature binaire: l'individu accepte ou refuse la transaction. Contrairement à la plupart des études d'évaluation contingente où la variable dépendante est de nature continue et où les techniques économétriques usuelles de régression sont employées pour évaluer des biens non transigés, on peut ici appliquer les modèles de choix discret décrits dans le chapitre deux.

Il existe plusieurs façons de concevoir les mesures d'évaluation contingentes dans un tel cadre d'analyse. L'expérience empirique actuelle suggère une différence substantielle quant aux évaluations résultant de ces différentes approches [Voir Hanneman (1984 a), p. 340, tableau 1].

6.1 Utilité aléatoire et évaluation contingente

Pour décrire ces différentes approches, on peut se servir du cadre d'analyse exposé au chapitre trois. Ainsi, l'expérience de l'évaluation du permis de chasse citée par Hanneman (1984 a) peut être représentée en considérant deux alternatives: l'une consistant à posséder un permis de chasse, l'autre à en être dépourvu. Soit p le coût du permis de chasse. L'individu maximise une fonction d'utilité u(x, z; z) où, comme précédemment, z est un bien composite, s est un vecteur de caractéristiques socio-économiques et x est une variable binaire dont on assigne arbitrairement la valeur 0 lorsque la première alternative est choisie, (dans l'exemple de Hanneman : l'individu ne peut chasser) et la valeur 1 lorsque la seconde alternative est choisie (l'individu peut chasser). Pour simplifier la présetation, on ne considérera qu'une seule catégorie socio-économique s, donc cet argument disparaîtra des fonctions d'utilité. On dénotera:

(6.1 a) $\tilde{u}_1 = u(0, z)$

(6.1 b) $\tilde{u}_2 = u(1, z)$

L'hypothèse fondamentale est celle adoptée dans la section 3.3.3, à savoir que u(x, z), bien que parfaitement définie pour le consommateur, est susceptible de contenir des éléments inobservables par l'analyte. Conséquemment, on devra postuler l'existence d'une variable aléatoire avec sa fonction de distribution telle que:

(6.2 a) $$\tilde{u}_1(z) = U_1(z) + \varepsilon_1$$

(6.2 b) $$\tilde{u}_2(z) = U_2(z) + \varepsilon_2$$

où ε_1 et ε_2 sont identiquement et indépendamment distribués. On pose:

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad i = [1, 2]$$

et on dénote par

$$F_\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = F_\varepsilon(\varepsilon)$$

la fonction cumulative de la distribution de la différence des termes d'erreur.

Donnons une forme spécifique à ces fonctions d'utilité conditionnelle, soit:

(6.3) $$\tilde{u}_i(z) = \alpha_i + \beta \ln z + \varepsilon_i \qquad i = [1,2]$$

Ainsi, un indivu pourvu d'un permis de chasse et à qui on offre un montant p pour se départir de ce permis acceptera ou refusera selon que $\tilde{v}_1 \gtrless \tilde{v}_2$, où

(6.4 a) $$\tilde{v}_1 = V_1(p,y) + \varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta \ln(y + p) + \varepsilon_1$$

(6.4 b) $$\tilde{v}_2 = V_2(y) + \varepsilon_2 = \alpha_2 + \beta \ln y + \varepsilon_2$$

Similairement, l'individu dépourvu d'un permis et à qui on offre en vente ce permis au prix p acceptera ou refusera la transaction selon que $\tilde{v}_1 \gtrless \tilde{v}_2$, où

(6.5 a) $$\tilde{v}_1 = V_1(y) + \varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta \ln y + \varepsilon_1$$

(6.5 b) $$\tilde{v}_2 = V_2(p, y) + \varepsilon_2 = \alpha_2 + \beta \ln(y - p) + \varepsilon_2$$

Définissons

(6.6 a) $$\Delta V(p) = V_1(p, y) - V_2(y)$$

$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \beta \ln[(y \mp p)/y]$$

si l'individu possède déjà un permis, et:

(6.6 b) $$\overline{\Delta V}(p) = V_2(p,\ y) - V_1(y)$$

$$= \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + \beta \ln[(y-p)/y]$$

s'il n'en possède pas.

Suivant le raisonnement aboutissant à l'équation (3.10) du chapitre trois, la fonction de choix sera déterminée par:

Π_1 = probabilité de choisir l'alternative 1

= $F_\varepsilon(\Delta V)$ dans le premier cas, et

= $F_\varepsilon(\overline{\Delta V})$ dans le second cas.

L'évaluation contingente consiste à mesurer la valeur de VC telle que, pour les individus pourvus de permis;

(6.7 a) $$u(0,\ y+VC) = u(1,\ y)$$

$$\alpha_1 + \beta \ln(y+VC) + \varepsilon_1 = \alpha_2 + \beta \ln(y-VE) + \varepsilon_2$$

ou la valeur VE telle que, pour les individus dépourvus de permis, (6.7 b) $$u(0, y) = u(1, y - VE)$$

$$\alpha_1 + \beta \ln y + \varepsilon_1 = \alpha_2 + \beta \ln (y - VE) + \varepsilon_2$$

L'hypothèse de l'utilité aléatoire implique que les quantités VC ou VE, bien qu'elles soient connues des individus, sont des variables aléatoires du point de vue de l'observateur. A l'aide des formes fonctionnelles postulées, on peut expliciter les variables VC et VE dans les équations 6.7 a) et b):

(6.8 a) $$VC = y \cdot \exp[\alpha_2 - \alpha_1)/\beta\,] \cdot \exp(\varepsilon/\beta\,) - y$$

(6.8 b) $$VE = y - y \cdot \exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta\,] \cdot \exp\,(\varepsilon/\beta\,)$$

Une première approche de l'évaluation contingente consiste à prendre l'espérance mathématique de VC ou de VE. On aura donc:

(6.9 a) $$\overline{VC} = E(VC) = y \cdot \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/\beta\,] \cdot E[\exp(\varepsilon/\beta\,)] - y$$

(6.9 b) $$\overline{VE} = E(VE) = y - y \cdot \exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta\,] \cdot E[\exp(\varepsilon/\beta)] - y$$

Les distributions de VC et de VE peuvent être déduites des distributions postulées pour les termes d'erreur.

6.2 Valeur moyenne

On peut donc caractériser E(VC) et E(VE) en se servant de la relation entre la moyenne d'une variable aléatoire non-négative et sa fonction cumulative[1], i.e.:

$$(6.10\ a) \qquad E(VC) = \int_0^\infty 1 - \Pi_1(VC) \cdot dVC = \int_0^\infty 1 - F_\varepsilon[\Delta V(VC)]$$

$$(6.10\ b) \qquad E(VE) = \int_0^\infty 1 - \Pi_2(VE) \cdot dVE = \int_0^\infty 1 - F_\varepsilon[\overline{\Delta V}(VE)]$$

Il importe de noter que la fonction de distribution de VC et de VE n'est pas symétrique par rapport à E(VC) et E(VE).

---

[1] Voir, par exemple, Parzen (1960), p. 212.

6.3 Valeur médiane

Une seconde approche pour l'évaluation représentative de VC ou de VE est de prendre la valeur médiane de VC ou VE, qu'on dénote par VC^+ et VE^+. La valeur médiane est définie telle que:

(6.11) $$\Pi_1 = \Pr[\varepsilon \leqslant V(VC^+)] = F_\varepsilon[\Delta V(VE^+)]$$

$$= F_\varepsilon[\overline{\Delta V}(VE^+)] = \Pi_2 = 0.5$$

Pour les modèles logit et probit, la valeur ε telle que $F_\varepsilon(\varepsilon) = 0.5$ est $\varepsilon = 0$. Ainsi, on évaluera VC^+ et VE^+ en posant

(6.12) $$\Delta V(VC^+) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\Delta V}(VE^+) = 0$$

de telle sorte que, pour les mesures d'évaluation contingente VC^+ et VE^+ on aura:

(6.13 a) $$VC^+ = y \cdot \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/\beta] - y$$

(6.13 b) $$VE^+ = y - y \cdot \exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta]$$

On constate donc que, pour l'exemple de fonction d'utilité adoptée au début, $\overline{VC} \neq VC^+$ et $\overline{VE} \neq VE^+$, ce qui s'explique, encore une fois, par la nature asymétrique[2] de la fonction de distribution de $\overline{VC}$ et $\overline{VE}$.

6.4 Inversion de la fonction de l'espérance d'utilité

Une troisième approche pour la mesure représentative de VC et VE consiste à définir VC* et VE* en terme de l'espérance de la fonction d'utilité. Ainsi:

(6.14 a) $E[\tilde{v}_1(VC^*, y)] = E[\tilde{v}_2(y)]$ pour les individus chasseurs

et

(6.14 b) $E[\tilde{v}_1(y)] = E[\tilde{v}_2(VE^*, y)]$ pour les individus non chasseurs.

---

[2]Les seules fonctions d'utilité pour lesquelles la valeur $VC = VC^+$ et $VE = VE^+$ sont les fonctions spécifiées linéairement, i.e.: $\tilde{u}_i(z) = \alpha_i + \beta_i z$

Parce qu'on a posé $E(\varepsilon_1) = 0$, $E(\varepsilon_2) = 0$, les valeurs de VC* et VE* qui satisfont l'équation (6.14) sont les mêmes que VC^+ et VE^+ en (6.13 a) et (6.13 b). Cependant les valeurs de VC* et VE* évaluées selon (6.14) ne seront pas indépendantes d'une transformation monotone de la fonction d'utilité. En effet, soit

$$u'(z) = T[u(z)]$$

une transformation monotone de u(z), i.e.: $\partial T/\partial u > 0$. Puisque l'ordonnancement des différentes alternatives reste inchangé, la fonction de choix

$$\Pi_1(p,y) = \Pr[\tilde{v}_1'(p,y) \geq \tilde{v}_2'(y)], \text{ individu chasseur}$$

$$\Pr[\tilde{v}_1'(y) \geq \tilde{v}_2'(p,y)], \text{ individu non chasseur}$$

reste inchangée aussi.

La valeur de VC^+ et VE^+ qui satisfait

$$\text{(6.15 a)} \qquad \Pi_1(VC^+,y) = \Pr\,[\tilde{v}_1'(VC^+, y) \geq \tilde{v}_2'(y)] = 0.5$$

$$\text{(6.15 b)} \qquad \Pi_1(VE^+, y) = \Pr\,[\tilde{v}_1'(y) \geq \tilde{v}_2'(VE^+, y)] = 0.5$$

est donc la même pour la spécification u et u'. Donc VC^+ et VE^+ sont invariants par rapport à une transformation monotone de l'utilité sous-jacente.

Etant donné que $\overline{VC}$ et $\overline{VE}$ sont obtenus par $\Delta V(VC)$ et $\overline{\Delta V}(VE)$, ils sont aussi invariants par rapport à une transformation monotone de l'utilité sous-jacente.

Par contre, VC** et VE** qui satisfont

(6.16 a) $$E[\tilde{v}_1'(VC^{**}, y)] = E[\tilde{v}_2'(y)]$$

(6.16 b) $$E[\tilde{v}_1'(y)] = E[\tilde{v}_2'(VE^{**}, y)]$$

ne sont, en général, pas équivalents aux VC* et VE* qui satisfont (6.14)

Ceci apporte un éclairage supplémentaire à l'analyse de Hau exposée dans le chapitre précédent. Dans le contexte de Hau, on cherche la valeur (y' - y) telle que:

(6.17) $$E[\max\{v_1(p_1^o, y), v_2(p_2^o, y)\}] = E[\max\{v_1(p_1', y'), v_2(p_2', y')\}]$$

Bien que la fonction $\max_i \{v_i\}$ soit invariante par rapport à toute transformation monotone de v_i, la valeur $(y' - y)$ ne l'est pas nécessairement, à cause de l'opérateur d'espérance mathématique. Cependant, la relation (5.18) sert à déterminer l'échelle de la fonction d'utilité, de telle sorte que des mesures d'équivalent monétaire puissent en être déduites. L'application de l'identité de Roy en contexte stochastique permet de sélectionner une échelle d'utilité unique parmi toutes celles qui satisfont la fonction de choix $\Pi_i(\underline{\theta};\underline{p}, y)$, à l'aide de la restriction (5.19).

Conséquemment, dans le contexte de l'évaluation contingente sous les hypothèses de la théorie de l'utilité aléatoire, seules les mesures moyenne et médiane sont retenues. Cependant, il est possible de montrer que $\overline{VC}$ et $\overline{VE}$ sont particulièrement sensibles aux erreurs extrêmes. Pour certaines valeurs estimées des paramètres $\underline{\theta}$ de la fonction de choix $\Pi_i(p, y; \underline{\theta})$, l'intégrale

$$\int_0^\infty 1 - \Pi_i(\underline{p}, y; \underline{\theta})\, dp$$

peut ne pas converger, donnant une valeur infinie à $\overline{p}$

Chapitre VII

Comparaison des méthodes d'évaluation du bien-être

7.1 Introduction

Afin de mieux représenter le fonctionnement des différentes méthodes d'estimation du bien-être, nous utiliserons, à titre d'exemple illustratif, un modèle de choix modal déjà calibré. A l'aide des paramètres estimés des fonctions de choix nous comparerons les deux mesures du bien-être proposées dans les chapitres précédents, soit l'intégrale de la demande probabiliste dérivée par Domencich et McFadden et l'inversion numérique de la fonction d'utilité calibrée telle que proposée par Hau.

Le modèle en question a été construit par Ben-Akiva et Albright à Cambridge Systematic Inc. (1976), [ci-après: CSI], [reporté dans Ben-Akiva et Lerman (1985)], à partir de données recueillies en 1968 pour la ville de Washington D.C.
Les unités monétaires sont en dollars U.S. 1968.

L'ensemble de choix comporte trois modes:

1- l'automobile (chauffeur seul)
2- le covoiturage
3- le transport en commun.

et concerne la navette quotidienne domicile-travail-domicile.

La calibration des paramètres du modèle logit a été faite à partir de 1114 observations. L'alternative deux, le covoiturage, inclut le partage d'une automobile par les membres d'une même unité familiale, de même que le covoiturage informel ou selon des arrangements annuels ou mensuels. La spécification des fonctions d'utilité indirecte est donnée dans le tableau 7.1, et les valeurs estimées des coefficients, avec leur degré de signification, sont représentées dans le tableau 7.2.

On remarque d'abord qu'il existe, outre les constantes spécifiques et les variables binaires, des variables spécifiques à certaines alternatives. Par exemple, la densité d'emploi divisée par la distance n'affecte que l'utilité spécifique au covoiturage. Or, on sait que, dans les modèles discrets d'estimation de la demande, la spécification des fonctions d'utilité n'obéit à aucune contrainte théorique car:

> Unfortunately we do not normally have either a comprehensive understanding of a situation or a general behavioral theory that will prescribe the specification of the exact mathematical form and variables of a model.
> [Ben-Akiva et Lerman (1985), p. 154]

Ainsi, lorsqu'on inclut une variable spécifique à une al-

Tableau 7.1: Coefficients des variables employées

	k_1	k_2	γ_1	γ_2	α	δ_1	δ_2	δ_3
Automobile	1	0	Temps aller-retour, à l'intérieur du véhicule (minutes)	Temps aller-retour, hors véhicule/dist. (minutes/milles)	Coût aller-retour/revenu	Autos par possesseurs de permis de conduire*	0	1 si le lieu de travail est au centre-ville, 0 autrement.
Covoiturage	0	1	Temps aller-retour, à l'intérieur du véhicule (minutes)	Temps aller-retour, hors véhicule/dist. (minutes/milles)	Coût+ aller-retour/revenu	0	Autos par possesseurs de permis de conduire*	0
Transport en commun	0	0	Temps aller-retour, à l'intérieur du véhicule (minutes)	Temps aller-retour, hors véhicule/dist. (minutes/milles)	Coût aller retour/revenu	0	0	0

*Le nombre de possesseurs de permis de conduire par ménage n'étant pas disponible, nous avons remplacé cette variable par le nombre d'autos par ménage divisé par le nombre de travailleurs par ménage.

+Coût par personne du covoiturage suppose un taux d'occupation de 2.5 personnes par automobile.

Tableau 7.1: Coefficients des variables employées (suite)

	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9
Automobile	0	Revenu disponible*	1 si employé du secteur primaire.+	0	0	0
Covoiturage	1 si le lieu de travail est au centre-ville, 0 autrement.	Revenu disponible*	0	1 si employé du gouvernement, 0 autrement.+	Nombre de travailleurs dans le ménage	Densité d'emploi au lieu de travail multipliée par la distance, aller simple. (emplois · milles)
Transport en commun	0	0	0	0	0	0

*Le revenu disponible est défini comme étant le revenu annuel moins $800. par personnes par ménage

+Dans la catégorie socio-économique utilisée pour l'exemple, on suppose qu'il n'y a pas de travailleurs du primaire ni du gouvernement.

Tableau 7.2 : Valeur estimée des coefficients par le logit.

Coefficient	Variable	Valeur du coefficient	t
k_1	Constante, automobile	-3.24	-6.9
k_2	Constante, covoiturage	-2.24	-5.6
γ_1	Temps à l'intérieur du véhicule	-0.0154	-2.7
γ_2	Temps hors véhicule/distance	-0.160	-4.1
α	Coût/revenu	-28.8	-2.3
δ_1	Autos/travailleurs (automobile)	3.99	10.1
δ_2	Autos/travailleurs (covoiturage)	1.62	5.3
δ_3	Indice travail centre-ville (automobile)	-0.854	-2.8
δ_4	Indice travail centre-ville (covoiturage)	-0.404	-1.4
δ_5	Revenu disponible (auto + covoiturage)	0.00007	3.5
δ_6	Indice travailleur primaire (automobile)	0.890	4.8
δ_7	Indice travailleur gouvernement (covoiturage)	0.287	1.8
δ_8	Nombre de travailleurs par ménage (covoiturage)	0.0983	1.0
δ_9	Densité d'emploi par distance (covoiturage)	0.00063	1.3

$\rho^2 = 0.3099$

$\bar{\rho}^2 = 0.2966$

ternative, rien ne nous dicte à quelle alternative on doit associer cette variable spécifique. Par exemple, on aurait pu spécifier que la variable "nombre de travailleurs" n'affecte que l'utilité de l'alternative 1, la valeur du coefficient δ_8 se serait alors ajustée en signe et la fonction de choix $\Pi(\underline{x};\underline{\theta})$ demeurerait inchangée.

Dans les modèles de choix discret destinés à estimer la demande, le choix des variables à inclure dans la fonction d'utilité empirique et la façon de les inclure est surtout pensée en vue de l'augmentation du pouvoir explicatif du modèle dans le sens de l'obtention de mesures de signification plus élevées, reléguant au second plan la relation entre les variables. Les restrictions se bornent souvent à vérifier le signe des coefficients et à de vagues intuitions sur la grandeur anticipée des élasticités.

> Finally, among the specifications that are consistent with the theory, we select the one that performs best according to "goodness-of-fit" measures and statistical significance tests.
> [Ben-Akiva et Lerman (1985), p. 155]

Par contre, dans un modèle de demande destiné à estimer le surplus du consommateur, la spécification des variables spécifiques aux alternatives doit être faite avec circonspection. On a vu, dans le chapitre six, que la mesure d'un prix critique n'est pas invariable par rapport à la façon de spécifier les variables spécifiques [voir les équations (6.7 a) et 6.7 b)]. Cependant, dans la mesure où nous nous limiterons ici à l'évaluation de la compensation monétaire suite à une augmentation des tarifs des transports en commun pour une catégorie socio-économique déterminée, ces problèmes ne nous inquiéterons pas, exepté pour une variable: le revenu spécifique aux alternatives un et deux.

On a vu, au chapitre cinq, que l'estimation hicksienne du surplus avec les modèles de choix discret selon le modèle de Hau (1981) nécessite que chaque fonction d'utilité indirecte soit spécifiée correctement par rapport au revenu, excluant ainsila présence de variables spécifiques construites à partir de la variable revenu. La spécification du modèle CSI est donc du type de l'équation (5.20). On note que la valeur du coefficient $_5$ n'a rien à voir avec l'utilité marginale de la monnaie. (Ce coefficient serait de signe négatif si la variable "revenu disponible" avait été posée comme spécifique au mode "transport en commun").

Il existe une façon, suggérée par Viton (1985), de contourner le problème de façon à ce qu'on puisse se servir d'un tel modèle pour évaluer des fonctions de compensation. Il s'agit d'interpréter la variable "revenu disponible" comme étant une approximation pour une autre variable socio-économique qu'on ne peut observer et qui serait fortement correlée avec la variable "revenu disponible". Ce pourrait être, par exemple, le goût _à-priori_ pour le transport privé. La variable "revenu disponible" spécifique aux alternatives un et deux et dont l'influence sur le niveau d'utilité est décrite par le coefficient δ_5 sera donc traitée comme une constante.

Le tableau 7.3 indique la valeur moyenne des différentes variables employées ainsi que la distribution de l'utilisation des trois modes dans l'échantillon. Nous nous servirons de la valeur de ces variables pour représenter uen catégorie typique d'individus dont nous voulons mesurer le bien-être.[1]

Etant donné que les mesures hicksiennes de surplus font interagir la variable revenu avec les variables prix, celles-ci

---

[1]Des ajustements mineurs dans la valeur des variables ont été requis afin de retrouver les fréquences d'utilisation dans l'échantillon. (Voir notes du tableau 7.3). En outre, cette catégorie socio-économique typique n'inclut pas de travailleurs du primaire ni de fonctionnaires.

Tableau 7.3 : Proportion observée des choix et valeur moyenne des variables.

Mode	Proportion
Automobile	57 %
Covoiturage	27 %
Transport en commun	16 %

Variables	Auto	Covoiturage	T.C.
Temps total, aller-retour (minutes)	26.7	36.7	56.5
Temps hors-véhicule (minutes)	5.4	10.4	18.6
Coût, aller-retour (cents U.S., 1968)	88.5	35.4	47.1
Distance aller-retour (milles)	16.2	16.2	16.2
Revenu du ménage ($ U.S. / année)	12900.	12900.	12900.
Nombre d'autos par ménage	1.5	1.5	1.5
Nombre de travailleurs par ménage	1.8*	1.8*	1.8*
Nombre de personnes par ménage	3.6	3.6	3.6
Densité	200. †	200. †	200. †

* La valeur moyenne employée pour décrire la catégorie typique pour cette variable a été modifiée à 1.73

† Valeur déduite de façon à retrouver les fréquences données.

doivent être exprimées dans des unités cohérentes. Dans le modèle CSI, le revenu est exprimé en nombre de dollars par année et le coût des alternatives est exprimé en cents par voyage aller-retour quotidien. Dans les modèles d'estimation de la demande, le choix des unités pour les variables importe peu: le coefficient s'ajuste en conséquence. Cependant, l'application de la retriction (5.19) issue de l'application de l'identité de Roy en contexte stochastique, requiert que la variable revenu soit exprimée par la même unité de mesure que les variables prix.

Nous avons choisi d'exprimer la variable revenu et les variables prix en dollars par jour, supposant un voyage aller-retour par jour. Ainsi:

$$y' = 12900/365 = 35.34246575$$

et $p_i' = p_i \times 100$, d'où:

$$p_1' = .885$$
$$p_2' = .354$$
$$p_3' = .471$$

Le coefficient α doit être ajusté en conséquence afin de ne pas modifier les fonctions de choix. Ainsi :

$$\alpha' = -28.8/3.65 = -7.890410959$$

Ce changement d'unité de la variable prix et revenu ne change donc pas la fonction de choix, à condition de changer de façon correspondante le coefficient α . (Etant donné que, désormais, seules les nouvelles valeurs seront utilisées, le signe "prime" (') sera omis.)

On remarquera la très faible valeur de l'effet de la désutilité marginale du prix dans le modèle CSI, ce qui entraine ue élasticité-prix propre étonnament peu élevée. En effet, en se servant de la formule de l'élasticité du logit[2], on calcule l'élasticité-prix par:

(7.1) $$\xi_{\pi_i,\, p_i} = (1 - \pi_i)\, \frac{\alpha}{y}\, p_i$$

ce qui, dans le cas du transport en commun, correspond à une valeur de -.0873538373. Ainsi, pour une hausse de dix cents du coût quotidien du transport en commun, soit une augmentation de 21 %, seulement trente et une personnes sur 1693, dans une ville hypothétique de 10,000 habitants, délaisseront le transport en commun pour un autre mode.

Or, il y a de bonnes raisons de croire que le coefficient de la désutilité du prix soit sous-estimée pour une telle spécification [voir Gomez-Ibanez et Fauth (1980)]. Il y a d'abord la présence d'une variable de densité et de la variable binaire "centre-ville". La principale raison pour laquelle ces variables devraient avoir un pouvoir explicatif dans le modèle de choix vient du fait qu'elles soient correlées avec les variables "coût" et "temps". En effet, l'alternative "auto" devient plus chère et plus lente par rapport à l'alternative "transport en commun" quand on s'approche du centre-ville.[2] En deuxième lieu, la variable "nombre d'automobiles par conducteur" est, sans doute, la variable la plus indésirable dans l'évaluation du coefficient de la désutilité marginale du prix d'une alternative. La variable "coût" dans les modèles comme celui de CSI est conçue comme étant un coût variable. Cependant, dans l'esprit de la mesure hicksienne de revenu telle que celle proposée par Hau (1985),où on veut identifier une fonction d'utilité indirecte complète sans avoir de données sur l'ensemble budgétaire au complet, il est nécessaire que la dépense en transport représente un coût <u>total</u> de transport pour chaque mode. Or le coût en capital de l'alternative "automobile" est substantiel par rapport au coût variable. On s'attend donc à ce que le taux de

---

[2] Cette variable peut aussi capter la variation des goûts entre les résidents des banlieues et ceux du centre-ville. Cependant, il est douteux que l'influence d'une telle variation de goût soit assez forte pour rendre la corrélation entre cette varible et les variables "coût" et "temps" à une grandeur négligeable.

possession d'automobile soit correlé avec le coût ou le niveau de service du transport en commun.

Le taux de possession d'automobile peut également être très correlé avec la variable "revenu disponible". Dans de tels cas, les estimés des paramètres des fonctions d'utilité indirecte , bien que différents de zéro de façon statistiquement significative, peuvent ne pas être fiables du tout.[3]

7.2 Comparaison numérique des différentes méthodes

On veut évaluer l'effet, en terme monétaire, sur le bien-être d'une classe typique de la population, décrite précédemment, d'une hausse de \$0.10 du tarif du transport en commun.

En remplaçant les variables,dans les fonctions d'utilité calibrées, par leur valeur dans le groupe socio-économique considéré, on obtient les probabilités initiales et finales des différents modes tels que représentés dans le tableau 7.4.

---

[3]Daganzo (1979), p. 122, rapporte le cas d'un modèle où le coefficient de la variable "temps d'accès" est de signe positif pour le transport en commun, en raison de la configuration géographique de la ville où le modèle a été calibré, où le transport en commun dessert plus efficacement les quartiers les plus riches.

<u>Tableau 7.4</u> Valeur des utilités et des probabilités

$P_3 = .471$	$P_3' = .571$
$V_1 = 0.1515653$	$V_1' = 0.1515653$
$V_2 = -0.6105447$	$V_2' = -0.6105447$
$V_3 = -1.056221$	$V_3' = -1.078546581$
$\Pi_1 = 0.566399327$	$\Pi_1' = 0.568524041$
$\Pi_2 = 0.2643276294$	$\Pi_2' = 0.2653191924$
$\Pi_3 = 0.1692730437$	$\Pi_3' = 0.1661567665$

Donc, si on suppose une population de 10,000 individus partageant les mêmes attributs socio-économiques, de 1693 individus qui choisissaient le transport en commun avant l'augmentation des tarifs, il en reste 1662 lorsque les prix ont augmenté. Parmi ceux qui ont abandonné l'alternative "transport en commun", 21 auront changé pour le mode "automobile" et 10 opteront pour le mode "covoiturage". (Il s'agit, bien sur, de quantités probabilistes, et non déterministes)

7.2.1 Variation compensatoire: méthode de Small et Rosen

La méthode de Small et Rosen implique d'évaluer la valeur finale et initiale de l'utilité totale et de calibrer en divisant par l'utilité marginale de la monnaie. [Voir équations (4.25) et (3.33)].

L'utilité totale (valeur inclusive) en situation initiale est de:

$$\ln \sum_{i=1}^{3} \exp[V_i(p_i^o, y)] = .7200212149$$

et l'utilité totale en situation finale est :

$$\ln \sum_{i=1}^{3} \exp[V_i(p_i', y)] = .7162769781$$

Le changement d'utilité est donc de -0.0037442467. Pour traduire ce changement d'utilité en valeur monétaire, on divise ce montant par l'utilité marginale de la monnaie.

On sait, d'après l'application de l'identité de Roy en contexte stochastique selon la version de Hau [voir équation (5.27)] et selon l'interprétation de l'analyse du choix discret exposée au chapitre huit, que l'utilité marginale de la monnaie doit, pour être compatible avec la théorie de la maximisation de l'utilité, être égale en signe inverse à la désutilité marginale du prix. L'utilité marginale de la monnaie, selon les paramètres calibrés par CSI, est :[4]

$$-\alpha/y = -0.7899/35.34247 = 0.223255814$$

La variation compensatoire selon Small et Rosen est donc :

$$0.0037442467/0.223255814 = \underline{0.0167711052}$$

Cette valeur peut s'expliquer ainsi : puisque l'utilité des

---

[4]Small et Rosen suggèrent d'estimer l'utilité marginale de la monnaie en se servant de l'identité de Roy, soit $(\alpha/y\cdot\tilde{x}_3$, où $\tilde{x}_3$ représenterait ici la quantité de transport en commun consommée (par exemple : la distance parcourue), advenant que ce mode soit choisi. [Voir Small et Rosen (1981) p. 120, note 28] Mais, d'une part, l'information sur x_3 n'est pas disponible et, d'autre part, l'estimation de Π_3 est faite de façon indépendante. [Voir chapitre quatre (infra) p. 70, note 3].

gens qui utilisent l'automobile ou le covoiturage n'est pas affectée par une hausse du coût du transport en commun, ceux-ci n'ont pas à être compensés. Par contre, les 1662 personnes, issues d'un bassin de population hypothétique de 10000 personnes, qui utilisent toujours le transport en commun après l'augmentation des tarifs devront être compensés de $ 0.10 chacun. Pour les 31 personnes qui changent de mode, la compensation peut se situer n'importe où entre $ 0.00 et $ 0.10. La compensation moyenne par individu est donc de $ 0.0167711052. La compensation totale, pour 10000 individus, sera, considérant une hausse de $ 0.10 du coût du transport en commun, de:

$$\$\,0.10 \times 1662 + \$\,0.05 \times 31 = \$167.71$$

On veut comparer cette mesure à une mesure qui tienne compte du fait que l'utilité marginale du revenu est non-constante.

.2.2 Mesure hicksienne du surplus: méthode de Hau

Pour tenir compte de l'effet revenu de la variation de prix d'une alternative de l'ensemble de choix en transport sur l'ensemble des biens autres que le transport, Hau se sert d'un coefficient construit, $\hat{\beta}$, de telle sorte que l'équivalent stochastique de l'identité de Roy soit respectée. [Voir équations (5.22) et (5.23)]. La fonction de dépense est ensuite obtenue par inversion de la variable revenu dans la fonction d'espérance d'utilité. [Voir équations (5.25) et (5.28)].

La solution, évaluée par technique numérique itérative, pour y' dans l'équation

$$EU(p^o, y^o) = EU(p', y')$$

$$\ln \sum_{i=1}^{3} \exp\left[\frac{\alpha}{y^o} p_i^o + K_i\right] + \hat{\beta} y^o = \ln \sum_{i=1}^{3} \exp\left[\frac{\alpha}{y'} p_i' + K_i\right] + \hat{\beta} y'$$

est

$$y' = 35.35922877$$

La mesure d'équivalent monétaire de Hau est donc de

$$y' - y^o = \underline{0.0167630166}$$

Cette valeur est très légèrement inférieure à celle obtenue par la méthode de Small et Rosen, qui suppose l'utilité marginale de la monnaie constante et l'absence d'effets revenu. On s'attend à ce que la compensation à donner, lorsqu'on tient compte de l'effet revenu, doive être plus faible que lorsqu'on n'en tient pas compte parce que l'élasticité revenu de la demande pour le transport en commun est de signe négatif ; i.e. : la probabilité d'utiliser le transport en commun diminue avec l'augmentation du revenu. Dans le modèle CSI choisi comme exemple, l'effet revenu est très faible, ce qui explique le peu de différence entre les valeurs obtenues des deux méthodes.

Outre le fait que le coefficient α/y soit relativement petit, on constate que la dépense totale en transport est peu importante par rapport au revenu total. La dépense totale moyenne par jour en transport est de :

$$y - \sum_{i=1}^{3} \Pi_i p_i = y^* = 0.6745485$$

ce qui donne une valeur de

$$\hat{\beta} = -\frac{\alpha}{y^2} \cdot y^* = 0.2189946481$$

pour l'utilité marginale de la dépense sur les biens autres que le transport.

La calibration de l'échelle de l'utilité à l'aide du coefficient $\hat{\beta}$ permet d'évaluer des fonctions de compensation directement à partir de l'inversion de la fonction d'utilité totale espérée, ou de la valeur inclusive. La mesure théorique exacte du changement de bien-être est donnée par :

$$EM = \int_{p^o}^{p'} \frac{\partial e}{\partial p}(p, \underline{b}, EU) \cdot dp = e(p^o, \underline{b}^o, EU^o) - e(p', \underline{b}^o, EU^o)$$

$$= \int_{p^o}^{p'} h(p, \underline{b}, EU) \cdot dp$$

La méthode de Hau nous permet d'éviter de faire l'approximation de la fonction de demande probabiliste hicksienne $\Pi(\underline{p}, \underline{b}, EU)$ par la fonction de demande probabiliste marshallienne $\Pi(\underline{p}, \underline{b}\ y^o)$.

Comme l'effet du revenu sur la consommation de l'alternative 3, donnée par :

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial y} = \Pi_3 \left[\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\sum_{i=1}^{3} \exp(V_i) \cdot \partial V_i / \partial y}{\sum_{i=1}^{3} \exp(V_i)} \right]$$

$$= \hat{\beta}\Pi_3 \; (\alpha/y^2)\cdot[\sum_{i=1}^{3} \Pi_i p_i \; - \; p_3]$$

$$= -0.0016847073$$

est très faible (une augmentation de revenu d'un montant équivalent à la hausse totale du coût de l'alternative "transport en commun" ne diminue la probabilité de choisir ce mode de transport que de 0.00017, soit deux individus sur 10000), la fonction de demande marshallienne, pour l'intervalle considérée demeure une très bonne approximation de la demande hicksienne.

On peut, dans le cas continu, déduire des bornes à l'intérieur desquelles devra se situer la mesure du surplus. [Voir Willig (1973)]. Il serait intéressant de pouvoir déduire de telles bornes pour le cas discret. Une telle ambition dépasse le cadre de ce travail. Cependant, nous avons pu constater qu' avec la valeur des estimations empiriques de l'étude de CSI — valeurs qui sont à peu près partagées par d'autres études des choix modaux,— le surplus calculé par l'intégration de la demande probabiliste ordinaire demeure très près de l'estimation hicksienne de la variation compensatoire.

Chapitre VIII

Une extension possible des modèles de choix discret

On reprend, dans ce chapitre, le cadre d'analyse de Small et Rosen exposé dans le chapitre quatre, en adoptant, à l'instar de Domencich et McFadden, l'interprétation de chaque alternative discrète comme étant un montant fixe de consommation d'un ensemble de biens. Suivant le raisonnement de Small et Rosen, on caractérisera le choix discret comme étant issu de la maximisation d'une fonction d'utilité d'un ensemble de biens continus sous une contrainte budgétaire et d'un ensemble de contraintes institutionnelles ou techniques définissant l'ensemble de choix. On pourra ainsi dériver des fonctions de compensation, comme Small et Rosen, et dériver une mesure de la variation compensatoire et de la variation équivalente en introduisant un élément aléatoire aux fonctions de demande.

8.1 Présentation d'un cadre d'analyse en contexte de choix discret

On se base sur le postulat, discuté dans le chapitre quatre, suivant lequel le consommateur maximise une fonction $u(\underline{x}, z)$ comme si les biens étaient continus, c'est-à-dire que la nature discrète des biens en $\underline{x}$ est une contrainte qui est imposée de l'extérieur. Par exemple, si un consommateur contraint à choisir entre le mode de transport par automobile, rapide et couteux, et le mode de transport par autobus, lent et économique, avait le choix d'une troisième alternative dont le prix et les caractéristiques se situent entre ces deux extrêmes (par exemple : minibus rapide, taxi collectif, etc.), il pourrait opter pour ce choix. Similairement, les individus soumis au choix entre rester locataire et devenir propriétaire (coût en terme de temps et d'insécurité par rapport à avantage en terme de flexibilité d'utilisation des lieux) peuvent opter, et optent effectivement, lorsqu'elle existe, pour une troisième voie dont les caractéristiques se situent entre les deux (par exemple: copropriété ou condominium).

Comme mentionné au chapitre quatre, on pourrait aussi considérer un cadre d'analyse où la nature discrète de la demande pour certains biens ne vient pas d'une contrainte imposée de l'extérieur mais résulte de la solution du problème du consommateur . Ainsi, les biens $\underline{x}$ pourraient être disponibles en quantités continues mais les préférences des consommateurs seraient telles que la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire conduise toujours à des solutions en coin. Par exemple, les composantes d'un système haute-fidélité sont disponibles en pièces détachées mais leur utilité n'est positive que lorsque tous ces éléments sont rassemblés ensemble.[1] Cependant, nous nous limiterons, pour cet exposé, au premier cadre d'analyse décrit précédemment.

Nous considérerons en particulier un modèle à deux biens discrets, x_1 et x_2, dont la consommation est mutuellement exclusive et qui ne peuvent prendre que deux valeurs : soit 0 ou 1, et un bien continu, z, qui sert de numéraire et dont le prix est normalisé à $p_z = 1$.

On postule que les consommateurs ont une structure de goût commune ; ils maximisent donc une fonction d'utilité

$$(8.1) \qquad u(x_1, x_2, z)$$

---

[1] Hanneman (1984 b) discute des formes fonctionnelles empiriques de fonctions d'utilité qui conduisent à des solutions en coin.

sous les contraintes

(8.1 a) $p_1 x_1 + p_2 x_2 + z = y$

(8.1 b) $x_i = 0$ ou 1, $i = [1, 2]$ $z > 0$

(8.1 c) $x_1 \cdot x_2 = 0$

Reprenant les notations adoptées au chapître pour désigner les fonctions conditionnelles au choix d'une alternative, on appellera:

$$\tilde{u}_1(z) = u(1, 0, z)$$

$$\tilde{u}_2(z) = u(0, 1, z)$$

$$\tilde{u}_o(z) = u(0, 0, z).$$

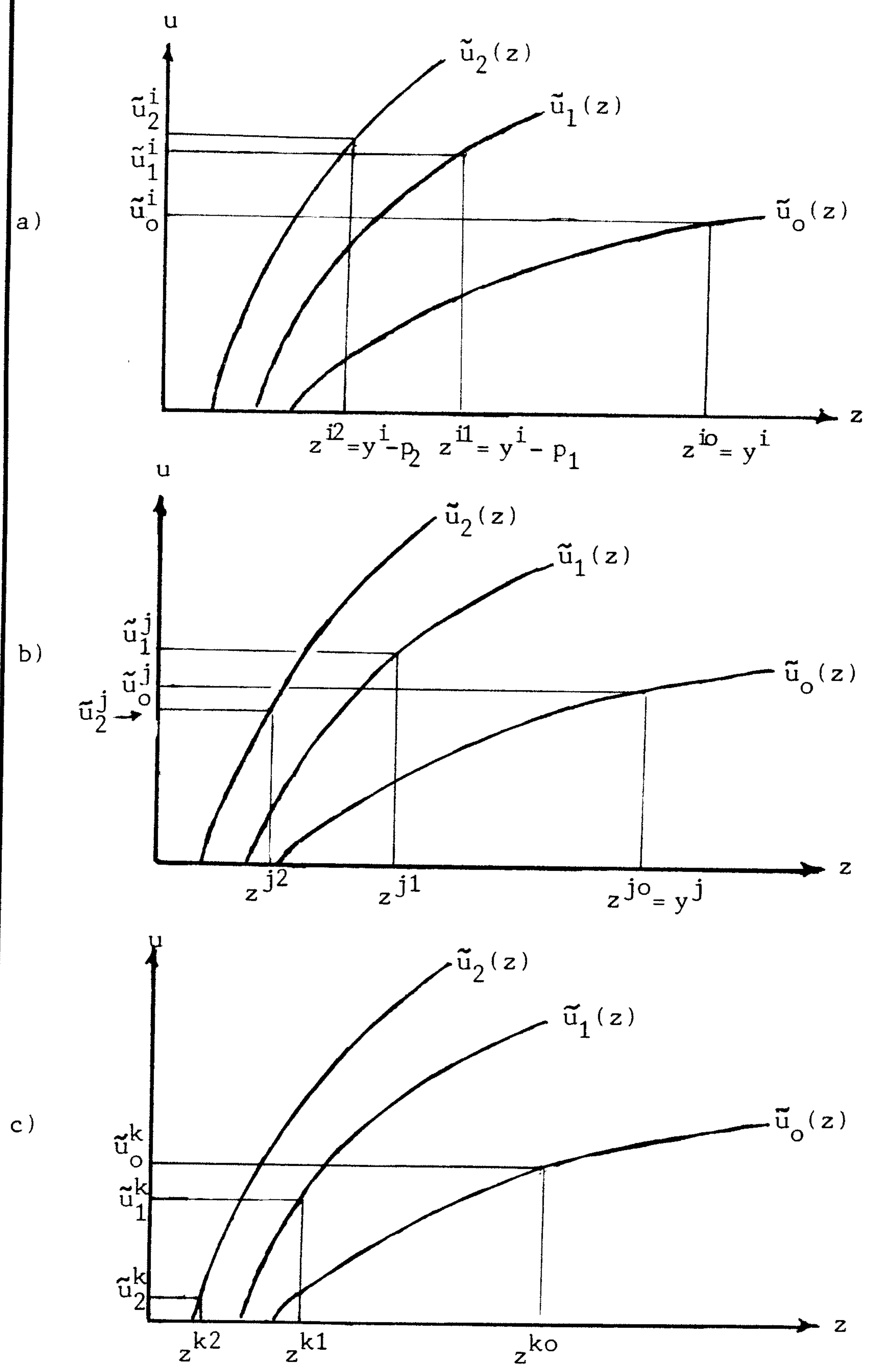
On postule, en outre, les conditions suivantes:

(8.2 a) La valeur de $\tilde{u}_1(z)$, $\tilde{u}_2(z)$ et $\tilde{u}_o(z)$ est finie, $\forall z > 0$, i.e.: aucun des biens x_1 ou x_2 n' est essentiel.

(8.2 b) $$0 < \frac{\partial \tilde{u}_i(z)}{\partial z} < \infty \qquad i = [0,\ 1,\ 2]$$

Le problème peut être illustré graphiquement dans les figures 8.1 a, b et c. (page suivante). Etant donné un revenu y^i et les prix p_1 et p_2, l'individu i compare trois situations: consommer un montant $z^{io} = y^i$ du bien composite z et ne pas consommer le bien 1 ni le bien 2, ou consommer $z^{i1} = y^i - p_1$ du bien composite et consommer le bien 1, ou encore choisir le bien 2 et consommer une quantité $z^{i2} = y^i - p_2$ du bien composite. (figure 8.1 a). Il pourra ainsi atteindre, selon l'alternative, les niveaux d'utilité $\tilde{u}_o^i = \tilde{u}_o(z^{io})$, $\tilde{u}_1^i = \tilde{u}_1(z^{i1})$ et $\tilde{u}_2^i = \tilde{u}_2(z^{i2})$. Puisque $\tilde{u}_2^i > \tilde{u}_1^i > \tilde{u}_o^i$, cet individu i choisira l'alternative 2. Le même raisonnement prédira un choix de l'alternative 1 pour les individus caractérisés par le revenu y^j et le choix de ne consommer aucun des deux biens pour l'individu k caractérisé par y^k. Ces derniers cas sont représentés dans les figures 8.1 b et 8.1 c, où on a représenté les mêmes fonctions d'utilité et supposé les mêmes prix p_1 et p_2 que dans la figure 8.1 a.

Figure 8.1: Fonctions d'utilité conditionnelle



Par souci de clarté,nous ferons suivre un exemple algébrique d'une fonction d'utilité tout au long de l'exposé. On veux une fonction d'utilité qui soit la plus générale possible tout en offrant le maximum de simplicité analytique. La fonction d'utilité Stone-Geary est définie par:

$$(8.3)\qquad u(x_1, x_2, z) = a_1 \ln(x_1 + \gamma_1) + a_2 \ln(x_2 + \gamma_2) + \beta \ln(z + \gamma_3)$$

Pour des $\gamma_i > 0$, $i = [1, 2]$, on peut changer cette spécification pour:[2]

$$(8.4)\qquad u(x_1, x_2, z) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \beta \ln(z + \gamma_3)$$

en posant $\alpha_i = a_i \ln\left[\dfrac{\gamma_i + 1}{\gamma_i}\right]$, $i = [1, 2]$.

La fonction d'utilité Stone-Geary est suffisamment générale pour notre propos. Nous poserons, en outre, $\gamma_3 = 0$. Les spéci-

---

[2]Rappelons que x_1 et x_2 ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1 et ne peuvent prendre simultanément la valeur 1. Appelons α la quantité telle que:

$$\alpha = a_1 \ln\gamma_1 + a_2 \ln \gamma_2.$$

Si $x_1 = 1$ et $x_2 = 0$, alors:

$$u' = u - \alpha = a_1 \ln(\gamma_1 + 1) + a_2 \ln \gamma_2 - \alpha$$
$$= a_1 \ln[(\gamma_1 + 1)/\gamma_1]$$

Si $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$, alors:

$$u' = u - \alpha = a_2 \ln[(\gamma_2 + 1)/\gamma_2]$$

Comme l'addition d'un terme constant à la fonction d'utilité ne fications de ce type présentent toutefois une particularité: l'utilité marginale de z est indépendante du choix de l'alternative 1 ou de l'alternative 2. Graphiquement (voir figure (8.2)), la distance verticale entre les courbes d'utilité conditionnelle au choix de chacune des alternatives est constante.[3]

Donc, les fonctions d'utilité conditionnelle mentionnées précédemment seront définies par:

(8.5) $$\tilde{u}_o(z) = u(0,\ 0,\ z) = \beta \ln(z)$$

(8.6) $$\tilde{u}_1(z) = u(1,\ 0,\ z) = \alpha_1 + \beta \ln(z)$$

(8.7) $$\tilde{u}_2(z) = u(0,\ 1,\ z) = \alpha_2 + \beta \ln(z).$$

Le fait de poser $\gamma_1 > 0$ et $\gamma_2 > 0$ assure le respect de la condition (8.2 a) et le fait de poser $\beta > 0$ assure le respect de la condition (8.2 b), pour tout $z > 0$.

On définit les fonctions d'utilité indirecte conditionnelle comme étant les fonctions d'utilité indirecte telles que la valeur de ces fonctions est celle de $\tilde{u}_i$ dans la solution du sous-

---

change pas l'ordonancement des choix, on peut interchanger u pour u'.

[3]On pourrait aussi utiliser des fonctions de type CES, ce qui nous conduirait au même problème. En effet:

$$u = [\alpha_o + \alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho + \alpha_3 z^\rho]^{1/\rho}$$

donne le même ordonnancement de choix qu'une transformation d'échelle de cette utilité, c'est-à-dire:

$$u' = \alpha_o + \alpha_1 x_1^\rho + \alpha_2 x_2^\rho + \alpha_3 z^\rho = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \alpha_3 z^\rho$$

avec $\beta_i = \alpha_o + \alpha_i, i=[1,\ 2]$. Dans l'appendice A, on discute des fonctions ne présentant pas cette caractéristique.

problème:

(8.8) $$\text{Max } \tilde{u}_i(z) \quad \text{s.c. } p_i + z = y \qquad i = [1, 2].$$

Alors, clairement, les fonctions d'utilité indirecte peuvent être exprimées par:

(8.9) $$\tilde{v}_i(p_i, y) = \tilde{u}_i[(y - p_i)/p_z] = \tilde{u}_i(y - p_i) \qquad i = [1, 2]$$

et $\tilde{v}_o(y) = \tilde{u}_o(z)$.

Suivant notre exemple algébrique, ces fonctions seront:

(8.10) $$\tilde{v}_o(y) = \beta \ln(y)$$

$$\tilde{v}_1(p_1, y) = \alpha_1 + \beta \ln(y - p_1)$$

$$\tilde{v}_2(p_2, y) = \alpha_2 + \beta \ln(y - p_2).$$

On peut construire, à partir du graphique illustré dans la figure 8.1, la fonction d'utilité indirecte $v(p_1, p_2, y)$ et les fonctions d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_o(y)$, $\tilde{v}_1(p_1, y)$ et $\tilde{v}_2(p_2, y)$. Les fonctions d'utilité indirecte conditionnelle sont obtenues en déplaçant chaque courbe d'utilité $\tilde{u}_i(\cdot)$ d'une distance p_i vers la droite. Ceci est illustré dans la figure 8.3 (page suivante). La fonction d'utilité indirecte $v(\bar{p}_1, \bar{p}_2, y)$ est le contour extérieur de ces courbes, étant donné des prix p_1, p_2 fixés à $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, respectivement. La fonction $v(p_1, p_2, y)$ représente l'utilité optimale (finale) du consommateur, étant

Figure 3.2: Utilité conditionnelle avec fonctions de type Stone-Geary.

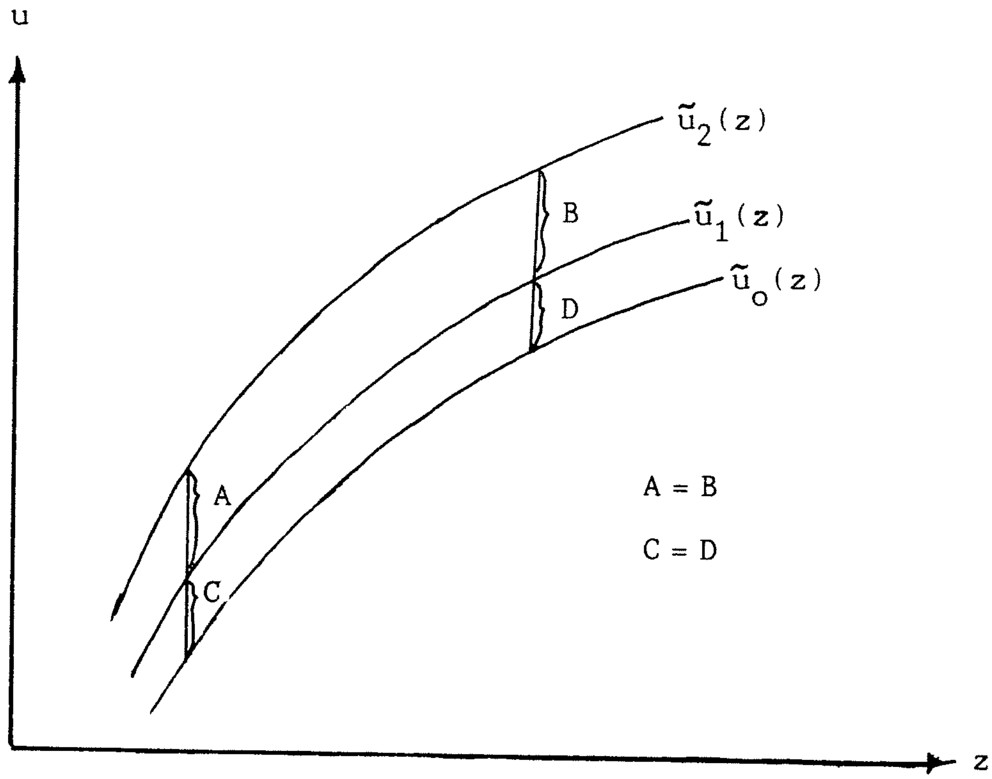
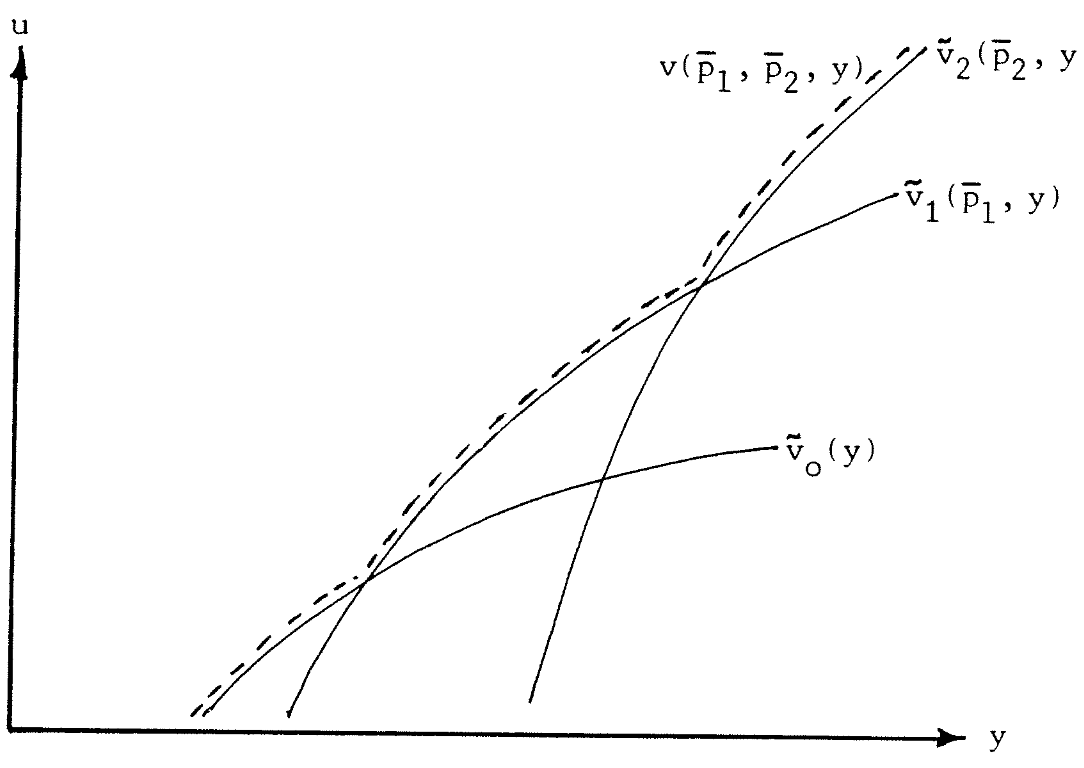


Figure 3.3: Fonctions d'utilité indirecte et indirecte conditionnelle.



donné un système de prix et un revenu. Donc:

(8.11) $$u \equiv \max \{\tilde{v}_o(y),\ \tilde{v}_1(p_1, y),\ \tilde{v}_2(p_2, y)\} \equiv v(p_1, p_2, y)$$

Les fonctions d'utilité indirectes et conditionnelles sont définies pour tout $p_1, p_2 > 0$ et $y > p_1, p_2$

Par la condition (8.2 b), chacune des fonctions d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_i(\cdot)$, $i = [0, 1, 2]$, peut être inversée pour donner des fonctions de dépense conditionnelle strictement croissantes en u:

(8.12) $$\tilde{e}_i(p_i, u) = \tilde{v}_i^{-1}(p_i, y).$$

Avec les fonctions d'utilité Stone-Geary définis précédemment, ces fonctions de dépense conditionnelle seront:

(8.13) $$\tilde{e}_o(u) = \exp(u/\beta)$$

$$\tilde{e}_i(p_i, u) = \exp[(u - \alpha_i)/\beta] + p_i, \quad i = [1, 2].$$

On constate que:[4]

(8.14) $$\frac{\partial \tilde{e}_i(p_i, u)}{\partial u} > 0,$$

---

[4]Si x_1 et x_2 sont définis comme des"biens" (c.-à-d. ne sont pas des "maux") alors, dans l'équation 4.3, $a_i > 0$. Etant donné qu'on a postulé $\gamma_i > 0$, ceci implique que $\alpha_i > 0$. Donc, si $u < 0$, alors $[(u - \alpha_i)/\beta] < 0$.

ce qui résulte de l'hypothèse de l'utilité marginale du revenu positive (8.2 b), et que:

(8.15) $$\frac{\partial \tilde{e}_i(p_i, u)}{\partial p_i} = 1, \qquad i=[1, 2].$$

Puisque chacune des fonctions maximandes de l'équation (8.11) est continue et dérivable en y, la dérivée de la fonction d'utilité indirecte $v(p_1, p_2, y)$ existe en tout points autres que ceux où une égalité $\tilde{v}_i(\cdot) = \tilde{v}_k(\cdot)$ survient. ($i' = [0, 1, 2]$). De plus, la condition (8.2 b) associée avec l'identité (8.11) nous assure que la fonction d'utilité indirecte $v(p_1, p_2, y)$ est monotone croissante, i.e.:

(8.16) $$\frac{\partial v(p_1, p_2, y)}{\partial y} > 0$$

Suivant le même raisonnement que celui aboutissant à l'équation 4.8, on a une fonction de dépense

(8.17) $$e(p_1, p_2, u) = \min \; e_i(p_i, u)$$

continue et différenciable en tout points autres que ceux où une égalité $e_i = e_j$ survient.

Le choix entre les différentes alternatives se fait donc en comparant les niveaux des utilités conditionnelles et en sélectionnant parmi elles celle qui donne l'utilité maximum pour un revenu donné, ou en comparant la valeur des fonctions de dépense conditionnelle et en identifiant la dépense minimum pour un niveau d'utilité donné.

On peut tracer une frontière de démarcation entre une alternative i et une alternative j $(i, j = [0, 1, 2])$ par un plan dans l'espace tridimensionel p_1, p_2 et y. Chaque plan décrit la démarcation entre deux alternatives. Reprenant notre exemple algébrique, on décrira, dans l'espace p_1, y, la frontière de démarcation entre l'alternative 0 et l'alternative 1 par l'ensemble des points (p_1, y) qui assurent l'égalité entre l'utilité conditionnelle $\tilde{v}_o(y)$ et l'utilité conditionnelle $\tilde{v}_1(p_1, y)$. Ainsi, pour $p_2 = \overline{p}_2$:

(8.21) $$\tilde{v}_o(y) = \tilde{v}_1(p_1, y)$$

$$\beta \ln y = \alpha_1 + \beta \ln (y - p_1)$$

$$\exp[\alpha_1/\beta] = y/(y - p_1)$$

$$y = p_1 \cdot a_{1o}, \qquad \text{où} \quad a_{1o} = \frac{\exp[\alpha_1/\beta]}{\exp[\alpha_1/\beta] - 1}$$

De même, la frontière de démarcation entre l'alternative 1 et l'alternative 2 pour un $\overline{p}_2$ donné se calcule par:

(8.22) $$\tilde{v}_1(p_1, y) = \tilde{v}_2(\overline{p}_2, y)$$

$$\alpha_1 + \beta \ln (y - p_1) = \alpha_2 + \beta \ln (y - \overline{p}_2).$$

D'où:

$$y = a_{12} \cdot p_1 + k_{12} \cdot \overline{p}_2$$

avec:

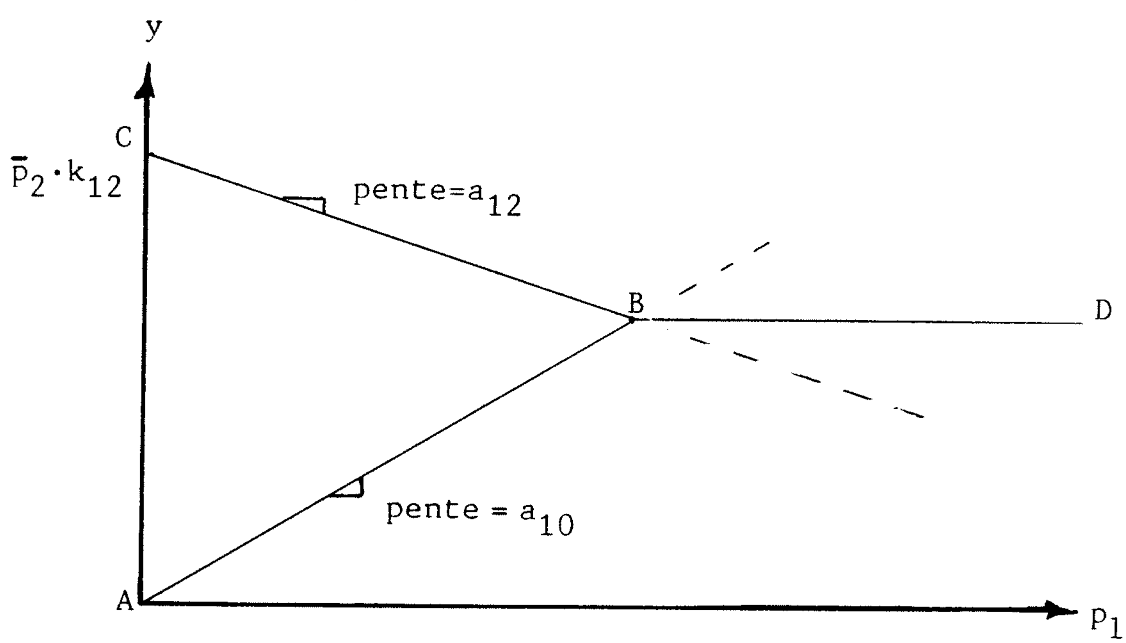
$$a_{12} = \frac{\exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta]}{\exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta] - 1}$$

et

$$k_{12} = \frac{-1}{\exp[(\alpha_1 - \alpha_2)/\beta] - 1}$$

La figure 4.4 illustre cet exemple avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > \alpha_1$

Figure 8.4: Choix des alternatives selon y et p_1, avec $\bar{p}_2$ fixe; fonction d'utilité Stone-Geary.



Avec $p_2 = \bar{p}_2$, l'alternative 0 est choisie pour (y, p_1) situé sous la démarcation ABD. L'alternative 1 sera choisie pour des (y, p_1) situés dans l'espace délimité par ABC, et l'alternative 2 sera choisie pour les points (y, p_1) situés au dessus de CBD.

On appellera C_{12} l'ensemble des prix et revenus (p_1, p_2, y) tel que l'individu est indifférent entre le choix de l'alternative 1 ou de l'alternative 2. Les ensembles C_{01} et C_{02} seront définis similairement. Le fait de fixer p_2 et y aux valeurs arbitraires $\bar{p}_2$ et $\bar{y}$ détermine un prix critique $p_1^* = p_1^*(\bar{p}_2, \bar{y})$ tel que pour tout $p_1 < p_1^*$ l'alternative 1 est préférée et pour tout $p_1 > p_1^*$ l'alternative 2 ou l'alternative 0 est préférée.[6]

On aura donc:

$$(8.23) \qquad \frac{\partial v(p_1, \bar{p}_2, \bar{y})}{\partial p_1} = \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}_1(p_1, \bar{y})}{\partial p_1}, & p_1 < p_1^* \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial \tilde{v}_2(\bar{p}_2, \bar{y})}{\partial p_1} = \dfrac{\partial \tilde{v}_o(\bar{y})}{\partial p_1}, & p_1 > p_1^* \end{cases}$$

De même:

$$(8.24) \qquad \frac{\partial v(p_1, \bar{p}_2, \bar{y})}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}_1(p_1, \bar{y})}{\partial y}, & p_1 < p_1^* \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{v}_2(\bar{p}_2, \bar{y})}{\partial y} \text{ ou } \dfrac{\partial \tilde{v}_o(\bar{y})}{\partial y}, & p_1 > p_1^* \end{cases}$$

---

[6] Une condition suffisante pour qu'il existe un p_1^* unique pour tout $(\bar{p}_2, \bar{y})$ est que l'utilité marginale de z soit indépendante de la valeur de x_1 ou de x_2, i.e.,:

$$\frac{\partial^2 u(x_1, x_2, z)}{\partial z \, \partial x_i} = 0, \quad i = [1, 2]$$

Cette condition est assurée par les fonctions d'utilité de type Stone-Geary, tel que mentionné précédemment.

ce qui, de par la définition (8.9), vérifie l'identité de Roy:

$$(8.25) \qquad - \frac{\partial v(p_1, p_2, y)}{\partial p_i} \Bigg/ \frac{\partial v(p_1, p_2, y)}{\partial y} = x_i(p_1, p_2, y)$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si l'alternative } i \text{ est choisie,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Les fonctions $x_i(p_1, p_2, y)$ sont définies pour l'ensemble des prix p_1, p_2 et revenu y tels que $(p_1, p_2, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}]$. De plus, étant donné l'équation (.15) et le fait que, par définition, $\partial \tilde{e}_i(p_i, u)/\partial p_j = 0$, $i, j = [1, 2]$, la fonction de demande compensée

$$(8.26) \qquad h_i(p_1, p_2, u) = \frac{\partial e(p_1, p_2, u)}{\partial p_i} \qquad i = [1, 2]$$

est définie partout où $\tilde{e}_i(p_i, u) \neq \tilde{e}_j(p_j, u)$, c'est-à-dire pour tout point (p_1, p_2, y) tel que $y \neq y^*(p_1, p_2)$.

Ces résultats sont facilement généralisables aux cas où on a n alternatives distinctes mutuellement exclusives.

Il est intéressant de constater que dans le cas où n tend vers l'infini, la fonction $v(p_1, \ldots, p_n, y)$ devient continuellement dérivable et on retrouve le problème traditionnel de la maximisation de biens continus sous une contrainte budgétaire. Par exemple, chaque alternative x_i peut consister en un niveau particulier de consommation d'un bien x_o; le prix de chaque niveau de consommation étant un multiple d'un prix de base, p_o. Le fait que chaque fonction $\tilde{u}_i(z)$ soit continue et dérivable en z implique que pour tout ε infiniment petit, il est possible de trouver η tel que:

$$(8.27) \qquad \left.\frac{d\tilde{u}_i(z)}{dz}\right|_{z=\bar{z}} - \left.\frac{d\tilde{u}_i(z)}{dz}\right|_{z=\bar{z}+\eta} < \varepsilon$$

Alors $\partial\tilde{v}(i \cdot p_o, y)/\partial p_o$ existe en tout point et la fonction $v(i \cdot p_o, y)$ est continue. Sa dérivée est:

$$(8.28) \qquad \frac{\partial\tilde{v}(i \cdot p_o, y)}{\partial p_o} = \frac{d\tilde{u}_i(y - i \cdot p_o)}{dp_o}$$

$$= \frac{d\tilde{u}_i(z)}{dz} \cdot \frac{d(y - i \cdot p_o)}{dp_o}$$

$$= \lambda(-i)$$

Il ne reste plus qu'à définir l'indice i comme étant le nombre d'unités du bien x_o pour obtenir:

$$(8.29) \qquad \frac{\partial v(p_o, y)}{\partial p_o} = -\lambda x_o$$

Puisque $\partial v(p_o, y)/\partial y = \lambda$, on retrouve l'identité de Roy dans le cas continu qui est issu du problème:

$$\max u(x_o, z)$$

$$\text{s.c. } p_o x_o + z = y, \qquad x_o \text{ et } z \in \mathbb{R}^+.$$

Donc, le problème du consommateur en contexte de choix discret, lorsque le nombre d'alternatives tend vers l'infini, dégénère vers le cas continu.

8.2: Variations dans les qualités des biens

Dans l'analyse du bien-être, on est souvent intéressé par l'effet des variations de qualité des biens. On peut vouloir mesurer, par exemple, l'effet de l'augmentation de la vitesse commerciale du transport en commun dans un centre urbain ou l'effet d'une augmentation du niveau de bruit dans un quartier sur le bien-être d'une population.

On peut reprendre l'analyse précédente en introduisant des variations de qualité dans les biens discrets. On précise d'abord que les postulats de base de la théorie du consommateur, en ce qui concerne les préférences dans l'espace des qualités sont les mêmes que ceux adoptés pour les préférences dans l'espace des quantités, soit la description d'une relation complète, réflexive, transitive et continue. On peut donc décrire les préférences du consommateur par une fonction des qualités et des quantités. Ainsi, le consommateur maximise une fonction $u(x_1, x_2, b_1, b_2, z)$ [7]

[7] Les x sont des variables endogènes et les b sont des variables exogènes du point de vue du consommateur. La fonction $u(\underline{x}, \underline{b}, z)$ peut être vue comme une fonction spécifique différente pour chaque niveau de qualité $\underline{b}$.

sous les mêmes contraintes que dans le problème (8.1), avec b_i représentant le niveau d'un (vecteur d') attribut(s) ou qualité(s) d'une alternative i. On suppose que le niveau de qualité de chaque alternative peut être décrit par une unité de mesure commune à toutes les alternatives. Sous l'hypothèse adoptée en 3.33, soit $\partial u_i / \partial b_j = 0, \forall i \neq j$, on peut décrire les fonctions d'utilité conditionnelles par:

$$\tilde{u}_i(b_i, z), \quad i = 1, 2].$$

On postule aussi la condition suivante:

(8. 30) $$0 < \frac{\partial \tilde{u}_i(b_i, z)}{\partial b_i} < \infty$$

Une variation dans la qualité d'un produit (alternative) entraine un déplacement des courbes d'utilité conditionnelle à l'utilisation de cette alternative. L'exemple d'une amélioration de qualité de b_1^o à b_1' est illustré dans la figure 8.5 (page suivante).

De la même manière que pour l'analyse précédente des variations de prix , on obtient les courbes d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_i(p_i, b_i, y)$ en déplaçant chacune des courbes d'utilité conditionnelle $\tilde{u}_i(b_i, z)$ d'une distance p_i vers la droite. Ainsi:

(8. 31) $$\tilde{v}_i(p_i, b_i, y) \equiv \tilde{u}_i(b_i, (y-p_i)),$$

Figure 8.5: a) Variation du niveau de qualité de l'alternative 1, fonction d'utilité conditionnelle.

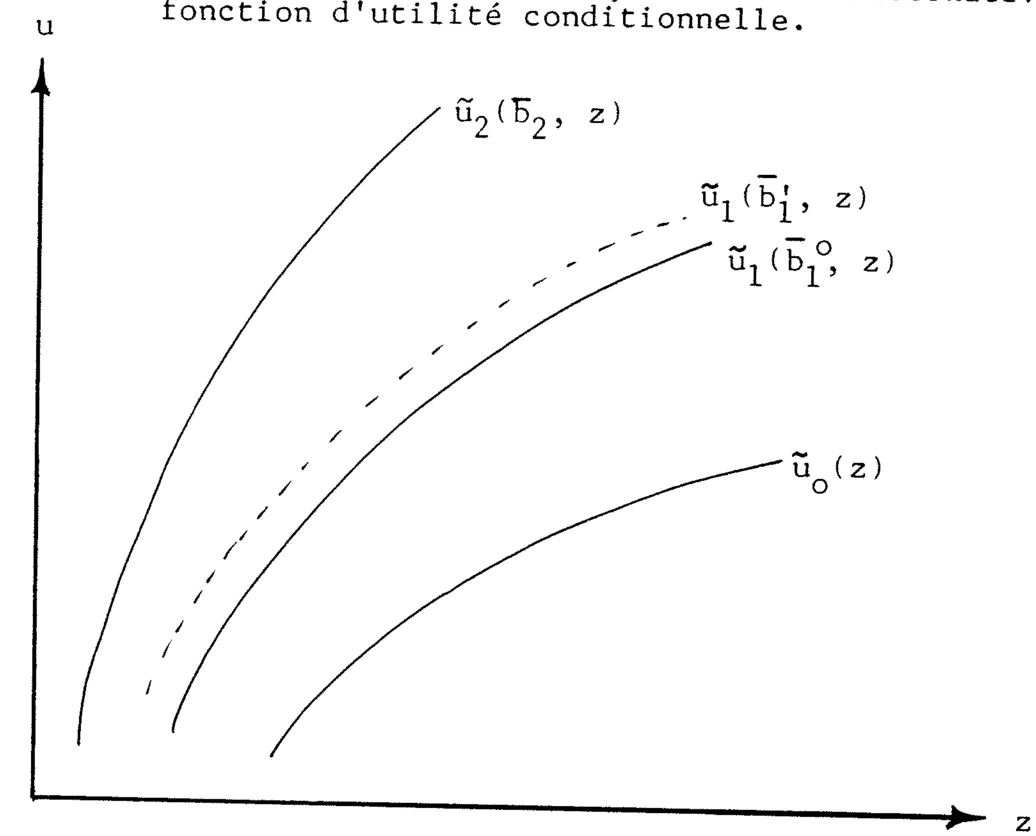
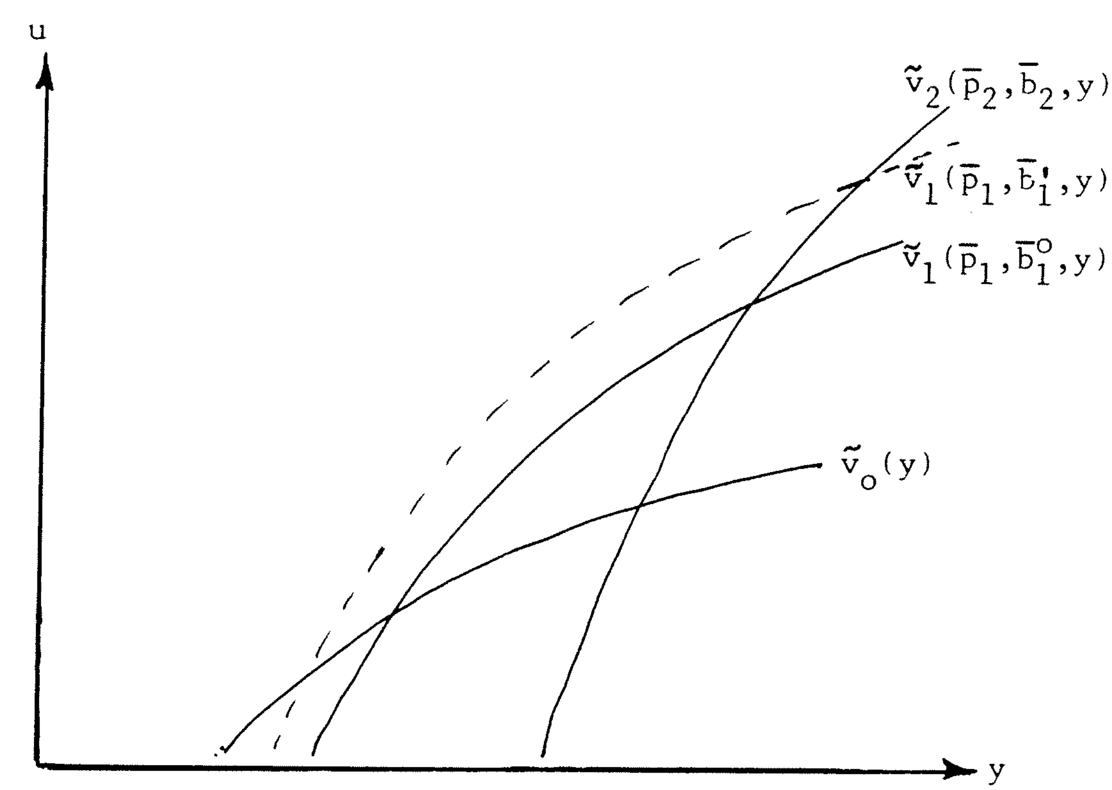


Figure 8.5 b) Variation du niveau de qualité de l'alternative 1, fonction d'utilité indirecte conditionnelle.



et chaque fonction d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_i(\cdot)$ est continue et dérivable en b_i.

On peut modifier notre exemple algébrique du début en ajoutant des variables de qualité dans les fonctions d'utilité pour illustrer ce fait. Ainsi, la fonction d'utilité Stone-Geary devient:

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \gamma_1 b_1 x_1 + \gamma_2 b_2 x_2 + \beta \ln(z + \gamma_3). \tag{8.32}$$

La même remarque sur la spécificité de ces formes d'utilité s'applique ici, à savoir que l'utilité marginale de z est indépendante du choix de l'alternative 1 ou 2, de même que du niveau de qualité de l'alternative 1 ou 2.

Comme précédemment, on fixe $\gamma_3 = 0$. Les fonctions d'utilité indirecte conditionnelle sont donc:

$$\tilde{v}_i(p_i,\ b_i,\ y) = \alpha_i + \gamma_i b_i + \beta \ln(y - p_i), \quad i = [1, 2] \tag{8.33}$$

$$\text{et} \quad \tilde{v}_o(y) = \beta \ln(y).$$

Pour chaque niveau $(p_1,\ p_2,\ b_1,\ b_2,\ y)$, l'utilité du consommateur est donnée par:

$$v(\underline{p},\ \underline{b},\ y) \equiv u \equiv \max\{v_o(y),\ v_1(p_1,\ b_1,\ y),\ v_2(p_2,\ b_2, y)\} \tag{8.34}$$

où $\underline{p} = (p_1,\ p_2)$ et $\underline{b} = (b_1,\ b_2)$. Le choix d'une alternative se fera donc en comparant les niveaux des utilités conditionnelles au choix de chaque alternative étant donné un système de prix, qualité et revenu. De la même manière que précédemment, on peut tracer une frontière de démarcation entre une alternative i et une alternative j par un hyperplan dans l'espace des prix , qualités et revenu; chaque hyperplan décrivant la démarcation entre deux alternatives. De façon similaire, les ensembles $C_{ij} = [p_i, p_j, b_i, b_j, y]$ seront définis par l'ensemble des niveaux de prix p_i, p_j, de qualités b_i, b_j et de revenu y tel que l'individu est indifférent entre le choix d'une alternative i et une alternative j.

En fixant p_1, p_2, y et b_2 aux niveaux $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{y}$ et $\bar{b}_2$, on peut déterminer le (ou les)[8] niveau(x) de qualité b_1^* tel(s) que l'individu est indifférent entre l'alternative 1 et l'alternative 2 . Ceci est fait en posant:

$$\tilde{v}_1(\bar{p}_1, b_1, \bar{y}) = \tilde{v}_2(\bar{p}_2, \bar{b}_2, \bar{y})$$

Suivant notre exemple algébrique, b_1^* sera déterminé par:

$$b_1^* = (\beta/\gamma_1) \ln [(\bar{y} - \bar{p}_2)/(\bar{y} - \bar{p}_1)] - (\alpha_1 - \alpha_2)/\gamma_1 + (\gamma_2/\gamma_1)\cdot\bar{b}_2 \tag{8.35}$$

---

[8] Comme précédemment, une condition suffisante d'unicité pour b_i^* est que l'utilité marginale de z soit indépendante de la valeur de b_1 ou de b_2.

Comme dans la section précédente, le fait que chacune des fonctions d'utilité indirecte conditionnelle $\tilde{v}_i(.)$ soit continue et dérivable en b_i nous permet d'affirmer que la fonction $v(\underline{p}, \underline{b}, y)$ est continue en $\underline{b}$ et que sa dérivée est définie pour tou points $(\underline{p}, \underline{b}, y)$ tels que $(\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}]$.

Par la condition (8.30), les fonctions d'utilité indirecte conditionnelle peuvent être inversées pour donner les fonctions de dépense conditionnelle $\tilde{e}_i(p_i, b_i, u)$, $i = [0, 1, 2]$, avec:

$$(8.36) \qquad \frac{\partial \tilde{e}_i(p_i, b_i, u)}{\partial u} > 0$$

et

$$(8.37) \qquad \frac{\partial \tilde{e}_i(p_i, b_i, u)}{\partial b_i} = - \left. \frac{\partial \tilde{v}_i(p_i, b_i, y)/\partial b_i}{\partial \tilde{v}_i(p_i, b_i, y)/\partial y} \right|_{\tilde{v}_i = \tilde{v}_i^o}$$

$$= - \left. \frac{\partial \tilde{v}_i(p_i, b_i, y)/\partial b_i}{\lambda_i(p_i, b_i, y)} \right|_{\tilde{v}_i = \tilde{v}_i^o}$$

Suivant l'exemple de la fonction Stone-Geary, les fonctions de dépense conditionnelle sont:

$$(8.38) \qquad \tilde{e}_i(p_i, b_i, u) = p_i + \exp[(u - \alpha_i - \gamma_i b_i)/\beta], \ i = [1, 2]$$

et

$$\tilde{e}_o(u) = \exp[u/\beta].$$

La dérivée de la fonction de dépense par rapport au niveau de qualité est:

$$(8.39) \qquad \frac{\partial \tilde{e}_i(p_i,\ b_i,\ u)}{\partial b_i} = -\frac{\gamma_i}{\beta} \cdot \exp[(u - \alpha_i - \gamma_i b_i)/\beta]$$

La dérivée de la fonction d'utilité indirecte par rapport au niveau de qualité est:

$$(8.40) \qquad \frac{\partial \tilde{v}_i(p_i,\ b_i,\ y)}{\partial b_i} = \gamma_i\ , \qquad i = [1,\ 2],$$

et l'utilité marginale de la monnaie conditionnelle au choix d' une alternative i est, comme précédemment:

$$(8.41) \qquad \frac{\partial \tilde{v}_i(p_i,\ b_i,\ y)}{\partial y} = \beta/(y - p_i), \quad i = [1,\ 2].$$

En posant $\tilde{v}_i = u$, on vérifie l'équation (8.37) à l'aide des équations (4.38) à (4.41).

De la même manière que dans la section précédente, on peut montrer que :

$$(8.42) \qquad e(\underline{p},\ \underline{b},\ u) \equiv \min_i \{e_i(p_i,\ b_i,\ u)\}$$

Puisque chacune des fonctions de dépense conditionnelle $e_i(\cdot)$ est continue et différenciable en b_i, la fonction de dépense $e(\underline{p},\ \underline{b},\ u)$ est continue et différenciable en b_i, $i = [1,\ 2]$, en tout point $(\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}]$, c'est-à-dire pour tout système de prix, qualités tels que:

$$\tilde{e}_i(p_i, b_i, u) \neq \tilde{e}_j(p_j, b_j, u)$$

On est donc en mesure d'exprimer les relations suivantes:

$$(8.43) \qquad \frac{\partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\partial b_i} = \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}_i(p_i, b_i, y)}{\partial b_i} = r_i, & i \text{ est choisi et } (\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}] \\ 0, & i \text{ n'est pas choisi et } (\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}] \end{cases}$$

$$(8.44) \qquad \frac{\partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{v}_i(p_i, b_i, y)}{\partial y} = \lambda_i, & i \text{ est choisi et } (\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}] \\ \dfrac{\partial \tilde{v}_j(p_j, b_j, y)}{\partial y} = \lambda_j, & j \text{ est choisi et } (\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}] \end{cases}$$

où r_i est l'utilité marginale conditionnelle de la qualité de l'alternative i.

Similairement, en se servant de l'équation (8.37):

$$(8.45) \qquad \frac{\partial e(\underline{p},\ \underline{b},\ u)}{\partial b_i} = \begin{cases} -\dfrac{r_i(p_i,\ b_i,\ y)}{\lambda\ (\underline{p},\ \underline{b},\ y)} & \text{i est choisi et } e_i(\cdot) \neq e_j(\cdot) \\ 0 & \text{i n'est pas choisi} \end{cases}$$

où $\lambda(\underline{p},\ \underline{b},\ y)$ est l'utilité marginale de la monnaie. L'équation (8.45) exprime l'évaluation marginale d'une unité de qualité de l'alternative i convertie en unités monétaire par l'utilité marginale de la monnaie, λ. [Small et Rosen (1981), p. 121]

8.3 Variation compensatoire et variation équivalente

Dans le chapître précédent, on a défini la variation compensatoire comme étant la somme qu'il faut donner (enlever) aux consommateurs aux nouveaux prix $\underline{p}'$ et qualités $\underline{b}'$ pour qu'ils retrouvent leur niveau d'utilité initial, soit $v(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y)$, et la variation équivalente comme étant la somme à donner (enlever) aux consommateurs pour rendre leur utilité, évaluée aux prix et qualités initiaux, égale à celle qu'ils auraient suite au changement proposé. Considérons un changement de prix seulement. Lorsque le passage de l'état initial $(\underline{p}^o, y)$ à l'état final $(\underline{p}', y)$ ne traverse pas un des hyperplans décrits par les C_{ij}, c'est-à-dire lorsque le changement de prix n'implique pas un changement d'alternative, la dérivation de VC pour un tel changement de prix est:

$$
\begin{aligned}
\text{(8.46)} \qquad VC &= y' - e(\underline{p}', u^o) \\
&= (p_1' - p_1^o)\cdot x_1 + (p_2' - p_2^o)\cdot x_2 + z^o - z^o \\
&= (p_i' - p_i^o) \quad \text{si } i \text{ est choisi, } i = [1, 2]
\end{aligned}
$$

En effet, la dépense aux prix $\underline{p}'$ pour atteindre l'utilité u^o est $p_i' x_i + z^o$ si l'alternative i est choisie. Pour rendre au consommateur son utilité initiale, soit $u(\underline{x}, z^o)$ au nouveau prix $\underline{p}'$, on aura besoin d'augmenter son revenu d'un montant $(p_i' - p_i^o)$, soit la différence entre le budjet nécessaire au nouveau prix pour atteindre l'utilité initiale et le budjet initial.

Tel qu'écrit en (3.1), la VE s'exprime par:

$$(3.47) \qquad VE = e\,(\underline{p}^o,\ u') - y^o$$

$$= (p_1^o x_1 + p_2^o x_2 + z') - (p_1^o x_1 + p_2^o x_2 + z^o)$$

$$= (z' - z^o)$$

Lorsque l'alternative i est choisie, la dépense pour atteindre l'utilité $u' = u(x_i,\ z')$ est $e(p_i^o,\ u')$ telle que

$$p_i^o x_i + z' = e(\underline{p}^o,\ u')$$

Or, le niveau d'utilité $u(x_i,\ z') = u'$ est précisément celui qui est atteint avec le budjet initial aux nouveaux prix, soit

$$p_i' x_i + z' = y^o = p_i^o x_i + z^o$$

Donc, la différence $(z' - z^o)$ est la différence de prix $(p_i' - p_i^o)$. Dans un tel cas, lorsqu'un changement de prix n'implique pas de changement d'alternative, on a VC= VE.

Ce résultat s'explique par le fait que la demande individuelle pour x_i est une demande parfaitement inélastique pour toute la gamme de prix comprise entre 0 et p_i^* où $p_i^* = p_i^*(p_j, \underline{b}, y)$ tel que l'individu est indifférent entre cette alternative et une autre alternative. Or, il est connu que, dans le cas continu, l'égalité

$$e(p_1', p_2, u') - e(p_1^0, p_2, u') = e(p_1', p_2, u^o) - e(p_1^o, p_2, u^o)$$

$$= (p_1' - p_1^o)$$

est vérifiée dans le cas où

$$\frac{\partial x_1(p_1, p_2, y)}{\partial p_1} = 0$$

Pour des changements de qualité ou des changements de prix impliquant des changements d'alternatives, (i.e.: le passage de $(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y^o)$ à $(\underline{p}', \underline{b}', y')$ traverse un ou plusieurs hyperplans C_{ij}), on devra prendre une approche plus générale.

Puisque les fonctions d'utilité indirecte $v(\underline{p}, \underline{b}, y)$ et de dépense $e(\underline{p}, \underline{b}, u)$ sont continues et dérivables en tout points $(\underline{p}, \underline{b}, y) \notin [C_{01}, C_{02}, C_{12}]$, on peut différencier l'identité

(8.48) $$u \equiv v(\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, u))$$

pour obtenir:

(8.49) $$dv = \sum_i \frac{\partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\partial b_i} db_i + \frac{\partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\partial y} dy$$

où les utilités marginales sont définies en tout points autres que les points critiques, i.e., autres que ceux appartenent à l' ensemble $[C_{01}, C_{02}, C_{12}]$.

Suivant l'approche adoptée au chapître trois, on obtient une mesure d'équivalent monétaire en divisant par l'utilité marginale de la monnaie chaque variation d'utilité obtenue par une variation infinitésimale de $(\underline{p}, \underline{b}, y)$. Formellement:

$$\text{(3.50)} \qquad EM = \int_{p^o,\ b^o, y}^{\underline{p}', \underline{b}', y} \frac{dv(\underline{p}, \underline{b}, y)}{\lambda(\underline{p}, \underline{b}, y)}$$

$$= y' - y^o - \int_{\underline{p}^o,\ \underline{b}^o}^{\underline{p}',\ \underline{b}'} \sum_i h_i(\underline{p}, \underline{b}, u)dp_i$$

$$+ \sum_i \frac{r_i(\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, u)}{\lambda(\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, u)} db_i$$

où $r_i(\underline{p}, \underline{b}, y) = \partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)/\partial b_i$ et $\lambda(\underline{p}, \underline{b}, y) = \partial v(\underline{p}, \underline{b}, y)/\partial y$.

Nous avons vu précédemment [équations (3.23), (3.24), et (3.43)] que la fonction $v(\underline{p}, \underline{b}, y)$ est dérivable en $\underline{p}$, $\underline{b}$ et y pour tous les points $(\underline{p}, \underline{b}, y)$ autres que les points critiques, et que ces dérivées possèdent des valeurs finies. Cependant, pour tout point $(\underline{p}, \underline{b}, y) \in [C_{01}, C_{02}, C_{12}]$, il est toujours possible de trouver un voisinage ϵ tel que la dérivée de $v(\underline{p}, \underline{b}, y)$

existe en ce point et possède une valeur finie.

Prenons, par exemple, la dérivée $\partial v(p_1, \bar{p}_2, \underline{\bar{b}}, \bar{y})/\partial p_1$ évaluée au point p_1^* tel que $(p_1^*, \bar{p}_2, \underline{\bar{b}}, \bar{y}) \in C_{12}$, i.e.: p_1^* est le prix de l'alternative 1 tel que le consommateur est indifférent entre l'alternative 1 et l'alternative 2, étant donné les autres prix, qualités et revenu). Ainsi:

$$(8.51) \qquad \tilde{v}_1(p_1^*, \bar{b}_1, \bar{y}) = \tilde{v}_2(\bar{p}_2, \bar{b}_2, \bar{y}) = v(p_1^*, \bar{p}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{y})$$

Pour tout $p_1 < p_1^*$, l'alternative 1 est choisie et $v = \tilde{v}_1$; pour $p_1 > p_1^*$, l'alternative 2 est choisie et $v = \tilde{v}_2$. Donc, $v(p_1^*, \bar{p}_2, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{y})$ est continue au point p_1^*, puisqu'en ce point, $\tilde{v}_1 = \tilde{v}_2$. La dérivée "par la gauche" de la fonction $v(\cdot)$ au point $p_1 = p_1^*$ est:

$$(8.52) \qquad \left.\frac{\partial v(p_1,\bar{p}_2,\underline{\bar{b}},\bar{y})}{\partial p_1}\right|_{p_1^*} = \lim_{p_1 \to p_1^*} \frac{v(p_1,\bar{p}_2,\underline{\bar{b}},\bar{y}) - v(p_1^*,\bar{p}_2,\underline{\bar{b}},\bar{y})}{p_1 - p_1^*}$$

$$= \lim_{p_1 \to p_1^*} \frac{\tilde{v}_1(p_1,\bar{b}_1,\bar{y}) - \tilde{v}_1(p_1^*,\bar{b}_1,\bar{y})}{p_1 - p_1^*}$$

$$= \left.\frac{\partial \tilde{v}_1(p_1, \bar{b}_1, \bar{y})}{\partial p_1}\right|_{p_1^*}$$

Similairement, la dérivée de $v(\cdot)$ "par la droite" existe et est $\partial v_2(\bar{p}_2, \bar{b}_2, \bar{y})/\partial p_1 = 0$. La même démonstration s'applique pour la dérivée des fonctions d'utilité par rapport à y et à b_i, de même que pour les fonctions de dépense.

Puisque les dérivées des fonctions d'utilité et de dépense existent et qu'elles sont continues par segments, i.e.: puisque les fonctions $h_i(\cdot)$, $x_i(\cdot)$, $r_i(\cdot)$ et $\lambda(\cdot)$ existent et sont continues par segments, alors elles sont intégrables et l'équation (3.50) est vérifiée pour tout changement fini de $(\underline{p}^o, \underline{b}^o, y^o)$ à $(\underline{p}', \underline{b}'\ y')$ quelque soit le nombre de changements d'alternatives survenant entre l'état initial et l'état final des prix, qualités et revenu.

L'équation (3.50) est une extension du theorème 1 de Small et Rosen(1981). Ce théorème donne la variation compensatoire pour un changement de prix. Or, celle-ci est obtenue en évaluant l'intégrale de $h_i(\cdot)$ au niveau d'utilité initial, $u=u^o$. Ainsi:

$$(3.53) \qquad VC = -e(\underline{p}', \underline{b}', u^o) + e(\underline{p}^o, \underline{b}^o, u^o)$$
$$= -\int_{\underline{p}^o,\underline{b}^o}^{\underline{p}',\underline{b}'} \sum_i h_i(\cdot)dp_i + \sum_i \frac{r_i(\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, u^o))}{\lambda(\underline{p}, \underline{b}, e(\underline{p}, \underline{b}, u^o))} db_i$$

avec

$$h_i(\underline{p}, \underline{b}, u^o) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est choisi} \\ 0 & \text{si } i \text{ n'est pas choisi.} \end{cases}$$

Lorsque le niveau de b et de y reste constant, i.e.; lorsqu'on ne considère qu'un changement dans un seul prix, on retrouve le résultat du théorème 1 de Small et Rosen, c'est-à-dire:

$$(8.54) \qquad VC = - e(\underline{p}', \underline{b}^o, u^o) + e(\underline{p}^o, \underline{b}^o, u^o)$$

$$= - \int_{p_i^o}^{p_i'} \sum_i h_i(\cdot)\, dp_i$$

ce qui peut aussi s'exprimer par:

$$(8.55) \qquad VC = - \int_{p_i^o}^{p_{ij}^*} dp_i - \int_{p_{ij}^*}^{p_{jk}^*} dp_j - \ldots - \int_{p_{mn}}^{p_n'} dp_n$$

où p_{ij}^*, p_{jk}^*, ... , p_{mn}^* sont les prix "critiques" tels que définis précédemment, où le consommateur passe de l'alternative i à l'alternative j, à l'alternative k, etc.

Donc:

$$(8.56) \qquad VC = - (p_{ij}^* - p_i) - (p_{jk}^* - p_{ij}^*) - \ldots - (p_n' - p_{nm}^*)$$

Notons que les indices i, j, k,... peuvent représenter deux ou plusieurs alternatives. Lorsqu'il n'existe que deux alternatives, le consommateur peut passer d'une alternative à la seconde puis de la seconde à la première, successivement. [Dans ce cas, p_{ij}^* n'est pas unique. Voir notes 6 et 8]

Finalement, si le passage de $(\underline{p}^o, \underline{b}^o)$ à $(\underline{p}', \underline{b}')$ n'implique pas de traverser un hyperplan C_{ij}, l'alternative choisie en situation finale est la même que celle choisie en situation initiale, et la VC est obtenue par:

$$(8.57) \qquad VC = -(p_i'-p_i^o) - \int_{\underline{p}^o,\ \underline{b}^o}^{\underline{p}',\ \underline{b}'} \frac{r_i(\underline{p},\ \underline{b},\ e(\underline{p},\ \underline{b},\ u^o))}{\lambda(\underline{p},\ \underline{b},\ e(\underline{p},\ \underline{b},\ u^o))}\, db_i$$

Intuitivement, la compensation nécessaire suite à un changement dans le niveau des prix et des qualités est d'abord le changement de prix de l'alternative choisie par le consommateur (il en consomme toujours le même montant: une unité) additionné du changement d'utilité dû à la variation de la qualité de cette alternative transformée en unités monétaire en divisant par l'utilité marginale de la monnaie.

La valeur de VC est,en général, différente de celle de VE. Lorsque, par exemple, une augmentation de prix implique un et un seul changement de l'alternative 1 pour l'alternative 2, la variation compensatoire VC est le montant $(p_1^* - p_1^o)$ tel que le point $(p_1^*, p_2, b_1, b_2, e(p_1^*, p_2, b_1, b_2, u^o))$ fait partie de l'ensemble C_{12}. C'est-à-dire que p_1^* est le prix limite au delà duquel le consommateur, après compensation, abandonne la consommation de l'alternative 1.

La valeur de VE pour un tel changement de prix est donnée par $(p_1^{**} - p_1^o)$, où p_1^{**} est tel que:

$$(p_1^{**},\ p_2,\ b_1,\ b_2,\ e(p_1^{**},\ p_2,\ b_1,\ b_2,\ u'))\ \in C_{12}$$

En général, $p_1^* \neq p_1^{**}$. Suivant notre exemple algébrique, la valeur p_1^* pour un état inititial $(p_1^o,\ p_2^o,\ b_1^o,\ b_2^o,\ y^o)$ est donné par: [9]

$$p_1^* = p_2^o + \exp\left[\frac{u^o - \alpha_2 - \gamma_2 b_2^o}{\beta}\right] - \exp\left[\frac{u^o - \alpha_1 - \gamma_1 b_1^o}{\beta}\right] \tag{3.58}$$

$$= p_2^o + K\cdot\exp(u^o/\beta)$$

et la valeur p_1^{**} est donnée par:

$$p_1^{**} = p_2^o + K\cdot\exp(u'/\beta) \tag{3.59}$$

où

$$K = \exp\left[\frac{-\alpha_2 - \gamma_2 b_2^o}{\beta}\right] - \exp\left[\frac{-\alpha_1 - \gamma_1 b_1^o}{\beta}\right]$$

---

[9] Le prix p_1^* est le prix pour lequel l'individu change d'alternative. Si le niveau d'utilité est maintenu constant à u^o, ce prix sera tel que

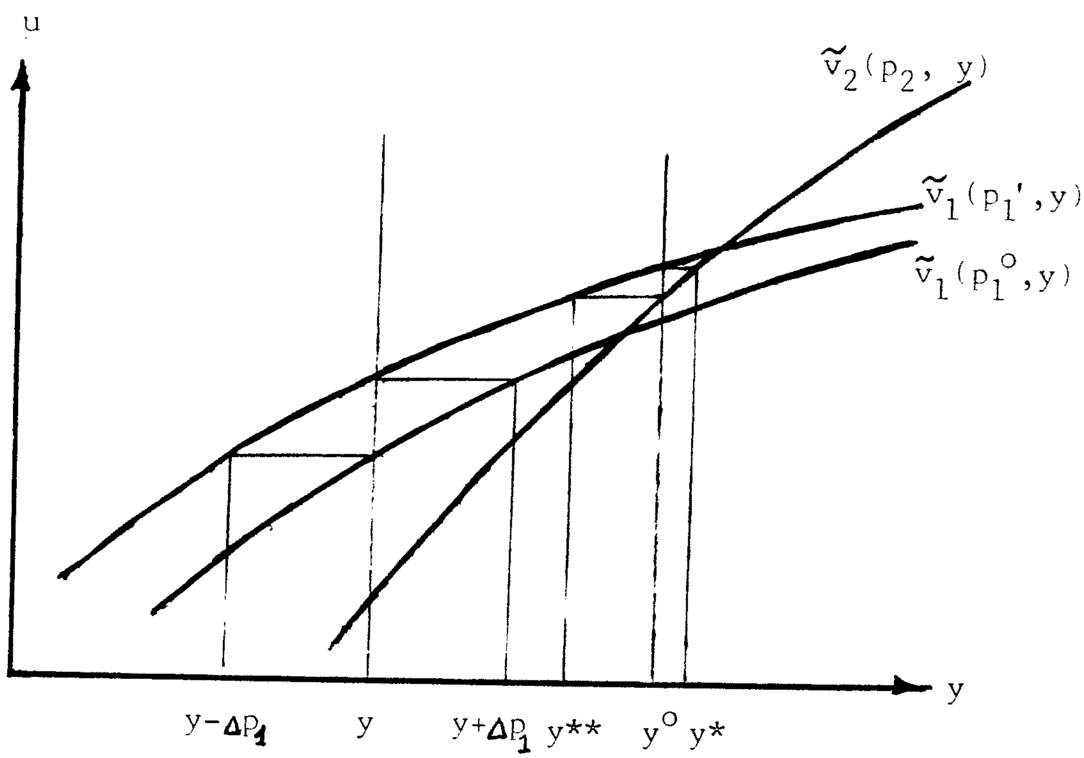
$$e(p_1^*,\ p_2^o,\ b_1^o,\ b_2^o,\ u^o) = \tilde{e}_1(p_1^*,\ b_1^o,\ u^o) = \tilde{e}_2(p_2^o, b_2^o, u^o)$$

Donc:

$$p_1^* + \exp\left[\frac{u^o - \alpha_1 - \gamma_1 b_1^o}{\beta}\right] = p_2^o + \exp\left[\frac{u^o - \alpha_2 - \gamma_2 b_2^o}{\beta}\right]$$

d'où le résultat (3.58).

Figure 8.6 Variation compensatoire et variation équivalente



La figure .6 illustre ce fait. Pour un passage de p_1^o à p_1', la variation compensatoire est $(p_1^o - p_1^*) = y^o - y^*$, et la variation équivalente est $(p_1^o - p_1^{**}) = y^o - y^{**}$.

Ainsi peut-on dire, à l'instar de Mäler [Mäler (1974), p. 131 à 136)] que lorsque le prix d'une alternative i baisse, la variation compensatoire pour un individu qui consommait initialement l'alternative i est égale à la variation équivalente et à la surface à gauche de la demande marshallienne. Ceci n'est généralement plus vérifié cependant pour une hausse de p_i. [Small et Rosen (1981), p. 114] En effet, lorsqu'on hausse le prix de p_i, la compensation à donner aux consommateurs initiaux de l'alternative i change leur prix p_i^* pour lequel ils abandonnent la consommation de i.

8.4 Compensation au niveau agrégé

A la manière de Small et Rosen, on introduit, pour tenir compte de l'inaptitude de l'observateur à connaître les fonctions d'utilité, un terme d'erreur à ces fonctions. Supposons que le coix doive se faire entre l'alternative 1 et l'alternative 2. Les fonctions d'utilité conditionnelle (8.6) et (8.7) se ré-écrivent

(8.60) $$\tilde{u}_i(z) = \alpha_i + \beta \ln z + \varepsilon_i \quad , \qquad i=[1, 2]$$

et les fonctions d'utilité conditionnelle indirecte en (8.10) deviennent

(8.61) $$\tilde{v}_i = \alpha_i + \beta \ln (y - p_i) + \varepsilon_i , \qquad i = [1, 2]$$

Appelons $V_i(p_i, y) = v_i - \varepsilon_i$ la partie commune de ces fonctions d'utilité et définissons, comme les équations (6.6)

(8.62) $$\Delta V(p, y) = V_1(p_1, y) - V_2(p_2, y)$$

et $$\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

Avec l'exemple des fonctions d'utilité de type Stone-

Geary, on a:

$$\text{(8.63)} \qquad \Delta V = (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta \ln[(y - p_1)/(y - p_2)]$$

Si y est grand par rapport à p_1 et à p_2, on peut faire les approximations suivantes :[10]

$$\text{(8.64)} \qquad \Delta V \approx (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta \ln \frac{y - p_1 + p_2}{y}$$

$$\approx (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta \ln(1 - \Delta p/y)$$

$$\approx (\alpha_1 - \alpha_2) - \beta\,(\Delta p/y), \quad \text{où} \quad \Delta p = (p_1 - p_2).$$

Donc, la fonction empirique employée par Hau et décrite en (5.21) peut être vue comme une approximation d'une fonction d'utilité de type Stone-Geary.

Soit $F_\varepsilon(\varepsilon)$ la fonction de distribution cumulative de la différence des termes d'erreur. Comme dans l'équation (3.10) du chapitre trois, la probabilité qu'un individu choisisse l'alternative 1 est donnée par

$$\text{(8.66)} \qquad \Pi_1 = F_\varepsilon[\Delta V(p_1, p_2, y)].$$

Or, Π_1 peut aussi être interprétée comme étant la probabilité qu'un individu tiré au hasard ait un prix p_1^* qui soit supérieur à p_1, étant donné y et p_2, où p_1^* est défini selon l'équation (8.22), soit :

$$(8.67) \qquad p_1^* = \frac{y - k_{12} \cdot p_2}{a_{12}}$$

$$= y + (p_2 - y) \cdot \exp[(\alpha_2 - \alpha_1)/\beta].$$

La distribution de p_1^* dans la population découle de l'hypothèse sur la distribution des termes d'erreur dans la fonction d'utilité et peut être estimée à partir des paramètres calibrés du modèle d'estimation. On peut, notamment, en suivant le même raisonnement que celui qui conduit aux équations (6.10) et (6.11) dans le chapitre six, évaluer la valeur moyenne $\bar{p}_1^*$ et la valeur médiane p_1^{*+} de la distribution de p_1^* dans la population. Celles-ci sont représentées dans la figure 8.7.

Supposons une augmentation du prix p_1 de p_1^o à p_1'. Une estimation de l'équivalent monétaire par la différence du surplus marshallien consiste à estimer, pour chaque niveau de prix, le nombre de personnes dont le prix critique p_1^* est supérieur à p_1, c'est-à-dire le nombre de personnes qui consommaient l'alternative 1 au prix p_1, et les compenser du montant de l'augmentation de prix Δp_1. Ceci revient à prendre l'intégrale de la demande probabiliste pour mesurer le surplus, i.e. :

(8.68) $$SM = \int_{p_1^o}^{p_1'} \Pi_1(p_1, p_2, y)\cdot dp_1$$

Ceci implique que l'effet revenu soit négligeable, i.e., que la compensation donnée aux gens n'affecte pas leur probabilité de choix. Lorsque l'effet revenu ne peut être considéré comme négligeable, le cadre d'analyse de l'utilité aléatoire permet d'obtenir des mesures hicksiennes d'équivalents monétaire . On peut évaluer la distribution de p_1^* pour chaque niveau de $y = y^o + \Delta p_1$. Donc, la distribution de p_1^* peut être redéfinie pour chaque incrément infinitésimal de p_1, tenant compte de la compensation. Ainsi, la proportion de la population qui consomme l'alternative 1 après chaque augmentation infinitésimale de prix p_1 est :

(8.69) $$\Pi_1(p_1 + \Delta p_1, y + \Delta p_1) = \Pr[u(p_1 + \Delta p_1, y + \Delta p_1) \geqslant u(p_2, y + \Delta p_1)].$$

Donc, la mesure hicksienne est donnée par :

(8.70) $$EM = \int_{p_1^o}^{p_1'} \Pi_1(p_1, p_2, y+\Delta p_1)\cdot dp_1$$

Pour les spécifications de fonctions d'utilité indirecte du type de celles de l'équation (5.21), on devra évaluer numériquement l'intégrale

$$\int_{p_1^o}^{p_1'} \frac{1}{1 + \exp(K_1 - K_2) + \beta\left(\frac{(p_1 - p_2)}{y + p_1 - p_1^o}\right)} dp_1 \tag{8.71}$$

où K_1 et K_2 résument les termes constants et la contribution des caractéristiques qui ne changent pas.

Cette mesure s'accorde avec la théorie exposée dans la section précédente. On y a vu que la compensation à donner à un individu i lorsque $p_1^o < p_{1i}^* < p_1'$, est le montant $p_{1_i}^*(p_2, y) - p_1^o$. Or, la probabilité qu'un individu i choisi au hasard ait un $p_1^* = p_{1i}^*$ est donnée par la fonction $\Pi_1(p_1, p_2, y)$. Pour une augmentation de p_1^o à p_1', la compensation globale à donner à la population est donc la fonction de distribution cumulative de p_1^* entre p_1^o et p_1', soit $\int_{p_1^o}^{p_1'} \Pi_1(p_1, p_2, y).dp_1$.

Or, le calcul d'une mesure hicksienne de la VC implique qu'à chaque incrément de prix, l'individu soit compensé de façon à maintenir son niveau d'utilité initial [voir chapitre deux].

Ainsi, à chaque augmentation infinitésimale de prix, l'ensemble des individus consommant l'alternative 1 sera compensé d'un montant dp_1, modifiant la valeur de leur fonction de choix en conséquence. D'où la mesure hicksienne de la VC donnée en (8.70).

8.5 Comparaison avec les autres mesures de compensation

Dans le contexte de l'utilité aléatoire, on introduit la compensation directement dans la fonction de choix en modifiant le revenu du montant de la différence de prix. Il s'agit d'évaluer l'intégrale

$$\text{(8.72)} \qquad EM = \int_{p_3^o}^{p_3'} \Pi_3(p_3,\ y - p_3^o + p_3)\cdot dp_3$$

La fonction $\Pi_3(p_3,\ y - p_3^o + p_3)$ est l'équivalent de la demande compensée pour l'alternative 3. Pour la spécification donnée par le modèle CSI, soit:

$$\text{(8.73)} \qquad \Pi_3(\underline{p},\ y) = \frac{\exp[K_3 + (\alpha/y)\cdot p_3]}{\sum_{i=1}^{3} \exp[K_i + (\alpha/y)\cdot p_i]}$$

l'intégrale a été évaluée à l'aide de l'approximation de Simpson.

Cette méthode consiste à diviser le chemin d'intégration en n intervalles et effectuer le calcul à l'aide de la formule :

$$\int_a^b f(x)\cdot dx \simeq \frac{(b-a)}{n}\,[f(x_o) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots$$
$$\ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Pour 4 intervalles on a obtenu le résultat:

$$EM = \underline{0.0167703218}$$

L' augmentation à 10 intervalles n'a pas augmenté la précision de ce résultat.

Cette méthode donne un résultat plus élevé que celui de la méthode de Hau, mais demeure inférieur à celui de la mesure de variation compensatoire de Small et Rosen. (Voir chapitre sept)

Pour vérifier la précision du calcul de l'intégrale par la méthode de Simpson, nous avons effectué le calcul de l'intégrale (8.73) mais en maintenant le revenu y à son niveau initial, y^o. Il n' a suffi que de deux intervalles pour donner le résultat exact déja calculé au chapitre sept pour la mesure marshallienne su surplus, soit :

$$VC = 0.0167711052.$$

Afin de vérifier que les différences entre les différentes méthodes ne sont pas dues à des erreurs d'approximation, nous avons refait tous les calculs pour une augmentation de 10 fois le tarif de l'alternative 3, soit une augmentation de prix de $0.471 à $4.71. Les résultats sont donnés dans le tableau 8.1

Tableau 8.1 Equivalents monétaire

Small et Rosen		$\doteq$ 0.4897344651
Hau		= 0.4853093666
Intégration numérique	y fixe:	0.4897344289 (n=10)
	y varie selon p_3:	0.5011604781

On remarque que, cette fois, l'intégration de la demande compensée donne un résultat plus élevé que l'intégrale de la demande non compensée. L'explication est que, pour des prix très élevés de l'alternative 3, l'effet revenu devient positif. Une estimation de mesure de compensation pour une telle augmentation de prix est très peu fiable: la fonction de choix estimée n'est qu'une approximation locale de la vraie fonction de choix.

Chapître IX

Conclusion

Il existe deux façons d'aborder l'analyse de la demande en contexte de choix discret. La première est de postuler que les individus ont une connaissance parfaite de leur fonction d'utilité et que l'analyste ne peut déduire de telles fonctions à partir des choix observés qu'à une erreur près. La seconde est de postuler que le comportement individuel est fondamentalement aléatoire, c'est-à-dire que l'incertitude quant à l'ordonnancement des choix se situe au niveau individuel.

Les deux approches mènent au même résultat. La première approche, dite de l'utilité aléatoire, implique un choix déterministe de l'alternative au niveau individuel, donc des fonctions de dépense définies pour chaque individu. La méthode d'évaluation du bien-être suite à un changement de prix et/ou de qualité consiste à agréger les fonctions de dépense individuelles et à se servir de l'identité de Roy et de la fonction de choix pour représenter la dérivée de la fonction de dépense agrégée. On obtient ainsi, pour un changement fini des prix et qualités, un estimé de la variation de la dépense par l'intégrale de la fonction de demande probabiliste.

La seconde approche, dite de l'utilité constante ou de l'espérance d'utilité, revient à exprimer les probabilités immédiatement au niveau des utilités marginales. On obtient ainsi des versions stochastiques du lemme de Sheppard et de l'identité de Roy. En se servant du fait que la dérivée de l'utilité espérée correspond, pour des spécifications de fonctions d'utilité avec une forme additive des termes d'erreur, à la demande probabiliste, on retrouve, par l'intégration du rapport de cette demande probabiliste et de l'utilité marginale de la mannaie, l'expression donnant l'évaluation de l'équivalent monétaire d'un changement des arguments de la fonction d'utilité.

Cette expression pour la mesure d'équivalent monétaire est déjà connue sous le nom de coût inclusif, ou coût représentatif d'un ensemble de choix. Pour que le coût inclusif, c'est-à-dire la sommation, du vecteur de caractéristique initial au vecteur de caractéristique final, de la fonction de choix puisse être interprété comme une mesure d'équivalent monétaire, la spécification des fonctions d'attraction à la base des fonctions de choix devra être soumise à certaines règles.

Ainsi, à moins de postuler un effet revenu négligeable et une utilité marginale de la monnaie constante, on devra considérer les fonctions d'attraction propres à chaque alternatives comme de véritables fonctions d'utilité conditionnelle et veiller à ce que, notamment, le revenu apparaisse comme argument de chacune de ces fonctions et que la propriété d'homogénité de degré zéro en $\underline{p}$ et en y soit respectée.

Nous avons comparé les mesures de bien-être suivant ces différentes approches en se servant des paramètres estimés d'une étude de choix modal. Etant donné que la valeur de l'élasticité-prix de l'alternative dont on change le coût est très faible, l'évaluation marshallienne du surplus est très proche de l'évaluation hicksienne. L'exercice a cependant fait valoir que la dérivation d'une mesure hicksienne du surplus avec des modèles de choix discret est théoriquement posible et donne des résultats crédibles, à condition de prendre soin d'exprimer de façon cohérente les unités de mesure de prix et de revenu dans les spécifications des utilités indirectes. A cause de l'importance cruciale de la valeur relative des paramètres de la fonction de choix empirique et de la nécessité de considérer le coût de chaque alternative comme un coût total, il sera préférable, pour la mesure du surplus en contexte de choix discret, d'estimer des modèles de choix spécialement spécifiés pour un tel usage.

Annexe A

1 Modèles de choix multinominaux

On peut généraliser les modèles vus dans le chapitre trois aux cas où le choix porte sur plusieurs alternatives différentes. La probabilité de choisir l'alternative j parmi l'ensemble de choix est celle des équations (3.8) soit

$$P(j) \equiv \pi_j = \Pr[u_j(\underline{b}_j, \underline{s}, \varepsilon) \geqslant u_k(\underline{b}_k, \underline{s} \ ), \ \forall k \in A]^4$$

Comme pour le choix binaire, l'utilité de chaque alternative est décomposée en un élément déterministe et un élément aléatoire, de sorte que:

$$(A\text{-}2) \qquad \pi_j = Pr[V_j + \varepsilon_j \geqslant V_k + \varepsilon_k, \quad \forall k \in (1,\ldots, m)]$$

$$= Pr[\varepsilon_k \leqslant V_j - V_k + \varepsilon_j, \quad \forall k \in (1,\ldots, m)]$$

Le modèle de choix multinominal sera dérivé à partir d'hypothèses sur la fonction de distribution jointe des erreurs, $f(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$.

1.1 Probit multinominal

Si $\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m]$

est distribué selon une normale multivariée,avec un vecteur de moyennes [0, ... , 0] et une matrice variance-covariance non-singulière $\sum_{\bar{\varepsilon}}$ d'ordre $m \times m$, on obtient le modèle Probit multinominal.

L'expression décrivant le modèle probit lorsque le nombre d' alternatives augmente au delà de deux devient beaucoup plus complexe.

Définissons:

$$\varepsilon_n^j = \varepsilon_j - \varepsilon_n \qquad n = (1, \ldots , j-1, j+1, \ldots , m)$$

= les m-1 éléments du vecteur des termes de différence des erreurs,

I_j = matrice d'ordre $m \times m-1$ obtenue en éliminant la j^e colonne de la matrice identité négative $-I = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \emptyset \\ & & -1 & \\ & \emptyset & & \ddots \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{m \times m}$

et en remplaçant chaque élément de la j^e ligne par des 1

Ω_j = matrice d'ordre $m-1 \times m-1$ obtenue par:

$$\Omega_j = I_j' \cdot \Sigma_{\varepsilon} \cdot I_j$$

Alors, le modèle Probit multinominal est :

$$(A\text{-}3) \qquad \pi_j = \int_{-\infty}^{V_1 - V_j} \cdots \int_{-\infty}^{V_{j-1} - V_j} \int_{-\infty}^{V_{j+1} - V_j} \cdots \int_{-\infty}^{V_m - V_j} f(\underline{r} \mid \underline{0}, \Omega_j)\,\underline{dr}$$

où

$\underline{dr} = dr_1 \cdot dr_2 \cdot \ \ldots \ \cdot dr_{j-1} \cdot dr_{j+1} \cdot \ \ldots \ \cdot dr_m$, r étant la variable d'intégration,

et $\quad f(\underline{r} \mid \underline{0}, \Omega_j) = (2\pi \mid \Omega_j \mid)^{(m-1)/2} \cdot \exp[\, - \tfrac{1}{2}\, \underline{r}' \Omega_j^{-1} \underline{r}\,]$

est la fonction de densité normale multivariée.

L'évaluation de la probabilité π_j requiert l'évaluation d'une intégrale de m-1 dimensions qui ne peut être exprimée sous forme fermée. Bien qu'il existe des méthodes de solution telle l'aproximation de Clark [Voir Clark(1961), Daganzo (1979) et Maddala (1983)] consistant à prendre successivement la distribution du maximum de deux variables normales multi-variées et à l'insérer dans la distribution, les problèmes de computation demeurent énormes: même dans l'état actuel de développement des techniques informatique, l'évaluation des probabilités pour $m \geqslant 5$ est très peu fiable, ce qui fait qu'en pratique le modèle Probit multinominal est peu utilisé.

1.2 Logit multinominal

L'avantage du modèle Logit sur le modèle Probit est de pouvoir s'exprimer sous forme fermée, c'est-à-dire sous une forme n'impliquant pas le calcul sur des intégrales. Cependant, cet avantage se paie un certain prix, comme nous le verrons plus loin.

Pour pouvoir dériver le Logit, nous énonçons d'abord les propriétés de la distribution Gumbell (tirées de Ben-Akiva, Lerman (1985), p. 104-106, Domencich, McFadden (1975), p. 63-64). Soit une variable aléatoire ε distribuée selon la fonction Gumbell, i.e.;

$$\varepsilon \sim G(\eta, \mu)$$

où η est un paramètre de location et μ un paramètre de dispersion. Alors la fonction cumulative est:

$$F_G(\varepsilon) = \exp[-\exp(-\mu(\varepsilon - \eta)] \tag{A-4}$$

et la fonction de distribution est:

$$f_G(\varepsilon) = \exp(-\mu(\varepsilon - \eta))\cdot\exp[-\exp(-\mu(\varepsilon - \eta))] \tag{A-5}$$

Les propriétés de cette distribution sont les suivantes:

1- Le mode, i.e.: la valeur de ε pour laquelle $f_G(\varepsilon)$ atteint un maximum, est η

2- La moyenne est $E(\varepsilon) = \eta + \gamma/\mu$
avec $\gamma = 0.577\ldots$ = constante d'Euler

3- La variance est $\pi^2/6\mu^2$

4- La transformation linéaire de ε, soit $\varepsilon' = \alpha_o\varepsilon + \alpha_1$ où $\alpha_0 > 0$ et α_1 sont deux constantes réelles, est distribué Gumbell selon:
$\varepsilon' = (\alpha_o\varepsilon + \alpha_1) \sim G[(\alpha_o\eta + \alpha_1),\ (\mu/\alpha_o)]$

5- Soit $\varepsilon_1 \sim G(\eta_1, \mu)$, $\varepsilon_2 \sim G(\eta_2, \mu)$ et $\eta^* = (\eta_1 - \eta_2)$ alors la fonction cumulative de la différence $\varepsilon^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ est:

$$F(\varepsilon^*) = \frac{1}{1 + \exp[-\mu((\eta_1 - \eta_2) + \varepsilon^*)]}$$

6- Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ un ensemble de m variables aléatoires indépendantes distribuées Gumbell selon:
$\varepsilon_1 \sim G(\eta_1, \mu)$, $\varepsilon_2 \sim G(\eta_2, \mu)$, ..., $\varepsilon_m \sim G(\eta_m, \mu)$,
alors la variable aléatoire $\varepsilon^+ = \max(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ est distribuée Gumbell selon:

$$\varepsilon^+ \sim G\left(\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{m} \exp(\mu \cdot \eta_i),\ \mu\right)$$

L'équation A-1 donnant la probabilité de choisir l'alternative j parmi un ensemble de m alternatives distinctes peut être réécrite:

$$(\text{A-6}) \qquad \Pi_j = \Pr[V_j + \varepsilon_j \geqslant \max_{\substack{k \neq j \\ k \in (1 \ldots m)}} (V_k + \varepsilon_k)]$$

$$\text{Soit: } v_j^* = \max_{\substack{k \neq j \\ k \in (1 \ldots m)}} (V_k + \varepsilon_k)$$

Si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées Gumbell, i.e.:

$$\varepsilon_k \sim G(0, \mu), \quad \forall k \in (1, \ldots, m)$$

alors, de la propriété 4:

$$(V_k + \varepsilon_k) \sim G(V_k, \mu) \quad \forall k \in (1, \ldots, m)$$

et, de la propriété 6:

$$v_j^* \sim G\left(\frac{1}{\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \exp(\mu V_k), \mu\right)$$

Utilisant à nouveau la propriété 4; on définit V_j^* et ε_j^* tels que

$$(\text{A-7}) \qquad v_j^* = V_j^* + \varepsilon_j^*$$

avec

(A-8) $$V_j^* = \frac{1}{\mu} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \exp(\mu V_k)$$

et

$$\varepsilon_j^* \sim G(0, \mu)$$

Réécrivant A-8

(A-9) $$\pi_j = \Pr[(V_j^* + \varepsilon_j^*) - (V_j + \varepsilon_j) \leq 0]$$

on obtient, par la propriété 5:

(A-10) $$\pi_j = \frac{1}{1 + \exp(\mu(V_j^* - V_j))}$$

$$= \frac{\exp \mu V_j}{\exp \mu V_j + \exp \mu V_j^*}$$

De A-8,

(A-11) $$\pi_j = \frac{\exp \mu V_j}{\exp \mu V_j + \exp (\ln \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} \exp \mu V_k)}$$

$$= \frac{\exp \mu V_j}{\sum_{k=1}^{m} \exp \mu V_k}$$

[Ben-Akiva, Lerman (1985), p. 106]

Donc, contrairement au modèle Probit, on doit faire l'hypothèse de l'indépendance des termes d'erreur, i.e.:

(A-12) $$\mathrm{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_k) = 0$$

d'où

(A-13) $$\mathrm{Var}(v_j - v_k) = \pi^2/3\mu^2 = \text{constante} \quad \forall\, j,k \in (1,\ldots m)$$

Cette hypothèse signifie que la variation dans l'évaluation faite par chaque individu de la différence d'utilité entre une alternative i et une alternative j est indépendante de la variation de la différence d'utilité entre cette alternative i et une autre alternative k. Autrement dit, cela signifie que la partie non-stochastique de l'utilité est spécifiée de telle sorte que les caractéristiques non-observées des différentes alternatives ne soient pas correlées.

Il découle de ce fait la propriété de l'indépendance des alternatives non-pertinentes (IANP). Cette propriété établit que, pour tout individu, le ratio des probabilités de choix de deux alternatives quelconques ne dépend que des caractéristiques observées de ces deux alternatives. C'est-à-dire:

(A-14) $$\frac{\pi_i}{\pi_j} = \frac{\exp\mu V_i \,/ \sum_k \exp\mu V_k}{\exp\mu V_j \,/ \sum_k \exp\mu V_k} = \exp[\mu(V_i - V_j)]$$

$$= \exp(\mu\underline{\theta}(\underline{q}_i - \underline{q}_j))$$

d'où $$\pi_j/\pi_k \perp \underline{q_i} \quad \forall\, i \neq j \neq k \in (1,\ldots,m)$$

Il n'existe aucune raison à-priori pour justifier une telle indépendance. Dans certains cas, elle est hautement improbable. On peut illustrer facilement cette propriété à l'aide d'un cas extrême souvent cité. Supposons que π_1 représente la proportion d'une population homogène qui choisit l'automobile comme mode de transport, π_2 la proportion de cette population qui choisit un système d'autobus peint en bleu et qu'on estime les paramètres liés aux caractéristiques de ces deux modes. Alors l'ajout d'une troisième alternative consistant, par exemple, en un système d'autobus identique au précédent dans toutes ses caractéristiques mais peint en rouge devrait, selon la propriété IANP, laisser inchangé le rapport π_1/π_2. Par exemple, si $\pi_1 = .5$ et $\pi_2 = .5$, l'ajout de ce troisième mode partagera la population selon $\hat{\pi}_1 = .33$, $\hat{\pi}_2 = .33$, et $\hat{\pi}_3 = .33$; alors qu'intuitivement , l'absence de modification des caractéristiques pertinentes du choix autobus devrait partager la population selon $\hat{\pi}_1 = .5$, et $\hat{\pi}_2 = \hat{\pi}_3 = .25$

2. Elasticités du Logit

La propriété IANP du Logit se reflète aussi dans la mesure des élasticités. Soit une spécification linéaire de la fonction d'utilité conditionnelle.
L'élasticité de la probabilité de choisir une alternative j par rapport à un changement dans la s-ième caractéristique s'exprime par:

$$E_{\pi_j, q_{js}} = \frac{\partial \pi_j}{\partial q_{js}} \cdot \frac{q_{js}}{\pi_j} \tag{A-15}$$

$$= \frac{\partial \pi_j}{\partial V_j} \cdot \frac{\partial V_j}{\partial q_{js}} \cdot \frac{q_{js}}{\pi_j}$$

$$= \pi_j(1-\pi_j) \cdot \beta_s \cdot \frac{q_{js}}{\pi_j}$$

$$= (1-\pi_j) \cdot \beta_s \cdot q_{js}$$

L'élasticité croisée de la probabilité de choisir une alternative j par rapport à un changement de la s ième caractéristique dans une autre alternative i est:

$$E_{\pi_j, q_{is}} = \frac{\partial \pi_j}{\partial q_{is}} \frac{q_{is}}{\pi_j} \tag{A-16}$$

$$= \frac{\partial \pi_j}{\partial V_i} \frac{\partial V_i}{\partial q_{is}} \frac{q_{is}}{\pi_j}$$

$$= -\pi_i \cdot \pi_j \cdot \beta_s \frac{q_{is}}{\pi_j}$$

$$= -\pi_i \cdot \beta_s \cdot q_{is}$$

Donc, le changement en pourcentage de la probabilité de choisir une alternative j induit par un changement dans les caractéristiques d'une autre alternative k est identique pour toute alternative j telle que $j \neq k$. Ce fait découle aussi de la propriété IANP du Logit. En effet, puisque le rapport π_i/π_j ne dépend que des caractéristiques de l'alternative i et de l'alternative j, alors:

$$\text{(A-17)} \quad \frac{\partial \pi_i/\pi_j}{\partial q_k} = 0 = \frac{\pi_i/\pi_j}{q_k} \cdot \frac{\partial \ln(\pi_i/\pi_j)}{\partial \ln(q_k)} = \frac{\pi_i/\pi_j}{q_k} \cdot \left[\frac{\partial \ln(\pi_i)}{\partial \ln(q_k)} - \frac{\ln(\pi_j)}{\ln(q_k)}\right]$$

$$\longrightarrow E_{\pi_i, q_k} = E_{\pi_j, q_k}$$

L'hypothèse de l'indépendance des termes d'erreur liés aux utilités conditionnelles des différentes alternatives n'est acceptable que dans la mesure où l'individu considère chacune de ces alternatives comme totalement indépendantes. Cela n'est visiblement pas le cas dans l'exemple de l'autobus bleue-autobus rouge, où l'ensemble des caractéristiques non-observées constituant la partie aléatoire de l'utilité présente beaucoup plus de similitudes d'un individu à l'autre en ce qui concerne l'autobus bleue et l'autobus rouge qu'en ce qui concerne l' auto et un système d'autobus, d'où, présumément:

$$\text{(A-18)}\quad Var(\tilde{u}_{auto} - \tilde{u}_{bus\ bleu}) = Var(\tilde{u}_{auto} - \tilde{u}_{bus\ rouge}) \gg Var(\tilde{u}_{bus\ bleu} - \tilde{u}_{bus\ rouge})$$

Donc, lorsqu'on aura des raisons de croire qu'il existe des facteurs communs à un sous-groupe d'alternatives i.e.: lorsque la matrice variance-covariance des erreurs n'est pas une matrice diagonale, on utilisera plutôt le modèle probit. Cependant, le modèle logit peut-être adapté à certains cas où les éléments d'un ou plusieurs sous ensembles de l'ensemble de choix présentent des caractéristiques communes. La technique consiste à poser une utilité conditionnelle pour chacun des différents sous-ensembles comme étant"représentative" de l'utilité conditionnelle de ces sous-ensembles. [Voir Daly et Zachary (1978), Williams (1977), Ben-Akiva et Lerman (1985), chap. 10]

Annexe B

(B1) On a

$$\frac{\partial EU}{\partial V_j} = \frac{\partial}{\partial V_j} \int_{\underline{x}} [\max_j (V_j + x_j)] \cdot f_\varepsilon(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$$

où $f_\varepsilon(\underline{x})$ est la densité jointe des termes d'erreur.

Soit $\Gamma_j(\underline{\varepsilon}, \underline{V})$ un indice tel que:

$$\Gamma_j(\underline{\varepsilon}, \underline{V}) = \begin{cases} 1, \text{ si } V_j + \varepsilon_j > V_k + \varepsilon_k, \ \forall j \neq k \\ 0, \text{ autrement.} \end{cases}$$

(B 2) L'expression(B-1) peut se simplifier comme suit:

$$\int_{\underline{x}} \frac{\partial}{\partial V_j} \left[\max_j (V_j + x_j) \right] f_\varepsilon(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$$

$$= \int_{\underline{x}} \Gamma_j (\underline{x}, \underline{V}) \cdot f_\varepsilon(\underline{x}) \cdot \underline{dx}$$

Définissons $\underline{\xi} = [(x_1 - x_j), (x_2 - x_j), \ldots, (x_J - x_j)]$, alors:

(B 3)
$$\frac{\partial EU}{\partial V_j} = \int_{-\infty}^{V_1 - V_j} \cdots \int_{-\infty}^{V_{j-1} - V_j} \int_{-\infty}^{V_{j+1} - V_j} \cdots \int_{-\infty}^{V_J - V_j} f_\varepsilon(\underline{\xi}) \, d\underline{\xi}$$

Cette expression, lorsque $f_\epsilon(\cdot)$ est une fonction de distribution normale, est identique à celle donnée en appendice A (A 3) pour la probabilité π_j du modèle probit. Mais puisque la relation (B 2) ne dépend pas d'une forme particulière de la fonction de distribution des erreurs, elle reste valide pour l'ensemble des modèles multinominaux dérivés d'un modèle de maximisation de l'utilité. Si les erreurs sont distribués selon une fonction gumbell, comme dans le cas du logit, il est facile de vérifier ce résultat. En ce cas, v_j est aussi distribué gumbell selon $v_j \sim G(V_j, \mu)$, où μ est un paramètre de dispersion. Alors, selon la propriété 6 des fonctions de distribution gumbell tel qu'énoncé dans l'appendice A, l'expression $\max_j [v_j]$ est une variable aléatoire dont la moyenne est $\frac{1}{\mu}\sum_j \exp(\mu V_j) + \frac{\gamma}{\mu}$

où γ est la constante d'Euler.

La dérivée de cette expression par rapport à V_j donne la probabilité de choisir l'alternative j, soit π_j. Cette probabilité est indépendante de l'échelle des fonctions d'utilité dans la mesure où les termes d'erreur sont indépendants de la valeur des arguments de $V_j(\cdot)$.

REFERENCES

Aigner D.J., S.M. Goldfied (1974). "Estimation and Prediction from Aggregate Data when Aggregate are Measured more Accurately than their Components", in Econometrica, 92:113-134.

Ben-Akiva M. et S. Lerman (1985). Discrete choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand, MIT, Cambridge, Mass.

------------- (1978). "Disaggregate Travel and Mobility Choices Models and Measures of Accessibility", in Behavioral Travel Modelling, ed. par D. Hensher et P. Stopher, London, Croom-Helm.

Ben-Akiva M., L. Lerman, W.A.Jessiman, R.L. Albright et R.E. Nestle (1976). A Behabioral Analysis of Automobile Ownership and Modes of Travel, Vol. I-4, USDOT, Office of the Secretary for Policy Planning and International Affairs, FHWA, Washington, D.C.

Ben-Akiva (1973). Structure of Passenger Travel Demand Models, Thèse de Ph.D., Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, Mass.

Clark C. (1961). "The Greatest of a Finite Set of Random Variables", Operation Research (Mars-Avril)

Daganzo C. (1979). Multinominal Probit: The Theory and Application to Demand Forecasting, New-York, Academic Press.

Dalvi Q. (1978). "Behavioral Modelling, Accessibility, Mobility and Needs: Concepts and Measurements, in Behavioral Travel Modelling, ed. Par Hensher D.A. et P.R. Stopher, Croom Helm, London.

Daly A. J. et S. Zachary (1978). "Improved Multiple Choice Models", in The Determinants of Travel Choice, ed. par D. Hensher et Q. Dalvi, New-York, Praeger.

Debreu G. (1959). Theorie of Value, New-York, Wiley.

Domencich, T. et D. McFadden (1975). Urban Travel Demand, A Behavioral Analysis, North-Holland, Amsterdam.

Grundfeld Y., Z. Griliches (1960). "Is Aggregation Necessarily Bad", in Review of Economics and Statistics, 42:1-12.

Hanneman, M. W. (1984 a). "Welfare Evaluations in Contingent Valuation Experiments with Discrete Responses" American Journal of Agricultural Economics, 66:332-41.

----------------(1984 b). "Discrete/Continuous Models of Consumer Demand", Econometrica, 52 (3):541-60.

Harris, A. et J. Tanner (1974). Transport Demand Models Based on Personal Characteristics, TRRL Supplementary Report 65 UC, Department of the Environment, United Kingdom.

Hau, T.D.K. (1985). "A Hicksian Approach to Cost-Benefit Analysis with Discrete-Choice Models," Economica 52:479-90.

Heckman J. (1979). "Sample Bias as a Specification Error", in Econometrica, 47:153-162.

Kmenta, J. (1971). Elements of Econometrics, New-York, MacMillan.

Laferrière, R. (1983). Une étude sélective des mesures de bien-être d'un individu, CRDE, Cahier 8324, Université de Montréal.

Lancaster, K. (1966). "A New Approach to Consumer Theory", Journal of Political Economy, 74:132-57.

Maddala G.S. (1983). Limited-Dependent and Qualitative Variables in Econometrics, Cambridge view Press, Cambridge.

Mäler, K. (1974). Environmental Economics, Baltimore, John Hopkins.

McFadden, D. (1974)."The Demand for Transport Journal of Public Economics, 6:

---------- (1973) "Conditional Logit Analysis of Qualitative Choice Behavior", in Frontiers of Econometrics ed. par P. Zarembka, New-York, Academic Press.

McFadden, D., A.P. Talvitie et al. (1977).Demand Model Estimation and Validation, ITS Special Report, UCB-ITS-SR-77-9, Urban Travel Demand Forecasting Project, Phase I, Final Report Series, Vol. V, UCB, Berkeley.

McKenzie, G. et I. F. Pearce (1982). "Welfare Measurement-A Synthesis", American Economic Review, 72:

Neuberger, H. (1971). "User Benefit in the Evaluation of Transport and Land Use Plans", Journal of Transport Economics and Policy, 5:52-75.

Parzen, E. (1960). Modern Probability Theory and its Applications, New-York, John Wiley & Sons.

Quirk, J. et R. Saposnik (1968) Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, New-York, McGraw-Hill.

Ranger, L. (1974) L'Evaluation économique des projets d'investissements d'infrastructures dans le secteur des transports routiers, Memoire de maîtrise, Université de Montréal.

Small, K. et H. Rosen (1981). "Applied Welfare Economics with Discrete Choice Models", Econometrica 49:105-29.

Train, K. et D. McFadden (1978). "The Good-Leisure Tradeoff and Disaggregate Work Trip Mode Choice Models", Transportation Research 12:349-53.

Van Der Tak, H. (1971). The Economic Benefits of Road Transport Projects, World Bank Staff Occasional Paper, no. 13, John Hopkins Press, Baltimore.

Varian, H.R. (1984). Microeconomic Analysis, New-York, Norton.

Viton, P. A. (1985). "On the Interpretation of income Variables in Discrete-Choice Models", Economics Letters 17:203-6

Williams, H.C.W.L (1977). "On the Formation of Travel Demand Models and Economic Evaluation Measures of User Benefit", Environment and Planning 9:285-344.

Yatchew, A. J. (1984). "Generalising the Composite Commodity Theorem", Economics Letters 16:15-21